T.C
ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN SONSUZLUK KAVRAYIŞLARI

FİGEN BOZKUŞ

Haziran-2014

T.C
ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ANABİLİM DALI

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN SONSUZLUK KAVRAYIŞLARI

Yüksek Lisans Tezi

Hazırlayan

FİGEN BOZKUŞ

Danışman

Doç. Dr. Zülbiye TOLUK UÇAR

Ortak Danışman

Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÇETİN

Bolu-2014

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE,

Figen BOZKUŞ'a ait "**Ortaokul Öğrencilerinin Sonsuzluk Kavrayışları**" adlı çalışma, jürimiz tarafından İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalında **Yüksek lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.***(Tez Savunma Tarihi: 23.05.2014)***

Akademik Unvan ve Adı Soyadı

Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Zülbiye TOLUK UÇAR	İmza
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İbrahim Çetin	İmza
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Cesim ÇELİK	İmza
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Recai AKKUŞ	İmza
Üye	: Yrd. Doç. Dr. ………………..	İmza

Eğitim Bilimleri Enstitüsünün Onayı

Doç.Dr. Türkan ARGON
Enstitü Müdürü

Etik İlkelere Uyulduğuna İlişkin Metin

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum, "Ortaokul Öğrencilerinin Sonsuzluk Kavrayışları" başlıklı çalışmanın yazılmasında, bilimsel ve etik kurallara uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda atıfta bulunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin tamamının ya da bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitede bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim. 20/06//2014

İmza

Figen BOZKUŞ

MIDDLE SCHOOL STUDENTS' CONCEPTUALIZATION OF INFITINY

ABSTRACT

When mathematics curriculum is examined, one can see that the concept of infinity is closely related to the concepts of natural numbers, rational numbers, line and line segments, and limit. It plays an important role especially in the formation of the number concept and its development. Understanding the concept of infinity is also necessary for learning advanced concepts such as limit, derivative, integral and infinite sets. However, not much is known about how students understand the concept of infinity. In order to help students learn the concept of infinit, one should first uncover students' current conceptualizations and understandings of this concept.

Motivated from the lack of previous research on this topic, this study aims to identify middle school students' (5th, 6th, 7th and 8th graders) conceptualization and understanding of infinity. With this aim in mind, an open ended test including questions related to the concept of infinity, big numbers, infinity in numerical context, limit and infinite sets is given to the participants and clinical interviews have been conducted. The sample of the study consisted of 5th, 6th, 7th and 8th graders from three middle schools in the city center of Kocaeli in the academic year 2012-2013.

The data collected trough the test and clinical interviews were analyzed using content analysis method. A coding manual with categories and subcategories were constructed based on the responses of the participants to the test questions. A similar method was used to analyze the data of clinical interviews.

Results of the study revealed that the participants defined infinity as 'without an end', 'in progress' and 'never lasting' and perceived infinity 'as a process that never ends'. It is also found that the participants had three different perceptions of infinity namely mathematical, phsyical and affective. The analyses based on big numbers revealed that the participants defined numbers which were very big and whose values were indeterminite as infinite. The analyses of the responses related to the questions about infinity in a numerical context and limit revealed that the participants demonstrated a conceptualization of static infinity for infinite sets and a conceptualization of potential infinity for limit context. When natural number and even natural numbers sets were compared, the participants thought that the methods used for comparing finite sets could also be used for infinite sets, and they used similar methods to compare infinite sets. The discussion section of this study included the comparison of the findings of current study with those of the previous studies and some suggestions have been made as educational implications and for future studies.

Key words: Infinity, big numbers, infinite numbers, limit, infinite sets, middle school students.

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN SONSUZLUK KAVRAYIŞLARI

ÖZET

Matematik öğretim programı incelendiğinde de sonsuzluk kavramının sayılar, rasyonel sayılar, doğru, doğru parçası ve limit gibi matematiksel kavramlar ile yakından ilgili olduğu görülmektedir. Özellikle sayı kavramının oluşumunda ve gelişiminde sonsuzluk kavramı önemli olmaktadır. Ayrıca öğrencilerin ileriki dönemlerde karşılaşacağı limit, türev, integral ve sonsuz kümeler gibi kavramların öğretiminde de sonsuzluk kavramına ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili anlamları tam olarak bilinememektedir ve sınırlı kalmaktadır. Dolayısıyla öğrencide sonsuzluk kavramının oluşturulabilmesi ve kavram gelişiminin desteklenebilmesi için öncelikle öğrencinin bu kavram ile ilgili anlamalarının ortaya koyulması gerekmektedir.

Bu durumdan hareketle bu araştırmada ortaokul (5., 6., 7. ve 8. sınıf) öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili kavrayışlarının ortaya çıkartılması amaçlanmıştır. Bu amaçla, öğrencilere sonsuzluk kavramı, büyük sayılar, sayı bağlamında sonsuzluk, limit durumu ve sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili sorulardan oluşan durum tespit testi uygulanmış ve öğrencilerle klinik mülakatlar yapılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu, 2012-2013 eğitim-öğretim yılında Kocaeli İl Merkezinde yer alan üç ortaokulda öğrenimine devam eden 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencileri olmak üzere toplam 176 öğrenci oluşturmaktadır.

Araştırmadan elde edilen veriler içerik analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin durum tespit testindeki sorulara verdikleri cevaplar incelenerek, içinde alt kategorileri ve kategorilerin olduğu kod tablosu oluşturulmuştur. Elde edilen kod tablosuna göre araştırmacı verilerin analizini yapmıştır. Klinik mülakatlardan elde edilen veriler de benzer şekilde analiz edilmiştir.

Elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin sonsuzluk kavramını “sonu olmayan”, “devam eden” ve “bitmeyen” şeklinde tanımladıkları ve sonsuzluğu sonu olmayan bir süreç olarak algıladıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili matematiksel, fiziksel ve duygusal olmak üzere üç sonsuzluk algısının olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Büyük sayılar ile ilişkili olan sorulardan elde edilen veriler sonucunda öğrencilerin öğrenciler miktarı değişken olan ve çok fazla olduğu için sayısı belli olmayan nicelikleri sonsuz olarak anlamlandırmaktadırlar. Sayılar bağlamında sonsuzluk ve limit durumu ile ilgili sorulardan elde edilen bulgular doğrultusunda öğrencilerin sonsuz kümelerde statik sonsuzluk düşüncesi gösterdiği, limit durumunda ise potansiyel sonsuzluk düşüncesinin ön planda olduğu görülmüştür. Doğal sayılar ve çift doğal sayılar gibi sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında öğrencilerin sonlu kümeler için geçerli olabilecek yöntemlerin sonsuz kümelerin için de geçerli olabileceğini düşündükleri görülmüştür. Bu yöntemleri sonsuz kümelerin karşılaştırmasında kullanmaya çalışmışlardır. Araştırmadan elde edilen sonuçlar alan yazındaki mevcut araştırmalar ile karşılaştırılarak tartışılmış ve bazı öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sonsuzluk, büyük sayılar, sonsuz sayılar, limit, sonsuz kümeler,

TEŞEKKÜR

Matematik eğitiminde yapmış olduğum bu araştırmada desteklerini, görüşlerini ve fikirlerini aldığım birçok kişi olmuştur.

Öncelikle araştımanın başından sonuna kadar her aşamasında, önerileri ve görüşleri ile bana yol gösteren, tez çalışmamın şekillenmesinde ve gelişmesinde bilgi ve deneyimleriyle katkıda bulunan, her koşulda vaktini ayıran ve yardımlarını esirgemeyen, değerli hocalarım ve tez danışmanlarım Sayın Doç. Dr. Zülbiye TOLUK UÇAR'a ve Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÇETİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Yüksek Lisans eğitimim boyunca derslerini takip ettiğim ve matematik eğitiminin nasıl olması gerektiği konusunda bilgisi ve deneyimleri ile farklı bakış açısı kazandıran Sayın Prof. Dr. Soner DURMUŞ'a en içtenlikle teşekkürlerimi sunarım. Yüksek Lisans eğitimim süresince, desteklerini esirgemeyen, yorumları ile ufkumu genişleten Sayın Yrd. Doç. Dr. Hakan YAMAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Lisans eğitimim boyunca, bilgisi ve deneyimi ile katkıda bulunan, duruşu, samimiyeti ve nezaketi ile her zaman hayran olduğum, daima görüşlerine ihtiyaç duyduğum değerli hocam Sayın Doç. Dr. Özden KORUOĞLU ve lisans eğitimi sürecinde dersini aldığımı, bu yolda ilerlemede katkıda bulunan Sayın Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmada ses kayıtlarının transkript edilmesinde gönüllü olarak yardımcı olan arkadaşım Beyda TOPAN'a, test sorularının hazırlanmasında katkıda bulunan ve her zaman görüşlerinden istifade ettiğim Umut SAKMAN'a teşekkür ederim.

Tüm yaşamım boyunca her konuda yanımda olan, valıklarıyla bana güç veren hayatımdaki en önemli iki güzel insan, değerli annem ve babama, daima onur duyduğum kardeşime sonsuz sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunuyorum.

Haziran-2014 Figen BOZKUŞ

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

BÖLÜM I

1.Giriş

“Sonsuzluk” kelimesi günlük hayatta sonu olmayan, gelecek zaman ve ebediyet anlamlarında kullanılmaktadır (Türk Dil Kurumu, 2014). Fakat bu çalışmada matematiksel sonsuzluk üzerinde durulacaktır. Matematikte, sonsuzluk kavramı öğrenciler tarafından daha çok sayı olarak algılanmaktadır halbuki sonsuzluk bir değer belirtmemektedir bu nedenle bir sayı olarak algılanması çok doğru değildir (Nesin, 2010).

Nesin (2010) matematikte “sonsuz” kelimesinin bir sıfat olduğunu, bir ad olmadığını ifade etmiştir. “Sonlu” kelimesi nasıl sıfat olarak kullanıyorsa, matematikte kullanılan “sonsuz” kelimesinin de bir sıfat olduğunu belirtmiştir. Örneğin “sonlu sayıda” derken buradaki “sonlu” kelimesi nesne olarak değil sıfat olarak kullanılmaktadır. “Sonsuz sayıda” derken de yine aynı şekilde bu kelime sıfat olarak kullanılmaktadır. Diğer yandan Nesin (2010), matematikte limit kavramında “n sonsuza gittiğinde” şeklindeki bir ifadenin yanlış olduğunu bunun yerine “n durmadan büyüdüğünde, yani her tamsayıyı bir süre sona aştığında” ifadesini kullanmanın daha doğru olduğunu belirtmiştir. Bu açıdan “sonsuz artı 1, sonsuza eşittir.” ifadesi aslında “durmadan büyüyen bir değişkenden 1 çıkarırsak, elde ettiğimiz değişkende durmadan büyür” şeklinde ifade edilmesi gerektiğini vurgulamıştır.

Sonsuzluk kavramı, matematiksel olarak bu şekilde ifade edilse de, gerek matematiksel gerek günlük hayatımızda sonsuzluğu anlamakta zorluklar yaşanmaktadır. Bu zorlukların temelinde sonsuzluğun soyut bir kavram olması yatmaktadır. Soyut kavram olmasından dolayı sonsuzluğu, görsel olarak biçimlendiremiyoruz ve yaşadığımız dünya ile ilişkilendiremiyoruz. Fischbein, Tirosh ve Hess (1979), ise ortaya çıkan zorlukların, sonsuzluk kavramı ile sonlu nesnelere adapte olan zihinsel şemalarımız arasında olduğunu belirtmiştir. Sonsuzluk ile ilgili yaşanan zorlukların nedenlerinlerinde bir diğer ise kavramın doğası gereği sonsuzluk sayılamaz ya da ölçülemez nitelikte olmasıdır. Matematik ise belirli büyüklükleri ele almaktadır (Akbulut ve Akgün, 2005). Örneğin matematikte doğal sayıları 1, 2, 3… şeklinde sayılmaktadır. Her defasında elde edilen sayıya bir ekleyerek devam edilir ve sürekli yeni bir sayı elde edilmektedir. Bu sayma işlemi sonsuza kadar devam eder fakat bizim için sonsuz bir yerde bir sayı yoktur, sadece biz bunu zihnimizde var olduğunu düşünürüz. Dolayısıyla gerçek dünyada olmayan sadece zihnimizde var olan bir kavramın matematikte var olması ve bu kavramın matematiksel olarak kullanılması doğal olarak bizde çelişkiler oluşturmaktadır.

Söz konusu araştırmada da öğrenciler için soyut ve anlaşılması zor olan sonsuzluk kavramı ele alınmıştır. Öğrencilerin kavram ile ilgili kavrayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Böylece öğrencilerin kavram ile ilgili yanlış anlamlarını önleyebilme adına neler yapılabileceği tartışılarak, doğru kavram öğretiminin yapılmasına katkı bulunabileceği düşünülmüştür. Çünkü kavram öğretiminin sağlıklı bir şekilde yapılabilmesi için öğrencilerin anlama düzeylerine ve algılarına göre öğretim yöntemlerinin geliştirilmesi gerekmektedir.

1.1. Araştırmanın Önemi

Tall (2004), matematiksel bilgiye kavramsal bilgi, sembolik bilgi ve formal bilgi olmak üzere üç açıdan bakmaktadır. Kavramsal bilgi, bizim gerçek dünya ile ilgili mental algılarımızı, sembolik bilgi; cebir, aritmetik gibi matematikte hesap yaparken kullandığımız manipülatifler, formal bilgi; matematiksel yapıları karakterize etmek için kullanılan özellikler şeklinde tanımlanmıştır. Sonsuzluk kavramı ise bu üç tanımı karşılayan bir kavramdır (Singer, 2008).

Çocukların bilişsel gelişimi boyunca algılarında sonsuzluk kavramı ile ilgili çeşitli temsiller vardır. Bu temsillerden biri, çocuklarda erken yaş dönemlerinde oluşan sonsuzluk kavramı ile ilişkilendirilen duygulardır. Bu duygulardan bir tanesi bilinmeyen korku diğeri ise gerçek dünyanın ötesindeki heyecandır. Çocuklar gerçek dünyadaki sonsuzluk ile ilgili gerçek yaşantıya sahip değillerdir, bu yüzden gerçek hayattaki tecrübelerini "sonsuzluk" kavramı içine koyarlar. Böylece soyutlama gibi örtük yapılar oluştururlar (Jirotkova ve Litter, 2003). Bu yapılar ileriki dönemde formal bilgi ile bir araya gelince tutarsızlıklar oluşmakta ve öğrencide sonsuzluk kavramı ile ilgili yanlış kavrayışlar oluşmasına neden olabilmektedir. Bu nedenle erken yaşta öğrenciler ile sonsuzluk kavramı üzerine konuşulması ve tartışma ortamlarının oluşturulması önemli kazanmaktadır.

Sonsuzluk kavramı soyut ve çelişkili bir kavram olması dolayısıyla öğrenciler için olduğu kadar öğretmenler için de anlaşılması zor bir kavramdır (Maria, Thanasia ve Katerina, 2009; Sbaraglı, 2006). Sonsuzluk gibi soyut kavramların öğrencide bilişsel olarak oluşması uzun zaman gerektirir ve daha fazla yaşantı ister. Monaghan (2001), öğrencilerin sonsuzluğa bakış açısının ifade edilen duruma göre değiştiğini söylemektedir. Bu durumda öğrencilerde var olan sonsuzluk algısının tamamen yanlış olduğunu söyleyemeyiz. Bunun yerine öğrencilerin düşüncelerinin niteliğini arttırabilmek için öğrencilerin bilişsel gelişimine yönelik daha fazla ortamlar oluşturulmalıdır. Bu nedenle çocukların sonsuzluk ile ilgili algılarını incelemek, öğrencilerin matematiği öğrenme sürecinde matematiksel kavramlar ile nasıl iletişime girdiğini görme açısından bize daha iyi bir anlayış sağlayacaktır.

Matematik öğretim programı incelendiğinde sonsuzluk kavramı sayılar, rasyonel sayılar, doğru, doğru parçası ve limit gibi matematiksel kavramlar ile yakından ilgilidir (Jirotkova ve Littler, 2004). Özellikle sayı karamının oluşumunda sonsuzluk kavramı önemli olmaktadır. Yapılan çalışmalar öğrencilerde sonsuzluk sezgisinin var olduğunu ve amaçlı tartışmalar ile bu sezgilerin ortaya çıkartılabileceğini söylemektedir (Singer, 2002; Singer ve Voica, 2003). Fakat öğrencilerin günlük hayattaki deneyimlerinden sahip olduğu sonsuzluk sezgisi ileride matematiksel sonsuzluk kavramının anlaşılmasında problemlere neden olmaktadır (Özmantar, 2010). Bu problemlerin oluşmasını önleyebilmek için öğrencilerin sahip olduğu sonsuzluk sezgisinin tanımlanması ve eğitimde kullanılması önemli olmaktadır. Böylece öğrencilerin sayı dizileri ve sayılar ile ilgili işlemleri daha iyi anlamaları sağlayabilir.

Örneğin "kaç sayı vardır" gibi sorular öğrencilerin sonsuz sayılar ile ilgili problemler üzerine düşünmeye teşvik etmektedir ve öğrencilerin matematiksel birimler ile ilgili farkındalıklarını ve önsezilerini geliştirmesine olanak vermektedir (Boero, Douek ve Garuti, 2003). Fakat matematik öğretim programında bu kavramın açıkça işaret edildiği bir kazanım yoktur. Dolayısıyla öğrenciler için matematiksel sonsuzluk kavramı üstü kapalı bir kavram olarak kalabilmektedir (Pehkonen, Hannula, Maijala ve Soro, 2006) Bu yüzden öğrencilere sınıf ortamında sonsuzluk kavramı ile ilgili daha fazla tartışma fırsatları sağlanması önem kazanmaktadır. Sonsuzluk kavramının erken yaşlarda doğru bir şekilde anlamlaştırılması ileride oluşabilecek yanlış kavram anlayışlarına neden olabilmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili kavrayışlarının ne olduğu, bu kavrayışların matematiksel olarak ne ifade ettiğini ve matematiksel sonsuzluk kavramı ile ne kadar örtüştüğünü ortaya koymak önemli olmaktadır.

Sonsuzluk kavramı ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde daha çok yurt dışında yapıldığı, ülkemizde ise yeterli çalışma olmadığı görülmektedir. Ülkemizde yapılan çalışmalar ise daha çok lise öğrencileri (Güven ve Karataş, 2004), öğretmen adayları (Çelik ve Akşan, 2013) ve doktora öğrencileri (Aztekin, 2008) gibi büyük yaş gruplarına yönelik olup küçük yaş guruplarına (Aztekin, 2008; Narlı ve Narlı, 2012) yönelik çok az çalışma vardır. Bu nedenle küçük yaş guruplarında böyle bir çalışma yapılmasına ihtiyaç olduğu düşünülmektedir. Ayrıca sonsuzluk kavramının birçok matematik konusu ile yakından ilgili olması ve öğrencilerin matematiksel sonsuzluk kavrayışlarındaki zorluklar belirlenerek gerekli önlemlerin alınması adına çalışmanın, matematik eğitimine katkısı olacağı düşünülmektedir.

1.2.Araştırmanın amacı

Bu çalışmada, ortaokul 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili kavrayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin sonsuzluk kavramı, büyük sayılar, sayı bağlamında sonsuzluk, limit durumu ve sonsuz kümelerin karşılaştırması ile ilgili kavrayışları incelenmiştir.

1.3.Araştırma problemi

Araştırma kapsamında "Ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk kavrayışları nelerdir? " sorusuna yanıt aranmaktadır.

1.3.1. Araştırmanın alt problemleri

Araştırmanın ana problemine dayalı olarak cevaplandırılmaya çalışılacak alt problemler aşağıda yer almaktadır.

1. Ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk kavramını kendi kelimeleri ile nasıl tanımlamaktadırlar?

2. Ortaokul öğrencilerinin büyük sayılara ilişkin açıklamaları nelerdir?

3. Ortaokul öğrencilerinin sayı bağlamında sonsuzluğa ilişkin açıklamaları nelerdir?

4. Ortaokul öğrencilerinin limit durumuna ilişkin açıklamaları nelerdir?

5. Ortaokul öğrencilerinin sonsuz kümelerin karşılaştırılmasına ilişkin açıklamaları nelerdir?

1.4. Araştırma sınırlılıkları

1. Araştırma, 2012-2013 eğitim-öğretim yılında Kocaeli il erkezinde yer alan Türk Pirelli Ortaokulu, Türkan Dereli Ortaokulu ve Hızır Reis Ortaokulunda öğrenim gören 5., 6., 7. ve 8. sınıflarından toplam 176 öğrenci ile sınırlandırılmıştır.

2. Durum tespit testinde yer alan sorular "sonsuzluk kavramı", "sayılar" ve "kümeler" konuları ile sınırlıdır.

3. Araştırmadaki veriler, durum tespit testi ve klinik mülakatlardan elde edilen veriler ile sınırlıdır.

1.5. Araştırma varsayımları

1. Araştırma kapsamında yapılan durum tespit testinin uygulanması sürecinde öğrenciler birbirleriyle etkileşime girmemişlerdir.

2. Araştırma sürecinde, öğrenciler durum tespit testinde yer alan soruları ve klinik mülakatlarda sorulan soruları içtenlikle yanıtlayacakları varsayılmıştır.

3. Araştırma uygulamasında oluşabilecek aksaklıklar pilot çalışmalar ile düzeltilmiştir.

BÖLÜM II

2. Kuramsal Temeller ve İlgili Literatür

2.1. Sonsuzluk Kavramı ve Tarihsel Gelişimi

Sonsuzluk düşüncesi Eski Yunanlılar ile karşımıza çıkmaktadır. Eski Yunan döneminde sonsuzluk düşüncesi, insanların yaşadıkları dünyayı sorgulamaya başlamasıyla ortaya çıkmıştır (O' Connor ve Robertson, 2002). Yunanlılar, sonsuzluk kavramına zamanın sonsuz olması, uzayın sonsuz olması, uzayın ve zamanın sonsuz aralıklarla bölünebilmesi düşünceleri ile birlikte tartışmışlardır (Allen, 2000). Bu süreç içerisinde Yunanlılar matematik ile ilgili çalışmalarında kendilerine, *"Bir insan bir maddeyi küçük ve daha küçük parçalara bölebilir mi yoksa sürekli bölünmüş ama daha fazla bölünemeyen bir birime ulaşabilir mi?"* (O' Connor ve Robertson, 2002) sorusunu sormuşlardır. Bu soru farklı şekillerde tartışılırken Zeno paradoksları bir maddenin sürekli bölünemeyeceğini ya da kendi içinde çelişkileri olduğu inancını ortaya çıkarmıştır. Zeno paradoksuna göre, bir kişi bir noktadan diğer bir noktaya gitmek için önce iki nokta arasındaki mesafenin yarısını gitmeli, daha sonra kalan yolun yarısını gitmesi gerekiyordu ve bu böylece sonsuza değin devam eder (Nesin, 2010). Fakat kişi sonsuz tane işi kısıtlı zamanda yapamayacağından varmak istediği yere varamaz. Bu durumda Zeno paradoksu bize sonsuz küçüklüğün zihninde yaratmış olduğu çelişkiler ve sonsuzluk kavramının düşünce boyutundaki zorluklarını göstermektedir. Bu çelişki hala daha üzerinde çalışılan sonsuzluk kavramının kullanımıyla ilgilidir.

Sonsuzluk kavramı yüzyıllar boyunca tartışılmış ve anlaşılmasına yönelik farklı teoriler ortaya atılmıştır. Bu noktada sonsuzluk ile ilgili tutarsızlığa ilk çözüm önerisi Aristo'dan gelmiştir (Fischbein, Tirosh ve Hess, 1979). Aristo sonsuzluk kavramını algılanmayan, bitmeyen ve tamamlanmamış bir süreç olarak tanımlamıştır (Allen, 2000).

Bu tanım çerçevesinde, çember örneği üzerinde durmuş ve sonsuz noktadan oluşan çemberin sonsuz olmadığını ifade emiştir. Bir çember düşünüldüğünde, çember başı ve sonu olmayan sonsuz noktalardan oluşmaktadır fakat bir çemberin bir noktasından başlanıp devam edildiğinde tekrar başa dönülmektedir. Sonsuzluğu bitmeyen bir süreç olarak düşündüğü için Aristo çemberin sonsuz olmadığını belirtmiştir. Aristo sonsuzluğun varlığını tamamen reddetmemiş, "sonsuzluk" kavramını sayılar üzerinden açıklamaya çalışmıştır (Dubinsky, Weller, Mcdonald ve Brown, 2005). Doğal sayıların sonsuz olduğunu kabul etmiştir çünkü bir sayıya yeni bir sayı eklendiğinde bir önceki sayıdan farklı bir sayıya ulaştığını ve bu ekleme sürecinin devam ettiğini söylemiştir.

Aristo sonsuzluk kavramını potansiyel (potential) ve fiili (actual) sonsuzluk olarak iki şekilde tanımlamıştır (Moreno ve Waldegg, 1991). Potansiyel sonsuzluk sürekli devam eden, fakat herhangi bir noktasında sonlu olan bir sürece işaret etmektedir. Fili sonsuzluk ise tam halde, bir bütün olarak, sonsuzluğa işaret eder (Özmantar, 2010). Örneğin Zeno paradoksunda, bir kişinin bir noktadan diğer noktaya ulaşabilme süreci düşünüldüğünde, bu süreç sonsuz adımdan oluşan ve her adımı bir öncekinden farklı olan sonsuz bir süreç demektir. Aristo burada kişinin istenilen yere ulaşabilme sürecini potansiyel sonsuzluk olarak tanımlanabileceğini belirtmiştir. Bununla birlikte Aristo, dünyanın sonsuzluğuna ve doğru parçasındaki sayıların sonsuzluğuna ise fiili sonsuzluk olarak bakıyordu. Çünkü doğru parçası bir bütündü fakat sonsuz noktayı içeriyordu. Aristo insan beyninin bir bütündeki sonsuz parçayı algılayamayacağını ve bütündeki sonsuz süreci düşünecek kapasitede olmadığına inanıyordu (Dubinsky vd. 2005). Bu nedenle fiili sonsuzluğu reddetmiş ve potansiyel sonsuzluğun varlığına inanmıştır.

Benzer şekilde Gauss ve Galileo'da fiili sonsuzluğu reddetmiştir. Gauss böyle bir şeyin matematikte asla olamayacağını ileri sürerek düşünceleri şu şekilde ifade etmiştir;

"Sonsuz bir niceliğin gerçek bir varlık olarak kullanılmasını protesto ediyorum; böyle bir şeye matematikte asla izin verilmez. Sonsuz sadece söylemde vardır, böylece belli oranların istenildiği kadar yaklaşabildiği sınırlardan (limitler) söz

edilebilirken diğerlerinin bir sınır olmadan artmasına izin verilir.” (aktaran: Allen, 200: 11)

Galileo, ise bire-bir eşleme ilkesi ile sonsuzluk fikrini ele almıştır (aktaran: Özmantar, 2010: 154). Galileo’ya göre her karenin kendi kökü ve her kökün bir karesi olduğundan dolayı herhangi bir sayının köküne karşılık gelen bir karesi vardır ve hiçbir kare kökünden daha fazla veya hiçbir kök karesinden daha fazla değildir (Mamolo, 2009). Bununla birlikte kardinalitesi eşit olan iki kümenin karşılaştırılması ile ilgili bire-bir eşleme yöntemini ortaya çıkarmıştır. Galileo doğal sayılar ile doğal sayıların kareleri arasında bire-bir eşleme yapılabileceğini bu durumda doğal sayılar kümesi ile doğal sayıların karelerinden oluşan kümenin eleman sayılarının eşit olduğunu öne sürmüştür. Fakat bu argüman “*Bir küme kendi alt kümesi ile nasıl aynı sayıda elemana sahip olabilir?*” sorusunu akıllara getirmiştir (Mamolo, 2009). Ayrıca Bolzano’nun sayı düşüncesi genişletildiğinde “*bir bütün ve diğeri de bu bütünün bir parçasıdır*.” ilkesine göre doğal sayılar {1,2,3…} kümesi, doğal sayıların karelerinden oluşan {1,4,9…} kümesinden daha büyüktür (Mamolo, 2009).

Ortaya çıkan durumların kendi içindeki uyuşmazlıklarının farkına varan Galileo asıl problemin; kümelerin büyüklük olarak eşit olduğunu, sonlu nicelikler için düşündüğümüz “büyüktür”, “eşittir” ve “küçüktür” kavramlarının sonsuz nicelikler için geçerli olmadığını söylemiştir *(* Sacristan, 1997) ve şu şekilde ifade etmiştir;

“*…Bu sonlu zihnimiz ile sonsuza sonlu ve sınırlı özellikleri atfederek sonsuz hakkında tartışmaya kalkışmak zorluklardan bir tanesidir ve bana göre sonsuz nicelikler için “büyüktür”, “küçüktür” ve “eşittir” ifadelerini kullanamayız; bunun yanlış olduğunu düşünüyoru.” (* aktaran: Sacristan,1997: 44)

Bununla beraber Galileo sonsuzluğu sayı gibi düşünüp değer vermenin doğru olmadığını belirterek, düşüncesini şu şekilde dile getirmiştir;

“*…şu açıktır ki, biri diğerinden daha uzun sayı doğrusuna sahip olabiliriz, her biri sonsuz sayıda nokta içerir ve biz bunları aynı sınıfta kabul etmeye çalışırız.*

Belki de sonsuzdan daha büyük bir şeye sahibizdir. Çünkü uzun sayı doğrusunun sahip olduğu sonsuz nokta kısa sayı doğrusundaki sonsuz noktadan daha fazladır. Bu bir sonsuz miktara sonsuzdan daha büyük bir değer atama işi benim anlayışımın oldukça ötesinde bir şey.” (aktaran: Sacristan, 1997: 44)

Galileo sonsuzluk kavramı anlamaya yönelik geliştirdiği teorisi ile kendisinden sonra gelen Bolzano ve Cantor’a bir zemin hazırlamıştır. Bolzano’nun, sonsuzluk kavramının gelişimine yönelik yapmış olduğu en önemli katkısı küme kavramını geliştirmesi ve sonsuz kümelerin elemanlarının niceliğine ait bir nitelik olarak düşünmesidir (Özmantar, 2010). Bolzano fiili sonsuzluk fikrine olumlu yaklaşan ilk kişiydi ve Aristo’nun aksine sonsuzluk fikrini matematikte çalışılması gereken bir nesne (object) olduğuna inanıyordu (Sacristan, 1997). Bununla ilgili düşüncelerini şu şekilde ifade etmiştir;

“…Sonsuz kümelerin bir bütün oluşturmak için hiçbir zaman birleştirilemeyeceği, hiçbir zaman düşüncede birlikte toplanamayacağı gibi basit bir nedenle, hiçbir yerde sonsuz bir kümenin var olamayacağını söylüyorlar.” (aktaran: Dubinsky vd. 2005: 10).

Yukarıda belirtilen varsayımların yanılgı olduğunu ileri sürerek, bu yanılgının neden kaynaklandığını şu şekilde dile getirmiştir;

“…Bu varsayımların bir yanılgı olduğunu ve bu yanılgının da; a,b,c,… gibi belli elemanlardan oluşan bir bütünün ayrı bileşenlerinin ayrı zihinsel temsillerini biçimlendirilmeden düşüncede oluşturulamayacağı gibi yanlış bir düşünceden kaynaklandığını belirtmeliyim” (Dubinsky vd. 2005: 10).

Bolzano söylemlerinde de belirttiği gibi kendi döneminde ortaya çıkan paradoksları çözmek için sonsuzluk kavramına farklı bir yaklaşım getirmiştir. Bunun için öncelikle sonsuzluk fikrini kümelerin bir özelliği olarak matematiğe dahil edilebileceğini göstermiştir (Sacristan, 1997). Bu yeni yaklaşımı ile sonsuzluğun matematik ile birleştirilmesi mümkün oluyordu.

Bununla ilgili Bolzano, sonsuz kümeler için kabul ettiği matematiksel tanım ile uyuşmamasına rağmen doğal sayılardaki fiili sonsuzluk fikrini onaylamıştır (Mamolo, 2009). Sonsuzluk kavramını ve parçalarını bağımsız düşünmeksizin bir bütün olarak düşünmenin mümkün olabileceğini belirtmiştir (Mamolo, 2009). Bolzano'dan sonra fiili sonsuzluğu kabul eden, matematiksel sonsuzluğun gelişimide önemli rolü olan bir diğer isim ise Cantor olmuştur. Levy (1987) sonsuzluğun matematiksel tarihinin tam olarak 19.yy'da sonsuz sayılar düşüncesin biçimlendiren Cantor ile başladığını ifade etmiştir (Levy, 1987, aktaran: Sacristan, 1997: 46).

2.1.1. Cantor küme teorisi

Cantor ve Dedekind sonsuzluğu potansiyel ve fiili olarak kabul eden, sonlu ve sonsuzu birleştiren sonsuz sayılar teorisini geliştirerek matematiksel sonsuzluğun gelişimine önemli katkıda bulunmuşlardır (Sacristan, 1997). Geliştirilen bu teori sonsuzluk ile ilgili "süreç" ve "birim (entity)" olmak üzere iki bakış açısını barındırıyordu (Sacristan, 1997). Ayrıca sonsuz sayı teorisi ile birlikte kardinalite (cardinal) ve sıralı (ordinal) olmak üzere iki yeni kavram ortaya çıkmıştır. Söz konusu bu iki kavram da Cantor'un kümelerdeki eleman sayılarını düşünmesi ile geliştirilmiş, sayma ve sıralama üzerine kuruludur. Kardinalite birbirine eş kümelerin karşılık geldiği ve bu kümelerdeki eleman sayılaırnı belirten sayıdır (Özmantar, 2010). Örneğin A={1,2,3} ve B={4,5,6} kümelerini ele alalım. İki kümenin eleman sayısı 3'tür ve A ve B kümeleri denk kümelerdir. Bu iki kümenin kardinalitesi 3'tür, yani 3 sayısını, içerisinde 3 eleman bulunduran kümelerin kardinalitesi olarak tanımlanabilir (Özmantar, 2010).

Cantor kümeler teorisinin en önemli esaslarından bir tanesi birbirinden farklı iki küme aynı kardinaliteye sahip ise, bu kümeler denk kümelerdir (Mamolo, 2009). Bu durum sadece sınırlı kümeler için değil, sınırsız kümeler içinde geçerlidir. Sayma düşüncesi ve kümeler arasındaki ilişkiye rağmen, sonsuzluk kendi içinde bir sayı olarak düşünülebilir (Allen, 2000). Yani sonsuz iki kümenin eleman sayılarını saymak mümkün olmasa da, iki küme arasında 1-1 eşleme yaparak, bu iki kümenin aynı kardinaliteye (aynı sayıda elemana) sahip olduğu söylenebilir.

Örneğin doğal sayılar kümesi ile çift doğal sayılar kümesi düşünüldüğünde çift doğal sayılar kümesinde olmayıp doğal sayılar kümesinde var olan sonsuz sayıdan bahsedilebilir. Fakat Cantor teorisine göre sonsuz olan bu iki kümenin eleman sayısı sayılamıyor olsa da bu iki küme arasında 1-1 eşleme yapılabilir.

$$\begin{array}{lcccccc} N = \{ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots\ldots & n\ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Ç = \{ & 2 & 4 & 6 & 8 & 10\ldots\ldots & 2n\ldots\} \end{array}$$

Şekil 2.1. Birebir eşleme

İki küme arasında yukarıdaki gibi bire-bir eşleme yapıldığında, doğal sayılar kümesindeki her bir elemana karşılık gelen çift doğal sayılar kümesinde tek bir eleman olacaktır. Böylece iki kümenin kardinalitesinin aynı olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Cantor küme teoresinin önemli kavramlardan bir tanesi de “sayılabilirlik” kavramıdır (Özmantar, 2010). Cantor sayılabilir ve sayılamaz sonsuzluk kavramları üzerine düşünmüştür. Bu bağlamda doğal sayılar kümesi ile rasyonel sayılar kümesinin kardinaliterinin eşit olup olmadığını sorgulamıştır. İki kümenin eşit olup olmadığını belirlemek için doğal sayılar kümesinin sayılabilirlik özelliğini kullanmıştır. Cantor, doğal sayılar kümesinin sayılabilir sonsuz küme olduğunu belirtmiştir. Keyfi alınan bir kümenin de sayılabilir olup olmadığı söyleyebilmek için doğal sayılar kümesi ile arasında 1-1 eşleme yapılması gerekiyordu ve yapılabildiği takdirde o kümenin sayılabilir küme olduğunu söylenebilirdi (Mamolo, 2009). Cantor, bunun için sonsuz rasyonel sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesi arasında 1-1 eşleme yapmış ve rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir küme olduğunu ifade etmiştir (Mamolo, 2009). Cantor daha sonra sonsuz farklı büyüklükler üzerinde durmuştur. Bunun için sonsuz doğal sayılar kümesi ile reel sayılar kümesinin(R) kardinalitelerini incelemiştir. Cantor bu çalışması ile reel sayılar kümesinin kardinalitesinin doğal sayılar kümesinden büyük olduğunu göstermiştir. Cantor reel sayılar ile doğal sayılar kümesi arasında 1-1 eşleme yapmaya çalışmıştır, fakat alınan bir irrasyonel sayının sayının tek bir ondalık sayıyı temsil etmediğini ve 1-1 eşleme yapılamadığını göstermiştir. Bu durumda irrasyonel sayılar kümesinin sayılamaz küme olduğunu göstermiştir (Mamolo, 2009).

Sonsuzluğun tarihsel gelişimi göz önüne alındığında, kavram ile ilgili zorluklar, paradokslar ve kavram üzerine üretilen teoriler kavramın yüzyıllardır tartışmalı bir kavram olduğunu göstermektedir. Matematiksel sonsuzluğun halen daha tartışmalı bir kavram olduğunu söyleyen Tsamir ve Dreyfus (2002), düşüncelerini şu şekilde ifade etmişlerdir;

> ***"…**Felsefede ve matematikte merkezi bir kavram olan fiili sonsuzluk matematiğin ve çeşitli teorik matematiksel sistemin temeline ciddi anlamda katkıda bulunmuştur. Uzun bir tarihi vardır ve ısrarla matematikçiler ve felsefeciler tarafından reddedilmiştir. Cantor teorisi ile kapsamlı bir şekilde ortaya konulmasına rağmen, halen daha tartışmalı bir kavramdır…"(*s.2*)*

2.2. Sonsuzluk Kavramı İle İlgili Paradokslar

Cantor sonrasında sonsuzluk kavramı üzerine yorumlar yapılmış ve sonsuzluk farklı açılardan tanımlanmaya çalışılmıştır. Fischbein (1987), Aristo tarafından tanımlanan fiili sonsuzluğa açık kapı bırakarak, fiili sonsuzluğun aslında tamamen mantıklı, kavramsal yapılar olduğunu ve sezgisel olarak düşünmenin mantıklı olmadığını ileri sürmüştür. Fakat daha sonraki yıllarda yapmış olduğu bir çalışmada fiili sonsuzluğa sezgisel açıdan yaklaşmıştır. Tall (1980), ise sonsuzluğu formal ve doğal sonsuzluk olarak tanımlamıştır. Bunun yanı sıra sonsuzluk kavramını anlamaya yönelik farklı bilişsel teoriler geliştirilmiştir. Bu teorilere geçmeden önce, bu bölümde sonsuzluk kavramı ile ilgili karşılaşılan paradokslar sunulacaktır.

2.2.1. Achille paradoksu

Sonsuzluk kavramı ile ilgili karşılaşılan paradokslardan bir tanesi Achielle paradoksudur. Bu paradoks (Mamolo ve Zazkis, 2008; Nesin, 2009; 2010;) kaynakları temel alınarak açıklanacaktır. Yunanlı filozof Zeno tarafından ortaya koyulan bu paradoks yıllardan beri tartışılmıştır (Mamolo ve Zazkis, 2008).

Paradoks şu şekildedir; Yunanlıların ünlü koşucularından olan Aşil, bir kaplumbağa ile yarış yapacaktır. Bu yarışta kaplumbağa Aşil'in biraz önünde başlamaktadır. Aşil'in kaplumbağaya yetişebilmesi için, öncelikle aradaki mesafeyi koşması gerekir, ama bu süre içinde kaplumbağa bir miktar daha yol almış olacaktır. Aşil bu mesafeyi de koştuğunda, kaplumbağa biraz daha ileride bulunacaktır. Aradaki mesafe sonsuz noktalardan oluştuğu için ve sonsuz sayıdaki noktalar sonlu bir sürede geçilemeyeceği için Aşil hiçbir zaman kaplumbağaya yetişip yarışı kazanamayacaktır.

Bu süreç aslında Aristo'nun tanımladığı potansiyel ve fiili sonsuzluk tanımlarının ikisini de içermektedir. Aşil'e göre önünde sonsuz noktalardan oluşan bir yol vardır ve ulaştığı her noktada, gitmesi gereken bir miktar daha yol olmaktadır. Yolu tamamlama ile geçen süreç aslında hiç bitmemektedir. Bu durum, devam eden süreç olarak tanımlanan potansiyel sonsuzluğu ifade eder. Diğer yandan sonsuz süreçten oluşan tamamlanmış bir yol vardır. Aşil'in kaplumbağaya yaklaşması için aldığı yol aslında sınırlıdır fakat bu yolu gidebilmesi için önce yolun yarısını almalı, yolun yarısını tamamlayabilmesi için o yolun yarısını almalıdır ve sonuç olarak sonsuz birimlerden oluşan yol söz konusudur. Bu açıdan bakıldığında Aşil aslında yerinden kıpırdayamaz ve bir mesafe katedemez. Aşil'in alacağı yol bellidir fakat bu yolun alınması sonsuz tane süreci ve eylemi içermektedir. Bu çelişki Aristo'nun reddettiği fiili sonsuzluk kavramı ile ilgilidir. Nesin (2009), sınırlı olan bir bütünü sonsuz parçalara böldüğümüzde bir süre sonra içinden çıkamadığımız bir çelişki oluştuğunu ve bizim bunu algılayamadığımız belirtmiştir.

2.2.2. Hilbert oteli paradoksu

Sonsuzluk kavramı ile ilgili karşılaşılan paradokslardan bir tanesi de Hilbert Oteli paradoksudur. Bu paradoks (Jonker, 2006) kaynağı temel alınarak açıklanacaktır. Hilbert Oteli sorusu ilk David Hilbert tarafından sorulmuştur (Jonker, 2006). Problem sonsuz sayıda odası olan bir oteli içermektedir.

Probleme göre Hilbert Otelinin odaları 1, 2, 3… şeklinde numaralandırılmıştır. Bu otele, sonsuz sayıda koltuğu olan ve her koltukta bir yolcu olan bir otobüs gelmiştir.

Otobüsün koltukları 1, 2, 3… şeklinde numaralandırılmıştır. Otobüs otele gelir ve yolcuların hepsi otel sahibine o gece otelde kalmak istediklerini söylemişlerdir. Bu durumda, "*Otel sahibi yolcuların hepsini otele nasıl yerleştirebilir?*" sorusu ortaya çıkmıştır. Bu sorunun cevabı Cantor tarafından geliştirilen 1-1 eşleme yöntemi ile bulunabiliyordu. Otobüsteki yolcuları koltuk sırasıyla a1, a2, a3… , aynı şekilde otel odalarını da b1, b2, b3… şeklinde numaralandırıldığında bire bir eşleme yaparak sonsuz tane yolcuyu sonsuz tane odaya yerleştirebilirdi. Bu sorunun devamında bir başka soru daha ortaya çıkmaktadır.

Otel sahibi yolcular ile konuşurken o sırada bir araba daha gelir ve arabanın içinden çıkan bir adam o gece otelde kalmak istediğini söyler. Soru artık "*Otel sahibi otobüsteki yolcuları ve arabadaki adamı otele nasıl yerleştirebilir?*" şeklinde değişmektedir. Bu soruya öğrenciler tarafından getirilen çözüm önerilerinden bir tanesi şu şekildeydi; gelen yolcuyu otelde birinci odaya yerleştirip, otobüs yolcularını ikinci odadan itibaren yerleştirebilir. Benzer şekilde soru, iki tane veya üç tane otobüs gelse yolcular nasıl yerleştirebilir diye farklı şekillerde sorulmaya devam edilebilir. Bu problemleri çözebilmek için sonsuz kümelerin özelliklerini sonsuz kümelerden ayırmak gerekmektedir. Galileo sonlu kümelerin için kullandığımız "büyük", "az", "çok" ve "eşit" gibi ifadelerin sonsuz kümelerin için kullanamayacağımızı ifade etmiştir (Mamolo, 2009). Sonlu bir kümeye bir eleman ekleyince kümenin kardinalitesi değişebilir fakat aynı şey sonsuz kümeler için geçerli değildir. Otele kaç yolcu gelirse gelsin otel yolcuların hepsini alabilecek kapasitedeydi çünkü sonsuz otel odası söz konusuydu. Jonker (2006) bu durumu, belki bizim aklımızın alabileceği bir şey olmadığı ya da sonsuz otel odası diye bir şey olmadığı şeklinde açıklamıştır.

2.3. Sonsuzluk Kavramı İle İlgili Farklı Yaklaşımlar

2.3.1. Fischbein'in sonsuzluk ile ilgili yaklaşımı

Bu bölümde Fischbein'in sonsuzluk kavramı ile ilgili yaklaşımı tartışılacaktır. Bu bağlamda (Fichbein, Tiroh ve Hess, 1979; Fischbein, Tirosh ve Melamed,1981; Fischbein, 1987; Fischbein, Jehiam ve Cohen, 1996; Fischbein, 2001) kaynakları temel alınmıştır. Bunun yanı sıra Tsamir (2001) ile Singer ve Voica (2007)’in sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgisel yaklaşımları ile Kidrom (2011)’un, Fischbein (2001) çalışmasının devamı niteliği olarak adlandırdığı yaptığı çalışmada, örtük modeller ile ilgili düşüncelerine yer verilecektir.

Fischbein, sonsuzluk kavramına sezgisel açıdan yaklaşmıştır. Fischbein vd. (1987), sezgisel bilgiyi, belli bir kesinlikte doğruluğu kabul edilmiş, açıklama gerektirmeyen, hazırda olan bir biliş biçimi şeklinde ifade etmiştir. Bu nedenle, sezgisel bilgi için *immediate knowledge* ve *immediate cognition* terimlerini kullanmıştır. Bir başka ifadeyle, sezgisel bilgi, bilinen verinin ötesinde genelleme yapmaya izin veren, doğrudan ve baskın belirli bir biliş biçimidir. Fischbein(1987), sezgisel bilişin genel özelliklerini aşikarlık (self-evidence), içsel kesinlik (intrinsic certainity), dirençlilik (perseverance), baskınlık (coercieveness), tahmin edici (extrapolativeness), küresellik (globality) ve örtüklük (implicitness) olarak listelemiştir (bkz. s. 43-56). Sezgisel bilgi hem apaçık hem de dolaysızdır ve pratik deneyimlerden kazanılır.

