T.C.
ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ANABİLİM DALI

İLKÖĞRETİM 4-7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN DENK KESİRLERİN SEMBOLİK VE GRAFİKSEL TEMSİLLERİNİ İLİŞKİLENDİRME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Hazırlayan
Levent ERTUNA

Danışman
Doç. Dr. Zülbiye TOLUK UÇAR

Bolu-2013

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE,

Levent ERTUNA'ya ait "**İlköğretim 4-7. Sınıf Öğrencilerinin Denk Kesirlerin Sembolik ve Grafiksel Temsillerini İlişkilendirme Becerilerinin İncelenmesi**" adlı çalışma, jürimiz tarafından Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir. **19/09/2013**

Akademik Unvan, Adı ve Soyadı		**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Zülbiye TOLUK UÇAR	....
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Hakan YAMAN	....
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÇETİN	....

Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nün Onayı

Prof. Dr. Soner DURMUŞ
Enstitü Müdürü

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum, "**İlköğretim 4-7. Sınıf Öğrencilerinin Denk Kesirlerin Sembolik ve Grafiksel Temsillerini İlişkilendirme Becerilerinin İncelenmesi**" başlıklı çalışmanın yazılmasında, bilimsel ve etik kurallara uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda atıfta bulunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin tamamının ya da bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitede bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim. 19/09/2013

Levent ERTUNA

ABSTRACT

AN INVESTIGATION OF ELEMENTARY SCHOOL 4- 7TH GRADE STUDENTS' ABILITY TO LINK EQUIVALENT FRACTIONS' SYMBOLIC AND GRAPHICAL REPRESENTATIONS

Levent ERTUNA

Master of Thesis
Department of Elementary Education
Mathematics Education
Supervisor: Doç. Dr. Zülbiye TOLUK UÇAR
September - 2013, xiv + 101 Pages

The aim of this study was to determine elementary school 4-7th grade students' ability to link equivalent fractions' symbolic and graphical representations.

The sample of the study consisted of 4, 5, 6 and 7th grade elementary school students in 2010-2011 academic year in the district of Geyve in Sakarya Province. The pilot study was implemented with 257 students from three elementary schools and the main study was conducted with 1111 students from 11 elementary schools.

Representational Fluency Test (RFT) developed by Niemi (1996) was used as a data collection tool in the study. The RFT included items involving regional areas, line segments, and set representations to assess the part–whole meaning and those involving number lines to assess the measure meaning of rational number. In the test, there were 5 different fraction symbol which were simple and equivalent fractions. There were 18 graphical representation including regional, line segment, set and number line with distractors for each of the five fractions. In RFT, there were 90 graphical representations in total. Of a total of 90 items, 35 were distractors associated with each graphical representation except for set representation. The content validity of the test was determined by expert opinions and the reliability of the test was assured bu calculating KR-20 internal consistency coefficient. The values of the coefficient were 0,933 in the pilot study and 0,928 for the main study.

The 90 items were dichotomously scored. Because the numbers of items were unequal across the categories, in all analyses the raw scores were divided by their own maximum possible scores. This scoring places all scales in a similar 0 to 1 metric but does not alter the original scale distributions or correlations. Scores in the subcategories of the data collection tool and the scores of grade levels were compared. Non-parametric tests were used because the distribution of the scores in all categories and grade levels was not normal.

The results of the analyses showed that the students' performance to link equivalent fractions' symbolic and graphical representations changed significantly with respect to the representation type (region-line segment, region-number line, set-line segment, set-number line, line segment- number line) and with respect to simple and equivalent fractions. In the meantime, it was seen that as the classroom levels increased, the success rates in overall scores, representation types, except region-line segment, and simple and equivalent fractions increased.

The findings of the research were discussed in the light of literature review. This study fills the gap in mathematics education research related to the field of fraction subconstructs, representations and equivalences. Also, some suggestions were made for the researchers studying in the field of mathematics teaching. Suggestions for pre-service and in-service education designers and programme developers are included in terms of fair sharing, fractions' meanings, representations and equivalences.

Keywords: Fraction subconstructs, equivalence of fractions, multiple representations, representation of fractions

ÖZET

İLKÖĞRETİM 4-7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN DENK KESİRLERİN SEMBOLİK VE GRAFİKSEL TEMSİLLERİNİ İLİŞKİLENDİRME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Levent ERTUNA

Yüksek Lisans Tezi
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zülbiye TOLUK UÇAR
Eylül - 2013, xiv + 101 Sayfa

Bu çalışmanın amacı, ilköğretim 4-7. sınıf öğrencilerinin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin düzeyini belirlemektir.

Araştırmanın evrenini 2011 – 2012 eğitim öğretim yılı Sakarya ili Geyve İlçesi'nde ilköğretim okullarında okuyan 4., 5., 6. ve 7. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Bu araştırmaya pilot uygulamada 3 ilköğretim okulundan 257 öğrenci ve asıl uygulamada ise 11 okuldan 1111 öğrenci katılmıştır.

Veri toplama aracı olarak, bu çalışmada, Temsilsel Akıcılık Testi (TAT) kullanılmış olup test, kesirlerin parça-bütün ve ölçme anlamlarını; alan, sayı doğrusu, uzunluk ve küme temsillerini kullanarak ölçmektedir. Testteki maddelerde kesrin sade ve denk gösterimleri grafiksel olarak temsil edilmiştir ve ayrıca çeldiricilere de yer verilmiştir. TAT'da toplam 5 kesir sembolü için hazırlanmış 90 grafiksel temsil yer almaktadır. Testin kapsam geçerliliği için uzman görüşü alınmış olup güvenirliği içinde KR-20 iç tutarlılık katsayısı hesaplanmıştır. Bu değerler pilot uygulamada 0,933 asıl uygulamada ise 0,928 olarak hesaplanmıştır..

Verilerin analizinde araştırma problemlerine uygun olarak alt kategorilerdeki puan türleri ve sınıf düzeyleri farklılaşmalarını incelemek amacıyla karşılaştırma testleri kullanılmıştır. Veriler tüm kategorilerde ve sınıf düzeylerinde normal dağılmadığı için uygulanacak istatistiklerde parametrik olmayan yöntemler benimsenmiştir.

Yapılan analizler sonucunda öğrencilerin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin kesirlerin parça-bütün ve ölçme anlamlarında, kesirlerin farklı temsil türlerinde (Alan-Uzunluk, Alan-Sayı D., Küme-Uzunluk, Küme-Sayı D., Uzunluk-Sayı D.) ve kesrin sade ve denk gösterimlerinde farklılaştığı tespit edilmiştir. Bununla birlikte sınıf düzeyi arttıkça genel puanlarda, temsil türlerinde ise alan ve uzunluk temsili hariç diğer temsillerde, kesrin sade ve denk gösterimlerindeki başarının arttığı görülmüştür.

Araştırmanın bulguları literatürdeki bilgiler ışığında değerlendirilmiş, sonuç olarak ülkemiz literatüründe kesirlerin anlamları, temsilleri ve denkliği konularındaki çalışma eksikliği tam olarak giderilmese de ilgili literatüre katkı sağlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca matematik öğretimine araştırmacılara yönelik önerilerde bulunulmuştur. Matematik öğretimindeki eşit paylaşım, kesirlerin anlamları, temsilleri, denkliği konularına yönelik; hizmet öncesi ve hizmet içi eğitim tasarımcılarına ve program geliştiricilere sunulan öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Kesirlerin anlamları, kesirlerin denkliği, çoklu temsiller, kesirlerin temsilleri

Aileme…

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana akademik anlamda yeterlilik kazandıran, seçimlerimi destekleyen ve varlıklarıyla güven veren değerli yüksek lisans hocalarıma teşekkür ederim.

Gerek ders aşamasında gerekse tez aşamasında akademik gelişimime katkıda bulunan, tez sürecinde sabır ve özveriyle çalışmalarıma destek olan, değerli hocam, danışmanım Doç. Dr. Zülbiye Toluk Uçar'a sonsuz teşekkür ederim.

Tanıştığım günden beri benim için hiç bir yardımdan kaçınmayan, tezin hazırlanma sürecinde bana akademik ve manevi desteğini esirgemeyen Malik Durmaz'a ve her zaman desteğini yanımda hissettiğim Mutlu Çam'a teşekkürü bir borç bilirim.

Yaşamım boyunca yanımda olup hayat yolumdaki seçimlerimde en büyük destekçim olan, annem Nursel Ertuna'ya, babam Tuncay Ertuna'ya ve kardeşim Demet Ertuna'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

BÖLÜM I

1. Giriş

Toplumların ilerlemesi ve refah düzeyinin yükselmesi artan bilgi birikimi ve bilgiye paralel olarak gelişen teknoloji ile açıklanabilir. Teknolojideki hızlı gelişimi destekleyen bilimin görevi olgular ve olaylar arasındaki bağları bulmaktır. Bunu yaparken oluşan niceliksel bağları açıklamada kullanılan en güvenilir araçlardan biri de matematiktir. Çünkü matematik insanlar için ortak düşünce aracı ya da Galileo'nunda ifade ettiği gibi doğanın kitabının yazıldığı bilimlerin dilidir (Galileo, 1623).

Yaşamın soyutlanmış biçimi olarak ifade edilen matematik, kökleri insanlık geçmişine dayanan ve yaşamla beraber gelişim gösteren bir bilimdir. Bu bağlamda matematiksel bilgilerin yer ve zamana bağlı olmadan kuşaktan kuşağa gelişerek aktarılması matematiksel iletişim için gerekli olan ortak bir dil ile mümkündür (Kılıç, 2009). Matematiksel iletişim öğeleri içinde işaret ya da işaretlerin oluşturduğu karakter ya da objeler olarak tanımlanan (Goldin ve Shreingold, 2001) "temsiller matematiğin ortak dilidir" (Piaget, 1967: 78).

Temsillerin matematik öğretiminde kullanılması öğrenciye matematiğin çekici ve güçlü tarafını anlamak için fırsat sunmaktadır (NCTM, 2000). Bu bağlamda Kaput (1998: 11) geleceğin matematik okuryazarlığında temsil kullanma becerisinin önemini "Geleceğin öğrencileri için verilen ilişkiler doğrultusunda bir temsil seçme ve bu aradaki ilişkilere göre bir temsil oluşturma ya da seçme becerisi, hesaplama becerisinden daha önemli olacaktır" şeklinde ifade etmiştir. Bununla birlikte çoklu temsillerin kullanımı derin ve esnek bir anlama sağlamanın dışında matematik eğitimin temel becerileri olan matematiksel iletişim, akıl yürütme ve problem çözme becerilerine de fayda sağladığı bilinmektedir (Cathcart, Pothier, Vance ve Bezuk, 2003; Montegue, 2008; Olkun ve Toluk-Uçar, 2004) .

Öğrenciler; fiziksel nesne, çizim, diyagram, sözel ifade ve sembolleri kullanarak kendi matematiksel düşüncelerini ve matematiksel süreçlerini ifade etmiş olurlar. Bu temsillerin kullanılması öğrencilerin hem kendi aralarında hem de öğretmenlerle arasında iletişimi sağlayarak öğrencilerin kendi matematiksel düşüncelerinin zihinsel şemalardaki bağlantılarını geliştirir (MEB, 2009; NCTM, 2000).

Öğrencilerin matematiği anlayabilmeleri, kendi düşünceleri hakkında akıl yürütmelerine bağlıdır. Bunun için matematikteki ilişkileri ve bağlarını kurarak sonuç çıkarmaları gerekir (Holmes, 1995). Bunun gerçekleşmesi ise eğitim öğretim ortamında öğrencilere düşündürücü sorular sorulması ve öğrencilerin farklı şekillerde istenen durumu ifade etmesi ile mümkündür (Olkun ve Toluk-Uçar, 2004). Bu ise öğrencilerin söz konusu matematiksel durumları farklı bağlamlarda görerek tanımaları ve dolayısıyla farklı temsilleri kullanmalarıyla mümkündür (Kılıç, 2009).

Problemin uygun temsil edilmesi problemi anlamada ve çözüm için stratejiler geliştirmede bir temel teşkil etmektedir. Polya (1957) problem çözme basamaklarının ilk aşamasında yer alan "problemi anlama" basamağında problem çözücüye rehberlik edilmesinin önemini vurgulamıştır. Bu rehberlik problem çözücünün sahip olduğu önceki bilgiler yoluyla sözel, sembolik, şekiller veya çizimler yoluyla temsil edilerek zihinde problemin yeniden şekillendirilmesini içerir (Polya, 1957). Başka bir ifade ile problemi temsil etmeden başarılı bir problem çözme mümkün değildir.

Temsillerin bazı şekilleri (diyagram, grafik, şema, sembolik ifade) uzun süredir matematik müfredatının bir parçası olmuştur. Küçük sınıf seviyelerinde öğrenciler; öğretmenlerinin ve yaşıtlarının kullandıkları temsilleri, matematiği anlamak için kullanırken orta seviyedeki sınıflarda temsiller bir matematiksel düşünceyi genişletmek, tasvir etmek, açıklamak ya da problem çözmek amacıyla kullanırlar (MEB, 2013; NCTM, 2000).

Temsiller dışında ilköğretim matematik ders programının önemli parçalarından birisi de kesirlerdir. Kesirler konusu ilköğretim matematik programında birinci sınıftan sekizinci sınıfa kadar sayılar konusu içerisinde sarmal yapı içinde farklı kazanımlarla yer almaktadır. Bu kazanımlar öğrencilerin kesirleri anlayabilmesi, yorumlayabilmesi ve farklı matematik konularında kullanabilmesini amaçlamaktadır (MEB, 2009). Bu amaçla İlköğretim Matematik Dersi Programı, öğrencilerin kesirlerin farklı anlamlarını ve denkliğini kavrayabilmelerini, kesirleri temsil edebilmelerini ve kesirle işlemler (toplama, çıkarma, çarpma, bölme, sıralama ve karşılaştırma) yapabilmelerini gereklilik olarak görmüştür (MEB, 2009). Bu açıdan bakıldığında kesirlerin anlamları, denkliği ve temsil edilmeleri ön plana çıkmaktadır.

Kesirler, çocuklara ilköğretim matematiğinde yer alan çoğu konudan daha zor ve karışık gelen konulardan biridir. Bunun sebeplerinden birisi kesirlerin sahip olduğu farklı anlamlardandır (Toluk, 2002). Rasyonel sayıların analizi, a/b şeklinde verilen bir rasyonel sayının problem ortamlarına göre farklı anlamlara (parça-bütün, bölüm, işlemci, oran ve ölçme) geldiğini ortaya çıkarmıştır (Behr, Wachsmuth, Post and Lesh, 1984; Ohlsson, 1988). Ortaya çıkan bu anlamlar kesirlerin hem kendi içerisindeki ilişkilerin oluşturulmasında hem de kesirlerin matematiğin diğer konuları ile olan bağlantılarının kurulmasında önemli bir yere sahiptir. Bundan dolayı Acar (2010) ilköğretim matematik müfredatında, kesrin farklı anlamlarının mümkün olduğunca öğrencilere sezdirilmesinin önemini ve konular arasında ilişkilendirmeler yapılması gerekliliğini vurgulamıştır.

Kesirlerin her bir farklı anlamı kesirlerde farklı konuların öğretilmesinde fayda sağlamaktadır. Örneğin kesrin "oran" anlamı içinde çarpımsal ilişkiyi belirten yapısıyla kesirlerin denkliğinin öğrenilmesi için önemli bir yere sahiptir (Kieren, 1993). Kesirlerin denkliği ise paydaların eşit olmadığı durumlarda kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerinde ve bununla birlikte kesirleri sırlama ve karşılaştırmada yararlanılan temel konulardan biridir (Altun, 2002; Behr, Khoury, Harel, Post ve Lesh, 1997).

Kesirlerin öğretiminde önemli olan konulardan biri de onların sözel, görsel, nesne, gerçek hayat durumu ve yazılı olarak ifadesini sağlayan temsillerdir. Kesirlere girişte bir takım temsillerin ve somut araçların kullanılması, henüz somut işlemler döneminde olan ilköğretim birinci kademe öğrencileri için (kesirleri somut hale getirdiğinden dolayı) kesir kavramının daha kolay öğrenilmesine ve öğrencilerin kesirlerle ilgili işlemleri daha kolay yapmalarına olanak sağlamaktadır (Kieren, 1993). Özellikle görsel temsiller öğrencilerin kesirlerle ilgili şemalarını oluşturulması ve şekillendirilmesi açısından gerekli olduğu için ilköğretim matematik öğretim programında birinci sınıftan itibaren somut nesne ve temsilin kullanımı desteklenmiştir (MEB, 2009).

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, ilköğretim 4-7. sınıf öğrencilerinin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin düzeyini belirlemektir.

1.2. Araştırmanın Problem Cümlesi

"İlköğretim 4-7. sınıf öğrencilerinin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri hangi düzeydedir?" sorusu bu araştırmanın problem cümlesidir.

Bu problem aşağıdaki alt problemlere ayrılmıştır.

İlköğretim 4-7. sınıf öğrencilerinin

1) Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri rasyonel sayıların parça bütün ve ölçme anlamına göre farklılık göstermekte midir?
2) Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri sınıf düzeylerine göre farklılık göstermekte midir?
3) Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri

grafiksel temsil türlerine (alan, küme, uzunluk ve sayı doğrusu) göre farklılık göstermekte midir?

4) Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri grafiksel temsil türlerinde (alan, küme, uzunluk ve sayı doğrusu) sınıf düzeyine göre farklılık göstermekte midir?
5) Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri sade ya da denk gösterim olmasına göre farklılık göstermekte midir?
6) Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri sade ve denk gösterimlerde grafiksel temsil türlerine göre farklılık göstermekte midir?
7) Kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri sade ve denk gösterimlerde sınıf düzeylerine göre farklılık göstermekte midir?

1.3. Araştırmanın Önemi

Temsiller, matematiksel kavramların algılanmasında ve ifade edilmesinde kullanılan araçlar olup, matematik öğretiminin vazgeçilmez öğelerinden biridir. Temsillerin kesirler konusunda kullanılması ise kesirlerin somutlaştırılarak öğrencilerin kesirler konusunda bilişsel şemalar oluşturmaları ve oluşan bu şemaları şekillendirmeleri açısından büyük bir öneme sahiptir.

İlgili literatür incelendiğinde kesirlerin farklı anlamları, denkliği ve temsilleri konularının ayrı ayrı incelendiği ya da bunların ikişerli veya üçerli olarak beraber ele alındığı çalışmalar bulunmaktadır. Kesirlerin anlamları ile kesirlerin temsillerini bir arada inceleyen çalışmalar (Contreras ve Martinez-Cruz, 2000) sınırlı sayıdadır. Kesirlerin denkliği ve anlamının beraber incelendiği araştırmalar mevcut olup bu çalışmalarda denk kesirlerde kesirlerin farklı anlamlarının kullanılmasının etkisi incelemiştir (Behr, Khoury, Harel, Post ve Lesh, 1997; Larson, 2000; Mamede, Nunes ve Bryant, 2005). Denk kesirlerin temsillerinin incelendiği çalışmalarda ise öğrencilerin işlem becerileri karşılaştırılmıştır (Ersoy ve Ardahan, 2003; Gürbüz ve Birgin, 2008). Son olarak kesirlerle ilgili literatüre bakıldığında kesirlerin anlamlarının denk kesir konusunda, kesirlerin temsili ile birleştirildiği çalışmalar yok denecek kadar azdır (Ni, 2001; Niemi, 1996; Wong ve Evans, 2007). Wong ve Evans (2007) çalışmalarında sadece temsil türü olarak alan ve küme temsillerini kullanmıştır. Niemi (1996) ise bu araştırmada kullanılan Temsilsel Akıcılık Testini kullanmış ve bunun sonuçlarını sadece temsil türleri bağlamında değerlendirerek 5'inci sınıfların genel temsil başarısını ortaya koymaya çalışmıştır. Ni (2001) ise yine aynı testi kullanarak 5'inci ve 6'ıncı sınıfların denk kesirlerin temsillerini kesirlerin farklı anlamıylarıyla ilişkilendirerek değerlendirmiştir. Bu çalışma ilköğretim 4, 5, 6 ve 7. sınıf öğrencilerinin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerini sınıf düzeyi, kesirlerin parça-bütün anlamı ve grafiksel temsil türlerine, kesrin sade ya da denk gösterimlerine göre incelemiştir. Türkiye'de ise bu farklı konuların farklı sınıf seviyelerinde inceleyen çalışma bulunmamaktadır.

Bu yönüyle bu çalışmanınTürkiye'de öğrenim gören öğrencilerin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin hangi düzeyde olduğunun belirlenmesi yönüyle literatüre katkı sağlaması öngörülmektedir. Ayrıca denk kesirlerin öğrencilerin kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerini ölçen bir test ülkemiz literatürüne kazandırılmış olup bundan sonraki çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları

Yapılan araştırma, (a) Sakarya İli Geyve ilçesinde bulunan 11 ilköğretim okulunda öğrenim görmekte olan 4'üncü, 5'inci, 6'ıncı ve 7'inci sınıf öğrencileri; (b) 2011-2012 eğitim öğretim yılı ve (c) araştırmada kullanılan ölçme aracı ve bu aracın ölçtüğü alt boyutlar ile sınırlıdır.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmada, katılımcıların ölçme araçlarına verdikleri cevapların samimi olduğu varsayılmıştır.

1.6. Tanımlar

Kesirlerin Anlamları: Kesirlerin farklı kullanımlarına bağlı olarak ortaya çıkan anlamlardır

Parça-bütün Anlamı: Parça-bütün anlamı, eşit parçalara ayrılmış bir grup nesne veya çokluğun bir ya da daha çok parçasının temsil edildiği durumlardır (Lamon, 1994).

Bölüm (Bölme) Anlamı: Pay kadar elemanın payda tane gruba ayrılmasının temsil edildiği durumlardır.

İşlemci Anlamı: Bir sayı, küme veya nesneye çarpımsal bir işlemin uygulanması ile ifade edilen durumdur.

Oran Anlamı: İki farklı çokluğun miktarlarının karşılaştırıldığında ifade edilen kesir anlamıdır.

Ölçme Anlamı: Uzunluğun "b" eş parçaya ayrılmasıyla oluşan 1/b uzunluğundaki parçaların tekrarlı eklenmesi ile belli bir uzunluğun ölçülmesidir.

Temsil: işaret, karakter, ikon veya nesnelerin düzenlenerek bir durumu simgelemesi ya da başka bir şeyi belirtmesidir.

Çoklu temsil: Aynı durumu farklı şekillerde ifade etmeye yarayan dışsal temsil biçimleridir.

Grafiksel Temsil: Verileri ya da problem çözümünü anlatan çizimlerdir.

Alan Temsili: Geometrik bir şeklin alanının belli bir parçasının taranması sonucu elde edilen gösterimdir.

Küme Temsili: Bir kümede yer alan eşit sayıda eleman içeren ve buna ait alt kümeleri kesir olarak ifade eden gösterim biçimidir.

Sayı Doğrusu Temsili: Kesrin sayı doğrusunda karşılık geldiği noktanın gösterilmesiyle oluşan temsil türüdür.

Uzunluk Temsili: bir doğru parçasının eşit uzunluklara bölünmesiyle oluşan bir grafiksel temsil türüdür.

BÖLÜM II

2. Kuramsal Temeller

Bu bölümde önce çalışmanın kuramsal çerçevesini oluşturan kesirler ve temsil kavramları ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Ardından kesir ve temsil kavramları arasındaki ilişki incelenerek kesirlerin temsilleri açıklanacaktır. Son olarak kesirler ve temsillerle ilgili yapılmış çalışmalar incelenecektir.

2.1. Kesirler

Matematikteki çoğu kavram insanların günlük hayatta karşılaştıkları problemleri çözme ihtiyacının bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Matematikte ortaya çıkan ilk kavram olan sayılar çoklukları belirtmek için kullanılmıştır. Formal açıdan doğal sayılara karşılık gelen bu sayılar uzunca bir süre kullanıldıktan sonra gelişen bilgiyle beraber gündelik hayatta karşılaşılan problemlere cevap verememiştir. Bu da öncelikle kesirlerin ve kesirlerin de genişlemesiyle rasyonel sayıların ortaya çıkmasına sebep olmuştur (Acar, 2010).

Kesirler, öğrencilerin ilkokulda karşılaştıkları diğer konulara göre zor ve soyuttur. Kesirlerin öğrenciler tarafından anlaşılmaması sonucu kesirler, son yıllarda önemli bir alan araştırması haline gelmiş ve bu konu ile ilgili birçok çalışma yapılmış olup bu çalışmalarda kesirlerde yaşanılan zorlukların kesir öğretimindeki farklı yaklaşımlarla birlikte kesirlerin yapısından kaynaklandığı sonucuna ulaşılmıştır (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1993; Hart vd, 1998; Pitta-Pantazi, Gray ve Christou, 2004).

Kesirler, yapısı gereği, öğrencilerin okul öncesi yaşantılarında elde edip öğrenme ortamına getirdikleri sayma sayıları ve devamında öğrendikleri doğal sayılarından farklı özelliklere sahiptir. Doğal sayıları, çevremizdeki nesneleri sayarak üretebilirken kesirleri, bölme ve ölçme gibi işlemler sayesinde oluşturabiliriz. Ayrıca bir kesri (a/b şeklinde) ifade edebilmek için 2 sayıya ihtiyaç duyulmaktayken aslında kesir tek bir sayıyı ifade etmektedir. Fakat öğrenciler, a/b'yi tek bir sayı olarak algılamakta güçlük çekmekte ve bu ifadeyi, 2 faklı sayı olarak düşünmektedirler (Ersoy ve Ardahan, 2003; Pitkethly ve Hunting, 1996; Şiap ve Duru, 2004; Toluk, 2002). Ayrıca öğrencilerin doğal sayılarla ilgili geçmiş deneyimlerinden öğrendikleri yöntemleri, kesirler konusuna transfer etmeleri ve bunları devam ettirmeye çalışmaları, öğrencilerin kesirler konusunda zorluk yaşamalarına neden olmaktadır (Alexander, 1997).

Kesirlerin farklı kullanımlarına bağlı olarak ortaya çıkan farklı anlamları, öğrencilerin hem kesirlerde hem de kesirlerle bağlantılı olan matematiğin diğer konularında (oran ve orantı gerektiren problemler gibi) yaşadıkları zorlukları aşmasında önemli bir yere sahiptir (Ersoy ve Ardahan, 2003; Olkun ve Toluk-Uçar, 2004). Kesirlerin öğretiminde önemli yer tutan kesirlerin farklı anlamları aşağıda açıklanmıştır.

2.1.1. Kesirlerin Anlamları

Kesirler gerçek hayat problemlerine uygulandıklarında farklı anlamlar ifade etmektedirler (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992). Bu anlamlar *parça-bütün anlamı*, *bölüm* (*bölme*) *anlamı*, *işlemci anlamı*, *oran anlamı* ve *ölçme anlamı* olmak üzere 5 tanedir (Charalambos ve Pitta-Pantazi 2005). Bu anlamların çok olması kesir öğretiminin de bu anlamları içine alacak şekilde tasarımını gerekli kılar (Ohlsson, 1988).

Parça-bütün anlamı

Parça-bütün anlamı, eşit parçalara ayrılmış bir grup nesne veya çokluğun bir ya da daha çok parçasının temsil edildiği durumlardır (Lamon, 1994). Başka bir ifade ile parça-bütün anlamı, bir bütün içindeki eş parçalara bölünmüş parçalar olarak tanımlanabilir. a/b sembolü bu anlamda bütünün *b* tane parçaya ayrılmasıyla elde edilen parçalardan *a* tanesinin oluşturduğu miktarı anlatmaktadır (Toluk, 1999).

Parça-bütün anlamı ile 3/4 kesri iki şekilde açıklanabilir.

1. Bir bütünün parçaları olarak 3/4: Bir bütünün 3 tane 1/4'lük kısmı.
2. Bir bütünün birleşik bir parçası olarak 3/4: Bir bütünün 1 tane 3/4'lük parçası (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992)

Rasyonel sayılarda parça-bütün anlamı, sürekli bir nesnenin (ip, arsa, meyve suyu gibi) eş parçalara veya bir kümenin eş alt kümelerine ayrılmasına dayanır (Kadhi, 2005). Bu anlam, sadece sürekli değişkeni (uzunluk, alan, hacim) içinde barındıran nesnelerle değil sayılabilir nesnelerle de ortaya konulabilir (Post, Behr ve Lesh, 1982). Bu yüzden kesirlerin parça-bütün anlamında, "parça" ve "bütün" kavramlarının ne olduğu önemli rol oynamaktadır. *Bütün* kavramı her kesir için farklı bir anlam kazanmaktadır. Bütün, bağlama bağlı olarak sadece bir nesne ya da bir grup nesne olabilir. Örneğin kekin 2/3'ü dendiğinde bütün ile kastedilen bir kek olurken, 3 kekin 2/3'si istendiğinde ise bütün, 3 kek olabilmektedir. Buna bağlı olarak parça anlamının da bağlamda anlamı değişmektedir. İşte bu yüzden parça ve bütün kavramlarının ne olduğu kritik öneme sahiptir (Toluk, 1999).

Öğrencilerin okul öncesinde sahip oldukları "yarım" ve "parçalara ayırma" yaşantılarının kesrin parça-bütün anlamına karşılık geldiği için matematik öğretim programlarında ilk önce verilen anlamıdır (Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983; Behr ve Post, 1992). Örneğin ülkemizde da parça-bütün anlamı 1. sınıfta "Uygun şekilleri veya nesneleri iki eş parçaya böler" ve "yarım ve bütün arasındaki ilişkiyi açıklar" kazanımları ile sunulmaya başlar (MEB, 2009).

Bütün ya da birimin parçalara ayrılması sürecinde her bir pay edilene adil payların düşmesi olarak tanımlanabilecek *eşit paylaşım*, kesir öğretiminde parça-bütün anlamıyla kazanılan en önemli becerilerden biridir. Bununla birlikte kesrin diğer anlamları için temel oluşturması, parça-bütün anlamının öğretimini daha da önemli hale getirmektedir. Bu özelliklerinden dolayı parça-bütün anlamı, kesir öğretiminde en çok kullanılan kesir anlamıdır (Charalambous ve Pitta-Pantazi, 2007)

Bölüm (bölme) anlamı

Bölüm anlamı, parça-bütün anlamında olduğu gibi parçalara ayırmaya bağlıdır. a/b sembolü kesri “a” kadar elemanın “b” tane gruba ayrılmasını temsil eder. Parça-bütün anlamından farklı olarak a ve b iki farklı birimi temsil eder. a sayısı parçalara ayrılacak nesneyi temsil ederken b sayısı ise parçaların sayısını temsil eder (Toluk, 1999). a/b sembolü kesrin bölüm anlamında bölme durumunu tasvir ettiği için a÷b şeklinde kullanılabilir (Cramer ve Post, 1995; Post, Cramer, Harel, Kiernen ve Lesh, 1998).