Fischbein(1987), sezgileri, birincil ve ikincil sezgiler olmak üzere ikiye ayırmıştır. Birincil sezgiler, kişilerin herhangi bir sistematik eğitimden bağımsız bir şekilde, kendi tecrübeleri sonucu gelişen sezgiler olarak tanımlarken, ikincil sezgileri ise doğal bir kaynağı olmayan, eğitim ile birlikte sonradan gelişen sezgiler olarak tanımlamıştır. Eğitim ile birlikte oluşan ikincil sezgilerin, birincil sezgiler ile bir araya geldiğinde öğrencilerin tutarsızlıklar yaşadığını söylemiştir. Bu tutarsızlıklara öğrencide, sonsuzluk kavramının gelişiminde de rastlandığını vurgulamıştır. Fischbein vd. (1979), sonsuzluğu sezgisel olarak anlayabileceğimizi belirtmiştir ve sonsuzluk sezgisini tanımlamıştır. Sonsuzluk sezgisini, doğru kabul edilen mantıksal sonuçlar değil, gerçekte doğru olduğunu veya sonsuz kümelerin büyüklüğü (magnitude) gibi aşikar olduğunu düşündüğümüz hislerimiz olarak ifade etmiştir. Fischbein vd. (1979), 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencileri ile yapmış olduğu çalışmada, öğrencilerin sonsuzluk sezgisini anlamaya çalışmıştır. Bu bağlamda öğrencilerden doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümesini eleman sayısı bakımından karşılaştırılmalarını istemiştir. Çalışma sonucunda, öğrencilerin çoğunun “doğal sayılar çift doğal sayıları kapsar” ve “doğal sayılar kümesinin çift doğal sayılar kümesinden daha fazla elemana sahiptir” argümanlarını oluşturduğunu gözlemlemiştir. Verilen iki küme de sonsuz olmasına rağmen, Fischbein, bu cevaplar sonucunda öğrencilerin "bütün parçadan büyüktür" şeklinde bir düşünceye sahip olduğunu ifade etmiştir. Söz konusu soruda öğrencilerin, %10'u doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümelerinin sonsuz olduğunu söylemişlerdir. Öğrencilere aynı içerikli fakat farklı gösterimde bir başka soru daha sormuştur ve bu soruda, öğrencilerden bir doğru parçasındaki nokta sayısı ile bir karedeki nokta sayısını karşılaştırmalarını istemiştir. Öğrencilerin % 27'sinin nokta sayısına sonsuzdur cevabını verdiği görülmüştür. Yine bir başka soruda öğrencilere, sürekli bölüm ile ilgili "*AB doğru parçası ve bu parça üzerinde bir C noktasını verildiğinde, sürekli bölümler ile C noktasına ulaşılabilir mi?*" sorusunu sormuştur. Öğrencilerin çoğu sonsuz bölüm yapılabileceğini söylemiştir.

Fischbein, öğrencilerin bu cevaplarına karşılık çocukların sonsuzluk sezgisine sahip olduğunu ancak cevaplarının rastgele olabileceğini ifade etmiştir. Bununla birlikte 12 yaşına kadar olan öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgisel yorumların hala oluşum sürecinde olduğunu belirtmiştir. Ayrıca öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili doğal sezgilerinin değişken olduğunu ifade ederek, bağlamsal (contextual) ve varsayılan (conjectural) bağlama göre değiştiğini belirtmiştir. Buna karşılık Singer ve Voica (2007), ise 6-8 yaşlarındaki bir çocuğun sonsuzluk kavramı ile ilgili birincil sezgilerin yeteri kadar güçlü olduğunu ifade etmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin bu sezgiye bağlı olarak sonsuz doğal sayılar kümesi ile ilgili argüman oluşturabildiklerini söylemiştir. Fischbein'in doğru parçası ile ilgili olan soruda, ulaştığı bir diğer sonuç ise sonsuzluk ile ilgili öğrencilerde yer alan temel düşüncelerden bir tanesinin "*doğru parçasını sürekli bölmeye devam edildiği sürece her noktaya ulaşılabilir.*" Düşüncesi olduğu sonucuna ulaşmıştır. Öğrencilerin ne kadar matematik bilgisi olsa da bu bilginin sonsuzluk ile ilgili olan bazı temel düşünceleri etkilemediğini ifade etmiştir.

Fischbein vd. (1979), matematiksel (formal) sonsuzluk kavramının, sezgilerimizle belirli noktalarda çeliştiğini söylemiştir. Bunun nedenini ise mantık şemalarımızın sonlu gerçeklere adapte olduğunu, sonsuzluk ile karşılaştığımızda sezgisel çelişkiler yaşadığımız şeklinde açıklamıştır. Fischbein vd. (1981), daha sonraki açıklamalarında da sonsuzluk ve sonsuzluk kavramı ile ilgili olan kavramların veya diğer teoremlerin sezgisel olarak düşündüğümüzde bizim için şaşırtıcı sonuçları olduğunu belirtmiştir. Ancak sonsuzluk kavramının, günlük hayattaki zihinsel veya pratik tecrübelerimizin ötesinde bir kavram olduğu için sezgilerin gelişmesinin, sonsuzluk kavramına anlam kazandırdığını belirtmiştir. Fischbein vd. (1981), yaptığı çalışmada 8. ve 9. sınıf öğrencilerine *"bir doğru parçasındaki her nokta için doğal sayılar kümesinde bir ve sadece bir eleman ile eşleme yapılabilir mi?"* şeklinde bir soru sormuştur. Öğrencilerin çoğu doğru parçasındaki her noktanın farklı bir doğal sayı ile eşleme yapılabileceğini söylemiştir. Fischbein, öğrencilerin buradaki temel sezgilerinin *"Sonsuzluk sadece tükenmeyen(non-exhaustable) anlamına gelir*" şeklinde olduğunu ifade etmiştir. Böylece "sonsuz kümelerin eleman sayısı her zaman eşit olmak zorundadır" sonucu ortaya çıktığını belirtmiştir. Daha sonra yaptığı çalışmalarda sonsuzluğun "tükenmeyen" anlamı üzerinde tekrar durmuştur. Fischbein, doğal sezgilerimize göre sonsuzluğun seviyeleri olmadığını belirtmiştir. Yani sonsuzluk düşüncesini kolay bir şekilde kabul ettiğimizi; ancak bir sonsuzluk başka bir sonsuzluktan daha fazladır düşüncesini sezgisel olarak kabul etmediğimizi ifade etmiştir. Çünkü bunun sezgisel olarak anlamsız bir durum olduğunu vurgulamıştır.

Fischbein (2001), potansiyel ve fiili sonsuzluk kavramları üzerinde durmuş ve sezgisel açıdan bu kavramları değerlendirmiştir. Sezgisel olarak düşünüldüğünde potansiyel sonsuzluğu anlamada sorun olmadığını fakat fiili sonsuzlukta çelişkiler yaşadığımızı belirtmiştir. Fischbein'e göre soyut bir kavram olan potansiyel sonsuzluk, sonsuz süreç ve sonsuz kümeleri ifade etmektedir. Sonsuz süreçlerin, sonsuzluğun dinamik formunu temsil ettiği ve bizim bu süreci sezgisel olarak anlayabileceğimizi belirtmiştir. Buna örnek olarak doğal sayıları göstererek, doğal sayıların tamamını kavrayamayacağımızı ama her doğal sayıdan sonra bir doğal sayı geldiğini anlayabileceğimizi ifade etmiştir. Çünkü sayılar her ne kadar büyük olsa da ardından mutlaka bir sayı gelmektedir. Bu nedenle Fischbein, potansiyel sonsuzluğu sezgisel olarak anlayabileceğimizi belirtmiştir. Ancak aynı durum fiili sonsuzluk için geçerli değildir. Fischbein'e göre aklımızın almadığı, varlığını neredeyse imkansız olarak görülen fiili sonsuzluk; bir doğru parçasındaki sonsuz nokta ve gerçek sayıların sonsuzluğudur. Fischbein, fiili sonsuzluğu anlamanın bizim için çok zor olduğunu dile getirmiştir.

Bunun nedenini ise sürekli sonlu olan şeyler ile meşgul olduğumuz ve sonlu gerçeklere odaklandığımız için fiili sonsuzluğun bizim mantık şemalarımızın dışında kaldığı şeklinde açıklamıştır. Örneğin matematiksel olarak, doğal sayılar ile çift doğal sayıların kardinalitesinin bire-bir eşleme yöntemi ile aynı olduğunu sonucuna varırız ya da farklı uzunluktaki doğru parçalarının aynı sayıda noktaya sahip olduğu sonucuna ulaşabiliriz fakat sezgisel olarak bu sonuçları anlayamayacağımızı ifade etmiştir. Bu nedenle Fischbein, fiili sonsuzluğun matematiksel ve kavramsal olarak kabul edilebilir ama sezgisel olarak kabul edilemeyen bir kavram olduğunu belirtmiştir.

Yukarıda bahsedildiği üzere Fischbein (1987), sezgileri birincil ve ikincil sezgileri tanımlamış, sonsuzluk kavramına bu sezgiler ile açıklamaya çalışmıştır. Ancak Tsamir (2001), birincil ve ikincil sezgilerinin yeterli olmadığını ifade ederek üçüncü bir sezgi tanımlanabileceğini ileri sürmüştür. Bu sezgilerin, “geçici sezgiler” (transitory intuition) olduğunu ve üçüncü bir sezgi tanımı yapılabileceğini söylemiştir.

Geçici sezgi olarak ifade ettiği bu sezgilerin, birincil ve ikincil sezgilerin karışımı olup, öğrenene dışarıdan bir müdahale yapıldığı zaman ortaya çıktığını ifade etmiştir. Yani öğrenenin tecrübesinin bir parçası olan, birincil sezgilerin tamamen değiştirilmeden, bilgilerine yeni bilgiler eklemesi ile oluşan sezgiler olarak tanımlamıştır. Tsamir (2001), bu sezgilerin, ikincil sezgilerin, sezgisel doğasına sahip olup, formal algısına (formal perception) sahip olmadığını belirmiştir. Tsamir (2001)’in çalışmasına ilgili literatür bölümünde daha ayrıntılı değinilecektir.

Fischbein (2001), sonsuzluğu anlamamızı etkileyen örtük modeller (tacit models) olduğunu, bu modellerin ne olduğunu ve bizi nasıl etkilediği üzerinde durmuştur. Fischbein, soyut ve anlaşılması zor olan bazı matematiksel kavramları anlamak için şekilsel, grafiksel gibi zihinsel modeller kullandığımızı belirtmiştir. Zihinsel modelleri bazen bilinçli kullanırken, bazen de farkında olmadan kullanırız. Fishbein, farkında olmadan kullandığımız bu modellerin örtük modeller olduğunu ifade ederek, örtük modellerin bizim muhakeme sürecimizi etkilediğini belirtmiştir. Buna örnek olarak nokta kavramı ile açıklamıştır. Nokta kavramı soyut bir kavramdır ve boyutu yoktur. Ancak nokta kavramını temsil eden şekilsel bir model kullanılmaktadır.

Bu şekil gerçek hayatın içinde yoktur fakat zihinsel olarak böyle bir temsili şeklin olduğunu biliriz. Fischbein, bu temsili şeklin bizim muhakeme sürecimizi nasıl etkilediğini *"farklı uzunluktaki doğru parçalarındaki nokta sayılarını karşılaştırma"* sorusu üzerinde açıklamıştır. İki doğru parçasında sonsuz nokta olduğu için iki kümenin eleman sayısının eşit olduğunu biliriz. Ancak doğru parçalarının uzunlukları ve nokta kavramının temsili şekli düşünüldüğünde çelişki yaşadığımızı ifade etmiştir. Matematiksel noktaların boyutu olmadığını bilinmemize rağmen, farkında olmadan nokta için kullandığımız temsili şekli düşündüğümüzü söylemiştir. Farklı uzunluklarda olan bu doğru parçalarının, eşit büyüklükteki noktalardan oluşan iki küme gibi düşünüldüğünde doğru parçalarındaki nokta sayıları eşit olmadığı sonucuna ulaşılmaktadır. Böylece hem örtük modeller hem de sezgilerimiz bizim muhakeme sürecimizi etkilemiş olup mantıklı düşünmemizi engellediğini ifade etmiştir.

Diğer yandan Fischbein (2001), sonsuzluk ile ilgili notasyonları anlayabilmek için sonsuzluğun "tükenmezlik kapasitesini" örtük modeller açısından incelemiştir. Yine "*Bir AB doğru parçası ve üzerinde bir C noktası verilmiştir. Bu doğru parçasında sürekli bölümler ile C noktasına ulaşılabilir mi"* sorusunu ele almıştır. Bu soruda öğrencilerin birçoğu C noktasına ulaşılabileceğini söylemişlerdir. Fischbein, öğrencilerin ulaşılabilir cevaplarına karşılık açıklamasını şu şekilde dile getirmiştir.

> *"Bizim açıklamamıza göre sonsuzluk burada sezgisel olarak "tükenmez" (inexhaustible) anlamına karşılık gelmektedir. Eğer kişi sonsuza kadar bölme yapmaya devam ederse, bütün noktalara ulaşılabilir."*
>
> *"Diğer yandan sonsuzluğun bu şekilde yorumlanabilmesi için sezgisel olarak tek bir çeşit ve tek bir seviyede sonsuzluk olması gerekiyor. Tükenmezlikle eş olan bir sonsuzluk daha zengin bir sonsuzluktan üstün olamazdı."*

Fischbein, sonsuzluğun tükenmez olması mantığının bizi limite yönlendirdiğini ifade etmiştir. Çünkü verilen soruda, doğru parçasını bölerek elde edilen doğru parçalarını, parçadaki bütün noktaları kapsayacağını belirtmiş ve bu durumun da fiili sonsuzluk olduğunu açıklamıştır.

Fakat burada fiili sonsuzluk ile ilgili problem ortaya çıktığını belirtmiştir. Bu problem örtük modeller ve sezgisel düşünceden kaynaklanmaktadır. Örtük modelden kaynaklanan problemi is şu şekilde açıklamıştır; farklı uzunluklardaki doğru parçalarının nokta sayılarının karşılaştırılmasında, nokta büyüklükleri düşünülerek karşılaştırılacaktı dolayısıyla nokta sayısı farklıdır sonucu ortaya çıkacaktı. Diğer yandan sonsuzluk kavramı sezgisel olarak düşünüldüğünde ise, tükenmeyen sonsuzluk düşüncesi, "bütün sonsuz kümeler eşittir" sonucunu gerektiriyordu. Dolayısıyla doğal sayılar kümesinin eleman sayısı ile doğru parçasındaki nokta sayıları eşit veya farklı uzunluktaki doğru parçalarının nokta sayısı eşit olmalıydı. Ancak bu sonuç doğal sayılar kümesinin elemanları ile doğru parçasındaki nokta sayısı arasında birebir ve örten bir eşleme yapılamayacağı için eleman sayılarının eşit olamayacağı gerçeği ile çelişiyordu. Bununla birlikte sezgisel ve görsel olarak farklı uzunluktaki doğru parçalarının nokta sayılarının farklı olması gerekiyordu. Fischbein, bu nedenle fiili sonsuzluk kavramının sezgisel olarak çelişkili bir kavram olduğunu ifade etmiştir.

Kidrom (2011), tacit modeller ile ilgili yaptığı çalışması ile Fischbein'in daha önce ulaştığı tacit modellerinin devamlılığı, öğrencinin mantıksal muhakemesini etkilediği sonucunu desteklemiştir. Fakat öğrencilerin mantıksal akıl yürütme duygusuna ulaşmasının engellemediğini belirtmiştir. Bu bağlamda, bir kavrama yönelik bilişsel yapılarımızı oluştururken özellikle sonsuzluk gibi çelişkileri içeren kavramların yapılandırılmasında, farkına varmadığımız tacit modellerin etkisini azaltabilmek için esnek zihinsel modeller oluşturmamız gerektiğini vurgulamıştır.

2.3.2. Tall'un sonsuzluk ile ilgili yaklaşımı

Bu bölümde Tall'ın sonsuzluk kavramı ile ilgili yaklaşımı açıklanacaktı. Bu bağlamda (Tall ve Schwarzenberger, 1978; Tall, 1980a, 1980b; Tall, 2001; Tall ve Tirosh, 2001) kaynakları temel alınmıştır. Bunun yanı sıra Monaghan (1986)'ın Tall'un geliştirdiği "sonsuzluğu ölçme" yaklaşımı ile ilgili düşüncelerine yer verilecektir. Tall (1980), Cantor Teorisindeki Kardinal Teori ile ortaya çıkan uyuşmazlıklara farklı bir yaklaşım getirmiştir.

Tall, sayıların sayma özelliğinden çok ölçme özelliğini kullanarak sonsuzluk kavramını anlamaya çalışmıştır. Örneğin; AB ve CD gibi iki doğru parçası alındığında, AB doğru parçasının uzunluğu CD doğru parçasının uzunluğunun iki katı olsun. Kardinal sayı teorisine göre AB doğru parçası ile CD doğru parçasının kardinalitesi eşittir. Fakat bu doğru parçaların uzunlukları arasında karşılaştırma yaparken sezgisel olarak düşünüldüğünde bir tutarsızlık vardır. Sezgisel olarak mantıklı olan, bir niceliğin 2 katı, niceliğin kendisinden daha fazladır. Tall'a göre bu düşünce Sonsuzluğu Ölçme (Measuring infinity) şemasında düşünüldüğünde doğru olmaktadır. Fakat kardinalite olarak düşünüldüğünde ise ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle Tall, non-standard analizi kullanarak "sonsuzluğu ölçme" şemasını çerçevesinde sonsuzluğun anlaşılırlığı üzerinde durmuştur.

Tall'a göre sonsuzluğu ölçen sayılar, gerçek sayıların genişletilmesi ile elde edilen, sonsuz büyük ve sonsuz küçük niceliklerden oluşan tutarlı bir sayı sistemidir. Örneğin *l* uzunluktaki bir aralığı, kalınlığı (thickness) sonsuz küçük büyüklüğünde olan d noktası ile kapatmak için *l/d* tane noktaya ihtiyaç olmaktadır. Böylece *l/d* sayısı da sonsuz sayı olacaktır. Tall, bu sayının sonsuz kardinaliteyi değil sonsuz ölçüm sayısını gösterdiğini belirtmiştir. Benzer şekilde uzunluğu *2l* olarak alınmış olsaydı, *2l/d* kadar noktaya ihtiyaç olacaktı. Dolayısıyla 2l/d sonsuz sayısı l/d sonsuz sayısının iki katı büyüklüğünde bir sayı olacaktır ve sonsuz sayıların genişletilmesi ile elde edilen yeni sayılar söz konusudur.

Tall, çocukların sonsuzluğu kardinal sayı teorisi ile algılayamadıklarını ileri sürmüştür. Kardinal sayı teorisinin ve "sonsuzluğu ölçme" yaklaşımının kullanılmasının çocukları farklı büyüklüklerdeki sezgisel sonsuzluğa yönlendirdiğini belirtmiştir. Tall'a göre, çocuklar sonlu bir doğru parçasının sonlu sayıda bölünemez noktadan oluştuğuna inanmaktadırlar. Örneğin sekiz yaşındaki bir çocuğa, "*Bir doğru parçasını ikiye bölünüp daha sonra parçalardan birini alınıp ve tekrar ikiye böl*ü*ndüğünde*, *bölme işlemlerine aynı şekilde devam edildiğinde sürekli bölüm yapılabilir mi yoksa bir yerde bölme işlemi biter mi?*" şeklinde bir soru sorulduğunda çocuk bölme işleminin devam edeceğini ifade etmiştir. Tall, çocuğun bu cevabının bu yaştaki bir çocuğun, doğru parçasındaki sonlu ve sonsuz bölünebilirlik arasında geçiş evresinde olabilir ya da çocuk pratikte sonlu bölüm ile teorik imgedeki (theoretical imagination) sonsuz bölünebilirlik arasında çelişki yaşıyor olabilir şeklinde açıklamıştır. Bu nedenle çocukların sayı kavramında kardinal algısını anlayamadığını, ölçme algısına daha yakın olduklarını belirtmiştir. Tall, bir başka örnek olarak çocukların, *l* uzunluğundaki bir doğru parçasında 50 nokta varsa, *2l* uzunluğundaki doğru parçasında 100 nokta vardır şeklinde düşündüklerini ifade etmiştir. Yani çocuklar doğru parçalarının sahip olduğu nokta sayısı ile uzunluğu arasında oran kurmaktadırlar. Bu nedenle çocuklar kardinaliteleri farklı olan rasyonel süreklilik ile gerçek süreklilik kavramları arasındaki farklılık anlayışına sahip değildir. Dolayısıyla çocuğun düşünme sürecini kardinal paradigma çerçevesinde düşünmenin doğru olmadığını vurgulamıştır.

Bununla birlikte Tall, çocukların sezgisel düşünmelerinin de dikkate alınması gerektiğini belirtmiştir. Çocuklarda, sonsuzluğu ölçen sayılar şemasını oluşturulduğunda, sonsuzluk ile ilgili gerçeğin mutlak formundan çok göreceli şemalar oluşturduğumuzu ifade etmiştir. Bu noktada çocukların sezgileri önemli olmaktadır. Çünkü çocuklar matematikçiler gibi formal şemalara sahip değillerdir. Ayrıca farklı formal şemaların sonuçları farklı şekilde yorumlanabilir. Örneğin “Daha uzun doğru parçası daha fazla noktaya sahiptir” ifadesi ölçme şemasına göre doğru iken, kardinalite şemasına göre yanlıştır. Bu yüzden çocukların sezgilerindeki “doğru” ve “yanlışı” kendi bağlamında değerlendirilmesi gerektiğini belirtmiştir. Sonsuzluğu ölçme teorisinde de, kardinal bakış açısının reddettiği sezgiler ön plandadır.

Diğer yandan Tall (1980), üniversite öğrencilerinin de kardinal sonsuzluğu düşünmediklerini söylemiştir. Öğrenciler ile yaptığı çalışmada, öğrencilerin limit içerikli sorularda sonsuzluk kavramını sınırlayıcı bir kavram ya da anlamanın da ötesinde büyük bir şey gibi algıladıklarını tespit etmiştir. Öğrencilerin, sezgileri ile uyuşmazlık yaşamalarının nedeni olarak öğrencilerin aritmetik sonsuzluğu düşündükleri şeklinde açıklamıştır. Bu düşüncenin oluşma sebebini ise sonsuz sürecin potansiyel doğasının, öğrencileri sonsuzluğun ulaşılmaz büyüklük olduğunu düşündürmeye yönlendirdiğini şeklinde açıklanabileceğini ifade etmiştir. Dolayısıyla kardinal sonsuzluğun öğrencilerin aklına gelmediğini vurgulamıştır.

Tall'ın sonsuzluğu ölçme yaklaşımını, daha sonra Monaghan (1986), yaptığı çalışma ile desteklemiştir. Monaghan (1986), bununla ilgili öğrencilere sayma ve ölçme içerikli sorular sorarak, öğrencilerin iki durumda verdikleri cevapları karşılaştırmıştır. Sayma içerikli soruda, "1,2,3,4…" ve "2,4,6,8..." kümelerini vererek öğrencilerden iki kümeyi eleman sayıları bakımından karşılaştırmasını isterken, ölçme içerikli soruda ise öğrencilerden [0,1] aralığındaki ondalık sayılar ile [0,10] arasındaki ondalık sayıların miktarı bakımından karşılaştırmalarını istemiştir. Çalışma sonunda öğrencilerin çoğunun sayma içerikli soruda, iki kümenin eleman sayısının eşit olduğunu söylediğini, ölçme içerikli soruda ise öğrencilerin genellikle [0,10] aralığındaki ondalık sayıların miktarının, [0,1] aralığındaki ondalık sayılardan daha fazla olduğunu söylediklerini tespit etmiştir. Monaghan, bu sonucun Tall'ın ileri sürdüğü "*n kat uzunluğundaki doğru parçası n kat noktaya sahiptir*" savını desteklediğini ifade etmiştir. Monaghan, sayma işleminin yapılabilmesi için ayrık durumların olması gerektiğini, ölçmenin yapılabilmesi için devam eden durumun olması gerektiğini söylemiştir. Böylece ölçme bağlamı ile sonsuzlukların sıralanması mümkün olmaktadır. Ancak Monaghan, ölçme bağlamını kullanırken dikkat etmek gerektiğini çocukların düşüncelerinde aşırı sonuçlar oluşturmamak gerektiğini de vurgulamıştır. Bunun yanı sıra Monaghan, sonsuzu ölçme anlayışının, ileri yaşlardaki çocukların düşüncelerinde olabilecek bir eğilim olduğunu da belirmiştir.

Tall (2001)'un sonsuzluk kavramı ile ilgili bir diğer açıklaması ise tek bir sonsuzluk olmadığını şeklindedir. Çarpma ve bölme yapılamayan kardinal sayı teorisini tek matematiksel sonsuzluk kavramı olarak düşünmenin yanlış olduğunu ifade etmiştir. Analizde, kardinal sonsuzluk kavramından farklı olarak, formal teorilerle ortaya koyulan sezgisel sonsuzluk, sonsuz küçükler gibi başka sonsuzluk kavramları da vardır. Bu nedenle sonsuzluğu tek bir başlık altında düşünmenin yanlış olduğunu vurgulamıştır. Tall'a göre sonsuzluk kavramı ile ilgili beynimiz bir kavram imajı (image) geliştirir. Bu kavram imajı, kavram ile ilgili mental resimleri, kavramın özelliklerini ve sürecini içeren bilişsel yapılardır (Tall ve Vinner, 1981). Bu bağlamda, Tall sonsuzluk ile ilgili oluşturulan kavram imajını doğal sonsuzluk (natural infinity) ve formal sonsuzluk (formal infinity) olarak ikiye ayırmıştır (Tall, 2001).

Doğal sonsuzluk kavramı insanların gerçek yaşamlarından edindikleri tecrübeyle kendi zihinlerinde oluşturdukları kavramı imajı olarak tanımlanmıştır (Tall, 2001). İnsanlar genelde sonlu nesnelerden edindikleri tecrübelerini sonsuza genişleterek bir kavram imajı oluşturmaktadır. Formal sonsuzluk kavram imajı ise formal çıkarımlarla düşünülen sonsuzluk olarak tanımlanmıştır. İnsanlar, formal kavram imajını oluşturulurken tecrübeleri sonucu oluşturduğu doğal kavram imajından yararlanır. Örneğin tecrübeler sonucunda ortaya bir fikir atıldığında, bu fikrin teorem olabilmesi için formal matematiksel yapılar çerçevesinde ispatlamaya çalışılır ve bu kavram için artık formal kavram imajı oluşturur. Fischbein vd. (1979), insanların zihinlerindeki doğal sonsuzluk kavramının değişken olduğunu ve kendi içinde uyuşmazlıklar yaşandığını belirtmiştir. Örneğin tecrübeler sonucunda oluşan doğal sonsuzluk kavram imajına göre bütün parçadan büyüktür fakat formal sonsuzluk kavram imajına göre matematiksel olarak doğal sayılar kümesi ile çift doğal sayılar kümesinin eleman sayılarının aynı olduğunu bire-bir eşleme ile gösterilebilir. Dolayısıyla doğal sonsuzluk kavramı ve formal sonsuzluk kavramı arasında tutarsızlık oluşmaktadır. Tall (2001), formal sonsuzluk kavramı sayma, sıralama (ordering), aritmetik gibi sonlu nesnelere ait özellikleri kullanarak bu tutarsızlıkları mantığa uydurulabileceğini belirtmiştir. Örneğin sayma ve sıralama kavramları, kardinal ve sıralı sayı teorisi ile ilişkilendirilebilirken, aritmetiğin özelliklerini kullanarak sonsuz ve sonsuz küçükler (infinite and infinitesimal quantities) kavramlarına ulaşılabilir. Böylece doğal sonsuzluk kavramı sonucunda uyuşmazlıklar ortaya çıkarken, formal sonsuzluk olarak tanımlanan kardinal sonsuzluk, ordinal sonsuzluk gibi diğer sonsuzluklar kendi içinde tutarlılığı sağlayacaktır.

2.3.3. Sierpinska’nın sonsuzlukla ilgili yaklaşımı ve Petty Modeli

Bu bölümde Sierpinska’nın sonsuzluk kavramı ile ilgili yaklaşımı açıklanacaktır. Bu bağlamda Sierpinska (1987) çalışması temel alınmıştır. Bunun yanı sıra Sierpinska’nın limit kavramına yönelik geliştirtiği modeli daha sonra Petty biraz daha geliştirerek kullanmıştır. Bu nedenle Petty’nin geliştirdiği model ve modeline öğrenciler ile ilgili sonuçlarına yer verilecektir.

Sierpinska (1987) çalışmasında, limit kavramı ile ilgili epistemolojik zorluklar üzerinde durmuş ve bu zorluklarla ilişkili olan sonsuzluk kavramına değinmiştir. Sierpinska, 15-17 yaş öğrencileri ile yaptığı bu çalışmada ilk olarak öğrencilerin sonsuzluk kavramına yönelik tutumlarını ve yaşadığı zorlukları belirlemiştir. Öğrencinin sonsuzluk ile ilgili tutumu çerçevesinde öğrencilerin limit ile ilgili kavram modelini açıklamıştır. Ardından, yaşanan zorluklar ve öğrencilerin tutumlarına cevap niteliğinde limit kavramı ile ilgili dört model geliştirmiştir.

Sierpinska'ya göre sonsuzluk kavramı öğrenciler tarafından ilk olarak bir şeyin sınırsız, sonsuz olması gibi algılanıyor fakat 0.999…. gibi bir sayının bir sayıya yaklaştığını ve sınırlandırıldığını anlayan öğrenci için bu izlenim çelişkiler oluşturmaktadır. Sierpinska, öğrencilerin bu paradokstan kurtulmak için farklı çözümlere odaklandığını ifade etmiştir. Öğrencilerin sonsuzluk kavramına yönelik zorluk yaşadıkları paradokslardan bir tanesi *"Sonsuzluk kavramı sınırsızlıktır."* paradoksuydu. Sierpinska bu paradoksa yönelik çözümlerinde farklı durumlar değerlendirmiştir. Bu olasılıklardan bir tanesi sonsuzluk kavramının tamamen atılması yani yok sayılmasıdır. Bu durumda matematiğe karşı sezgisel bir tutum söz konusudur; *dünyada her şey sonludur bu nedenle sonsuzluk yoktur.* Diğer yandan ikinci bir durum olarak sonsuzluğun sadece matematiksel teorilerde geçerli zihinsel bir yapı olduğu düşünülebilir. Ancak daha sonra sonsuzluğun bir anlamı olmadığı farzedilecek ve sonuç olarak matematiğe karşı söylemsel (discursive formal) bir tutum söz konusu olacaktır. Sierpinska, her iki durumda sonsuzluğun reddedilmesi ile ilgili ayrıntı olabileceğini vurgulamıştır. Birinci durumda verilen sezgisel tutumun aşikar bir şekilde savunulamayacağını ve formüle edilemeyeceğini belirtmiştir. Örneğin, "*limit son terimdir*" şeklindeki bir ifadede, öğrenci "*hangi terim son*" şeklinde bir soru sorabilir. Bu nedenle sezgisel tutumu formüle edebilmek için formüle edilen ikinci durumu da onaylanması gerekmektedir. Bu bağlamda Sierpinksa, birinci durum çerçevesinde sonsuzluğa yönelik dört tutumu tartışmıştır ve şu şekilde açıklamıştır; bu tutumlara göre öğrencilerin limit ile ilgili kavramlarının dört model çerçevesinde formülize edilebilir. Bu tutumlar şu şekildedir:

L1.Sezgisel Kesinlik (The “intuitive” definitist attitude) : Bütün diziler (sequence) sonludur ve dizilerin terim sayıları belirlenebilir. Örneğin “0.999…” sayısı, 1’e yaklaşan “0.999…9” sayısını ifade ediyor.

L2.Sezgisel Belirsizlik (The “intuitive” indefinitist attitude): Bütün sınırlı diziler sonludur.

L3.Tutarsız Kesinlik (The “dircursive” definitist attitude): Bütün diziler sonludur fakat bazen dizilerin terim sayısını belirlemek mümkün olmayabiliyor. Bu durumda kümenin limiti son terimidir ve eğer son terimi bulmak mümkün değilse, limite yakın bir değer kabul edilir.

L4.Tutarsız Belirsizlik (The “dircursive” indefinitist attitude): Bütün sınırlı diziler sonsuzdur fakat bazen dizilerin terim sayısını belirlemek mümkün olmayabiliyor. Bu durumda dizinin limiti son terimidir ve eğer son terimi bulmak mümkün değilse, limite yakın bir değer kabul edilir.

Tanımlanan modellere göre; örneğin, reel sayılar kümesinin sürekliliği reddediliyor bu durumda reel sayılar sonludur (sezgisel kesinlik) veya sayılabilirdir (sezgisel belirsizlik, tutarsız belirsizlik). Reel sayılarda önemli olan, ondalık sayıların uzunluğudur ki sayılar sonsuz da olabilir sonlu da olabilir. Belirtilen modellere göre sonsuz sayı ya anlamsız (L1 ,L2) ya da soyut (L3, L4). Böyle bir durumda, eğer 0.99…. sayısı basamak dizisi sonsuz olarak kabul edilirse, “0.999…=1” eşitliği kabul edilemez çünkü iki sayı farklı sınıflara aittir.

Sonsuzluk kavramı ile ilgili bir diğer paradoks ““ A sonsuzsa A sınırsızdır.” (A inifinite then A unlimited)” paradoksudur. Bu çıkarım reddedilmiş, sınırlı sonsuzluk ve sınırsız sonsuzluk olmak üzere iki tane sonsuzluk kabul edilmiştir. Sonsuzluğun zamanda sınırsız olduğu, sonsuz sayı ekleme adımlarını ve bu süreci düşünmek yerine bunların tamamının hazır nesneler olarak düşünülmüş ve sonsuzluk kavramı hayata geçirilmiştir. Ancak sonsuzluk ile zorluklardan bir tanesi bilgilerin tutarsız olmasıydı. Bu tutarsızlığa çözüm önerisi olarak sonsuzluk kavramı ile ilgili yapıların kişiden bağımsız oluşturulabilmesi düşünülmüştür. Böylece sonsuzluk kavramını hayata

geçirme teoride düşünebilir olacak ve sonsuzluk kavramı potansiyel olarak sonunda hayata geçirebilir olacaktı.
Sierpinska sonsuzluk kavramına yönelik yaşanan zorluklar ve tutumlara cevap niteliğinde limit kavramı ile ilgili dört model geliştirmiştir. Bu modeller;

1. Limitin Potansiyel Modeli **(The "potentialist" model of limit)** : Bir dizinin limiti sonsuza yaklaşıyor ve biz hiçbir zaman ulaşamıyoruz. Örneğin 0.999.. sayısı devam eden sonsuz bir dizi; 0.99… bir sayı ve 1'e yaklaşıyor ancak asla ulaşmıyor. Bu model bilgiye yönelik sezgisel deneyime ve sonsuzluğa yönelik "potansiyellik" tutumuna cevap vermektedir.

2.Limitin Potansiyel Gerçeklik Modeli **(The "potential actualist" model of limit):** Bir kişi sonsuz bir süre sonunda, sonsuz dizinin tamamlandığını ve dizinin bütün terimlerine ulaşılabildiğini kabul edebilir. Bir dizinin limiti onun son terimidir. Örneğin 0.99.. sayısını devam ediyor ve zamanla oluştuğu düşünülebilir: bütün terimleri yazılmış ve daha sonra 1 oluyor (ya da birden önceki son sayı). Bu model bilgiye yönelik tutarsızlığa ve sonsuzluğa yönelik "potansiyel gerçeklik" tutumuna cevap vermektedir.

Bahsedilen bu iki modelde, dizi zaman fonksiyonudur. Gerçek sayılar dizisi yoğun (dense) ancak mutlak sürekli(necessarily continous) değildir. Açıklanacak diğer iki model ise bilgiye yönelik " tutarsızlık" ve sonsuzluğa yönelik "fiili gerçeklik" tutumuna cevap verecektir.

3. Limitin Sınırlılık Modeli **(The "boundist" model of limit):** Bir dizi sınırlı ya da sınırsız olabilir. Bir kişi dizinin sınırlarını söyleyebilir; bazen sınırlardan bir tanesi üzerine tartışılabilir. Örneğin 1, 0, 1, 0 … gibi dizisinin iki tane sınırı olabilir. Fakat 2 sayısının 1, 1.9, 1.99, …dizisinin sınırı olduğu söylenebilir.

4. Limitin Sonsuz Küçükler Modeli: A ile g arasındaki fark sonsuz küçük ise, g, A dizisinin limitidir. Bununla ilgili "0.999…=1" eşitliği matematiksel kurallar ile matematiksel ispatı olan bir örnek olabilir.

Sierpinska üç öğrenci ile yaptığı görüşmelerde bu modelin öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili yaşadıkları tutarsızlıklar aşmada yardımcı olduğu belirtmiştir. Öğrencilerin sonsuzluk kavramına daha objektif baktığını ifade etmiştir.

Sierpinska(1985) tarafından geliştirilen model daha sonra Petty (1996) tarafından kullanılmıştır. Petty ayrıca Robert(1982) tarafından geliştirilen bir modeli de alarak, bireylerin sonsuz ve sonsuz süreçleri kavramsallaştırmada soyutsal çıkarımın (reflective abstraction) rolünü incelemiştir. Üç ayrı seviyeden ve kavramsal etkinliklerden oluşan bu model şu şekildedir;

1.Statik Seviye (Statik Level:

i. Bireyin limit algısı, sonlu terimlerdir. (The's perception of a limit is in finite terms.)
ii. Birey için sonsuzluk yoktur, her şey sonludur ve belirlidir.(For the individual infinity does not exist, everything is finite and definite.)
iii. Sonsuzluk varsa, sınırlı olan her şey sonludur ve belirlidir.(İf infinity exists, then all that is bounded must be finite and definite.)

2. Dinamik Seviye (Dynamic Level)

i. Birey limit kavramını devam eden, sonlanmayan bir süreç olarak algılar; limit henüz elde edilmemiş bir değerdir.
ii. Birey için sonsuzluk vardır, sonsuz süreçlerin varlığını kabul eder fakat fiili sonsuzluğa karşı potansiyel olarak adlandırılan süreç sonuçlarını tahmin etmenin mümkün olmayacağına inanmaktadır.

3. Fiili Hale Getirilen Sonsuzluk: (Actualized infinity)

i. Birey sonsuzluğu bir bütün ve belirli nesne olarak görür. (The individual deals with infinity as a whole and definite objects.)
ii. Birey sonsuz süreçleri, tahmin edilebilir sonuçlar olarak algılar. (The individual perceives infinite process as having predictable outcomes.)

iii. Birey, sonsuzluğun matematiksel bir nesne olarak değerlendirildiği zihinsel bir şema oluşturur. (The individual has constructed a mental schnema in which infinit is treated as a mathematical objects.)

Petty, yapmış olduğu çalışmada bu modeli kullanarak, öğrencilerin sonsuz ve sonsuz süreçleri içeren problemleri nasıl çözdüklerini incelemek istemiştir. Bu bağlamda 4 öğrenci ile 8 hafta görüşme ve gözlemler yapmıştır. Bu süreç öğrencilerin kavramsal yapılarındaki tutarsızlıkları ortaya çıkarmaya yönelik tasarlanmıştır. Öğrenciler için bazı problem durumları oluşturulmuştur, çalışma sırasında öğrencilerin ortaya çıkan tutarsızlıkları nasıl çözmeye çalıştıkları, öğrencilerin kavramsal bilgilerini nasıl bir araya getirdikleri ve bilgilerindeki değişim gözlemlenmiştir.

Petty sonsuz ve sonsuz süreçleri temel alan kavram modeli üç aşamada ele almıştı fakat öğrenciler ile yaptığı görüşmelerden sonra üçüncü seviyesinin iki kategoriye ayrılması gerektiğini belirtmiştir. Üçüncü seviyenin iki kategoride değerlendirilmesinin sebebi bireyin sonsuzluğu bir birim ya da matematiksel nesne olarak algılamasıydı. Fiili sonsuzluk seviyesine ulaşan bir kişi sonsuzluğu matematiksel nesne olarak görmektedir. Bireyin sonsuzluğu matematiksel nesne olarak görmesi sonsuzluk ile ilgili işlemleri yapabilecek kapasitede olmasını gerektirir. Diğer yandan üçüncü seviyede olan bir kişi sonsuz süreçlerin sonucunu tahmin etmede potansiyel anlayış gösterebilir fakat her birey işlemleri yapabilecek durumda olmayabilir. Örneğin birey 0.999.. sayısının 1 ile aynı olduğu bilebilir, birey sonsuz bir sürecin tahminin sonucunun 1 olduğunu kabul edebilir. Fakat bu bireyin sonsuzluğu matematiksel nesne olarak kavramsallaştığını veya kavram ile ilgili işlemleri yapabildiği anlamına gelmez. Bu durum dördüncü bir seviye ile açıklanabilirdi ve Petty modeli dört seviye olarak geliştirdi. Bu seviyeler; 1. Statik Seviye, 2. Dinamik Seviye, 3. Fiili hale gelen sonsuzluk ve 4. Matematiksel nesne olarak sonsuzluk olarak geliştirilmiştir.

Petty, verilen model kullanılarak yapılan etkinlikler sonucunda öğrencilerin soyut çıkarım seviyesinin arttığını ve öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili çelişkilerinin çözmeye çalıştıklarını ifade etmiştir. Ancak öğrencilerin, sonsuzluk ile ilgili oluşan inançları çelişki olabileceğini algılamadıklarını belirtmiştir.

2.3.4. APOS Teorisi

Bu bölümde APOS teorisinden ve APOS teorisinin sonsuzluk kavramına yaklaşımından bahsedilecektir. Bu bağlamda (Dubinsky, Weller, Mcdonald ve Brown, 2005; Weller, Brown, Dubinsky, McDonalo ve Stenger, 2004; Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros ve Weller, 2014) kaynakları temel alınacaktır. Dubinsky vd. (2005), yapmış oldukları çalışmada APOS teorisi ile sonsuzluk kavramının nasıl düşünülebileceğini, farklı matematiksel problemlerin ve paradoksların çözümüne yönelik öneriler sunmuştur. Potansiyel ve fiili sonsuzluk arasındaki farkın ne olduğunu, nasıl düşünülmesi gerektiğini örnekler ile açıklamışlarıdır. Burada, bu örneklerden, Achille ve kaplumbağa örneği ile “0.999…=1” eşitliğinde yaşanan zorluklar ile ilgili açıklamaları anlatılacaktır.

APOS teorisi bilişsel bir teori olup öğrenenin matematiksel kavramları anlamlandırırken oluşturduğu zihinsel yapıları tanımlamaktadır Dubinsky vd. (2005), Bu yapılar Eylem (**A**ction), Süreç (**P**rocess), Nesne (**O**bject) ve Şema (**S**chema) olarak tanımlamıştır. Bu zihinsel yapılar hiyerarşik bir düzen içindedir ve bir aşama olarak tanımlanabilir. Eylem ile başlayan aşama süreç, nesne ve şema ile devam eder. Öğrenen bu zihinsel yapıların oluşturulmasında yansıtıcı soyutlama yapar. APOS teorisi 5 farklı yansıtıcı soyutlama tanımlamıştır. Ancak burada yansıtıcı soyutlamalardan, içselleştirme (interiorized) ve kapsülleme (encapsulation) üzerinde durulacaktır. APOS’a göre kavramın oluşması var olan zihinsel veya fiziksel nesnelerin dönüştürülmesiyle başlar. Burada söz konusu zihinsel nesneler sayılar, fonksiyonlar olabilir. Bu ilk dönüştürme işlemi, eylem (action) olarak adlandırılmıştır. Bu aşamada öğrenen dışsal bir uyarana ihtiyaç duyar. Dışsal uyaranlar zihinsel ya da fiziksel olarak üretilmiş formül olabilir. Eylem ile başlayan bu zihinsel süreçte, öğrenenen eylemi tekrarlayarak ve eylem üzerinde yoğunlaşarak, eylemi içselleştirir ve sürece çevirir. Süreç aşamasında, öğrenenin dışsal uyarıcıya ihtiyacı yoktur ve adımlarını tek tek yapmak zorunda değildir. Öğrenen, adımları tek bir adımda da yapabilir. Süreç öğrenenin yaptığı bir dönüştürmedir ve dinamik yapıdadır. Süreç aşamasında olan öğrenen, bu dinamik yapıyı bir bütün olarak algılarsa ve üzerine eylem uygulayabilirse bunu kapsüllemiş olup, nesne seviyesine ulaşmış olur.

Şema ise eylem, süreç ve nesne olarak tanımlanan zihinsel yapıların uyumlu bir şekilde organize olmasıdır. Dubinsky vd. (2005), tanımlanan bu zihinsel yapılar ile potansiyel ve fiili sonsuzluğu anlamada bilişsel bir perspektif sunmuştur.

Dubinsky vd. (2005)'ne göre APOS bize potansiyel ve fiili sonsuzluk, ulaşılabilir ve ulaşılamaz kavramları arasındaki farkı anlamamıza yardım etmektedir. Potansiyel sonsuzluk devam eden bir süreç olarak tanımlanmıştır. Örneğin doğal sayılar kümesi yazılacak olursa, bu küme 1, 2, 3… şeklinde devam eder. Sayma süreci ilk birkaç adımın başlamasıyla oluşur. Dubinsky vd. (2005), bu süreçte sayma için yapılan her adımın bir eylemi ifade edeceğini belirtmiştir. Bu adımlar sonsuz tekrar edilerek (sürekli 1 ekleyerek devam etme) sayma eylemi içselleştirilir ve böylece sürece dönüşür. Fiili sonsuzluk ise sürecin kapsüllenmesi (encapsulation) ile elde edilen zihinsel bir nesnedir. Bu aşamada sonsuzluk bir bütün olarak düşünülebilir ve zihinsel bir nesne haline gelir. Dubinsky vd. (2005), "kapsülleme" sonucunda sonsuzluğun bilişsel olarak ulaşılabilir olduğunu ifade etmiştir. Yani dinamik yapıda olan potansiyel sonsuzluk statik yapı haline gelmiştir ve üzerine eylem uygulanabilen bir sonsuzluk söz konusudur. Diğer yandan birde ulaşılamayan sonsuzluk vardır. Bu sonsuzluk süreç formunda olup, kapsüllenmemiş bir sonsuzluk örneğidir. Bu durum, sürecin henüz bir bütün olarak algılanmamasından olabilir. Bunun nedeni ise ya süreç bir bütün olarak görülemiyor ya da hala kapsülleme işlemini yapılmamış olmasıdır.

Dubinsky vd. (2005), yapmış oldukları APOS analizinde, birey sonsuz bir sürecin tüm adımlarını, tüm işlemleri yürütülmüş ve bitmiş şekilde, zamanda son hali var olan tek bir işlem gibi görebiliyorsa, bu bireyin sonsuzu bir bütün olarak düşünebildiğini gösterdiğini ifade etmiştir. Bu süreç kapsüllendiğinde, potansiyellik kavramı, üzerine eylem uygulanabilen matematiksel bir birim olan fiili sonsuzluğa dönüşmektedir. Böylece bir kavramın varlığı diğer kavramın varlığını çürütmeyeceğini ve uyuşmazlık olmayacağını vurgulamışlardır. Böylece potansiyel ve fiili sonsuzluk kavramları, zihinsel yapıların kapsüllenmesi ile ilişkili olan farklı iki bilişsel kavramı temsil eden kavramlar olacaktır. Bu kavramlar ve kavramlar arasındaki ilişki bireyin sonsuzluk şemasının bir parçasıdır.