Bölüm anlamı bir ya da birden fazla çokluğu kişi ya da nesnelere paylaştırma problemleriyle ilgilenir (Kieren, 1993). “3 elmayı beş kişiye paylaştırılma” durumunda “her bir kişiye ne kadar elma düşer” sorusu bölüm anlamıyla ilgilidir. Parça-bütün anlamında olduğu gibi, bölüm anlamında da eşit paylaşma önemlidir (Kadhi, 2005).

Bölüm anlamı eşit paylaşıma dayandığından parçalamalı bölme (partitive division) ile ilişkilendirilmektedir. (Ball, 1990; Toluk, 1999; Walle, Karp ve Bay-Williams, 2012) Parçalamalı bölmede bir küme içindeki nesneler belli sayıdaki gruplara ayrılır ve her grupta eşit sayıda nesne bulunur. Yukarıda verilen örnekte her grupta ne kadar eleman bulunacağı, odak noktasıdır. Örneğin 13 kurabiyeyi 3 çocuğa paylaştırmak; 13÷3 şeklinde sembolize edilebileceği gibi 13/3 şeklinde de sembolize edilebilir. Problemin odağında ise “13 kurabiye 3 çocuğa paylaştırıldığında her bir çocuğa ne kadar kurabiye düşeceği” bulunmaktadır. Problemin çözümünde ise 13 kurabiye 3 gruba ayrılarak ilk olarak her çocuk için 4 tane kurabiye düşer ve geriye bir tane kurabiye kalır. Bu kalan bir kurabiye de 3 çocuğa paylaştırılarak paylaşma işlemi kesirler sayesinde tamamlanır (Toluk, 1999).

Bölüm anlamı rasyonel sayılarda sadece parçalamalı bölme ile sınırlı değildir. Bunun yanında gruplamalı (ölçeklemeli) bölme (measurement division) sonucunu da gösterir. Gruplamalı (ölçeklemeli) bölme verilen çokluk içinde diğer çokluğun kaç tane olduğunu belirleme olarak görülebilir. Başka bir ifadeyle verilen çokluğun diğeri cinsinden ölçüsüdür. Burada önemli olan grup sayısıdır. a/b sembolünde a'nın içindeki b'nin ölçüm sayısını belirtir. Örnekteki 13/3 sembolü bu sefer 13 kurabiye 3 erli olarak servis edildiğinde kaç defa servis edilmesi gerektiğini belirtir (Toluk, 1999).

Kesrin bölüm anlamında, parça-bütün anlamından farklı olarak eş parçalara ayrılmış parçalar yerine ortaya çıkan sayısal değer önem kazanır. Bu yüzden kesrin boyutundan ziyade kesrin sayısal değeri göz önünde bulundurulur. Burada pay, paydadan küçük, eşit veya büyük olabilir. Bu anlamın gelişebilmesi için öğrencilerin kesirleri bölme işlemi olarak tanımlayabilmesi, bölenle bölünenin işlemdeki rolünü kavramaları gerekmektedir (Charalambos ve Pitta-Pantazi, 2005).

İşlemci anlamı

Kesirlerin işlemci anlamı bir sayı, küme veya nesneye uygulanan işlemi ifade etmektedir (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1993). Marshall (1993) kesirlerin bu anlamını, a/b işlemini uygulayan bir fonksiyon makinesi olarak tanımlamaktadır. 6'nın 1/3'ü örneğinde olduğu gibi bu anlamda yapılan işlem çarpımsal ilişkiyi içerir(Moss, 2000).

İşlemci anlamında kesirler, çarpımsal iki ayrı işlemin kombinasyonu sonucunda ortaya çıkan bir işlem olarak kabul edilebilir. Yani istenen işlem, eldeki nesne veya kümeyi belirten sayının ilk önce paydaki ifade ile çarpılıp sonrasında paydadaki ifadeye bölünmesidir. Bu işlem ilk önce paydaya bölünüp sonrasında pay ile çarpma şeklinde de olabilir (Charalambos ve Pitta-Pantazi 2005; Behr, Harel, Post ve Lesh, 1993). Cramer (2001) ise p/q kesrinde işlemci anlamı, bir şekli p/q katı büyüklüğünde başka bir şekle veya bir kümeyi eleman sayısını p/q katı büyüklüğünde başka bir kümeye dönüştüren bir fonksiyon olarak tanımlamaktadır.

İşlemci anlamı incelendiğinde içinde iki alt anlam taşıdığı ortaya çıkmıştır. Bunlardan bir tanesi ilk durumdaki sayıyı kendinden daha büyük sayıya dönüştüren büyülten fonksiyon (örneğin 18'in 7/6'sı gibi) anlamıdır. Bir diğeri ise ilk durumdaki sayıyı kendinden daha küçük bir sayıya dönüştüren küçülten fonksiyon (örneğin 18'in 5/6'sı gibi) anlamıdır (Charalambous ve Pitta-Pantazi, 2007).

Charalambous ve Pitta-Pantazi (2007) kesirlerde denklik ve çarpma işlemi konuları ile kesirler işlemci anlamı arasında birbirlerinin öğrenmelerini destekleyici kavramsal bir ilişki olduğunu belirtmiş ve bu konularda işlemci anlamının kullanılabileceğini tavsiye etmişlerdir. Behr, Harel, Post ve Lesh (1993) kesirlerde işlemci anlamı ile öğrencilerin, genel anlamda kesirlerde çarpma işlemi becerilerinin ($\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$) özelde ise bir parçanın parçasını bulmalarını (2/3'ün 1/2'si) geliştireceğini belirtmiştir.

Oran anlamı

Kesirlerin oran anlamı, miktarlar arasındaki ilişkiyi belirtir. Lamon (1999) oranı, aynı çeşit iki çokluğun karşılaştırılması olarak tanımlamıştır. Oran anlamındaki karşılaştırma, niceliklerin katlanarak ya da bölünerek artması veya azalmasını ifade eden çarpımsal ilişkiyi içerir (Toluk, 1999). Örneğin; bir meyve sepetindeki elmaların sayısının, portakalların sayısına oranı kesir biçiminde ifade edilebilir (Behr, Harel, Post ve Lesh 1992; Cramer ve Post 1995; Post, Cramer, Harel, Kiernen ve Lesh, 1998).

Oran anlamında kesir; bir sayıdan ziyade iki çokluğu karşılaştırma unsurudur Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983; Kadhi, 2005). a/b sembolünde a ve b iki ayrı kümeyi temsil eder. Genel anlamda "a", "b"nin bir parçası değildir. Örneğin “3 kırmızı ve 2 mavi balonun bulunduğu durumda kırmızı balonların mavi balonlara oranı nedir” sorusu bu anlama özgü sorulardandır. Bazı durumlarda sorunun sorulmasına bağlı olarak parça-bütün anlamı ifade edilebilir. Örneğin balon sorusunda, kırmızı balonlarla tüm balonlar karşılaştırıldığında parça-bütün anlamını ifade etmiş olur (Toluk, 1999).

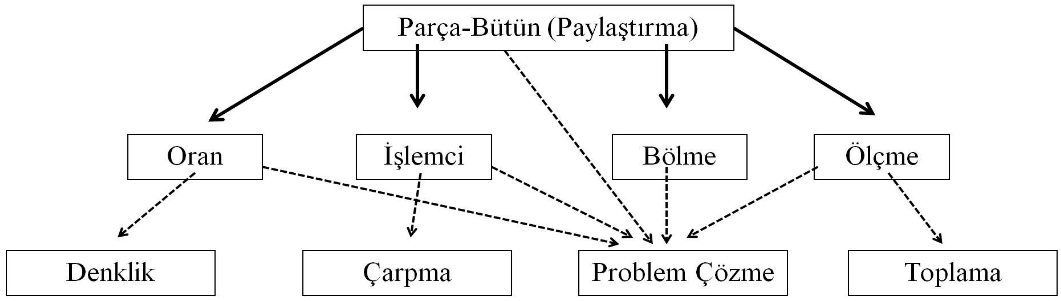
Ölçme anlamı

Ölçme anlamı, uzunluğun "b" eş parçaya ayrılmasıyla oluşan 1/b uzunluğundaki parçaların tekrarlı eklenmesi ile belli bir uzunluğun ölçülmesidir. Ölçme anlamı, tamsayılar tarafından tanımlanamayan uzunluk, alan ve hacim gibi ölçme çokluklarını temsil eder (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992). Burada a/b sembolik gösterimi a defa 1/b'lik parçanın uzunluğunu belirtir. Başka bir ifade ile rasyonel sayıların ölçme anlamında öncelikle sabit bir ölçü belirlenip daha sonra bu ölçünün tekrarlanmasına istenilen miktara ulaşılır. Örneğin 4/7 kesrinde öncelikle 1/7 kesri birim olarak alınıp 4 defa bu kesir ötelenerek 4/7'ye ulaşılır (Toluk, 1999).

Ölçme anlamında kesir, iki kavramla ilişkilidir. Birinci kavramda, kesrin miktar anlamı (ne kadar büyük ya da küçük olduğu) sayısal olarak ifade edilir. İkinci kavramda ise birim kesrin uzunluğu belirlenerek belli bir uzunluğun başlangıç noktasından uzaklığının ölçülür (Charalambos ve Pitta-Pantazi, 2005). Faklı bir açıdan bakılırsa da ölçme anlamı, belli bir mesafede o miktarın birimlerinden kaç tane bulunduğunu ifade eder (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992)

Ölçme anlamı, sayı doğrusu ile bağlantılı olup öğrencilerin kesirleri sayı olarak kabul etmelerini sağlamaktadır (Behr, Lesh, Post ve Silver (1983). Kesirlerin sayı olarak ifade edilmesi ve denk kesirlerin kavranması ile birlikte, rasyonel sayılar kavramı karşımıza çıkmaktadır. Bu ise kesir öğretiminde amaçlanan nihai hedefler arasındadır. Fakat öğrencilerin rasyonel sayıları öğrenirken zorluklar yaşandıkları bilindik bir gerçektir. Yaşanan zorluklardan biri de rasyonel sayıların sahip olduğu farklı anlamlardır. Öğrenciler, kesir öğretiminde parça-bütün anlamının daha çok vurgulanması ve diğer anlamlara yeterince zaman ayrılmamasından dolayı rasyonel sayıların sahip olduğu bu anlamları (özelliklede ölçme anlamını) öğrenirken güçlük yaşamaktadırlar (Streefland, 1991). Öğretim sürecinde öğrencilere bu farklı anlamların ayrı ayrı yer verilerek sonrasında birbiriyle kaynaştırılması, rasyonel sayıların ve onunla ilişkili kavramların tamamen anlaşılabilmesi için daha uygun olur (Mack, 1995).

Kesirlerin farklı anlamları birbirleriyle ilişkili olduğu kadar kesirlerde işlemlerle de ilişkilidir. Behr, Lesh, Post ve Silver (1983) bu ilişkileri teorik bir model üzerinde ifade etmişlerdir (bkz. Şekil 2–1.). Bu modelde parça-bütün anlamı kesrin diğer anlamları için temel oluşturmaktadır. Daha da özel olarak incelendiğinde oran anlamının denklik konularının öğretiminde doğal bir yol olduğunu, işlemci anlamının kesirlerde çarpma işleminde kolaylık sağladığını ve ölçme anlamının ise ardışık toplama gerektirdiğinden kesirlerde toplama işleminin öğretiminde kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Bununla birlikte kesirlerin tüm anlamları problem çözme için gereklidir.



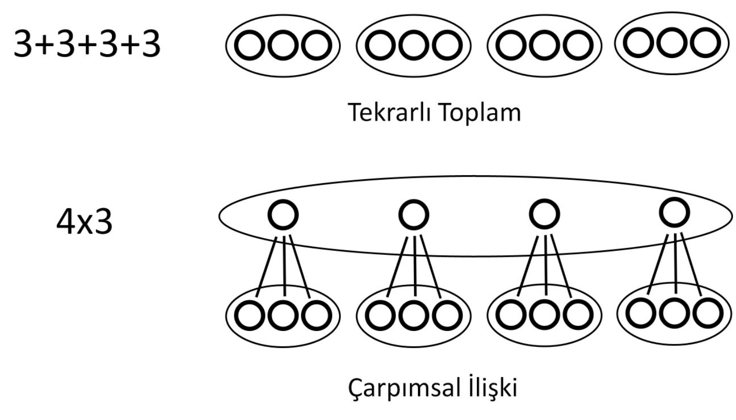
Şekil 2-1. Kesirlerin farklı anlamlarının birbirileriyle, farklı kesir işlemleri ve problem çözme ile ilişkisine dair teorik model
(Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983:99)

2.1.2. Denk kesirler

Kesirlerin denkliği, kesir konusu içinde yer alan en kapsamlı kavramlardan biridir. Kavram olarak denklik, eşit miktardaki çoklukları belirten diğer bir deyişle aynı değere sahip olan, kesirleri ifade eder (Skemp, 1986). Öğrencilerin kesirlerde uzmanlaşabilmesi için denk kesirler kritik öneme sahiptir. Çünkü denk kesirler, kesrin oran ve işlemci anlamıyla bağlantılı olup kesirlerle toplama, çıkarma ve sıralama işlemlerinin temelini oluşturur (Behr, Khoury, Harel, Post ve Lesh, 1997). Buna ek olarak kesirlerle toplama ve çıkarma yaparken paydaların eşit olmadığı durumlarda denk kesirleri kullanmak gerekmektedir. Ayrıca kesirlerde pay ve paydaların eşit olmadığı durumlarda sıralama için denklik kavramından yararlanılır (Altun, 2002).

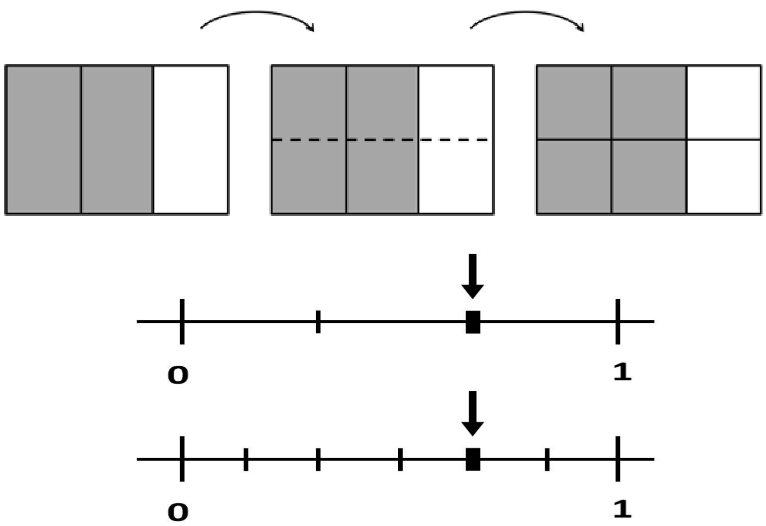
Denk kesirler, pay ve payda bölümünün değişmeyen oranını ifade eden çarpımsal bir ilişkidir (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992). Denk kesirlerdeki bu ilişki, bizi sonsuz sayıda kesrin birbirine değer olarak eşit olduğu fikrine götürür. Fakat ilköğretim öğrencileri için denk kesirlerdeki 1/2=2/4 eşitliği, her zaman gördükleri 1+2=2+1 gibi eşitliklerden farklıdır ve bu da öğrencilerin sorunlar yaşamasına neden olmaktadır (Ni, 2001). Denk kesirlerde öğrencilerin yaşadığı sorunların temelinde, denk kesirlerin yapısında bulunan iki kavram ortaya çıkmaktadır. Bunlardan ilki çarpımsal ilişki ikincisi ise bütün ve parçanın korunum özelliğidir (Piaget, 1983, 1987; Piaget, Inhelder ve Szeminska, 1960). Çarpımsal ilişki, öğrencilerin çarpma işlemini öğrendikleri tekrarlı toplamadan yapısal olarak farklıdır. Şekil 2-2'deki (3+3+3+3 toplamında) görüldüğü gibi tekrarlı toplam, birbirini izleyen (3+3=6, daha sonra 6+3=9 ve en son olarak 9+3=12) aynı anda farklı durumları göz önüne almayı gerektirmeyen tek seviye düşünmeyi içermektedir. Ancak çarpımsal ilişki (örneğin 4×3 teki gibi) aynı anda farklı durumları dikkate almayı gerektiren 2 seviyede birden düşünmeyi içerir (Kamii ve Clark, 1996). Çünkü Şekil 2-2'de de görüldüğü üzere çarpımsal ilişkide 4 birim kendi içinde 3'erli alt birimlerden oluşmaktadır ve toplam alt birim sayısı 12'dir.

Bütün ve parçanın korunumunda ise öğrenciler bir bütünün ya da parçanın farklı sayıda parçalara bölünse bile yine bütünü ya da paçayı belirteceğini gözden kaçırmaktadırlar. Örneğin 4 parçaya ayrılan bütünün 1 parçasının alınmasıyla elde edilen 1/4 kesri ile aynı büyüklükteki bütünün 12 parçaya ayrılıp 3 parçasının alınmasıyla elde edilen 3/12 kesrinin denkliği inceleyelim. Öğrenciler 1/4 kesrindeki 1 parça ile 3/12 kesrindeki 3 parçanın aynı miktara karşılık geldiğini ya da 1/4 kesrindeki 4 parçanın tamamın 3/12 kesrindeki 12 parçanın aslında bütüne karşılık geldiğimi anlamamaktadırlar. Öğrenciler korunumu kazanamadıkları için sadece parçaların sayılarına odaklanıp 3 parçanın daha çok olduğunu ya da 12 paçanın daha büyük bir bütüne karşılık geldiğini düşünmektedirler.



Şekil 2-2. Tekrarlı toplam ve çarpımsal ilişki (Kamii ve Clark, 1996: 5)

Okulların hepsinde değilse bile pek çoğunda (hatta bazı ders kitaplarında)denk kesirler "bir kesrin pay ve paydası aynı sayı ile çarpılır veya bölünür" ifadesiyle kurallara dayalı olarak öğretilmeye çalışılmaktadır. Böyle bir yaklaşım, öğrencilerin denk kesirleri bulma işlemini mekanik olarak yapmalarına, kavramları anlamamış oldukları için öğrendiklerini yeni durumlara uygulayamamalarına ve problem çözmede sıkıntılar yaşamalarına yol açmaktadır (Kamii ve Clark, 1996; Wong ve Evans, 2007). Bunun yerine "aynı miktarı belirten kesirlerin birden farklı şekilde temsil edilebilir" fikri farklı temsiller ile sezdirilerek bu kavramın yerleşmesi sağlanabilir. Bunun yanın sıra birim kesir kavramından da yararlanılabilir. Örneğin öğrencilerin 2/3 ve 4/6 kesirlerinin denk olduğunu anlamaları için Şekil 2-3'deki gibi bir alan ve sayı doğrusu temsili kullanılabilir (Behr ve Post 1992). Ya da gerçek hayat durumları veya somut nesneler kullanılabilir. Örneğin öğrencilerden 12 tane nesnenin 1/2, 3/6 ve 6/12'sinin kaçar tane olduğunu saymaları istenebilir ve böylece kesirlerde denkliğe dikkat çekilebilir (Behr ve Post, 1992).



Şekil 2-3. 2/3 ve 4/6 kesirlerinin denkliğini gösteren bir alan ve sayı doğrusu temsili

2.2. Temsiller

Bu ana başlık altında öncelikle temsil kavramı ve temsil teorilerinden bazıları açıklanacaktır. Sonra çoklu temsilin matematik eğitimindeki yeri ve öneminden bahsedilecektir.

2.2.1. Temsil kavramı

İnsanların ortak düşünme araçlarından biri olan matematik, en sade haliyle “bir örüntü ve sistemler bilimi” olarak tanımlanabilir (Goldenberg, Cuoco ve Mark, 1998). İnsanlar, tabiatta belli bir düzende gerçekleşen ve gerçekleşecek olayları matematiği kullanarak anlamlandırmaya çalışırlar. Bu anlamlandırma çabası matematiğin kendi kavram ve ilişkilerinin kullanıldığı ortak bir dil ile mümkündür (Olkun ve Toluk-Uçar, 2004). Soyut kavram ve sembolleri gerçek dünyada somutlaştırarak modellenmesi olan temsiller (Kaput, 1998); matematiğin ortak dilidir (Piaget 1967: 78).

Goldin’e (2003) göre temsil; işaret, karakter, ikon veya nesnelerin düzenlenerek bir durumu simgelemesi ya da başka bir şeyi belirtmesidir. Temsil etme ise bir şeyi başka bir durumda veya formda sunma eylemidir. Temsiller; kağıt üzerinde, somut olarak veya zihinde matematiksel durumları anlamak için kullanılan (Kaput 1989) öğrenenleri anlama, bilgi verme ve nedenleri açıklamayı sağlayan faydalı bir araçtır (Greeno ve Hall, 1997). Temsiller sadece ilişkili yapıları birbirine bağlayan bir ağ sistemi olmayıp, matematiği anlamanın ve ilişkilendirmenin bir yoludur (Wu, 2004).

Matematiksel fikirlerin farklı şekillerde temsil edilmesi; insanların bu fikirleri anlaması ve kullanması için bir gerekliliktir (NCTM, 2000). Çünkü matematiksel nesnelerin kavranabilmesi, doğrudan algılanmalarından ziyade temsiller sayesinde olur (Duval, 1993). Diğer bir deyişle temsiller, matematiksel kavramların kavranmasında önemli bir rol oynar. Temsilleri bu kadar önemli yapan şey ise ezbere öğrenmeye karşı anlamlı öğrenmeyi olumlu yönde desteklemesindendir (Kaput, 1987). Dufour-Janvier, Bednarz ve Belanger (1987) temsillerin matematik eğitimindeki rolünü aşağıdaki birkaç özellikle belirtmiştir:

- Temsiller, matematiğin özünde yer alır.
- Temsiller, kavramların birden çok şekilde somutlaştırılmasıdır
- Temsiller belli zorlukları kısmi olarak hafifletmek için kullanılabilir.
- Temsiller matematiğin daha ilgi çekici ve ilginç olmasını amaçlamaktadır. (Aktaran: Özgün-Koca, 1998: 3)

Alan-yazın incelendiğinde temsillerin iki parçaya ayrıldığı görülür (Goldin 1998; Goldin ve Kaput, 1996; Goldin ve Janvier, 1998; Janvier, 1987; Janvier, Girardon ve Morand, 1993; Kaput, 1991). Bunlar içsel ve dışsal temsillerdir. İçsel temsiller bir kişinin sahip olduğu bilişsel yapılardır. İçsel temsile örnek olarak şemalar ve bilişsel yapılar örnek verilebilir. Dışsal temsiller ise fikirlerin ya da kavramların çizelge, tablo, grafik, diyagram vb. biçiminde somutlaştırılmasıdır (Janvier, Girardon ve Morand, 1993). Zhang (1997) içsel ve dışsal temsiller arasındaki ilişkiyi, birbirinin devamı olan durumlar olarak tanımlamaktadır. Bir öğrenci problemde verilen durum ile ilgili diyagram çizdiği ya da bir formül yazdığı zaman içsel olarak temsil ettiği durumu dışsal olarak temsil etmiştir.

Öğrenciler, matematik yapmanın ve matematik öğrenmenin temel bir parçası olan matematiksel fikirlerin temsillerini anlayarak kendi temsillerini oluşturabilirler. Bu yüzden öğrencileri (bir konuyu anlarken oluşturdukları ilk temsilleri alışılmışın dışında olsa dahi) fikirlerini kendilerine mantıklı gelecek şekilde temsil edebilmeleri için cesaretlendirmek önemlidir. Öğrencilerin, bilindik (geleneksel) temsilleri bilmesi de ayrıca önemlidir. Böylece öğrencilerin hem matematik öğrenme süreci hem de matematiksel fikirler hakkında akranlarıyla iletişim kurmaları kolaylaşır (MEB, 2013; NCTM, 2000).

2.2.2. Temsil teorileri

Birçok araştırmacı temsil ve temsile ait fikirleri genellemeye çalışarak bir model oluşturmaya çalışmıştır. Fakat araştırmacılar herhangi bir temsil modeli üzerinde hemfikir oluşturabilmiş değillerdir (Akkuş-Çıkla, 2004). Temsil teorileri; öğrenme kuramlarının temsile bakış açılarına, öğrencilerin problem çözme durumlarında kullandıkları temsillere, temsiller arasındaki dönüşüm çeşitlerine göre farklılık göstermektedir. Bu bölümde Kaput Temsil Modeli, Janvier Temsil Dönüşüm Modeli, Goldin Temsil Sitemi ve Lesh Çoklu Temsil Modeli açıklanacaktır.

Kaput temsil modeli

Kaput (1991) temsil kavramını, soyut kavram ve sembolleri gerçek dünyada somutlaştırarak modellenmesi olarak tanımlamıştır. Kaput'a (1992) göre temsiller bilişsel olarak, parçaların toplamından daha büyük bir bütün oluşturur. Temsiller, kompleks fikirleri yeni yollarla görmemize ve onları etkili bir şekilde uygulamamıza olanak sağlar. Kompleks bir fikir, tüm yönleriyle tek bir notasyon sistem ile yeterince temsil edilemez ve bu yüzden, bu fikri, tam olarak ifade etmek için çoklu gösterim sistemine ihtiyaç duyulmaktadır.

Kaput (1991) içsel temsillerin zihinsel temsiller olduğunu ve bunların bireyler tarafından kendi kendilerine üretilip geliştirildiğini belirtmiştir. Onlar gözlemlenebilir değildir, ancak dışsal temsiller somut biçimde olabilirler ve onlar bir eşitlik, resim ve sembol şeklinde gözlemlenebilir. Kaput'un (1991: 55) temsil modelinde iç temsilleri, "zihinsel yapılar" dış temsilleri ise "notasyonal yapılar" olarak isimlendirilmiştir. Zihinsel yapılar; kişilerin problem çözmeyi organize etme ve yönetme sırasındaki düşüncelerini içerirken; notasyonal yapılar belli bir dile ya da kültüre ait olan toplulukların paylaştıkları kültürel ya da somut yapıları içerir. Notasyonal yapılar ayrıca bireylerin zihinsel yapılarını organize etmede kullandıkları kağıt üzerindeki ya da bilgisayardaki herhangi bir şey olabilir. Bununla birlikte zihinsel yapılar ile nostayonal yapılar birbirlerini tamamlayan ve birbirlerinden ayrı düşünülmeyecek kavramalardır.

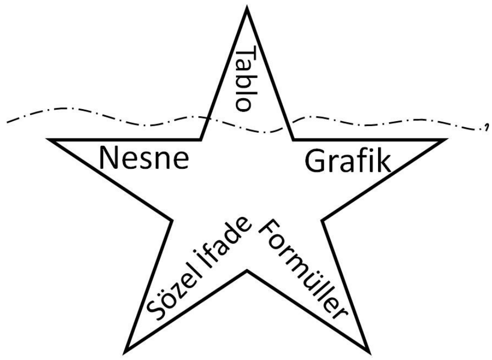
Kaput (1989, 1991, 1994) çalışmalarında temsil kavramının teknolojiyle ilgili kısmını öne çıkarmıştır. Teknoloji ile tablo, grafik, formüller gibi temsiller arasında bağlantılar kurulmasının kolay bir şekilde gerçekleşebileceğini ve öğrencilerin bilgisayar yardımıyla zihinlerinde var olanları daha kolay dışa aktarabileceğini belirtmiştir (Blanton ve Kaput, 2003; Kaput, 1994). Bunlara ek olarak, Kaput (1991) dinamik araçları kullanmanın temsilleri daha görülebilir (somut) yaptığını ve temsiller arası dönüşümün kolaylaştıracağını belirtmektedir. Ona göre bilgisayar çocukların çeşitli yollarla kendi iç temsillerini yansıtan yararlı bir araçtır.

Kaput (1991) matematikte anlamlı ve kalıcı bir öğrenmenin gerçekleşmesi için temsil eden ile temsil edilen arasındaki ilişkisel bir sürecin olması gerektiğini savunmaktadır. Bu görüşe göre temsiller arasında sürekli bir etkileşim vardır. Bu yüzden Kaput (1991, 1994) eğitim ortamlarında öğrencilere dışsal temsillerin birbiriyle ve içsel temsillerle bağlantılı olduğunu vurgulamanın faydalı olacağını ve öğrencilerin yeni temsil biçimleri oluşturmaları için desteklenmesi gerektiğini belirtmiştir.

Janvier temsil dönüşüm modeli

Janvier (1987: 67) temsili "kağıda yazılmış bir şeylerin kombinasyonları, somut objeler formunda bulanan şeyler ve kişinin aklındaki fikirlerin dikkatlice oluşturulmuş planı" olarak tanımlar. Janvier temsilleri gruplandırırken içsel ve dışsal temsil olarak ikiye ayırmıştır. İçsel temsiller doğrudan gözlemlenemeyen bilişsel modeller, kavramlar, şemalar ve zihinsel nesnelere karşılık gelirken dışsal temsiller sembol, şema, diyagram v.b gibi sembolik düzenlemelere karşılık gelmektedir (Janvier, 1987; Janvier, Girardon ve Morand, 1993). Janvier çalışmalarında daha çok dışsal temsil kavramı üzerine yoğunlaşmıştır.

Janvier'e (1987) göre matematiksel düşünmenin 3 aşaması vardır. İlk aşama matematiksel kavramları tanımak için farklı temsilleri kullanmak, ikinci aşama ustalıkla tüm temsilleri uygulamak ve son aşama ise bir temsil biçiminden diğer temsil biçimine dönüşüm yapmaktır. Janvier bu amaçla hazırladığı temsil sistemini yıldız modeliyle ifade etmektedir. Temsil dönüşüm modeli olarak bilinen modelde Janvier, temsiller arası geçişi yapılandırmıştır. Bu yapıda (bkz. Şekil 2–4.) yıldız modelindeki temsilleri buzdağının altında bir nokta kabul ederek bunlar arasındaki geçişleri isimlendirmiştir. Bu geçiş sitemine *şematizasyon* ismini vermiştir.



Şekil 2-4. Janvier Temsil Dönüşüm modeli (Yıldız Modeli)

Bu geçiş sisteminde her bir dönüşüm farklı olarak isimlendirilmiştir. Örneğin grafik temsilinden resim veya sözel duruma geçiş yorumlama olarak isimlendirilmiştir. Bununla birlikte Janvier dönüşüm sisteminde direkt ve direkt olmayan dönüşümden bahsetmiştir. İki temsil biçimi arasında arada başka bir temsil biçimi kullanmadan yapılan dönüşüm (örneğin tablodan grafiğe) direkt dönüşümdür. Temsiller arası dönüşüm yapılırken arada başka bir temsil biçiminin kullanılmasıyla yapılan dönüşüm ise direkt olmayan dönüşümdür. Grafik temsilinden sembolik temsile dönüşüm yapıldığında önce grafik temsilinden tablo temsiline sonrada sembolik temsile dönüşüm yapılırsa bu direkt olmayan temsile örnek olmuş olur.

Dufour-Janvier, Bednarz ve Belanger'e (1987) göre öğrenciler; kullandıkları temsilleri bilmeli, verilen bir matematiksel durumda bir temsili diğerine göre geri çevirebilmeli ve bir temsilden diğerine dönüşüm yapabilmelidirler. Daha da önemlisi, öğrenciler, matematiksel süreçlerde uygun temsili seçebilme yeteneğine sahip olmalıdır. Bundan dolayı eğitim ortamları öğrencilerin temsilleri esnek olarak dönüşüm sürecini ve temsil çeşitlerinin içeren yolları geliştirici stratejiler kullanabilecekleri şekilde düzenlenmelidir.

Goldin temsil sistemi

Goldin (1998) *Temsil Sistemi* adını verdiği yapıda temsil kavramıyla problem çözme ve öğrenme süreçlerini ilişkilendirerek diğer temsil sitemlerini birleştirmiştir. Goldin sadece dışsal veya sadece içsel temsillerle ilgilenmemiş her iki bakış açısıyla da temsilleri inceleyerek kendi temsil sistemini oluşturmuştur. Goldin ve Kaput'a (1996) göre dış temsil öğrencilerin kullandığı yazılı ifadeler, resimler, grafikler, matematiksel notasyon sistemler ve bilgisayar verilerini içeren gözlemlenebilen yapılardır. Goldin'nin temsil modelinde birinci basamak problem çözücünün dışsal çevreyi tarif etmesidir. Bu sayede problem çözücü analiz etme sürecine girerek temsillerle etkileşim kurar. Bunun sonucu olarak problem çözücünün bilişsel yapılarında değişiklikler meydana gelmeye başlar (Goldin 1998). İç temsiller ise, birey veya problem çözücünün zihinsel yapılarıdır. Goldin temsil modelinde içsel temsillere daha fazla önem vermiş ve içsel temsilleri 5 alt kategori yardımıyla açıklamıştır. Bu alt kategoriler aşağıda açıklanmıştır.

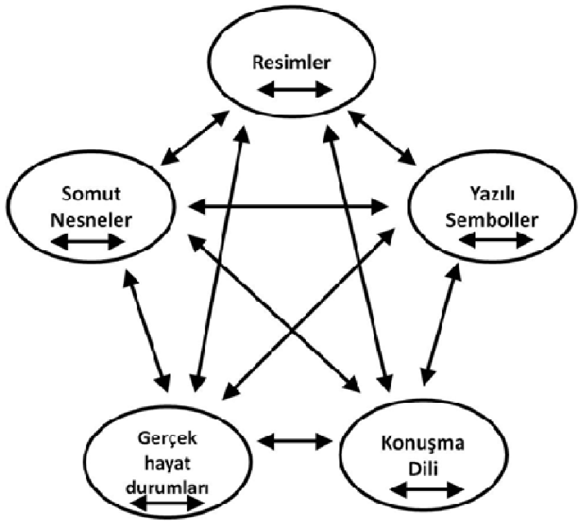
a) *Sözel Sistemler:* Kelime, tümce ve cümleler ile bireylerin kendi dillerindeki kapasitelerini tasvir etmesini sağlamaktadır.
b) *İmgesel Sistemler:* Görsel, işitsel ve kinestetik temsil sitemlerini içinde barındıran sözel ve notasyon olmayan durumları belirtmektedir.
c) *Formal Notasyonal Sistemler:* Sayı sistemi, aritmetik algoritmalar, rasyonel sayılar, cebirsel notasyonlar gibi sembolik yapılardır.
d) *Planlama, İzleme, Uygulama ve Kontrol Sistemi:* Problem çözme süreçlerini içine alan ve bu süreçleri yönlendiren sistemdir.
e) *Duygusal Temsil Sistemi:* Bireylerin duyguları yardımıyla matematiksel kavram ve algılara ulaşmasını sağlayan ve problem çözme sırasında değişen duygu durumlarını içinde barındıran yapıdır.

İçsel temsiller yapısı gereği gözlemlenemezler. İçsel temsiller ancak öğrencilerin ürettikleri dışsal temsiller şeklinde gözlemlenebilir (Goldin ve Kaput, 1996). Dış temsillerin gözlenmesi iç temsillerin yordanmasına yardımcı olur fakat dış temsiller, iç temsillerin bire bir aynısı demek değildir. Burada içsel olarak oluşturulan yapı ile dışsal olarak temsil edilen yapı arasındaki esneklik ve çeşitlilik, temsil siteminin gücünü ortaya koymaktadır. Goldin ve Shteingold (2001) temsil eden ve temsil edilen arasında sadece bir yönlü değil tersine çevrilebilir bir ilişki olduğunu belirtmiştir. Bu durumun sonucu olarak bazen içselleştirilen bir durum, temsil biçimleri kullanılarak dışsallaştırılabilirken, bazen dışsal temsil biçimleri ile ifade edilen bir durum içselleştirilebilir.

Goldin ve Kaput (1996) temsiller arasındaki ilişkiyi yatay ve dikey olmak üzere iki grupta incelemiştir. Temsiller arasındaki yatay ilişki aynı kategoride yer alan temsiller arasındaki geçişleri anlatmaktadır. Yani bir dışsal temsil türlerinin kendi arasındaki geçiş ya da bir içsel temsil türlerinin kendi arasındaki geçiş buna örnek olabilir. Örneğin tabloda sırasıyla yer alan 1, 5, 9, 13... tablo temsilini f(x) = 4x + 1 sembolik ifadesi ile temsil edilebilir. İki temsil türü de dışsal olduğunda yatay ilişki yer almaktadır. Dikey ilişki ise bir dış temsil ile bir iç temsil arasındaki karşılıklı geçişi ifade eder. Örneğin f(x) = 2x + 1 sembolik ifadesinin içsel olarak bir doğru olarak canlandırabilir.

Lesh çoklu temsil dönüşüm modeli

Lesh (1979) çoklu temsil dönüşüm modelinde, temsiller arasındaki geçişleri ve bunların eğitim ortamına nasıl uygulanacağını incelemiştir. Lesh, Post ve Behr'e (1987) göre temsil, matematik kavramlarının öğrenilmesinde büyük önem taşır. Temsil, öğrencilerin içsel olarak kavramsallaştırdıklarını dışsal olarak sunmamızı sağlayan somut yapılardır. Bu modelde öğrencinin bir kavrama ait temsil türleri arasında geçiş yapabilmesi, o kavramı anladığının bir göstergesidir. Çoklu Temsil Dönüşüm Modelinde beş temsil türünden bahsedilmiştir. Bu temsiller; bilginin gerçek dünya durumlarında organize edildiği *gerçek hayat durumları*, öğrencilerin dokunabildikleri, temas ettikleri nesneleri belirten *somut nesneler*, matematiksel düşüncelerin resmedilmesinin sağlayan *resimler (durağan resimler)* günlük dil olarak ifade edilen *konuşma dili* ve semboller, cümleler ve deyimleri içinde barındıran *yazılı semboller* olarak ifade edilmiştir. İfade edilen beş temsil türü ve bunların arasındaki ilişki şekil 2-5'de görülmektedir.



Şekil 2-5. Lesh Çoklu Temsil Dönüşüm Modeli

Lesh temsil modelinde bu beş temsil türünden daha önemlisi temsiller arasındaki geçişlerdir. Öğrenciye verilen matematiksel durum temsil sistemi içinde kavramsallaştırılır, sonrasında esnek bir şekilde diğer temsil türlerine aktarılabilir (Lesh ve Kelly, 1997). Matematiksel öğrenme ve problem çözme için önemli olan temsiller arası geçiş, verilen kavramın anlamını değiştirmeden bir temsil biçiminden diğerine aktarmaktır. Temsiller arası geçiş farklı temsil biçimleri arasında olabileceği gibi aynı temsil biçimi içinde de olabilir. Örneğin bir öğrenci tablo şeklinde verilen bir ifadeyi cebirsel ifadeye dönüştürdükten sonra grafik olarak temsil edebilir ya da sözel olarak ifade edilen bir durumu başka bir sözel ifade ile açıklayabilir. Lesh, Post ve Behr'e (1987) göre iyi problem çözücüler, farklı temsil türlerinin kullanımında yeteri kadar esnektirler. Bu yüzden öğretmenlerin temsilleri anlamaları ve kullanmaları konusunda öğretmenleri cesaretlendirmek; onların gelişimleri, oluşturacakları eğitim ortamları ve onların yetiştirecekleri öğrenciler için temel bir noktadır.

2.2.3. Matematik eğitiminde çoklu temsiller

Bilgiyi kullanarak yorum yapabilen, muhakeme ve problem çözme becerisine sahip bireyler yetiştirmeyi amaçlayan matematik eğitiminde yenilikçi çalışmalar öğrencilerin matematik yapabilmesi için bilişsel beceriler kazanması gerekliliğini vurgulamaktadır (Thomas, Mulligan ve Goldin, 2002). Bu becerilerden biri de çoklu temsillerdir. Çoklu temsiller aynı durumu farklı şekillerde ifade etmeye yarayan dışsal temsil biçimleridir (Özgün-Koca, 1998). En genel anlamda çoklu temsiller "Bir matematiksel kavramın veya ilişkinin değişik biçimlerde ifade edilmesine olanak sağlayan gösterim biçimleri" olarak tanımlanabilir (Delice ve Sevimli, 2010). Başka bir ifade ile çoklu temsiller, fikir ve görüşlerin matematiksel olarak birden fazla biçimde somutlaştırılmasıdır (NCTM, 2000).

20 yy.'ın sonu ve 21 yy. başlaması ile birlikte, teknolojinin ve matematik öğretiminde çoklu temsilin kullanımı, matematik eğitiminde önemli konulardan biri haline gelmiştir. Öğrenciler farklı temsilleri kullandıkları, bu temsilleri karşılaştırdıklarında ve yeni temsiller oluşturduklarında matematiksel kavram ve ilişkileri daha kolay bir şekilde anlayabilirler (NCTM, 2000). Çeşitli temsil biçimleri arasında uygun temsil biçimini seçebilmek ve temsillerin avantajlarının ve dezavantajlarının farkında olmak matematikte kavramsal anlama için kritik bir öneme sahiptir (Even, 1998). Öğrenciler kelimelerle sözel, tablolarla sayısal, grafiklerle görsel ve sembollerle cebirsel olarak matematiksel temsilleri kullanabilir ve böylece matematikle ilişkili durumların nasıl temsil edildiğini öğrenebilirler (Choike, 2000).

Çoklu temsillerin kullanımı birçok matematik eğitimcisi tarafından savunulmaktadır (Dufour-Janvier, Bednarz ve Belanger, 1987; Even, 1998; McGovan ve Tall, 2001; Schultz ve Waters, 2000). Çoklu temsil kullanımını savunan matematik eğitimcileri bu konuda çeşitli çalışmalar yaparak eğitimsel stratejiler geliştirmişlerdir. Konuyla ilgili gelişmelere paralel olarak NCTM de, 1989 ve 1998 standartlarından farklı olarak, 2000 yılında yeni işlem standardı olarak çoklu temsilleri belirlemiştir. NTCM'in (2000) eğitim programlarında anasınıfından 12. sınıfa kadar tüm öğrenciler için kazanması gereken beceriler aşağıdaki gibidir:

1. Matematiksel fikirleri düzenlemek, kaydetmek, iletmek için temsilleri oluşturmak ve kullanmak
2. Problem çözmek için matematiksel temsilleri seçme, uygulama ve temsiller arasında dönüşüm yapmak
3. Fiziksel, sosyal ve matematiksel olguları modelleme ve yorumlama amacıyla temsilleri kullanmak.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) 2005 yılında yenilenen İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programlarında, matematik eğitiminde bireylere kazandırılması gereken beceriler arasında iletişim, ilişkilendirme, akıl yürütme ve problem çözme yer almaktadır. Çoklu temsil kullanımı, iletişim becerisi içinde değerlendirilmiş olup bu bağlamda temsillerin görsel, sözel, sembolik, grafiksel biçimleri aracılığıyla öğrencilerin sezgisel bilgileri ile matematiksel bilgi arasında iletişim sağladığı belirtilmiştir. Bununla birlikte öğrenciler temsiller ile matematiksel kavram ve kuralları ilişkilendirerek birbirine dönüştürebilir. Programda matematiksel iletişim becerisi içinde kazandırılması gerekenler arasında aşağıdaki ifadeler yer almaktadır.

1. Matematiksel kavramları, işlemleri ve durumları farklı temsil biçimlerini kullanarak ifade eder.
2. Duygu ve düşüncelerini açıklarken farklı temsil biçimlerinden yararlanır.

MEB'de (2009) öğrencilerin ilişkilendirme becerisinin gelişimi için, somut ve soyut temsil biçimleri arasında ilişkilendirme yapabilecekleri problemler çözdürülmesi ve matematiksel kavram ve kuralların farklı temsil biçimleri ile gösterilmesi gerektiğini vurgulamaktadır.

Eğitim ortamlarında bilginin farklı temsil biçimleri sunulması öğrenme ve öğretme sürecinin etkiliği ve anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesi için önemlidir. Öğrencilerin verilen bir matematiksel durumu grafiksel, tablo halinde, sembolik veya sözel tanımlamalar ile açıklamaya çalışmaları; öğrencilerin matematiksel kavram ve ilişkileri somutlaştırmalarını, kompleks kavramlara farklı açılardan bakarak bu kavramlar arasındaki ilişkileri görmelerini ve tüm bu ilişkilerin kendileri için anlamlı olmasını sağlar (Kaput, 1989). Böylece çoklu temsiller ile çalışan öğrenciler, sadece belli bir temsil kullanan öğrencilere göre alternatif çözüm uygulama ve geliştirme konusunda daha başarılı olurlar (McGowan ve Tall, 2001).

Matematiksel fikirlerin, kavramların ve süreçlerin fiziksel olarak somutlaştırılması olarak tanımlanan temsiller, matematik eğitiminde farklı amaçlar için kullanılmaktadır (Lesh, Post ve Behr, 1987). Temsilleri anlama, verilen temsili kullanma ve temsil oluşturma işlemleri; problem çözmek veya problemin sonucunu iletmek amacıyla kullanılabilir. Öğrencilerin matematiksel bir durum için verilen temsilleri kullanabilmeleri, bu durum için uygun temsilleri seçebilmeleri ve kendileri için uygun temsil yapılarını oluşturabilmeleri matematiği anlamaları ve öğrenmeleri için önemlidir (Kılıç, 2009).

Öğrenciler fikirleri temsil etme ve matematiksel temsilleri kullanma becerilerini kazandıkları zaman, matematiksel düşünme kapasitelerini geliştirecek önemli bir araçları olur. Öğrenciler bir problemi ya da matematiksel durumu temsil ettiklerinde o problem ya da durum onlar için daha anlamlı ve ulaşılabilirdir. Temsiller, öğrencilerin matematiksel yaklaşımlarda iletişim kurmasını; kendi bilgilerini anlamlandırmasını, matematiksel kavramlarla ilgili ilişkileri ayırt etmesini ve gerçek problem durumlarını modelleyerek matematiğe uyarlamasını destekleyen bir etmendir (NCTM, 2000).

Matematik öğrenme ve öğretmede sözel ve yazılı iletişim önemli bir rol oynamaktadır (NCTM, 2000). Öğrenciler ve öğretmenler matematik hakkında anladıkları ve düşündükleri fikirleri iletişim yoluyla birbirleriyle değiştirebilirler (Lubinski ve Otto, 2002). İletişim sürecinin en önemli kısımlarında biri ise düşünceleri tam olarak ifade edebilecek temsillerin seçimidir (Hiebert, 1989). Sembol ve anlatımların kullanılarak matematiksel fikirlerin temsil edildiği süreç matematiksel yapıların başlangıç dönemlerinde oluşur ve bu süreç kompleks fikirleri öğrenciler için anlaşılır yapar (Carey, 1992).

Temsiller, kazanılması gereken önemli bir beceri olmasının yanı sıra, öğrenenin öğrendikleri konu hakkındaki kavramsal gelişimine ve problem çözme sürecine katkısı yönüyle de önemlidir. Öğrencilerin verilen problem durumlarında uygun temsilleri seçebilmeleri, öğrencilere problem çözme sürecinde etkili olmalarında büyük yarar sağlar (Schultz ve Waters, 2000). Problem çözmede başarı, verilen problem durumunu uygun bir şekilde temsil etmeden sağlanamamaktadır. Problemi anlamak ve çözüm için plan yapmak; problem cümlelerinin oluşturulduğu dili yorumlamak temsil etmeyi gerektirir (Akkuş, 2009). Ayrıca temsil etmede sorun yaşayan öğrenciler problem çözmede de zorlanmaktadırlar (Montague, 2008). Öğrenciler bir problem hakkında çalışırken; çözümü kolay takip etmek ve sonucu kontrol etmek için çizim yapma, notlar alma, tablolar ve eşitlikleri düzenleme gibi yöntemlerle kendi temsillerini oluştururlar (Sert, 2007). Temsiller; bu sayede öğrencilerin problem çözme sürecinde örüntüleri-ilişkileri görmelerinde, hesaplama yapmalarında ve farklı sonuçları görmelerinde yardımcı olur. Temsiller problem çözmede ve kavramsal konuların öğretiminde kullanılırsa, öğrenciler matematiksel fikirleri daha kolay öğrenebilirler (Goldin, 2003).

Çoklu temsil bir problem çözme stratejisidir. Bütün olasılıkları kullanarak matematiği tasvir ve temsil etmek probleme ilişkin bilgi veren ve problemi anlamımızı sağlayan etkili bir yöntemdir (Choike, 2000). Yapılan araştırmalar farklı problem türlerinde farklı temsil kullanımını desteklemektedir. Greeno ve Hall'a (1997) göre çoklu temsil, problem çözme süreciyle sık sık birleşir ve öğrencilerin düşünmesi için bir model oluşturur. Öğrenciler, temsilleri problemin çözümü için örüntü oluşturacak ve hesaplamalarına yardım edecek biçimde yapılandırırlar. Bu şekilde öğrencilerin matematiksel ilişkiler ve problem çözme sürecinde grafik, tablo, sembol ve sözel biçimlerinin kullanmaları onların matematiği anlamalarına yardımcı olur (Adu-Gyamfi 1993). Problem çözme sırasında çoklu temsilleri kullanmak, tek bir temsile göre problemi ele alma ve inceleme açısından daha fazla fırsat sunmaktadır. Bu sayede çoklu temsili kullanan öğrencilerin problem çözme sırasında karşılaştıkları sorunların azalacağı düşünülmektedir (Çelik, 2007; Erbaş, 2005; Dufour-Janvier, Bednarz ve Belanger, 1987).

Çoklu temsiller yapılandırmacı eğitim felsefesinde de önemli bir yere sahiptir. Çünkü yapılandırmacı eğitim ortamlarında öğrenciler, kendi deneysel dünyalarında, aktif olarak kendi yolları ve algılarıyla, benzersiz olan kendi bilgilerini oluştururlar (Von Glasersfeld, 1996). Yapılandırmacılığa göre öğrenciler matematiksel düşünceleri kavramsal olarak anlarlar ve daha sonra soyut temsilleri matematiksel bilgiye dönüştürmeyi öğrenirler. Öğretmenlerin bu süreçteki rolü matematik derslerinde kavramları farklı yollarla temsil etmek ve öğrencilerin yeni kavramları bu farklı temsil yollarıyla birleştirmeleri konusunda rehberlik etmektir (Goldin, 1990; Kaput, 1991). Çünkü deneyimdeki farklılıklardan dolayı, herkesin bir temsilden aynı şeyi anlaması ya da bir temsilin herkese eşit derecede anlamlı gelmesi beklenemez.

Sonuç olarak öğretim her kademesinde öğrencilere temsil biçimlerini kullanma ve uygulama konusunda fırsatlar verilirse öğrenciler; öğrenme sürecinde akranlarıyla paylaşım içinde olurken kendilerine uygun temsilleri belirleyip fikirlerini aktarabilirler (Lubinski ve Otto, 2002). Eğer öğrenciler sadece kendileri için özelleşmiş olan belirli bir temsil biçimiyle çalışırlarsa, farklı temsil biçimlerinin avantajlarını ve dezavantajlarını öğrenemeyecek ve kendi kavramsal anlamaları için farklı temsil biçimlerini nasıl kullanacaklarını bilmeyeceklerdir. Ayrıca öğrencilerin matematikte kullandıkları çoklu temsiller, onların matematik konularındaki kavramsal seviyelerini saptamamızı sağlar (Akkuş ve Çakıroğlu, 2006).

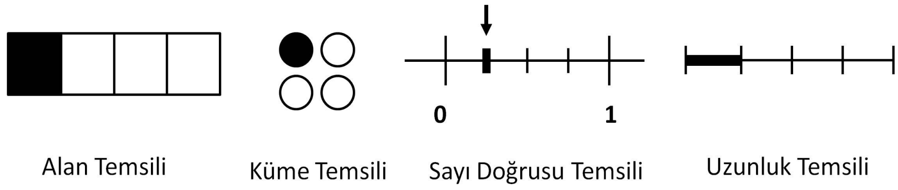
2.3 Kesirlerin Temsilleri

Çocukların kesirleri öğrenmeye başladığı dönem olan somut işlemler döneminde temsillerin kullanılması çok önemli bir yere sahiptir. Yapılan araştırmaların çoğunda, kesir öğretiminde temsillerin kullanılmasının fayda sağladığı belirtilmiştir (Cramer, Wyberg ve Leavitt, 2008; Siebert ve Gaskin, 2006; Cramer ve Henry, 2002; Kieren, 1988). Kieren (1988) kesirlerin ve rasyonel sayıların öğrenilmesinde temel olan parçalara ayırma şemasının temsiller sayesinde kazandırılacağını vurgulamıştır. Ayrıca kesir öğretiminde temsillerin kullanılması, kesirlerin sembolik gösterimlerinden kaynaklı olarak oluşan kafa karışıklıklarını açıklığa kavuşturmanın yanında kesirlerin anlamının da öğrenilmesine katkı sağlar. Bir temsil bazen bir öğrenci için anlamlı olmazken başka bir öğrenci içinse anlamlı olabilir. Dolayısıyla problem durumuna uygun farklı gösterimlerin kullanımı, öğrencilerin kesir algılarını genişletir ve derinleştirir.

Genel olarak matematik eğitiminde kesirlerin temsili ile yapılan çalışmalarda Lesh Çoklu Temsil Dönüşüm Modelinin örtük bir şekilde kullanıldığı söylenebilir (Kılıç, 2009; Wong ve Evans, 2006, 2007). Bu çalışmanın da teorik temelini bu temsil teorisi oluşturmaktadır. Bu teori içinde yer alan temsillerin karşılıkları ve bir matematiksel durumda (Ayşe ve 3 arkadaşının bir pastayı eşit paylaşmışlardır. Buna göre her biri ne kadar pasta yemiştir?) bu beş temsilin nasıl kullanıldığı aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

- *Gerçek hayat durumları:* Bir problem durumunun yorumlamaya ve çözmeye dayanan bilginin, gerçek dünya olayları çerçevesinde düzenlenmesiyle oluşan deneyime dayanan temsillerdir. Örnek matematiksel durum için bir pasta alınıp 4 kişiye paylaştırılarak her bir kişiye düşen parça miktarı öğrencilere gösterilebilir. Ya da problemin kendisi gerçek hayat durumuna örnektir.
- *Somut nesneler:* Öğrencilerin dokunabildikleri ve taşıyabildikleri nesneler olarak ifade edilir. Matematik sınıflarındaki birim küpler, geometrik cisimler, cebir karoları somut nesnelere örnek olabilir. Örnek problem durumunda kesir takımları kullanılabilir. Bu durumda kesir takımı içinde 1'e karşılık gelen bütün 4 eşit parçaya ayrılarak öğrencilere gösterilebilir. Ya da bir kağıt 4 eş parçaya ayrılabilir.
- *Konuşma dili:* Matematiksel etkinlikler sırasında öğrencilerin kendi günlük dillerini kullanarak ifade ettikleri her durum, konuşma dili temsili içinde yer alır. "Ayşe ve 3 arkadaşının bir pastayı eşit paylaşmışlardır. Buna göre her biri ne kadar pasta yemiştir?" ifadesinin kendisi ve bu soruya verilmesi muhtemel cevaplar (çeyreği,
- *Yazılı semboller:* Matematiksel semboller ve bu sembollerin birleşmesi ile oluşan matematiksel ifadelerin hepsidir. Başka bir ifade ile matematiksel hesaplamaların ve manipulasyonların içinde yer aldığı *sayısal temsiller* ve matematiksel anlatımların bir denklem ya da fonksiyon aracılığıyla sunulmasını sağlayan *cebirsel temsillerin* genel bir adıdır. Örnek durumda her bir kişiye düşecek pasta miktarı 1/4, %25, 0,25 şeklinde ifade edilebilir.
- *Resimler (durağan resimler):* Matematiksel düşüncenin resmedilmesi anlamına gelmektedir. Problem durumunda verilerin birbirleri ile ilişkilerini ortaya koyan ve problemin uzamsal bir düzende sunulmasını sağlayan diyagramlar ile verileri ya da problem çözümünü anlatan çizimleri ifade eden grafiksel temsiller de bu temsil türü içinde yer alır. Şekil 2-6 'deki 1/4 için çizilen şekiller örnek durumu temsil etmiş olur. Kesir öğretiminde kullanılabilecek grafiksel temsiller; alan, küme, sayı doğrusu ve uzunluk

temsilleri şeklinde sınıflandırılabilir.

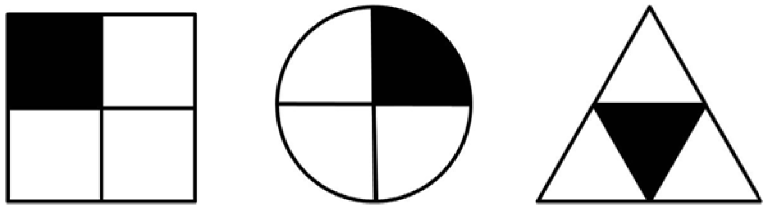


Şekil 2-6. 1/4 için resim temsilleri

Bir sonraki bölümde grafiksel temsillerden alan, küme, sayı doğrusu ve uzunluk temsilleri tartışılacaktır.

2.3.1. Alan temsili

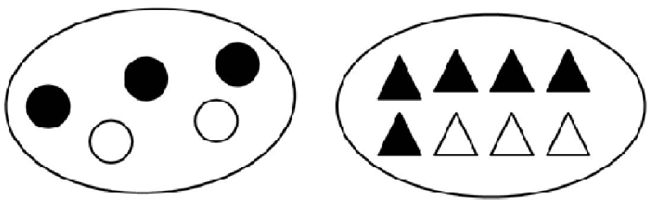
Alan temsili, geometrik bir şeklin alanının belli bir parçasının taranması sonucu elde edilen gösterimdir. Bu temsil, öğretmenlerin en çok tercih ettiği, kesir öğretimine başlangıçta temel alınan ve kesirlerin parça-bütün anlamını en uygun şekilde ifade eden bir gösterimdir. Alan temsili, kolay olarak algılansa da bu temsilin uzamsal düşünme becerisi ve alan kavramı ile ilişkilendirilmesi gerektiğinden bazı öğrenciler için öğrenilmesi zor olabilir (Armstrong ve Larson, 1995) çünkü öğrencilerin alan bilgisi bu modelin kullanılmasında önemli bir yer tutmaktadır. Bazı şekillerde parçaların eşliği kolayca görülebilirken, bazı şekillerde ve bölünmelerde öğrencinin geometri bilgisine başvurması gerekmektedir. Bu model için kare, dikdörtgen, üçgen ve çember gibi geometrik şekiller kullanılabilir (Baykul, 2005; Olkun ve Toluk-Uçar, 2004). Bu gösterimde seçilecek şeklin bölünecek parçalara uygun olması gerekmektedir. Bu açıdan bakıldığında örneğin dairesel modeller bazı kesirleri (örneğin 1/7; 1/ 11) eş parçaya ayırmak için uygun değilken (360°'yi tam olarak 7'ye ve 11'e bölünmediğinden) kesirlerin parça-bütün anlamını ve kesirde parçanın bütüne göre göreceli büyüklüğünü vurgulamada önemli bir yere sahiptir. Ayrıca üçgen şeklinin parçalara ayrılması diğer şekillere göre daha zordur.



Şekil 2-7. Alan Temsili Örnekleri

2.3.2. Küme temsili

Bir kümede yer alan eşit sayıda eleman içeren ve buna ait alt kümeleri kesir olarak ifade eden gösterim biçimidir. Bu temsilin anlaşılması alan modeliyle aynı zorlukta ya da biraz daha zor olabilir (Olkun ve Toluk-Uçar, 2004). Ayrıca, bu modelin anlaşılmasında öğrencilerin bölme becerileri de önem kazanmaktadır. Bu temsilde dikkat edilmesi gereken kümede yer alan elemanlar bütünü oluştururken, bu kümenin altında yer alan nesneler parçayı belirtir. Bu temsil türünde nesnelerin tamamının bir küme olarak algılanamaması ve kümeye ait parçaların ayırt edilememesi gibi problemlerle karşılaşılmasına rağmen küme temsili birçok genel yaşam durumuyla da bağlantılar kurmayı sağlar (Walle, Karp ve Bay-Williams, 2012).