Diğer yandan Dubinsky vd. (2005), sonsuzluk ile ilgili bazı paradoksların üzerinde durmuştur. Bu paradokslardan bir tanesi sonsuz tekrarlayan adımlar (infinity iterative process) paradoksudur. Dubinsky vd. (2005), APOS teorisini kullanarak Zeno paradoksu örneğini ve sonsuz sayıda tenis topu örnekleri üzerinden bu paradokslara yönelik çözüm önerileri sunmuştur. Burada da Zeno paradoksu olarak adlandırılan Achille ve kaplumbağa örneği verilecektir. APOS teorisinin Zeno paradoksuna getirdiği çözümün temelinde potansiyel sonsuzluk ve fiili sonsuzluğun ayrımını yapılması yer almaktadır. Zeno paradoksunda Achille, önünde hareketli olan kaplumbağaya yetişmeye çalışmaktadır. Achille aradaki farkı kapatmaya çalışırken, kaplumbağa biraz daha ileri gitmektedir. Söz konusu eylemler gerçekleşirken, iki tane süreç ortaya çıkmaktadır. Bu süreçlerden bir tanesi, Achille'nin kaplumbağaya yetişmek için ilerlemesidir. Bu süreç tekrar eden adımları içerir ve devam eden bir süreçtir. Diğer yandan kaplumbağanın aradaki farkı koruması için ilerlemesi de tekrarlama hareketini içerir ve devam eden bir süreçtir. İki durumda da ilerlemek için yapılan tekrarlama hareketi sonsuza kadar devam eder. Bu durumda paradoks, "*İki süreç asla sonlanmayacağı için, tamamlanamayacak ve Achille kaplumbağayı yakalamayacağı*" düşüncesini içeriyordu. Achille'in ve kaplumbağanın küçük sayıda tekrarlama hareketi bir eylemi içerir. Achille'nin aradaki farkı kapatması, kaplumbağanın farkı açması bir eylem olarak düşünülebilir. Birey bu eylemin, bir ya birkaç kez ard arda gerçekleşmesini düşünebilir. Fakat bir noktada bu mümkün değildir çünkü her tekrar, bariz bir şekilde kesintisiz olduğu düşünülmelidir. Bu nedenle, bireyin sadece bu eylemi içselleştirmesi (interiorizing), bireyin eylemin sonsuza kadar tekrarlanmasını hayal etmesini (image) sağlar. Bu ise bizi potansiyel sonsuzluğa götürür.

APOS teorisine göre, birey zihninde bir süreci yapılandırdığında ve bu sürecin üzerine bir eylem uygulamak istediğinde, kapsülleme işlemi devreye girer (Dubinsky vd. 2005). Kapsülleme işlemi, sürecin nesneye dönüştürülmesini içerir böylece istenilen eylem uygulanılabilir. Verilen sonsuz bir süreçte, içselleştirme ve kapsülleme zihinsel yapıları, bireyin süreç tamamlandıktan sonra olacakları nasıl düşünebileceğini tanımlar. Birey sonsuz sayıdaki adımı fiili olarak asla yapamayacağından dolayı, bireyin bu yapıları, bütün adımları yapmak için değil, adımların sonlu mu sonsuz mu olduğunu belirlemek için kullanacağını düşünür.

Achille ve kaplumbağa örneğine tekrar dönülecek olursa, burada Achillein aradaki farkı kapatmaya çalışması ve kaplumbağanın biraz daha ileri gitmesi şeklinde iki süreç vardır. Bu süreç yapıları, bize sonsuza kadar devam eden bu durumu nasıl hayal edebileceğimizi açıklar. Achille'nin ilerleme süreci ile kaplumbağanın ilerleme süreci eş güdümlü olur ve sonuç olarak sonsuz süreç kapsüllenmiş olur. Böylece Achille ve kaplumbağanın oluşturduğu uzaklıklar arasında karşılaştırma eylemi yapılabilir. Böylece, söz konusu bilişsel anlama ile birey, kaplumbağanın kapattığı, Achille'in açarak koruduğu toplam mesafeyi sınırlı bir zamanda hesaplayabilir ve görebilir.

Dubinsky vd. (2005), sonsuzluk ile ilgili doğal sayıların oluşturulması, "0.999…=1" eşitliği ve sonsuz küçükler gibi matematiksel problemler üzerinde durmuştur. Bu zorluklar ve eşitliğin anlaşılmasına yönelik Apos teorisi bazı açıklamalar sunmuştur. Bu bağlamda, burada "0.999…=1" eşitliği ile ilgili düşünceleri neler olduğu anlatılmaya çalışılacaktır. Eşitliği anlamada yaşanılan zorluklardan bir tanesi öğrencinin "0.999…" sayısını devam eden bir süreç olarak düşünüp, 1 sayısını ise nesne olarak görmesidir. Bu iki kavram arasındaki fark, süreçte bireyin yapmaya devam ettiği bir şey söz konusudur, nesne ise var olan bir şeydir ve üzerine eylem uygulanılabilir durumdadır. "0.999…" sayısını süreç olarak gören bir kişi, sürecin devam etmesiyle sonunda 1 sayının direk olarak oluşmadığını düşünebilir. Fakat süreç kapsüllenmeden, sonsuz ondalık sayılardaki "değer" kavramı anlamsız olmaktadır. Bu nedenle birey süreci bir bütün (totality) olarak görebilir ve .9, .99, .999,… *serisi üzerinde değerlendirme eylemini* (evaluation on the sequence) yapabilirse, bireyin kapsüllenen sürecin bir nesne olduğunu kavraması mümkündür. Kapsüllenme işlemi sonucunda "0.999…" sayısı artık 1'e eşittir, çünkü "0.999…" sayısı bir nesne olarak düşünülmektedir. Bu noktada iki farklı statik nesnenin karşılaştırılması söz konusudur. Bu nesneler 1 sayısı ve sürecin kapsüllenmesi ile elde edilen diğer nesnedir. Birey , "0.999…" sayısını ve 1 sayısını artık mutlak değerleri farklı olan iki sayı olarak düşünebilecek durumdadır.

APOS'un öğrencilerin söz konusu eşitlikle ilgiliği yaşadığı zorluklara yönelik bir diğer açıklaması ise öğrencinin "0.999…" sayısını bir süreç olarak göremiyor olmasıdır.

Burada öğrenci sürecin sonsuz adımdan oluştuğunu düşünememektedir. Örneğin öğrenci "999…" sayısını sınırlı sayıda "9" rakamını içeren fakat uzunluğu belirsiz olan bir sayı olarak algılamaktadır.

Dubinsky vd. (2005), APOS teorisi ile "0.999…=1" eşitliğinde yaşanan zorluklar ve çözüm önerilerini açıklarken, süreç ve nesne aşamaları çerçevesinde ele almışlardır. Ancak daha sonra yapmış oldukları bir çalışmada (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros ve Weller, 2014) süreç ile nesne arasında bir aşama daha olabileceğini ifade etmişlerdir. Bütünlük aşaması olarak tanımlanan bu aşamada, birey "0999…" sayısının bir bütün olarak görebilmektedir. Yani birey 9 sayılarının hepsini bir anda mevcut olduğunu görebilir veya hayal edebilmektedir. Ancak birey "0999…" sayısı üzerine eylem uygulayamamaktadır. Bu nedenle bu aşamada olan bir kişinin, süreç aşamasından daha iyi bir seviyede olup, nesne aşamasına ulaşamadığını ifade etmişlerdir. Bu bir örnekle şu şekilde açıklanmıştır. Öğrencilerden Natasha'nın bütün aşamasında olduğu düşünülmektedir. Natasha'nın bütünlük aşamasında olduğunu gösteren ifadesi şu şekildedir;

Natasha: Eğer sonsuza kadar giderseniz, sonsuzun sonunda, 0,9 tam bir şey olur. (it would be the whole thing) (ss: 143.).

Natasha, süreç aşamasından daha iyi algıya sahip olup, 0.9 sayısını bir bütün olarak düşünebilmektedir. Fakat yapılan çalışmada, Natasha'ya $\bar{9}$ + X= 1 eşitliği verilerek, X yerine koyulabilecek sayılar sorulduğunda verdiği cevap şöyledir:

"Oradaki sayının 0.01 gibi bir sayı olabileceğini düşünmüyorum, çünkü bu sonlu olduğunu gösterir. Fakat 9 sayısı asla sonlanmaz, bu durumda sıfır neden sonlansın? Sıfırların sonunda 1 olduğunu düşün ya da 1 'de sonmuş gibi düşün ve sıfırlar devam ediyor, 1 sayısı öteleniyormuş gibi çünkü sıfırlar sonsuza kadar gider. "

Arnon vd. (2014), bu cevabın Natasha'nın nesne aşamasına ulaşamadığını, bütünlük (totality) olarak tanımlanan aşamada olduğunu gösterdiğini ifade etmişlerdir.

Sonuç olarak, Arnon, vd. (2014), zihinsel süreçlerde yeni bir aşama olabileceği ihtimalleri üzerine durmuşlardır ve bütünlük (totality) olarak tanımlanan bu aşama ile ilgili kesin bir sonuç olmadığını, üzerine hala çalışılmaya devam edildiğini ifade etmişlerdir.

Dubinsky vd. (2005), yapmış oldukları çalışmada sonsuz süreçleri bütün olarak nasıl düşünülebileceğini ve sonsuz süreçler ile nesne arasındaki bilişsel bağı tanımlamaya çalışmışlardır. Bunun için APOS teorisini kullanarak, içselleştirme ve kapsülleme zihinsel yapıların nasıl oluşturulabileceğini açıklamışlardır. Benzer şekilde Apos teorisi ile diğer matematiksel kavramları anlamaya yönelik çalışmaları da devam etmektedir.

2.4. İlgili Araştırmalar

Sonsuzluk kavramı ile ilgili alan yazın incelendiğinde daha çok farklı yaş gruplarındaki öğrencilerin sonsuzluk algılarını ortaya çıkarmaya yönelik çalışmalar yapıldığı görülmektedir. Araştırmanın bu bölümde de bu çalışmalara yer verilecektir. Bu bağlamda sonsuzluk ile ilgili yapılan çalışmalar sonsuzluk sezgisi, sonsuzluk algısı, sonsuz sayılar ve sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili olmak üzere dört başlık altında toplanmıştır.

2.4.1. Sonsuzluk sezgisi üzerine yapılan araştırmalar

Sonsuzluk sezgisine yönelik yapılan çalışmalar sonsuzluk düşüncesinin öğrencilerde, formal öğrenimlerine başlamadan önce sezgisel olarak var olduğunu söylemektedir (Fischbein vd. 1979; Singer ve Voica, 2007). Bu sonsuzluk sezgisi, Fischbein (1987) tarafından tanımlanan sezgilerden daha çok birincil sezgiler ile ilgili olup, yapılan çalışmalarda da daha çok sonsuzluk kavramı ile ilgili birincil sezgiler üzerinde durulmuştur (Singer ve Voica, 2007; Tsamir, 2001).

Fischbein vd. (1979), yapmış oldukları çalışmada, sonsuzluk ile ilgili sezgisel notasyonları üzerinde durmuşlardır. Fiili sonsuzluğu bir düşünme süreci olarak algılayıp, doğasında var olan tutarsızlıkları ve çelişkiler ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Bunun yanı sıra çalışmada, sonsuzluk kavramını içeren problemlerin çözümünde bazı şekilsel içeriklerin (figural context) etkisi incelenmiş ve öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili düşüncelerinde yaşın, sahip oldukları matematiksel bilginin ve öğrencilerin okul başarısının etkisi olup olmadığını bakılmıştır. Çalışma, 5. (46), 6. (58), 7. (152), 8. (104) ve 9.(110) sınıftan olmak üzere toplam 470 öğrenci ile yapılmıştır. Öğrencilere 10 sorudan oluşan bir test uygulanmıştır. Test sonsuz kardinal, limit ve parçaların bölünebilirliği ile ilgili sorulardan oluşmaktadır. Öğrencilerin cevapları sorulan soru bağlamında oluşturulan kategorilere göre değerlendirilmiştir.

Çalışma sonucunda, öğrencilerdeki sonsuz kavramının sezgisel bir düşünce olduğunu ve öğrencilerin cevaplarının genellikle tesadüfi olduğu ifade edilmiştir. Örneğin doğru parçasının bölünebilirliği ile ilgili soruda öğrencilerin %40'ı doğru parçasını sonsuza kadar bölünebileceğini söylemiştir. Diğer yandan "*bir üçgenin sürekli kenarlarının orta noktalarını alarak bir üçgen elde ettiğimizde bu işlemin sonu nereye gider?*" gibi bir soruda ise bütün yaş grupları üçgende bölme işleminin sonlu olacağını söylemişlerdir. Ayrıca öğrencilerin cevaplarının sahip oldukları matematiksel bilgi ile etkisi varken, aldıkları matematik eğitiminin tek başına bulguları açıklayamadığı sonucuna ulaşılmıştır. Düzenli matematik eğitimi öğrencilerin sonsuzlukla ilgili formal ve yüzeysel bilgilerini etkilediği fakat sezgisel bilgilerini etkilemediği görülmüştür. Diğer yandan doğal sayılar ve çift doğal sayıların karşılaştırılması ile ilgili sorulardan elde edilen bulgular doğrultusunda öğrencilerin sayılar sezgisinin varsayılan(conjectural) ve bağlamsal(contextual) etkilere göre değişken olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Öğrencilerin sonsuzluk sezgilerini yaşa göre incelendiğinde, 12-13 yaşında öğrencilerin sonsuzluk sezgisinin sabitleşmeye başladığı gözlemlenmiştir. Bununla birlikte sonsuzluk sezgisinin gelişimi sadece 11-12 yaş arasında bir takım sorular ile sezdirilebileceği belirtilmiştir. Fischbein vd. (1979), 12 yaşındaki öğrencilerin sonsuzluk sezgilerinin sabit olduğunu söylerken, Jirotka ve Litter (2004), öğrencilere sorulan soruların içeriği değiştikçe öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgilerinin sabit olmadığını belirtmiştir.

Fischbein (1987)' in belirttiği birincil ve ikincil sezgilerinin yeterli olmadığını ifade eden Tsamir ise üçüncü bir sezgi tanımlanabileceğini ileri sürmüştür. Tsamir (2001) yaptığı çalışmada, kantor teorisi alan ve kursa katılan öğretmen adayları ile fiili sonsuzluk ile ilgili Fischbein (1987), tarafından tanımlanan birincil sezgiler üzerinde durmuştur. Öğretmen adaylarına 5 sorudan oluşan farklı argümanlar vererek, öğretmen adaylarından argümanlar üzerinde yorum yapmaları istenmiştir. Öğretmen adayları ile daha sonra görüşme yapılmıştır. Öğretmen adaylarının birincil sezgilerinin, herhangi bir ders almayan öğrenciler ile benzer olduğu gözlemlenmiştir. Tsamir, öğretmen adayları ile yaptığı görüşmeler sonucunda, öğretmen adaylarının "kesinlikle," "açıkca" ve "elbette" gibi kelimeler kullandığını, bu kelimelerin bir özgüven göstergesi olduğunu ifade etmiştir. Tsamir'e göre öğretmen adayları, verdikleri cevaplar ile yeni bir sezginin varlığını ortaya koyuyordu. Fakat bu sezgiler gelişen birincil sezgi ile formal bilginin kazanılması sonucu oluşan ikincil sezgiler tanımına uygun değildi. Bu sezgilerin, "geçici sezgiler (transitory intuition)" olarak düşünülebileceğini ve üçüncü bir sezgi tanımı yapılabileceğini söylemiştir. Bu sezgiler, birincil ve ikincil sezgilerin karışımı olup, öğrenene dışarıdan bir müdahale yapıldığı zaman ortaya çıktığını ifade etmiştir. Yani öğrenenin tecrübesinin bir parçası olan, birincil sezgilerin tamamen değiştirilmeden, bilgilerine yeni bilgiler eklemesi ile oluşan sezgilerdir. Tsamir, bu sezgilerin, ikincil sezgilerin sezgisel doğasına sahip olup, formal algısına (formal perception) sahip olmadığını söylemiştir.

Sonsuzluk sezgisi üzerine çalışan Singer ve Voica (2003), 10-14 yaş çocukların sonsuzluğu kavramı ile ilgili sezgilerini incelemiştir. Bu bağlamda çocuklara sonsuz kümeler ile ilgili sorular sorulmuştur. Çalışma sonucunda, 11 yaşındaki çocukların, en büyük doğal sayının olmadığını söyleyebildiklerini görülmüştür. Bununla beraber çocukların sonsuz bir kümenin neden sonsuz olduğunu "*N sonsuzdur çünkü en büyük sayıyı yazamayız. Aynı şekilde (2,3) arasındaki bütün ondalık sayıları yazamayız. Bu yüzden küme sonsuzdur*." gibi argümanlar ile açıklayabildikleri görülmüştür. 5.sınıf öğrencilerine farklı kümelerin karşılaştırılması sorulduğunda, öğrencilerin kümeler arasındaki ilişkiyi açıklayan kurallar buldukları ve farklı yöntemler ile sayılabilir sonsuzluğu ele aldıkları gözlemlenmiştir. Öğrencilerin sezgilerini, bilgileri ile birleştirdikleri tespit edilmiştir. Singer ve Voica, bu sonuçlar doğrultusunda 10 yaşındaki çocuklarda sonsuzluk sezgisinin önceden çocukta var olduğu ve yapılan konuşmalar ile bu sezginin ortaya çıkarılabileceği ifade etmişlerdir. Bununla ilgili olarak Singer (2002), çocuklarda var olan bu sezginin tanımlanması ve eğitimde kullanılması öğrencilerin sayı işlemlerini ve sayılabilir (numerical) kümelerin derinlemesine öğrenilebilmesini sağlayabileceğini söylemiştir.

Singer ve Voica (2007) daha sonra yapmış oldukları başka bir çalışmada öğrencilerde formal bilgi çerçevesinde sonsuzluk sezgisi ile ilgilenildiğinde ne gibi yapılar oluştuğu incelemişlerdir. Singer ve Voica, 6-8 yaşlarındaki bir çocuğun sonsuzluk kavramı ile ilgili birincil sezgilerin yeteri kadar güçlü olduğunu ve öğrencilerin bu sezgiye bağlı olarak sonsuz doğal sayılar kümesi ile ilgili argüman oluşturabileceğini belirtmiştir.

Öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgisel algıları üzerine yapılan çalışmaların çoğu göstermektedir ki çocuklar formal öğrenim öncesi ve sonrası sonsuzluk kavramı ile ilgili bazı düşüncelere sahiptir. Bu düşünceler formal öğrenime başlamadan önce sezgisel ağırlıktadır ve bu sezgiler formal eğitim ile birlikte çok fazla değişmemektedir. Daha büyük bir yaş gurubu olarak lise ve üniversite öğrencileri ile çalışan Güven ve Karataş (2004), çalışmasında öğrencilerin, sezgisel olarak sonlu kümeleri sonsuz kümelerden ayırt edebildiklerini ancak sonsuz kümeler için matematiksel bir tanımı yapamadıkları gözlemlemiştir. Öğrencilerde, sonsuz küme kavramının kavramsal bir formda gelişmediği, öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgisel yapılara sahip oldukları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerde, sayılabilirlik ve sayılamazlık kavramlarının tam olarak gelişmediği, öğrencilerin bu kavramları birbirlerinin yerine kullanmaya yöneldikleri sonucuna ulaşılmıştır. Benzer bir çalışmada Mamolo (2009) tarafından üniversite öğrencileri ile yapılmıştır. Mamolo, öğrencilerin sezgisel olarak, sonsuzluk kavramını tamamlanmış bir nesneden (object) ziyade daha çok tükenmeyen bir süreç olarak algıladıklarını ve düşüncelerinde tutarsız olduklarını belirtmiştir.

Sonsuzluk sezgisinin farklı yaş gruplarında incelenmesi ile ilgili Singer ve Voica (2003), sonsuzluk sezgisinin derinliği ile yaş arasında ilişki olmadığı ifade ederek, hangi yaşta olursa olsun sonsuzluk kavramı ile ilgili düşüncelerin formal bilgi ile birleşmesi sonucunda hatalı düşünceler ve kavram yanılgıları olabileceğini ifade etmiştir. Bu durumdan hareketle, sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgisel düşüncelerin yaşa ve eğitime çok bağlı olmadığını söyleyebiliriz.

2.4.2. Sonsuzluk algısı üzerine yapılan araştırmalar

İlgili literatür incelendiğinde ilköğretim ve üniversite öğrenciler ile öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramı ile ilgili algılarını ortaya çıkarmaya yönelik yapılan çalışmalar bulunmaktadır (Aztekin, 2008; Çelik ve Akşan, 2013; Hauchart ve Rouche, 1987; Jirotkova ve Litter, 2003, 2004; Kolar ve Cadez, 2012; Monaghan, 1986; Maria, Thanasia ve Katerina, 2009; Nunez, 1993; Sbaragalı, 2006; Pehkonen, Hannula, Maijala ve Soro, 2006; Singer ve Voica, 2007, 2008). Araştırmanın bu bölümde söz konusu çalışmalar sunulacaktır.

Öğrencilerin sonsuzluğu bir süreç olarak algıladığını belirten çalışmalar mevcuttur. Bu bağlamda Monaghan (1986), 16-18 yaş öğrencilerinin sonsuzluk ve limit ile ilgili kavram algılarını incelemiş, öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili algılarının tutarsız ve değişken olduğunu tespit etmiştir. Monaghan, sonsuzluk kavramını süreç ve nesne olan sonsuzluk ve sayı sonsuzluğu olarak ele almıştır. Öğrencilerin genel olarak sonsuzluk ile ilgili ilk düşüncelerinin, sonsuzluğu devam eden bir süreç olarak algıladıkları yönündedir. Sonsuzluğu süreç olarak düşünen öğrenciler sonsuzluk kavramı ile ilgili sorulan sorulara; "*Bu gidiyor ve gidiyor. Bu sonsuzluktur*." gibi cevaplar vermiştir. Öğrencilere göre sonsuzluk bir nesne (thing) değildir ama devam eden bir eylem olduğu sonucuna ulaşılmıştır. İlköğretim öğretmenleri ile benzer bir çalışma yapan Maria, Thanasia ve Katerina (2009), öğretmenlerin sonsuzluk kavramı ile ilgili algılarını süreç (process) ve nesne (object) şeklinde ele alarak incelemiştir. Öğretmenlerin çoğunun sonsuzluk kavramını devamlılık ve sonlanmayan bir süreç olarak algıladığını, sadece bir kısmının nesne olarak algıladığı sonucuna ulaşılmıştır.

Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili algılarına potansiyel sonsuzluk ve fiili sonsuzluk boyutunda inceleyen araştırmalar bulunmaktadır. 12-18 yaş öğrencilerinin sonsuzluk algılarını inceleyen Hauchart ve Rouche (1987), bu yaştaki öğrencilerin fiili sonsuzluk kavramına sahip olmadığını, bu kavramın limit kavramı ile ilgili olduğunu söylemiştir. Bir başka çalışmada Nunez (1993), 9-14 yaş öğrencilerinin, sonsuz süreçlerle ilgili algılarını ve zihinsel olarak yapılandırma süreçlerini incelmiştir. Nunez öğrencilerin fiili sonsuzluk ile ilgili düşüncelerinin olmadığını, yorumlarının potansiyel sonsuzluk yani süreç olan sonsuzluk ile ilgili olduğunu ifade etmiştir. Nunez bu sonucun nedenini, çocuklarda fiili sonsuzluk ile ilgili kavram yapılarının 15 yaş öncesinde oluşmadığı şeklinde yorumlamıştır.

Aztekin'in (2008) , doktora ve ilköğretim öğrencileri ile yapmış olduğu çalışmada bu sonucu destekler niteliktedir. Aztekin (2008), öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili bilişsel seviyelerinin ve yapılarını ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Çalışma 4 doktora öğrencisi ve 6 ilköğretim öğrencisi (10-13 yaş) olmak üzere toplam 10 öğrenci ile yapılmıştır. Küme teorisi dersi alan doktora öğrencileri ile görüşme yapılmış ve dersler boyunca gözlem yapılmıştır. İlköğretim öğrencilerine ise çizgi filmlerinin "sonsuzluk" kavramının kullanıldığı sahneler kullanılarak kısa filimler ve sayı kümeleri ile ilgili etkinlikler hazırlanmıştır. Çalışma sonucunda, öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili "bitmeyen büyüklük", "bitmeyen süreç" ve "sonsuz bir kavramdır" gibi benzer anlayışlara sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Doktora öğrenciler ile ilköğretim öğrencileri arasında sonsuzluk kavramı ile ilgili anlayışlarında çok büyük fark olmadığını söylemiştir. Bununla birlikte doktora öğrencilerin başlangıçta sonsuzluk ile ilgili anlayışlarının daha çok potansiyel sonsuzluk anlayışı olduğunu ancak küme teorisi derslerinin öğrencileri fiili sonsuzluğa yönlendirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Aztekin (2008), öğrencilerin fiili sonsuzluk düşünceleri gelişmesine rağmen biraz da olsa potansiyel sonsuzluk anlayışını koruduklarını gözlemlemiştir. Bunun yanı sıra ilköğretim öğrencilerinde de potansiyel sonsuzluk gibi anlayışlarının olduğu fakat anlayışlarının ileriki yaşlarda görülen potansiyel sonsuzluk anlayışının olmadığını sonucuna ulaşılmıştır.

Singer ve Voica (2007, 2008), öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili algılarını topolojik, işlemsel ve dinsel-düşünsel algı olmak üzere üçe ayırmıştır. Fischbein (1987)'in potansiyel/dinamik sonsuzluk olarak tanımladığı, devam eden sonsuzluğu tanımlayan öğrenci cevaplarını işlemsel algı, öğrencilerin rastgele verdiği sezgisel cevapları topolojik algı ve öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili duygu, hislerini ifade eden öğrenci cevaplarını da dinsel-düşünsel (spiritual) algı olarak tanımlamıştır. Singer ve Voica (2007), 10-11 yaş öğrencileri ile yaptığı çalışmada, okul kapsamında öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgileri üzerine konuşulduğunda öğrencilerde nasıl yapıların ortaya çıktığını ve bu yapılar oluşturulabilir mi gibi sorularının cevabı aramıştır. Öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili yapılarının topolojik ve işlemsel algı boyut arasında bir yerlerde kesiştiği sonucuna ulaşmıştır. Öğrencilerin sorulara verdiği cevaplar doğrultusunda küçük yaştaki öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili bazı temsili yapılara sahip olduğu ve bu yapıların ilkokulda doğal sayıları öğrendikten sonra geliştiğini tespit etmiştir. Ayrıca Singer ve Voica, 10-11 yaşındaki öğrencilerin ondalık sayıları öğrenmesi, sonsuzluk kavramı ile ilgili yapılan tartışmalarda öğrencilere kardinal eşitliği ima etmesinde yardımcı olduğunu belirmiştir.

Singer ve Voica (2008), tarafından yapılan bir diğer çalışmada ise öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili birincil ve ikincil algıları incelenmiştir. Çalışmaya 6-19 yaş arası öğrenciler, üniversite öğrencileri ve öğretmen adayları olmak üzere toplam 262 kişi katılmıştır. 6-8 yaş arasında çocuklarda birincil algıların daha güçlü ortaya çıktığı sonucuna ulaşılmıştır. Çocuklar ile sonsuzluk üzerine konuşulmuş ve verdikleri cevaplardan çocukların birincil algıları işlemsel, topolojik ve dinsel-düşünsel (spiritual) olmak üzere üç şekilde ele alınmıştır. İşlemsel algıya bağlı olarak, çocukların doğal sayıların sonsuz olduğunu söylebildiği ve doğal sayılardan rasyonel sayılara transfer yaparak rasyonel sayılar ile ilgili soyut argümanlar oluşturabildiği gözlemlenmiştir. Singer ve Voica, çocukların ikincil algılarının ise, doğal sayılardaki sonsuz kümeleri geliştirmeye yönelik eğilimlerinde ve doğal sayıların sonsuzluğunu ispatlamaya çalışırkenki yetenekleri ile ortaya çıktığını ileri sürmüştür. Araştırmada, çocukların sonsuzluk algılarının okul yıllarında değiştiği ve çocuklardaki sonsuzluk algısında işlemsel algıdan topolojik algıya doğru bir gelişim olduğu gözlemlenmiştir. Fakat 11-13 yaşları öncesinden ve sonrasında, işlemsel algı ve topolojik algı birbirinden çok ayırt edilememekte, genellikle beraber ortaya çıktığı ve çocuklar ile yapılan soruların bağlama göre bir birlerine üstünlük sağladığı tespit edilmiştir.

Öğrencilerin sonsuzluk algıları ile ilgili bir başka bulgu ise öğrenciler genellikle birden fazla sonsuzluk var olduğunu düşünmesidir ve bu sonsuzlukların farklı niteliklerde olduğu düşünmeleridir. Jirotka ve Litter (2003), tarafından yapılan pilot çalışmada 72 üniversite öğrencisinin sonsuzluk kavramını nasıl algıladıkları incelenmiştir. Bu bağlamda öğrencilere doğru parçası üzerinden sonsuzluk ile ilgili sorular sorulmuştur. Öğrencilerin fiili sonsuzluk ve potansiyel sonsuzluk arasındaki farkı bilip bilmediklerini ortaya çıkarmanın zor olduğunu, sonsuzluk (infinity) ve son derece (infinetly) kelimelerini aynı durum içinde kullandıklarını ve iki kelime arasındaki gerçek farkı bilmediklerini tespit edilmiştir. Doğru parçası ile ilgili sorularda öğrenciler, iki tane sonsuzluk var olduğunu söylemiştir. Öğrencilere göre bu sonsuzlukların farklı niteliklerdedir ve sonsuzluklardan biri doğru parçasının başını diğerinin ise doğru parçasının sonunu temsil etmektedir. Öğrencilere doğru parçası sonsuza kadar gidiyor denildiğinde ise öğrencilerin sonsuzluğu bir "yön" olarak, doğru parçasını da sonsuzluk yönünde olan "işaret tabelası" olarak ifade ettikleri görülmüştür. Bunun yanı sıra bir başka soruda öğrenciler sonsuzluk kavramını "yer" olarak tanımlamıştır.

Jirotka ve Litter (2004), daha sonra yaptığı başka bir çalışmada 11-15 yaş çek ve ingiliz öğrencilerin sonsuzluk kavramı üzerine düşünürken, zihinlerinde oluşan mental süreçleri tanımlamaya çalışmıştır. Bu bağlamda daha önce yaptıkları pilot çalışmada (Jirotkova ve Litter, 2003) üniversite öğrencilerinin verdiği cevaplardan oluşan 7 tane farklı içerikli sorular hazırlanmış ve öğrencilere sorulmuştur. Bu sorulardan bazıları iki kişinin konuşması şeklinde olup, öğrenciye konuşmadaki ifadelerin doğru olup olmadığı sorulmuştur. Bu noktada öğrencilerin sorulara verdikleri cevaplar ile ifade ettikleri düşünceleri arasında uyuşmazlık olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Örneğin "*Bir doğru parçası iki sonsuzluğa sahiptir. Eğer bir yöne gidersem sonsuzluğa ulaşırım, karşı yöne gidersem yine sonsuzluğa ulaşırım*." Argümanını doğru kabul eden bir öğrenci bir başka soruda, "*Herhangi bir yöne gittiğim zaman sonsuzluğa ulaşırım… çünkü bir doğru parçası sonsuzluğa gider*." şeklinde bir ifade yazmıştır. Buradan Jirotkova ve Litter, öğrencilerin sonsuzluk hakkındaki düşünceleri net olmadığını söylemiştir. Ayrıca öğrencileinr sonsuzluğu asla sonlanmayan bir süreç (potansiyel sonsuzluk) olarak düşündüklerinde daha mutlu oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

İlköğretim öğretmenleri ve öğretmen adayları ile yapılan çalışmalarda öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının sonsuzluğu sonu olmayan, bitmeyen şeklinde tanımladıkları görülmektedir. Bu bağlamda Sbaraglı (2006), tarafında yapılan çalışmada, 16 ilköğretim öğretmenin matematiksel sonsuzluk ile ilgili anlayışları incelenmiştir. Öğretmenlere sonsuzluğun tanımı, farklı uzunlukta verilen doğru parçalarındaki nokta sayılarının karşılaştırılması ve sayılar ile ilgili sorulardan oluşan 11 soru sorulmuştur. Öğretmenler sonsuzluğu belirsizlik, sınırsızlık ve çok büyük sayı olarak tanımlamışlardır. Benzer şekilde ilköğretim matematik öğretmenliği programına devam eden 83 öğretmen adayı ile çalışan Çelik ve Akşan (2013), yapmış oldukları çalışmada, öğretmen adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramları ile ilgili anlamlarını araştırmıştır. Öğretmen adaylarından, bu kavramların tanımlamamaları istenmiştir. Ayrıca kavramları sembolik olarak temsil eden dokuz durum ($\infty+\infty$,1^∞, $\infty-\infty$,…) verilmiş ve bu gösterimlerin/formların kendileri için ne anlam ifade ettiğini nedenleri ile birlikte açıklamaları istenmiştir.

Çelik ve Akşan (2013), öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramını doğru bir şekilde açıklamada başarılı olamadıkları sonucuna ulaşmıştır. Sonsuzluk kavramının genellikle sonu olmayan, çok büyük ve sınırsız kavramları ile tanımlandığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramı ile ilgili anlamlarının günlük yaşam deneyimlerinden şekillendirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Bununla birlikte sembolik temsil ile sorulan sorularda öğrencilerin, sonsuzu sayı olarak algıladıkları ve sayılar için geçerli olan kuralları (0 ile bir sayının çarpımının sıfır olması gibi) kullanarak soruları cevapladıkları görülmüştür.

Söz konusu çalışmalar sonucunda farklı yaş gruplarındaki öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili algılarının tutarsız olduğu ve yaş ilerledikçe geliştiği görülmektedir. Daha önce yapılan çalışmalar ışığı altında öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgisel algılarının yaşa göre değişmediğini fakat formal sonsuzluk kavramı ile ilgili algılarının değişebileceği söyleyebiliriz. Bu noktada öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili matematiksel algılarının geliştiğine dair çalışmalar bulunmaktadır.

Buna örnek olarak Pehkonen, Hannula, Maijala ve Soro (2006), tarafından yapılan çalışmada 5. ve 7. sınıf öğrencilerinin sonsuzluk algılarının ve bu algının 5.sınıftan 7.sınıfa nasıl değiştiği üzerinde durulmuştur. Pehkonen vd., matematiksel nesnelerde farklı sonsuzlukları tartıştığımızı söylemiştir. Örneğin doğal sayılar sonsuz elemana sahiptir ve üst sınırı yoktur. Diğer yandan doğal sayıların herhangi bir alt kümesi ise sınırlıdır. Rasyonel sayılar ise sonsuz elamana sahiptir. İki rasyonel sayı arasında sonsuz miktarda eleman vardır ama sınırlıdır. Rasyonel sayıların bu özelliği yoğunluk (density) olarak açıklanmaktadır ve doğal sayıların herhangi bir kümesi yoğun değildir. Bu bağlamda bu çalışmada, öğrencilere sonsuzluk kavramı ile ilgili sonsuzluk büyüklük, sonsuz çokluk ve sonsuz yakınlık ile ilgili 3 soru sorulmuştur. Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili düşüncelerinde birçoğunun doğru bakış açısına sahip olmadığı, fakat yaş ilerledikçe düşüncelerinin geliştiği sonucuna ulaşılmıştır.

Kolar ve Cadez (2012), tarafından yapılan benzer bir çalışmada ise üniversite öğrencilerinin (93) sonsuzluk kavramı ile ilgili algıların incelenmiştir. Öğrencilerin sonlu ve sonsuz kümeleri nasıl tanımladıkları, sonsuz kümeler ilgili hangi tanımların öğrenciler için zor olduğu, öğrencilerin sonsuz büyüklük, sonsuz çokluk ve sonsuz yakınlık gibi sonsuzluk kavramlarını nasıl algıladıkları araştırılmıştır. Bununla birlikte öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili problemleri çözerken aritmetik ve geometrik bağlamdan nasıl etkilendikleri ve öğrenciler problem çözümlerini fiili ve potansiyel sonsuzluk kavramlarından hangisiyle açıkladıkları incelenmiştir. Bu bağlamda öğrencilere, sonsuz ve sonlu kümeler ile ilgili bazı tanım yapmalarını gerektiren sorular ve “sonsuz büyüklük”, “sonsuz çokluk” ve “sonsuza yakın” kavramlarını içeren problemler sorulmuştur. Öğrenciler, kardinalitesi büyük olan sonlu kümeler ve sonsuz kümeler ile ilgili birbirinden faklı tanımlar yaptıkları görülmüştür. Ayrıca sonlu kümeleri, sonsuz küme olarak tanımladıkları gözlemlenmiştir. Bununla beraber öğrenciler sonsuz büyüklük ile ilgili olan sonsuz artan sayılar gibi kavramları daha kolay tanımlarken, sonsuz yakın (infinity close) ilkesine dayalı olan sonsuz bir kümede, bir noktaya yaklaşma gibi durumları tanımlamada zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir.

Yine öğrenciler “sonsuz büyüklük” ve “sonsuz çokluk” kavramları ile ilgili problemleri, “sonsuza yakın” kavramı ile ilgili problemlere göre daha kolay çözmüşlerdir. Bununla beraber öğrenciler “sonsuz büyüklük” ve “sonsuz çokluk” kavramı ile ilgili düşüncelerini fiili sonsuzluğa bağlı açıklarken, “sonsuza yakın” kavramı ile ilgili problem çözümlerinde potansiyel sonsuzluğa bağlı argüman oluşturdukları gözlemlenmiştir.

Çalışmanın bir diğer sonucu ise içeriğe bağlı olarak sorulan sorularda, öğrencilerin aritmetik bağlamdaki soruları çözmede geometrik bağlama göre daha başarılı oldukları görülmüştür. Kolar ve Cadez bu sonucun, APOS teorisi çerçevesinde düşünüldüğünde, aritmetik bağlamda verilen soruda geometrik bağlama göre bilgiyi içselleştirmenin (interiorization) ve kapsüllemenim (encapsulation) daha kolay olduğunu şeklinde yorumlamıştır.

2.4.3. Sonsuz sayılar üzerine yapılan araştırmalar

İlgili literatür incelendiğinde ilköğretim, lise ve üniversite öğrencileri olmak üzere farklı yaş gruplarındaki öğrencilerin ve öğretmen adaylarının sayılardaki sonsuzluk veya sonsuz sayı kavramı ile ilgili algılarını ortaya çıkarmaya yönelik yapılan çalışmalar bulunmaktadır (Boero, Douek ve Garuti, 2003; Falk, 1986; Mamolo, 2009; Monaghan, 1986; Singer ve Voica, 2007). Araştırmanın bu bölümde söz konusu çalışmalar ile ilgili bilgiler verilecektir.

Öğrencilerin sonsuz sayıları nasıl algıladıklarını inceleyen Falk (1986), 5-12 yaş arasında öğrencilerin (95 öğrenci) sonsuz büyük sayılar ve küçük sayılar ile ilgili tartışmalarını görmek için sayı oyunu oynamıştır. Oyun, artan doğal sayılar ile ilgili; “Her öğrenci bir sayı söyleyecektir. En büyük sayıyı söyleyen birinci olacaktır”, azalan tamsayı ile ilgili; “En küçük sayıyı söyleyen kazanacak.” şeklindedir. Küçük yaştaki öğrencilerin genellikle artan sayıları devam ettiremediği ve 6-7 yaş öğrencilerin ise tamsayıların sınırsızlığını anlayamadıkları görülmüştür. Küçük yaştaki öğrenciler negatif sayılara ve kesirlere aşina olmadığı için azalan sayı oyununu artan sayı oyunundan sonra oynamıştır. Birkaç öğrenci artan sayıların sonsuzluğunu anlamasına rağmen azalan sayılar ve pozitif rasyonel sayıları anlayamadığı görülmüştür. Sonsuz küçük değerin, öğrenci için sonsuz büyük değeri anlamaktan daha zor olduğu görülmüştür. Örneğin 5 yaşında Noga, dünyadaki kum tanelerinin insan saçından daha fazla olduğunu söylemiştir. Kum tanelerini mi sayılar mı diye sorulduğunda ise kararlı bir şekilde sayıların daha fazla olduğunu söyleyerek, *"Çünkü sayılar asla sonlanmaz…. Fakat kum taneleri her zaman oldukları yerdedir."* şeklinde açıklamasını yapmıştır.

Benzer bir çalışma yapan Boero, Douek ve Garuti (2003), ise 59, 5.sınıf öğrencisinin eğitim bağlamında ve kültürel bağlamda sonsuz sayılar ile ilgili ne düşündüklerini ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Bu bağlamda öğrencilere ilk olarak "Kaç tane sayı vardır?" sorusu sorulmuş ve daha sonra "1 ve 2 arasında kaç sayı vardır?" sorusu ile sonsuz sayılar tartışılmıştır. 59 öğrenciden 16 öğrencinin sonlu boyuttan sonsuz boyuta geçiş yapabildiği görülmüştür. Örneğin öğrencilerden bir tanesi; *"Şimdi anladım ki; son sayıyı söyleyemem, sonsuza kadar sayabilirim."* şeklinde argüman oluşturmuştur. Bazı öğrencilerin ise sonsuzluk ile ilgili ifadelerinden, öğrencilerin potansiyel sonsuzluğun varlığına ulaştıkları gözlemlenmiştir. Diğer yandan öğrencilerin sonsuz sayılar ile ilgili tartışmalarında kullandıkları metaforlar incelenmiştir. Öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili kullandıkları metaforlar matematiksel, günlük hayattaki tecrübeleri, dini (religious) düşünceler ile ilişkilendirilmiş ve öğrencilerin düşüncelerinin yaşadığı kültürden etkilendiği gözlemlenmiştir.

Bu konu ile ilgili Singer ve Voica (2007), ise 6-8 yaşlarındaki bir çocuğun sonsuzluk kavramı ile ilgili birincil sezgilerin yeteri kadar güçlü olduğunu ve öğrencilerin bu sezgiye bağlı olarak sonsuz doğal sayılar kümesi ile ilgili argüman oluşturabileceğini ifade etmiştir. Öğrencilerin doğal sayılar ile ilgili sahip oldukları sezginin tamsayılar ile ilgili sezgilerden daha güçlü olduğunu söylemiştir.

Daha büyük yaş grubu ile çalışan Monaghan (1986), 16-18 yaş öğrencilerinin sonsuz sayı kavramı ve matematiksel sonsuz sayı kavramı arasında ilişki ile ilgili kavrayışlarını araştırmıştır. Bu bağlamda öğrenciler ile görüşme yapmıştır. Görüşmelerde öğrencilere ondalık sayılar ile ilgili sorular sormuştur.

Bu sorulardan bir tanesi “0.3=1/3” eşitliği ile ilgili olup, eşitliğin doğru olup olmadığını sormuştur. Öğrencilerin verdikleri cevaplar ise şu şekildedir:

> “*Sayılardaki sonsuzluk, tekrar eden 3.3 sayısı gibi ve devam ediyor*.” (s.214)
> “*0.3 ondalık sayısını söylediğim zaman hangi sayı ile uğraştığımı ve ne hakkında konuştuğumu şekillendiremiyorum.1/3 belirli bir sayı fakat 0.3 ondalık sayısı belirli bir sayı değildir. Herhangi bir sayı olabilir*.” (s.249)

Monaghan’ın öğrencilere bir başka soru olarak, 0.01 sayısın sonsuz olup olmadığı sormuştur ve örnek olarak bir öğrencinin cevabı şu şekildedir:

> *"Bu sayı 0’ dan büyük olmalı. Sonsuz, 0’dan daha büyüktür çünkü 0.000…1 olarak devam ediyor. Çok büyük bir sayı olabilir.” (s.213)*
> .

Monaghan, yaptığı çalışma sonucunda öğrencilerin sonsuzluğu süreç olarak algıladıklarını görmüştür. Öğrencilerin, sonsuzu süreç olarak algılanmasının, çocuklarda tekrarlanan ondalık sayıların algılanması ile ilgili probleme neden olduğunu ifade etmiştir.

Bir başka çalışmada Mamolo (2009), 24 üniversite öğrencisi ile çalışmıştır. Mamolo, burada öğrencilerin sonsuzluk ve sonsuz sayılardaki aritmetik nitelikler ile ilgili algılarını ortaya çıkartmaya çalışılmıştır. Ayrıca öğrencilerin sonsuzluk kavramının, geometrik temsili ve sayısal temsili arasındaki ilişkiyi nasıl kurduğu incelemiştir. Bu bağlamda öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili anlayışlarını ortaya koymak için üç teori kullanmıştır.

Bu teoriler, Hazzan (199), tarafından geliştirilen “soyutu azaltma” (reducing abstraction), Tall’un (1980) geliştirdiği ‘sonsuzluğu ölçme’ (measuring infinity) teorisi ve APOS teorisidir. Mamolo, öğrenciler ile sonsuz kümeler ve kümelerin kardinalitesi üzerine tartışma ortamları sağlamıştır. Bu tartışma aynı zamanda sayılamayan sonsuz kümeler ve sayılamayan kümelerin kardinalitelerinin karşılaştırılmasını içermektedir.

Öğrencilerin, sayı doğrusunda sonsuz çokluktaki noktalar ile gerçek sayıların sonsuz temsili arasında uyuşmazlık yaşadıkları gözlemlenmiştir. Öğrencilerin sonsuz çokluk ile sonsuz ondalık temsil arasındaki yaşadıkları uyuşmazlık, sonsuz sayıların yorumlanmasında farklı bir bakış açısı ortaya koymuştur. Örneğin öğrencilerden Jim'in sonsuz sayılar ile ilgili yorumu şöyledir:

> *"4/6 ve 1/6 sayıları her ikisi de sonsuz sayıdır fakat çıkarma işlemi yaptığımızda sonuç 1/2 'dir. Bu sayı sonsuz değildir. Bu bize bir sonsuz sayı ile başka bir sonsuz sayı arasında çıkartma işlemi yapıldığında her zaman sonsuz sayı vermeyeceğini gösterir. Sonuç olarak* ∞-∞=∞ *ifadesi her zaman doğru değildir, çünkü sonuç bazen sonsuz bazen farklı değerlerde sonsuz değildir."(s.16)*

Diğer yandan öğrenciler gerçek sayılar ile gerçek sayıların sayı doğrusu üzerindeki temsilleri arasında ilişki kurmaya çalışmışlardır fakat sayı doğrusunda bir nokta olarak belirli bir sayının tanımlayamamaları sonsuzluk kavramının sayısal temsili ve geometrik temsili arasında ilişki kuramadıklarını göstermektedir. Öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili düşüncelerinde, sonsuzluğu ölçme yaklaşımının kullanılmasının öğrenciler için ikna edici bir faktör olduğu görülmüştür.