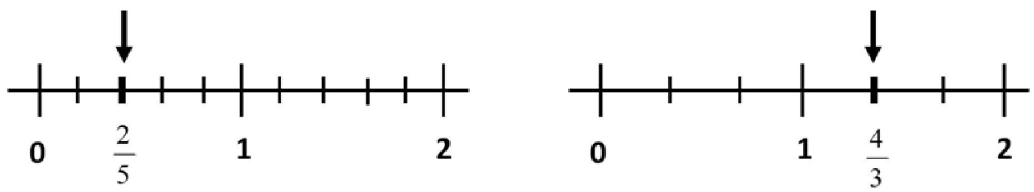


Şekil 2-8. Küme Temsili Örnekleri

2.3.3. Sayı Doğrusu Temsili

Her kesir bir sayıdır ve bu yüzden sayı doğrusunda bir noktaya karşılık gelmektedir. Kesir kavramı, sayı doğrusu temsili sayesinde soyut bir gerçek sayı olarak anlam kazanır. Bu özelliğiyle sayı doğrusu temsili, kesrin ölçme anlamını belirten en önemli gösterimdir (Bright, Behr, Post ve Wachsmuth, 1988). Bu sebepledir ki sayı doğrusu temsilinin anlaşılması diğer temsillere göre daha zordur. Dolayısıyla kesir öğretimde sona bırakılması, bu süreci kolaylaştıracağı için daha uygun olur.

Sayı doğrusu temsili sayesinde öğrenciler kesrin belirttiği sayı ile diğer sayılar (özellikle 0) arasındaki uzaklık ve bu kesrin göreceli olarak büyüklüğü hakkında bilgi sahibi olur. Bu temsilin en önemli faydası ise iki kesir arasında her zaman bir, dolayısıyla sonsuz, kesir olabileceği fikrini pekiştirmesidir (Walle, Karp ve Bay-Williams, 2012). Bu özellikleri nedeniyle yapılan araştırmalarda sayı doğrusu gösterimi ile eğitim alan öğrencilerin alan ve küme modeli ile eğitim görenlere göre kesir kavramının algılanmasını ölçen testlerde daha başarılı oldukları görülmüştür. Bunun bir sonucu olarak kesir öğretiminde sayı doğrusunun daha çok vurgulanması gerektiğini birçok araştırmacı tarafından belirtilmiştir (Clarke, Roche, Mitvhell, 2008; Usiskin, 2007; Flores, Samson ve Yanik, 2006; Watanabe, 2006; Niemi, 1996). Ayrıca sayı doğrusu temsili kullanılarak gerçek hayat durumlarıyla yakından ilişki kurulabilir. Örneğin müzik, bunun için güzel bir ortamdır. Notalar (1/2, 1/4, 1/8, 1/16) sayesinde ölçme anlamı pekiştirilebilir. Şekil 2-9'da 2/5 ve 4/3($1\frac{1}{3}$) için sayı doğrusu temsili örneklendirilmiştir.



Şekil 2-9. 2/5 ve 4/3($1\frac{1}{3}$) için sayı doğrusu Temsil Örnekleri

Genel olarak değerlendirilecek olursa ilköğretimde kesir öğretiminde kullanılan grafiksel temsiller; alan, küme ve sayı doğrusu temsilleridir (Kadhi, 2005). Bu temsiller bazı yönleriyle birbirlerine benzerken bazı açılardan da farklılaşmaktadır. Alan ve sayı doğrusu temsilinde birimin (bütünün) eş parçalara ayrılması sonunda ortaya çıkan daha küçük birimler de yine eş parçalara ayrılabilir. Yani alan ve sayı doğrusu temsillerinde sürekli nesneler kullanılırken, küme temsilinde birbirinden bağımsız ayrık nesneler kullanılır. Bununla birlikte alan ve küme temsili içerdikleri kesir anlamları yönüyle benzerdir. Her iki temsil türü de kesirlerin parça-bütün anlamı ile ilgilidir. Öte yandan sayı doğrusu temsili ise ölçme anlamıyla ilgilidir (Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983). Bunların dışında sayı doğrusu temsili bir kaç açıdan da alan ve küme temsilinden farklılaşmaktadır. Bunlardan ilki sayı doğrusunda uzunluklar birim belirtir ve tekrarlı birimlerden oluşur. Bir diğeri ise sayı doğrusu temsilinde bir sayıyı ifade etmek için iki tane referans noktasına ihtiyaç vardır (Bright, Behr, Post ve Wachsmuth, 1988).

2.3.4. Uzunluk temsili

Literatürde belirtilen alan, küme ve sayı doğrusu temsili dışında uzunluk temsili bulunmaktadır. Uzunluk temsili bir doğru parçasının eşit uzunluklara bölünmesiyle oluşan bir grafiksel temsil türüdür. Uzunluk temsili isminden dolayı kesirlerin ölçme anlamı ile ilgili gibi anlaşılsa da Ni (2001) ve Niemi'ni (1996) belirttiği gibi uzunluk temsili kesrin parça-bütün anlamıyla ilgilidir. Ayrıca kesrin uzunluk temsili ile sayı doğrusu temsili yapısal olarak farklıdır. Sayı doğrusunda her iki uç sürekli devam ederken, uzunluk temsili iki uç ile sınırlıdır. Uzunluk temsilinde, eldeki doğru parçası sayı doğrusundaki 0 ile 1 arasındaki uzaklığı temsil eder ve 1 birim olarak alınır. Alan modelinde olduğu gibi bütün (1) eş parçalara ayrılır ve bu parçalardan bazıları kullanılarak kesir temsil edilir.

Şekil 2-10. Uzunluk Temsili Örnekleri

2.4. İlgili Araştırmalar

Alanyazın incelendiğinde kesirler ve temsiller konusunda gerek yurtdışında gerekse yurt içinde yapılan çalışmaların sayısı azımsanmayacak kadar çoktur. Bu yüzden bu bölümde kesirler konusunda bu araştırmaya yol gösterecek çalışmalara yer verilmiştir. Kesirlerin anlamları ve temsilleri ve denk kesirlerin farklı temsilleri ile ilgili yapılan çalışmalardan bu bölümde bahsedilerek, ilgili literatürün nasıl bir gelişim gösterdiği yansıtılmaya çalışılmıştır.

2.4.1. Kesirlerin anlamları ile ilgili yapılan çalışmalar

Kesirle ile ilgili yapılan çalışmalar, genel olarak, kesirlerin farklı anlamlarının önemine değinmişlerdir. Söz konusu çalışmalarda, bu farklı anlamların öğrenilmesinin hem kesirlerin hem de bağlantılı diğer matematik konuların anlaşılmasında kolaylık sağlayacağı vurgulanmıştır. Ayrıca kesirlerin farklı anlamların bilinmesinin öğrencilerin kesirlerle ilgili problemlerin çözümü için ön koşul olduğu ifade edilmiştir (Aksu, 1997; Behr, Khoury, Harel, Post ve Lesh, 1997; Mamede, Nunes ve Bryant, 2005; Haser ve Ubuz, 2003; Larson, 2000; Mısral, 2009; Moss, 2002; Toluk, 2002; Vanhille ve Baroody, 2002).

Moss (2002) yaptığı çalışmada öğrencilerin kesirler, oran ve orantı konularını anlamlandırma süreçlerini araştırmıştır. Çalışmanın bulguları verilen bir kesir sayısını ondalık sayıya çevirebilme, oran anlamını ifade edebilime, rasyonel sayıları sıralayabilme, işlemleri değişik çözüm yolları ile bulabilme ve konuyla ilgili düşüncelerini kolaylıkla ifade edebilme yeterliliklerini öğrencilerin kesir ve rasyonel sayı kavramını öğrenmelerinin göstergesi olduğunu ortaya koymuştur.

Vanhille ve Baroody'nin (2002) 6. sınıflar üzerinde yaptıkları çalışmada, kesirler ve rasyonel sayıları konusundaki yeterlilik düzeyinin oran ve orantı konusundaki başarı üzerine etkisi araştırılmıştır. Çalışmanın sonucunda oran ve orantı sorularının çözülebilmesi için kesirler ve rasyonel sayıların ön şart olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca oran ve orantı konusunun içinde yer alan hız, yüzde ve karışım problemleri için kesirlerle yapılan işlemlerin önemli olduğu belirtilmiştir.

Behr, Khoury, Harel, Post ve Lesh (1997) yaptıkları kesirlerde denklik ve çarpma işlemlerinin öğretimini hedefleyen deneysel çalışmada özellikle kesrin işlemci anlamının kullanımı tercih edilmiştir. Bu araştırma sonucunda, işlemci ve oran anlamını içeren problemleri çözmek için gerekli olan kavramsal ve çarpımsal düşünme seviyelerinin aynı derecede olduğunu belirtmişlerdir.

Haser ve Ubuz (2003) yaptıkları çalışmada öğrencilerin kesirlerle ilgili sözel problemleri çözerken gösterdikleri kavramsal anlamayı incelemiştirler. Sonuçlar, öğrencilerin problem çözmek için farklı yollar kullandığını göstermiştir. Öğrencilerin verdikleri yanlış cevaplar, öğrencilerin kesirleri nasıl algıladıklarını özellikle parça-bütün anlamını ve problemleri çözmek için kesir kavramını nasıl kullandıkları hakkında detaylı bilgi vermiştir. Doğru olmayan çözümlerin, parça-bütün anlamının öğrencilere yanlış öğretiminden, bunun sonucu olarak oluşan kavram yanılgılarından ve son olarak problemi anlamamaktan kaynaklandığını göstermiştir.

Toluk (2002) ilkokul öğrencilerinin rasyonel sayıların parça-bütün anlamından bölme anlamına geçiş sürecinde oluşturdukları kavramsal şemaları belirlemek amacıyla yaptığı araştırmada, öğrencilerin rasyonel sayıları bölüm olarak kavramsallaştırmada güçlük çektiklerini tespit etmiştir. Bu güçlüğün giderilmesi için eşit paylaşımı vurgulayan öğrenme etkinliklerinin temel alınması gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca araştırmaya katılan öğrenciler, eşit paylaşım problemlerini bölme olarak yorumlamaya başladıktan sonra kesirlerde denklik konusunda daha başarılı olmuşlardır.

Mamede, Nunes ve Bryant (2005) ilköğretim 1. sınıf (6 ve 7 yaşında) öğrencileri üzerinde yaptıkları çalışmada öğrencilerin parça-bütün ve bölme anlamlarında kesirleri isimlendirme, denklik ve sıralama yetkinliklerini incelemişlerdir. Araştırma sonucunda öğrencilerin kesirlerde sıralama ve denklik problemlerinin çözümünde; parça-bütün anlamını kullanan öğrencilerin bölme anlamını kullanan öğrencilerden daha başarılı oldukları tespit edilmiştir. Ayrıca bu iki anlam için kullandıkları stratejilerin farklılaştığını bulunmuştur.

Mısral (2009) tarafından yapılan çalışmada ilköğretim 6. sınıf öğrencilerine kesirlerin farklı anlamlarına göre yapılan bir eğitim verilmiştir. Araştırmada verilen eğitimin öğrencilerin kesirlerde toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerinde kavramsal ve işlemsel düzeylerine etkisi incelenmiştir. Bu çalışmanın sonucunda ölçme anlamını temel alan eğitimin kesirlerde toplama ve çıkarma işlemlerinin kavramsal ve işlemsel düzeylerine etkisi bulunmazken, kesirlerin işlemci anlamını temel alan eğitimin kesirlerde çarpma işleminin kavramsal ve işlemsel düzeylerinde etkili olmuştur.

Larson (2000) 6. sınıf öğrencileri üzerinde yaptığı araştırmada rasyonel sayıların ölçme anlamının gelişimini 6 hafta boyunca incelemiş ve ölçme anlamı ile parça-bütün anlamını basit, bileşik ve denk kesirleri kullanarak karşılaştırmıştır. Bu çalışmada, matematikte ölçme ile ilgili konularla rasyonel sayıların ilişkilendirilmesinin gerekliliği vurgulanmış ve rasyonel sayıların ölçme anlamının kullanılabilmesinin rasyonel sayılarla ölçme konuları arasında bağlantı kurulabilmesine bağlı olduğunu belirtilmiştir.

2.4.2. Kesirlerin temsilleri ile ilgili yapılan çalışmalar

Kesirlerin farklı anlamlarıyla beraber kesir öğretiminde vazgeçilmez unsurlardan birisi de kesirlerin somutlaştırılmasını sağlayan temsil türleridir. Konuyla ilgili çalışmalar, genel olarak matematiksel ya da problem çözme durumlarında kullanılan temsil türleri ve bu türler arasındaki dönüşüme odaklanmaktadır. Bu tür çalışmalarda da sembolik ve görsel temsil türlerinin yoğun olarak kullanıldığı ve bununla birlikte sözel ve gerçek dünya durum temsillerine de yer verildiği belirlenmiştir (Aksu, 1997; Orhun, 2007; Kaput ve Sims-Knight, 2003; Şiap ve Duru, 2004; Tezcan, 2003). Ayrıca yapılan çalışmalar öğrencilerin sembolik temsil türleri ile görsel temsil türlerinin dönüşümünde (özelliklerde sayı doğrusu temsilinde) sorunlar yaşadıklarını göstermektedir (Ersoy ve Ardahan, 2003; Bright, Behr, Post ve Wachsmuth, 1988; Contreras ve Martinez-Cruz, 2000; Gürbüz ve Birgin, 2008; Pesen, 2008).

Tezcan (2003) yaptığı çalışmada ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin rasyonel sayı kavramını algılamasında karşılaştıkları güçlükleri araştırmıştır. Bu araştırmada öğrencilerin rasyonel sayılar kümesini yazma ve sembolle gösterme konusunda kavram yanılgılarının olduğu, doğal sayılarda öğrendikleri toplama işleminin özelliklerini rasyonel sayılarda da uygulamaya çalıştıkları bulmuştur. Söz konusu çalışmanın bulgularında ayrıca öğrencilerin rasyonel sayıların karşılaştırmasında problem yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Kaput ve Sims-Knight'ın (1983) öğrencilerin bir problemin bağlamını matematiksel sembol sistemlerine dönüştürürken karşılaştıkları zorluklar üzerine yaptıkları çalışmada; karşılaşılan zorlukların kavram yanılgılarından kaynaklandığını tespit edilmiştir. Araştırmacılar, bu çalışmada, öğrencilerin dil ve görüntü gibi doğal temsil sistemlerinden farklı olarak, matematiksel sembol sistemlerini anlamada da sorunlar yaşadıklarını ve bunun problemin bağlamından da kaynaklanabileceğini ortaya koymuşturlar.

Aksu (1997) tarafından yapılan araştırmada öğrencilerin kesirlerdeki işlem başarıları ile sembolik, sözel ve kavramsal olarak sunulan kesir problemlerindeki performansları incelenmiştir. Araştırma bulgularına göre öğrencilerin sembolik şekilde sunulan problemlerde, sözel ya da kavramsal problemlere göre daha başarılı oldukları gözlenmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin toplamayı içeren sözel problemlerde zorlanmazken çarpma işlemini içeren sözel problemlerde güçlük yaşadıkları görülmüştür. Araştırmanın sonuçlarına göre, ezbere uygulanan kurallar yapılan işlemi anlamaya yardımcı olmadığı gibi bu işlemleri yapma başarısını da olumsuz etkilemektedir.

Orhun’un (2007) yaptığı araştırmada 4. sınıf öğrencilerinin kesir konusundaki başarıları, formal aritmetik ve görselleştirme açısından cinsiyete göre incelenmiş ve kesir işlemlerinde formal aritmetik ve görselleştirme arasındaki ilişki ortaya koyulmuştur. Yapılan incelemeye göre, genel olarak, tüm örneklem içerisinde kız ve erkek öğrencilerin kesir konusundaki başarılarında anlamlı bir fark olmadığı her iki grupta da başarının düşük olduğu görülmüştür.

Şiap ve Duru (2004) ilköğretim besinci sınıf öğrencilerinin kesirlerdeki işlemlerde geometriksel temsilleri anlayabilme ve kullanabilme becerilerini incemişlerdir. Çalışmanın bulgularına göre, ilköğretimin birinci kademesindeki öğrenciler, kesir kavramının tam olarak algılayamamaktadırlar. Ayrıca kesirlerde işlem gerektiren soruları geometrik beceri gerektiren sorulara göre daha iyi yapmaktadırlar. Bununla birlikte paydaları aynı olan soru çiftlerinin hem işlem hem de geometriksel beceri gerektiren sorularında, başarının yüksek olduğunu ve aralarında fark bulunmadığı, fakat paydaları farklı olan soruların geometriksel beceri gerektiren bölümlerinde öğrencilerin çok zorlandığını ve başarısız olduklarını tespit etmişlerdir. İlgili araştırmanın sonuçları ayrıca geometriksel beceri gerektiren sorularda öğrencilerin önce cebirsel olarak durumu temsil edip buna göre işlem yaptıkları ve erkek öğrencilerin kız öğrencilere göre hem işlem becerisi hem de geometriksel beceri gerektiren sorularda daha başarılı oldukları sonucuna ulaşmıştır.

Gürbüz ve Birgin (2008) farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin rasyonel sayıların cebirsel, geometrik ve sayı doğrusu temsilleri kullanarak işlem yapma becerilerini karşılaştırmışlardır. Araştırmanın bulguları ilköğretim ikinci kademedeki öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki toplama, çıkarma, çarpma, bölme, denklik ve sıralama kavramlarını kurala bağımlı olarak öğrendiklerini ve kavramsal öğrenmenin gerçekleşmediğini ortaya koymuştur. Araştırma sonunda; öğrencilerin öğrenim seviyesi arttıkça rasyonel sayıların farklı temsilleriyle işlem yapma becerilerinin geliştiğini, özellikle, rasyonel sayıların cebirsel gösterim biçimini kullanarak işlem yapma becerilerinin, geometrik model ve sayı doğrusu temsil biçimlerini kullanarak işlem yapma becerilerine kıyasla daha iyi gelişim gösterdiği ifade edilmiştir.

Pesen (2008) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin kesirleri sayı doğrusu üzerine gösteriminde ilköğretim 3.sınıf öğrencilerinin yaşadıkları güçlükler ve bunun altında yatan kavram yanılgıları incelenmiştir. Araştırmada öğrencilerin bütünü eş parçaya ayırmada ve buna bağlı olarak 0 ile 1 arasındaki noktaları ya fazla ya da eksik şekilde parçalara ayırdıkları görülmüştür. Bununla birlikte öğrenciler a/b sembolünün tek bir sayı olarak algılamada sorunlar yaşamakta ve kesri iki farklı sayı olarak algılamaktadırlar.

Ardahan ve Ersoy (2003) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin birim kesir kavramını tam olarak anlayamadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin kesirlerde toplama ve çıkarma işlemini sayı doğrusu üzerinde gösteremedikleri, ondalık kesirlerde basamak değerlerini kavrayamadıkları, ondalık kesirlerde denklik kavramını açıklayamadıkları bu çalışmada ulaşılan bulgulardan diğerlerdir.

Bright, Behr, Post ve Wachsmuth'un (1988) 4. ve 5. sınıf öğrencilerinin sayı doğrusu üzerindeki temsil etme biçimlerinin incelendiği çalışmasında öğrencilere kesirlerin sayı doğrusu üzerinde öğretimi ile ilgili 4-8 günlük öğretim uygulanmıştır. Araştırmanın sonuçları bu verilen öğretimin ardından bile öğrencilerin çoğunun kesirlerin büyüklüklerini göstermekte ve özellikle de parçalara ayırmaya bağlı olarak sayı doğrusunu kullanmakta hala ciddi problemlerinin olduğunu ortaya koymuştur.

Contreras ve Martinez-Cruz'un (2000) öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmada kesirlerin parça-bütün ve ölçme anlamlarının kullanım sıklıkları ve öğretmen adaylarının rasyonel sayıları temsil ederken hangi temsilleri tercih ettikleri incelenmiştir. Bunun için 3/5 sonucunu veren hikâyeli kesir problemleri oluşturmalarını istemişlerdir. Çalışmanın sonucu parça-bütün (%63,4) anlamının ölçme anlamından (%44) daha baskın olduğunu göstermiştir. Bu durumun nedeni de öğretmen adaylarına üniversite öğrenimine kadar baskın olarak bu anlamların öğretilmesine dayandırılmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının daha çok sürekli değişkeni içinde barındıran alan temsilinden yararlanmalarına rağmen alan temsili ile verilen durumu kavramsallaştırmada sıkıntı (bütünü ve parçayı tanımlama gibi) yaşadıkları görülmüştür.

2.4.3. Kesirlerin anlamları, temsilleri ve denkliği ile ilgili yapılan çalışmalar

Literatürde yukarıda bahsedilen çalışmalar dışında kesirlerin kavranmasında önemli yeri olan denk kesirlerin; kesirlerin farklı anlam ve temsilleriyle beraber incelendiği çalışmalar da göze çarpmaktadır (Kılıç ve Özdaş, 2010; Ni, 2001; Niemi, 1996; Wong ve Evans, 2007). Bu çalışmalar özellikle öğrencilerin denk kesirleri farklı temsillerle ifade etmelerini kesirlerin anlamları bağlamında da değerlendirmektedirler.

Wong ve Evans'un (2007) yaptıkları çalışmada 3. 4. ve 5. sınıf öğrencilerinin denk kesirlerin kavramsal anlamalarını araştırılmıştır. Çalışmada, kesirlerin parça-bütün ve ölçme anlamları kullanılarak, denk kesirlerin Lesh çoklu temsil dönüşüm modeli içinde yer alan yazılı semboller ve resim temsilleri (alan ve sayı doğrusu) arasındaki dönüşümleri incelenmiştir. Araştırmanın sonuçları, öğrencilerin çoğunun denk kesrin sembolik temsillerini alan temsiline dönüştürmede güçlük yaşadığını göstermiştir. Bununla birlikte bu dönüşümü başaran öğrenciler, sayı doğrusu temsiline dönüşümde de başarı sergilemişlerdir.

Kılıç ve Özdaş (2010) ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin kesirlerde karşılaştırma ve sıralama yapmayı gerektiren problemlerin çözümleri sırasında ne tür temsiller kullandıklarını ve bu temsilleri kullanırlarken sorunlar yaşayıp yaşamadıklarını araştırmıştır. Çalışmada ortaya çıkan sonuçlara göre öğrenciler, bu tür problemlerin çözümlerinde konuşma dili, sembolik ve resim temsillerini kullanmaktadırlar. Problem çözümü sırasında bir temsili etkili olarak oluşturamayan ve kullanamayan öğrencilerin, aynı zamanda, başka temsil türlerinde de temsil oluşturamama ve kullanamama gibi benzer sorunlar yaşadıklarını görülmüştür.

Niemi (1996) tarafından yapılan çalışmada, ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin kesirlerde işlem becerileri, kesirleri sıralama ve kesirlerde denklik konularında farklı temsil (alan, küme, uzunluk ve sayı doğrusu) türlerini kapsayacak şekilde genel başarı durumları ortaya konmaya çalışılmıştır. Bu çalışmada öncelikle öğrencilere ön test uygulanıp 3 hafta boyunca kesirler konusunda öğretim yapılmış ve öğrencilere son test uygulanmıştır. Araştırma sonuçları, verilen eğitimle birlikte kavram yanılgılarının azaldığını fakat öğrencilerin yine de kesirleri anlamayı ölçen kompleks durumlarda sorunlar yaşamaya deva ettiklerini göstermektedir. Sayı doğrusu temsili kullanılarak eğitim alan öğrencilerin alan, uzunluk ve küme temsili kullanılarak eğitim alan öğrencilerden, kesir kavramlarının algılanmasını ölçen değerlendirmede anlamlı olarak daha iyi oldukları belirlenmiştir. Araştırmanın sonuçları arasında kesir kavramının matematik derslerinde daha fazla işlenmesi gerektiği ihtiyacı belirtilmiştir.

Ni (2001) ilköğretim 5. ve 6. sınıf öğrencilerinin rasyonel sayıların semantik anlamlarının (parça-bütün ve ölçme) grafiksel temsiller ile kesirlerin denkliği kavramında nasıl yapılandırdıklarının sorgulamıştır. Bu çalışmada öğrencilerin denk kesirlerin sembolik temsillerini farklı kesir temsil türleriyle (alan, küme, uzunluk ve sayı doğrusu) ilişkilendirebilme düzeyini test eden "Temsilsel Akıcılık Testi" kullanılmıştır. Araştırma bulgularına göre beşinci sınıflar denk kesirlerin temsilinde düşük performans sergilemekteyken alan temsilinde daha başarılıdırlar. Altıncı sınıflar ise (genel olarak) parça-bütün anlamında başarılı olurken ölçme anlamında başarısızlık yaşamaktadırlar. Araştırma ulaşılan sonuçlardan biri: Çarpımsal ilişkinin kavranılması, denk kesir kavramının öğrenilmesinde temel niteliğindedir. Bir diğeri ise: kesirlerin denk ve sade gösterimlerinin kesirlerin parça bütün ve ölçme anlamlarında paralel gelişim göstermediğini; parça-bütün anlamının ölçme anlamına göre daha önce kazanıldığıdır.

BÖLÜM III

3. Yöntem

Bu bölümde araştırmanın yöntemi sunulacaktır. Araştırmanın deseni, evren ve örneklem, veri toplama aracı ve süreci hakkında bilgi verilip verilerin analizinde kullanılan istatistiksel yöntemler ve teknikler tanıtılacaktır.

3.1. Araştırma Deseni

Betimleme, bütün bilim kollarında ilk aşamayı oluşturur. Betimlemenin amacı araştırmanın konusu olan olguları ve bu olgular arasındaki ilişkileri saptama, sınıflama ve kaydetmedir (Yıldırım, 2000). Betimsel desenli çalışmalar olayların, objelerin, varlıkların, kurumların, grupların ve çeşitli alanların "ne" olduğunu betimlemeye, açıklamaya çalışan araştırmalardır (Kaptan, 1998:59). Tarama modeli ise geçmişte ya da halen var olan durumu olduğu şekliyle betimlemeye çalışan araştırma yaklaşımıdır. Çok sayıda elemanın yer aldığı evrende, evren ile ilgili genel bir yargıya ulaşmak amacıyla evrenden seçilecek örneklem üzerinde yapılan taramayı amaç edinen model betimsel desen içinde yer alan genel tarama modelidir (Karasar, 2009). Bu araştırma, nicel yöntemlerle toplanan veriler yardımıyla öğrencilerin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerini inceleyerek betimlemeye çalıştığı için betimsel araştırma desenlerinden genel tarama modeli grubuna girmektedir.

3.2. Evren ve Örneklem

Araştırmanın evrenini 2011 – 2012 eğitim öğretim yılı Sakarya ili Geyve ilçesinde ilköğretim okullarında okuyan 4, 5, 6 ve 7. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. İlköğretim matematik öğretim programında kesirlerin sayı doğrusunda gösterilmesi ile ilgili kazanımları dördüncü sınıftan itibaren başladığı için araştırmaya dördüncü sınıflardan başlanmıştır. Sekizinci sınıflar ise ortaöğretime giriş sınavlarına hazırlanmalarından dolayı araştırma kapsamına alınmamıştır.

Araştırmanın uygulanacağı okullar olasılık temelli örneklenme yöntemi içinde yer alan "küme örnekleme" yöntemiyle seçilmiştir. Küme örnekleme, evrenin birden fazla benzer amaçlı küme adı verilen birimlerden oluştuğu ve bu kümelerin eşit seçilme şansına sahip oldukları durumda yapılan örnekleme yöntemidir. Küme örnekleme, araştırmacıya zaman ve fiziksel maliyeti düşürme gibi faydalar sağlar (Karasar, 2009).

Çalışmada, Türkçe'ye çevrilen Temsilsel Akıcılık Testi'nin güvenilirliğini kontrol edebilmek için bir pilot uygulama yapılmıştır. Pilot uygulamaya üç ilköğretim okulunda 4, 5, 6 ve 7. sınıfa devam eden 137'si kız, 120'si erkek toplam 257 öğrenci katılmıştır.

Araştırmanın uygulanması aşamasında öncelikle Sakarya ili Geyve ilçesindeki ilköğretim okulları belirlenmiştir. Belirlenen 16 okuldan araştırmanın uygunluğuna göre seçilen 3 okulda pilot uygulama yapılmıştır. Asıl uygulamada ise katılımcılar küme örnekleme yöntemine uygun şekilde olasılıksal olarak evreni temsil gücünü artırmak amacıyla, Sakarya ili Geyve ilçesinde 16 ilköğretim okulunun 11'inde öğrenimine devam öğrencilerden seçilmiştir. Seçilen bu okullardan 1111 öğrenci araştırmaya katılmıştır. Tablo 3-1.'de pilot ve asıl uygulamaya katılan öğrencilerin sınıflara ve cinsiyete göre dağılımı görülmektedir.

Tablo 3–1. Araştırmanın örnekleminin sınıf düzeyi ve cinsiyete göre dağılımı

Cinsiyet	Sınıf Seviyesi								Toplam	
	4. Sınıf		5. Sınıf		6. Sınıf		7. Sınıf			
	Pilot	Asıl	Pilot	Asıl	Pilot	Asıl	Pilot	Asıl	Pilot	Asıl
Kız	43	132	27	134	28	144	39	137	137	547
Erkek	39	141	25	150	31	141	25	132	120	564
Toplam	82	273	52	284	59	285	64	269	257	1111

Tablo 3-1 incelendiğinde araştırmaya 273'ü (%24,6) 4. sınıf, 284'ü (%25,6) 5. sınıf, 285'i (25,6) 6. sınıf ve 269'u (%24,2) 7. sınıf olmak üzere toplam 1111 öğrencinin katıldığı ve bunlardan 547 tanesinin (%49,2) kız, 564 tanesinin (%50,8) erkek öğrenci olduğu görülmektedir. Buna göre farklı sınıf seviyelerindeki öğrenci sayılarının birbirine yakın olduğu söylenebilir.

Milli Eğitim İstatistikleri'ne göre, 2011-2012 eğitim ve öğretim yılı içerisinde Sakarya ilinde ilköğretim 4, 5, 6 ve 7. sınıflara devam eden toplam 58.626 öğrenci bulunmaktadır (http://sgb.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2012_12/06021046_meb_istatistikleri_orgun_egitim_2011_2012.pdf., 21 Mart 2013'de erişildi). Bu araştırmanın evreni Sakarya'nın Geyve ilçesi seçildiği için evrendeki öğrenci sayısı bu değerin altında (58.626) olup seçilen örneklem sayısı bu sayı için bile $\alpha= 0.05$ anlamlılık düzeyinde d=0,03 örnekleme hatasıyla hesaplanabilecek tüm alt sınırın (1056) üzerindedir (Agresti ve Finlay, 1997).

3.3. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmada öğrencilerin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerini betimlemek amacıyla Niemi (1996) tarafından geliştirilen Temsilsel Akıcılık Testi (Representational Fluency, TAT) uygulanmıştır. TAT'ı bu çalışmada kullanmak için Niemi'den gerekli izin alınmıştır (D. Niemi, kişisel görüşme, Haziran 4, 2012). Elektronik posta ile alınan iznin çıktısı EK 1'de mevcuttur.

TAT'ın Türkçe'ye çevrilme sürecinde üç uzmandan yardım alınmış, testin İngilizce halindeki kavramların İlköğretim matematik programındaki ve literatürdeki karşılıkları bulunarak yanlış anlaşılmalara neden olmayacak şekilde öğrencilerin yaş özellikleri de dikkate alınarak uygun kelimeler seçilerek gerekli sözel düzenlemeler yapılmıştır.

3.3.1. Temsilsel akıcılık testi (representational fluency test)

Temsilsel Akıcılık Testi (TAT), Niemi (1996) tarafından öğrencilerin kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiştir. TAT, Niemi (1996) ve Ni (2001) tarafından farklı araştırmalarda kullanılmıştır.

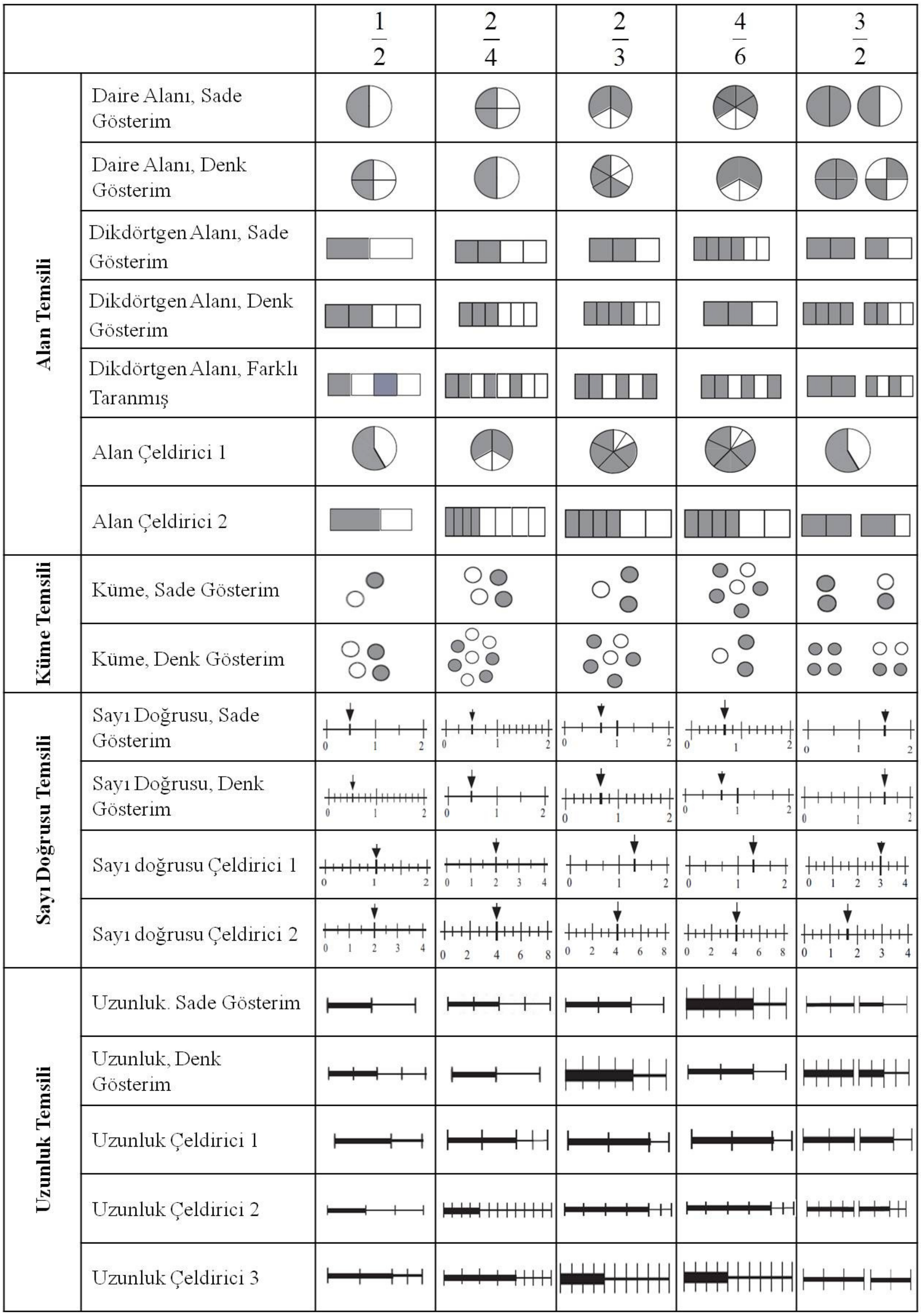
Testin asıl hali; denk ve denk olmayan kesirlerin sembolik ve grafiksel temsilleri arasındaki ilişkiyi ölçmek için hazırlanmıştır. Test, kesirlerin parça-bütün ve ölçme anlamlarını; alan, sayı doğrusu, uzunluk ve küme temsillerini kullanarak ölçmektedir. Testteki maddelerde kesrin sade ve denk gösterimleri grafiksel olarak temsil edilmiştir ve ayrıca çeldiricilere de yer verilmiştir.

Kesrin sade gösterimi, grafiksel temsil öğesinin (alan, küme, uzunluk ve sayı doğrusu) kesrin paydasında belirtilen sayıda eşit parçaya bölünmesi ve pay kadar parçanın belirtilmesiyle temsil edilmesidir. Temsil öğesinin kesrin paydasında belirtilen sayının katları ya da bölenleri kadar sayıya bölünüp temsil edilmesine ise kesrin denk gösterimi denir. Bu yüzden kesrin sade ve denk gösterimi kesrin pay ve paydasında bulunan sayısal değere göre değişmektedir (Ni, 2001). Bir başka deyişle, bir grafiksel temsil aynı miktarı belirtse bile bir kesrin sade gösterimi diğer bir kesir için denk gösterim ya da bir kesrin denk gösterimi diğer bir kesir için sade gösterim olabilir. Örneğin, 1/2 sembolik temsili için bir bütünün 2 eş parçaya ayrılıp 1 parçasının seçilmesiyle oluşan grafiksel temsil kesrin sade gösterimiyken; 4 parçaya ayrılıp 2 parçasının seçilmesi ya da 6 parçaya ayrılıp 3 parçasının seçilmesiyle oluşan grafiksel temsil kesrin sade gösterimidir. Diğer bir yandan 3/6 sembolik temsili için bir bütünün 6 parçaya ayrılıp 3 parçasının seçilmesiyle oluşan grafiksel temsil kesrin sade gösterimiyken; 4 parçaya ayrılıp 2 parçasının seçilmesi ya da 2 parçaya ayrılıp 1 parçasının seçilmesiyle oluşan grafiksel temsil kesrin sade gösterimidir. Bu durum Şekil 3-1 de 1/2 ve 3/6 için kesrin sade ve denk gösterim örnekleri sunulmuştur.

Şekil 3-1. 1/2 ve 3/6 kesirleri için sade ve denk gösterim örnekleri

Öğrencilerden testte verilen kesir sembolünün grafiksel temsillerini seçmeleri istenmiştir. Testi oluşturmak için 5 farklı kesir sembolü (1/2, 2/3 2/4, 4/6 ve 3/2) testin beş farklı sayfasının başına yerleştirilmiş ve öğrencilerden verilen sembole denk olan o sayfadaki bütün gösterimleri daire içine almaları istenmiştir. Her kesir sembolünün sayfasında 18 grafiksel temsil rastgele gelecek şekilde dizilmiştir. Böylece, TAT'da toplamda 5 kesir sembolü için hazırlanmış 90 grafiksel temsil yer almıştır. Testin uygulamada kullanılan hali, EK 2'deki gibidir.

Şekil 3-2.'de görüldüğü gibi sembolü verilen her bir kesir için alan, küme, sayı doğrusu ve uzunluk temsilleri ile birlikte bunlara ait çeldiriciler bulunmaktadır. Alan temsili içinde beş tane gösterim yer almaktadır. Bunlar, birer tane daire alanının sade gösterimi, daire alanının denk gösterimi, dikdörtgen alanının sade gösterimi, dikdörtgen alanının denk gösterimi ve dikdörtgen alanının farklı şekilde taranmış denk gösterimidir. Küme temsili, sayı doğrusu ve uzunluk temsilleri sade ve denk gösterimi olmak üzere iki temsilden oluşmaktadır. Çeldiriciler ise her bir maddede alan ve sayı doğrusu temsilinde ikişer, uzunluk temsilinde üçer tanedir. Küme temsiline ait çeldirici bulunmamaktadır.



Şekil 3-2. TAT'daki maddelerin grafiksel temsil türlerine göre dağılımı

Testte yer alan kesirler (1/2, 2/3 2/4, 4/6 ve 3/2), kesirleri temsil etmenin zorluğunu etkileme amacıyla çeşitli açılardan farklılık gösterir (Lesh, 1981; Lesh, Landau ve Hamilton, 1983). Bunlardan biri kesirlerin pay ve paydasında kullanılan sayıların benzerliğidir. Örneğin 1/2 ve 2/4; 2/3 ile kesirleri karşılaştırıldığında pay ve paydadaki sayıların benzer olması gibi. Bir diğeri denk kesirleri test etmek amacıyla genişletilmiş ve sadeleştirilmiş hallerinin yer almasıdır. Örneğin 1/2 ve 2/3; 2/4 ve 4/6 ile karşılaştırıldığında 1/2 kesrinin pay ve paydasındaki sayıları genişletme yapılarak 2/4 olması ya da 4/6'daki pay ve paydanın sadeleştirme yapılarak 2/3 olması gibi. Son olarak kesrin 1'den büyük veya küçük olmasıdır. Örneğin diğer dört kesir 1’den küçükken, 3/2 kesri 1’den büyüktür. Kesirlerin seçimini etkileyen 3 ek düşünce daha vardır. Bunlardan ilki temsil edilen kesirlerin pay ve paydalarının sayma hatalarını azaltmak için olabildiğince küçük olması ve kısmen küçük grafik temsillerini fazlaca kullanmaya izin vermesidir. İkincisi kesirlerin, birim (payı 1 olan) ve birim olmayan kesirleri içermesidir. Üçüncüsü ise denk kesirlerin temsil edilmesidir (Niemi, 1996).

Her bir kesir sembolü, çeldirici olarak yanlış kesir temsilleri de içermektedir. Bunlar alan ve uzunlukları yanlış şekilde bölerek, denk olmayan kesirsel büyüklükleri temsil ederek ya da pay ve paydadaki sayıları yer değiştirerek yapılmıştır. Çeldiriciler kesirler ve kesir temsilleri hakkındaki genel kavram yanılgılarına dayanır. Örneğin, öğrencilerin önemli bir çoğunluğu kesir temsilinde bölümlerin (parçaların) büyüklüklerinin eşit olması gerektiğinin farkında değildir (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992).

TAT'ın geçerliliğinin sağlanması amacıyla test dördü matematik eğitimi alanında doktora derecesine sahip altı uzman tarafından incelenmiştir. Testteki maddelerin doğru şekilde ifade edilip edilmediği, testin zorluk derecesi, konu alanı ve uygulanacak sınıf seviyelerine uygunluğu ile ilgili konularda uzmanların görüşlerine başvurulmuştur. Alınan görüşler doğrultusunda, test üzerinde testin anlaşılabilirliğini sağlamak için öğrencilerin yaş grubuna uygun sözcükler kullanma gibi sözel ve şekillerin taralı bölgelerini koyulaştırma, bileşik kesirlerin temsillerinde bütünleri farklı olarak belli etme gibi görsel değişiklikler yapılmıştır.

TAT'ın, Niemi (1996) ve Ni (2001) tarafından kullanıldığı araştırmalarda güvenirlik katsayısı rapor edilmemiştir. Bu araştırmada ise testin güvenirlik katsayısı olarak testin puanlanma şeklinin bir sonucu olarak Kuder Richardson-20 (KR-20) iç tutarlılık katsayısı hesaplanmıştır. Kuder Richardson-20 (KR-20) iç tutarlılık katsayısı, bir test maddesine verilen cevapların "1" ve "0" şeklinde puanlandığı durumlarda kullanılır (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karedeniz ve Demirel, 2009). Pilot uygulama ve asıl uygulamanın sonuçlarına göre iç tutarlılık katsayıları Tablo 3-2'de verilmiştir. Tablo 3-2'de görüldüğü gibi pilot uygulamada iç tutarlılık katsayısı 0,933 bulunmuştur. Büyüköztürk'e (2005) göre iç tutarlılık katsayısı, güvenirlik değerinin alabileceği en düşük değeri verir ve testlerde güvenirlik katsayısının 0,70'den büyük olması testin puanlama güvenirliği için yeterli görülmektedir. Bu nedenle TAT'da herhangi bir değişiklik yapılmadan pilot uygulamadaki haliyle son uygulamada kullanılmıştır. Asıl uygulamadan elde edilen verilere göre ise KR-20 iç tutarlılık katsayısı 0,928 hesaplanmıştır. Bu değerler göz önüne alındığında ölçeğin güvenirliğinin yeterli olduğu söylenebilir.

Tablo 3–2. Pilot uygulama ve asıl uygulamaya göre TAT'ın güvenirlik analizi sonuçları

Madde Sayısı	Kuder Richardson-20 İç Tutarlılık Katsayıları	
	Pilot Uygulama	Asıl Uygulama
90	.933	.928

Toplanan verilerin puanlanması için daha önce TAT'ın orjinal halinin kullanıldığı çalışmalara bakılmıştır. Niemi (1996) çalışmasında testi puanlarken, 90 tane maddeyi "1" ve "0" şeklinde puanlamıştır. Bu puanları grafiksel temsil türleri, kesrin sade ve denk gösterim olma durumuna göre alt gruplara ayırarak öğrencilerden elde ettiği ham verileri kullanmıştır. Ni (2001) çalışmasında benzer bir yöntem kullanarak 90 maddeyi ikili yani "1" ve "0" şeklinde puanlamış ve benzer şekilde alt gruplara ayırmıştır. Ni (2001), ham verileri kullanmayıp alt gruplardaki puanları karşılaştırmak amacıyla da puanları standartlaştırmıştır. Bu çalışmada da TAT'ın değerlendirilmesinde benzer yöntem benimsenmiştir. Bu kapsamda TAT'daki veriler puanlanırken her bir kesir sembolü için sembole denk olan temsilin seçilmesi ve uygun olmayan çeldiricilerin seçilmemesi "1" puan, her uygun temsilin seçilmemesi ve çeldiricilerin seçilmesi durumunda ise "0" puan verilmiştir. Bu şekilde testte yer alan her bir kesir gösterimi altında bulunan 18 grafiksel temsil ve çeldirici "1" ve "0" şeklinde puanlanmış olup toplamda 5 farklı soru için 90 grafiksel temsil puanlanmıştır. Daha sonra bu puanlar kesirlerin parça bütün ve ölçme anlamına, grafiksel temsil türlerine, kesrin sade ve denk gösterim olmasına göre karşılaştırma yapabilmek için kategorilere ayrılmıştır. Oluşan kategorilerde yer alan madde sayıları denk olmadığından puanlar o kategori için alınabilecek en yüksek puana bölünerek standartlaştırılmış puanlar elde edilmiştir. Bunun sonucu olarak her bir kategori için alınabilecek düşük puan "0" ve en yüksek puan "1"dir. Bu sayede her bir değerlendirme birimi için benzer puanlama kullanılmıştır.

3.4. Veri Toplama Süreci

Bu araştırma için veri toplama süreci iki aşamadan oluşmuştur. Bunlardan ilki pilot çalışma, ikincisi ise gerçek uygulama verilerinin toplanma aşamasıdır. Araştırmanın uygulama kısmına başlamadan önce Sakarya Valiliği ile gerekli yazışmalar yapılarak belirlenen okullarda testin uygulanabilmesi için izin alınmıştır (bkz. EK 3).

Pilot uygulama 2011-2012 eğitim öğretim yılı bitimine dört hafta kala, asıl uygulama ise 3 hafta kala uygulanmıştır. Pilot ve asıl uygulamanın yapıldığı tarihlerde tüm sınıf seviyelerinde kesirlerle ilgili kazanımlar tüm okullarda tamamlanmış olmasına dikkat edilmiştir. Pilot ve asıl uygulamadan önce araştırma yapılacak okullarda okul yönetimi ve öğretmenler ile görüşülerek araştırma hakkında bilgi verilmiştir. Araştırmada okulun ve öğrencilerin isimlerinin herhangi bir şekilde kullanılmayacağı okul yönetimine ve öğretmenlere bildirilmiştir ve ders akışını engellemeyecek şekilde yapılmasına gayret edilmiştir. Testin uygulanması için öğretmenler ile görüşülüp uygun ders saatleri belirlenmiştir. Ayrıca testi uygulamadan önce öğrencilere test hakkında bilgi verilmiş olup bu çalışmanın bilimsel bir araştırmanın parçası olduğu söylenerek, sonuçların nota dönüştürülmeyeceği açıklanmıştır.

Niemi (1996) tarafından yapılan çalışmada, öğrencilere TAT testini tamamlamaları için 20 dakika süre verilmiştir. Aynı testi kullanan Ni (2001) ise öğrencilerin 50 dakikada testi tamamlamalarını istemiştir. Bundan yola çıkarak bu çalışmanın pilot uygulamasında öğrencilere TAT'ı cevaplamaları için bir ders saati ve teneffüs süresini kapsayacak şekilde 50 dakika süre verilmiştir. Pilot uygulama süresince tüm sınıf seviyelerinde öğrencilerin tamamının 25 ile 40 dakika arasında testi bitirdikleri gözlemlenmiştir. Bu yüzden asıl uygulamada teneffüs sürelerini engellememek amacıyla öğrencilere testi tamamlamaları için bir ders saati yani 40 dakika süre verilmiştir.

Veri toplama sürecinde araştırmacı uygulamanın tüm basamaklarında yer alıp öğrencilerin TAT ile ilgili anlamadıkları kısımlarda açıklamalarda bulunmuştur. TAT'ta bulunan sayı doğrusu gösterimlerinde sayı doğrularının uçlarında ok bulunmamaktadır. Özellikle bu durumun öğrenciler tarafından yanlış anlaşılmaması için uygulama sırasında bu gösterimlerin sayı doğrusundan farklı olmadığı açıklanmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Verilerin analizinde araştırma problemlerine uygun olarak ölçme aracının alt kategorilerindeki puan türleri ve sınıf düzeylerindeki puanlar karşılaştırma testleri ile test edilmiştir. Karşılaştırma testlerinde verilerin normal olup olmamasına bağlı olarak farklı istatistiksel analizler kullanılmaktadır. Bu yüzden istatistiksel analizlere başlamadan önce tüm verilere rasyonel sayıların parça-bütün ve ölçme anlamlarına, temsil türlerine, kesrin sade ya da denk gösterim olma durumuna göre alt kategorilerde normallik testi yapılmıştır. Bu test sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 3-3'de verilmiştir.

Tablo 3-3. Tüm verilerin normallik analizi

Temsil	Tür	Betimsel İstatistikler Aritmetik Ortamala	Sdt. Sapma	Skewness	Kurtosis	Kolmogorov-Smirnov(a) İstatistik	sd	*p*
Alan	Sade G.	.8714	.0051	-1.870	4.364	.235	1111	.000
	Denk G.	.4650	.0101	-.29	-1.436	.119	1111	.000
	Toplam	.6741	.0057	.077	-1.272	.109	1111	.000
Küme	Sade G.	.7905	.0078	-1.493	1.761	.267	1111	.000
	Denk G.	.4713	.0115	.074	-1.528	.171	1111	.000
	Toplam	.6309	.0080	-.348	-.651	.120	1111	.000
Uzunluk	Sade G.	.7790	.0078	-1.192	.857	.258	1111	.000
	Denk G.	.4844	.0111	.055	-1.488	.164	1111	.000
	Toplam	.7428	.0046	.056	-.980	.112	1111	.000
Sayı Doğrusu	Sade G.	.3495	.0102	.603	-.885	.218	1111	.000
	Denk G.	.2909	.0098	.979	-.293	.236	1111	.000
	Toplam	.5411	.0051	.817	.392	.169	1111	.000
Parça-Bütün Toplam		.6924	.0051	.127	-1.235	.104	1111	.000
Ölçme Toplam		.5411	.0051	.817	.392	.169	1111	.000
Sade G. Toplam		.7470	.0049	.853	.813	.124	1111	.000
Denk G.Toplam		.4370	.0094	.105	-1.330	.101	1111	.000
Toplam		.6588	.0045	.356	-.974	.108	1111	.000

Büyüköztürk (2005) örneklem sayısının 50'den büyük olduğu durumlarda Kolmogorov–Smirnov testini önermektedir. Tablo 3-3'de yapılan testin sonuçları incelendiğinde bütün kategoriler için hesaplanan olasılık değerlerinin $p<0,05$ olması nedeniyle bu kategoriler ($\alpha=0,05$ anlamlılık düzeyinde) normal dağılım sergilememektedir.

İstatistiksel analizler içinde yer alan sınıf düzeylerinde farklılaşmaya bakılacağından öğrencilerin sınıf seviyelerine göre rasyonel sayıların parça-bütün ve ölçme anlamları, grafiksel temsil türleri, kesrin sade ya da denk gösterim olma durumu değişkenlerine göre normallik testi yapılmıştır. Bu test sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 3-4'de verilmiştir.

Tablo 3-4. Sınıf düzeylerinde normallik analizi

		Betimsel İstatistikler				Kolmogorov-Smirnov(a)		
Sınıf	Tür	Aritmetik Ortalama	Sdt. Sapma	Skewness	Kurtosis	İstatistik	sd	*p*
4.Sınıf	Alan	.6179	.0107	.606	-.765	.142	273	.000
	Küme	.5938	.0151	.122	-.605	.174	273	.000
	Uzunluk	.6990	.0079	.413	-.589	.126	273	.000
	Sayı D.	.5333	.0091	.775	.473	.185	273	.000
	Parça-Bütün	.6434	.0094	.636	-.637	.120	273	.000
	Ölçme	.5333	.0091	.775	.473	.185	273	.000
	Sade G.	.7605	.0096	-.672	.158	.113	273	.000
	Denk G.	.3331	.0196	.651	-.923	.161	273	.000
	Toplam	.6190	.0085	.875	-.186	.149	273	.000
5.Sınıf	Alan	.6774	.0108	.003	-1.241	.128	284	.000
	Küme	.6327	.0157	-.398	-.587	.127	284	.000
	Uzunluk	.7400	.0090	.148	-.969	.132	284	.000
	Sayı D.	.5092	.0095	.899	.869	.167	284	.000
	Parça-Bütün	.6934	.0097	.120	-1.149	.124	284	.000
	Ölçme	.5092	.0095	.899	.869	.167	284	.000
	Sade G.	.7281	.0099	-.984	1.220	.132	284	.000
	Denk G.	.4363	.0178	.007	-1.369	.100	284	.000
	Toplam	.6524	.0084	.338	-.848	.136	284	.000
6.Sınıf	Alan	.6962	.0120	-.127	-1.362	.113	285	.000
	Küme	.6674	.0162	-.510	-.689	.168	285	.000
	Uzunluk	.7611	.0100	-.251	-.831	.133	285	.000
	Sayı D.	.5450	.0110	.837	.183	.166	285	.000
	Parça-Bütün	.7153	.0109	-.119	-1.331	.107	285	.000
	Ölçme	.5449	.0110	.837	.183	.160	285	.000
	Sade G.	.7533	.0092	-.889	.631	.143	285	.000
	Denk G.	.4879	.0188	-.104	-1.297	.089	285	.000
	Toplam	.6774	.0096	.158	-1.166	.095	285	.000
7.Sınıf	Alan	.7042	.0114	-.153	-1.151	.095	269	.000
	Küme	.6279	.0169	-.573	-.392	.135	269	.000
	Uzunluk	.7706	.0094	-.136	-1.190	.130	269	.000
	Sayı D.	.5786	.0108	.675	.012	.192	269	.000
	Parça-Bütün	.7170	.0103	-.103	-1.1247	.099	269	.000
	Ölçme	.5786	.0108	.675	.012	.192	269	.000
	Sade G.	.7464	.0101	-.830	.905	.114	269	.000
	Denk G.	.4892	.0180	-.041	-1.262	.098	269	.000
	Toplam	.6862	.0093	.093	-1.080	.094	269	.000

Tablo 3-4'de yapılan testin sonuçları incelendiğinde de sınıf düzeylerinde bütün kategoriler için hesaplanan olasılık değerlerinin $p<0{,}05$ olması nedeniyle bu kategoriler ($\alpha=0{,}05$ anlamlılık düzeyinde) normal dağılım sergilememektedir.

Veriler tüm kategorilerde ve sınıf düzeylerinde normal dağılmadığı için uygulanacak istatistiklerde parametrik olmayan yöntemler benimsenmiştir. Öğrencilerin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin rasyonel sayıların parça-bütün ve ölçme anlam puanlarına, kesrin sade ve denk gösterim puanlarına göre farklılık gösterip göstermediği Wilcoxon işaretli sıralar testi ile incelenmiştir. Wilcoxon işaretli sıralar testi, bir gruba ait ilişkili iki farklı veri setine ait dağılımlarının birbirinden farklı olup olmadığını belirlemektedir (Baştürk, 2011).

Öğrencilerin testin tamamından ve grafiksel temsil türlerine, kesrin sade ve denk gösterimlere ait maddelerden aldıkları ortalama puanların sınıf seviyelerine göre değişimleri araştırılırken Kruskal-Wallis testi kullanımıştır. Kruskal-Wallis testi, normalliğin sağlanmadığı örneklemlerde ilişkisiz ikiden fazla örneklem ortalamasının farklı olup olmadığını test etmektedir (Büyüköztürk, 2005). Bununla birlikte Kruskal-Wallis testinde ikişerli olarak ilişkisiz grupları karşılaştırmak amacıyla Mann-Whitney U testi yapılmıştır.

Öğrencilerin testtin tamamından, sade ve denk gösterimlere ait maddelerden aldıkları ortalama puanların grafiksel temsil türlerine göre farklılık gösterip göstermediğini ise Friedman testi kullanılarak incelenmiştir. Friedman testi, bir örnekleme ait ikiden fazla ölçme sonucunu karşılaştırmaktadır (Baştürk, 2011). Ayrıca Ayrıca Friedman testinde ikişerli olarak ilişikili grupları karşılaştırmak amacıyla Wilcoxon işaretli sıralar testi yapılmıştır.

Karşılaştırma testleri yapılırken etki büyüklükleri de dikkate alınmıştır. Etki büyüklüğü, istatistiksel olarak elde edilen sonuçların yokluk hipotezinde tanımlanan beklentilerden sapma düzeyini gösteren istatistiksel değerdir (Cohen, 1994). Basit bir ifadeyle ise etki büyüklüğü; karşılaştırılan iki grubun, iki yöntemin ve ya iki puan türünün birbirlerine kıyasla ne kadar fark yarattığının bir ölçüsüdür (Yıldırım ve Yıldırım, 2011). Bu çalışmada gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı farklar bulunduğu durumlar için etki büyüklüğü hesap edilmiştir. Parametrik olmayan Mann-Whitney U ve Wilcoxon işaretli sıralar testinde etki büyüklüğü olarak "*r*" değeri kabul edilmektedir (Fritz, Morris ve Richler, 2012). "*r*" değeri ise Whitney U ve Wilcoxon işaretli sıralar testinde hesap edilen z değerinin örneklem sayısının kareköküne bölünerek ($r = z / \sqrt{N}$) hesaplanmaktadır (Cohen, 1988). Cohen *r*'nin 0.5 değerini büyük, 0.3 değerini orta ve 0.1 değerini küçük etki büyüklüğü olarak kabul etmektedir (Coolican, 2009: 359).

BÖLÜM IV

4. Bulgular

Bu bölümde alt problemlere ilişin bulgular ve yorumar yer almaktadır.

4.1. Birinci Alt Probleme İlişkin Bulgular

Bu başlık altında "*Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin rasyonel sayıların parça bütün ve ölçme anlamına göre farklılık gösterip göstermediği*" incelenmiştir. Tablo 3-3 incelendiğinde, rasyonel sayıların parça-bütün anlamının sıra ortalaması (620,85), ölçme anlamının sıra ortalamasından (285,65) yüksek olduğu görülmektedir. İki puan türü arasındaki bu farkın anlamlı olup olmadığını test etmek amacıyla elde edilen verilerle Wilcoxon işaretli sıralar testi yapılmıştır. Bu test sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 4-1'de verilmiştir.

Tablo 4-1. Parça-Bütün ve ölçme anlam puanları için Wilcoxon işaretli sıralar testi sonuçları

Ölçme - Parça Bütün	n	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	z	p
Negatif Sıra	833	620.85	517170.5	-21.562*	.000
Pozitif Sıra	252	285.65	71984.5		
Eşit	26				

* Pozitif Sıralar temeline dayalı düzenlenmiştir

Tablo 4-1'deki analiz sonuçları, araştırmaya katılan öğrencilerin rasyonel sayıların parça-bütün ve ölçme anlamlarına göre aldıkların puanların sıra ortalamaları arasında anlamlı farklılık olduğunu göstermektedir ($z = -21,562$, $p < 0,05$). Fark puanlarının sıra ortalaması ve toplam puanlar dikkate alındığında, gözlenen bu farkın negatif sıralar, yani parça-bütün anlam puanları lehinde ve orta boyutta (r = 0,457) bir etkide olduğu görülmektedir.

4.2. İkinci Alt Probleme İlişkin Bulgular

Bu başlık altında "*Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin sınıf düzeylerine göre değişimi*" incelenmiştir. Tablo 4-2 incelendiğinde, bütün sınıf seviyelerinde sıra ortalamaların farklı ve 4. sınıftan (470,76) 7. sınıfa (613,68) doğru gidildikçe testin sıra ortalama puanlarında düzenli bir artışın olduğu görülmektedir. Bu artış miktarlarına bakıldığında, diğer sınıftaki sınıf seviyeleri arasındaki artışlara göre 6. sınıf (588,21) ile 7. sınıf (613,68) arasındaki artışın çok az olduğu görülmektedir. Öğrencilerin sınıf düzeylerine göre denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin farklılık gösterip göstermediğini test etmek amacıyla Kruskal-Wallis testi yapılmıştır. Bu test sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 4-2'de verilmiştir.