2.4.4. Sonsuz kümelerin karşılaştırılması üzerine yapılan araştırmalar

Sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili yapılan çalışmalarda, kullanılan temsilin önemi ve öğrencilerin sonsuz kümeleri karşılaştırırken kullandıkları yöntemleri ortaya çıkarmaya yönelik çalışmalar yapılmıştır (Duval, 1983; Falk, Gassner, Ben Zoor ve Ben Simon, 1986; Fischbein, Tirosh ve Melamed, 1981; Güven ve Karataş, 2004; Maria, Thanasina ve Katerina, 2009; Matrin ve Wheeler, 1987; Na ve Lee, 2006; Singer ve Voica, 2003; Tirosh ve Tsamir, 1996; Tsamir ve Tirosh, 1994; Tsamir, 1999; Tsamir, 2001). Yapılan çalışmalarda genelde öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili algılarının temsile göre değiştiği görülmüş ve bazı temsil türlerinin kullanılması durumunda öğrencilerin sonsuz kümeleri daha kolay karşılaştırdıkları gözlenmiştir (Duval, 1983; Tirosh ve Tsamir, 1996; Tsamir, 2001; Maria, Thanasina ve Katerina, 2009).

Tirosh ve Tsamir (1996), yapmış oldukları çalışmada, öğrencilerin verilen iki sonsuz kümenin eşitliği ile ilgili sezgisel kararlarının, bu kümelerin temsile bağlı olarak değişebileceğini ifade etmiştir. Bu bağlamda, 10-12 yaş arası, 189 öğrenci ile yaptıkları çalışmada öğrencilerin sayısal-yatay, sayısal-dikey, geometrik ve sayısal temsil biçimlerinden, hangi temsil biçiminde sonsuz iki küme arasında 1-1 eşleme yöntemini kullanmayı daha kolay akla getirebildiğini araştırmıştır.

Sayısal- yatay temsili : {1,2,3,4,...} {1,4,9,16,...}
Sayısal-dikey temsili : {1,2,3, 4,...}
{ 1,4,9,16,...}
Sayısal explicit temsili : { 1, 2, 3, 4,...}
{-1, - 2 , - 3 , - 4 , . . .

Tirosh ve Tsamir, belirtilen temsilleri kullanılarak sonsuz kümelerinin karşılaştırmasıyla ilgili öğrencilere 14 tane soru sormuştur. Kümelerin aynı sayıda elemana sahip olduğunu düşünen öğrenciler; tek bir çeşit sonsuzluk olduğunu ve iki küme arasında 1-1 eşleme yapılabileceğini ifade etmişlerdir. İki kümenin eleman sayısının eşit olmadığını düşünen öğrenciler ise; kümelerden bir tanesinin diğer bir kümenin alt kümesi olduğunu söylemişlerdir. Öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgisel düşüncelerinin temsil biçiminden etkilendiği görülmüştür. Örneğin, sayısal-yatay temsil, öğrencileri bütün-parça ilişkisine yönlendirirken, sayısal- dikey temsil ise öğrencileri 1-1 eşleme yöntemine yönlendirmiştir. Öğrencilerin explicit (numarical explicit) ve geometrik temsil biçimlerinde daha çok 1-1 eşleme yöntemi kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu çalışmaya benzer başka bir çalışmada Tsamir (2001), sonsuz kümelerinin karşılaştırılması ile ilgili farklı temsiller üzerinde durmuş ve öğrencilerin cevaplarının temsillere göre farklılaştığını ifade etmiştir. Tsamir, öğrencilerin sonsuz kümeler arasında karşılaştırma yaparken dört kriter kullandığını belirtmiştir. Bu kriterleri şu şekilde açıklamıştır:

Parça-bütük ilişkisi: Bir kümenin alt kümesi kendisinden daha az eleman içerir.
Tek sonsuzluk kriteri: Bütün sonsuz kümeler aynı sayıda eleman sahiptir bu yüzden tek bir sonsuzluk vardır.

Sonsuz nicelikler karşılaştırılamaz.

Birebir eşleme Kriteri.

Tsamir, 16-18 yaş, 15 öğrencisi ile yaptığı bu çalışmada, öğrencilere sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili sorular sorulmuştur. Aynı içerikli sorular farklı temsillerle sunulduğunda öğrencilerin nasıl cevap verdiğini incelemiştir. Öğrencilerin, aynı içerikli yatay temsil ve geometrik temsil ile sorulan sorularda farklı cevaplar verdikleri görülmüştür. Örneğin, öğrenciler doğal sayılar ve 2 den büyük sayılardan oluşan kümeler arasında karşılaştırma yaparken doğal sayılar kümesinin daha fazla elemana sahip olduğunu söylemiştir. Diğer yandan, aynı içerikli soru geometrik temsilde, farklı uzunluktaki doğru parçalarının nokta sayıları bakımından karşılaştırılması şeklinde sorulmuş ve öğrenciler nokta sayılarının eşit olduğunu söylemiştir. Tsamir, öğrencilerin farklı temsillerle sorulan sorulara verdikleri cevaplar arasında tutarsız olduklarını söylemiştir.

Singer ve Voica (2003), tarafından yapılan bir başka çalışmada ise çocukların sonlu ve sonsuz kümeler ile ilgili kavram yanılgıları incelenmiş bununla birlikte öğrencilerin sonlu ve sonsuz kümeleri karşılaştırmada hangi yöntemleri kullandıkları araştırılmıştır. Doğal sayılar kümesi ve çift sayılar kümesi gibi farklı iki küme verilip, kümelerin eleman sayılarının karşılaştırılması istendiğinde öğrencilerin kümelerin elamanlarını sayarak ve parça-bütün ilişkisi kurarak kümeleri karşılaştırdıkları görülmüştür. Öğrenciler, sonlu kümelerin uzunluğu olduğunu ancak sonsuz kümelerin uzunluğu olmadığını söylemişlerdir. Bu düşüncesini 8.sınıf öğrencilerinden bir tanesi "*R sonsuzdur, çünkü nerde başladığını ve nerde bittiğini bilmiyoruz*." argümanı ile açıklamıştır. Diğer yandan Güven ve Karataş (2004), yapmış oldukları çalışmada, lise 3, ilköğretim matematik öğretmenliği okuyan 2. sınıf ve 4.sınıf öğrencileri olmak üzere toplam 60 öğrencinin sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında kullandıkları yöntemleri araştırmıştır. Öğrencilerin sonlu kümelerin karşılaştırılmasında kullandıkları yöntemleri, sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında da kullanmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin kümelerin karşılaştırılmasında, 1-1 eşleme yöntemini beklenenden daha az kullandıkları ve daha çok tek sonsuz yöntemini kullandıkları gözlemlenmiştir. Bunun dışında bazı öğrenciler sonsuz kümelerin karşılaştırırken eksik eleman belirleme ve kapsama yöntemlerini kullanırken, öğrencilerden bazıları ise sonsuz kümeler arasında kıyaslama yapılamayacağını söylemiştir.

Sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili yapılan bir başka çalışmada Na ve Lee (2006), öğrencilerin sonsuz kümelerin karşılaştırma süreçleri incelenmiştir. Çalışma 7. sınıf öğrencilerinden 19 öğrenci ile yapılmıştır. Öğrenciler sonsuzluk kavramı ile ilgili formal eğitim almamıştır ve sonsuzluk ile ilgili bilgileri sadece günlük hayat deneyimlerinden oluşan bilgilerdir. Araştırma sonucunda, öğrencilerin sayısal temsilde ile verilen sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında, öğrencilerin sonlu büyüklüklerin özelliklerini sonsuza uyguladıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin bazıları kümelerin karşılaştırılmasında 1-1 eşleme yöntemini kullanmışlardır. Bu öğrenciler neredeyse informal seviyede olup, kavram ile ilgili bir eğitim almamışlardır. Na ve Lee, 1-1 eşleme yönteminin kullanılmasının, öğrencilerin “potansiyel sonsuzluk” kavramından “fiili sonsuzluk” kavramına, sonsuzluk anlayışının da “süreç” kavramından “nesne” kavramına geçiş yapmaya başladığı anlamına geldiğini ifade etmiştir. Öğrenciler ile sonsuzluk kavramı üzerine çalışıldığında, öğrencileirn sonsuzluğun özelliklerini kullanmaya eğilimli oldukları görülmüştür. Diğer yandan daha büyük yaş gruplar ile çalışan Maria, Thanasia ve Katerina (2009), ilköğretim öğretmenleri ile bir çalışma yapmıştır. Öğretmenlerin sonsuz kümeleri karşılaştırma süreçleri incelenmiştir. Öğretmenlerin sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında geometrik temsil kullanarak, 1-1 eşleme yöntemine daha kolay ulaştıkları gözlemlenmiştir.

Yapılan araştırmalar gösteriyor ki öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili birincil sezgilerinin, öğrenci formal öğrenimim sürecinde problem yaşamasına neden olmaktadır. Bu problemlerden bir tanesi de öğrencilerin sonlu kümelerin karşılaştırılmasından sonsuz kümelerin karşılaştırılmasına geçerken yaşadıkları zorluklardır (Duval, 1983; Falk, Gassner, Ben Zoor ve BenSimon, 1986; Fischbein, Tirosh ve Melamed, 1981; Martin ve Wheeler, 1987; Tsamir ve Tirosh, 1994). Öğrencilere iki tane sonsuz kümenin karşılaştırılması sorulduğunda, öğrenciler iki küme arasında karşılaştırma yaparken farklı metotlar kullanmaktadırlar ve bu metotlar öğrencilerin zihninde uyuşmazlıklara neden olmaktadır. Öğrencilerden doğal sayılar kümesi ile pozitif sayılar kümesi veya çift sayılar kümesi karşılaştırılması istendiğinde, öğrenciler ilk olarak kapsama (inclusion) ve 1-1 eşleme yöntemini kullanmaktadırlar. Kapsama yöntemi öğrencileri iki sonsuz kümenin eleman sayıları eşit değildir sonucuna ulaştırırken, 1-1 eşleme yöntemi ise kümelerin eleman sayıları eşittir sonucuna götürmektedir (Tsamir, 1999). Bu problemlerin ortadan kaldırılabilmesi için öğrencilerin sonsuzluk kavramını içeren etkinlikler ile daha fazla karşılaştırılması ihtiyaç duyulmaktadır. Bu açıdan, Singer ve Voica (2003), öğrencilere uygun şartlar altında eğitim verildiğinde sonsuz kümeler ile ilgili matematiksel sezgiyi içselleştirdiklerini ifade etmiştir. Böyle bir çalışma Tsamir (1999) tarafından yapılmıştır.

Tsamir (1999), ikinci kademe öğretmen adaylarının, sonlu kümelerin karşılaştırılmasından sonsuz kümelerin karşılaştırılmasına geçiş süreçlerini incelemiştir. Öğretmen adayları 3 gruba ayrılarak, deneysel çalışılmıştır. 125 öğretmen adayı küme teorisi dersi altında zenginleştirilmiş kurs (enriching course) alırken, 110 öğretmen adayı Cantor'un küme teorisi dersini almış ve 71 öğretmen adayı ise herhangi bir ders almamıştır. Öğretmen adaylarının almış olduğu dersler 90 dakikalık olup, 24 hafta boyunca devam etmiştir. Öğretmen adayları zenginleştirilmiş kurs sürecinde, sonlu kümelerden sonsuz kümelere geçiş ile ilgili etkinlikler ve sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili etkinlikler yapmışlardır. Daha sonra çalışma yapılan üç gruba da sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili 7 sorudan oluşan bir test yapılmıştır. Herhangi bir ders almayan öğretmen adaylarının sonsuz kümelerinin eleman sayıları arasında karşılaştırma yaparken sadece sonlu kümelerin karşılaştırılmasında geçerli olan yöntemi kullanarak sezgisel olarak karşılaştırma yaptıkları görülmüştür. Bu öğretmen adayları, "bütün sonsuz kümeler eşittir."(sonsuzluk=sonsuzluk) ve "sonsuz kümeler karşılaştırılamaz." yöntemlerini kullanmışlardır. Fakat bu yöntemler Cantor teorisinde geçerli değildir ve öğretmen adaylarının kullandığı yöntemlerin tamamen tutarsız olduğu görülmüştür. Kantor teorisi dersi alan öğretmen adaylarının ise daha çok 1-1 eşleme yöntemini kullandıkları görülmüştür. Bu öğretmen adayları tek uygun yöntemin 1-1 eşleme yöntemi olduğunu ifade etmişlerdir. Diğer yandan zenginleştirilmiş kursa katılan öğretmen adaları ise bu çalışmada en başarılı olan grup olmuştur. Bu öğretmen adayları sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında tek bir yöntem kullanmışlardır ve bu yöntemi en tutarlı kullanan grup olduğu görülmüştür. Tsamir, öğretmen adaylarının aldığı eğitimin öğretmen adaylarının sonsuz kümeler ile ilgili kavrayışlarının geliştirdiğini ifade etmiştir. Bu noktada sonsuzluk kavramı üzerine yapılan etkinliklerin ve eğitimlerinin önemli olduğunu vurgulamıştır.

BÖLÜM III

3. Yöntem

Bu bölümde araştırmanın deseni, evren-örneklem, veri toplama araçlarının hazırlama süreci, pilot çalışma, asıl uygulama süreci, verilerin toplanması ve verilerin analizine ilişkin bilgiler sunulacaktır.

3.1. Araştırmanın Deseni

Bu araştırma ortaokul 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili oluşturdukları kavram yapılarını belirlemeye yöneliktir. Bu amaçla çalışmada, nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Yıldırım ve Şimşek'e (2011) göre nitel araştırma; gözlem, görüşme ve doküman analiziF gibi veri toplama yöntemlerinin kullandığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konulmasına yönelik bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanmaktadır. Nitel araştırma, eğitim ile ilgili olguları bağlı bulundukları doğal ortamları içerisinde araştırmayı ve anlamayı ön planda tutan bir yaklaşımdır (Karataş ve Güven, 2003). Nitel araştırma sürecinde, araştırmacılar ise doğal ortamı gözlemleme ve irdeleme, araştırılan insanların meydana getirdiği anlamlar açısından olguyu anlamlaştırma ve yorumlama çabası içerisindedir (Denzin ve Lincoln, 2000).

Bu çalışma sürecinde araştırmacı tarafından hazırlanan durum tespit testi ve klinik mülakat aracılığıyla veriler toplanmıştır. Bu bağlamda durum tespit testi ile araştırmaya katılan ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili kavram yapılarını ortaya çıkartılmak istenmiştir. Öğrencilerin kavram yapıları daha ayrıntılı ve derinlemesine incelemek için ise durum tespit testinin ardından belirlenen öğrenciler ile klinik mülakatlar yapılmıştır. Klinik mülakat, öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla öğrenciyle karşılıklı yapılan görüşmelerdir (Ginsburg, 1981).

Esnek soru sormak metodu olan klinik mülakat öğrencinin düşüncelerindeki zenginliği keşfetmek, onun temel aktivitelerini yakalamak ve bilişsel beceriyi değerlendirme fırsatı sunmaktadır (Baki, Karataş ve Güven, 2002). Durum tespit testinden elde edilen veriler ile mülakatlardan elde edilen veriler içerik analizi tekniği ile analiz edilmiştir. Analiz sonucunda ortaokul öğrencilerinin "sonsuzluk" kavramı ile ilgili kavram yapıları ortaya koyulmaya çalışılmıştır.

3.2. Evren- Örneklem

Araştırma evrenini, 2012-2013 eğitim-öğretim yılında Kocaeli il merkezinde yer alan Türk Pirelli Ortaokulu, Türkan Dereli Ortaokulu ve Hızır Reis Ortaokulunda öğrenim gören tüm öğrenciler oluşturmaktadır. Verilerinin zenginliği ve çeşitliliğin arttırılması amacıyla araştırmanın üç okulda yapılması düşünülmüştür ve bu yüzden karma bir grup oluşturulmaya çalışılmıştır. Seçilen okulların, MEB tarafından yapılan SBS sınavının 2011-2012-2013 olmak üzere üç yılın sonuçlarına (EK-D) göre, Türkan Dereli Ortaokulu ve Hızır Reis Ortaokulu başarı düzeyi iyi seviyede bir okul, Türk Pirelli Ortaokulunun ise başarı düzeyi orta seviyede bir okul olduğu söylenilebilir. Araştırmanın bu okullarda gerçekleşmesine karar verilmesinin ardından, ilgili kurumlardan yasal izin alınmıştır (EK-C).

Araştırma seçilen okullarda öğrenimine devam eden 5., 6., 7. ve 8.sınıf öğrencileri ile yapılmıştır. Singer (2002), 10 yaşındaki bir çocukta sonsuzluk sezgisinin çoktan var olduğunu ve amaçlı tartışmalar ile bu sezginin ortaya çıkartılabileceğini ifade etmiştir. 10 yaş grubu genel olarak 4.sınıf düzeyidir. Fakat Singer (2002), 5.sınıf öğrencilerin sayılabilir sonsuzluk ile ilgilenebileceğini söylemiştir. Bununla birlikte ortaokul matematik dersi öğretim programında (MEB, 2013) yer alan kazanımlar incelendiğinde 5.sınıftan itibaren öğrencilerin sayılar ve kesirler ile ilgili bilgi düzeylerinin daha ileri seviyede olacağı düşünüldüğü için bu sınıf seviyeleri seçilmiştir. Ayrıca farklı sınıf seviyelerinden öğrencilerin seçilmesinin ile öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili kavram yapılarının sınıflara göre nasıl farklılık gösterdiğini ortaya koyulması amaçlanmıştır. Bu bağlamda, çalışmanın yürütüldüğü okullarda her sınıf seviyesinden küme örnekleme yöntemi ile ikişer sınıf belirlenmiştir ve 176 öğrenci çalışmanın örneklemini oluşturulmuştur. Sınıf seviyelerine göre öğrenci sayısı Tablo 3-1'de verilmiştir.

Tablo 3-1. Sınıf seviyelerine göre öğrenci sayısı

Sınıf Seviyesi	Öğrenci Sayısı
5. sınıf	50
6. sınıf	40
7. sınıf	44
8.sınıf	42
Toplam	**176**

Araştırma sürecinde yapılan klinik mülakatlar ise her seviyeden 4 öğrenci seçilerek toplam 16 öğrenci ile yapılmıştır. Bu öğrencilerin seçiminde çeşitlilik ve derinlik oluşturma açısından, ağırlıklı olarak durum tespit testinde öğrencilerin vermiş olduğu cevaplar dikkate alınmıştır. Bunun yanında öğretmenlerin görüşleri de alınarak kendini iyi ifade edebilen öğrenciler seçilmesine dikkat edilmiştir. Ayrıca bu öğrencilerin çalışmaya gönüllü olması göz önünde bulundurulmuştur.

3.3. Veri Toplama Araçları

Veriler, durum tespit testi ve klinik mülakatlar ile toplanmıştır. Testler, genel olarak öğrencilerin bir konu veya kavram hakkında öğrenme eksikliklerini ve onların öğrenme düzeylerini belirlemek amacıyla kullanılır (Özçelik, 2010). Bu çalışmada açık uçlu test çeşidi kullanılmıştır. Açık uçlu soruları içeren testler, öğrencilerin kendi düşüncelerini ve bilgilerini özgürce ifade etmesine imkan sağlamaktadır (Demircioğlu, 2003). Durum tespit testinin yanı sıra öğrencilerin cevaplarının arkasındaki nedenleri daha ayrıntılı öğrenebilmek amacıyla klinik mülakatlar yapılmıştır.

3.3.1. Araştırmada kullanılan durum tespit testinin hazırlanması

Durum tespit testi, literatürden (Fischbein, Tirosh ve Melamed, 1981; Güven ve Karataş, 2004; Kolar ve Cadez, 2012; Maria, Thanasia ve Katerina, 2009; Pehkonen, Hannula, Maijala ve Soro, 2006) yararlanarak hazırlanmıştır. Test ilk olarak açık uçlu 25 soru şeklinde hazırlanmıştır.

Testte yer alan sorular ile ilgili 3 matematik öğretmeninin ve bu alanda çalışan 3 uzmanının görüşü alınmıştır. Bu görüşler doğrultusunda, soruların öğrencilerin seviyelerine uygun olup olmadığı uzmanlar ile tartışılarak 25 sorudan 10 tanesi seçilmiştir. Seçilen sorulara, pilot çalışma sonucunda bir soru daha eklenerek son hali verilmiş ve asıl çalışmada kullanılmak üzere toplam 11 tane soru sorulmasına karar verilmiştir. Bu bağlamda durum tespit testi sonsuzluk kavramı, büyük sayılar sayı bağlamında sonsuzluk, limit durumu ve sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili hazırlanmış olup, bazı sorular farklı temsil biçimleri ile sunulmuştur. Sorular belirlenen çerçevede beş başlık altında toplanmış ve aşağıda sunulmuştur.

3.3.1. 1. Sonsuzluk algısı ile ilgili soru

Birinci soruda öğrencilerin sonsuzluk kavramını kendi kelimeleri ile tanımlaması ve örnek vererek açıklaması istenmiştir. Bu soru ile öğrencideki sonsuzluk algısı ortaya çıkartılması amaçlanmıştır. Bu kapsamda öğrenci sonsuzluğu kendi kelimeleri ile nasıl tanımlıyor, ne tür önek veriyor ve verilen örnekler ile sonsuzluk kavramı arasında nasıl bir ilişki kurduğu sorgulanmıştır. Böylece öğrencinin sonsuz algısının türü belirlenmesi hedeflenmiştir.

Tablo 3-2. Sonsuzluk algısı ile ilgili soru

1) Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayınız.

3.3.1.2. Büyük sayılar ile ilgili sorular

İkinci soruda dünyada var olan bütün kitaplardaki toplam harf sayısı ve bir çöldeki kum taneciklerinin toplamı sayısı sorulmuştur. Bununla birlikte öğrencilerden harf sayısı ile kum taneciği sayısının karşılaştırılması istenmiştir. Bu sorular ile öğrencilerin büyük sayılar ve sonsuzluk kavramı arasındaki nasıl bir ilişki kurduğu ortaya çıkartılmak istenmiştir.

Tablo 3-3. Büyük sayılar ile ilgili sorular

2) Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- **a.** Dünyada var olan bütün kitaplarda toplam ne kadar harf vardır? **Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**
- **b.** Bir çöldeki kum taneciklerinin toplam sayısı ne kadardır? **Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**
- **c.** Dünyada var olan bütün kitaplardaki toplam harf sayısı mı yoksa bir çöldeki kum taneciğinin sayısı mı daha fazladır? **Nedenleri ile açıklayınız.**

3.3.1.3. Sayı bağlamında sonsuzluk ile ilgili sorular

Bu bölümde sayılar ile ilgili öğrencilere üç tane soru sorulmuştur. Yapılan çalışmalarda, “Kaç tane sayı vardır?” gibi sorular öğrencileri sonsuz sayılar ile ilgili problemler üzerine düşünmeye teşvik ettiğini göstermektedir (Boero, Douek ve Garuti, 2003).

Tablo 3-4. Sayılar ile ilgili sorular

3) Aşağıda verilen ifadede noktalı yere kaç tane sayı yazılabilir? **Nasıl bulduğunuzu açıklayarak yazınız.**

3 < …..

4) Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- **a.** 0 ile 1 arasında kaç tane kesir vardır?
- **b.** Kesirlerin hepsini yazabilir misiniz? Eğer kesirlerin hepsini yazabilirseniz **nasıl bulduğunuzu açıklayarak yazınız.**

5) En büyük sayı var mıdır? Cevabınızı nedenleri ile **açıklayarak yazınız.**

Bu durum öğrencilerin doğal matematiksel birimler ile ilgili farkındalıklarını ve önsezilerini kullanmalarına olanak vermektedir. Bu nedenle üçüncü, dördüncü ve beşinci sorular sayılar ile ilgili hazırlanmıştır. Bu sorular ile öğrencilerin sayılar üzerine düşündürülmesi böylece öğrencilerin sonsuz sayılar ile ilgili kavram yapılarının ortaya çıkartılması amaçlanmıştır. Hazırlanan sorular Tablo. 3-4'te sunulmuştur.

3.3.1. 4. Limit durumu ile ilgili sorular

Bu bölümde limit durumu ile iki tane soru hazırlanmıştır. Birinci soru devirli sayılar ile ilgili olup, öğrenciler bu konuları 5.sınıftan itibaren öğrenmeye başlamaktadırlar. Yapılan çalışmalar öğrencilerin sonsuz tekrar eden ve tekrar etmeyen ondalık sayıları anlamakta zorlandığını göstermektedir (Vinner ve Kidron, 1985). Birinci soruda "0.9999…." sayısının gösteriminde 9 sayısı devam etmektedir ve aynı zamanda 1'e yaklaşmaktadır. Bu nedenle burada potansiyel ve fiili sonsuzluğun karışımı gibi bir algı vardır (Dubinsky vd. 2005). Yapılan çalışmalar öğrencilerin genellikle "0.333.....= $\frac{1}{3}$" eşitliğinin doğru olduğunu düşündüğünü göstermektedir (Edwards, 1997). Bu eşitlikte "0.3333…" sayısı bir süreç ve $\frac{1}{3}$ ifadesinde de 1'in 3'e bölümü sonucunda elde edilen sayı da bir süreçtir bu nedenle ikinci eşitliğin birinci eşitlikten daha kolay anlaşılması beklenmektedir.

Tablo 3-5. Limit durumu ile ilgili sorular

6) Aşağıda verilen eşitlikler doğru mudur? **Nedenleri ile açıklayınız.**

a) 0.9999…..= 1
b) 0.3333.....= $\frac{1}{3}$

8) Bir kişi aralarında 8 km olan bir köyden diğer köye gidecektir. Bu kişi birinci gün yolun yarısını gidecektir, 2. gün ise birinci gün gittiği yolun yarısını gidecektir. Bu şekilde her gün bir önceki gün gittiği yolun yarısını giderek köye ulaşmaya çalışacaktır. Bu kişi sizce köye ulaşabilir mi? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu **açıklayarak yazınız.**

Limit durumu ile ilgili sorulan bir diğer soruda ise öğrencilerin günlük hayat ile ilişkilendirebileceği bir sorudur. Bu soruda bir kişinin bir köyden 8 km uzaklıktaki başka bir köye verilen koşullarda ulaşıp ulaşmaması sorulmuştur. Burada kişinin köye ulaşabilmesi için verilen mesafenin sürekli bölümü gerekmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin bölümlere devam etmesi beklenmektedir. Bu başlık altında yer alan eşitlik soruları ve kişinin köye ulaşma sorusu ile birlikte öğrencilerin limit durumu ile ilgili anlaaları ortaya çıkartılmak istenmiştir. Hazırlanan sorular Tablo. 3-5’te sunulmuştur.

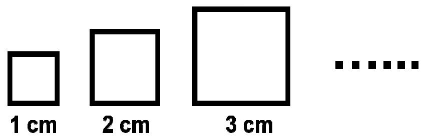
3.3.1. 5. Sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili sorular

Bu bölümde sonsuz kümeler ile ilgili dört soru hazırlanmıştır. Bu sorular ile öğrencilerin sonsuz kümeleri nasıl tanımladığı ve iki sonsuz kümeyi karşılaştırırken kullandığı yöntemlerin neler olduğu öğrenilmek istenmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin farklı gösterimlerde sonsuzluk kavramına verdikleri anlamları ortaya çıkartmak amacıyla sorular aritmetik ve geometrik olmak üzere farklı gösterimlerle sorulmuştur. Bu amaçlar doğrultusunda, yedinci ve onuncu soru doğal sayılar kümesi ile çift doğal sayılar kümesinin eleman sayılarının karşılaştırılması ile ilgilidir. Yedinci soruda doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümesi sayı örüntüsü gösterimi ile verilirken, onuncu soruda ise karenin kenar uzunluklarından oluşan bir sayı örüntüsü ve karenin çevre uzunluğundan oluşan bir sayı örüntüsü şeklinde verilmiştir. Öğrencilerden bu sayı örüntülerinin terim sayılarını bakımından karşılaştırmaları istenmiştir. Sorular Tablo.3-6’da sunulmuştur.

Tablo 3-6. Sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili sorular

Aritmetik Temsili: **7)** Aşağıda doğal sayılar ile çift doğal sayıların oluşturduğu sayı örüntüleri verilmiştir. Bu iki sayı örüntüsünü devam ettirdiğimizi düşünelim. İki sayı örüntüsünü karşılaştırdığınızda hangi sayı örüntüsündeki terim sayısı daha fazladır? **<u>Nedenleri ile açıklayınız</u>.** Doğal Sayılar: 0,1, 2, 3, ….. Çift Doğal Sayılar: 0, 2, 4, 6, ...

Geometrik Temsili:



11) Yukarıda kenar uzunlukları 1 cm’den başlayıp 1’er cm büyüyen kareler verilmiştir. Aşağıda ise A ve B sayı örüntüleri verilmiştir. A sayı örüntüsünün terimleri karelerin kenar uzunluklarından, B sayı örüntüsünün terimleri ise karelerin çevre uzunluklarından oluşmaktadır. A ile B sayı örüntülerini devam ettirdiğimizde örüntülerin terim sayılarını karşılaştırınız. Hangi sayı örüntüsünün terim sayısı daha fazladır? **<u>Nedenleri ile açıklayınız</u>.**

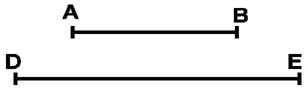
A : 1, 2, 3, …..
B : 4, 8, 12, ….

Son soru olan onbirinci soruda ise reel sayılar ile rasyonel sayıların karşılaştırılması söz konusudur. Bu amaçla [0,1] aralığında bir doğru parçası ile rasyonel sayılardan oluşan ve devam eden bir sayı örüntüsü verilmiştir. Öğrencilerden, doğru parçasının nokta sayısı ile sayı örüntüsündeki terim sayısı karşılaştırılması istenmiştir. Ayrıca sayı örüntüsü sınırsız bir durumu temsil ederken, doğru parçası ise sınırlı bir alandır. Böylece öğrencilerin sınırlı ve sınırsız durumlarda sonsuzluk ile ilgili anlamlarının ne olduğu ortaya çıkartılması hedeflenmiştir.

Tablo 3-7. Sonsuz kümelerin karşılaştırılması ilgili sorular

Geometrik Temsili:

9) Aşağıda AB doğru parçası ile DE doğru parçası verilmiştir. Bu ifadeye göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



a) AB doğru parçasının uzunluğu ile DE doğru parçasının uzunluğunu karşılaştırınız. AB doğru parçası, DE doğru parçasından uzun mu, kısa mı, eşit midir? **<u>Nedenleri ile açıklayınız.</u>**

b) AB doğru parçası üzerindeki nokta sayısı ile DE doğru parçası üzerindeki nokta sayısını karşılaştırınız. AB doğru parçasındaki nokta sayısı, DE doğru parçasındaki nokta sayısından az mıdır, çok mudur yoksa eşit midir? **Nedenleri ile açıklayınız.**

11) Aşağıda [0,1] aralığındaki doğru parçası ve bir sayı örüntüsü verilmiştir. Doğru parçasındaki nokta sayısı ile sayı örüntüsündeki terim sayısını karşılaştırınız? Doğru parçasındaki nokta sayısı, sayı örüntüsündeki terim sayısından az mıdır, fazla mıdır yoksa eşit midir? **Nedenleri ile açıklayınız.**

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$$

3.4. Pilot Çalışma

Pilot çalışma, asıl uygulama öncesi veri toplama araçlarının son halini vermek için ve testin geçerliliğini sağlamak için önemlidir. Bu bağlamda burada pilot çalışmanın amacı, pilot çalışma süreci ve pilot çalışma sonucunda elde edilen sonuçlar paylaşılacaktır.

3.4.1. Pilot çalışmanın amaçları

1. Pilot çalışmanın öncelikli amacı asıl çalışmada yer alacak soruların anlaşılabilirliğini test etmektir. Pilot çalışma için hazırlanan 10 soruluk durum tespit testi kullanılmıştır. Bu testin uygulaması her sınıf seviyesinden üçer öğrenci alınarak toplam 12 öğrenci ile yapılmıştır. Öğrencilerin seçiminde matematik öğretmenleri ile işbirliği yapılmıştır. Öğretmenlerin önerileri doğrultusunda her seviyeden bir başarılı öğrenci, iyi seviyede bir öğrenci ve orta seviyede bir öğrenci olmak üzere 3'er öğrenci seçilmiş ve karma bir grup oluşturulmaya çalışılmıştır. Ayrıca sorular ile ilgili öğrencilerden daha iyi bilgi veya öneri alınabilmesi adına, matematik öğretmenlerinin görüşleri doğrultusunda kendilerini iyi ifade edebilen, düşüncelerini rahat bir şekilde söyleyebilen, iletişimi iyi olan öğrenciler seçilmesine dikkat edilmiştir. Seçilen öğrenciler bir sınıfta toplanarak birbirinden bağımsız ve araştırmacı tarafından herhangi bir müdahale olmadan verilen testi yapmıştır. Pilot çalışma öncesi öğrencilere bu testin amacı açıklanmış ve bu testin sonuçlarının kendilerini değerlendirme amacıyla kullanılmayacağı özellikle belirtilmiştir. Öğrencilere, bu testi çözerken onların düşüncelerinin önemli olduğu vurgulanmış ve onlardan sorulara istedikleri gibi cevap vermeleri istenmiştir. Pilot çalışma sürecinde, öğrenciler sorular ile ilgili anlamakta zorlandıkları ifadeleri araştırmacıya sormuştur. Fakat öğrencilerin sorulardan ne anladığı önemli olduğu için sorular ile ilgili öğrencilere herhangi bir açıklama yapılmamıştır ve öğrenciyi yönlendirebilecek bir duruma yer vermeden sorudan ne anlıyorsa onu yapması istenmiştir.

2. Pilot çalışmanın diğer bir amacı ise öğrencilerin bu soruları ne kadar sürede cevapladıklarını gözlemlemektir. 8.sınıf öğrencileri testi ortalama 15-20 dakikada yaparken, 7.sınıf öğrencileri 25 dakikada, 5. ve 6. sınıf öğrencilerinin ise 30 dakikada yaptığı gözlemlenmiştir. Bu süre bize asıl çalışmada öğrencilere ne kadar süre vermemiz gerektiği konusunda fikir vermiştir.

3. Pilot çalışmanın bir diğer amacı ise araştırmacının deneyim kazanmasıdır. Araştırmada kullanılacak sorulara karar verilmesi, öğrenciler ile yapılacak klinik mülakatların sağlıklı bir şekilde yürütülebilmesi için böyle bir deneyimin olması gerekmektedir. Pilot çalışma, araştırmacının pilot çalışma sürecinde yapmış olduğu hataları farkederek asıl çalışmada bu hataları tekrarlamaması açısından önemli olmuştur. Örneğin araştırmacının, pilot çalışmanın ardından öğrenciler ile yapılan görüşmelerde öğrencilere fazla yönlendirme verildiği fark edilmiş ve asıl çalışmada böyle bir hatadan kaçınılmaya çalışılmıştır.

3.4.2. Pilot çalışma süreci

Bu süreç öğrencilerin durum tespit testlerini cevaplaması, cevapların analizini ve öğrenciler ile görüşme sürecini içermektedir. Öğrenciler ile durum tespit testi yapılmasının ardından, testlerin cevapları araştırmacı tarafından incelenmiştir. Öğrencilerin cevaplarında testte yer alan sorulardaki bazı ifadeleri anlamadıkları ve bazı gösterimleri tanımadıkları tespit edilmiştir. Bu tespit ile ilgili daha ayrıntılı bilgiye ulaşabilmek için öğrenciler ile 10'ar dakikalık görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşme sürecinde öğrenciler ile onların anlamadığı tahmin edilen sorular üzerinde konuşulmuştur. Öğrencilere bu soruyu nasıl anladıkları, neden böyle bir cevap verdikleri ve daha farklı nasıl sorulsaydı anlaşılır olurdu şeklinde sorular sorulmuştur. Ayrıca anlaşılmayan sorular ile ilgili öğrencilere farklı gösterimler sunularak, öğrencilerin anlayabileceği gösterimlerin neler olabileceği üzerinde durulmuştur. Bununla birlikte öğrenciler için soruların daha anlaşılır hale getirilmesi için öğrencilerden tavsiyeler alınmıştır.

3.4.3. Pilot çalışmadan elde edilen sonuçlar

Bu bölümde pilot çalışmadan elde edilen sonuçlar maddeler halinde sunulacaktır.

1. Testte yer alan yedinci soruda öğrencilere doğal sayılar kümesi ile çift doğal sayılar kümesinin eleman sayısı bakımından karşılaştırılması istenmiştir. Doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümelerinin gösterimi aşağıdaki gibi verilmiştir. Ancak 5.sınıf öğrencilerin bu gösterimi anlamadığı tespit edilmiştir.

N= {1,2,3,4…}

S= {2,4,6,8,…}

Şekil 3.1. Doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümelerinin gösterimi

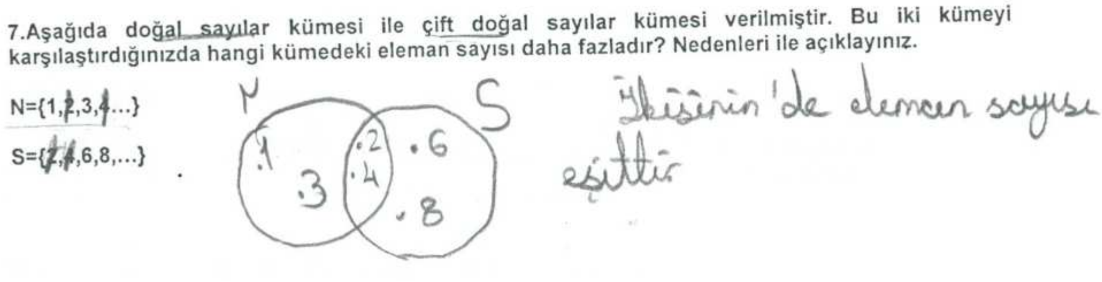
5.sınıf öğrencilerinin kümelerin eleman sayılarını karşılaştırırken kümedeki elamanların sayı değerlerini topladıkları görülmüştür. Öğrencilere bu çözümün nedeni sorulduğunda bir öğrenci "eleman sayısı" kavramını bilmediğini bu nedenle böyle yaptığını söylerken, başka bir öğrenci "eleman sayısı" kavramını sayı değeri olarak bildiğini ifade etmiştir. Öğrenciler açısından bu ifadelerin daha anlaşılır olabilmesi için "doğal sayılar kümesi” ve “çift doğal sayılar kümesi” ifadeleri yerine “doğal sayılar sayı örüntüsü” ve “çift doğal sayılar sayı örüntüsü” ifadeleri kullanılmasına karar verilmiştir. Bunun yanı sıra “eleman sayısı” ifadesi için de “terim sayısı” ifadesi kullanılmaya karar verilmiştir. Sorunun gösterimi ise aşağıdaki gibi değiştirilmiştir.

Doğal Sayılar: 0,1, 2, 3, …..

Çift Doğal Sayılar: 0, 2, 4, 6, ...

Şekil 3.2. Doğal sayılar sayı örüntüsü ve çift doğal sayılar örüntüsünün gösterimi

Bu soru ile ilgili elde edilen bir diğer sonuç ise 6. sınıflardan iki öğrenci; verilen kümelerin eleman sayılarını karşılaştırırken Şekil 3.3’te yer alan Venn şemasını çizmiştir. Öğrencilere Venn şeması çizmesinin nedeni sorulduğunda, öğrenciler üç noktayı farketmedikleri için doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümesi olduğunu anlamadıklarını ifade etmişlerdir.



Şekil 3.3. Sonsuz kümelerin karşılaştırılmasına ilişkin öğrenci cevabı

Öğrenciler soruda kullanılan üç nokta yerine daha fazla nokta koyarak, noktalar uzatılsaydı gösterimi daha rahat anlayabileceklerini ve çözüm için Venn şemasını çizmeyeceklerini belirtmişlerdir. Benzer durum 5.sınıflar içinde söz konusu olup, noktalar uzatıldığında sayıların devam ettiğini daha iyi anlayabilecekleri gözlenmiştir. Bu nedenle asıl çalışmada nokta sayısı arttırılarak öğrencilere bu soru sorulmuştur.

2. Öğrenciler 7. soruda doğal sayılar kümesinin sonsuz olduğunu ve 9. soruda bir doğru parçasındaki nokta sayısının da sonsuz olduğunu söylemiştir. Bu iki cevaptaki sonsuzluğun çeşidi belirlenemediğinden dolayı asıl çalışma için bir soru daha eklenilmesine karar verilmiştir. Eklenilmek istenen soru ile bu soruda ortaya çıkan belirsizliğe açıklık getirilmesi düşünülmüştür. Eklenilen soru Tablo 3.8 ‘de verilmiştir.

Tablo 3.8. Durum tespit testi için eklenilen soru

Aşağıda [0,1] aralığındaki doğru parçası ve bir sayı örüntüsü verilmiştir. Doğru parçasındaki nokta sayısı ile sayı örüntüsündeki terim sayısını karşılaştırınız? Doğru parçasındaki nokta sayısı, sayı örüntüsündeki terim sayısından az mıdır, fazla mıdır yoksa eşit midir? **Nedenleri ile açıklayınız.**

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

3.5. Veri Toplama Süreci

3.5.1. Durum tespit testinin uygulama süreci

Bu çalışmada verilerin toplanması iki aşamada gerçekleşmiştir. Birinci aşamada öğrencilere durum tespit testi uygulanmıştır. Testin uygulaması bir ders saatinde yapılmıştır. Öğrencilere uygulamadan önce çalışmanın amacının ne olduğu anlatılmış ve yapılan test sonucunda kendilerinin başarısının değerlendirilmeyeceği belirtilmiştir. Ayrıca öğrencilere, sorulara verecekleri cevapların sadece araştırmacılar tarafından okunacağı belirtilmiştir. Böylece öğrencilerin testi daha rahat bir şekilde yapmaları beklenmiştir. Uygulama sürecinde öğrenciler araştırmacıya testte yer alan sorular ile ilgili sorular sormuştur. Öğrencileri yönlendirecek cevaplardan kaçınarak öğrencilerin soruları yanıtlanmaya çalışılmıştır. Bu sorulardan bir tanesi de sorulara cevap olarak istediğimizi yazabilir miyiz şeklindedir. Bu noktada öğrencilere onların düşüncelerinin ne olduğunun önemli olduğu belirtilerek, istedikleri gibi yazabilecekleri söylenmiştir. Durum tespit testinin ardından seçilen öğrenciler ile klinik mülakatlar yapılmıştır.

3.5.2. Klinik mülakatlar

Öğrencilerin sonsuz kavram yapılarını derinlemesine incelemek amacıyla klinik mülakatlar yapılmıştır. Mülakatın asıl amacı iletişim kurulan bireylerin araştırılan konu hakkında duygu, düşünce ve inançların neler olduğunu ortaya çıkarmaktır (Çepni, 2007). Matematik eğitiminde yapılan klinik mülakatların amacı ise, öğrencilerin stratejilerini, bilgi yapılarını veya becerilerini karakterize etmek ve belirli bir öğretimin etkililiğini araştırmak ve gelişim sürecini daha iyi anlamaktır (Karataş ve Güven, 2003).

Bu bağlamda bu çalışmada yarı yapılandırılmış klinik mülakat yöntemi kullanılmıştır. Mülakat yapılan öğrencilerin seçiminde durum tespit testindeki öğrenci cevapları göz önüne alınmıştır. Klinik mülakatlar, her sınıf seviyesinden 4 öğrenci olmak üzere toplam 16 öğrenci ile yapılmıştır. Öğrencilerin, uygulamanın yürütüldüğü üç okuldan da eşit sayıda seçilmesine özen gösterilmiştir. Öğrencilerin seçiminde gönüllülük esası ve öğretmen görüşleri de dikkate alınarak, iletişim becerileri güçlü, düşüncelerini rahat ifade edebilen öğrenciler olma kriterleri de göz önünde bulundurulmuştur. Mülakat soruları için, mülakat öncesinde bütün öğrencilere sorulacak genel sorular hazırlanmıştır. Bu soruların yanında öğrencilerin testteki cevapları incelenerek her öğrenci için ayrı sorular oluşturulmuştur. Bununla birlikte görüşme sürecinde öğrencinin verdiği cevaba göre anlık sorular sorulmuştur. Mülakat soruları EK-B'de verilmiştir. Klinik mülakatlar, okulda ders saatleri içerisinde gerçekleştirilmiş ve ses kaydı yapılmıştır. Mülakatlar 30-40 dakika arasında bir sürede yapılmıştır. Ses kaydının yapılacağı, mülakat öncesinde öğrenciye söylenmiş ve ses kayıtlarının sadece araştırmacı tarafından dinleneceği vurgulanmıştır. Ayrıca ses kayıtlarının çözümlenmesinde isimlerin gizliliğine dikkat edileceği söylenerek öğrencinin kendini rahat hissetmesi sağlanmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin mülakatta verdikleri cevaplar kod tablosu oluşturularak analiz edilmiştir. Kod tablosunun oluşturulması süreci ile ilgili bilgi verilerin analizi başlığı adı altında daha ayrıntılı bir şekilde verilecektir.

3.6. Verilerin Analizi

Bu bölümde durum tespit testinden ve klinik mülakatlardan elde edilen verilerin analiz edilme süreci ile ilgili bilgiler verilecektir.

3.6.1. Durum tespit testinin analizi

Verilerin analizinde içerik analiz tekniği kullanılmıştır. İçerik analizinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. Bu bağlamda içerik analizinde yapılan işlem, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenleyerek yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Durum tespit testinden elde edilen verilerin analizi dört aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada üç araştırmacı eş zamanlı olarak, içinde kategorilerin ve alt kategorin olduğu kodlama tablosunu oluşturmuştur. Kodlama tablosu oluşturulurken literatürde var olan kodlama tablolarından (Fischbein vd. 1979; Kolar ve Cadez, 2012; Pehkonen, Hannula, Maijala ve Soro, 2006) yararlanmıştır. Bununla birlikte yeni çıkan kategoriler ve alt kategorilerde eklenmiştir. İkinci aşamada araştırmacılar ile bir araya gelinerek yapılan kodlamalar karşılaştırılmış ve kodlamalar arasındaki farklar giderilmiştir. Üçüncü aşamada ise kodlamaların güvenirliği için araştırmacılar arasındaki uyuma bakılmak istenmiştir. Bunun için rastgele 28 tane öğrencinin kağıdı seçilmiştir. Seçilen kağıtlar, belirlenen kodlama tablosuna göre her bir araştırmacı tarafından, birbirinden bağımsız olarak kodlanmıştır. Kodlamalar yapıldıktan sonra araştırmacılar ile bir araya gelinerek kodlamalar arasındaki uyuma bakılmış ve %89 oranında uyum sağlandığı görülmüştür. Araştırmacılar arasındaki farklar giderilerek, kodlama tablosunun son haline karar verilmiştir.

Tablo 3.9’ da ikinci sorunun, ikinci alt sorusuna ilişkin örnek kod tablosu verilmiştir. Tablonun birinci sütununda kategoriler verilmiştir. Bu kategoriler “sonsuz”, “büyük sayılar” ve “sayılamaz” şeklinde üç kategori halinde oluşturulmuştur. Tablonun ikinci sütununda bu kategorilere ait alt kategoriler yer almaktadır. Burada sadece “sayılamaz” kategorisinin alt kategorileri oluşturulmuştur. Tablonun üçüncü sütununda ise kategorilere veya alt kategorilere ait örnek açıklamalar verilmiştir.