Tablo 4-2. TAT puanlarının sınıf düzeylerine göre Kruskal-Wallis testi sonuçları

Sınıflar	N	Sıra Ort.	sd	χ^2	p	Fark
4. Sınıf	273	470.76	3	30.920	.000	4-5, 4-6,
5. Sınıf	284	550.98				4-7
6. Sınıf	285	588.21				
7. Sınıf	269	613.68				

Tablo 4-2'deki analiz sonuçlarına göre, araştırmaya katılan öğrencilerin farklı sınıf düzeylerinde denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olduğu belirlenmiştir ($\chi^2_{(3)}$ = 30,920, p < 0,05). Bu farkın hangi grup ya da gruplar lehine olduğunu anlamak amacıyla çoklu karşılaştırmalar ve altı tane ikili Mann-Whitney U testi yapılmıştır. Yapılan testler sonucu farkın 4. sınıf ile 5. sınıf (U = 32742,5 , r = -0,13), 4. sınıf ile 6. sınıf (U = 31140,5 , r = -0,17) ve 4. sınıf ile 7. sınıf (U = 27234 , r = -0,22) arasında olduğu görülmüştür. Bununla birlikte 5. sınıf ile 6. sınıf, 5. sınıf ile 7. sınıf ve 6. sınıf ile 7. sınıf arasında ortalamalar arasında gözlenen fark, yapılan testler sonucu istatistiksel olarak anlamlı bulunmamıştır. Ayrıca 4. sınıf öğrencilerinin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin diğer sınıf seviyelerindeki öğrencilerden daha düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

4.3. Üçüncü Alt Probleme İlişkin Bulgular

Bu başlık altında "*Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri grafiksel temsil türlerine göre farklılık gösterip göstermediği*" incelenmiştir. Tablo 4-3 incelendiğinde, en yüksek sıra ortalamasının 3,34 ile uzunluk temsiline ve en düşük ortalamanın ise 1,76 ile sayı doğrusu temsiline ait olduğu görülmektedir. Diğer temsil türlerinden alan temsilinin ortalaması 2,50 ve küme temsilinin ortalaması 2,40 bulunmuştur. Bu sonuçlardan sonra öğrencilerin grafiksel temsil türlerine göre denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin farklılık gösterip göstermediğini test etmek amacıyla Friedman testi yapılmıştır. Bu test sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 4-3'de verilmiştir.

Tablo 4-3. TAT'daki grafiksel temsil türleri puanları için Friedman testi sonuçları

Temsiller	n	Sıra Ort.	Sd	χ^2	p	Fark
Alan	1111	2.50	3	865.636	.000	Alan-Uzunluk, Alan-Sayı D., Küme-Uzunluk, Küme-Sayı D., Uzunluk-Sayı D.
Küme	1111	2.40				
Uzunluk	1111	3.34				
Sayı D.	1111	1.76				

Tablo 4-3'deki analiz sonuçlarına göre, araştırmaya katılan öğrencilerin grafiksel temsil türlerine göre denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olduğu belirlenmiştir ($\chi^2_{(3)}$ = 865,636; p < 0,05). Bu farkın hangi grup ya da gruplar lehine olduğunu anlamak amacıyla çoklu karşılaştırmalar ve değişik sayıda ikili Wilcoxon işaretli sıralar testleri yapılmıştır. Yapılan testler sonucu farkın alan ile uzunluk (z = -18,542), alan ile sayı doğrusu (z = -18,456), küme ile uzunluk (z = -15,705), küme ile sayı doğrusu (z = -11,095) ve uzunluk ile sayı doğrusu (z = -25,808) temsilleri arasında olduğu görülmüştür. Grafiksel temsil türleri arasında gözlenen bu farklar incelendiğinde; alan ile uzunluk temsillerinde uzunluk temsili lehinde ve orta boyutta (r = -0,393) , alan ile sayı doğrusu temsillerinde alan temsili lehinde ve orta boyutta (r = -0,392), küme ile uzunluk temsillerinde uzunluk temsili lehinde ve orta boyutta (r = -0,333), küme ile sayı doğrusu temsillerinde küme temsili lehinde ve küçük boyutta (r = -0,235), uzunluk ile sayı doğrusu temsillerinde uzunluk temsili lehinde ve büyük boyutta (r = -0,547) bir etkide olduğu görülmektedir. Ayrıca alan ile küme temsilleri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark ortaya çıkmamıştır.

4.4. Dördüncü Alt Probleme İlişkin Bulgular

Bu başlık altında "*Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin grafiksel temsil türlerinde (alan, küme, uzunluk ve sayı doğrusu) sınıf düzeyine göre değişimi*" incelenmiştir. Tablo 4-4 incelendiğinde, sınıf düzeylerine göre grafiksel temsil türlerinin sıra ortalamaları farklılaşmaktadır. Alan temsilinde 4. sınıftan 7. sınıfa doğru gidildikçe testin sıra ortalama puanlarında düzenli bir artışın olduğu görülmektedir. Bu artış miktarlarına bakıldığında, diğer sınıf seviyeleri arasındaki artışlara göre 4. sınıf (460,74) ile 5. sınıf (564,82) arasında daha fazla artış olduğu görülmektedir. Küme temsilinde 4. sınıftan 6. sınıfa doğru gidildikçe testin sıra ortalama puanlarında düzenli bir artışın olduğu fakat 7. sınıf ortalamasının (559,07) beklenilenin aksine 6. sınıf ortalamasından (601,35) düşük olduğu görülmektedir. Uzunluk temsilinde alan temsilinde olduğu gibi 4. sınıftan 7. sınıfa doğru gidildikçe testin sıra ortalama puanlarında düzenli bir artışın olduğu ve benzer şekilde diğer sınıf seviyeleri arasındaki artışlara göre 4. sınıf (464,93) ile 5. sınıf (551,30) arasında daha fazla artış olduğu görülmektedir. Sayı doğrusu temsilinde 4. sınıf sıra ortalamasının (551,73) 5. sınıf sıra ortalamasından (492,08) yüksek olduğu ve daha sonra 5. sınıftan 7. sınıfa doğru gidildikçe testin sıra ortalama puanlarında düzenli bir artışın olduğu görülmektedir. Öğrencilerin sınıf düzeylerine göre denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin grafiksel temsil türleri açısından farklılık gösterip göstermediğini test etmek amacıyla Kruskal-Wallis testi yapılmıştır. Bu test sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 4-4'de verilmiştir.

Tablo 4-4. TAT'da grafiksel temsil türleri puanlarının sınıf düzeylerine göre Kruskal-Wallis testi sonuçları

Temsil Türü	Sınıflar	n	Sıra Ort.	sd	χ^2	p	Fark
Alan	4. Sınıf	273	460.74	3	34.339	.000	4-5,
	5. Sınıf	284	564.82				4-6,
	6. Sınıf	285	591.14				4-7
	7. Sınıf	269	606.14				
Küme	4. Sınıf	273	504.58	3	12.917	.000	4-6
	5. Sınıf	284	557.01				
	6. Sınıf	285	601.35				
	7. Sınıf	269	559.07				
Uzunluk	4. Sınıf	273	464.93	3	34.749	.000	4-5,
	5. Sınıf	284	551.30				4-6,
	6. Sınıf	285	594.40				4-7
	7. Sınıf	269	612.70				
Sayı D.	4. Sınıf	273	551.73	3	26.257	.000	4-7,
	5. Sınıf	284	492.08				5-7,
	6. Sınıf	285	553.39				6-7
	7. Sınıf	269	630.58				

Tablo 4-4'deki analiz sonuçlarına göre, araştırmaya katılan öğrencilerin farklı sınıf düzeylerinde alan ($\chi^2_{(3)}$ = 34,339, p < 0,05), küme ($\chi^2_{(3)}$ = 12,917, p < 0,05), uzunluk ($\chi^2_{(3)}$ = 34,749, p < 0,05) ve sayı doğrusu ($\chi^2_{(3)}$ = 26,257, p < 0,05) temsillerinde denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olduğu belirlenmiştir Bu farkların hangi grup ya da gruplar lehine olduğunu anlamak amacıyla çoklu karşılaştırmalar ve değişik sayıda ikili Mann-Whitney U testi yapılmıştır.

Alan temsilinde farkın 4. sınıf ile 5. sınıf (*U* = 31040, *r* = -0,17), 4. sınıf ile 6. sınıf (*U* = 30378,5, *r* = -0,19) ve 4. sınıf ile 7. sınıf (*U* = 26963, *r* = -0,23) arasında olduğu görülmüştür. Ayrıca 4. sınıf öğrencilerinin alan temsilinde denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin diğer sınıf seviyelerindeki öğrencilerden daha düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Küme temsilinde farkın 4. sınıf ile 6. sınıf arasında olduğu görülmüştür (*U* = 32417 , *r* = -0,15). Uzunluk temsilinde ise alan temsilinde olduğu gibi farkın 4. sınıf ile 5. sınıf (*U* = 32861,5 , *r* = -0,13), 4. sınıf ile 6. sınıf (*U* = 29924,5 , *r* = -0,20) ve 4. sınıf ile 7. sınıf (*U* = 26740 , *r* = -0,24) arasında olduğu görülmüştür. Ayrıca 4. sınıf öğrencilerinin uzunluk temsilinde denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin diğer sınıf seviyelerindeki öğrencilerden daha düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sayı doğrusu temsilinde ise farkın 4. sınıf ile 7. sınıf (*U* = 31206, *r* = -0,13), 5. sınıf ile 7. sınıf (*U* = 28678, *r* = -0,22) ve 6. sınıf ile 7. sınıf (*U* = 33303, *r* = -0,11) arasında olduğu görülmüştür. Ayrıca 7. sınıf öğrencilerinin sayı doğrusu temsilinde denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin diğer sınıf seviyelerindeki öğrencilerden daha yüksek olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

4.5. Beşinci Alt Probleme İlişkin Bulgular

Bu başlık altında "*Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri kesrin sade ya da denk gösterim olmasına göre farklılık gösterip göstermediği*" incelenmiştir. Tablo 3-2 incelendiğinde, kesrin sade gösterim sıra ortalamasının (598,92) denk gösterim ortalamasından (167,61) fazla olduğu görülmektedir. Kesrin sade ve denk gösterim puanları arasındaki bu farkın anlamlı olup olmadığını test etmek amacıyla elde edilen verilerle Wilcoxon işaretli sıralar testi yapılmıştır. Bu test sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 4-5'de verilmiştir.

Tablo 4-5. TAT'da kesrin sade ve denk gösterim puanları için Wilcoxon işaretli sıralar testi sonuçları

Denk G.- Sade G.	n	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	z	p
Negatif Sıra	983	598.92	588743.00	-26.868*	.000
Pozitif Sıra	120	167.61	20113.00		
Eşit	8				

* Pozitif Sıralar temeline dayalı düzenlenmiştir

Tablo 4-5'deki analiz sonuçları, araştırmaya katılan öğrencilerin kesrin sade ve denk gösterim olmasına göre aldıkları puanların sıra ortalamaları arasında anlamlı farklılık olduğu görülmektedir ($z = -26,868$, $p < 0,05$). Fark puanlarının sıra ortalaması ve toplam puanlar dikkate alındığında, gözlenen bu farkın negatif sıralar, yani kesrin sade gösterim puanları lehinde ve büyük boyutta ($r = 0,570$) bir etkide olduğu görülmektedir.

4.6. Altıncı Alt Probleme İlişkin Bulgular

Bu başlık altında *"Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri kesrin sade ve denk gösterimlerinde grafiksel temsil türlerine göre farklılık gösterip göstermediği"* incelenmiştir. Tablo 4-6 incelendiğinde, kesrin sade gösterimlerinde en yüksek sıra ortalamasının 3,12 ile alan temsiline ve en düşük ortalamanın ise 1,38 ile sayı doğrusu temsiline ait olduğu görülmektedir. Diğer temsil türlerinden küme temsilinin ortalaması 2,82 ve uzunluk temsilinin ortalaması 2,68 bulunmuştur. Bu ortalamalar arasında dikkati çeken, sayı doğrusu temsil ortalamasının diğer temsil ortalamalarından çok düşük olmasıdır. Tablo 4-6'de kesrin denk gösterim ortalamaları incelendiğinde ise en yüksek sıra ortalamasının 2,79 ile uzunluk temsiline ve en düşük ortalamanın 1,91 ile sayı doğrusu temsiline ait olduğu görülmektedir. Diğer temsil türlerinden küme temsilinin ortalaması 2,82 ve alan temsilinin ortalaması 2,68 bulunmuştur. Kesrin sade gösterimlerinde olduğu gibi denk gösterimlerinde de sayı doğrusu temsil ortalamasının diğer temsil ortalamalarından çok düşük olduğu görülmektedir. Bu sonuçlardan sonra öğrencilerin kesrin sade ya da denk gösterimlerinde temsil türlerine göre denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin farklılık gösterip göstermediğini test etmek amacıyla Friedman testi yapılmıştır. Bu test sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 4-6'da verilmiştir.

Tablo 4-6. TAT'de kesrin sade ve denk gösterim puanlarının grafiksel temsil türleri için Friedman testi sonuçlar

	Temsiller	n	Sıra Ort.	sd	χ^2	p	Fark
	Alan	1111	3.12	3	1419.40	.000	Alan-Küme, Alan-
Sade	Küme	1111	2.82				Uzunluk, Alan-Sayı
Gösterim	Uzunluk	1111	2.68				D., Küme-Sayı D.,
	Sayı D.	1111	1.38				Uzunluk-Sayı D.
	Alan	1111	2.58	3	413.37	.000	Alan-Küme, Alan-
Denk	Küme	1111	2.73				Uzunluk, Alan-Sayı
Gösterim	Uzunluk	1111	2.79				D., Küme-Sayı D.,
	Sayı D.	1111	1.91				Uzunluk-Sayı D.

Tablo 4-6'daki analiz sonuçlarına göre, araştırmaya katılan öğrencilerin kesrin sade gösterimlerinde grafiksel temsil türlerine göre denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olduğu belirlenmiştir ($\chi^2_{(3)}$ = 1419,40; p < 0,05). Bununla birlikte, araştırmaya katılan öğrencilerin kesrin denk gösterimlerinde de grafiksel temsil türlerine göre denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olduğu belirlenmiştir ($\chi^2_{(3)}$ = 413,37; p < 0,05). Kesrin sade ve denk gösterimlerinde olan bu farkların hangi grup ya da gruplar lehine olduğunu anlamak amacıyla çoklu karşılaştırmalar ve değişik sayıda ikili Wilcoxon işaretli sıralar testleri yapılmıştır. Yapılan testler sonucu kesrin sade gösterimlerinde farkın alan ile küme (z = -11,271), alan ile uzunluk (z = -12,145), alan ile sayı doğrusu (z = -26,807), küme ile sayı doğrusu (z = -24,481) ve uzunluk ile sayı doğrusu (z = -24,841) temsilleri arasında olduğu görülmüştür. Kesrin sade gösterimlerinde grafiksel temsil türleri arasındaki gözlenen bu farklar incelendiğinde; alan ile küme temsillerinde alan temsili lehinde ve orta boyutta, (r = -0,239), alan ile uzunluk temsillerinde alan temsili lehinde ve orta boyutta (r = -0,258), alan ile sayı doğrusu temsillerinde alan temsili lehinde ve büyük boyutta (r = -0,569), küme ile sayı doğrusu temsillerinde küme temsili lehinde ve büyük boyutta (r = -0,519), uzunluk ile sayı doğrusu temsillerinde uzunluk temsili lehinde ve büyük boyutta (r = -0,527) bir etkide olduğu görülmektedir. Bununla beraber küme ile uzunluk temsilleri arasında anlamlı bir fark ortaya çıkmamıştır.

Kesrin denk gösterimlerinde yapılan testler sonucu ortaya çıkan farkın kesrin sade gösterimlerinde olduğu gibi alan ile küme (z = -3,508), alan ile uzunluk (z = -4,490), alan ile sayı doğrusu (z = -17,346), küme ile sayı doğrusu (z = -16,102) ve uzunluk ile sayı doğrusu (z = -17,383) temsilleri arasında olduğu görülmüştür. Kesrin denk gösterimlerinde grafiksel temsil türleri arasındaki gözlenen bu farklar incelendiğinde; alan ile küme temsillerinde küme temsili lehinde ve küçük boyutta (r = -0,074), alan ile uzunluk temsillerinde uzunluk temsili lehinde ve küçük boyutta (r = -0,095), alan ile sayı doğrusu temsillerinde alan temsili lehinde ve orta boyutta (r = -0,368), küme ile sayı doğrusu temsillerinde küme temsili lehinde ve orta boyutta (r = -0,342), uzunluk ile sayı doğrusu (r = -0,369) temsillerinde uzunluk temsili lehinde ve orta boyutta bir etkide olduğu görülmektedir. Ayrıca kesrin denk gösterimlerinde küme ile uzunluk temsilleri arasında anlamlı bir fark ortaya çıkmamıştır.

4.7. Yedinci Alt Probleme İlişkin Bulgular

Bu başlık altında "*Denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin kesrin sade ve denk gösterimlerinde sınıf düzeylerine göre değişimi*" incelenmiştir. Tablo 4-7 incelendiğinde, farklı sınıf düzeylerine göre kesrin sade ve denk gösterim sıra ortalamaları farklılaşmaktadır. Kesrin sade gösterimlerinde 4. sınıf sıra ortalamasının (579,17) diğer sınıf seviyelerinden yüksek olduğu ve 6. sınıf sıra ortalamasının (569,22), 5. sınıf (518,76) ve 7. sınıf (557,79) ortalamasından yüksek olduğu görülmektedir. Kesrin denk gösterimlerinde 4. sınıftan 7. sınıfa doğru gidildikçe testin sıra ortalama puanlarında düzenli bir artışın olduğu ve diğer sınıf seviyeleri arasındaki artışlara göre 6. sınıf (606,39) ile 7. sınıf (613,22) arasındaki artışın çok az olduğu görülmektedir. Öğrencilerin sınıf düzeylerine göre denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin kesrin sade ve denk gösterimlerinde farklılık gösterip göstermediğini test etmek amacıyla Kruskal-Wallis testi yapılmıştır. Bu test sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 4-7'de verilmiştir.

Tablo 4-7. TAT'da kesrin sade ve denk gösterimlerinin sınıf düzeylerine göre Kruskal-Wallis testi sonuçları

Tür	Sınıflar	n	Sıra Ort.	sd	χ^2	p	Fark
Sade Gösterim	4. Sınıf	273	579.17	3	5.786	.122	-
	5. Sınıf	284	518.76				
	6. Sınıf	285	569.22				
	7. Sınıf	269	557.79				
Denk Gösterim	4. Sınıf	273	445.69	3	47.942	.000	4-5, 4-6, 4-7
	5. Sınıf	284	557.27				
	6. Sınıf	285	606.39				
	7. Sınıf	269	613.22				

Tablo 4-7'deki analiz sonuçlarına göre, araştırmaya katılan öğrencilerin kesrin sade gösterimde farklı sınıf seviyeleri puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olmadığı belirlenmiştir ($\chi^2_{(3)}$ = 5,786, p > 0,05). Bir başka ifade ile değişik sınıflarda eğitim gören öğrencilerin kesrin sade gösterimlerinde denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri arasında anlamlı bir farkın olmadığı söylenebilir. Buna ek olarak Tablo 4-7'de araştırmaya katılan öğrencilerin kesrin denk gösterimlerinde farklı sınıf düzeylerinde denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olduğu belirlenmiştir ($\chi^2_{(3)}$ = 47,942, $p < 0,05$). Bu farkın hangi grup ya da gruplar lehine olduğunu anlamak amacıyla çoklu karşılaştırmalar ve değişik sayıda ikili Mann-Whitney U testleri yapılmıştır. Kesrin denk gösterimlerinde farkın 4. sınıf ile 5. sınıf (U = 30633, r = -0,18), 4. sınıf ile 6. sınıf (U = 28206,5 , r = -0,24) ve 4. sınıf ile 7. sınıf (U = 25434, r = -0,27) arasında olduğu görülmüştür. Bununla birlikte kesrin denk gösterimlerinde 5. sınıf ile 6. sınıf, 5. sınıf ile 7. sınıf ve 6. sınıf ile 7. sınıf arasında ortalamalar arasında gözlenen fark, yapılan testler sonucu istatistiksel olarak anlamlı bulunmamıştır.

BÖLÜM V

5. 5. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu bölümde tartışma, sonuç ve öneriler kısımları sunulacaktır. İlk olarak, araştırmadan elde edilen veriler sonucunda ulaşılan bilgiler, literatürdeki bilgiler ışığında tartışılmıştır. Sonuç başlığı altında bu araştırma ile literatüre yapılan katkı ortaya konulmuştur. Son olarak öneriler başlığı altında, bu çalışmadan ortaya çıkan sonuçlar ışığında öğretmenlere ve programları düzenleyenlere önerilerde bulunulmuştur. Ayrıca, yine bu başlık altında, yapılan araştırmanın sınırlarını aşan ve başka araştırmalar ile incelenmesinin literatüre katkı sağlayacağına inanılan konularda araştırmacılar için önerilere de yer verilmiştir.

5.1. Tartışma

Bu başlık altında, araştırma kapsamında ulaşılan bulgular, literatürdeki açıklamalar ve konuyla ilgili yapılan araştırmalar ışığında tartışılacaktır.

5.1.1. Parça-bütün ile ölçme anlamının karşılaştırılması

Bu çalışmanın birinci araştırma problemi çerçevesinde, denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin kesirlerin parça-bütün ve ölçme anlamına göre farklılık gösterip göstermediği incelenmiştir. Bu probleme ait bulgular Tablo 4-1'de sunulduğu üzere, parça-bütün anlam puanları ile ölçme puanları arasında anlamlı bir farkın olduğunu ve bunun parça-bütün anlamı lehinde olduğunu göstermektedir.

Denk kesirlerin parça-bütün ve ölçme anlamını karşılaştıran (Larson, 2000; Ni, 2001) ve sınırlı olsa da kesirlerin farklı konularında (kesirle toplama, çıkarma, karşılaştırma, problemi ifade etme ve çözme) yapılmış benzer araştırma problemlerini inceleyen çalışmalar bulunmaktadır. Daha önce yapılan çalışmaların bulguları, bu araştırmada elde edilen bulgularla paralellik göstermektedir. Örneğin; Yazgan (2007) ilköğretim dördüncü ve beşinci sınıf öğrencileri üzerinde yaptıkları araştırmada parça-bütün anlamının ortalamasının diğer anlam ortalamalarından yüksek çıktığı ve verilen eğitimle de bu artışın devam ettiği belirtilmiştir. Benzer şekilde, Contreras ve Martinez-Cruz'un (2000) öğretmen adayları ile yaptığı araştırmada, parça-bütün anlamının ölçme anlamından daha baskın olduğunu rapor etmişlerdir. Park, Güçler ve McCrory'de (2013) öğretmenlerle yaptığı çalışmasında, öğretmenlerin görüşme sırasında ölçme anlamını desteklese bile öğretimde parça-bütün anlamını daha çok kullandığını belirtmiştir. Denk kesirleri parça-bütün ve ölçme anlamalarını karşılaştırıldığı çalışmalar da araştırma probleminin bulgularını destekler niteliktedir. Larson'un (2000) altıncı sınıflar üzerinde çalıştığı araştırmada hem ön test hem de son test sonuçlarında öğrencilerin parça-bütün anlamı ölçen sorularda ölçme anlamını ölçen sorulara göre daha başarılı oldukları görülmüştür. Benzer şekilde Ni (2001) de beşinci ve altıncı sınıf düzeylerinde ölçme anlamında öğrencilerin parça-bütün anlamına göre başarısız oldukları raporlanmıştır. Parça-bütün anlamı ile ölçme arasındaki farkın nedeni çocukların kesirlerle ilgili öğrendikleri ilk anlamın parça-bütün anlamı olması olabilir. Bununla birlikte bunun diğer bir nedeni Bright, Behr, Post ve Wachsmuth (1988) ve Toluk'un (2002) belirttikleri gibi sürekli olarak parça-bütün anlamının sürekli kullanılmasının kesirlerin bir sayıyı ifade etmekten çok bir bütünün parçası olduğu fikrini pekiştirmesi olabilir. Ayrıca Contreras ve Martinez-Cruz'un (2000), Park, Güçler ve McCrory'inde (2013) ifade ettikleri gibi eğitim hayatları boyunca baskın olarak parça-bütün anlamı ile eğitim almış öğretmenlerin de sınıflarında kesirlerin parça-bütün anlamı dışındaki anlamlar için fazla zaman ayırmaması bunun nedeni olabilir.

5.1.2. Genel başarı düzeyi ve kesrin sade ve denk gösterimlerinin temsil türlerinine göre karşılaştırılması

Çalışmanın üçüncü ve altıncı araştırma problemleri çerçevesinde, denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri sırasıyla genel başarı ve sade ve denk gösterimlerinde grafiksel temsil türlerine göre incelenmiştir. Bu araştırma problemlerine ait bulgular Tablo 4-3 ve Tablo 4-6'da belirtilmiş olup temsil türlerinin arasında anlamlı farklılık olduğunu göstermektedir. Literatürde bu dört temsil türünü beraber karşılaştıran iki çalışmaya (Ni, 2001; Niemi, 1996) ulaşılmış olup diğer çalışmalar (Contreras ve Martinez-Cruz, 2000; Gürbüz ve Birgin, 2008; Wong ve Evans, 2007) alan temsili ile sayı doğrusu temsilini karşılaştırmıştır. Bu açıdan bakıldığında Ni (2001) ve Niemi (1996) çalışmaları araştırmanın bulgularını destekler niteliktedir. Alan temsili ile sayı doğrusu temsilinin karşılaştırıldığı çalışmalarda ise Contreras ve Martinez-Cruz (2000), Wong ve Evans (2007) anlamlı fark bulurken, Gürbüz ve Birgin (2008) çalışmasında alan temsilinin ortalaması sayı doğrusu temsilin yüksek olmasına rağmen anlamlı bir fark bulamamıştır. Bunun sebebi ise belirtilen çalışmada yalnızca denk kesirler incelenmemiş olup temel kesir bilgileri ve işlemlerin test edilmesi olabilir.

Kesirlerin temsillerindeki ortaya çıkan farklılığın her bir temsil türünün birbirinden farklı özelliklere sahip olması olabilir. Örneğin araştırma sonucunda alan temsilinin genel olarak diğer temsillere göre ortalamasının yüksek olmasının nedeni Armstrong ve Larson (1995), Baykul (2005), Hull (2005)'in belirttiği gibi öğretmenlerin kesirlere girişte parça-bütün anlamını desteklediği için en çok kullandıkları temsil olmasından kaynaklanabilir. Bununlar birlikte sayı doğrusu temsilinin tüm problem durumlarında en düşük ortalamaya sahip olması Bright, Behr, Post ve Wachsmuth’un (1988) ifade ettiği gibi sayı doğrusu temsilinin ölçme anlamına karşılık gelmesi ve bu anlamın öğrenilmesinin zor olması, sayı doğrusunda temsilinde kesirleri belirtirken iki ayrı referans noktasına sahip olması gibi sebeplerle açıklanabilir. Ayrıca Pesen (2008) ve Wong ve Evans’ın (2007) belirttiği gibi öğrencilerin bütünü eş parçaya ayırmada ve buna bağlı olarak 0 ile 1 arasındaki noktaları ya fazla ya da eksik şekilde parçalara ayırmalarından kaynaklı problem yaşamaları da öğrencilerin sayı doğrusu temsilinde zorlanmalarının sebebi olarak gösterilebilir.

Kesir temsillerinde özellikle genel başarı puanında en yüksek ortalamaya sahip olan uzunluk temsiliyle ilgili literatürde çok az çalışma (Ni, 2001; Niemi, 1996) bulunmakta olup elde ettikleri bulgular bu çalışmanın bulguları ile tutarlıdır. Genel puanlarda ve denk gösterimlerde, uzunluk temsilinin alan temsiline göre ortalamasının yüksek çıkmasının nedeni,alan temsilinde öğrenciler iki boyutlu şekillerle uğraşırken alanları eşit şekilde bölmeye çalışmaları ve uzunluk temsilinde bir boyutu olan doğru parçaları ile işlem yapmaları olabilir. Bunların dışında sayı doğrusu temsilinden sonra en düşük ortalamaya sahip olan küme temsilinin diğer temsillerden farklılaşması Pesen'in (2003) belirttiği gibi öğrencilerin karşılaştıkları bir bütün şeklinde olan nesneleri, bir küme olduğunu göz önünde bulundurmaması ve nesneleri fiziksel olarak parçalara ayıramaması ile açıklanabilir.

Kesirlerin temsillerinde ortaya çıkan farkın bir diğer sebebi ise Kılıç'ın (2009) belirttiği gibi öğrencilerin sembolik ve grafiksel temsillerin arasında yaşadıkları dönüşümde yaşadıkları zorluklardan olabilir. Bu ise öğretim sürecinde yalnız tek bir temsile bağlı kalmak ya da temsiller arası dönüşümlerin desteklenmemesinden kaynaklabilir. Ayrıca öğretmenlerinde temsil etme ve çoklu temsil dönüşümlerindeki eksiklikleri öğrencilere yansımış olabilir. Bu bağlamada Toluk-Uçar'ın (2009) yılında öğretmen adaylarıyla yaptığı çalışma öğretmen adaylarının kesirlerin temsillerinde eksik olduğunu ortaya koymuştur. Bu bulgu öğrencilerin temsiller arasında dönüşüm yaşamasının öğretmenlerden kaynaklı olabaileceği görüşünü destekler niteliktedir.

5.1.3. Kesrin sade ve denk gösterimlerin karşılaştırılması

Bu çalışmanın beşinci araştırma problemi çerçevesinde, denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri kesrin sade ya da denk gösterim olmasına göre incelenmiştir. İncelemede ulaşılan sonuçların sunulduğu Tablo 4-5'teki değerler, iki gösterim türüne göre puanların farklılaştığını ve bunun sade gösterimlerinin lehine olduğunu göstermektedir. Bu bulgular sade ve denk kesirlerin karşılaştırıldığı Ni (2001) ve Niemi'nin (1996) bulguları ile tutarlılık göstermektedir. Ayrıca Behr, Post, Lesh ve Silver (1983), Hart (1987), Hunting (1984), Kamii ve Clark (1995), Wong ve Evans (2006, 2007) yaptıkları çalışmalar öğrencilerin denk kesirlerde öğrencilerin zorluk yaşadığını belirtmekte ve bundan dolayı da bu çalışmada da öğrencilerin kesrin denk gösterimini temsil etmede başarısız olmasını doğrular niteliktedir.

Kesirlerin sade ve denk gösterimlerinde ortaya çıkan bu farkın sebebi Hart (1987) ve Kamii ve Clark ‘ın(1995) da belirttiği gibi öğrencilerin denk kesirleri ifade etmek için sahip olması gereken temel özelliklerden biri olan çarpımsal ilişkiyi kazanmamış olmasıdır. Bununla birlikte Mısral (2009) ve Ni'nin (2001) ifade ettiği gibi öğretmenlerin denk kesirlerin kavramsal anlamını öğretmek yerine “bir kesrin pay ve paydası aynı sayı ile çarpılır veya bölünür” gibi kural öğretmeleri de öğrencilerin denk kesirlerde zorlanmalarının sebebi olabilir.

5.1.4. Sınıf düzeyine göre genel başarı, temsil türü ve kesrin sade ve denk gösterimlerinin karşılaştırılması

Çalışmanın ikinci, dördüncü ve yedinci araştırma problemleri çerçevesinde, denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri sırasıyla genel başarılarında, temsil türlerinde, sade ve denk gösterimlerinde sınıf düzeylerine göre değişimi incelenmiştir. Bu problemlere ait bulgular Tablo 4-2, Tablo 4-3 ve Tablo 4-6'da sunulmuş olup sade gösterim dışında bütün diğer değişkenlerde sınıf seviyesine göre anlamlı fark bulunmuştur. İkinci araştırma problemi kapsamında genel başarı puanlarının dördüncü sınıftan yedinci sınıfa doğru artış eğiliminde olması Ni'nin (2001) çalışmasının bulguları ile örtüşmektedir. Dördüncü sınıfların diğer sınıf seviyelerinde anlamlı farklılaşması ise ilköğretim matematik programında denk kesirlerle ilgili kazanımların beşinci sınıftan itibaren yoğun olarak yer alması olabilir.

Bu çalışmanın dördüncü araştırma probleminde temsil türlerinden alan ve uzunluk temsilinde sınıf düzeyiyle artan puanlar ve dördüncü sınıfın puanlarının diğer sınıf seviyeleri ile farklılaşması Gürbüz ve Birgin (2008) ve Ni'nin (2001) çalışmaları ile paralellik gösterirken Jigyel ve Afamasaga-Fuata’i'in (2007) çalışmasının bulguları ile örtüşmemektedir. Jigyel ve Afamasaga-Fuata’i'in (2007) çalışmasında sınıf düzeyinde artış bulmuş fakat bu istatistiksel olarak anlamlı değildir. Bu ise çalıştığı örneklem büyüklüğünden (55 öğrenci) kaynaklanıyor olabilir. Bu açıdan incelendiğinde Gürbüz ve Birgin'in (2008) ifade ettiği gibi her bir öğrenim seviyesinde konuların tekrar

tekrar öğretilmesi ve öğrencilerin bilişsel gelişimleri ile denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin artması beklenen bir durumdur. Dördüncü sınıfların alan ve uzunluk temsillerinde daha başarısız olmalarının nedeni ise Orhun'un (2007) da belirttiği gibi kesirler konusunda öğrencilerin formal matematik ifadelerini görsel olarak ifade etmedeki ya da tam tersi durumlarda yaşadıkları problemlerden kaynaklanmış olabilir. Bir başka deyişle sembolik temsil ve grafiksel temsil arasındaki dönüşüm konusunda dördüncü sınıfların yaşadıkları bu sorun öğrencilerin alan ve uzunluk temsiinde diğer sınıflara göre daha başarısız olmalarına sebep olmuş olabilir.

Sayı doğrusu temsilinde beşinci sınıfların ortalaması dördüncü sınıflardan düşük çıkması ise beklenmedik bir bulgudur. Bu, ilköğretim dördüncü sınıfta sayı doğrusu gösterimi ile ilgili kazanım bulunurken beşinci sınıfta sayı doğrusu ile gösterime dair herhangi bir kazanım yoktur (MEB, 2009) Öğretim programındaki bu duruma bağlı olarak öğretmenlerin sayı doğrusunda gösterim konusuna, beşinci sınıf seviyesinde, fazla önem vermemeleri, bu farklılaşmanın sebebi olabilir. Ayrıca yedinci sınıfların diğer sınıf seviyeleriyle farklılaşması ise öğrencilerin ilköğretim matematik müfredatı doğrultusunda, kesirlerden rasyonel sayılara geçmesi ve bu sayede kesirlerin sayı anlamına sahip olduğunu kavramasıyla açıklanabilir. Bununla birlikte ilköğretim matematik müfredatında7.sınıf "Rasyonel sayıları açıklar ve sayı doğrusunda gösterir." ve "Rasyonel sayıları farklı biçimlerde gösterir." kazanımlarıyla birlikte sayı doğrusu temsili kullanımı desteklenmiştir.

Bu çalışmanın yedinci araştırma probleminde kesirlerinin sade gösteriminin sınıf düzeyinde farklılaşmaması Jigyel ve Afamasaga-Fuata'i'in (2007) bulguları ile benzerlik gösterirken Ni (2001) bulgularıyla çelişmektedir. Bu durumun nedeni olarak öğrencilerin kesir gösterimlerinde sürekli sade gösterimlerle çalışması gösterilebilir. Kesrin denk gösteriminde yedinci sınıfın diğer sınıflarla diğer sınıf seviyelerinde farklılaşması öğrencilerin Kamii ve Clark'ın (1995) önemini vurguladığı çarpımsal ilişkinin bu sınıf seviyesinde kazanılması ve bununla birlikte denk kesirlerin öğretiminde kavramsal olarak bağ bulunan oran ve orantı konusunun ilköğretim yedinci sınıfta verilmesi olabilir.

5.2. Sonuçlar

Kesirlerin anlamaları, kesirlerin temsilleri ve denk kesirlerin bir arada incelendiği çalışmalar (Ni, 2001; Niemi, 1996) sınırlıdır. Ayrıca ülkemizde bu konuları bir arada inceleyen çalışma bulunmamaktadır. Yukarıda bahsedilen üç değişkeni ve sınıf düzeyini (ki sınıf düzeyine göre farklılaşmalar, öğretim programındaki kazanımlarla yakından ilişkilidir) bir çatı altında inceleyen bu çalışmayla konuyla ilgili literatüre katkı sağlanmaya çalışılmıştır.

Ülkemizde matematik eğitimi alanında denk kesirler ile ilgili çalışmalar sınırlıdır. Ayrıca ülkemizde kesirlerin temsil edilmesini ölçen farklı testler geliştirilmiş olmasına rağmen denk kesirler ve kesirlerin anlamlarını ölçen bir test bulunmamaktadır. Bu çalışma ile matematik eğitimi alanında kesirlerin anlamları, kesirlerin temsili, kesirlerin sade ve denk gösterimleri bir arada inceleyebilecek bir test - Temsilsel Akıcılık Testi'ni Türkçe'ye uyarlayarak- ülkemiz literatürüne kazandırılmıştır.

Kesirler konusu ilköğretim müfredatının en zor konularından biridir (Charalambos ve Pitta-Pantazi 2005; Ersoy ve Ardahan, 2003; Olkun ve Toluk, 2004). Bunun nedenlerinden biri de kesirlerin farklı anlamlara sahip olmasıdır ((Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983; Toluk, 2002). Kesirlerde yaşanan zorlukların giderilmesi ile ilgili olarak çeşitli öneriler getiren çalışmalara rastlamak mümkündür. Bu çalışma ile öğrencilerin kesirlerde yaşadıkları güçlüklerin giderilmesine yönelik öneriler getirilmiştir.

5.3. Öneriler

Bu başlık altında yapılan çalışmanın çıktıları ışığında öneriler sunulmuştur. Sunulan öneriler; matematik öğretimine ve araştırmacılar yönelik olarak kategorize edilmiştir.

5.3.1. Matematik öğretimine yönelik öneriler

Matematik öğretiminde ***eşit paylaşım*** etkinliklerinin kullanılması öğrencilerin kesirleri algılamasına, zihinlerinde yapılandırılmasına ve ilgili diğer konuların öğrenilmesine yardımcı olabilir. Çünkü öğrenciler eğitim ortamlarına kesirler ve buna bağlı olarak eşit paylaşıma ait sezgisel bilgiler ile gelirler. Bu bağlamda, kesir öğretimine eşit paylaşım problemleriyle başlamak ve buna ağırlık vermek, kesir kavramının anlaşılmasını kolaylaştırabilir (Ersoy ve Ardahan, 2003; Olkun ve Toluk-Uçar, 2004). Ayrıca öğrencilerde anlamlı öğrenmenin sağlanabilmesi için eşit paylaşım ortamlarının günlük hayattan seçilmesi de önemlidir.

Streefland (1991,1993) yaptığı çalışmalarda eşit paylaşım etkinliklerinin rasyonel sayıların anlamları ile direkt ilgili olduğu sonucuna varmıştır. Kesirlerde yaşanan zorlukların sebeplerinden olan ***kesirlerin farklı anlamları*** öğretim ortamında desteklenmesi önemlidir. Bu çalışma ve yapılan diğer ilgili çalışmalar, başta ölçme anlamı olmak üzere diğer anlamların (oran, bölüm ve işlemci) parça-bütün anlamından daha az vurgulandığı sonucunu ortaya çıkarmıştır. Öte yandan kesirlerin tam olarak anlaşılabilmesi için kesirlerin farklı anlamlarının tamamen anlaşılabileceği ve bu anlamların birbiri ile kaynaştırılabileceği eğitim ortamlarının oluşturulması kesir öğretiminde bir sonraki basamak olan rasyonel sayılarda yaşanan güçlükleri aşmak için fayda sağlayabilir. Çünkü kesirlerin sahip olduğu bu anlamlar ile rasyonel sayılara temel oluşturulur ve sonraki basamaklar inşa edilir. Bunun dışında özellikle kesirlerin ölçme anlamını desteklemek amacıyla verilen iki farklı rasyonel sayı arasına daima bir rasyonel sayının yazılabileceğini öğreten etkinlikler derste uygulanarak kesir öğretiminde başarı sağlanabilir.

Altun (1998), bu yaşanan güçlüklerin üstesinden gelebilmenin somut nesneler ve görsel temsiller ile aşılabileceğini belirtmiştir. ***Kesirlerin farklı temsillerini***; kesirlerle işlemler, problem çözme v.b etkinliklerde kullanılarak öğrencilerin beceri ve yaratıcılıklarını geliştirilebilir. Bununla birlikte öğrencilerin temsiller arasında geçişlerde sorun yaşadıkları göz önüne alınarak, çoklu temsiller arasında geçişler yapabilmelerini sağlayacak problem durumları sunulabilir. Ya da ders kesirlerin farklı temsillerini içeren bir yapıda tasarlanarak sonrasında problem durumları ile desteklenebilir. Ayrıca kesirlerin grafiksel temsilleri içindeki alan, küme, uzunluk ve sayı doğrusu kesirlerin farklı anlamları içerecek şekilde öğrencilere kazandırılabilir. Kesirlerin öğretiminde alan, uzunluk ve sayı doğrusu temsili gibi süreklilik özelliği gösterimleri ile kesir anlatımı daha kolay olacağından önce sürekli temsiller kullanılması daha sonra sayılabilme özelliğini esas alan küme temsiline bir geçiş yapılması fayda sağlayabilir.

Kesirler konusunda yer alan ve özellikle kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerinin öğretiminde önemli olan ***kesirlerin denkliği*** konusunda öğrencilerin zorluk yaşadıkları ilgili literatürde yer almaktadır (Ni, 2001; Wong ve Evans, 2006, 2007). Bundan dolayı denk kesirlerin öğretiminde öğrencilere "bir kesrin pay ve paydası aynı sayı ile çarpılır veya bölünür" gibi kural öğretimi yerine yaşantılarına bağlı olarak elde ettikleri sezgisel bilgiler (örneğin iki tane çeyrek yarım eder gibi...) kullanılarak inşa edilmesi fayda sağlayabilir. Ya da öğrencilere denk kesirlerin görsel temsilleri kullanılarak birbirine denk durumları bir arada verilerek gösterilebilir.

Nitelikli bir eğitim için ön şartlardan biri olan öğretmen; ***hizmet öncesi eğitim***de kazanacağı alan bilgisi, öğretmenlik meslek bilgisi ve kazanılan genel kültür bilgisiyle mesleğe hazır olabilir (Özkan, Albayrak ve Berber, 2005). Bu bağlamda eşit paylaşım, kesirlerin anlamları, temsilleri ve denkliği konularında yapılacak olan mikro öğretim yoluyla hizmet öncesi eğitimde öğretmen adaylarına yeterlilik kazandırılabilir. Ayrıca hizmet öncesi eğitimde öğretmen adaylarının aldıkları uygulamaya yönelik derslerde (örneğin özel öğretim yöntemleri, öğretmenlik uygulamaları gibi) kesirler gibi öğretiminde zorluk yaşanan konular özellikle incelenebilir.

Eğitim programlarındaki amaç programın etkiliğini test ederek hakkında yargıya varmak, programın aksayan yönlerini ve eksiklikleri belirleyerek düzeltilmesini sağlamaktır (Güngör ve Yılmaz, 2002). Bu doğrultuda ***program geliştiriciler***, ilköğretim matematik programında (iloklul ve ortaokul), kesirlerin eşit paylaşımı ve denkliği konusunda yer alan kazanımlardaki etkinliklerin sayısını arttırılabilir. Özellikle kesirlerin farklı anlamlarını ve temsillerini ayrıca vurgulayan kazanımlarla ilgili program desteklenebilir.

Yılmaz (2013) matematik öğretmenlerine yönelik hazırladığı ***hizmet içi eğitim*** sonucunda öğretmenlerin bilgi ve becerilerinin olumlu yönde geliştiğini ortaya çıkarmıştır. Buradan da öğretmenlerin çeşitli bilgi eksiklerini gidermeleri için hizmet içi eğitim almaları gerektiği sonucuna varılabilir. Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı olarak görev yapan öğretmenlere hizmet içi seminer aracılığıyla özellikle kesirler ve genelde temsil kullanımı özelde ise kesirlerin temsilleri konularında yeterlilik kazandırılabilir. Böylece programların uygulayıcıları olan öğretmenlerin programı uygulamadaki yeterlilikleri desteklenerek, matematikte birçok konu ile ilişkili olan kesirler konusunda uygun eğitim ortamları oluşturmaları sağlanabilir.

5.3.2. Gelecekteki araştırmalara yönelik öneriler

İlköğretim 4-7. sınıf öğrencileri üzerinde yapılan bu araştırmada, denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerileri hangi düzeyde olduğu araştırılmıştır. Araştırma kapsamında Temsilsel Akıcılık Testi Türkçeye çevrilmiştir.

a. Bu çalışmanın araştırma problemi çerçevesinde incelenen kesirlerin parça-bütün anlamları dışında yer alan kesir öğretimi araştırmalarında önemli yeri olan diğer anlamları (bölüm, oran ve işlemci) kesirlerin temsilleri ve denk kesiler araştırılabilir.
b. Bu çalışmada kullanılmış olan sembolik ve grafiksel temsillerin dışında Lesh Temsil Dönüşüm Modelinde yer alan gerçek hayat durumları, konuşma dili ve somut nesne temsilleri kullanılarak kesirler denkliği konusunda çalışılabilir.
c. Benzer araştırmalar, denk kesirlerde sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin hangi düzeyde olduğunu ortaya koymak amacıyla farklı örneklem üzerinde aynı ölçme aracı kullanılarak uygulama yapılabilir.
d. Bu araştırma benzer ölçme aracında değişikliklere gidilerek farklı öğretim kademelerindeki öğrencilerin denk kesirlerdeki temsilleri ilişkilendirme

becerileri araştırılabilir.

e. Sayı doğrusu temsilinde, beşinci sınıf öğrencilerinin dördüncü sınıf öğrencilerinde daha düşük başarıya sahip olmaları literatür tarafından desteklenmektedir. Ancak tespit edilen farklılaşmanın öğretim programındaki kazanım dağılımından kaynaklı olabileceği düşünülmektedir. Yapılacak başka nicel çalışmalarda da benzer sonuçlara ulaşılırsa bunun sebebi nitel çalışmalarla ortaya konmaya çalışılabilir.

KAYNAKÇA

Acar, N. (2010). *Kesir çubuklarının ilköğretim 6. sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama ve çıkarma işlemlerindeki başarılarına etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Konya: Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Adu-Gyamfi, K. (1993). External multiple representations in mathematics teaching. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Raleigh: Graduate Faculty of North Carolina State University, USA.

Agresti, A. ve Finlay, B. (1997). Statistical methods for the social sciences. NJ: Printice Hall, Inc.

Akkuş, O. ve Çakıroğlu, E. (2006). Yedinci sınıf öğrencilerinin örüntülerle ilgilicebirsel işlemlerde çoklu temsil kullanımları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31,13-24.

Akkuş, R. (2009) *Yazma İle Problem Çözme Arasındaki İlişki: Matematikte Öğrenme Amaçlı Yazma,* 8. Matematik Sempozyumunda sunulan bildiri. (Kasım, Ankara)

Aksu, M., (1997). Student performance in dealing with fractions. The Journal of Educational Research, 90(6), 375-380.

Alexander, N (1997). *Extending Meaning of Multiplication and Division of Rational Numbers.* Annual Meeting of the Louisiana Education Research Association, (Mart, ss. 2-8.)

Altun, M. (1998). Matematik Öğretimi. *Açıköğretim Fakültesi Yayınları,* No:591.

Altun, M. (2002). *İlköğretim İkinci Kademede (6, 7 ve 8. Sınıflarda) Matematik Öğretimi.* İstanbul: Alfa Basım Yayım Dağıtım.

Armstrong, Barbara E., and Larson, Carol N. “Students’ use of part-whole and direct comparison strategies for comparing partitoned rectangles.” *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(1), 1995, ss.2-19.

Ball, D. L. (1990). *Prospective elementary and secondary teachers understanding of division*. Journal for Research in Mathematics Education, 21(2), 132-144.

Baştürk, R. (2011). *Bütün Yönleriyle SPSS Örnekli Nonparametrik İstatistiksel Yöntemler* (2. Baskı). Ankara: Anı Yayıncılık

Baykul, Y. (2005). *İlköğretimde Matematik Öğretimi (1-5 Sınıflar).* 8. baskı, Ankara: PegemA Yayıncılık.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R. ve Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. D. A. Grouws (eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). İçinde, New York: Macmillan.

Behr, M., Harel, G., Post, T., ve Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis - Emphasis on the Operator Construct. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (ss. 13-47) İçinde, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T. ve Lesh, R., (1997) Conceptual Units Analysis of Preservice Elementary School Teachers' Strategies on a Rational-Number-as-Operator Task. *Journal of Mathematics Education*, 28(1), 48-69.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., ve Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* (ss. 91-125) İçinde New York: Academic Press.

Behr, M. ve Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (eds), Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods (2nd ed.) (ss. 201-248) İçinde, Boston: Allyn and Bacon.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post T. ve Lesh R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323-341.

Blanton, M. ve Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' “algebra eyes and ears”. Teaching Children Mathematics, 10(2), 70-77.

Bright, G., Behr, M., Post, T. ve Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 215-232.

Büyüköztürk, Ş.(2005). Sosyal Bilimler için Veri Analizi El Kitabı İstatistik, Araştırma Deseni SPSS Uygulamaları ve Yorum (5.Baskı). Ankara: PegemA Yayıncılık.

Büyüköztürk, Ş., Çakmak, K. E., Akgün, E. Ö., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (4. Baskı). Ankara: PegemA Akademi

Carey, D. A. (1992). Research into practice: Students' use of symbols'. Arithmetic Teacher, 40, 184-186.

Cathcart, W. G., Pothier, Y., Vance, J. H. ve Bezuk, N. S. (2003). Learning mathematics in elementary and middle schools: A learner-centred approach (3th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.

Charalambous, C. Y. ve Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students’ understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics,* 64(3), 293–316.

Choike, J.R. (2000). Teaching Strategies for “Algebra for All”. Mathematics Teacher, 93(7), 556-560.

Clarke, D.M., Roche, A. ve Mitchell, A. (2008) Ten practical tips for making fractions come alive and make sense, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(7), 373-379.

Cohen, J.(1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Cohen, J. (1994). The earth is round ($p < .05$). *American Psychologist*, 49(12), 997 – 1003.

Contreras, J. N., Martinez-Cruz, A. M. (2000). *Prospective elementary teachers' dominant situations and knowledge about representations of rational numbers.* Twenty-second Annual Meeting of the International Group for the Psycology of Mathematics Education, , (7-10 October), Tucson, Arizona

Coolican, H. (2009). *Research methods and statistics in psychology.* United Kingdom, London: Hodder.

Cramer, K. 2001. Using models to built middle-grade students' understanding of functions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6: 310-318

Cramer, K., & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition and fractions. In B. Littweiller (eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions.* The NCTM 2002 yearbook (ss. 41–48). İçinde, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cramer, K., & Post, T. (1995). Facilitating children's development of rational number knowledge. D. Owens, M. Reed, and G. Millsaps (eds.), Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of PME-NA. (ss. 377-382). İçinde, Columbus, OH: PME.

Cramer, K., Wyberg, T. ve Leavitt, S. (2008). The Role of Representations in Fraction Addition and Subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School.* 13 (8), 490-496.

Çelik, D. (2007). Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Çıkla-Akkuş, O. (2004). The Effects of Multıple Representatıons Based Instructıon on Seventh Grade Students' Algebra Performance, Attıtude toward Mathematıcs, and Representatıon Preference. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Ankara: Orta Doğu Teknik Üniversitesi Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü.

Delice, A. ve Sevimli, E. (2010). Öğretmen Adaylarının Çoklu Temsil Kullanma Becerilerinin Problem Çözme Başarıları Yönüyle İncelenmesi: Belirli İntegral Örneği. Kuram ve Uygulamada Eğitimi Bilimleri, 10 (1).

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. ve Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. C. Janvier (ed.), Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics (ss. 109-123) İçinde. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1993). Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée. Annales de Didactiques des Sciences Cognitives, 5, 37-65.

Erbaş, K. (2005). Çoklu Gösterimlerle Problem Çözme ve Teknolojinin Rolü. The Turkish Online Journal of Educational Technology , volume 4 Issue 4 Article 12.

Ersoy, Y. ve Ardahan, H. (2003). "İlköğretim Okullarında Kesirlerin Öğretimi II: Tanıya Yönelik Etkinlikler Düzenleme. (http://www.matder.org.tr/bilim/ioko2tyed.asp?ID=49, 27.11.2012 tarihinde erişildi).

Even R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 105-121.

Flores, A., Samson, J., & Yanik, H. B. (2006). Research, reflection, practice: Quotient and measurement interpretations of rational numbers. Teaching Children Mathematics, 13(1), 34-39.

Fritz, C.O., Morris, P.E. ve Richler, J.J. (2012). Effect size measures: Current use, calculations and interpretation. Journal of Experimental Psychology: General, 141, 2-18.

Galileo G, (1623). *II Saggiatore, nel quale con bilancia esquisita e giusta* .(Rome: Mascardi)

Goldenberg, E.P., Cuoco, A.A. ve Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (eds.) Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space (ss. 3-44) İçinde, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Goldin, G. A. (1990).Epistemology, constructivism, and discovery learning in mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 4, 31-47

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.

Goldin, G. (2003). Representation in mathematical learning and problem solving. Lyn D. English (ed.), Handbook of international research in mathematics education. (ss. 197-218) İçinde. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Goldin, G. A. ve Kaput, J.J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. L. P. Steffe, P. Nesher, P.Cobb, G. A. Goldun, & B. Greer (eds.), *Theories of mathematical learning*. İçinde (ss. 397–430). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Goldin, G. A. ve Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 1–4.

Goldin, G. ve Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* İçinde, (ss. 1-24). Reston: NCTM Publications

Greeno, J. G ve Hall, R. P. (1997). Practicing representation. Phi Delta Kappan .78 (5).

Güngör, C. ve Yılmaz, B. (2002) Eğitimde ölçme ve değerlendirme (*http:www.egitim.com/ egitimciler/0753/0753.1/0753.egitimdeölçmevedegerlendirme.asp*, 05.09.2013 tarihinde erişildi).

Gürbüz, R. ve Birgin, O. (2008). Farklı Öğrenim Seviyesindeki Öğrencilerin Rasyonel Sayıların Farklı Gösterim Şekilleriyle İşlem Yapma Performanslarının Karşılaştırılması. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23(1), 85-94

Hart, K.M. (1987). Practical work and formalisation, too great a gap. J.C.Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran. Proceedings of the Eleventh *International Conference Psychology of Mathematics Education* (PME-XI) Vol II, 408-415. Montreal.

Hart, K. M., Brown, M.L., Kuchermann, D.E., Kerslach, D., Ruddoock G. ve Mccartney, M. (1998). Children's Understanding of Mathematics. K.M. Hart (ed.), *The CSMS mathematics team* (ss. 11-16) İçinde, Antony Rowe Limited.

Haser, Ç. ve Ubuz, B. (2003). Students' Conception of Fractions: A Study of 5th Grade Students. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 64-69.

Hiebert, J. (1989). The struggle to link written symbols with understandings: An update. *The Arithmetic Teacher,* 36(7), 38-43.

Holmes, E. E. (1995). Directions in Elementary School Mathematics: *Interactive Teaching and Learning*. Englewood Cliffs: Merrill.

Hull, L. (2005). *Fraction Models That Promote Understanding for Elementary Students.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Central Florida Üniversitesi.

Hunting, R. P. (1984). Understanding equivalent fractions. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 7, 26-33

Janvier, C. (1987). Representations and understanding: The notion of function as an example. C. Janvier (ed.), *Problems of representations in the learning and teaching of mathematics* (s. 67-73). İçinde. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C., Girardon, C. & Morand, J. (1993). Mathematical Symbols and Representations. P.S. Wilson (ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (ss. 79-102) İçinde. Reston, VA: NCTM.

Janvier, C., Girardon, C. ve Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. P. S. Wilson (ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (ss. 79-102). İçinde. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Jigyel, K. ve Afamasaga-Fuata'i, K. (2007). Students' conceptions of models of fractions and equivalence. *InAustralian Mathematics Teacher.* 63 (4), 17-25

Kadhi, T. 2005. *Online assessment: A study of the validation and implementation of a formative online diagnostic tool in developmental mathematics for college students.* Yayımlanmamış doktora tezi, Office of Graduate Studies of Texas A&M University.

Kamii, C., & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 365-378.

Kaptan, S. (1998). *Bilimsel araştırma ve istatistik teknikleri (11.Baskı)*. Ankara: Tek Işık Web Ofset.

Kaput, J. J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. Claude Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (ss. 159-l 95) İçinde. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner, & C. Kieran (eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (ss. 167-194) İçinde, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. E. von Glasersfeld (eds.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, (ss. 53-74) İçinde. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. J. (1992) Technology and mathematics education. D. A. Grouws, (ed.) Handbook of *Research on Mathematics Teaching and Learning*, (ss. 515-556) İçinde. New York: Macmillan.

Kaput, J. J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser, & B. Winkelman (eds.), *Didactics in Mathematics as a Scientific Discipline* (ss. 379-397) İçinde, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. J. (1998). Representations, inscripions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 265-281.

Kaput, J. ve Sims-Knight, J. (1983). Errors In Translations To Algebraic Equations: Roots and Implications. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 5, 63-78.

Karasar, N. (2009). *Bilimsel Araştırma Yöntemi*. Ankara: Nobel Yayınları

Kılıç, Ç. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin matematiksel problemlerin çözümlerinde kullandıkları temsiller. Yayımlanmamış doktora tezi, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Kılıç, Ç ve Özdaş, A. (2010). İlköğretim 5. Sınıf öğrencilerinin kesirlerde karşılaştırma ve sıralamayı gerektiren problemlerde kullandıkları temsiller. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 18(2), 513-530.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. J. Hiebert & M. Behr (eds.), *Number-concepts and operations in the middle grades* (ss. 53-92) İçinde, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren,T.E. (1993). Rational and fractional numbers:From quotient field to recursive understanding. T.P.Carperten,E.Fennema&T.A.Romberg (eds.), *Rational numbers: An integration of research* (ss. 49-84) İçinde, Hillsdade,NJ:Erlbaum

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. G. Harel, & J. Confrey (eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (ss. 89-120) İçinde, Albany, NY: State University of New York Press.

Lamon, S.J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Larson, N. C. (2000). *The Development Of The Part-Whole And Measure Subconstructs Of Four Sixth-Graders During An Instructional Unit.* Twenty-second Annual Meeting of the International Group for the Psycology of Mathematics Education, , (7-10 October), Tucson, Arizona.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis, and remediation. R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. G. Kantowski (eds.), *Applied mathematical problem solving* (ss. 111–180) İçinde, Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lesh, R. ve Kelly, A. E. (1997). Teachers' evolving conceptions of one-to-one tutoring: A three-tiered teaching experiment. *Journal of Research in Mathematics Education*, 28, 398-430.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representation in mathematics learning and problem solving. C. Janvier (ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (ss. 33 - 40) İçinde. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lubinski, C. A., and Otto, A. D., 2002. Meaningful Mathematical Representations and Early Algebraic Reasoning, Teaching Children Mathematics, 9(2), 76-80

Mack, N. (1995). Confounding whole-number and fraction concept when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(5), 422-441.

Mamede, E., Nunes, T. ve Bryant, P. (2005). *The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations.* Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Chick H.L., Vincent J.L. (eds), 3:281-288, Melbourne:PME

Marshall, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (eds.), Rational numbers: An integration of research (ss. 261-288) İçinde, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McGowan, M. ve Tall, D. (2001). Flexible Thinking, Consistency, and Stability of Responses:A Study of Divergence (http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/drafts/dot2001-mcgowen-tall-draft.pdf 01.07.2011 tarihinde erişildi).

Mısral, M. (2009). *Kesrin farklı anlamlarına göre yapılan öğretimin İlköğretim 6. Sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama çıkarma ve çarpma işlemlerinde kavramsal ve işlemsel bilgi düzeylerine etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Konya: Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Milli Eğitim Bakanlığı, (2005). İlköğretim Matematik Dersi 1-5. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu. Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı, (2009). İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu. Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı, (2013). Ortaokul Matematik Dersi 5-8. Sınıflar Öğretim Programı. Ankara.

Montague, M. (2008) Math problem solving for middle school students with disabilities. The access center improving outcomes for all students K-8. (http://www.k8accesscenter.org/training_resources/documents/Math%20Problem%20Solving.doc, 02.08.2011 tarihinde erişildi).