Tablo 3-9. İkinci sorunun ikinci alt sorusuna ilişkin örnek kod tablosu

Kategoriler	***Alt Kategoriler***	***Açıklama***
1. Sonsuz		Kum taneciği sayısı sonsuza kadar devam eder.
		Kum taneciği sayısı sınırsızdır.
		Sonsuzdur,ör:89456 ……
2. Büyük sayılar		Sınırlı bir sayı yazma, ör: 9999999.
		Milyonlarca, katrilyondan fazla, trilyonlarca
3. Sayılamaz	İmkansız	Kum taneciği sayısı çok fazla olduğu için saymak imkansızdır
		Yalnızca 5 duyu organı yardımıyla sayılamaz.
		Saymaya ömrümüz yetmez.
	Boyut	Kum tanecikleri sayılamayacak kadar küçük oldukları için sayılamaz.
	Değişkenlik	Sayısı çöle göre değişeceği için sayılamaz.

Durum tespit testinin analizinin en son aşamasında ise araştırmacı oluşturulan kodlama tablolarına göre, verilerin analizini yapmıştır.

3.5.2. Klinik mülakat verilerinin analizi

Öğrenciler ile yürütülen klinik mülakatlardan elde edilen veriler ses kayıt cihazı ile toplanmıştır. Elde edilen verilerin analizi için içerik analiz tekniği kullanılmıştır. Asiala, Brown, Deries, Dubinsky, Mathews ve Thomas (1996) tarafından önerilen çerçeveye göre yapılmıştır. Verilerin analizi altı aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk olarak her bir öğrenciye ait ses kaydı dinlenerek, görüşmeler deşifre edilmiştir. İkinci aşamada her öğrenci ile yapılan görüşmeler okunmuş ve öğrenci cevapları kendi içinde anlamlı birimlere ayrılmıştır. Bu birimler oluşturulurken araştırma sorularına dikkat edilmiş ve bir konu hakkında yazılan spesifik bir cevap bir birim şeklinde gruplandırılmıştır. Bu şekilde bütün sorular birimlere ayrılarak gruplandırılmıştır. Birimlere ayrılan parçalar şekil 3.4’ deki gibi iki sütün halinde yazılmıştır. Birinci sütunda verinin kendisi yazılırken, ikinci sütunda ise birinci sütunda yer alan verinin özeti yazılmıştır. Veri analizinde, kolaylık sağlamak amacıyla ikinci sütunda yer alan parçalar numaralandırılmıştır.

*** A: Buradaki cevabını biraz daha açabilir misin? Ö: Burada 3'ü sayı doğrusunda düşünürsek 3'ün sağında olan bütün sayılar, bütün noktalar yazılabilir. A: Örnek verebilir misin? Ö: 4, 5, 6, 7, 1 milyon, 2 milyon böyle devam eder. A: Peki bunların hepsini sayabilir miyiz? Ö: Sayamayız. A: Neden sayamayız? Ö: Çünkü sonsuzdur. A: Anladım bir sonraki soruya geçelim. ***	10. 3'ten büyük sonsuz sayı vardır ve sayılamaz

Şekil 3. 4. Örnek veri analizi

Analizin üçüncü aşamasında, üç araştırmacı tarafından her bir öğrenci verisi bağımsız olarak okunarak, taslak kod tablosu oluşturulmuştur. Kod tablosu oluştururken daha önce durum tespit testinden elde edilen kategoriler temel alınmıştır. Klinik mülakatların amacı veriyi derinlemesine incelemek olduğu için durum tespit testinde kullanılan kategoriler temel alınarak, öğrenci cevapları doğrultusunda daha ayrıntılı kategoriler oluşturulmuştur. Ardından araştırmacılar ile bir araya gelinerek, oluşturulan kod tabloları karşılaştırılmış ve uyuşmayan kodlamalar tartışılarak fikir birliğine varılmıştır. Beşinci aşamada kodlamaların güvenirliği için rastgele seçilen iki öğrencinin kağıdı araştırmacılar tarafından bağımsız bir şekilde kodlanmıştır. Kodlamalar arasındaki uyuma bakılmış ve % 90 oranında uyum sağlandığı görülmüştür. Araştırmacılar arasındaki farklar giderilerek, kodlama tablosunun son haline karar verilmiştir.

Tablo 3-10. İkinci sorunun ikinci alt sorusuna ilişkin örnek görüşme kod tablosu

Sınırlı sayı	Sayılabilir büyük sayı	Kum tanecikleri sayısı sınırlıdır, sayılabilir ama çok büyük sayılar çıkar. Kum taneciklerinin sayısı fazladır ama sonsuz değildir bu yüzden sayılabilir. Çöldeki kum tanecikleri olduğu için kısıtlama var. Çok fazla ve küçüklerdir ama sayabiliriz herhalde.
	Sayılamaz büyük sayı	Kum tanecikleri sayısı sınırlıdır ama çok fazladır bu yüzden sayılamaz. Kum taneciği sınırlı sayıdadır ama milyonlarca kum taneciği olduğu için saymak imkansızdır. Kum tanecikleri sınırlıdır ama çok fazla ve küçük olduğu için sayılmaz.

Tablo 3-10. ‘da ikinci sorusunun alt sorusuna ilişkin görüşmeler sonucu oluşturulan örnek kod tablosu verilmiştir. Bu soruya ait kod tablosu Tablo 3.8’ de sunulmuştu. Bu tabloda yer alan “sınırlı sayı” kategorisi, öğrenciler ile yapılan görüşmeler sonucunda “sayılabilir büyük sayı” ve “sayılamaz büyük sayı” olmak üzere iki alt kategori oluşturulmuştur. Diğer sorularda da benzer şekilde kod tabloları oluşturulmuştur. Analizinin en son aşamasında, araştırmacı belirlenen kod tablosuna göre, verilerin analizini yapmıştır.

BÖLÜM IV

4. Bulgular

Bu çalışmada ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk hakkındaki düşüncelerini belirlemek için durum tespit testi ve yarı yapılandırılmış mülakat kullanılmıştır. Çalışmanın bu bölümünde durum tespit testinden ve mülakatlardan elde edilen veriler sunulacaktır. Testteki sorulara ait nicel bulgular sırayla soru başlıkları altında ele alınacaktır. Klinik mülakatlardan elde edilen veriler ise her soru için nicel bulguların devamında öğrencilerden alınan alıntılar ile desteklenerek sunulacaktır. Klinik mülakat için her sınıf seviyesinden 4 öğrenci ile görüşülmüştür. Bu öğrencilerin isimleri Ö1, Ö2, Ö3,… şeklinde kodlanarak kullanılmıştır. Kodlamalar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4-1. Klinik mülakat yapılan öğrencilerin sınıf seviyelerine göre dağılımları

Sınıf Seviyesi	Öğrenciler
5. sınıf	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4
6. sınıf	Ö5, Ö6, Ö7, Ö8
7. sınıf	Ö9, Ö10, Ö11, Ö12
8.sınıf	Ö13, Ö14, Ö15, Ö16

4.1. Öğrencilerin sonsuzluk kavramına ilişkin açıklamaları

4.1.1. Birinci Sorudan Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar

Durum tespit testindeki birinci soru; "*Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayınız.*"şeklindedir. Bu soru öğrencilerin sonsuzluk kelimesi ile ilgili ne düşündüklerini belirlemek için sorulmuştur. Ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili açıklamaları incelendiğinde öğrencilerin sonsuzluğu genel olarak "sonu olmayan", "bitmeyen" ve "devam eden" şeklinde tanımladıkları görülmüştür.

Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili açıklamalarının, sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 4-2'de verilmiştir.

Tablo 4-2. Öğrencilerin sonsuzluk kavramına ilişkin açıklamalarının sınıf seviyesine göre dağılım

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonu olmayan	12	24	17	43	16	36	18	43	63	36
Bitmeyen	13	26	9	22	8	18	3	7	33	19
Devam Eden	4	8	1	2	6	14	3	7	14	8
Diğer	21	42	13	33	14	32	18	43	66	37
Toplam	50		40		44		42		176	% 100

Tablo 4-2. İncelendiğinde, öğrencilerin %36'sı sonsuzluk kavramını "sonu olmayan", %33'ü "bitmeyen" ve %8'i ise "devam eden" şeklinde tanımladıkları görülmektedir. Öğrencilerin % 37' si sonsuzluk kavramını bu ifadelerden farklı olarak tanımlamış ya da herhangi bir tanım yapmamıştır. Burada öğrencilerin sonsuzluk kavramını genel olarak nasıl tanımladığı ortaya konulmak istenmiştir. Öğrencilerin sonsuzluk kavrayışlarının ne tür olduğunu belirlemek amacıyla öğrencilerin vermiş olduğu örnekler de dikkate alınarak kategoriler oluşturulmuştur. Bu kategoriler fiziksel sonsuzluk, duygusal-manevi sonsuzluk ve matematiksel sonsuzluk şeklindedir. Kategoriler, alt kategoriler, kategorilere ait açıklamalar ve örnekler Tablo 4-3.'de verilmiştir. Kategorilerin öğrencilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı ise Tablo 4.4.'te verilmiştir.

Fiziksel sonsuzluk kategorisinde, öğrenciler sonsuzluğu fiziksel olarak var olan kavramlar üzerinden tanımlamışlardır. Bu kategori öğrencilerin vermiş oldukları örnekler doğrultusunda "sınırlı" ve "fiziksel genellemeler" olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. Sınırlı kategorisinde yer alan öğrenciler, gerçekte sayısı sınırlı olan fiziksel bir varlığı veya nesneyi örnek göstererek, bunların sonsuz olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrenciler sonsuzluğu "tükenmeyen", "bitmeyen", "sınırsız olmak" ve "miktarının artması" şeklinde tanımlamışlardır.

Örnek olarak eşya, insan sayısı, yaşam ve çöldeki kum taneciklerini vermişlerdir. Bu kategoriye örnek olabilecek öğrenci açıklamaları aşağıda verilmiştir.

"Sonsuzluk miktarı belli olmayan, ölçülemeyendir. Çöldeki kum tanecikleri gibi."(7.sınıf)
"Sonsuzluk, sonsuza kadar devam eden, hiç bitmeyendir. Örnek; yaşam." (7)
"Sonsuzluk, sınırsızlık demektir. Kum tanecikleri gibi…" (6.sınıf)

Tablo 4-3. Birinci soruya ilişkin kategoriler ve açıklamalar

Kategori	*Alt Kategoriler*	*Açıklama*	*Günlük Yaşam Örnekleri*
	Sınırlı	Tükenmeyen-Bitmeyen	Eşyalar, ,insan sayısı, yaşam
Fiziksel		Sınırsız olmak	Çöldeki kum tanecikleri,
Sonsuzluk		Artma-Değişkenlik	İnsan Sayısı
	Fiziksel Genellemeler	Sonu olmayan	Evren, Uzay, Gökyüzü,
		Hiç ölmemek	Ölüm, Allah, Atatürk
Duygusal-Manevi		Bitmeyen	Sevgi, mutluluk, aşk,
Sonsuzluk		Keyfiyet	Balonun uçması, özgürlük
	Potansiyel Sonsuzluk	Sonu olmayan	Sayılar, 999…, doğru, Işın
		Devam eden	Sayılar, doğru parçası
Matematiksel	Fiili Sonsuzluk	Her şeyin sonsuz olması	Sayılar
Sonsuzluk		∞	
	Büyük Sayılar	En çok	99999.999.99.9
		Ulaşması zor sayılar	

Bu kategoriye ait diğer bir alt kategori ise "fiziksel genellemeler" kategorisidir. Bu kategoride ise öğrenciler sonsuzluğu "sonu olmayan" şeklinde tanımlayarak, evren, uzay, gökyüzü ve kara delik gibi örnekleri kullanmışlardır. Bu kategoride yer alan bazı öğrenci cevapları şöyledir:

"Sonsuzluk "uzay" gibi sonu hala bulunamamış alandır." (5.sınıf)
"Sayısal olarak belli edilemeyen, yani evren sonsuzdur sürekli genişleyebilir."(7.sınıf)
"Sonu asla gelmeyen boşluktur. Uzay, karadelik gibi..." (6.sınıf)

Fiziksel sonsuzluk kategorisinde yer alan öğrencilerin cevapları ve vermiş oldukları örnekler incelendiğinde, bu örnekler genellikle miktarı ve devamı bilinmeyen, gerçekte sınırlı veya sınırsız olan varlıklar ve nesneler olduğu görülmektedir. 8. Sınıf öğrencisi Ö16 ile yapılan görüşmede Ö16, sonsuzluk ile ilgili düşüncelerini şu şekilde açıklamıştır.

A*: Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayabilir misin?*

Ö*: Sonu olmayan evren gibi… gerçi sonu olup olmadığını bilemeyiz. Uçsuz bucaksız...*

A*: Cevabını biraz daha açabilir misin?*

Ö*: Yani sonu olmayan şeylere örnek verdim. Sonsuzluk sonu olmayan, gittikçe giden, gittiğimizde sonuna varamadığımız, sürekli kendini yenileyen, devam eden…*

A*: Peki uçsuz bucaksız derken ne demek istedin?*

Ö*: Sonunu göremediğimiz, ufuk çizgisi gibi…*

Ö16'nın burada sonsuzluğu ufuk çizgisine benzetmektedir. Sonsuzluğu sürekli ilerleyen ve devam eden durum olarak açıklamıştır. Tablo 4-4. incelendiğinde, öğrencilerin %25'inin sonsuzluk tanımlarının fiziksel sonsuzluk kategorisinde yer aldığı görülmektedir. En fazla 5. sınıf öğrencileri ve 6. sınıf öğrencileri tarafından sonsuzluk kavramı bu şekilde tanımlanmıştır.

Tablo 4-4. Birinci soruya ilişkin kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Fiziksel Sonsuzluk	17	34	12	30	8	18	7	17	44	25
Duygusal-Manevi Sonsuzluk	8	16	11	27	8	18	9	21	36	20
Matematiksel Sonsuzluk	11	22	8	20	13	30	10	24	42	24
Sınıflandırılmayan	14	28	9	23	15	34	16	38	54	31
Toplam	50		40		44		42		176	%100

Duygusal-Manevi kategorisinde ise öğrenciler sevgi, mutluluk, aşk, özgürlük gibi duyguları ve ölümsüzlük, keyfiyet belirten durumları sonsuz olarak tanımlamışlardır. Bu kategoride yer alan öğrencilere göre sonsuzluk kavramı soyut olan duygu, düşünce gibi durumları temsil etmektedir. Öğrencilerin % 20'si sonsuzluğu bu şekilde tanımlamıştır. Tablo 4.4' de görüldüğü üzere bu tanımların en fazla 6. sınıf öğrencileri ve 8. sınıf öğrencileri tarafından yapıldığı görülmektedir. Bu kategoriye örnek olarak olabilecek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

"Sonsuzluk hep rahat olmaktır, huzurlu olmaktır."(6. sınıf)
"Sonsuzluk balonun uçması, kafana göre istediğin yere gitmesi" (8.sınıf)
"Hiç ölmemek, ölümsüzlüktür." (8.sınıf)

Bu kategoride yer alan 6. sınıf öğrencisi Ö5 ile yapılan görüşmede, Ö5 sonsuzluk ile ilgili düşüncesini "*Sonsuzluk bana göre sevgi ve ailedir…*" şeklinde ifade ederek, sonsuz olmasını istediği şeyleri sonsuz olarak tanımlamıştır. Ö5 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

A*: Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayabilir misin?*
Ö*: Sonsuzluk bana göre sevgi ve ailedir. Sevgi ve ailedir. Ayrıca sayılar ve harfler de sonsuzdur…*
A*: Sevgi ve aile sonsuzdur derken ne demek istedin?*
Ö*: Sevgi yaşamın bir parçası sonuçta sevgisiz yaşam düşünemiyorum. Bana göre sevgi sonsuzdur. Her zaman olması gereken şey.*
A*: Peki aile kavramı sonsuz derken ne demek istedin?*
Ö*: Sonuçta ailemiz bizim hep yanımızda. Yanımızda olmasa bile onların varlığını biliyoruz. O yüzden onlar sonsuzdur bizim için hayatımızda. Sonsuz bir şeyi temsil ediyor.*

Bu kategoride yer alan öğrencilerin sonsuzluk algısı duygusal boyutta olup, sonsuzluğun tanımlanmasında aşk, sevgi, özgürlük gibi duygu metaforlarını kullandıkları görülmektedir. Öğrenciler yaşantıları sonucu doğal olarak gelişen, hissettikleri veya yaşadıkları duygularını sonsuzluk kavramı ile eşleştirmişlerdir.

Bu soruya ait diğer bir kategori ise matematiksel sonsuzluk kategorisidir. Burada öğrenciler sonsuzluğu sayı, doğru ve çember gibi matematiksel kavramları kullanarak tanımlamışlardır. Bu şekilde tanım yapan öğrencilerin sonsuzluk algısı matematiksel sonsuzluk yönünde olduğu için bu kategoride değerlendirilmiştir. Öğrencilerin % 24'ü matematiksel sonsuzluk kategorisinde yer almaktadır. Sınıf seviyelerine göre incelendiğinde ise en fazla 7.sınıf ve 8. sınıf öğrencilerinin bu kategoride yer aldığı görülmektedir.

Matematiksel sonsuzluk kategorisi "dinamik sonsuzluk", "statik sonsuzluk" ve "büyük sayılar" olmak üzere üç alt kategoriye ayrılmıştır. Literatürde potansiyel sonsuzluk olarak tanımlanan sonsuzluk bitmeyen, sürekli devam eden bir süreç anlamına gelmektedir (Kolar ve Cadez, 2012). Potansiyel sonsuzluk, sonsuzluğun dinamik bir süreç olduğunu ifade etmektedir. Burada yer alan öğrencilerin tanımlarında sonsuzluğun dinamik bir süreç olarak tanımlanması söz konusudur. Bu nedenle burada potansiyel sonsuzluk kavramı yerine daha anlaşılır olması bakımından dinamik sonsuzluk kavramı kullanılması tercih edilmiştir. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

"Bir şeyin ucunun ve başının olmadığı. Örneğin sayılar bir sayının yanına istediğimiz kadar sayı yazabiliriz. Bu sayede sayılar sonsuza kadar gider." (8.)
"Sonsuzluk hiç bitmeyen uçsuz bucaksız bir şey. Mesela sayılar uçsuz bucaksızdır asla sonunu bilemezsin. İstediğin kadar say asla bitmezler." (6. Sınıf)
"Sonu olmayan, hiç bitmeyen şeylerdir. Mesela sayılar sonsuzdur ne kadar ileri gidersen git bitmez. (1,2,3,4 …..)." (8.sınıf)

Bu kategoride yer alan 6. sınıf öğrencisi Ö6 ile yapılan görüşmede, Ö6 sayıların sonsuz olduğunu söyleyerek sayıların bitmemesinin sonsuzluk anlamına geleceğini ifade etmiştir. Ö6 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

A. *Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayınız.*
Ö: *Bana göre sonsuzluk sınırsızlık demek. Örnek: sayılar*

***A**: Cevabını biraz daha açabilir misin?*

***Ö**: Sayılar mesela sayma sayıları sonsuzdur. Sıfırdan mesela başlayıp sonsuza kadar giden sayılar.*

***A**: Peki sayıların sonsuza kadar gitmesi senin için ne ifade ediyor?*

***Ö**: Sayıların sonsuza kadar gitmesi sayıların daha devam edebileceği anlamına gelir belki..*

***A**: Sayıların sonsuza kadar devam eder dedin, peki sonsuzluk burada var olan bir yer midir?*

***Ö**: Sayıların sonsuza gitmesi yani.. sayıların bitmemesi sonsuzluk anlamına gelebilir.*

Ö6, "sonsuza kadar gitme" ifadesinin devam etme anlamına geldiğini söyleyerek sayıların da sonsuza kadar gittiğini vurgulamıştır. Benzer şekilde, 7. sınıf öğrencilerinden Ö10 ise sonsuzluğu sonu olmayan olarak tanımlamış ve örnek olarak doğru kavramını vermiştir. Ö10, doğruların devam ettiğini ve sonu olmadığını ifade ederek, düşüncelerini şu şekilde dile getirmiştir.

***A**: Yusuf, sana göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayabilir misin?*

***Ö**: Sonu olmayandır. Mesela doğru gibi… Doğrunun da hiçbir sonu yoktur*

***A**: Cevabını biraz daha açabilir misin?*

***Ö**: Yani hiçbir zaman bitmeyen demek istedim.*

***A**: Peki bitmeyen kelimesi senin için ne ifade ediyor?*

***Ö**: Hiçbir sonu olmayan sonsuzluğa kadar gidecek.*

***A**: Sonsuzluğa kadar gideceğini söyledin. Sonsuzluk dediğimiz şey var olan bir yer midir?*

***Ö**: Hayır. sonsuzluk yani nereye kadar gidilirse bitmiyor..*

Verilen örneklerde de görüldüğü üzere bu kategoride yer alan öğrenciler sonsuzluğun tanımlanmasında sayılar ve doğru gibi matematiksel kavramları kullanmışlardır. Sayıların ve doğruların sonsuza kadar devam edeceğini söyleyerek, sonsuzluğun devam eden ve bitmeyen bir süreç olduğunu bir kez daha belirtmişlerdir.

Bazı öğrencilerin ise sürecin devamında ne olacağını bilmedikleri için “sonsuza kadar devam eder” ifadesini kullandıkları görülmüştür.

Matematiksel sonsuzluğun diğer bir kategorisi ise statik sonsuzluk kategorisidir. Statik sonsuzluk, sonsuzluğun bir bütün olarak düşünülmesidir. Örneğin “*sayıların tamamının sonsuz olması…*” gibi bir ifade yazılması, öğrencinin sonsuzluğu bir bütün olarak düşünebildiğini göstermektedir dolayısıyla sonsuzluğun statik olması söz konusudur. Bu kategoride yer alan öğrenciler sonsuz bir sürecin adımlarını tek tek düşünmemekte, sürecin tamamının sonsuz olduğunu söyleyebilmektedir. Fakat bu cevaplar öğrencilerin fiili sonsuzluk seviyesinde olduğunu söyleyebilmemiz için yeterli değildir. Fiili sonsuzluk bir bütün olarak sonsuzluğa işaret eder (Kolar ve Cadez, 2012). Bunun yanı sıra fiili sonsuzluk kavrayışına sahip bir kişi sonsuzluğu matematiksel nesne olarak görebilmektedir (Petty, 1996). Petty (1996), sonsuzluğu matematiksel nesne olarak görebilen bir kişinin sonsuzluk ile ilgili işlemleri yapabilecek seviyede olmasını gerektirdiğini belirtmiştir. Ancak burada söz konusu fiili sonsuzluk seviyesi öğrenciler için tanımlanan statik sonsuzluğa göre daha üst bir seviyedir. Bu sebeple fiili sonsuzluk yerine statik sonsuzluk kullanılmasına karar verilmiştir. Bu kategoriye örnek bazı cevaplar şu şekildedir:

“Sonsuzluk rakamlardır, sayılardır. Çünkü sadece sayılar ve rakamlar sonsuzdur.”(6.sınıf)

“Sonsuzluk her şeyin sonsuz olması demektir. Örneğin sayılar… ”(7. sınıf)

Bu kategoride yer alan 5. sınıf öğrencisi Ö1 ile yapılan görüşmede, Ö1 sonsuzluğu ilk olarak sonu olmayan olarak tanımlamış ve dinamik sonsuzluğu düşünmüştür. Ardından sayılar üzerinde konuşulmaya başlandığında ise sonsuzluğu bütün olarak ifade etmiş ve statik sonsuzluk düşüncesi göstermeye başlamıştır. Ö1 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

***A**: Sana göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayabilir misin?*

***Ö**: Bana göre sonsuzluk sonu olmayan, sonu gelmeyen demektir. “*

***A:** Örnek verebilir misin?*

Ö: *Mesela sayılar sonsuza kadar gidebilir.*

A: *Sayıların sonsuz olduğunu söyledin. peki sence sonsuzluk bir sayı mıdır?*

Ö: *Hayır. Sonsuz demek bütün sayılar demek... bir sayı… yani bir sayı sonsuz Değildir çünkü bir tanedir. Sonsuz sayıdan oluşur sonsuzluk. Sonsuzluk sonsuz sayı gerektirir.*

Matematiksel sonsuzluk kategorisinin diğer bir alt kategorisi ise "büyük sayılar" kategorisidir. Bu kategoride yer alan öğrenciler sonsuzluk tanımlarında, sonsuzluk için "çok büyük", "çok fazla" "en fazla" veya "çok büyük bir sayı" gibi ifadeleri kullanmışlardır ve sonsuzluğu temsil ettiğini düşündükleri büyük sayılar yazmışlardır. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

"Sonsuzluk zor bir kavramdır. Tam olarak ne olduğu tam olarak belli değil büyük olan şeyler. Sayılar sonsuza dek gider ama bu imkansızdır."(8.sınıf)

"Sonsuzluk en çok, en uzakta, en fazla demektir. Örnek; 9999.999.99.9"(5.)

Bu kategoride yer alan 8. sınıf öğrencisi Ö13 ile yapılan görüşmede Ö13, sonsuzluğu miktarların çok olması şeklinde tanımlamış ve miktarının ne kadar olduğunu açıklayamadığımızı ifade etmiştir. Ö13 ile yapılan görüşme alıntısı şu şekildedir:

A: *Sana göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayabilir misin*

Ö: *Sonsuzluk belli miktarlar arasındaki miktarların olabildiğince çok olabilmesidir.*

A: *Ne kadar çok olabilir?*

Ö: *İşte sonsuzluğu da bu yüzden açıklayamıyoruz sonsuz olduğu için sonsuz.*

Öğrencilerin % 31'i ise "bilmiyorum", "anlamadım" gibi cevaplar yazmış ya da soruyu boş bırakmayı tercih etmiştir. Bu nedenle bu öğrenciler sınıflandırılamayan kategorisine dahil edilmiştir.

4.2. Öğrencilerin büyük sayılara ilişkin açıklamaları

4.2.1. İkinci Sorudan Elde Edilen Bulgular

Bu soruda öğrencilerin büyük sayılara ilişkin anlamaları ortaya çıkartılmak istenmiştir. Bu bağlamda öğrencilere, (*"Dünyada var olan bütün kitaplarda toplam ne kadar harf vardır?", "Bir çöldeki kum taneciklerinin toplam sayısı ne kadardır?", "Dünyada var olan kitaplardaki harf sayısı mı yoksa bir çöldeki kum taneciğinin sayısı mı daha fazladır?"*) üç alt sorudan oluşan bir soru sorulmuştur. Bu bölümde her bir sorudan elde edilen bulgular ayrı başlıklar altında sunulacaktır.

"Dünyada var olan bütün kitaplarda toplam ne kadar harf vardır?" sorusundan elde edilen bulgular

Öğrencilerin dünyada var olan bütün kitaplardaki toplam harf sayısına verdikleri cevaplar ve yapmış oldukları açıklamalar doğrultusunda, *"Sonsuz", "Büyük sayılar", "Sayılamaz"* ve *"Sınıflandırılamayan*" şeklinde dört kategori oluşturulmuştur. Bu kategoriler ve kategorilere ait örnek açıklamalar Tablo 4-5.'de sunulmuştur. Kategorilerin, öğrencilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı da Tablo 4-6. 'da verilmiştir.

Tablo 4-5. İkinci sorunun birinci alt sorusuna ilişkin kategoriler ve örnek açıklamalar

Kategoriler	***Açıklama***
1. Sonsuz	Kitap sayısı sonsuzdur bu yüzden harf sayısı da sonsuzdur.
	Kitapların sayısı sonsuza kadar devam eder.
	Kitaplardaki harf sayısı sınırsızdır.
	Sonsuzdur,ör:9214……
2. Büyük Sayılar	Sınırlı bir sayı yazma, ör: 9999999.
	Milyonlarca kitap vardır.
	Harf sayıları sayılamayacak kadar çok fazladır.
3. Sayılamaz	Kitaplardaki harf sayılarını saymak imkansızdır.
	Kitapların sayısı zamanla değişeceği için harf sayıları sayılamaz.

Tablo 4-6. İkinci sorunun birinci alt sorusuna ilişkin kategorilerin, öğrencilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonsuz	11	22	13	32	15	34	9	22	48	27
Büyük sayılar	17	34	10	25	11	25	6	14	44	25
Sayılamaz	16	32	7	18	13	30	21	50	57	32
Sınıflandırılamayan	6	12	10	25	5	11	6	14	27	16
Toplam	50		40		44		42		176	% 100

Dünyada var olan bütün kitaplardaki toplam harf sayısına sınırsız ya da sonsuz olduğunu ifade eden öğrenci cevapları "sonsuz" kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu kategoride yer alan öğrenciler kitap sayısının sonsuz olduğunu söylemişlerdir. Dolayısıyla öğrenciler harf sayının da sonsuz olacağını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin % 27 'si bu kategoride yer almaktadır. Öğrencilerin açıklamaları incelendiğinde, öğrencilerin bir kısmının dünyada var olan kitapları düşünerek cevap verdiği bir kısmının ise sadece dünyada var olan kitapları değil yeni basılacak kitapları da düşünerek cevap verdikleri görülmüştür. Bu bağlamda öğrenciler tarafından sunulan gerekçelerden bir tanesi kitapların sürekli basılmaya devam ettiği, bu nedenle kitap sayısının sonsuz olduğu dolayısıyla harf sayısının da sonsuz olduğudur. Bu açıklamaya örnek olabilecek öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

"Sonsuzdur. Her bir zaman aralığında tekrar bir kitap ortaya konmaktadır." (8)
"Kitap sayısı sonsuzdur. Çünkü her gün yeni kitap basılıyor." (7. sınıf)
"Harf sayısı sonsuzdur. Çünkü dünyada sürekli yeni kitaplar basılıyor. Belirsizdir." (5.sınıf.

Öğrenciler yeni kitapların basılmasıyla birlikte kitap sayısının sürekli artacağını ve sonsuz olacağını düşünmektedir. Yukarıda örnek olarak verilen öğrenci açıklamalarından bir tanesinde öğrencinin harf sayısının sonsuz olduğunu aynı zamanda belirsiz olduğunu ifade ettiği görülmektedir. Görüşme yapılan öğrencilerden 5 tanesi böyle bir gerekçelendirme ile harf sayısının sonsuz olduğunu söylemiştir. Bu öğrencilere şu an dünyada var olan kitapların sayısı sorulduğunda ise öğrenciler cevaplarını değiştirerek kitapların sınırlı sayıda olduğunu ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerden 6. sınıf öğrencisi olan Ö5 ile yapılan görüşmede, Ö5 kitaplar çok fazla olduğu için sayılmasının zor olduğunu ancak sınırlı sayıda olduğunu söylemiştir. Bunun yanı sıra kitap sayısı sonsuz olsaydı sayılamayacağını söylemiştir. Ö5 ile yapılan görüşme alıntısı şöyledir:

Ö:*Dünyada daha önce bir sürü kitap yazılmış. Hala da üretiliyor şu an ki kitapları saymak biraz imkansız ama her dakikada çeşitli kitaplar çıkıyor bunları saymak çok zor. Sürekli ilerliyor. O yüzden sonsuzdur.*

A:*Peki şu an dünyada var olan kitapları sayabilir miyiz?*

Ö: *Yaklaşık olarak belki sayılabilir… ama çok zor.*

A: *Neden zor olur?*

Ö: *Çünkü çok fazla kitap var ve çok fazla harf var o yüzden biraz zorlayabilir.*

A: *Peki var olan kitaplar sınırlı mıdır yoksa sınırsız mıdır? Ne düşünüyorsun?*

Ö: *Sınırlıdır. Sınırlı olması bizi zorlayabilir hani kısıtlı zaten bütün ülkelerde olduğu için zor olabilir. Çünkü sonsuz olsa zaten sayılamaz.*

Öğrenciler tarafından yapılan bir diğer gerekçelendirme ise "*kitapların sayısı hesaplanamadığı için sonsuzdur*" şeklindedir. Bu açıklamaya örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları ise şu şekildedir:

"*Dünyadaki bütün kitapları sayamayacağımız için bu sayıya sonsuz deriz."(8)*

"*Dünyada birçok kitap var ve içindeki harf sayılarını toplayamayız. Sonsuzdur." (5.sınıf)*

"*Sonsuz. Çünkü dünyada sayısı belli olmadığı gibi tarih öncesinden de kayıp kitaplar vardır."(5. sınıf)*

"*Bana göre dünyada var olan kitaplardaki harf sayısı sonsuzdur. Çünkü ne kadar sayı olduğu belli değildir."(7.sınıf)*

Verilen örneklerde görüldüğü üzere öğrencilerin harf sayısı belli olmadığı için sonsuz olduğunu ifade etmişlerdir.

Öğrencilerin % 25'i ise kitapların ya da kitaplardaki harf sayılarının çok fazla olduğunu söyleyerek büyük sayılar ile ilişkilendirmişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrencilerin bir kısmı kitaplardaki harf sayısının çok fazla olduğunu belirterek milyonlarca, trilyonlarca olabileceğini söylerken, bazı öğrenciler ise harf sayısının kaç tane olabileceğine ilişkin tahmini sayılar yazmıştır. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

"97899999887698651098710 tahminime göre…" (7.sınıf)
"Bence tahmin edemeyeceğimiz kadar çoktur. Belki kattrilyon, trilyon kadardır." (5.sınıf)
"Kitapların kaç sayfa olduğuna bağlı.. 99999999 tahmin ederek buldum."(7.sınıf)

Bu kategoride yer alan üç öğrenci ile yapılan görüşmelerde iki öğrenci (Ö1 ve Ö4) dünyada var olan kitap sayısının sınırlı olduğunu ve sayılabileceğini söylemiştir. Harf sayısının sayılması durumunda ise çok büyük bir sayı elde edileceğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerden Ö12 ise milyonlarca kitap olduğunu söyleyerek, kitapların ilk önce sayılamayacağını ancak yeterli imkan sağlandığında kitapların sayılabileceğini söylemiştir. Ö12 ile yapılan görüşme şöyledir:

***A**: Harun, cevabında dünyada var olan kitapların fazla olduğunu söylemişsin, peki ne kadar fazla olabilir?*
***Ö:**Mesela bir kitapta on bin tane harf var desek, dünyada on binlerce hatta milyarlarca kitap var o yüzden sayamayız.*
***A:** Sayamayacağımızı düşünüyorsun öyle mi?*
***Ö**: Deneriz ama vaktimizi çok alır*
***A:** Yeterli vaktimiz olsaydı sayabilir miydik?*
***Ö:** Evet*
***A:** Peki var olan kitaplardaki harf sayısının sınırlı mıdır yoksa sınırsız mıdır?*
***Ö:** Bir sınırı vardır elbet.*

Öğrencilerin % 32'si ise kitaplardaki harf sayısının sayılamayacağını söylemiştir. Bu kategoride yer alan öğrenciler kitaplardaki harf sayısını bulmanın imkansız olduğu ya da kitapların sayısının zamanla değiştiği için saymanın imkansız olduğunu söylemişlerdir. Harf sayısını bulmanın imkansız olduğunu düşünen öğrenciler çok fazla kitap olduğunu, yeterli zamanımız veya yeterli araç gereç olmadığını, saymaya ömrümüz yetmediği şeklindeki gerekçelerle harf sayısının sayılamayacağını ifade etmişlerdir. Bu düşünceye sahip öğrencilerin, cevaplarından bazıları aşağıda verilmiştir.

"*Dünyada binlerce hatta on binlerce kitap olduğu için harf sayısının ne kadar olduğunu bulmak imkansızdır." (5.sınıf)*
"*İnsanoğlu daha böyle bir akla ve teknolojiye sahip değil." (7.sınıf)*
"*Bence bulamayız. Çünkü trilyonlarca kitap vardır ve hepsini saymaya ömrümüz yetmez."(8.sınıf)*

Kitap sayısının zamanla değişeceği için sayılamayacağını söyleyen öğrenciler ise düşüncelerini şu şekilde dile getirmişlerdir.

"*Her saat başı kitap basılıyor, bu yüzden cevabı kimse bilemez."* (6.sınıf)
"*Bence bu bulunamaz. Çünkü dünyada milyarlarca kitap var. Bazıları biliniyor bir kısmı da bilinmiyor. Bitmeyen kitaplar da olduğu için bulunamaz." (7.sınıf)*

Görüşme yapılan öğrencilerden 10 öğrenci harf sayısının farklı gerekçelerden dolayı sayılamayacağını söylemiştir. Bu öğrencilere, " *Farzedelim ki elimizde sürekli elektrik ile çalışan bir robot var. Bu robot harf sayılarını sayabilir mi?"* şeklinde bir soru sorulmuştur. Bu öğrencilerden Ö7, Ö11, Ö15 ve Ö16 olmak üzere dört öğrenci robotun harf sayısını sayabileceğini söyleyerek fikrini değiştirmiştir. Öğrenciler robotun harf sayısını sayabileceğini, sonuç olarak da trilyon katrilyon gibi büyük sayılar elde edilebileceğini düşünmüşlerdir. Harf sayısı sonsuz olduğu için sayılamayacağını söyleyen Ö15 de robotun harfleri sayabileceğini söyleyerek fikrini değiştirmiştir. Ö15 ile yapılan görüşme alıntısı şu şekildedir:

A: *Farzedelim ki elimizde elektrikle çalışan bir robot var. Robot bizim yerimize harfleri saysa, var olan bütün kitaplardaki harfleri sayabilir mi?*

Ö: *Sayabilir ama mesela sonraki çıkan kitaplar falan sonsuz olabilir.*

A: *Peki sayma sonunda nasıl bir sayı ile karşılaşırız?*

Ö: *Oldukça yüksek olabilir.*

A: *Ne kadar yüksek olabilir?*

Ö: *Bence sonsuz yani. Onu hem sayacak hem de gelen kitaplar derken sayı gittikçe büyüyecek.*

Ö15 robotun harf sayısını sayabileceğini fakat sürekli yeni kitaplar eklendiği için onları da sayması gerektiğini böylece harf sayısının gittikçe büyüyeceğini ifade etmiştir. Gittikçe büyüyen sayının da sonsuz olacağını düşünmektedir. Diğer yandan robotun harf sayısını sayabileceğini söyleyerek fikrini değiştiren Ö11 ise sayma sonunda çok büyük sayıların ortaya çıkacağını söyleyerek, düşüncelerini şu şekilde belirmiştir:

Ö: *Şu an var olan kitapları düşünsek bir yerde durur ama sayıları çok büyüktür. İnsanın ömrü yeter mi saymaya bilmiyorum. Ama yetmez diye düşünüyorum. Çünkü bunun için dünyadaki derken önce Türkiye de başka ülkelere de gitmemiz lazım. Bu yüzden saymak zor olur.*

A: *Peki elimizde elektrikle çalışan bir robot olduğunu düşünelim. Robot bizim yerimize harfleri saysa var olan bütün kitaplardaki harfleri sayabilir mi?*

Ö: *Robota koyulan hafıza ilgili olabileceğini düşünüyorum.*

A: *Farzedelim ki istediğimiz kadar hafızası olsun.*

Ö: *O zaman sayabilir ama trilyonları geçer. Benim şu an bilmediğim rakamlar bile olabilir. Onları da geçer.*

Robotun kitaplardaki harf sayısını bulamayacağını söyleyen 6 öğrenci ise kitapların çok fazla olduğunu, sürekli yeni kitaplar oluştuğunu veya harf sayısının sonsuz olduğu için sayılamayacağını ifade ederek gerekçelerini yinelemişlerdir.

Öğrenci cevaplarına sınıf seviyelerine göre bakıldığında ise 5. sınıfların birçoğu (%34) harf sayısını büyük sayılar ilişkilendirdiği görülmektedir. 6. (%32) ve 7. (%34) sınıf öğrencileri ise genellikle harf sayısının sonsuz olduğunu söylerken, 8. sınıf öğrencilerinin birçoğunun (%50) ise harf sayısının sayılamayacağını söylediği görülmektedir.

"*Bir çöldeki kum taneciklerinin sayısı ne kadardır*?" sorusundan elde edilen bulgular

Bu bölümün ikinci alt sorusunda öğrencilere bir çöldeki kum taneciklerinin sayısı sorulmuştur. Öğrenci cevapları doğrultusunda, *"Sonsuz"*, "*Büyük sayılar"*, *"Sayılamaz*" ve "*Sınıflandırılamayan"* şeklinde dört kategoride cevaplar toplanmıştır. Bu kategoriler ve kategorilere ait örnek açıklamalar Tablo 4-7.'de sunulmuştur. Kategorilerin, öğrencilerin öğrenim seviyesine göre dağılımı da Tablo 4-8. 'de verilmiştir.

Tablo 4-7. İkinci sorunun ikinci alt sorusuna ilişkin kategoriler ve örnek açıklamalar

Kategoriler		***Açıklama***
1. Sonsuz		Kum taneciği sayısı sonsuza kadar devam eder.
		Kum taneciği sayısı sınırsızdır.
		Sonsuzdur,ör:89456……
2. Büyük sayılar		Sınırlı bir sayı yazma, ör: 9999999.
		Milyonlarca, katrilyondan fazla, trilyonlarca
3. Sayılamaz	İmkansız	Kum taneciği sayısı çok fazla olduğu için saymak imkansızdır.
		Yalnızca 5 duyu organı yardımıyla sayılamaz.
		Saymaya ömrümüz yetmez.
	Boyut	Kum tanecikleri sayılamayacak kadar küçük oldukları için sayılamaz.
	Değişkenlik	Sayısı çöle göre değişeceği için sayılamaz.

Öğrencilerin % 19'u kum taneciklerinin sayısının sonsuz olduğunu söylemiştir. Öğrenciler, sonsuz olmasının nedeni olarak genellikle çölün alanının çok büyük olmasını veya kum taneciklerinin çok küçük olmasını göstermişlerdir.

Tablo 4-8. İkinci sorunun ikinci alt sorusuna ilişkin kategorilerin, sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonsuz	9	18	15	38	15	34	6	14	33	19
Büyük sayılar	15	30	10	25	7	16	8	19	40	23
Sayılamaz	14	28	9	22	15	34	21	50	71	40
Sınıflandırılamayan	12	24	6	15	7	16	7	17	32	18
Toplam	50		40		44		42		176	% 100

Bu kategoride yer alan öğrencilerden bazılarının cevapları şu şekildedir:

"Bu sonsuzdan da fazla olabilir çöl çok büyük bir yer ve kum tanecikleri çok küçük." (7.sınıf)

"Bir çöldeki kum taneciklerinin sayısı sonsuzdur. Say say bitmez."(6.sınıf)

"Sonsuzdur. Çünkü topraklar her zaman parçalanabilir ve yeni kumlar oluşur." (5.sınıf)

"Kum taneciklerinin sayısı yıldızların sayısına eşittir varsayımı vardır. Yani sayılamaz ve sonsuzdur şeklinde ifade edilir." (6.sınıf)

Yukarıda verilen örneklerde görüldüğü üzere öğrenciler yeni kumların oluşabileceğini bu nedenle sayılarının artacağını düşünerek sonsuz olduğunu söylemişlerdir. Görüşme yapılan öğrencilerden 7.sınıf öğrencisi Ö10, durum tespit testindeki cevabında kum taneciklerinin sayısının bitmeyeceğini söylemiştir. Yapılan görüşmede ise Ö10 yeni kum taneciklerinin oluşması ya da oluşmaması durumunda kum tanecikleri sayısının farklı olabileceğini ifade etmiştir. Ö10'nun bu soru ile ilgili görüşleri aşağıda verilmiştir.

Cevap: *Çöldeki kum taneciklerinin sayısı bitmez.*

A: *Cevabında çöldeki kum taneciklerinin sayısın bitmediğini söylemişsin. Cevabını biraz daha aç bilir misin?*

Ö: *Bir çölde kum taneleri çoktur. Küçüktürler onları saymaya kalksak bitmez.*

A: *Peki kum taneciklerinin sayısı sınırlı mıdır sınırsız mıdır?*

Ö: *Yani evet hepsini toplamaya kalkarsak biter tabi çok büyük bir sayı çıkar.*

A: *Nasıl bir sayı çıkar?*

Ö: *Baya büyük bir sayı çıkar. Çünkü çölde kum tanelerinden başka bir şey yok. Kum taneleri her gün başka başka çıkmıyorsa.*

A: *Başka başka çıkmıyorsa derken ne demek istedin?*

Ö: *Yani her gün yenilemiyorsa kendini. Zaten yenilerse hiç sayılmaz yani sonsuz olur.*

Ö10 kum taneciklerinin sayılabileceğini ve büyük sayılar elde edilebileceğini ancak yeni kum tanecikleri oluşması durumunda kum taneciği sayısının belirsiz sonsuz olacağını düşünmüştür. Bu durumda kum taneciklerinin sayılamayacağını ifade etmiştir. Diğer yandan bazı öğrenciler kum taneciklerin sayılamadığı için sayısının sonsuz olacağını şeklinde açıklama yapmışlardır. Bu kategoride yer alan Ö6, yapılan görüşmede düşüncesini şu şekilde dile getirmiştir.

"*Kum taneleri ufak parçalar ve onları teker teker sayamadığımız için sonsuz tane vardır." (6.sınıf)*

Öğrencilerin % 23'ü ise kum taneciklerinin sayısının çok fazla olduğunu söyleyerek büyük sayılar ile ilişkilendirmişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrenciler *"milyonlarca, trilyonlarca vb. kum taneciği vardır* "şeklinde ya da kum taneciklerinin sayısı ile ilgili tahmini sayılar yazarak soruyu cevaplamışlardır. Bu kategoride örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

"*Milyonlarca hatta trilyonlarca olabilir. Çünkü bir çöl ve kum taneleri bizi şaşırtacak derecede çok olabilir*." (8.sınıf)

"*2 milyondan bile fazladır çünkü kum tanecikleri küçüktür ve çölü doldurmak için baya bir fazladırlar*." (8.sınıf)

Bu kategoride yer alan 9 öğrenci ile yapılan görüşmelerde 4 öğrenci kum taneciklerinin sayısının sınırlı ve sayılabilir büyük sayılar olduğunu söylerken, 5 öğrenci kum taneciklerinin sınırlı sayıda olduğunu ancak miktarlarının sayılamayacağını söylemiştir. Kum taneciklerinin sayılabileceğini söyleyen 6. sınıf öğrencisi Ö8 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

Cevap: *Çok fazladır çünkü küçük ve fazladırlar.*
A: *Burada çok fazladır derken ne demek istedin?*
Ö: *Yani kum tanecikleri sayılabilir çünkü kitapların yerine yeni kitaplar ekleniyor ama çöldeki kum tanecikleri benim bildiğim kadarıyla daha fazla kum eklenmiyor o yüzden sayabiliriz. Çünkü yeni şeyler eklenmiyor aynıdır.*
A:*Anladım, mesela hepsini saydığımızda nasıl bir sayı ile karşılaşırsın?*
Ö: *Sonsuz değildir bence. Çünkü sayarsın sayarsın yine çok yüksek bir sayı çıkar ama kitap kadar şey değildir. Çünkü kitaplarda sayarsın yenisi gelir ama biter.*

Kum taneciklerinin sayılamayacağını düşünen öğrenciler ise kum taneciklerinin sınırlı sayıda olduğunu ancak çok fazla ve küçük oldukları için sayılamayacağını söyleyerek düşüncelerini dile getirmişlerdir.