Moss, J. (2000). *Deepening children's understanding of rational numbers: A developmental model and two experimental studies.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi,Toronto Univ., Toronto

Moss J. (2002). *Percents and Propartion at the Center Altering the Theaching Sequence for rational number, Making Sence of Fractions, Ratios and Proportions*, National Council of Theachers of Mathematics, Restorn Virginia

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM Publications.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1998). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM Publications.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM Publications.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology,* 26, 400–417.

Niemi, D. (1996). *Instructional influence on content area explanations and represenational knowledge: Evidence for the construct validity of measures of principled understanding. CSE Technical Report 403.* National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing, Los Angeles, CA: University of California.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. J. Hiebert, & M. J. Behr (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (ss. 53-92) İçinde, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Olkun S. ve Toluk Uçar Z. (2004), *İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Orhun, N. (2007). Kesir İşlemlerinde Formal Aritmetik ve Görselleştirme Arasındaki Bilişsel Boşluk, *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(14), 99–111.

Özgün-Koca, A. (1998). Students' use of representations in mathematics education. Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Raleigh, North Carolina.

Özkan, H. H., Albayrak, M. ve Berber, K. (2005). Öğretmen Adaylarının İlköğretim Okullarında Yaptıkları Öğretmenlik Uygulamasının Yetişmelerindeki Rolü. *Milli Eğitim Dergisi,* 33, 168.

Park, J., Güçler, B. ve McCrory, R. (2013). Teaching Prospective Teachers about Fractions: Historical and Pedagogical Perspectives, *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 455-479

Pesen, C. (2003) *Eğitim Fakülteleri ve Sınıf Öğretmenleri için Matematik Öğretimi*, Ankara: Nobel Yayın Dağıtım

Pesen, C. (2008). Kesirlerin Sayı Doğrusu Üzerindeki Gösteriminde Öğrencilerin Öğrenme Güçlükleri ve Kavram Yanılgıları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 9(15), 157–168.

Piaget J. (1967). *Biologie et connaissance.* Paris : Gallimard

Piaget, J. (1983). *Piaget's Theory.* P. Mussen (ed.), İçinde. Handbook of child psychology. Wiley.

Piaget, J. (1987). *Possibility and necessity. Vol. II: The role of necessity in cognitive development.* Minneapolis: University of Minnesota Press.

Piaget, J., Inhelder, B. ve Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. (E.A. Lunzer, Trans.) New York: Basic Books. (Original work published 1948)

Pitkethly, A. ve Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area on initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 5-38.

Pitta-Pantazi, D., Gray, E. & Christou, C. (2004). Elementary school students' mental representations of fractions. Høines, M.J & Fuglestad, A. (eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, İçinde. 4, 41-48).

Polya, G. (1957). *How to solve it (*2nd Ed). New Jersey: NJ: Princeton University Pres.

Post, T., Behr, M. ve Lesh, R. (1982). Interpretations of Rational Number Concepts. L. Silvey & J. Smart (eds.), *Mathematics for Grades 5-9, 1982 NCTM Yearbook* (ss. 59-72) İçinde, Reston, Virginia: NCTM.

Post, T., Cramer, K., Harel, G., Kiernen, T. ve Lesh, R. (1998). *Research on rational number, ratio and proportionality*. Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME-NA XX Volume I (ss. 89-93). Raleigh, North Carolina.

Royston, J.P. (1982). An extension of the Shapiro and Wilk's W test for normality to large samples. *Applied Statistics*, 31, 115-124

Sert, Ö. (2007). *Eighth grade students' skills ın translating among different representations of algebraic concepts.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Ankara: Middle East Technıcal Unıversity

Schultz, J.E. ve Waters, M.S. (2000). Why Representations? Mathematics Teacher, 93(6), 448, 6p

Siebert, D. ve Gaskin, N. (2006). Creating, naming, and justifying fractions. *Teaching Children Mathematics, 12*(8), 394-400.

Skemp, R. (1986). *The psychology of learning mathematics* (2nd ed.). London: Penguin Books.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1993). Fractions: A realistic approach. T. P. Carpenter, E.Fennema, & T. A. Romberg (eds.), *Rational numbers: An integration of research* (ss. 289–325) İçerisinde, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Şiap, İ. ve Duru, A. (2004). Kesirlerde Geometriksel Modelleri Kullanabilme Becerisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), 89-96

Tezcan, C. (2003). *İlköğretim 8. Sınıf Öğrencilerinin Rasyonel Sayı Kavramını Algılamasında Karşılaştıkları Güçlüklerin Belirlenmesi ve Çözüm Önerileri.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Thomas, N., Mulligan, J. T. ve Goldin, G. A. (2002). Children's representations and cognitive structural development of the counting sequence 1-100. *Journal of Mathematical Behavior,* 21, 117-133.

Toluk, Z. (1999). *Children's Conceptualizations of The Quotient Subsconstruct of Rational Numbers,* Doktora Tezi, Arizona State University. A.B.D.

Toluk, Z. (2002). İlkokul Öğrencilerinin Bölme İşlemi ve Rasyonel Sayıları İlişkilendirme Süreçleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 19(2), 81-101.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 166-175.

Usiskin, Z. (2007). The Future of Fractions, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(7), 366-369

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. M. (2012). İlkokul ve Ortaokul Matematiği / Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (çev. ed. S. Durmuş). Ankara: Nobel Yayınları.

Vanhille, L. S. ve Baroody, A. J. (2002). Fraction instruction that fosters multiplicative reasoning. B. Litwiller (ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. NCTM 2002 Yearbook (ss. 224-236) İçinde. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Von Glaserfeld, E. (1996). Aspects of radical constructivism and its educational recommendations. In L. Steffe, et. al. (eds.), Theories of mathematical learning (ss. 307-314) İçinde, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Watanabe, T. (2006). The teaching and learning of fractions: A Japanese perspective. *Teaching Children Mathematics*, 12, 368-374

Wong, M. ve Evans, D. and Anderson, J. (2006). *Developing a Diagnostic Assessment Instrument for Identifying Students' Understanding of Fraction Equivalence.* The University of Sydney. ACSPRI Conference.(December) Sydney, Australia.

Wong, M. ve Evans, D. (2007). Assessing Students‟ Understanding of Fraction Equivalence. *EARCOME*, 4, 119-127.

Wu, Z. (2004). The stduy of middle school teachers' understandin and use of mathematical representation in relation to teachers' zone of proximal in teaching fractions and algebraic functions. Yayımlanmamış doktora tezi. Texas: Texas A&M University.

Yazgan, Y. (2007). *10-11 yaş Grubundaki Öğrencilerin Kesirleri Kavramaları üzerine Deneysel Bir Çalışma.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Bursa: Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Sınıf Öğretmenliği Bilim Dalı.

Yıldırım, C. (2000). *Bilim Felsefesi*. İstanbul: Remzi Kitabevi,

Yıldırım, H.H. & Yıldırım, S. (2011) Hipotez Testi, Güven Aralığı, Etki Büyüklüğü ve Merkezi Olmayan Olasılık Dağılımları Üzerine. *İlköğretim Online*, 10(3), 1112-1123

Yılmaz, N. (2013). *İlköğretim matematik öğretmenlerine yansıtıcı düşünme becerisinin kazandırılmasına yönelik hizmet içi eğitimin uygulanması ve değerlendirilmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Zhang, J. (1997). The nature of external representations in problem solving. Cognitive Science, 21(2), 179–217.

EKLER

EK 1: "Representational Fluency" için Alınan İzin

David Niemi <davidmniemi@earthlink.net> 4 06 2012

Kime: bana

İngilizce > Türkçe İletiyi çevir İngilizce için kapat ×

Dear Levant Ertuna,

You are welcome to use any of the instruments from my study. It sounds like you have conceived a very interesting study. Please let me know how it turns out.

All the best,

David Niemi

Vice President, Measurement and Evaluation

Kaplan

...

On Jun 3, 2012, at 2:06 PM, Levent ERTUNA wrote:

Dear David Niemi;

I am graduate student in mathematics education in Turkey. I am interested in how the semantic meanings of rational numbers embodied in graphical representations pose a constraint on children's construction of the concept of fraction equivalence. My participants will be 11-13 years old students (fifth-graders to seventh-graders). I need scale that can measure of perceived relations among symbolic and graphic representations of equivalent and non-equivalent fractions. I ask for your permission to use representational knowledge scale, which is used as post test of yours work namely "Instructional influence on content area explanations and representational knowledge: Evidence for the construct validity of measures of principled understanding. CSE Technical Report 403.", in my study. Could you please help me about this matter?

Thank you very much in advance.
Best Regards,

Levent ERTUNA
Mathematics Education
Abant Izzet Baysal University

EK 2: Temsilsel Akıcılık Testi

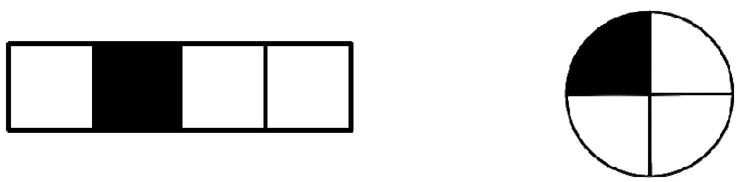
Okul:

Sınıf:

Cinsiyet: ☐ **Erkek** ☐ **Kız**

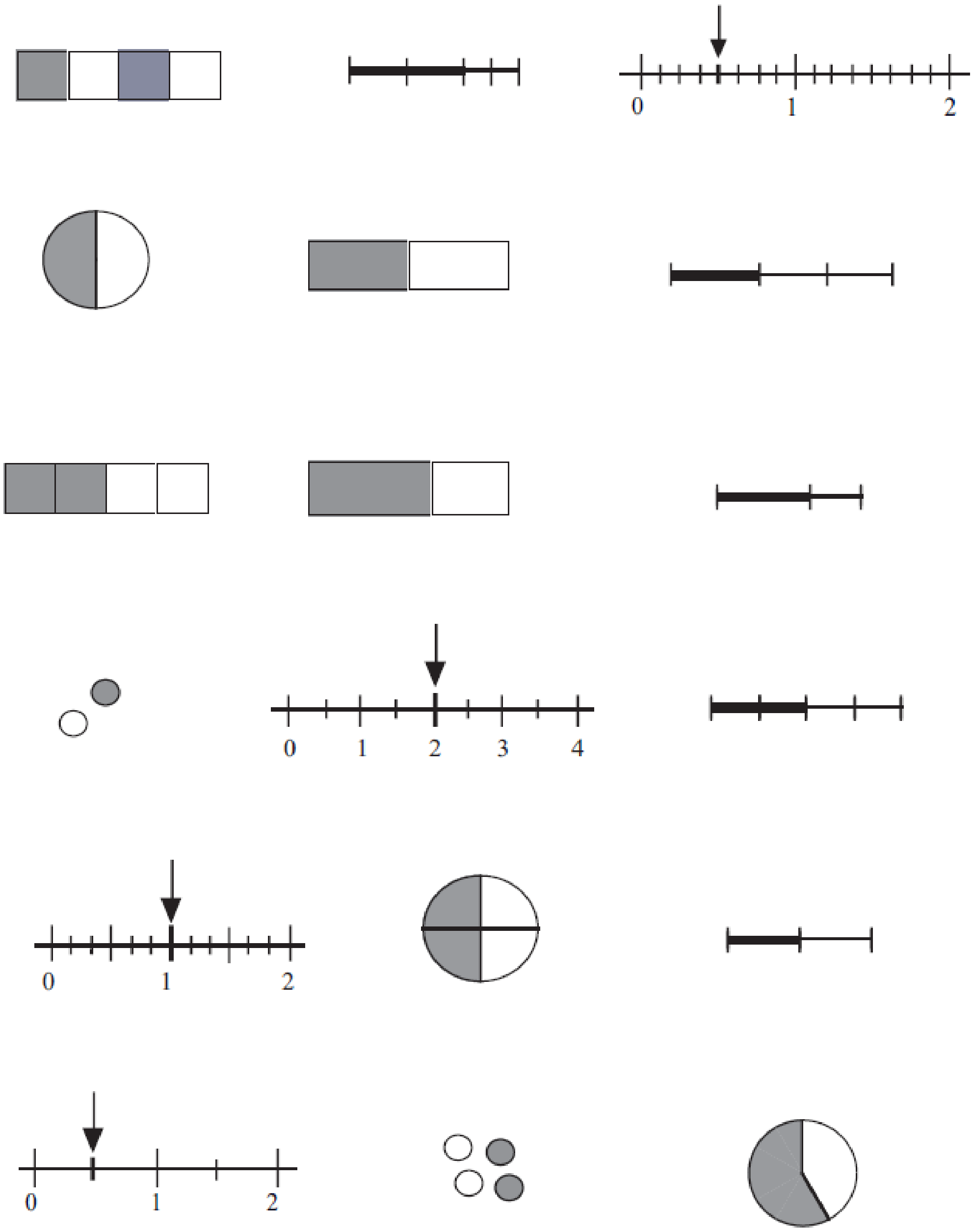
Aşağıda sonraki sayfalarda karşınıza çıkacak şekillere örnekler verilmiştir. Bu sayfada herhangi bir işaretleme yapmanıza gerek yoktur.

Aşağıdakiler $\frac{1}{4}$ 'e karşılık gelen şekillerdir;

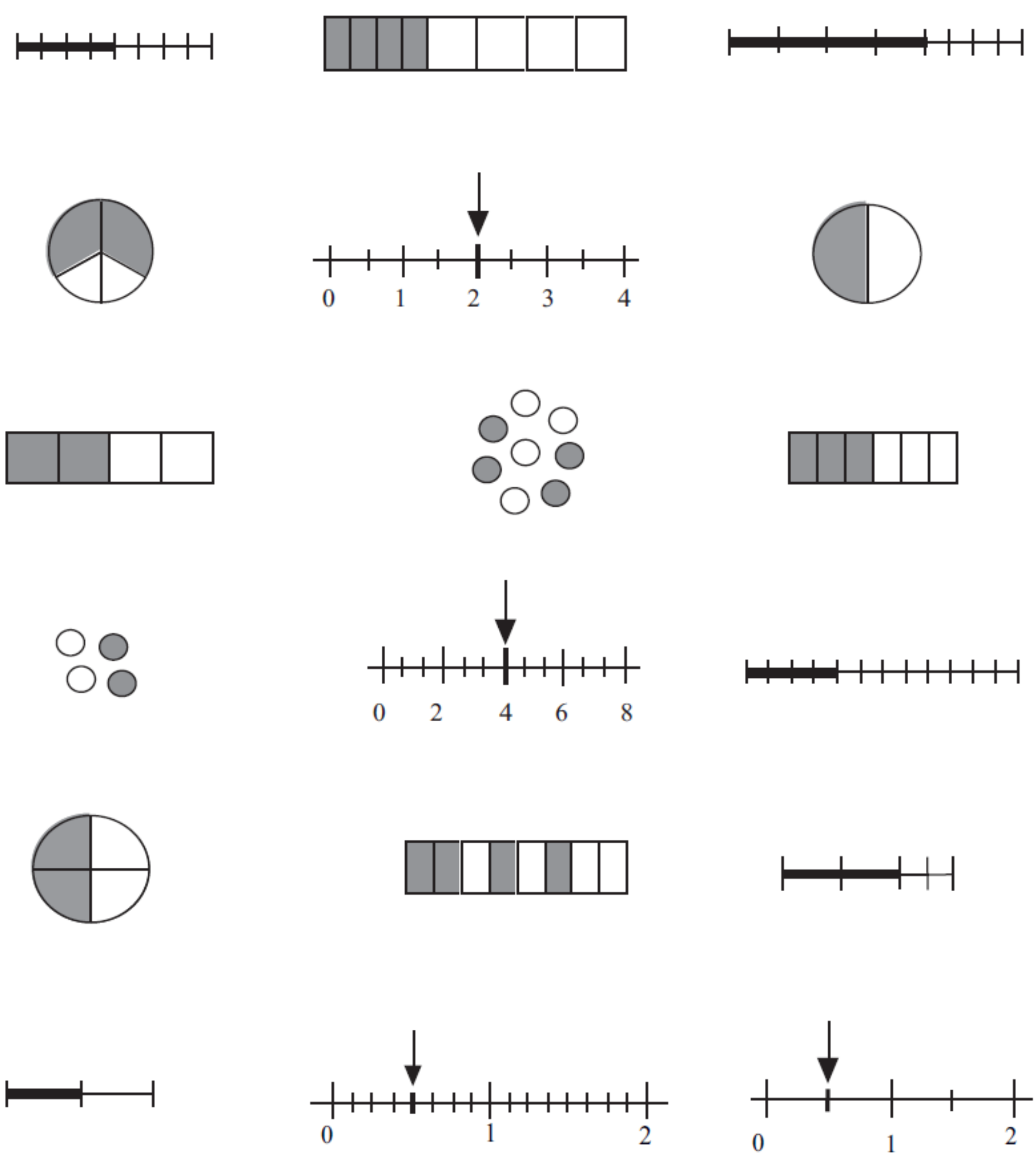


Sayfayı çeviriniz ve açıklamaları takip ediniz.

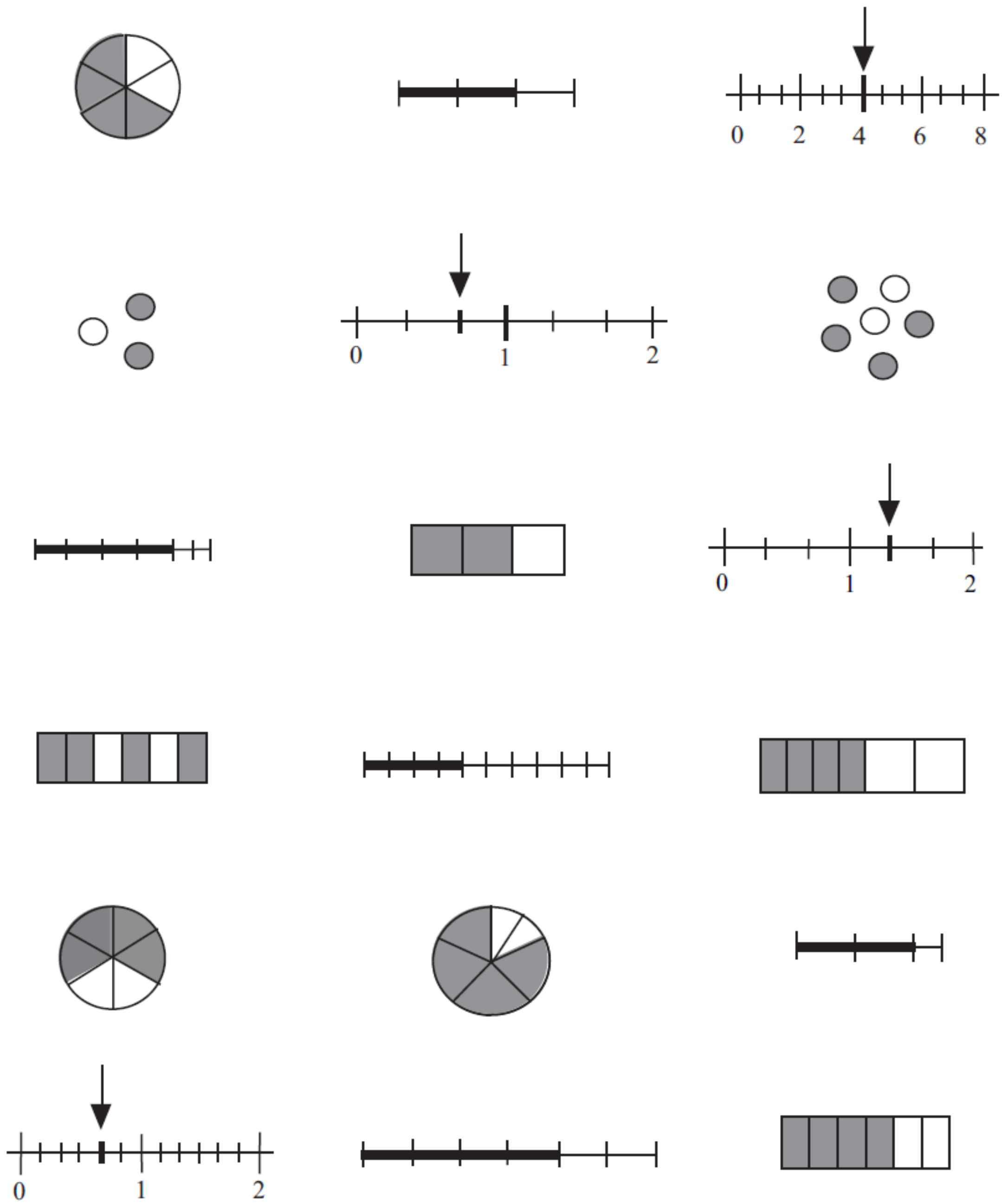
Aşağıdaki şekillerden $\frac{1}{2}$ **’ye karşılık gelenleri yuvarlak içine alınız.**



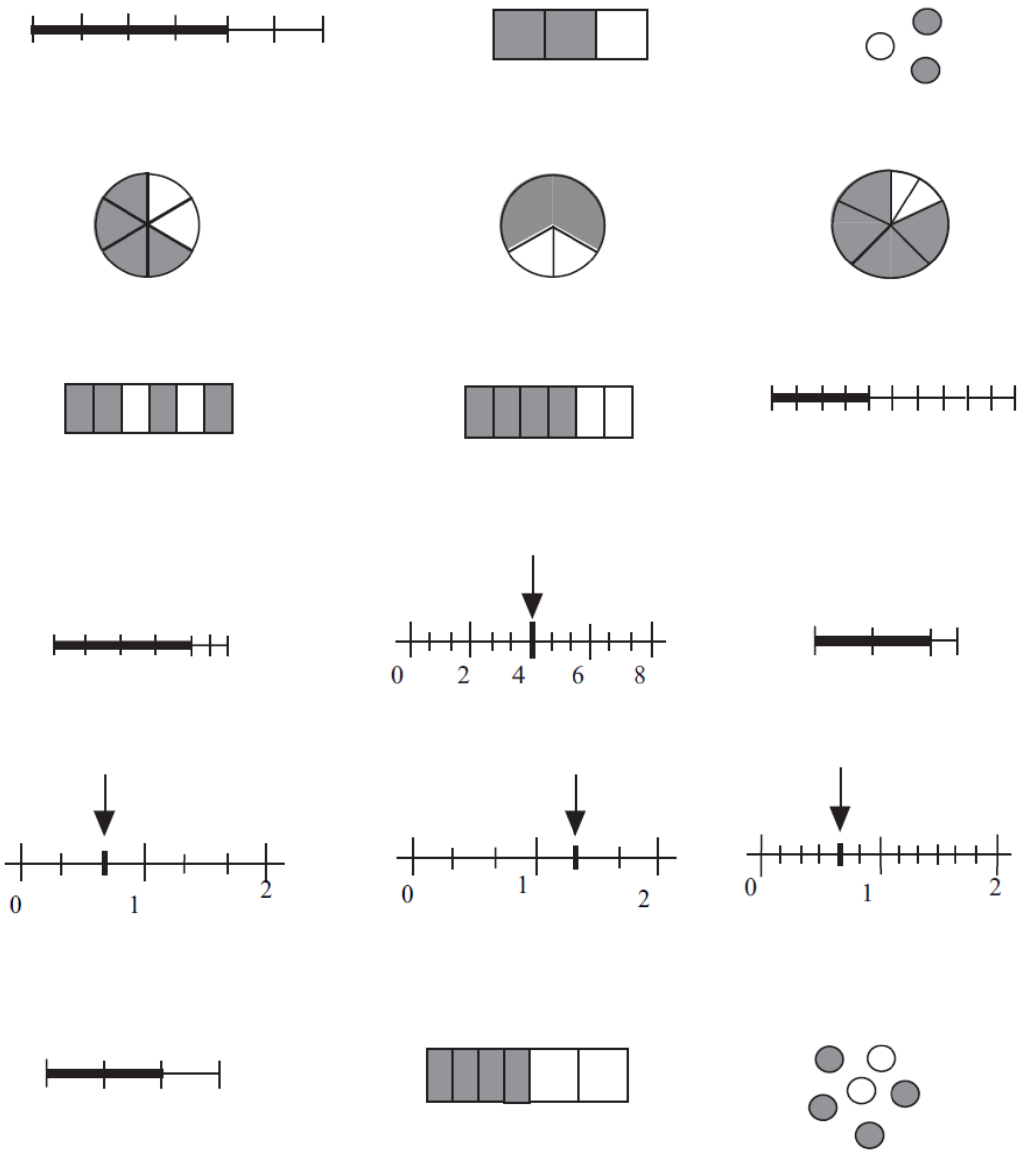
Aşağıdaki şekillerden $\frac{2}{4}$ ’e karşılık gelenleri yuvarlak içine alınız.



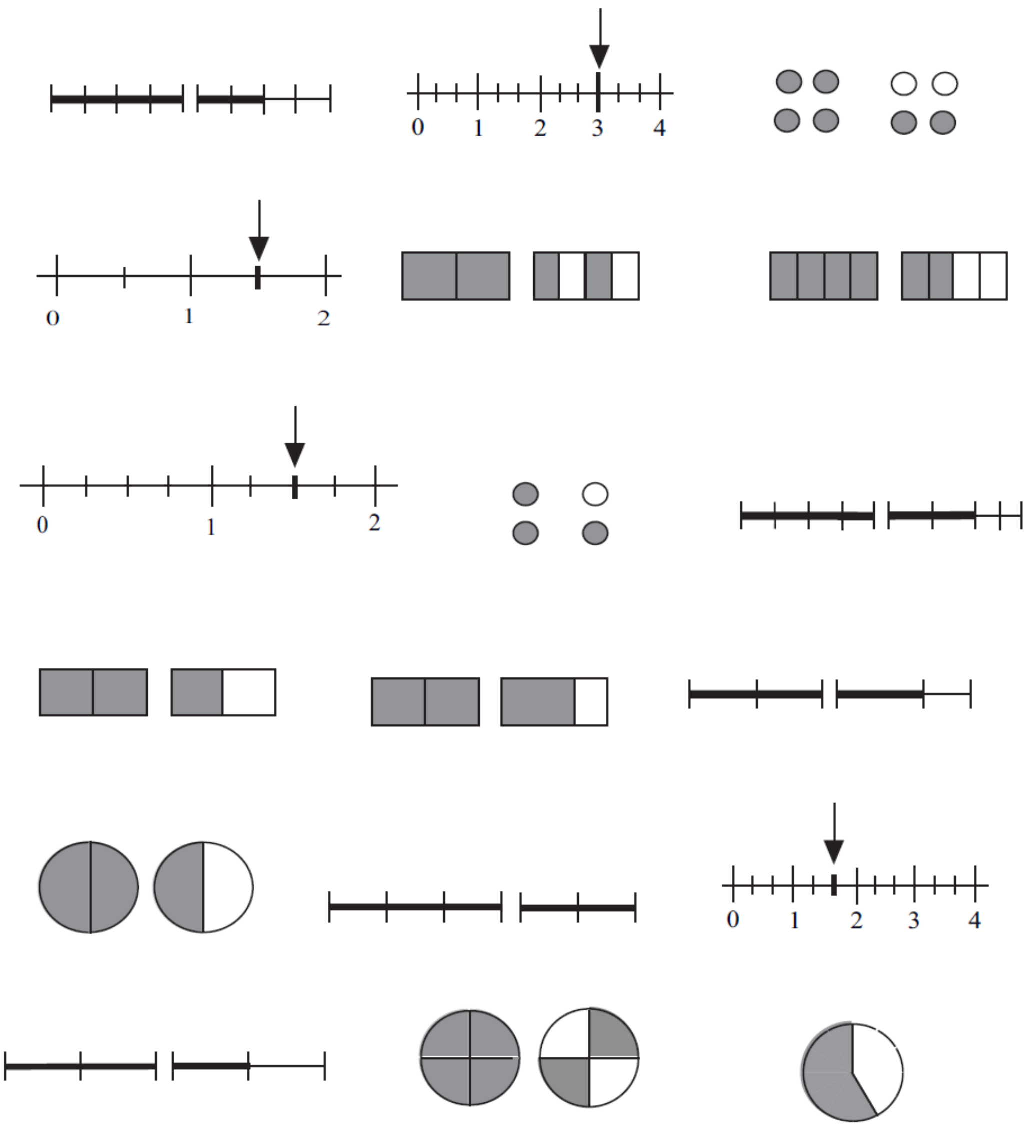
Aşağıdaki şekillerden $\frac{2}{3}$'e karşılık gelenleri yuvarlak içine alınız.



Aşağıdaki şekillerden $\frac{4}{6}$ 'ya karşılık gelenleri yuvarlak içine alınız.



Aşağıdaki şekillerden $\frac{3}{2}$ 'ye karşılık gelenleri yuvarlak içine alınız.



EK 3: Sakarya Valiliği'nden Uygulama için Alınan İzin

T.C.
SAKARYA VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : B.08.4.MEM.0.54.05.00- 605.99.00.00- 9979
Konu :Araştırma İzinleri

VALİLİK MAKAMINA

Abant İzzet Baysal Üniversitesi,Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Levent ERTUNA'nın; "İlköğretim 4-7.sınıf Öğrencilerinin Denk Kesirlerin Sembolik ve Grafiksel Temsillerini İlişkilendirme Becerilerinin İncelenmesi" konulu anket uygulamasını, İlimiz Geyve İlçesindeki ilişik listede adı geçen İlköğretim okulu öğrencilerine uygulanmak istendiği, Abant İzzet Baysal Üniversitesi Rektörlüğünün 18.05.2012 tarih ve 383 sayılı yazıları ile bildirilmiştir.

"İlköğretim 4-7.sınıf Öğrencilerinin Denk Kesirlerin Sembolik ve Grafiksel Temsillerini İlişkilendirme Becerilerinin İncelenmesi" konulu anket uygulamasını, İlimiz Geyve İlçesindeki ilişik listede adı geçen İlköğretim okulu öğrencilerine uygulaması, yasal gerekliliğin ilgili Okul Müdürlüklerince yerine getirilmesi kaydıyla Müdürlüğümüzce uygun mütalaa edilmektedir.

Makamınızca da uygun görüldüğü takdirde olurlarınızı arz ederim.

Selim Yavuz SANDIKÇI
Milli Eğitim Müdürü

O L U R.
22/ 05/2012
Faruk BEKARLAR
Vali a.
Vali Yardımcısı

Resmi Daireler Kampüsü
B Blok 54290 Adapazarı / SAKARYA
Tel : 0 264 251 36 14-15-16
Fax :0 264 251 36 04
http://sakarya.meb.gov.tr
sakaryamem@meb.gov.tr