Öğrencilerin % 40'ı ise kum taneciklerinin sayılamayacağını söylemiştir. Bu kategoride yer alan öğrencilerin bir kısmı kum taneciklerinin sayılmasının imkansız olduğunu ifade etmiştir. Bu öğrenciler "*çok fazla kum taneciği olduğu için sayma imkansızdır*", "*yeterli araç gereç yoktur" , "saymaya ömrümüz yetmez" veya "yalnızca 5 duyu organıyla sayılamaz*" şeklinde gerekçeler ile kum taneciklerinin sayılmasının imkansız olduğunu dile getirmişlerdir.

Öğrencilerin bir kısmı ise *"kum tanecikleri sayılamayacak kadar küçük oldukları için sayamayız"* şeklinde açıklama yaparak, kum taneciklerinin boyutlarından dolayı sayılamayacağını söylemişlerdir.

Kum taneciklerinin sayılamayacağını söyleyen öğrenciler, bir başka gerekçe olarak kum taneciklerinin sayısının zamanla değişeceğini göstermiştir. Bu öğrenciler zamanla yeni kumların oluştuğunu, rüzgar ile farklı yerlerden kumlar geleceğini veya kum taneciklerinin parçalanarak yeni kumlar oluşabileceğini belirterek sayılarının değişeceğini ifade etmişlerdir. Kum taneciklerinin sayısının hesaplanamayacağını söyleyen 6. sınıf öğrencisi Ö7 ile yapılan görüşmede, Ö7 kum tanecikleri miktarının zamanla artacağını ve sınırsız olduğunu belirterek, düşüncelerini şu şekilde açıklamıştır:

Cevap: *Çöldeki kum taneciklerinin toplam sayısı da hesaplanamaz.*
A: *Burada neden böyle düşündüğünü açıklayabilir misin?*
Ö: *Çünkü kum tanecikleri çok küçüktür ve de çöl dediğine göre burada çöl zaten uzun bir yerdir. Biz zaten kumu kazdıkça kum çıkar o yüzden hesaplanamaz.*
A: *Biraz önce kitapların sayısını sınırlı ama çok fazla olduğu için sayamayız dedin peki çöldeki kum tanecikleri sınırlı mıdır yoksa sınırsız olduğu için mi sayamayız?*
Ö: *Bence sınırsız olduğu için sayamayız çünkü kazdıkça kazılır.*

Farklı gerekçelendirmeler ile kum taneciklerinin sayılamayacağını söyleyen 11 öğrenci ile yapılan görüşmelerde, öğrencilere " *Farzedelim ki elimizde sürekli elektrik ile çalışan bir robot var. Bu robot kum taneciklerini sayabilir mi?"* şeklinde bir soru sorulmuştur. Bu öğrencilerden, üç tanesi (Ö1, Ö11 ve Ö15) fikrini değiştirerek robotun kum taneciklerini sayabileceğini söylemiştir. Ö1 ve Ö11, sonlu sayıdaki kum taneciğini robotun sayabileceğini söylemişlerdir. Diğer yandan 8.sınıf öğrencisi Ö15 ise testte verdiği cevapta kum taneciği sayısının sonsuz olduğunu söylemiştir ancak robotun kum taneciklerini sayması durumunda büyük sayı elde edileceğini söylemiştir. Büşra ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

Cevap: *Sonsuzdur. Çünkü her bir taneciği sayma ihtimalimiz %0 olur. Çünkü bir yandan sayıp diğer yandan sayıp bir yandan rüzgar ile gelen tanecikler olacaktır.*
A: *Cevabında ne demek istedin? Biraz daha açabilir misin?*
Ö:*Çöldeki kum tanecikleri diyor. Yani çölde sürekli bir rüzgar oluyor kum tanecikleri kayıyor mesela bir taraftan saymaya çalışsak veya da başka bir kıtaya götürsek orda da sayamayız çünkü sürekli bir rüzgar olacak. Olur olmadık yerde diğer taraftarlara kayabilir yani sayma ihtimalimiz bence yüzde sıfır.*
A:*Peki, farzedelim ki elimizde sürekli elektrik ile çalışan bir robot var. Bu robot*

kum taneciklerini sayabilir mi?

Ö: *Sayabilir ama robotun oldukça büyük olması lazım.*

A: *Peki robot kum taneciklerini saydığında nasıl bir sayı ile karşılaşırız?*

Ö: *Sayı gerçekten büyük olacak. Çünkü oldukça kum gelecek. Orda olanları sayacak hem de rüzgar ile gelenleri. Bu yüzden büyük bir sayı olur.*

Robotun kum taneciklerini sayamayacağını söyleyen 8 öğrenci ise benzer gerekçeler ile kum taneciklerini sayılamayacağını söyleyerek, cevaplarını yinelemişlerdir.

Kum taneciklerinin sayısı ile ilgili öğrenci cevaplarına sınıf bazında bakıldığında ise 5. sınıf öğrencilerin birçoğu (% 30) çöldeki kum taneciği sayısını büyük sayılar ile ilişkilendirirken, 6. sınıf öğrencilerinin birçoğu (% 38) ise kum tanecikleri sayısının sonsuz olduğunu ifade etmiştir. 7. sınıf öğrencileri ise genellikle kum taneciği sayısının sonsuz (%34) olduğunu veya sayılamayacağı (%34) cevaplarını vermişlerdir. 8. Sınıf öğrencilerine bakıldığında ise öğrencilerin % 50'sinin kum taneciği sayısının sayılamayacağını söylediği görülmüştür.

"Dünyada var olan bütün kitaplardaki toplam harf sayısı mı yoksa bir çöldeki kum taneciği sayısı mı fazladır?" sorusundan elde edilen bulgular

İkinci sorunun bu bölümünde öğrencilere dünyada var olan kitaplardaki toplam harf sayısı ile bir çöldeki kum taneciklerinin sayısının karşılaştırılması istenmiştir. Öğrencilerin cevapları 5 kategori altında toplanmıştır ve bu kategoriler kendi içinde alt kategorilere ayrılmıştır. Öğrencilerin cevapları ve cevapların sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 4-9.'da verilmiştir.

Tabla 4.9.' da görüldüğü üzere öğrencilerin % 48'i çöldeki kum taneciklerinin sayısının daha fazla olduğu söylemiştir. Öğrencilerin cevapları, yapmış olduğu açıklamalar doğrultusunda kendi içine kategorilere ayrılmıştır. *"Sonsuz-Sonsuz karşılaştırılması", "Sonsuz- Sonlu karşılaştırılması", Sınır Belirtilmemiş" ve "Nedensiz"* olmak üzere dört kategori oluşturulmuştur.

Tablo 4-9. İkinci sorunun üçüncü alt sorusuna ilişkin öğrenci cevapları ve cevapların sınıf seviyelerine göre dağılımı

Öğrenci Cevapları	*Sınıf Seviyesi*									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Çöldeki kum taneciği daha fazladır	24	48	18	45	27	61	17	40	86	49
Harf sayısı daha fazladır	9	18	10	24	7	16	8	20	34	19
İkisinin de sayıları eşittir	4	8	4	10	4	9	2	5	14	8
Sayıları karşılaştırılamaz	9	18	3	8	5	11	11	26	28	16
Sınıflandırılamayan	4	8	5	13	1	3	4	9	14	8
Toplam	50		40		44		42		176	%100

Sonsuz-Sonsuz kategorisinde yer alan öğrenciler, harf sayısını ve kum taneciği sayısının sonsuz olduğunu düşünerek harf sayısı ve kum taneciği sayısı arasında karşılaştırma yapmıştır. Öğrenciler her iki miktarında sonsuz olduğunu düşünerek çöldeki kum tanecikleri sayısının daha fazla olduğunu söylemiştir. 5 ve 8. sınıflardan olmak üzere öğrencilerin %6'sı bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoriye örnek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

"İkisi de sonsuzdur ama çöldeki kum taneciği daha fazladır."(8.sınıf.

"İkisi de sonsuzdur, zamanla artar ama kum taneciklerinin sayısı daha fazladır."(5.sınıf)

Bunun yanı sıra öğrenciler ile yapılan görüşmelerde, harf sayılarının ve kum tanecikleri sayısının sonsuz olduğunu düşünen öğrenciler, karşılaştırma yaparken düşüncelerini şu şekilde dile getirmişlerdir:

"Kum tanecikleri daha fazladır ama şu kadar fazladır diyemeyiz çünkü ikisi de sayılamaz oldukça fazladırlar." (8.sınıf-Ö15)

"Kum tanecikleri daha küçük ve daha hızlı artar bu yüzden kum tanecikleri daha fazladır."(5.sınıf-Ö2,Ö4)

Tablo 4-10. Kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Çöldeki kum tanecikleri daha fazladır	**Sınıf Seviyesi**									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonsuz-Sonsuz	5	10	0	0	0	0	5	12	10	6
Sonsuz-Sonlu	3	6	0	0	1	2	1	2	5	3
Sınır Belirtilmemiş	16	32	15	37	16	37	10	24	57	32
Nedensiz	0	0	3	8	10	22	1	2	14	8
Toplam	24		18		27		17		86	% 49

Sonsuz-Sonlu karşılaştırılması kategorisinde ise öğrenciler kum taneciklerinin sayısının sonsuz olduğunu, harf sayısının ise sonlu olduğunu düşünmüşlerdir. Tablo 4-10.'da görüldüğü üzere öğrencilerin % 3'ü(5., 7. ve 8.sınıf) harf sayısı ve kum taneciği arasında karşılaştırma yaparken bu düşünceyi benimsemiştir. Bu kategoriye örnek olabilecek iki öğrencinin cevabı aşağıda verilmiştir;

"Kitaplar sayarak biter ama kum tanecikleri sonsuzdur."(5.sınıf)
"Kitapların sonu vardır ama çöllerin sonu yoktur bu yüzden kum tanecikleri daha fazlardır." (8.sınıf)

Bir çöldeki kum taneciği sayısının daha fazla olduğunu söyleyen öğrenciler, kum taneciklerinin ve harf sayısının sayılamayacak kadar çok fazla olduğunu söyleyerek harf sayısı ile kum taneciği sayısı arasında karşılaştırma yapmışlardır. Ancak bu öğrenciler kum taneciği sayısının ve harf sayısının sonsuz olduğuna yönelik ya da sınırlı olduğuna yönelik bir açıklama yapmamışlardır. Bu nedenle bu öğrencilerin cevapları "*sınır belirtilmemiş*" kategorisinde değerlendirilmiştir. Öğrencilerin % 32'si bu şekilde düşünmektedir. Bu kategoriye örnek olabilecek iki öğrencinin cevabı aşağıda verilmiştir.

"İkisi de sayılamayacak kadar çoktur ama kum tanecikleri daha fazladır."(6.)
" İkisini de saymak mümkün değildir ama kum tanecikleri daha fazladır."(8.)

Bir diğer kategori olan “*nedensiz*” kategorisinde yer alan öğrenciler ise herhangi bir açıklama yapmadan çöldeki kum taneciklerinin sayısının daha fazla olduğunu söylemişlerdir. Öğrencilerin % 8’i bu kategoride yer almaktadır.

Öğrencilerin % 19’ u ise soruyu “harf sayısı kum taneciklerinin sayısından daha fazladır” şeklinde cevaplamıştır. Soruyu bu şekilde cevaplandıran öğrenciler yapmış olduklar açıklamaya gör cevapları üç kategoride toplanmıştır. Bu kategoriler “*Sonsuz-sonlu*” , “*Sınır Belirtilmemiş*” ve “*Nedensiz*” şeklindedir. Kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 4-11.’de verilmiştir.

Tablo 4-11. İkinci sorunun üçüncü alt sorusuna ilişkin kategoriler ve kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kitaplardaki harf sayısı daha fazladır	**Sınıf Seviyesi**									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonsuz-Sonlu	0	0	5	12	0	0	4	10	9	5
Sınır Belirtilmemiş	9	18	0	0	6	14	4	10	19	11
Nedensiz	0	0	5	12	1	2	0	0	6	3
Toplam	9		10		7		8		34	% 19

Sonsuz-Sonlu kategorisine, kitap sayısının sonsuz olduğunu ve kum taneciklerinin sayısının sınırlı olduğunu düşünen öğrenciler dahil edilmiştir. 6. ve 8. sınıf öğrencileri olmak üzere öğrencilerin % 5’i bu şekilde düşünmüştür. Öğrenciler harf sayısı ve kum tanecikleri sayısı arasında karşılaştırma yaparken, kullanmış olduğu gerekçelendirmelere örnek iki öğrencinin cevabı şöyledir:

“*Her gün kitap basıldığı için sürekli sayısı artar ama çöller sabittir*” (8.sınıf)
“*Çöller sınırlıdır ama kitap sayıları sınırlı değildir bu yüzden kitap sayısı daha fazladır.*“ (6.sınıf)

Bu kategoride yer alan öğrencilerden 5.sınıf öğrencisi Ö3 ile yapılan görüşmede, Ö3 harf sayısı ve kum taneciği sayısı ile ilgili olan birinci ve ikinci soruda verdiği cevapta harf sayısının sonsuz ve kum taneciklerinin ise sınırlı olduğunu söylemiştir. Ancak harf sayısını ve kum taneciklerinin sayısının karşılaştırılması istenildiği bu soruda yapılan Ö3, yapılan görüşmede kum tenciklerinin sayısının daha fazla olduğunu ifade ederek çelişkili cevaplar verdiği görülmüştür. Ö3 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

Cevap: *Kum sayıları daha fazladır. Çünkü bazı yerlerde kitap bulunmaz ama çölde kesinlikle kum taneleri bulunur.*

A: *Cevabında ne demek istediğini biraz daha açabilir misin?*

Ö: *Kum taneleri bütün dünyada var, karada da var. Kitap da bulunuyor ama pek fazla değildir. Kum taneleri daha fazladır.*

A: *Kum taneciklerinin daha fazla olduğunu düşünüyorsun yani?*

Ö: *Evet.*

A: *Biraz önce kitaplardaki harf sayısının sonsuz ancak kum taneciklerinin sınırlı olduğunu söyledin. Bu durumu nasıl açıklarsın?*

Ö: *Böyle bakınca kitap daha fazla gibi oluyor. Ama şu an kum taneleri daha fazla gibi geliyor. Çünkü bir toprağı kazarsak falan kum taneleri çıkar, o yüzden daha fazladır.*

Öğrencilerin % 11' ise kitap sayısının çok fazla olduğunu söylemiş ancak bir sınır vermediği için, öğrenciler "sınır belirtilmemiş" kategorisine dahil edilmiştir. Bu kategoride yer alan öğrenciler harf sayılarının ve kum tanecilerinin sayılamayacak kadar çok olduğunu düşünmektedirler. Bu soru ile ilgili düşüncelerini ise öğrencilerin birçoğu "*Harf sayılarını ve kum taneciklerini saymak mümkün değildir ama kitaplar daha fazladır"* şeklinde ifade etmişlerdir. Diğer yandan öğrencilerin %3 'ü ise herhangi bir açıklama yapmadan harf sayısının daha fazla olduğunu söylediği için "Nedensiz" kategorisine dahil edilmiştir.

Harf sayılarının ve kum taneciklerinin sayısının eşit olduğunu veya sayılarının karşılaştırılamayacağını düşünen öğrenciler bulunmaktadır. Öğrencilerin % 8'i harf sayılarının ve kum taneciklerinin sayılarının eşit olduğunu belirterek, *"İkisi de çok fazla* *olduğu için eşittir*.” veya “*İkisini de saymak mümkün olmadığı için sayıları eşittir*” şeklinde düşüncelerini ifade etmişlerdir.

Harf sayısının ve kum taneciği sayısının eşit olduğunu düşünen 6. sınıf öğrencisi Ö6, yapılan görüşmede harf sayısının ve kum taneciği sayısının sorulduğu diğer sorulara verdiği cevaplarda harf sayısının ve kum taneciğinin sayısının sonsuz olduğunu ifade etmiştir. Ancak harf sayısının ve kum taneciği sayısının karşılaştırılması üzerine yapılan görüşmede Ö6, cevaplarının çeliştiğini söylemiştir. Ö6’ının soru ile ilgili yorumu şöyledir:

> ***Cevap:*** *Bence ikisi de oldukça fazla. Çünkü kitaplar oldukça fazla ve her geçen gün kitap üretimi fazlalaşıyor kum tanecikleri de oldukça fazla olduğu için ikisi de eşit.*
>
> ***A:*** *Bu soruda kum taneciklerini ve harf sayılarını karşılaştırmanı istemişim. İkisinin de sayısının sınırsız olduğunu söylemiştir bu durumda eşit olmalarını nasıl açıklarsın?*
>
> ***Ö:*** *Aslında biraz çelişiyor cevaplar ama..*
>
> ***A:*** *Nasıl yani?*
>
> ***Ö:*** *Aslında dünyadaki kitapları toplarsak çok fazla bir sayı elde edebiliriz. Ama çöldeki kum tanecikleri de çok fazla sayı. Bence ikisi de eşit.*

Ö6, harf sayısının ve kum taneciği sayısının eşit olmasını, sayıları çok fazla olduğu için eşittir şeklinde açıklamıştır. Ancak sonsuz sayıda olduğunu düşündüğü harf sayısı ve kum taneciklerinin sayısı arasında nasıl karşılaştırma yaptığını tam olarak açıklayamadığı görülmektedir.

Öğrencilerin % 16’i ise harf sayıları ile kum taneciklerinin sayıları arasında bir karşılaştırma yapılamayacağını söylemişlerdir. Bu öğrenciler, sonsuzlukların karşılaştırılamayacağını veya harf sayısının ve kum taneciklerinin sayısı belirsiz olduğu için karşılaştırmanın yapılamayacağını şeklinde düşüncelerini açıklamışlardır. Kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 4-12.’de verilmiştir.

Tablo 4-12. İkinci sorunun üçüncü alt sorusuna ilişkin kategoriler ve kategorilerin sınıf seviyesine göre dağılımı

Kategoriler	*Sınıf Seviyesi*									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonsuzluklar karşılaştırılamaz	2	4	0	0	2	5	4	10	8	5
Belirsiz	7	14	3	8	3	7	7	17	20	11
Toplam	9		3		5		11		28	% 16

Öğrencilerin % 11'i belirsizlik durumu mevcut olduğunu düşünmektedir. Bu öğrenciler "*Sayılarını bilmeden karşılaştırma yapamayız*" veya "*İkisi de sayılamayacağı için karşılaştıramayız"* şeklinde gerekçelerini beyan etmişlerdir.

Öğrencilerin % 5'i ise harf sayısının ve kum taneciği sayısının sonsuz olduğunu söyleyerek, ikisi de sonsuz olduğu için karşılaştırılmayacağını ifade etmiştir. Bu kategoriye örnek olabilecek üç öğrencinin cevabı aşağıda verilmiştir.

"İki tane sonsuzluk ifade eden şey karşılaştırılamaz."(8.sınıf)
"İkisi de sonsuzdur ve sonsuzlukların eşit olup olmadığı bilinemez."(7. sınıf)
"İkisi de sonsuz olduğu için karşılaştırılamaz." (5.sınıf)

Öğrencilerin % 8'u ise cevap olarak bilmiyorum, anlamadım şeklinde ifadeler yazmış ya da soruyu boş bırakmayı tercih etmiştir. Bu nedenle bu öğrenciler sınıflandırılamayan kategorisine dahil edilmiştir.

Harf sayısı ve kum taneciklerinin sayısının karşılaştırılması ile ilgili öğrenci cevaplarına sınıf bazında bakıldığında ise 5. sınıf (% 48), 6. sınıf (% 45), 7.sınıf (% 61) ve 8.sınıf (% 40) olmak üzere bütün sınıf seviyelerindeki öğrencilerin bir çoğu bir çöldeki kum taneciği sayısının, dünyada var olan kitaplardaki toplam harf sayısından daha fazla olduğunu ifade ettikleri görülmüştür.

4.3. Öğrencilerin sayı bağlamında sonsuzluk kavramına ilişkin açıklamaları

4.*3.1. Üçüncü Sorudan Elde Edilen Bulgular*

3.SORU. *Aşağıda verilen ifadede noktalı yere kaç tane sayı yazılabilir?* *Nasıl bulduğunuzu açıklayarak yazınız.*

3 < …..

Bu soruda öğrencilere 3’ten büyük kaç tane sayı yazılabileceği sorulmuştur. Öğrencilerin cevapları ve yapmış olduğu açıklamalar doğrultusunda, *“Sonsuz Sayı”*, *“Sınır Belirtmemiş”*, *“Sınırlı Sayı”* ve *“Sınıflandırılmayan”* olmak üzere dört kategori oluşturulmuştur. Cevap olarak bilmiyorum, anlamadım şeklinde yazan öğrenciler ve soruyu boş bırakmayı tercih eden örenciler sınıflandırılmayan kategorisinde dahil edilmiştir. Oluşturulan kategoriler, alt kategoriler ve kategorilere ait örnek açıklamalar Tablo 4-13’de sunulmuştur. Kategorilerin, öğrencilerin öğrenim seviyesine göre dağılımı ise Tablo 4-13’de sunulmuştur.

Tablo 4-13. Üçüncü soruya ilişkin kategoriler ve örnek açıklamalar

Kategoriler	***Alt Kategoriler***	***Örnek Açıklama***
1. Sonsuz Sayı	Dinamik Sonsuzluk	2,1,0,-1…. Sonsuza kadar gider Sonsuz, çünkü sayıların sonu yoktur. Bulabileceğimiz en büyük sayıya bir eklersek daha büyük sayı elde ederiz.
	Statik Sonsuzluk	Sonsuz, ∞ 3’ten büyük tüm sayılar 1,2, 3 hariç tüm sayılar
2. Sınır Belirtilmemiş	3’ten büyük sayılar(reel sayılar, pozitif sayılar, tüm sayılar, kesirler) İstediğimiz kadar sayı yazabiliriz	
3. Sınırlı Sayı	2, 3, 10 tane vb. Kağıda sığdırabileceğim kadar sayı yazabilirim 9999999, 10000 tane yazılabilirim	

Tablo 4-14. Üçüncü soruya ilişkin kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler		*Sınıf Seviyesi*									
		5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
		f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonsuz	*Dinamik sonsuzluk*	7	14	10	25	8	18	15	36	40	23
	Statik sonsuzluk	20	40	25	62	23	52	19	45	87	49
Sınır Belirtilmemiş		3	6	2	5	4	9	4	9	13	8
Sınırlı Sayı		17	34	3	8	8	18	4	10	32	18
Sınıflandırılmayan		3	6	0	0	1	3	0	0	4	2
Toplam		50		40		44		42		176	%100

Üçten büyük sayılara "sonsuzdur" cevabı veren öğrenciler, yapmış oldukları açıklamalara göre dinamik sonsuzluk ve statik sonsuzluk şeklinde kategorize edilmiştir. Daha sonra bu kategoriler "sonsuz sayı" kategorisi adı altında toplanmıştır. Birinci soruda dinamik sonsuzluk kavramı, devam eden bir süreç olarak tanımlanmıştır. Kolar ve Cadez (2012), doğal sayıların 1, 2, 3, 4… şeklinde sayılmasının sonu ve son terimi belirlenemeyen sonsuz bir süreç olduğunu ifade etmiştir. 3'ten büyük sayılar için, "4, 5, 6…" şeklinde bir ifade, devam eden bir süreci temsil etmektedir ve son terimi belli değildir. Bu açıdan, sayıların devam ettiğini ve sonu olmadığı düşüncesini içeren öğrenci cevapları bu kategoriye dahil edilmiştir. Öğrencilerin % 23'ü bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoriye örnek olabilecek öğrencilerin cevaplarından bazıları aşağıda verilmiştir.

"Sonsuzdur çünkü bulabileceğimiz en büyük sayıyı yazsak ve ona bir eklediğimizde daha büyük bir sayı bulabiliriz."(6.sınıf)

"3 < 4<5<6<7<8<9<…. Böyle devam eder çünkü sayılar sonsuzdur."(5.)

"*4'ten başlayıp sonsuza kadar gider*." (7. sınıf)

Öğrencilerin birçoğu sayıları ekleyerek devam edildiğinde sürekli daha büyük sayılar elde edileceğini ve bu işlemin sonsuza kadar devam ettirilebileceğini düşünmektedirler. Bu kategoride yer alan 8. sınıf öğrencisi Ö15 ile yapılan görüşmede Ö15, soru ile ilgili düşüncelerini şu şekilde dile getirmiştir.

A: *3'ten büyük buraya kaç tane sayı yazılabilir?*

Ö:*4, 5-, 6, 7, 8, 9, ya bu gidebilir.*

A: *Başka?*

Ö: *Sonsuz tane gelecek.*

A:*Sonsuz tane.*

Ö:*Evet. Sayıları yan yana koyunca sonra yine üçten büyük sayılar olucak sonuçta.*

A: *Kaç tane olduğunu bulabilir miyiz peki?*

Ö:*Bulamayız.*

A:*Peki sonsuz sayı olduğuna nasıl karar verdin?*

Ö: *çünkü her sayıyı yan yana koyunca üçten büyük olacak. Buradan zaten gittikçe büyüyor sayı.*

Statik sonsuzluk kategorisinde ise statik sonsuzluk kavramı sonsuzluğun bir bütün olarak algılanması şeklinde tanımlanmıştır. Bu nedenle "∞", "sonsuz" ve "tüm sayılar" gibi cevaplar bu kategoriye dahil edilmiştir. Öğrencilerin % 49'u bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoriye örnek olabilecek öğrenci cevapları:

"Sonsuz sayı yazılabilir fakat 0 ve 1 yazılamaz."(6.sınıf)

"Üçten büyük her sayı olur bu yüzden sonsuzdur."(7.sınıf)

"Sonsuz, çünkü sayılar sonsuzdur."(8.sınıf)

Bu kategoride yer alan 8. sınıf öğrencisi Ö13 ile yapılan görüşmede Ö13 soru ile ilgili yorumu şu şekildedir:

Cevap: *3'ten büyük tüm reel sayılar yazılabilir.*

A: *Cevabını biraz daha açabilir misin?*

Ö: *Burada 3'ü sayı doğrusunda düşünürsek 3'ün sağında olan bütün sayılar, bütün noktalar yazılabilir.*

A: *Peki sayı olarak örnek verebilir misin?*

Ö: *4, 5, 6 ,7, 1 milyon, 2 milyon.*

A: *peki bu sayıların hepsini sayabilir miyiz?*

Ö: *sayamayız. Çünkü sonsuzdur.*

Ö13, sayıların sonsuz olduğunu belirtmiş ve sayıların tamamının yazılabileceğini söylemiştir. Burada, öğrencinin "bütün sayılar" ve " bütün noktalar" ifadelerini kullanması sonsuzluğu bir bütün olarak görme düşüncesini desteklediğini söyleyebiliriz.

Bu soruda ortaya çıkan diğer kategoriler ise "sınır belirtilmemiş" ve "sınırlı sayı" kategorileridir. Sınır belirtilmemiş kategorisinde, öğrenciler cevaplarında kaç tane sayı yazılabileceği ile ilgili bir sayı söylememiştir ve sayıların üst sınırından bahsetmemiştir. Öğrencilerin % 7'si soruyu bu şekilde cevaplandırmıştır. Bu kategoride yer alan bazı öğrencilerin cevapları şöyledir:

"*Üçten büyük bir çok sayı yazılabilir." (6.sınıf)*

"İstediğimiz kadar sayı yazabiliriz." (5.sınıf)

Sınırlı sayı kategorisinde yer alan öğrenciler ise cevap olarak tahmini bir sayı yazan ya da sınır belirten bir ifade yazmışlardır. Öğrencilerin % 18'i üçten büyük sınırlı bir sayı yazılabileceğini söylemiştir. Bu kategoride yer alan bazı öğrenci cevapları:

"*Sonsuz tane denebilecek kadar yoktur. 3'ten küçük iki tamsayı ve aralarında bazı kesirler vardır." (8.sınıf)*

"999.999.999. Çünkü 3'ten büyük bir sürü rakam var."(6.sınıf)

"*Nokta sayısınca sayı yazabilirim..6, 5 tane vb.."(5.sınıf)*

Verilen örneklerde de görüldüğü üzere öğrenciler 3'ten büyü sayılar için sınırlı sayıda kesir yazılabileceğini düşünmektedirler. Diğer yandan öğrencilerin % 2'si de sınıflandırılamayan kategorisinde yer almaktadır.

Öğrenci cevaplarına sınıf seviyelerine göre bakıldığında ise 5. sınıfların (% 54), 6. sınıfların (% 87) , 7. sınıfların (% 70) ve 8. sınıfların (% 81) birçoğu üçten büyük sayılar için yazılabilecek sayıların sonsuz sayıda olduğunu söyledikleri görülmüştür.

4.3.2. Dördüncü Sorudan Elde Edilen Bulgular

4. SORU. *Aşağıdaki soruları cevaplayınız.*

c. *0 ile 1 arasında kaç tane kesir vardır?*

d. *Kesirlerin hepsini yazabilir misiniz? Eğer kesirlerin hepsini yazabilirseniz nasıl bulduğunuzu açıklayarak yazınız.*

Bu soru kesirler ile ilgili olup, iki alt soru şeklinde sorulmuştur. A şıkkında 0 ile 1 arasında kaç tane kesir olduğu sorulmuş olup, B şıkkında ise öğrencilere bu kesirlerin hepsinin yazılıp yazılamayacağı sorulmuştur. İkinci soru birinci soruya bağlı olarak cevaplanması gerekirken öğrencilerin çoğu birinci sorudan bağımsız bir şekilde kesirlerin tamamını düşünerek cevaplamıştır. Bu nedenle, sorulardan elde edilen veriler ayrı analiz edilmiştir ve ayrı başlıklar altında verilmiştir.

"0 ile 1 arasında kaç kesir vardır" sorusundan elde edilen cevaplar, *"sonsuz kesir"*, *"sınırlı sayıda kesir"*, *"belirsizlik"*, *"kesir yoktur"* ve *"sınıflandırılmayan"* şeklinde beş kategoride ele alınmıştır. Bu kategoriler ve bu kategorilere ait açıklamalar Tablo 4-15.'de sunulmuştur. Kategorilerin, sınıf seviyesine göre dağılımı da Tablo 4-16.'da sunulmuştur.

Tablo 4-15.Dördüncü sorunun birinci alt soruna ilişkin kategoriler ve örnek açıklamalar

Kategoriler	*Sonsuzluk Düşüncesi*	*Örnek Açıklama*
Sonsuz	*Potansiyel sonsuzluk*	Kesirleri sürekli bölebiliriz bu yüzden sonsuz kesir vardır.
		½, 1/3, ¼…. Kesirler böyle sonsuza kadar devam eder.
	Fiili sonsuzluk	∞ kesir vardır.
		Sayılar sonsuz olduğu için kesirler de sonsuzdur.
Sınırlı sayıda kesir	*Büyük sayılar*	Katrilyondan fazla kesir vardır.
		On binlerce kesir olabilir ama bir sınırı vardır.
	Küçük sayılar	1,2,8,10,100 ..vb. kesir vardır.
Belirsizlik		Kaç kesir olduğunu bilemeyiz.
		Ne kadar istersem o kadar kesir yazabilirim.
Kesir yoktur		Hiç kesir yoktur.

Tablo 4-16. Dördüncü sorunun birinci alt soruna ilişkin kategorilerin, sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler		***Sınıf Seviyesi***									
		5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
		f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonsuz	*Dinamik sonsuzluk*	2	4	2	5	5	11	2	5	11	6
	Fiili sonsuzluk	12	24	11	28	11	25	24	57	58	33
Sınırlı Sayıda Kesir		18	36	9	22	15	34	3	7	45	26
Belirsizlik		1	2	6	15	4	9	3	7	14	8
Kesir Yoktur		7	14	4	10	5	11	1	3	17	10
Sınıflandırılamayan		10	20	8	20	4	9	9	21	31	17
Toplam		50		40	%	44	%	42	%	176	% 100

0 ile 1 arasında sonsuz kesir olduğunu söyleyen öğrencilerin cevapları, dinamik ve statik sonsuzluk şeklinde kategorize edilip, sonsuz kesir kategorisinde toplanmıştır. Öğrencilerin % 39' unun bu soruya "sonsuzdur" cevabı verdiği görülmektedir. Bu öğrencilerin % 6'sı dinamik sonsuzluk düşüncesine sahiptir olduğu görülmüştür. Dinamik sonsuzluk düşüncesine sahip öğrencilerin, genellikle sonsuz bölüm üzerinde durdukları gözlemlenmiştir. Öğrenciler, kesirlerde bölme işlemlerinin devam ettiğini, sonsuza kadar yapılabileceğini ve bölüm sonunda yeni kesirler elde edileceğini ifade etmişlerdir. Bu kategoriye örnek bazı öğrenci cevaplar şu şekildedir:

"Kesirleri sürekli bölebiliriz bu yüzden sonsuz kesir vardır."(6.sınıf)
"Sayıları istediğimiz kadar küçültebileceğimiz için kesirler sonsuzdur."(8.sınıf)
"Sonsuz tanedir. Çünkü sayıların sonu gelmez bunun için paydaya sonsuz tane sayı yazılabilir. " (7.sınıf)

Dinamik sonsuzluk düşüncesine sahip öğrenciler (Ö1, Ö2, Ö3, Ö9, Ö10, Ö12, Ö13, Ö14) ile yapılan klinik mülakatlarda öğrenciler benzer açıklamalar yapmışlardır. Öğrencilerin bir çoğu kesirlerin paydasına sonsuz sayı yazılabileceğini ve bu nedenle 0-1 aralığındaki kesir sayısının da sonsuz olduğunu ifade etmiştir. Örnek olarak 8.sınıf öğrencisi Ö16 ile yapılan mülakat alıntısı aşağıda verilmiştir.

Cevap: *0 ile 1 arasında olmak şartıyla sonsuz.-yazamam ki. Kesirler de sonsuz değil midir aslında.*

A: *Cevabında 0 ile 1 arasında sonsuz kesir olduğunu söylemişsin. Cevabını biraz daha açabilir misin?*

Ö: *Burada kesirler giderek bölünüyor, ½, ¼, 1/8 gibi giderek küçülüyor, onları sonsuza kadar götürebiliriz.*

A: *Anladım. Peki bu kesirleri yazabilir misin?*

Ö: *Yazarım ama hepsini yazamam. ½, 1/3, ¼… böyle gidiyor. Sayılar sonsuz olduğu için alta yazabileceğimiz sayılar da sonsuz oluyor. O yüzden sonsuz.*

Ö16, cevabında kesirlerin sonsuz olduğunu ifade etmiştir. Bu nedenle statik sonsuzluk kategorisine dahil edilmiştir. Ancak mülakatta kesirlerin kendi aralarında bölüm yapılabileceğini ve sonsuza kadar devam edeceğini belirtmiştir. Ö16'ya bu kesirleri yazıp yazamayacağı sorulduğunda ise sayılar sonsuz olduğu için kesir yazarken paydaya sonsuz tane sayı yazılabileceğini dolayısıyla kesirlerin de sonsuza kadar gideceğini ifade etmiştir. Bu kategoride yer alan diğer öğrencilerden de bu kesirleri yazmaları istendiğinde benzer şekilde öğrencilerin hepsi kesrin paydasına 1, 2, 3… sayılarını yazarak, kesrin devam ettiğini ve kesirlerin hepsini yazamayacaklarını belirtmişlerdir.

Statik sonsuzluk kategorisinde yer alan öğrenciler ise genellikle "*Kesirler de sayılar gibi sonsuzdur*" veya "*sayılar sonsuz olduğu için kesirler de sonsuzdur.*" şeklinde açıklama yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerin % 33'ü statik sonsuzluk düşüncesine sahip olduğu görülmektedir.

Sınırlı sayı kategorisinde, 0-1 arasında sınırlı sayıda kesir olduğunu düşünüp kesirlerin sayısı ile ilgili tahmininde bulunan öğrencilerin cevapları yer almaktadır. Bu kategoride yer alan öğrencilerin bir kısmı, on binlerce ya da katrilyon gibi büyük sayı miktarlarında kesir olduğunu söylerken, bir kısmı ise 2, 50, 100..vb. gibi küçük sayı miktarlarında kesir olduğunu söyleyerek 0-1 arasında sınırlı sayıda kesir olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerin % 26'sı sınırlı sayıda kesir olduğunu düşünmektedir. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları aşağıda yer almaktadır.

"0 ile 1 arasında sınırlı ve küçük bir sayı dilimi vardır." (7.sınıf)
"On binlerce kesir olabilir ama mutlaka bir sınırı vardır." (8.sınıf)
"1/10, 2/10, 3/10, 4/10, 5/10, 6/10, 7/10, 8/10, 9/10'a kadar kesir yazılabilir."(5.sınıf)

Öğrenciler ile yapılan görüşmelerde 4 öğrenci (Ö6, Ö7, Ö11,Ö15) 0 ile 1 arasında sınırlı sayıda kesir olduğunu söylemiştir. Bu öğrencilerden Ö11 düşüncesini şu şekilde dile getirmiştir.

"*Kesirlerin hepsini sayamayız çünkü 1' e kadar devam eder sonra bir yerde durur diye düşündüm çünkü bunlar sonsuz değildir. Çünkü eşit parçalara bağlıdır eşit parçalar çok fazla da olabilir bu yüzden 0 ile 1 arasındaki kesirler bir yerde durabilir*." (7.sınıf)

Öğrencilerin % 8'i ise, 0 ile 1 arasındaki kesir sayısının bilenemeyeceğini belirtmiş ve kaç kesir olduğunun belli olmadığını ifade etmişlerdir. Bu gurupta yer alan öğrenciler çoğunlukla "*çok kesir vardır*", "*ne kadar istersem o kadar kesir yazabilirim*." veya "*0 ile 1 arasındaki eşit parçalara bağlıdır*" şeklinde açıklama yapmışlardır. Bu kategoriye örnek olabilecek iki öğrencinin cevabı şöyledir:

" 0 ile 1 arasındaki eşit parçalara bağlıdır." (7.sınıf)
"Belirli bir sayı yok. Çünkü parça birçok sayıya bölünebilir." (6.sınıf)

Öğrencilerin % 10'u ise 0 ile 1 arasında kesir olmadığını belirtmiştir. Öğrencilerin % 17'si ise sınıflandırma yapılamamıştır.

Sorunun *B* şıkkında ise öğrencilere "*Kesirlerin hepsini yazabilir misiniz*?" sorusu sorulmuştur. Bu soruda öğrencilerin cevapları "*kesirlerin hepsi yazılamaz"*, "*kesirlerin hepsi yazılabilir"* ve "*sınıflandırılamayan"* şeklinde üç kategoride toplanmıştır. Tablo 4-17.'de oluşturulan kategorilerin öğrencilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı verilmiştir.

Tablo 4-17. Dördüncü sorunun ikinci alt sorununa ilişkin kategorilerin, sınıf seviyesine göre dağılımı

Kategoriler		*Sınıf Seviyesi*									
		5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
		f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Kesirlerin hepsi yazılamaz	*Sonsuz*	11	22	5	13	8	18	12	29	36	20
	İmkansız	9	18	12	30	9	20	1	2	31	18
	Nedensiz	8	16	2	5	6	14	9	21	25	14
Kesirlerin hepsi yazılabilir	*Sonsuz*	10	20	3	7	7	16	3	7	23	13
Sınıflandırılamayan		12	24	18	45	14	32	17	41	61	35
Toplam		50		40		44		42		176	% 100

Tablo 4-16. incelendiğinde öğrencilerin % 52’si kesirlerin hepsinin yazılamayacağını söylediği görülmektedir. Bu öğrencilerin yapmış olduğu gerekçeler dikkate alınarak, öğrenci cevapları “*sonsuz”, “imkansız”* ve “*nedensiz”* olmak üzere üç alt kategoriye ayrılmıştır. Öğrencilerin % 20’si kesirlerin sonsuz olduğu için yazılamayacağını söylemiştir. Bu kategoride yer alan bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

“*Sayılar sonsuz olduğu için kesirler de sonsuzdur yazılamaz.”(5. Sınıf)*
“*Kesirler sonsuza kadar gider bu yüzden hepsi yazılamaz.”(6.sınıf)*
“*Her kesirden sonra yeni bir kesir geldiği için kesirlerin hepsi yazılamaz.”(7.sınıf)*
“*Sayılar arasına koyabileceğimiz sonsuz kesir var bu yüzden kesirler yazılamaz.”(8.sınıf)*

Öğrencilerin %18’i de kesirlerin hepsinin yazılmasının imkansız olduğunu söylemiştir. Bu öğrenciler kesirlerin sayısının fazla olması, yeterli zamanın olmaması, yeterli araçlar-gereç olmaması gibi gerekçeler ile cevaplarını açıklamıştır. Örnek olarak bazı öğrenci cevapları şöyledir:

“*Kesirlerin hepsini yazmak çok zaman alır.”(5. sınıf)*
“*Kesirlerin hepsini yazmaya ömrümüz yetmez.”(8.sınıf)*

"Kesirler çok fazla olduğu için yazmak imkansızdır."(7.sınıf)

Öğrencilerin % 14'ü ise kesirlerin hepsinin yazılamayacağını söylemiş ama neden yazılamayacağını belirtmemiştir. Öğrencilerin % 13'ü ise kesirlerin hepsinin yazılabileceğini düşünmektedir. Bu öğrencilerin hepsi kesirlerin sonsuz olduğunu ve yazılabileceğini söylemişlerdir. Bu kategoriye örnek olabilecek üç öğrencinin cevabı aşağıda verilmiştir.

"Pay ve paydaya sürekli ekleyerek devam ettirebiliriz."(5.sınıf)
"Kesirler sonsuza kadar gider. 1,1/2,1/3…. şeklinde yazılabilir."(7.sınıf)
"Sayılar sonsuza kadar küçülür, kesirlerin hepsini yazabiliriz." (6.sınıf)

Bunun yanı sıra öğrencilerin bir kısmı da kesirlerin sonsuz olduğunu ancak yeterli alan ve zaman verildiği takdirde kesirlerin hepsinin yazabileceğini ifade etmişlerdir. Yani öğrenciler, fiziksel yeterlilikler sağlandığında sonsuz tane kesrin yazılabileceğini düşünmektedirler.

Öğrencilerin cevapları sınıf bazında incelendiğinde ise 5. sınıfların (%36) [0,1] aralığında sınırlı sayıda kesir olduğunu düşünürken, 6.sınıfların (%33'), 7. sınıfların (% 36) ve 8.sınıfların (% 62) birçoğu [0,1] aralığındaki kesir sayısının sonsuz olduğunu düşünmektedir. Diğer yandan her sınıf seviyesindeki öğrencilerin çoğu kesirlerin tamamının yazılabileceğini söylemişlerdir.

4.3.3. Beşinci Sorudan Elde Edilen Bulgular

5. SORU. En büyük sayı var mıdır? Cevabınızı nedenleri ile açıklayarak yazınız.

Bu soruda öğrencilere en büyük sayının var mıdır şeklinde bir soru sorulmuş ve cevaplarını nedenleri ile açıklamaları istenmiştir. Öğrencilerin cevapları doğrultusunda, *"en büyük sayı sonsuzdur", "sınırlı bir sayı", "en büyük sayı yoktur", "en büyük sayı bilinemez" ve "sınıflandırılamayan"* olmak üzere 5 kategori oluşturulmuştur.

Bu kategoriler ve bu kategorilere ait örnek açıklamalar Tablo 4-18.'de sunulmuştur. Kategorilerin, öğrencilerin sınıf seviyesine göre dağılımı ise Tablo 4-19.'da verilmiştir.

Tablo 4-18. Beşinci soruya ilişkin kategoriler ve örnek açıklamalar

Kategoriler	*Örnek Açıklama*
1.Sonsuzdur	Sonsuz sayı, ör: 99…… Sayılar sonsuza kadar gider. Sayılar sonsuzdur.
2. Büyük Sayı	Milyondan daha büyük bir sayı. 9999.., 1000.100, Pi sayısı, yüz gentrilyon vb.
3.En büyük sayı bilinmez	En büyük sayı bilinemez çünkü bu sayı sonsuzdur. En büyük sayı bilinemez çünkü sayılar sonsuza kadar devam eder.
4.En büyük sayı yoktur	En büyük sayı yoktur çünkü sayılar sonsuza kadar devam eder. Böyle bir sayı yoktur çünkü her sayıyı daha büyük bir sayı takip eder. En büyük sayı yoktur çünkü sayılar sonsuzdur.

Tablo 4-19. Beşinci soruya ilişkin kategorilerin, sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonsuzdur	12	24	11	27	10	23	6	14	39	22
Büyük Sayı	10	20	3	8	4	9	4	10	21	12
En büyük sayı bilinemez	6	12	15	38	5	11	9	21	35	20
En büyük sayı yoktur	18	36	9	22	20	46	21	50	68	39
Sınıflandırılamayan	4	8	2	5	5	11	2	5	13	7
Toplam	50		40		44		42		176	% 100

Öğrencilerin % 22'si en büyük sayının "sonsuz" olduğunu söylemiştir. Sonsuzdur cevabını veren öğrencilerin genellikle, "*sonsuz sayı. ör: 99…….*" Veya "*sayılar sonsuzdur*" şeklinde açıklama yaptıkları görülmüştür. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

"En büyük sayı sonsuzdur. Çünkü sayılar sonsuzdur saydıkça bitmez."(7.)
"En büyük sayı sonsuz olan bir sayı çünkü hem en son o sayı geliyor, hem de en büyük sayı odur." (5.sınıf)
"En büyük sayı sonsuzdur. Çünkü bilim adamları sonsuzluğu böyle açıklar." (6)

Öğrencilerin % 12'ı ise en büyük sayı için bir sayı tahmininde bulunarak, en büyük sayıyı temsil ettiğini düşündüğü büyük sayılar yazmıştır. Bu bağlamda, öğrenciler en büyük sayıya yönelik genellikle *"99999999, 1000.100, Pi sayısı, yüz gentrilyon vb*." gibi sayılar yazmışlardır. Ancak öğrencilerin çoğunun "9" sayısını yazarak en büyük sayıya ulaşmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu kategoride yer alan bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

"Pi sayısıdır çünkü bir dergide okumuştum". (5.sınıf)
"En büyük sayı 0'dan 10'a kadar oluşturulan büyük sayıya denir." (5.sınıf)
"Bence en büyük sayı 999 999 999'dur. Ben bunu basamak değerlerini sayarak buldum."(6.sınıf)

Bu soruya verilen diğer bir cevap ise "*En büyük sayı bilinmez*" cevabı olup, öğrencilerin % 20'si bu cevabı vermiştir. Öğrenciler en büyük sayının bilinemeyeceğini söylerken, genellikle neden olarak sayıların sonu olmadığını, sonsuza kadar devam ettiğini ve her sayının daha büyüğünün yazılabileceğini söylemişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrenciler farklı gerekçeler ile en büyük sayının bilinmeyeceğini söylemiş ancak en büyük sayı var mıdır yok mudur bununla ilgili herhangi bir açıklama yapmamıştır. Bu kategoriye örnek bazı öğrencilerin cevapları ise şu şekildedir:

"En büyük sayı bilinemez çünkü sayıların sonu yoktur."(6. Sınıf)
"En büyük sayı bilinemez çünkü sayılar sonsuza kadar devam eder."(5.sınıf)
"En büyük sayı bilinemez çünkü her sayıyı yan yana getirince bir sürü sayı oluşur."(7.sınıf)
"En büyük sayı bulunamaz. Bu yüzden bu sayıya sonsuz diyoruz."(8.sınıf)

Bu kategoride yer alan 6. sınıf öğrencisi Ö8 yapılan görüşmede, Ö8 en büyük sayının bulanamayacağını söylemiştir ve düşüncelerini şu şekilde dile getirmiştir.

Cevap: *Bulamayız. Çünkü bilim adamlarının bile bilemediği basamaklar olabilir. Hep "9" yazarsak sonsuza kadar gider.*

A: *Burada en büyük sayının bulunamayacağını söylemişsin, cevabını biraz daha açabilir misin?*

Ö: *Çünkü sonsuza kadar gider sayılar. Biz ne kadar basamak yazsak ondan daha da üst sayılar gelir o yüzden.*

A: *Peki, en büyük sayı bilemeyiz derken en büyük sayı var da mı bilemeyiz yoksa olmadığı için mi bilemeyiz?*

Ö: *Yoktur o yüzden bilemeyiz. Çünkü mesela hep 1 yazsak yine o sonsuza kadar hep 1 yazmak zorunda kalırız ve ulaşamayız.*

Ö8, görüşmede her sayının daha büyüğü olduğunu ve sayıların bu şekilde sonsuza kadar devam ettiğini belirterek en büyük sayının olmadığını ve bu nedenle bilemeyeceğimizi ifade etmiştir.

Öğrencilerin % 39'su ise en büyük sayının olmadığını ifade etmiştir. Öğrencilerin en büyük sayının olmadığını söylerken genel olarak, sayılar sonsuz olduğu için en büyük sayının olmadığını veya her sayıdan daha büyük bir sayı olduğu için en büyük sayının olmadığı gerekçelerini göstermişlerdir. Bu kategoride yer alan bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

"En büyük sayı yoktur. Düşündüğünüz en büyük sayının bir fazlası ondan daha büyüktür."(5.sınıf)

"En büyük sayı diye bir şey yoktur. Büyük sayı vardır. Sayıların sonsuzluğu en büyük kavramını yok saymaktadır."(7.sınıf)

"En büyük sayı diye bir şey yoktur. Herkese göre büyüklük derecesi farklıdır. Sonsuza kadar gider.(7.sınıf)

"En büyük sayı yoktur. Sonsuz sayıda reel sayı vardır. Bence sonsuz sayı diye bir şey yoktur."(8.sınıf)

Öğrencilere göre sayıların artarak devam ediyor olması her sayının daha büyüğü olacağı anlamına gelmektedir dolayısıyla bu anlayış öğrenciler en büyük sayının olmadığı sonucuna götürmektedir. Ayrıca öğrencilere göre sayıların sonsuz olması da en büyük sayının olmadığı anlamına gelmektedir. En büyük sayının olmadığını düşünen 7. sınıf öğrencisi Ö12 ile yapılan görüşmede, Ö12 belli bir yere kadar en büyük sayının yazılabileceğini anca sonrasında en büyük sayının olmadığını söylemiştir. Ö12 düşüncelerini şöyle dile getirmiştir:

Cevap: *En büyük say yoktur daha doğrusu yazamayız.*
A: *Burada en büyük sayı yoktur daha doğrusu yazamayız demişsin. Cevabını biraz daha açabilir misin?*
Ö: *Bence belirli bir yere kadar en büyük sayı vardır ondan sonrası da vardır ama yazamayız*
A: *Belirli bir yerden ne demek istedin?*
Ö: *Mesela trilyona kadar var diyelim ondan sonra da vardır ama biz bilmiyoruz Ama sonsuz olduğunu biliyoruz ama ondan sonrasını yazamıyoruz diyelim.*
A: *Peki en büyük sayı var mıdır sence?*
Ö: *En büyük sayı yoktur.*

Öğrenci cevaplarına sınıf bazında bakıldığında ise 5. sınıf (% 36), 7. sınıf (% 46) ve 8. sınıf (% 50) öğrencilerinin birçoğu en büyük sayının olmadığını söylemiştir. 6.sınıf öğrencileri (% 38) ise genellikle en büyük sayının bilinemeyeceğini söylemişlerdir.

4.4. Öğrencilerin limit durumuna ilişkin açıklamaları

4.4.1. Altıncı Sorudan Elde Edilen Bulgular

6.SORU: Aşağıda verilen eşitlikler doğru mudur? <u>Nedenleri ile açıklayınız.</u>
c) 0.9999….. = 1   b) 0.3333..... = $\frac{1}{3}$

Bu soruda devirli ondalık kesirler ile ilgili farklı iki tane eşitlik sorulmuştur. Sorunun A şıkkında öğrencilerden, "0.9999…" sayısı ile 1 sayısının karşılaştırması, B şıkkında ise "0.3333…" sayı ile $\frac{1}{3}$ sayısının karşılaştırılması istenmiştir. Öğrencilerin yapmış olduğu açıklamalar doğrultusunda her iki eşitlik için *"işlemsel düşünce"*, "*nesne-süreç karşılaştırılması*" ve "*sınıflandırılmaya*n" olmak üzere üç ortak kategori oluşturulmuştur. Bu kategoriler ile ilgili açıklamalar aşağıda verilmiştir.

1. İşlemsel Düşünce: Öğrenciler bu soruda yuvarlama, devirli ondalık kesir, büyüklük, küçüklük gibi matematiksel bilgilerini kullanarak ve işlemleri uygulayarak açıklamalar yapmaktadır. Örneğin birinci eşitlik için *"Bu ifade devirli ondalık sayı 0,9 olarak yazılır ve buda 9/9' dan 1 eder"* veya "*1-0,00001-1111-...vb. sayılar eklenirse eşit olabilir."* şeklinde ifade etmesi öğrencinin soruyu işlemsel açıdan ele aldığını göstermektedir. B şıkkında ise öğrenciler 1 sayısını 3'e bölerek sonuca ulaşmaya çalışmaktadır.

2.Nesne-Süreç Karşılaştırması: Bazı öğrencilerin devirli ondalık kesri devam eden bir süreç olarak değerlendirdiği, eşitliğin sağında olan sayıyı ise nesne olarak algıladığı gözlemlenmiştir. Örneğin birinci eşitlikte öğrenci "1" sayısını, bir sayı yani nesne olarak tanımlarken, "0,9999…." ifadesini ne olduğu tam olarak belli olmayan ve devam eden bir süreç olarak tanımlanmıştır. Burada öğrenci, "0.9999…" sayısının devam ettiğini ya da sonsuza kadar gittiğini belirtmektedir. Dolayısıyla öğrenci "0.9999…" sayısını sayı olarak değil süreç olarak algılamaktadır. Eşitliğin sağ tarafındaki sayıyı nesne olarak algılaması nedeniyle öğrenci iki sayının birbirine eşit olduğunu kabul etmemektedir. Benzer şekilde ikinci eşitlikte de öğrenci, "0.3333…" sayısını devam eden bir süreç, 1/3 sayısını ise nesne olarak yorumlamaktadır ve eşitliğin doğru olmadığını ifade etmektedir.

3. Sınıflandırılmayan*:* Öğrencilerin bir kısmı cevap olarak, herhangi bir gerekçelendirme yapmadan sadece eşit ya da eşit olmadığını yazmış ya da soruyu boş bırakmayı tercih etmiştir. Soruyu bu şekilde cevaplayan öğrenciler bu kategoriye dahil edilmiştir.

"0.9999….. = 1" eşitliğinden elde edilen bulgular

Bu soruda öğrencilerin % 19'u eşitliğin doğru olduğunu belirtirken, % 65' i ise eşitliğin yanlış olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin % 16'sı eşitliğin doğru ya da yanlış olduğuna dair yeterli açıklama vermemiştir. Öğrencilerin cevapları yapmış olduğu açıklamalar ve işlemler doğrultusunda yukarıda belirtilen kategorilere göre sınıflandırılmıştır. Kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 4-20.'de verilmiştir.

Tablo 4-20. Altıncı sorunun birinci alt sorusuna ilişkin kategorilerin, sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
İşlemsel Düşünce	19	39	13	32	14	32	14	33	60	34
Nesne-Süreç Karşılaştırılması	1	1	6	15	5	11	7	17	19	11
Sınıflandırılamayan	30	60	21	53	25	57	21	50	97	55
Toplam	50		40		44		42		176	% 100

Tablo 4-20.'de görüldüğü üzere öğrencilerin % 64'ü işlemsel düşünce kategorisinde yer almaktadır. Bu düşünceye sahip öğrencilerin daha çok beşinci sınıf seviyesinde olduğu görülmektedir. Bu kategoride yer alan bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

" Evet. Doğru çünkü 0.9999 kesrini yuvarlarsak 1 tama eşittir." (6.sınıf)

" Doğrudur. Bu ifade $0,\overline{9}$ olarak yazılır. Yani 9/9 'a eşittir oda 1'dir." (8.sınıf)

" Eşit değil. Bu 9999/10000 demek yani bir tamdan küçük." (5. sınıf)

"Eşit değil çünkü biri 0 tam biri 1 tam." (6. sınıf)

"Yanlış. Arada 0,1111 fark var." (7. sınıf)

"Doğru değil çünkü 9 devrettiği için 1/9 olur" (6. sınıf)

Verilen örnekler de incelendiği üzere bu kategoride yer alan öğrencilerin birçoğu "0.9999…" sayısı üzerinde devirli ondalık kesir kuralını uygulayarak veya yuvarlama gibi işlemler yaparak eşitlik ile ilgili düşüncelerini açıklamaya çalışmışlardır. Bunun yanı sıra öğrenciler tarafından sıkça söylenen bir diğer gerekçe ise, iki sayı arasında karşılaştırma yaparken "0.9999.." sayısının 0 tam ile başladığını bu nedenle 1 tamdan küçük olduğu şeklindedir. Örneğin 6. sınıf öğrencisi Ö7 eşitliğin doğru olmadığını çünkü "0.999.." sayısının tam olmadığını söylemiştir. Ö7 soru ile ilgili düşüncelerini şu şekilde dile getirmiştir.

Cevap: Bence doğru değil çünkü tam değildir.

A: Burada ne demek istedin biraz açabilir misin?

Ö: 0,9999 tam değil 1 gibi tam sayı çıkmıyor. Tam olmadığı için aralarında eşitlik olmaz çünkü 1 tamdır 0,9999 sayısı da tam değildir.

A: Peki hangisi daha büyüktür?

Ö: Tam olan yani 1.

A: Peki bu sayılar eşitlemek için 0,9999.. sayısın kaç eklersek 1'e eşitleriz?

Ö: Bence 1 eklersek eşitleriz

A: Sen bu işlemi yapabilir misin?

Ö: Yok etmiyor..

A: 1'i ekleyerek mi düşündün?

Ö: Evet

A: Burada 1 var. 1= 1+ 0,9999… sayısı oldu. Eşit oldu mu?

Ö: Bu sayıyı(toplama işlemi sonucunda 10000 buldu) tekrar 1000'e bölersek 1 çıkar.

Ö7, verilen sayılar arasında karşılaştırma yaparken sayıların tam kısımlarına dikkat etmiştir. "0.9999.." sayısının tam olmadığını bu nedenle sayıların birbirine eşit olamayacağını söylemiştir. "0.9999.." sayısının, 1'e eşit olabilmesi için kaç eklenebileceği sorulduğunda ise, "0.9999.." sayısına 1 ekleyerek eşitliğin sağlanabileceğini yaptığı işlemler ile göstermeye çalışmıştır. Benzer şekilde bu kategoride yer alan Ö6 ve Ö3'de yapılan görüşmelerde, "0.9999..." sayının 1'den küçük olduğunu ve sayıyı 1 ile toplayınca eşitliğin sağlanacağını ifade etmişlerdir.

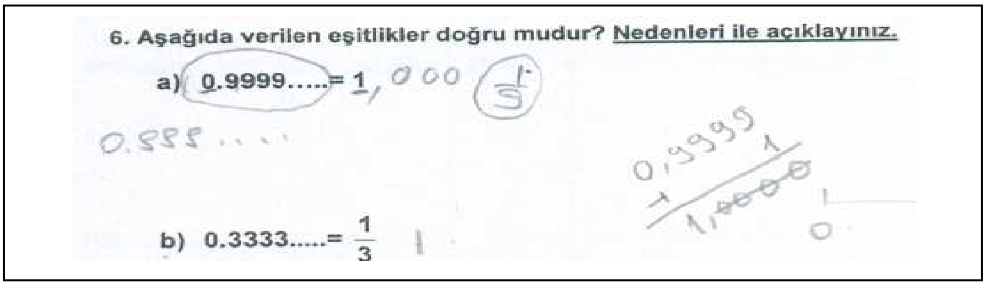
Öğrencilerin % 11’i nesne-süreç karşılaştırması yapmıştır. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

“Eşit değildir. Çünkü bunlar(0.9999..sayısı) sonsuza kadar gider.”(6. sınıf)

“Eşitlik yanlıştı çünkü biri tam diğeri ise henüz bire ulaşmamıştır.” (7. sınıf)

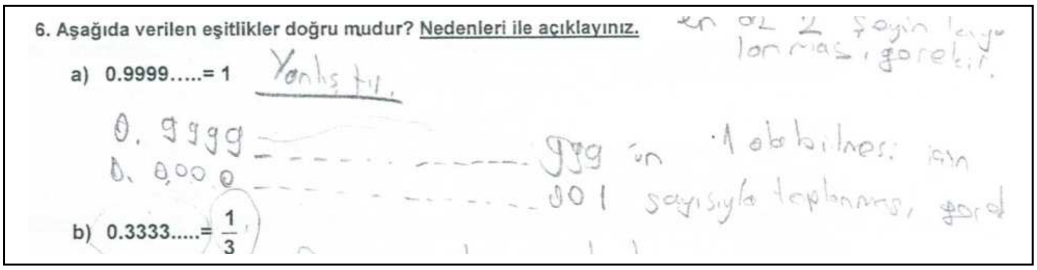
“Eşitlik yanlıştır. Çünkü 9 sonsuza kadar gidecek hiçbir zaman 1 olmayacaktır.” (7.sınıf)

“Hayır çünkü 0.000.……1 eksik. Eksikse eğer tam olarak “bir” diyemeyiz.” (8)



Şekil 4.1. Altıncı sorunun birinci sorusuna ilişkin 5. sınıf öğrencisinin cevabı

Yukarıda verilen örneklerde de görüldüğü üzere öğrencilerin birçoğu “0.999..” sayısının sonsuza kadar devam ettiğini, bu nedenle bir tama ulaşmadığını belirtmektedir. Bazı öğrenciler ise sayının 1’e eşit olabilmesi için eklenmesi gereken sayının da 0.00….1 gibi bir sayı olması gerektiğini söylemiştir. Buna örnek olarak aşağıda 5. sınıf öğrencilerinden bir öğrencinin cevabı yer almaktadır.



Şekil 4.2. Altıncı sorunun birinci sorusuna ilişkin 5. sınıf öğrencisinin cevabı

Bu kategoride yer alan öğrenciler ile yapılan görüşmelerde de öğrencilerden benzer cevaplar alınmıştır. Bu öğrencilerden, (Ö1, Ö2, Ö4, Ö8, Ö9, Ö10, Ö12, Ö14, Ö15, Ö16) sayının sonsuz olduğunu söylerken, Ö13 ve Ö11 ise sayının devam ettiğini söylemiştir. Öğrencilerden, “0.9999..” sayısı ile 1 sayısının değer olarak karşılaştırılması istendiğinde, öğrencilerin hepsi “0.9999..” sayının daha küçük olduğunu ifade etmişlerdir.

Bunun ardından öğrencilere “*Bu sayıya kaç eklersem 1’e eşit olur?*” şeklinde bir soru sorulmuştur. Öğrencilerden Ö1, Ö2, Ö4, Ö9, Ö11 ve Ö16 sayı üzerinde işlem yapılabileceğini söyleyerek, eklenebilecek sayıyı bulmaya çalışmıştır. Ö2 ve Ö4, *“1 eklersek eşit olur”* şeklinde cevap verirken, Ö9 “*0.1 eklersek eşit olur*” şeklinde soruyu cevaplamıştır. Ö11 ise “0.9999..” sayısını 1’e eşitlemek için, eklenmesi gereken sayıyı bilmediğini ifade etmiştir. Ö1 ve Ö16 ise “0.9999..” sayısının sonsuz olduğunu bu nedenle sonsuz sayıya sonsuz sayı eklenmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Ö16 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

***Ö**: Bu sayı 1 e çok yakındır ama 1 değildir, çünkü arasında şu 0.00001 kadarlık bir sayı var.*

***A:** Aradaki farkı nasıl bulduğun açıklayabilir misin?*

***Ö:** Görünüşleri benzemiyor. Bu kadar sonsuza kadar giden 9 varsa yine sonsuza kadar giden 0 ve sonda bir tane de 1 olması gerekiyor. 1 e eşitleyebilmek için. Çünkü onları toplayınca 1 olacak.* **.**

Sorulan soru ile ilgili Ö8, Ö13 ve Ö14 ise iki sayının eşitlenemeyeceğini söylemişlerdir. Ö8 , “0.9999…” sayısı sonsuz olduğu için bunun yapılamayacağını söylerken, Ö13 ve Ö14 ise sayının devrettiğini söyleyerek ekleme işleminin yapılamayacağını belirmiştir. Öğrenciler soru ile ilgili görüşlerini şu şekilde ifade etmişlerdir.

“Sayı sonsuz olduğu için bir şey ekleyemeyiz daha devamını bilmiyoruz o yüzden bir şey eklersek ne olacağını da bilemeyiz.” (Ö8)

“Bence çıkmayacak çünkü devreden sayılar da var. Mesela 0,9 için 0,1 eklemek gerekir ama 0, 99 dediğimizde 0,01 eklenmeli. 0,1 ile eşitlenmez. Eklediğimiz sayılar devirli ondalık sayılar bu yüzden eşit olmaz.” (Ö13)

"0 ile 1 arasında 0.9999… devrettiği için baya fark var çünkü sayı sonsuza gider ve biz o farkı bulamayız."(Ö14)

Bu soru ile ilgili öğrencilerden üç tanesi de (Ö10, Ö12 ve Ö15) belirli şartlar sağlanırsa sayı üzerinde işlem yapılabileceğini söylemiştir.
Örneğin öğrencilerden Ö15, devirli ondalık kesirler kuralı üzerinde durarak, sayının devretmediği düşünülürse işlem yapılabileceğini aksi takdirde işlem yapılamayacağını belirtmiştir. Düşüncelerini ise şu şekilde açıklamıştır.

"Mesela 9'un devretmediğini düşünürsek 1 eklersek mesela burası 10 olacaktır. ben sıfırın attığını düşünüyorum buradan da 1'e ulaşabilirim. Eğer 9 devrederse her sayıya 1 eklememiz lazım o yüzden ulaşamayız." (Ö15)

Ö10 ve Ö12 ise sayı sonsuza kadar giderse, sayı üzerinde işlem yapılamayacağını ancak sayının bir yerde durması durumunda işlem yapılabileceğini söylemişlerdir. Görüşme yapılan öğrencilerden elde edilen bulgular ve öğrencilerin görüşleri doğrultusunda söyleyebiliriz ki öğrencilerin birçoğu "0.9999.." sayısını sonsuz sayı olarak algılamakta ve sonsuz sayı olarak algıladıkları "0.9999…" sayısı üzerinde işlem yapılabileceğini düşünmektedir. Öğrencilerin % 55'i ise cevaplarının nedenlerine yönelik yeterli bir açıklama yapmadığı için sınıflandırılma yapılamamıştır.

"0.333…=1/3" eşitliğinden elde edilen bulgular

Bu soruda öğrencilerin % 21'i eşitliğin doğru olduğunu belirtirken, % 52' si eşitliğin yanlış olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin % 27'si eşitliğin doğru ya da yanlış olduğuna dair yeterli açıklama vermemiştir. Öğrencilerin cevapları yapmış olduğu açıklamalar ve işlemler doğrultusunda yukarıda belirtilen kategorilere göre sınıflandırılmıştır. Kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 4-21.'de verilmiştir.

Öğrencilerin % 24'ü işlemsel düşünce kategorisinde yer almaktadır. Bu kategoride yer alan öğrenciler genellikle, "0.3333.." sayısının devreden bir sayı olduğunu ve “3/9=1/3” şeklinde yazılabileceğini düşünerek eşitliğin doğru olduğuna karar vermişlerdir. Öğrencilerin bir kısmının ise 1 sayısını 3’e bölerek cevaba ulaşmaya çalıştığı görülmüştür. Öğrenciler bölme işlemi sonucunda “0.3333..” sayısını elde etmişlerdir ve sonuç olarak eşitliğin doğru olduğuna karar vermişlerdir

Tablo 4-21. Altıncı sorunun ikinci alt sorusuna ilişkin kategorilerin, sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
İşlemsel Düşünce	15	30	6	15	8	18	14	33	43	24
Nesne-Süreç Karşılaştırılması	0	0	3	7	6	14	4	10	13	8
Sınıflandırılamayan	35	70	31	78	30	68	24	57	120	68
Toplam	50		40		44		42		176	% 100

Bu kategoride yer alan bazı öğrencilerin cevapları aşağıda verilmiştir.

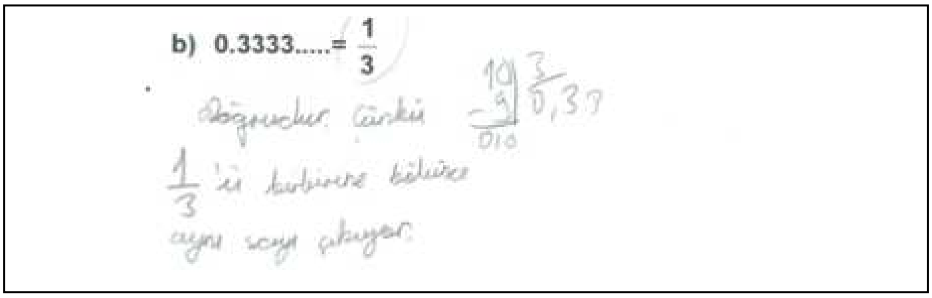
“Eşitlik doğrudur, çünkü 3 devrediyor paydada 3 var.” (6.sınıf)

“Eşittir çünkü 0,3333…= $\overline{3}$ *=3/9=1/3.” (7.sınıf)*

“Hayır eşit değildir. 0.3333….1/3 ‘ten küçük.” (7.sınıf)

“Eşitlik yanlıştır çünkü 0,3333’ün doğrusu 10000/3333 olur.”(6.sınıf)

“Yanlış çünkü sıfırdan sonra kaç sayı varsa o kadar sıfırlı bir sayıya bölünüyor (0,333=333/1000).” (8.sınıf)

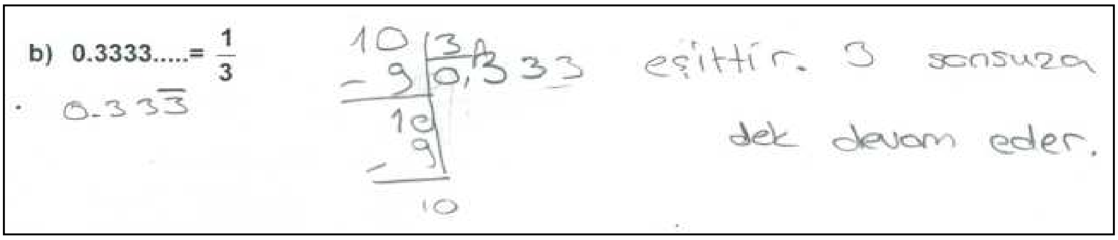


Şekil 4.3. Altıncı sorunun ikinci sorusuna ilişkin 5. sınıf öğrencisinin cevabı

Bu kategoride yer alan sekizinci sınıf öğrencilerinden bir tanesi de “*Teorik olarak* $0,\overline{3}$ *=3/9=1/3 ancak mantıksal düşünürsek alt payda 10’un katları şeklinde* *çıktığı için 9 veya 99 veya 999 şeklinde olamaz.*” şeklinde düşüncelerini yazmış ve eşitliğin teorik olarak doğru ama mantıksal olarak yanlış olduğunu belirtmiştir.

Öğrencilerin % 7’si nesne-süreç karşılaştırması kategorisinde yer almaktadır. Bu grupta yer alan öğrenciler “1/3” sayısının nesne olduğunu, “0.3333...” sayısının ise sonsuza kadar gittiğini söylemişler ve sayıyı devam eden bir süreç olarak algılamışlardır. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

> *“Doğru ya da yanlış diyemeyiz ama tam eşit değildir. 10/3= 0,3333…. Kalan: 0,00000……1 ‘dir.” (5.sınıf)*
>
> *“Yanlıştır çünkü 3 sonsuza kadar gidecektir bu yüzden 1/3’e eşit olamaz.” (7.sınıf)*



Şekil 4.4. Altıncı sorunun ikinci sorusuna ilişkin 6. sınıf öğrencisinin cevabı

Yukarıda verilen Şekil 4. ‘de altıncı sınıf öğrencilerinden bir tanesinin soru ile ilgili çözümü verilmiştir. Bu öğrenci 10’nun 3’e bölümünden elde ettiği “0.333…” sayısının sonsuza kadar gittiğini söyleyerek, eşitliğin doğru olduğunu söylemiştir.

Öğrenciler ile yapılan görüşmelerde de benzer sonuçlar elde edilmiştir. Görüşmelerde 10 öğrenci (Ö1, Ö2, Ö4, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11, Ö15) eşitliğin yanlış olduğunu söylemiştir. Görüşmede bu öğrencilerden 1’i 3’e bölmeleri istenmiştir. Bölme işlemini yapan öğrencilerden 4 tanesinin (Ö6, Ö9, Ö10, Ö11) işlem sonucunda fikrini değiştirdiği görülmüştür. Ö6 ve Ö10 bölme işlemi sonucunda “0.333…” sayısını elde etmişler ve sayının sonsuza kadar gittiğini söylemişlerdir. Benzer şekilde Ö9 ve Ö11 de “0.333..” sayısını elde etmiş ve 3’ün devam ettiğini söylemişlerdir. Sonuç olarak öğrenciler “0.333…” sayısı ile bölme işlemi sonucu elde edilen sayının aynı olduğunu söyleyerek eşitliğin doğru olduğunu belirtmişlerdir. Diğer yandan bölme işlemini yapan bir başka öğrenci Ö1 ise bölme işlemi sonucunda elde ettiği sayının, “0.3333…” sayısına yakın ancak eşit olmadığını ifade etmiştir. Ö1’in söyleminde de anlaşılacağı üzere bölme işleminin Ö1’i ikna etmediğini söyleyebiliriz. Ö1 düşüncelerini şu şekilde dile getirmiştir.

> *“Yani 1/3= 0.3333…. giderse yani 1’i 3’e böldüm 0.333 ama ona eşittir ama kalan da vardır çünkü bunu 3 ile çarptığımızda 0.999 olur kalan da 0. 001’dir. O yüzden yakındır ama eşit değildir. “*

Bölme işlemini yapmaya çalışan diğer öğrenciler (Ö2, Ö4, Ö7, Ö8, Ö15) ise düşüncelerinde herhangi bir değişiklik olmadığını söyleyerek eşitliğin doğru olmadığını tekrar ifade etmişlerdir. Öğrencilerin birçoğu 1’in 3’e bölünmediği şeklinde düşüncelerini belirtmişlerdir. Ancak bölme işlemini yapan öğrencilerden, 6. sınıf öğrencisi olan Ö8, bölme işlemini sonucunda eşitliğin yanlış olduğunu belirterek farklı bir açıklama sunmuştur. Bölme işleminden elde ettiği *“0,33..”* sayısının ve eşitlikte verilen *“0,3333..”* sayısının sonsuza kadar gittiğini fakat sonsuzlukların farklı olabileceğini ifade etmiştir. Ö8’in bu soru ile ilgili yorumu şu şekildedir;

A: *1’i 3’e böldüğümüzde nasıl bir sayı çıkar. Sen bu işlemi yapabilir misin?*
Ö: *Tamam.*
A: *Ne çıkıyor?*
Ö:*Şöyle sonsuza kadar gider.*
A: *Bu durumda eşitlik doğru oluyor mu?*
Ö: *Şimdi ama yine de ben aynı düşünüyorum. Çünkü bu (0,333…) sonsuza kadar gidiyor buda (0,33) sonsuza kadar gider ama 1/3 kesri olduğu için bunun sonsuzu ile bunun sonsuzu bekli de eşit olmayabilir.*

Öğrencilerin % 68’i ise cevaplarının nedenlerine yönelik yeterli bir açıklama yapmadığı için sınıflandırılmayan kategorisine dahil edilmiştir. İki eşitlikten elde edilen öğrenci cevaplarına sınıf bazında bakıldığında, her iki eşitliğin çözümünde de, 5. sınıf (% 39-%30), 6.sınıf (%32-%15), 7.sınıf (% 32-% 18) ve 8.sınıf (% 33-%33) öğrencilerinin çoğunun işlemsel düşünce gösterdikleri görülmektedir.

4.4.2. Sekizinci Sorudan Elde Edilen Bulgular

8. SORU: Bir kişi aralarında 8 km olan bir köyden diğer köye gidecektir. Bu kişi birinci gün yolun yarısını gidecektir, 2. gün ise birinci gün gittiği yolun yarısını gidecektir. Bu şekilde her gün bir önceki gün gittiği yolun yarısını giderek köye ulaşmaya çalışacaktır. Bu kişi sizce köye ulaşabilir mi? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayarak yazınız.

Bu soruda öğrencilere bir kişinin verilen koşulda bir köyden 8 km uzakta olan diğer köye ulaşıp ulaşılamayacağı sorulmuştur. Öğrencilerin % 62'si kişinin köye ulaşabileceğini söylerken, öğrencilerin % 32'si ise ulaşamayacağını belirtmiştir. Öğrencilerin % 6'sı ise soruyu boş bırakmıştır.

Öğrencilerin cevabına yönelik yapmış olduğu açıklamalar doğrultusunda "*sonlu süreç*" ve "*sonsuz süreç*" olmak üzere iki kategori oluşturulmuştur. Öğrencilerin bir kısmı herhangi bir açıklama yapmadan kişinin köye ulaşması ile ilgili kısa cevap vermiştir.

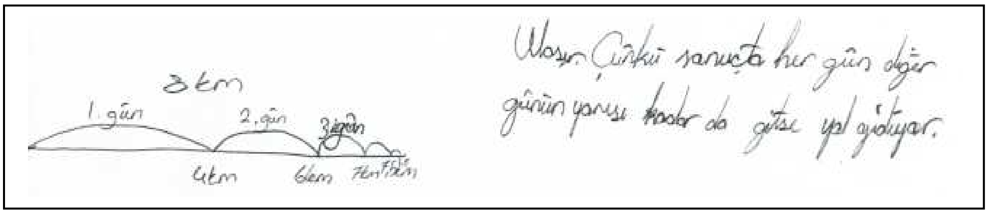
Bu öğrenciler de "*ulaşır nedensiz*" ve "*ulaşamaz nedensiz*" kategorilerine dahil edilmiştir. Soruya boş bırakmayı tercih eden öğrenciler veya cevap olarak bilmiyorum, anlamadım gibi cevaplar yazan öğrenciler sınıflandırılamayan kategorisine dahil edilmiştir. Kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 4-22.'de verilmiştir.

Tablo 4-22. Sekizinci soruya ilişkin kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonlu Süreç	19	38	16	40	13	30	15	36	63	36
Sonsuz Süreç	10	20	9	22	8	18	12	29	39	22
Ulaşır Nedensiz	11	22	10	25	16	36	6	14	43	24
Ulaşamaz Nedensiz	6	12	1	3	5	11	5	12	17	10
Sınıflandırılamayan	4	8	4	10	2	5	4	10	14	8
Toplam	50		40		44		42		176	% 100

Sonlu süreç kategorisinde yer alan öğrenciler kişinin köye ulaşabileceğini söylemişlerdir. Bu kategoriyedahil edilen öğrenciler, kişinin köye gitmesini günlük hayat ile ilişkilendirme yaparak realist düşünmüşlerdir. Öğrencilere göre 8 km sonlu bir yoldur ve kişinin köye ulaşması uzun zaman alsa da kişi köye ulaşabilir çünkü kişi sürekli yol gitmektedir. Öğrenciler, kişi sürekli yol gittiği için yolun bir şekilde biteceğini düşünmektedirler. Öğrencilerin % 36'sı bu şekilde düşündüğü için bu kategoriye dahil edilmiştir Bu kategoride yer alan öğrenciler kişinin köye ulaşması ile ilgili genellikle, "*Gitmesi çok uzun zaman alır ama ulaşır*", "*Sürekli gittiği için elbet 8'e tamamlanır.*" ve "*Hep yarısını gittiği için ulaşır.*", şeklinde gerekçelerini ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

"Ulaşır çünkü 8 km'nin bir sonu var." (6.sınıf)
"Ulaşır ama baya bir zaman alır. Çünkü her gün bir önceki günün yarısını gidiyor." (7.sınıf)
"Ulaşır. Gittiği yolların mesafesini toplarsak bunu açıklayabiliriz." (8.sınıf)
"Bu kişi köye ulaşır ama biraz geç ulaşır. Her gün yarım yarım gidiyor yani her gün 8'den bir yarım azalıyor." (5.sınıf)



Şekil 4.5. Sekizinci soruya ilişkin 6.sınıf öğrencisinin cevabı

Yukarıda verilen öğrenci cevaplarından görüldüğü üzere öğrenciler, gidilmesi gereken mesafenin sonlu olduğunu bu nedenle kişinin bir şekilde köye ulaşabileceğini ifade etmişlerdir. Öğrenciler için gidilen yol mesafesinden çok bir süreklilik söz konusudur, öğrenciler, eğer kişi sürekli gidiyorsa yol bitecektir çünkü bir sonu vardır düşüncesini benimsemişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrencilerden 5. sınıf öğrencisi Ö4 ve 8.sınıf öğrencisi Ö13, durum tespit testinde vermiş oldukları cevaplarda kişinin köye ulaşabileceğini söylemiştir. Ancak yapılan görüşmede kararlarını değiştirerek kişinin köye ulaşamayacağını söylemişlerdir. Ö4 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

Cevap: İlk gün 4, ikinci gün 2, üçüncü gün 1,dördüncü gün 0,5, beşinci gün 0,25… Böylece 8 km olan bir köyden diğer köye gidebilir.	
A: Cevabında kişinin köye gidebileceğini söylemişsin, peki bu kişi sınırlı bir zaman diliminde köye ulaşabilir mi?	
Ö: Sınırlı bir zaman diliminde gidemez çünkü mesela işte gitti. sonra biraz yaklaşınca… ama kişi gittiği yolun yarısı kadar gittiği için yol hep uzayacak ama sonunda gidebilir mi gitmeyebilir mi? Aslında tam emin değilim.	Sınırlı bir zamanda gidemez . (Kararsız)
**	
A: Biraz düşünelim istersen.	
Ö: Buraya gidebilir yazmışım ama bence gidemeyebilir. Çünkü hep gidiyor, sonra 0,0001 gitti, sonra yine bunun yarısı kadar gidecek ve yol sürekli uzar. Kişi bir türlü gidemez.	Kişi köye gidemez çünkü sürekli yarısını gidiyor.
**	
A: Anladım.Peki bu işlemler bir yerde durur mu yoksa devam eder mi? Ö: Yani ikiye bölünmeyen bir sayı olursa…. bu işlemler aslında bitmez. Bölmeler sonsuza doğru gider.	İşlemler bitmez, bölüm sonsuza kadar gider.

Şekil 4.6. Sekizinci soruya ilişkin 5. sınıf öğrencisinin cevabı

Ö4, ilk olarak kişinin sınırlı bir zamanda köye gidemeyeceğini söylemiştir. Biraz düşündükten sonra, Ö4 kişi, sürekli yolun yarısını gideceği için köye ulaşamayacaktır şeklinde fikrini değiştirmiştir. Bunun yanı sıra bölme işlemlerinin de bitmeyeceğini sonsuza kadar devam edeceğini söylemiştir. Bu örnek somutlaştırılarak Ö4’e tekrar sorulmuştur. Ö4’ün yaşadığı çevreden bildiği bir yer örnek gösterilerek, bahsedilen yere ne kadar sürede gidebileceği sorulduğunda Ö4 yarım saatte gidebileceğini söylemiştir. Ancak bu şekilde yolun yarısını giderek bahsedilen yere ulaşıp ulaşamayacağı sorulduğunda ise Ö4 küçük adımlar atacağı için ulaşamayacağını söylemiştir. Benzer şekilde kişinin köye ulaşabileceğini söyleyen Ö13 de görüşmede fikrini değiştirerek, kişi sürekli yolun yarısını gittiği için köye ulaşamayacağını söylemiştir.

Öğrenciler ile yapılan görüşmelerde, kişinin köye ulaşabileceğini söyleyen öğrencilere kişinin köye sınırlı bir zamanda ulaşıp ulaşamayacağı sorulmuştur. Ulaşır cevabı veren 6 öğrenci (Ö3, Ö6, Ö7, Ö10, Ö14, Ö15), kişinin köye sınırlı bir zamanda (4-5 gün, 15-20 gün, 1 ay…) ulaşabileceğini söylerken, 4 öğrenci (Ö5, Ö8, Ö11, Ö12) kişinin kaç günde ulaşacağının belli olmayacağını söylemiştir. Bazı öğrenciler cevaplarında emin olmamakla birlikte kararsız kalmışlardır. Örneğin kişinin sınırlı bir zamanda ulaşabileceğini söyleyen Ö3, Ö10 ve Ö14 yapmış oldukları bölme işlemlerinin bitip bitmeyeceğini noktasında cevaplarında ikilem yaşadıkları görülmüştür. Ö3 bölme işlemlerinin bir yerde bitebileceğini ama sonsuza kadar da devam edebileceğini söylemiştir. Daha sonra cevaplarından emin olmadığını belirterek "*İşlemler biterse kişi köye ulaşır sonsuza kadar giderse ulaşamaz.*" şeklinde son kararını vermiştir. Diğer yandan benzer ikilemi Ö10 ve Ö14 yaşamıştır. Ö14 yaşadığı ikilemin farkına vararak işlemlerin bir yerde biteceği sonucuna ulaşmıştır.

Ö10 ise işlemlerin sonsuza kadar devam edeceği düşüncesin arkasında durmuştur. Bu bağlamda Ö10 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

A: *Burada bir sürü işlem yapmışsın. Sence bu işlemler bir yerde biter mi?*

Ö: *Bu işlemler bir yerde bitmez. Böyle sıfırdan küçük sayılar da olduğu için oraya kadar da devam eder.*

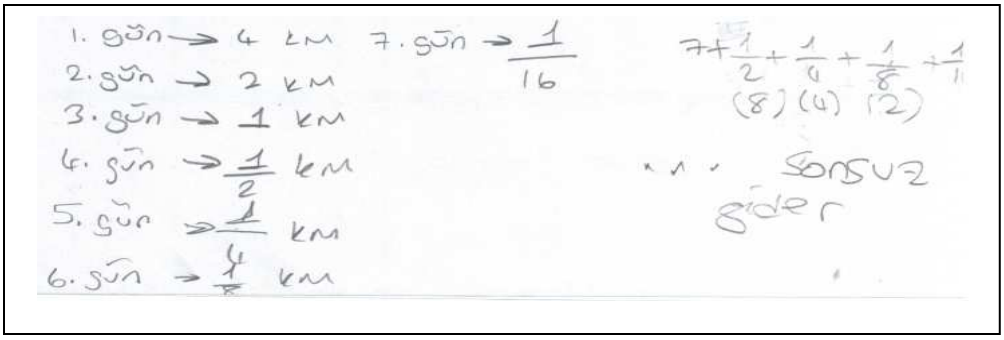
A:*Peki işlemler nereye kadar devam eder?*

Ö: *Sayılar büyüyor olsaydı bitmezdi de ama sayılar küçülüyor o yüzden biter herhalde. Aslında böyle de bitmez çünkü eksilere geçeriz eksilerden de sonsuza kadar gideriz.*

Diğer yandan kişinin köye ne kadar sürede ulaşacağının belirlenemeyeceğini söyleyen öğrencilerden, Ö12 görüşmede işlemlerin sonsuza kadar devam edeceğini bu nedenle sürenin belirlenemeyeceğini ifade etmiştir. Bir diğer öğrenci Ö8 ise sürekli kalan yolu ikiye bölerek işlemleri yapmaya çalışmıştır. Ancak bununla ilgili " *Bölme işlemini normalde devam eder ama ben yapamam.*" şeklinde işlemleri yapamayacağını ifade etmiştir. Sonuç olarak, verilen yol mesafeleri ne kadar az ya da yol sınırlı olsa da bölüm söz konusu olduğunda öğrencilerin bir çoğu bölme işlemlerinin bitmeyeceğine inanmaktadırlar.

Soru ile ilgili oluşturulan bir diğer kategori ise “sonsuz süreç” kategorisidir. Bu kategoride yer alan öğrenciler bölümlerin sürekli devam ettiğini ve bölümlerin bir yerde durmadığı için kişinin köye ulaşamayacağını düşünmektedirler. Öğrencilerin % 22’si bu kategoride yer almaktadır. Öğrenciler genellikle *“Hep yarısını gittiği için ulaşması zor.”, “Her bölümde sayılar küçülerek ilerliyor.” ve “Her şekilde çok az bir uzaklık kalır.”* şeklinde gerekçelerini ifade etmişlerdir. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları;

“Ulaşamaz.Her bölümde yol gittikçe yol kısalıyor ama bir sonu olmuyor.”(8.sınıf)
“Köye ulaşamaz çünkü her şeyin bir yarısı vardır. Bir gün 2 km gitse… sonsuza kadar gider.” (8.sınıf)
“Ulaşamaz. Çünkü bu iş sonsuzluğa giden bir olaydır.”(6.sınıf)



Şekil 4.7. Sekizinci soruya ilişkin 8. sınıf öğrencisinin cevabı

Yukarıda verilen örneklerde de görüldüğü üzere öğrenciler yapılan işlemlerin sonsuz kadar devam edeceğini söylemişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrencilerden Ö6 ile görüşme yapılmış ve öğrenci görüşmede fikir değişikliğine gitmiştir. Ö6, durum tespit testindeki cevabında kişinin köye ulaşamayacağını söylemiştir. Ancak yapılan görüşmede kişinin sürekli yolun yarısını gittiğini ve bu şekilde giderse köye ulaşabileceğini söylemiştir. Kişinin köye sınırlı bir zamanda ulaşamayacağını söyleyen Ö6, kişinin kaç günde köye ulaşacağını bulmak için bazı işlemler yapmaya çalışmıştır. Ö6’nın işlem yapma süreci ve bu süreçte kişinin köye ulaşıp ulaşamadığı ile ilgili düşünceleri aşağıdaki görüşme alıntısında verilmiştir.

Cevap: Ulaşamaz çünkü yarım yarım gittiği için ulaşması biraz da zor olabilir. A: Cevabında köye ulaşılması zor olur demişsin. Cevabını biraz daha açabilir misin? Ö: Aslında şimdi soruyu tekrar okuyunca aslında ulaşabilir. Çünkü önce tamamladığı günde yarısını gidecek diğer günde de yarısını gidecek o zaman böyle böyle giderse tamamlayabilir 8 km'yi. ***	Kişi köye ulaşabilir. Gitmeye devam ederse 8 km tamamlanır.
A: Peki kişi köye sınırlı bir zamanda ulaşabilir mi? Ö: Bence ulaşamayabilir çünkü yarım yarım gidiyor zaten ne zaman ulaşacağı belirlenemeyebilir. A: peki sence kaç günde ulaşabilir? " Ö: (düşünüyor) A: İstersen işlemleri yapabilirsin Ö: Birinci gün yarısını gidiyor 4 km, diğer günde 2 km gider 8 km olduğundan dolayı da dört günde gidebilir. ***	Kişi sınırlı bir zamanda ulaşamaz ama belki dört günde ulaşabilir.
A: İşlemlere devam edelim. Ö: Üçüncü gün 1 km gider, bundan sonra… A: Peki ulaştı mı? Ö: 7 km gitti. A: Ne kadar kaldı? Ö: 1 km kaldı.. A: Peki daha sonra? Ö: 0,5 mi olur? A: Evet. Bu dördüncü gün oldu. 5.gün? Ö: Bunun yarısı olacak 0.25.. A: Peki ulaştı mı? Ö: 7..(toplama yapıyor) bence ulaşmadı çünkü bunun 1 tama eşit olması gerekiyor o yüzden olmadı. A: ulaşması için işlemlere ne kadar daha devam edebiliriz? Ö: birazcık sürebilir.. çünkü 8 km gidebilmesi için yarım yarım böle böle giderse 8 km' ye ulaşır.	İşlemlere devam ediyor ve 5. günde ulaşamayacağına karar veriyor. İşlemlere devam ediyor. 6. Günde ulaşabileceğini söylüyor.

A:ne kadar daha gider? Ö: işlem yapayım mı? A: tamam. Ö: 0.25’i bölersek 0.125 oldu 1 tamam eşit oldu galiba. O zaman 8 km gitmiş oldu.	

Şekil 4.8. Sekizinci soruya ilişkin 6. sınıf öğrencisinin cevabı

Ö6, kişinin köye sınırlı bir zamanda ulaşamayacağını söyleyerek kaç günde ulaşmaya çalıştığını bulmaya çalışmıştır. Yaptığı işlemlerde bölümün devam ettiğini ve 8 km’yi tamamlayamadığını fark etmiştir. Bölme işlemlerine devam edilmesi istendiğinde ise 6. adımda yapmış olduğu işlemler sonucunda 8 km’nin tamamlanmış olabileceğini söylediği görülmüştür. Ancak gerçekte toplama işlemi yapıldığında 8 km tamamlanmamaktadır.

Öğrencilerin % 42’si de ulaşır veya ulaşamaz şeklinde kısa cevap vermiş ya da sınıflandırılma yapılamamıştır. Öğrenci cevaplarına sınıf bazında bakıldığında ise 5.sınıf (% 38), 6. sınıf (% 40), 7. sınıf (% 30) ve 8.sınıf (% 36) öğrencilerinin birçoğu sürecin sonlu olduğunu ve kişinin köye gidebileceğini düşündüğü görülmektedir. Bunun yanı sıra gerekçelendirme yapmadan soruyu cevaplayan öğrencilerin birçoğu da kişinin köye ulaşabileceğini düşünmektedirler.

4.5. Öğrencilerin sonsuz kümelerin karşılaştırılmasına ilişkin açıklamaları

Burada öğrencilerin sonsuz kümeler ve sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili dört tane soru yer almaktadır. Bu bölümde bu sorulara ilişkin, araştırmadan elde edilen bulgular paylaşılacaktır.

4.5.1. Yedinci ve Onuncu Sorudan Elde Edilen Bulgular

Bu bölümde 7. soru ve 10. sorudan elde edilen veriler sunulacaktır. Söz konusu sorularda, öğrencilerden verilen iki sonsuz kümenin eleman sayılarını karşılaştırmaları istenmiştir. Böylece öğrencilerin sonsuz kümeleri karşılaştırırken kullandıkları metotların ortaya çıkartılması istenmiştir. Verilen iki sorunun içeriği aynı olup, temsilleri farklıdır. Bu nedenle bu iki soru için ortak kategoriler oluşturulmuş ve elde edilen veriler bu kategorilere göre analiz edilmiştir. Bu bölümde, oluşturulan kategorilerin ardından her iki soruya ait bulgular ayrı başlıklar altında verilecektir.

Öğrencilerin sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında kullandıkları metotlara ait kategoriler oluşturulurken literatürden yararlanılmıştır (Güven ve Karataş, 2004). Bu kategoriler aşağıda açıklamaları ile birlikte sunulmuştur.

Örnek: Doğal Sayılar: 1,2,3….

Çift Doğal Sayılar: 2,4,6…

1.Tek Sonsuz: Farklı iki kümenin eleman sayısı sonsuz olduğu için kümelerin eleman sayıları eşittir. Örneğin doğal sayılar kümesi ile çift doğal sayılar kümesinin eleman sayıları eşittir çünkü iki küme de sonsuzdur şeklinde belirtme. Bu yöntem sonsuz kümelerin karşılaştırılması için uygun olmayan bir yöntemdir (Güven ve Karataş, 2004) .

2. Kapsama: İki kümeyi karşılaştırırken birinin diğer kümeyi kapsadığını ya da bu kümelerden bir tanesinin diğer kümede olmayan elemanları kapsadığını bu yüzden kapsayan kümenin eleman sayısının daha fazla olduğunu ifade etme. Örneğin doğal sayılar kümesi ve çift doğal sayılar kümesinin karşılaştırılmasında, doğal sayıların çift doğal sayıları kapsadığını belirterek doğal sayıların eleman sayısının daha fazla olduğunu söyleme. Sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında bu yöntemi kullanan öğrenciler kümeleri sonlu bir küme olarak düşünmektedir.

*3.**Artış Miktarını Belirleme**:* Kümedeki elemanların artış miktarlarına bakarak eleman sayısının belirlenmesi. Örneğin; doğal sayılar kümesi ile çift doğal sayılar kümesini karşılaştırırken doğal sayıların birer birer arttığını, çift doğal sayıların ise ikişer ikişer arttığı için doğal sayılar dizisinin daha fazla olduğunu belirtme. Burada öğrenci çift doğal sayılar arasındaki aralığın daha fazla olduğu için bu aralıktaki sayıların atlandığını düşünmektedir. Doğal sayıların ise çift doğal sayıların atladığı aralıktaki sayıları içerdiğini ve daha az sayı atlayarak devam ettiğini belirtmektedir.

4. Sayı Değerlerini Karşılaştırma: Kümede yer alan elemanların sayı değerlerini dikkate alarak elemanlarının toplamı daha fazla olan kümenin daha çok elemana sahip olduğunu belirtme. Örneğin çift doğal sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesini karşılaştırırken öğrenciler çift doğal sayılar kümesinde bulunan elemanların sayı değerlerinin daha fazla olduğunu söyleyerek çift doğal sayılar kümesinin terim sayısının daha fazla olduğunu belirtmektedirler. Öğrencilerin "terim sayısı" kavramını "sayı değeri" şeklinde algılamış olmaları onları böyle bir yöntem kullanmaya yönlendirmiş olabilir.

5. Birebir Eşleme: Cantor tarafından ortaya koyulan bu yöntem karşılaştırılmasında kullanılmıştır (Güven ve Karataş, 2004). Örneğin doğal sayılar kümesi ile çift doğal sayılar kümesini karşılaştırırken kümedeki elemanlar arasında bire bir eşleme yaparak iki kümenin eşit sayıda elemana sahip olduğunu söyleme.

6. Sınıflandırılmayan*:* Sonsuz kümelerin karşılaştırmasında, cevabında kısa cevaplar verip kullandıkları yöntem belirlenemeyen, bilmiyorum, belirlenemez şeklindeki cevap veren öğrenciler ve soruyu boş bırakmayı tercih eden öğrenciler bu kategoriye dahil edilmiştir.

Bu kategoriler dahilinde 7. ve 10. soruya ait verilerden elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

Yedinci Sorudan Elde Edilen Bulgular

7. SORU**:** Aşağıda doğal sayılar ile çift doğal sayıların oluşturduğu sayı örüntüleri verilmiştir. Bu iki sayı örüntüsünü devam ettirdiğimizi düşünelim. İki sayı örüntüsünü karşılaştırdığınızda hangi sayı örüntüsündeki terim sayısı daha fazladır? Nedenleri ile açıklayınız.

Doğal Sayılar: 0,1, 2, 3, …..
Çift Doğal Sayılar: 0, 2, 4, 6, ...

Bu soruda öğrencilerden doğal sayıları ve çift doğal sayıların oluşturduğu sayı örüntülerinin terim sayılarının karşılaştırılması ve cevaplarını nedenleri ile açıklayarak yazmaları istenmiştir. Elde edilen verilerin analizleri sonucunda, öğrencilerin % 55 ‘i doğal sayıların terim sayısının çift doğal sayılardan daha fazla olduğunu ifade ederken, % 12’si çift doğal sayıların terim sayısının daha fazla olduğunu belirtmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin % 19’u doğal sayılar ve çift doğal sayıların terim sayılarının eşit olduğunu söylemiştir. Öğrencilerin % 14’ü ise soruyu boş bırakmayı tercih etmiştir. Öğrencilerin cevaplarında yapmış olduğu açıklamalar doğrultusunda iki örüntünün eleman sayılarının karşılaştırırken kullanmış oldukları metotlar belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin kullandığı metotlar “*tek sonsuz”*, “*kapsama”*, “*artış miktarlarını belirleme”* ve *“birebir eşleme*” olmak üzere 4 kategori belirlenmiştir. Öğrencilerin kullanmış olduğu yöntemlerin sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 4-23.’ de sunulmuştur.

Tablo 4-23. Yedinci soruya ilişkin kategorilerin sınıf sevisine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Artış Miktarlarını Belirleme	15	30	16	40	13	30	13	31	57	32
Kapsama	9	18	12	30	17	39	10	24	48	27
Tek Sonsuz	4	8	3	7	5	11	5	12	17	10
Birebir Eşleme	3	6	3	8	1	2	4	9	11	6
Sınıflandırılamayan	19	38	6	15	8	18	10	24	43	25
Toplam	50		40		44		42		176	% 100

Tablo 4-23. İncelendiğinde, öğrencilerin % 32’sinin artış miktarını belirleme yöntemini kullandığı görülmektedir. Bu yöntem, öğrenciler tarafından en çok kullanılan yöntem olmuştur. Bu yöntemi kullanan öğrenciler sayılar arasındaki artış miktarına bakarak soruyu cevaplamışlardır. Bu yöntemi kullanan öğrencilerden bazılarının cevapları şu şekildedir;

“Çift sayılar daha fazladır. Çünkü çift sayılar ikişer ikişer ilerliyor ama doğal

sayılar tek tek ilerliyor." (6.sınıf)

"Doğal sayıların terim sayısı daha fazla olur çünkü çift doğal sayılar ikişer ikişer gittiği için bazı sayıları atlıyor. Ama doğal sayılar da sayı atlamıyor bu yüzden doğal sayıların terim sayısı daha fazla olur."(6.sınıf)

"İkisi de sonsuza kadar gidebilir. Fakat doğal sayılar teker teker çift doğal sayılar ise ikişer ikişer gittiğinden doğal sayıların terim sayısının daha fazla olduğunu söyleyebiliriz." (7.sınıf)

Öğrenciler burada çift doğal sayıların artış miktarı daha fazla olduğu için aradaki sayıların atlandığını, atlanan sayıların ise doğal sayılar sayı örüntüsünde var olduğunu bu nedenle doğal sayıların terim sayısının daha fazla olduğunu ifade etmişlerdir.

Öğrencilerin % 27'si ise kapsama yöntemini kullanmıştır. Bu öğrenciler doğal sayılar örüntüsünün çift doğal sayılar örüntüsündeki elemanları içerdiğini düşünmektedirler. Bu nedenle doğal sayıların çift doğal sayılardan daha fazla olduğunu ifade etmişlerdir. Bu yöntemi kullanan öğrencilerin cevaplarından bazılar aşağıda verilmiştir.

"Doğal sayılar daha fazladır. Çünkü çift sayılarda tek sayılar bulunmaz. Doğal sayılar hepsini içerir." (5.sınıf)
"İkisinin de sonu yok ama bence doğal sayılar daha fazla. Çünkü bütün sayıları kapsar."(7.sınıf)
"Bence doğal sayılar kümesi daha fazladır. Çünkü çift doğal sayılar kümesi doğal sayılar kümesinin alt kümesidir."(8.sınıf)

Öğrencilerin % 10'unun ise tek sonsuz yöntemini kullandıkları görülmektedir. Bu yöntemi kullanan öğrenciler tek bir sonsuzluk olduğuna düşünmektedirler. Öğrenciler sayı örüntülerinin eleman sayısının eşit olduğunu ve sayı örüntülerinin sonsuz olduğunu veya sonsuza kadar devam ettiğini söylemişlerdir. Bu kullanan öğrencilerin bazılarının cevapları şu şekildedir

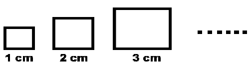
"İkisi de eşittir. Çünkü sayılar sonsuza kadar devam eder." (8.sınıf)
"İkisi de ***a****ynıdır. İkisi de sonsuza kadar gider." (5.sınıf)*
"Her zaman eşit gidecektir. Örüntüyü büyük sayılarda bile eşit görürüz. Çünkü sayı kavramı sonsuzdur". (7.sınıf)

Öğrencilerin % 6'sı ise Cantor tarafından ortaya konulan birebir eşleme yönteminin kullanıldığı görülmektedir. Öğrenciler tarafından en az bu yöntemin kullanıldığı görülmektedir. Bu yöntemi kullanan öğrencilerin bazı cevapları şu şekildedir:

"Eşit olur. Çünkü doğal sayılar iki terim artarsa çift doğal sayılar da iki terim artar." (8.sınıf)
"Terim sayıları eşit olur. Çünkü sayıların değerleri farklı ama ikisi de eşit sayıda ilerler." (5.sınıf)
"İkisi de eşittir. Her çift/tek sayıdan sonra çift/tek sayı gelecektir. Sayılar birbirini dengeler." (7.sınıf)

Öğrencilerin % 25'i ise kümelerin karşılaştırılması ile ilgili yeterli açıklama yapmadığı için kullandıkları yöntem belirlenememiş ya da soruyu cevaplandırmadıkları için sınıflandırılmayan kategorisine dahil edilmiştir.

Onuncu Sorudan Elde Edilen Bulgular



10. SORU: Yukarıda kenar uzunlukları 1 cm'den başlayıp 1'er cm büyüyen kareler verilmiştir. Aşağıda ise A ve B sayı örüntüleri verilmiştir. A sayı örüntüsünün terimleri karelerin kenar uzunluklarından, B sayı örüntüsünün terimleri ise karelerin çevre uzunluklarından oluşmaktadır. A ile B sayı örüntülerini devam ettirdiğimizde örüntülerin terim sayılarını karşılaştırınız. Hangi sayı örüntüsünün terim sayısı daha fazladır? <u>Nedenleri ile açıklayınız</u>.

A : 1, 2, 3, …..
B : 4, 8, 12, …..

Sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili olan bu soru da 7. sorudan farklı olarak geometrik temsil türü kullanılmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda öğrencilerin % 30' u A sayı örüntüsünün terim sayısının B sayı örüntüsünün terim sayısından daha fazla olduğunu söylediği, öğrencilerin % 24'ü ise B sayı örüntüsünün terim sayısının A sayı örüntüsünden daha fazla olduğunu söylediği sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin % 25'i ise A ve B sayı örüntülerinin terim sayılarının eşit olduğunu söylemiştir. Öğrencilerin % 19'u da karşılaştırma yapılamaz, bilmiyorum gibi ifadeler yazmış veya soruyu boş bırakmayı tercih etmişlerdir.

Öğrencilerin iki sayı örüntüsünü karşılaştırırken "tek sonsuz", "kapsama", "artış miktarını belirleme", "birebir eşleme" ve "sayı değerlerini" karşılaştırma olmak üzere kullandığı yöntemler beş kategoride toplanmıştır. Bunun yanı sıra kısa cevap verip, sayı örüntülerini nasıl karşılaştırdığına yönelik bir açıklama yapmayan öğrenciler, sayı örüntülerinin karşılaştırılamayacağını söyleyen öğrenciler veya soruyu boş bırakmayı tercih eden öğrenciler sınıflandırma yapılamamıştır. Öğrencilerin kullandığı yöntemlerin sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 4-24.'de verilmiştir.

Tablo 4-24. Onuncu soruya ilişkin kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Artış Miktarlarını Belirleme	13	26	10	25	4	9	8	19	35	20
Birebir Eşleme	3	6	2	5	6	14	8	19	19	11
Tek Sonsuz	3	6	4	10	6	14	4	10	17	10
Kapsama	3	6	5	12	4	9	3	7	15	8
Sayı Değerlerini Karşılaştırma	3	6	3	8	4	9	0	0	10	6
Sınıflandırılmayan	25	50	16	40	20	45	19	45	80	45
Toplam	50		40		44		42		176	%100

Öğrencilerin % 20'sinin artış miktarını belirleme yöntemini kullandığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğrenciler yedinci soru ile benzer açıklamalar yapmışlardır. Ayrıca yedinci soruya göre öğrencilerin bu soruda söz konusu yöntemi daha az kullandıkları görülmektedir. Bu yöntemi kullanan bazı öğrencilerin cevapları örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“B sayı örüntüsü daha fazladır. Çünkü o daha çok artıyor.” (6.sınıf)
“B’nin terim sayısı fazladır. A sayı örüntüsü 1’er 1’er artmış, B ise 4’er 4’er artmış.” (5.sınıf)

Görüşme yapılan öğrencilerden 6. sınıf öğrencisi Ö7 durum tespit testinde verdiği cevapta A sayı örüntüsünün sonsuza kadar gittiğini ve terim sayısının daha fazla olduğunu söylemiştir. Görüşmede neden böyle düşündüğü sorulduğunda ise Ö7 terim sayılarını karşılaştırırken, sayı örüntülerindeki sayıların artış miktarlarına göre karşılaştırdığını ifade etmiştir. Ayrıca Ö7, B sayı örüntüsünün de sonsuz olduğunu düşünmektedir. İki örüntü de sonsuz olmasına rağmen A sayı örüntüsünün eleman sayısının daha fazla olduğu düşüncesini yinelemiştir. Ö7 ile yapılan görüşmenin alıntısı şöyledir:

Cevap: *A sayı örüntüsünün terimleri daha fazladır. Çünkü A sayısındaki sayılar sonsuzdur.*
A: *Cevabını biraz daha açabilir misin?*
Ö: *Ben A diye düşündüm.*
A: *Neden böyle düşündüğünü açıklayabilir misin?*
Ö: *Çünkü 4,8 ,12… dörder dörder gidiyor ve bazı sayıları yutuyor. Sayılar sonsuzdur gider ama A sayısı daha bana mantıklı geliyor. 1,2,3 çünkü aralarında sayı yoktur ard arda gelir ama B arda arda gelmez.*

Öğrencilerin % 11’inin ise birebir eşeleme yöntemini kullandığı görülmektedir. Yedinci soru ile karşılaştırıldığında bu soruda öğrencilerin daha fazla birebir eşleme yöntemini kullandıkları tespit edilmiştir. Bu yöntemini kullanan öğrencilerin cevaplarından bazıları şu şekildedir;

“Eşittir. Çünkü bir kare artarsa çevre uzunluğu da aynı oranda artar.”(8.sınıf)
“Sayılar eşit olur. A’ye eklediğimiz kadar B’ye de ekleriz.” (8.sınıf)

"Aynıdır. Çünkü her karenin bir çevresi var." (6.sınıf)

Sayı örüntülüleri arasında birebir eşleme yapılabileceğini söyleyen Ö1 ile yapılan görüşmede, Ö1 sayı örüntülerinin sonsuza kadar devam ettiğini belirmiştir. Soru ile ilgili yorumunu ise şu şekilde açıklamıştır.

Cevap: *Bu örüntü sonsuza kadar devam eder.*

A: *Cevabında tam olarak ne demek istediğini biraz daha açabilir misin?*

Ö: *Buradaki terim sayısı eşit kalır bence.*

A: *Eşit kalır derken ne demek istedin?*

Ö: *Çünkü sayılar sonsuza kadar gider öyle giderse de hiçbir sonu olmaz. Zaten bu 5 (A sayı örüntüsünden bahsediyor) oldu mu burası da 20 (B sayı örüntüsünden bahsediyor) olur. Öyle devam eder sonsuza dek. Biri arttığında diğeri de artar hiçbir zaman sayılar bitmediği için de öyle devam eder. "*

A: *Peki ben aşağıdaki gibi yazmış olsaydım ne düşünürdün?*

"A : 1, 2, 3, ….. B : 4, 8, 12, 16….."

Ö: *Cevabımda bir değişiklik olmazdı.*

A: *Neden?*

Ö: *Bence değişiklik olmazdı. Çünkü ben buraya tekrar 4 ekleyip aynı işlemi devam ettirirdim.*

Ö1, birebir eşleme yöntemi kullanarak, sayıların devam edeceğini ve A sayı örüntüsündeki her sayıya karşılık B sayı örüntüsünde bir sayı bulunabileceğini ifade etmiştir. Görüşme yapılan diğer öğrenciler arasında bu yöntemi kullanan öğrenciler de "*A artarsa B de artar*.", "*A ve B sayı örüntüleri eşit gider*." ve "*Sayı örüntüleri eşit olur çünkü sayılar birbirini tamamlar*" şeklinde benzer açıklamalar yapmışlardır.

Bu yöntemi kullanan öğrencilerin yapmış oldukları açıklamalara genel olarak bakıldığında öğrenciler örüntülerde verilen sayılardan çok karelere odaklanmış oldukları görülmektedir. Öğrenciler karenin bir kenarı ile çevresi arasındaki ilişkiyi kurarak eşit sayıda terim sayısı olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Öğrencilerin % 10'u ise "Tek sonsuz" yöntemini kullanmıştır. Bu yöntem iki soruda da eşit sayıda öğrenci tarafından kullanıldığı görülmüştür. Bu yöntemi kullanan öğrenciler 7. soruda olduğu gibi benzer şekilde açıklama yaparak, iki sayı örüntüsünün de sonsuza kadar devam ettiğini bu nedenle terim sayılarının eşit olduğunu belirtmişlerdir. Örneğin 6. sınıf öğrenci Ö5 ile yapılan görüşmede, Ö5 düşüncelerini şu şekilde dile getirmiştir.

Cevap: *İkisi de eşit sonsuza kadar gider.*

A*: Burada cevabını biraz daha açabilir misin?*

Ö*: A da 1,2,3,4,.. diye devam ettiğimiz zaman eşittir çünkü ikisi de sonsuza kadar gidiyor. Ama şöyle bakıldığında bunda belki daha az sayı olabilir çünkü A'da bütün sayıları yazacağız, B de dörde dörder giden sayıları yazacağız ama eşit de olabilir. Ama bir farklılık olduğu için 1,2, 3,4 diye giden belki daha fazla olabilir ama ikisi de sonsuza kadar gider ve eşittir.*

Öğrenciler sayı örüntülerindeki terimlerin sonsuza gideceğini bu nedenle iki sayı örüntüsünün de sonsuz olduğunu ve terim sayılarının eşit olduğunu söylemişlerdir. Bu durumda, sonsuz olan kümelerin eleman sayısı eşittir sonucuna götürmekte dolayısıyla öğrenciler tek bir sonsuz olduğunu düşünmektedirler.

Öğrencilerin %8'i ise kapsama yöntemini kullanmıştır. 7. soru ve 10. sorular karşılaştırıldığında 7.soruda öğrencilerin kapsama yöntemini daha fazla kullandıkları görülmektedir. Bu yöntemi kullanan iki öğrencinin açıklaması aşağıda örnek olarak verilmiştir.

"A daha büyük, tüm sayılar var." (7.sınıf)

"A örüntüsü daha fazladır. A'da tüm sayılar teker teker yazılmış, B'de atlayarak gitmiştir." (8.sınıf)

Bu kategoride yer alan 5. sınıf öğrencisi Ö4 ile yapılan görüşmede Ö4 iki sayı örüntüsünün de sonsuz olduğunu söylemiştir. Ancak A sayı örüntüsünde tüm sayıların olduğunu ve B sayı örüntüsünde bulunan sayıların da A sayı örüntüsünde olduğunu belirterek, A sayı örüntüsünün B sayı örüntüsünü kapsadığını ifade etmiştir. Yani Ö4 sonsuz bir sayı örüntüsünün başka sonsuz bir sayı örüntüsünü kapsayabileceğini düşünmektedir. Ö4 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

Cevap: *A sayı örüntüsünün terim sayısı daha fazladır. Çünkü B örüntüsü bir şeye bağlıdır. Ama A sonsuza kadar gidebilir. B de öyle fakat A'da her sayı olacaktır.*

A: *Cevabını biraz daha açabilir misin?*

Ö: *Burada(A sayı örüntüsü) 4 olacak. Diğerinde(B) 4 ile 4'ü çarptığımızda 16 olacak ama burada(A) 1,2,3,4,5,6,… diye devam ederek 16'yı da kaplayacak ve daha sonraki sayıları da kapsayacak. Yani A sonsuza kadar gider, B de sonsuza kadar gider ama A 'da tüm sayılar vardır. Yani B de olan sayılar A örüntüsünde de oluyor. Ama A sayı örüntüsünde olan sayıların hepsi B sayı örüntüsünde olmuyor. Bu yüzden A sayı örüntüsünün terim sayısı daha fazladır.*

Öğrencilerin % 6'sı ise sayı değerlerini karşılaştırma yöntemini kullanmıştır. Burada öğrenciler sayı örüntülerinde verilen sayıların değerlerini dikkate alarak sayı örüntülerini karşılaştırmışlardır. Bu yöntemi kullanan öğrencilerin "terim sayısı" ifadesini "sayı değeri" olarak algıladığı düşünülmektedir. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

"B örüntüsü daha çoktur çünkü sayıları böyle devam ederse onlar toplanınca ortaya büyük bir sayı çıkar."(5.sınıf)

"A'nın daha fazladır. Devam ettirirsek değerler daha fazla çıkar." (8.sınıf)

Öğrencilerin %45'i ise yeterli açıklama yapmadığı için veya soruyu cevaplandırmadıkları için sınıflandırma yapılamamıştır.

Yedinci ve onuncu soruda öğrenci cevapları sınıf bazında incelendiğinde ise, 5.sınıf (% 30-%26) ve 6. sınıf (% 40-%25) öğrencilerinin her iki soruda da artış miktarını belirleme yönteminin öğrenciler tarafından en çok kullanıldığı görülmektedir.

Diğer yandan 7. sınıf öğrencileri yedinci soruda en fazla kapsama (%39) yöntemini kullanırken, onuncu soruda birebir eşleme (%14) ve tek sonsuz (%14) yöntemlerini daha fazla kullandıkları görülmüştür. 8. sınıf öğrencileri ise yedinci (%31) soruda en fazla artış miktarını belirleme yöntemini kullanırken, onuncu soruda artış miktarını belirleme (%19) ve birebir eşleme (%19) yöntemlerinin daha fazla kullanıldığı görülmektedir. Özellikle 7. ve 8. sınıf öğrencileri olmak üzere, öğrencilerin onuncu soruda yedinci soruya göre daha fazla birebir eşleme yöntemini kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

4.5.2. *Dokuzuncu ve Onbirinci Sorudan Elde Edilen Bulgular*

Bu bölümde paylaşılacak olan 9. soru ve 11. soru da yine sonsuz kümelerin karşılaştırılması söz konusudur. Ancak sorular farklı temsillerde öğrencilere sorulmuştur. 9. soruda farklı uzunlukta iki doğru parçası verilerek doğru parçalarının uzunlukları ve nokta sayıları bakımından karşılaştırılması istenmiştir. 11. soruda ise bir doğru parçası ve devam eden bir sayı örüntüsü verilerek, doğru parçasındaki nokta sayısı ile sayı örüntüsünün terim sayısının karşılaştırılması istenmiştir. Söz konusu iki soru için ortak kategoriler oluşturulmuş ve elde edilen veriler bu kategorilere göre analiz edilmiştir. Bu bölümde oluşturulan kategorilerin ardından her iki soruya ait bulgular ayrı başlıklar altında incelenecektir. Bu kategoriler aşağıda açıklamaları ile birlikte sunulmuştur.

1. Tek Sonsuzluklar*:* Eleman sayısı sonsuz olan kümelerin eleman sayıları eşittir. Örneğin farklı uzunlukta iki doğru parçasının nokta sayıları eşittir çünkü iki kümede de nokta sayıları sonsuzdur ve devam eden bir sayı örüntüsünün terim sayısı ile doğru parçasının nokta sayısı eşittir çünkü iki küme de sonsuzdur şeklinde belirtme.

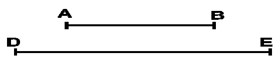
2. Sonlu Büyüklükleri Karşılaştırma: Sonlu ya da sonsuz olan iki büyüklüğün sonlu olduğunu düşünerek karşılaştırma yapılması. Örneğin sonlu büyüklük için farklı uzunluktaki iki doğru parçasının nokta sayılarını karşılaştırılmasında uzunluklarına bakarak karşılaştırma yapma. Kısa olan doğru parçasında daha az nokta olduğunu söyleme. Diğer yandan devam eden bir sayı örüntüsünü sonlu bir büyüklük olarak düşünme ve doğru parçası ile karşılaştırma yaparken iki farklı sonlu büyüklüğün karşılaştırmasını yapıyor gibi karşılaştırma yapma. Devam eden sayı örüntüsünde sonlu sayıda kesir olduğunu düşünerek terim sayısının sınırlı olduğunu söyleme.

3. Nokta Sayısını Belirleme: Bu kategoride öğrenciler verilen doğru parçalarındaki nokta sayısının çok fazla olduğunu söyleyerek veya nokta sayısı ile ilgili tahmini sayılar yazarak doğru parçaları arasında karşılaştırma yapmışlardır. Bu kategoride öğrencilerin "nokta" kavramına yönelik algısı ön plana çıkmaktadır. Öğrencilere göre nokta, boyutu olan bir kavramdır. Öğrenciler nokta büyüklüğünün ve nokta sayısının istediğimiz gibi belirlenebileceğini düşünmüşlerdir.

6. Sınıflandırılmayan*:* Soruya yönelik cevabında kısa cevaplar verip sınıflandırma yapılamayan, bilmiyorum, belirlenemez şeklindeki cevap veren öğrenciler ve soruyu boş bırakmayı tercihe eden öğrenciler bu kategoriye dahil edilmiştir. Bu kategoriler dahilinde 9. ve 12. soruya ait verilerden elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

Dokuzuncu Sorudan Elde Edilen Bulgular

9.SORU: Aşağıda AB doğru parçası ile DE doğru parçası verilmiştir. Bu ifadeye göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



c) AB doğru parçasının uzunluğu ile DE doğru parçasının uzunluğunu karşılaştırınız. AB doğru parçası, DE doğru parçasından uzun mu, kısa mı, eşit midir? Nedenleri ile açıklayınız.

d) AB doğru parçası üzerindeki nokta sayısı ile DE doğru parçası üzerindeki nokta sayısını karşılaştırınız. AB doğru parçasındaki nokta sayısı, DE doğru parçasındaki nokta sayısından az mıdır, çok mudur yoksa eşit midir? Nedenleri ile açıklayınız.

Bu soruda uzunlukları farklı iki doğru parçası verilmiş ve doğru parçaları üzerinden iki tane soru sorulmuştur. Sorunun A şıkkında doğru parçalarını uzunlukları bakımından karşılaştırılması istenmiştir.

Öğrenciler, “*AB doğru parçası kısadır*”, “*AB doru parçası DE doğru parçasına eşittir”* veya “*AB doğru parçası kısa, uzun ya da DE doğru parçası ile eşit olabilir”* şeklinde cevaplar vermiştir. Öğrenci cevapları ve cevapların, sınıf seviyelerine göre dağılım Tablo 4-25.’de verilmiştir.

Tablo 4-25. Dokuzuncu sorunun birinci alt sorusuna ilişkin öğrenci cevapları ve cevapların sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
AB Doğru Parçası Kısadır	44	88	37	94	38	86	31	75	150	85
Perspektif Düşünce	3	6	1	2	0	0	7	17	11	7
AB Doğru Parçası ile DE Doğru Parçasının Uzunlukları Eşittir	0	0	1	2	2	5	2	4	5	3
Sınıflandırılamayan	3	6	1	2	4	9	2	4	8	5
Toplam	50		40		44		42		176	%100

Öğrencilerin % 35’i AB doğru parçasının DE doğru parçasından kısa olduğunu söylemiştir. Bu cevabı veren öğrenciler genellikle “*Görsel olarak bakıldığında AB doğru parçasının DE doğru parçasından kısadır.”* veya “*İki doğru parçası üst üste konulduğunda AB kısa olur, çünkü AB, DE’nin kısaltılmışıdır”* şeklinde açıklama yapmışlardır. Öğrencilerin % 6’sı ise soruya perspektifsel açıdan bakmıştır. Bu şekilde düşünen öğrenciler AB doğru parçasının arkada kalmış olabileceğini bu nedenle kısa gibi göründüğünü gerçekte ise iki doğru parçasının eşit ya da uzun olabileceğini söylemişledir. Öğrencilerin % 4 ‘ü ise iki doğru parçasının eşit olduğu söylemiştir. Bu cevabı veren öğrenciler iki doğru parçasının ucu sabit olduğu için eşit olduklarını belirtmişlerdir. Ancak böyle bir ifade matematiksel olarak böyle bir cevap doğru değildir. Öğrencilerin % 5’i ise soruyu boş bıraktığı için sınıflandırılamayan kategorisine dahil edilmiştir.

Sorunun B şıkkında ise verilen doğru parçalarının, nokta sayıları bakımından karşılaştırması istenmiştir. Bu soruya ait öğrencilerin cevapları, bu cevaplara ait kategoriler ve örnek açıklamalar Tablo 4-26. ‘da sunulmuştur. Öğrencilerin kullandığı yöntemlerin sınıf seviyelerin göre dağılımı da Tablo 4-27.’de sunulmuştur.

Tablo 4-26. Dokuzuncu sorunun ikinci alt sorusuna ilişkin öğrenci cevapları, kategoriler ve örnek açıklamalar

Öğrenci cevapları	*Kategoriler*	*Örnek Açıklama*
Nokta sayıları eşittir	Tek Sonsuzluk	Doğru parçalarının nokta sayıları eşittir çünkü ikisinde de nokta sayıları sonsuzdur, doğrudan sonsuz nokta geçer
	Nokta Sayısını Belirleme	İkisinde de tek nokta vardır Bir doğrudan iki nokta geçer
AB doğru parçasının nokta sayısı daha azdır	Sonlu Büyüklükleri karşılaştırma	AB doğru parçası DE doğru parçasından kısa
	Nokta Sayısını Belirleme	Noktalar eşit uzaklıkta konursa DE daha çok nokta olur Sınırlı sayıda nokta koyulur.Ör: AB 30, DE 50 nokta..vb.
Nokta yoktur	Nokta Sayısını Belirleme	İkisinde de nokta yoktur
Belirsiz	Nokta Sayısını Belirleme	Nokta büyüklüğüne göre değişir

Tablo 4-27. Dokuzuncu sorunun ikinci alt sorusuna ilişkin kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	**Sınıf Seviyesi**									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonlu Büyüklükleri Karşılaştırma	15	30	19	47	22	50	11	26	67	38
Nokta Sayısını Belirleme	14	28	8	20	5	11	7	17	34	19
Tek sonsuzluk	2	4	0	0	2	5	9	21	13	8
Sınıflandırılamayan	19	38	13	33	15	34	15	36	62	35
Toplam	50		40		44		42		176	%100

Öğrencilerin % 54’ü ise AB doğru parçasının nokta sayısının DE doğru parçasındaki nokta sayısından az olduğunu söylemiştir. AB nokta sayısının daha az olduğunu söyleyen öğrencilerin yapmış olduğu açıklamaya göre cevapları “*sonlu* *büyüklükleri karşılaştırma*" ve "*nokta sayısını belirleme*" şeklinde iki kategoride değerlendirilmiştir.

Sonlu Büyüklükleri karşılaştırma kategorisinde yer alan öğrenciler iki doğru parçasındaki nokta sayılarının karşılaştırmasını yaparken, doğru parçalarının uzunluklarını dikkate almışlardır. Öğrenciler AB doğru parçasının kısa olduğu için daha az nokta olduğunu ya da DE doğru parçası uzun olduğu için DE doğru parçasının nokta sayısının daha fazla olduğunu belirtmişlerdir. Bu kategoride yer alan bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

"*DE de daha çok nokta vardır çünkü DE daha uzun." (6.sınıf)*
"*AB azdır çünkü DE uzun olduğu için daha fazla yer kaplamaktadır." (5.sınıf)*

Öğrencilerin bir kısmı da nokta sayısını belirleme kategorisinde yer almaktadır. Bu öğrenciler AB doğru parçasının nokta sayısının DE doğru parçasındaki nokta sayısından az olduğunu söyleyerek, nokta sayısını belirlemeye çalışmışlardır. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları şöyledir:

"*Noktaları aynı büyüklükte kabul edersek DE' nin nokta sayısı daha fazla olur."(5.sınıf)*
"*DE doğru parçasında 50 nokta, AB doğru parçasında 30 nokta vardır. DE doğru parçasındaki nokta sayısı daha fazladır*." (5.sınıf)

Öğrencilerin % 29' sı AB doğru parçasındaki ve DE doğru parçasındaki nokta sayısının eşit olduğunu söylemiştir. Nokta sayısını eşit olduğunu söyleyen öğrencilerin cevapları "*tek sonsuzluk*" ve "*nokta sayısını belirleme*" yöntemlerini kullanmışlardır. Tek sonsuzluk yöntemini kullanan öğrenciler iki doğru parçasında da sonsuz nokta olduğu bu yüzden doğru parçalarındaki nokta sayılarının eşit olduğu belirtmişlerdir. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir;

"*Eşittir. İkisine de sonsuz nokta koyulabilir daha fazla olamaz." (8.sınıf)*
"*Eşittir. Nokta sayıları sonsuzdur." (7.sınıf)*

“Eşittir çünkü bir doğruda sonsuz nokta vardır.” (8.sınıf)

Tablo 4-27.’de görüldüğü üzere öğrencilerin % 8 ‘i tek sonsuzluk yöntemini kullanmıştır. Öğrencilerin testteki verdikleri cevaplardan öğrencilerin “tek bir sonsuzluk vardır” algısına sahip olduğu düşünülmüştür. Ancak yapılan görüşmelerde öğrencilerin cevaplarında kararsızlık yaşadıkları görülmüştür. Görüşme yapılan öğrencilerden 9 tanesi doğru parçalarında sonsuz nokta olduğunu düşünmektedir. Bu öğrencilerden üç öğrenci (Ö11, Ö12, Ö16) daha önce durum tespit testinde de sonsuz nokta olduğunu belirterek nokta sayısını eşit olduğunu söylemiş, altı öğrenci (Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö9, Ö14) görüşmede cevaplarını değiştirerek nokta sayılarının sonsuz olduğunu ifade etmişlerdir. Görüşmede, AB ve DE doğru parçalarında sonsuz nokta olduğunu düşünen öğrencilerin hepsine *“iki doğru parçasında da sonsuz nokta var peki bu sonsuzluklar aynı mıdır”* şeklinde bir soru sorulmuştur. Öğrencilerin bir kısmı eşit olduğunu söylerken bir kısmı bu eşit olmadığını ifade etmiştir. Öğrencilerin cevapları doğrultusunda “eşit sonsuzluklar” ve “farklı sonsuzluklar” şeklinde iki kategori oluşturulmuştur.

Tablo 4-28. Öğrenci cevapları ve öğrenci sayısı

Öğrenci Cevapları	***Öğrenci Sayısı***
Sonsuzluklar eşittir	6 (Ö2, Ö3, Ö4, Ö9, Ö11, Ö14)
Emin değilim	2 (Ö1,Ö5, Ö16)

İki doğru parçasında da sonsuz nokta olduğunu düşünen öğrencilerden, 6 tanesi bu sonsuzlukların aynı olduğunu söylemiştir. 3 öğrenci ise eşit olup olmama noktasında emin olmadığını belirmiştir. Cevaplarından emin olamadığını söyleyen Ö14, sonsuzluğun belirtilemediğini söylemiştir. Sınırlı alanda sonsuz nokta miktarını değişmediğini, bu sonsuzlukların aynı olduğunu ancak görüntünün kendisinin yanılttığını belirmiştir. Ö14 ile yapılan görüşmenin alıntısı şu şekildedir.

A: *Doğru parçalarında sonsuz nokta olduğunu söyledin. Bu sonsuzluklar aynı* *mıdır? Bununla ilgili ne düşünüyorsun?*

Ö: *Sonsuzluklar aynı mıdır?(düşünüyor) sonsuzluğu zaten belirtemiyorum..aynı mıdır farklı mıdır kararsız kaldım.*

A: *Peki seni burada ne yanıltıyor?*

Ö: *AB burada daha küçük beni görüntü yanıltıyor..görüntüye bakarak aldanırız.*

A: *Anladım.. peki sonsuz nokta demek senin için ne demek?*

Ö: *Çok, bir çok nokta demek.. sayamadığımız kadar nokta demek.*

A: *Peki sınırlı alana göre sonsuz noktanın miktar olarak değişebileceğini mi söylüyorsun?*

Ö: *Hayır öyle demek istemedim sadece görüntüye aldanıyoruz ama alana göre sonsuzluklar eşitlenemez. İkisin de sonsuzluğu eşittir yani sayılınca.. noktalar kesirler gibidir aralarında da noktalar vardır.*

Benzer şekilde 5. sınıf öğrencisi Ö1, sonsuzlukların eşit olup olmaması noktasında emin olmadığını söylemiştir. Bununla ilgili kısa olan doğru parçasında daha az nokta olabileceğini ama iki doğru parçasında da sonsuz nokta olduğunu söylemiştir. Ö1 ile yapılan görüşmenin alıntısı aşağıda verilmiştir.

A: *Bu sonsuzluklar eşit midir?*

Ö*: Bu sonsuzluklar eşit midir? (düşünüyor) değildir gibi geliyor bana ama eşit de olabilir. Emin değilim.*

A: *Eşit olabilir de olmayabilir de diyorsun.*

Ö: *Evet. Çünkü bu kısa, kısa olduğu için daha az bir noktayla tamamlanabilir.*

A*: İkisinde de sonsuz nokta olduğunu söylemiştin?*

Ö: *Evet ikisinde de sonsuz nokta var.*

A: *Bu durumda ne düşünüyorsun?*

Ö: *Az da olabilir. Çünkü bu daha küçük görünüşte daha az noktayla tamamlanabilir gözüküyor ama ikisi de sonsuz. Sonsuzluklar eşit midir? (düşünüyor) Sonsuzunda sonu gelmeyeceği için eşit midir değil midir diye diyemeyiz galiba..”*

Sonsuzlukların aynı olduğunu söyleyen diğer öğrenciler de doğru parçalarının uzunluklarının farklı olduğu belirtildiğinde cevaplarından emin olmadıklarını dile getirmişlerdir. Örneğin 5.sınıf öğrencisi Ö2, sonsuzlukların aynı olduğunu söylemiş ancak doğru parçalarının uzunluklarının farklı olduğu belirtildiğinde ise ne söyleyeceğini bilemediğini ifade etmiştir. Ö2 düşüncelerini şu şekilde dile getirmiştir.

A: *Sence buradaki sonsuzluklar aynı mıdır farklı mıdır?*
Ö: *Bu sonsuzluklar aynıdır çünkü sonsuz hiçbir zaman sonu gelmeyecektir. Orada üç kere sonsuz desek ya da burada iki kere sonsuz desek de aynı şey.*
A: *Peki buradaki sonsuz nokta olduğunu ve nokta sayılarının eşit olduğunu söyledin ama doğru parçalarının uzunlukları farklı bunu nasıl açıklarsın?*
Ö: *Yani nasıl söyleyeceğimi bilmiyorum. Noktanın sonu yoktur mesela burada bir kısma bir tirilyon nokta koyarsın diğerinde daha küçük bir kısma bir trilyon koyarsan yani bir şekilde onu denkleyebilirsin.*

Ö2, tek bir sonsuzluk olduğunu düşünmektedir. Bir kere sonsuz ya da iki kere sonsuz olsa bile aynı olduğunu ifade etmiştir. İki doğru parçasında da noktaların büyüklüğünü değiştirerek sonsuz nokta yapabileceğini söylemiştir. Bir başka öğrenci Ö8 de, iki doğru parçasındaki noktanın sonsuz olduğunu ve noktanın boyutuna göre sonsuzlukların değişebileceğini söyleyerek düşüncelerini şöyle ifade etmiştir.

"Sonsuzluklar aynı mıdır farklı mıdır bende orda size açıklarken farketttim.. eşit olursa uzunluklarının da eşit olması gerekir ama uzunlukları farklı, noktayı belli bir şey alırsak DE daha fazla çıkacak, almazsak ikisi de eşit sonsuzlukta çıkacak."

Bir başka öğrenci Ö5, ise sonsuzlukların farklı olduğunu söyleyerek, görüşlerini şu şekilde dile getirmiştir.

*"İkisi de sonsuza gittiği için belki eşittir ama sonsuzda da bir sınırı varsa eğer bunun o zaman DE doğru parçasının daha fazla noktası vardır."**(Ö5)***

Sonsuzlukların aynı olduğunu düşünen Ö13 ise sonsuzluk kavramını büyüklük ile ilişkilendirmemek gerektiğini ifade ederek, ikisin de sonsuz nokta yazılabileceğini söylemiştir.

A: *Doğru parçalarındaki nokta sayısını karşılaştırdığımızda ne düşünüyorsun?*
Ö: *nokta sayısı … yine sonsuzluk kavramı. Büyüklü küçüklük… buradaki kapsadığı alan daha büyük ama noktaları da istediğimiz kadar yazabiliriz sonsuza kadar. Bence ikisinde de eşit nokta var denilebilir.*
A: *Eşit nokta olduğunu söyledin ama uzunlukları farklı bu durumu nasıl açıklarsın?*
Ö: *sonsuzluk kavramını büyüklükle ilişkilendirmemek gerekiyor. Sonsuz tane nokta yazılabilir.*

Öğrenciler doğru parçalarının uzunluklarının farklı olmasından dolayı sonsuzlukların aynı olması ile ilgili kararsızlık yaşamaktadırlar. Sonsuzlukların eşit olduğunu düşünen öğrencilere doğru parçalarının uzunluklarının farklı olması sorulduğunda bu durumu açıklayamadıkları görülmüştür. Öğrenciler doğru parçalarının uzunlukları ve nokta sayısı ile ilgili görüntünün kendilerini yanılttığını belirtmişlerdir. Bazı öğrenciler ise uzunlukların farklı olması durumunu nokta büyüklüğü ile açıklamaya çalışmıştır. Doğru parçası kısa da olsa nokta boyutunu belirlersek sonsuz noktanın yazılabileceğini ifade etmişlerdir.

Nokta sayısını belirleme kategorisinde yer alan öğrenciler ise iki doğru parçasında da sınırlı sayıda nokta olabileceğini dolayısıyla nokta sayılarının eşit olduğunu ifade etmişlerdir. Bu kategoriye örnek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir;

"Eşittir. Çünkü AB'deki noktalar daha sıktır." (7.sınıf)
"Eşittir. Çünkü AB doğru parçasına ne kadar yazılıyorsa DE doğru parçasına da o kadar yazılabilir." (8.sınıf)
"Eşittir. İkisinde de iki nokta vardır." (5.sınıf)

Öğrencilerin % 4’ü ise iki doğru parçasında nokta olmadığını söylemiştir. Örneğin 5.sınıf öğrencilerden bir tanesi nokta olmadığını söylerken düşüncesini *“AB ve DE doğru parçasında nokta yoktur. Eğer olsaydı noktaların arasındaki boşluklara bakarak hangisinde daha çok nokta olduğunu anlayabiliriz.*” şeklinde ifade etmiştir. Soruyu bu şekilde cevaplandıran öğrencilerin de nokta kavramına yönelik algısı söz konusu olmuştur.

Öğrencilerin % 5’i ise belirsizlik belirten ifadeler yazmışlardır. Bu öğrencilere göre doğru parçasındaki nokta sayıları, noktanın büyüklüğü ve bakış açısına göre değişebilmektedir. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

> “*AB arkada ise nokta sayılar eşit, normal gözle bakıldığında ise DE’de daha fazla nokta vardır”* (8.sınıf)
>
> “*DE’nin nokta sayısı daha fazla olur ama AB’ye daha fazla nokta konulursa belki eşit olurlar ya da DE’den daha fazla noktaya sahip olur*.” (8.sınıf)

Öğrencilerin cevaplarının % 8’i ise sınıflandırılamayan kategorisine dahil edilmiştir.

Onbirinci Sorudan Elde Edilen Bulgular

11. SORU: Aşağıda [0,1] aralığındaki doğru parçası ve bir sayı örüntüsü verilmiştir. Doğru parçasındaki nokta sayısı ile sayı örüntüsündeki terim sayısını karşılaştırınız? Doğru parçasındaki nokta sayısı, sayı örüntüsündeki terim sayısından az mıdır, fazla mıdır yoksa eşit midir? <u>Nedenleri ile açıklayınız.</u>

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$$

Bu soruda [0, 1] aralığında bir doğru parçası ve devam eden bir sayı örüntüsü verilmiş, öğrencilerden doğru parçasındaki nokta sayısı ile sayı örüntüsündeki terim sayısının karşılaştırılması istenmiştir. Öğrencilerin cevapları belirlenen kategorilere göre analiz edilmiştir. Öğrenci cevapları, kategoriler ve kategorilere ait örnek açıklamalar Tablo 4-29.'da verilmiştir. Öğrencilerin kullandığı yöntemlerin sınıf seviyelerine göre dağılımı da Tablo 4-30.'da verilmiştir.

Tablo 4-29. Onbirinci soruya ilişkin öğrenci cevapları, kategoriler ve örnek açıklamalar

Cevaplar	*Kategoriler*	*Örnek Açıklama*
Doğru parçasındaki nokta sayısı ile sayı örüntüsündeki terim sayısı eşittir	*Eşit Sonsuzlar*	Her ikisi de sonsuza kadar devam eder. Bir doğruda sonsuz nokta vardır, bir örüntü de sonsuza kadar gider.
	Sonlu Büyüklükleri Karşılaştırma	İkisi de [0, 1] aralığındadır
	Birebir Eşleme	Her bir nokta bir kesri ifade eder
Doğru parçasındaki nokta sayısı daha azdır	*Sonlu- Sonsuz Karşılaştırması*	Kesirler sonsuza kadar gider, [0,1] aralığı ise sınırlı Örüntü sonsuz doğru parçası ise sınırlıdır.
	Sonlu Büyüklükleri Karşılaştırma	Doğru parçası daha kısadır
Doğru parçasındaki nokta sayısı daha fazladır	*Sonlu-Sonsuz Karşılaştırması*	Terim sayısı bir yerde duracaktır ama noktalar sonsuzdur
	Sonlu Büyüklükleri Karşılaştırma	Sayı örüntüsü belirli kesirleri içeriyor ama doğru parçası tüm sayıları içerir
	Nokta Sayısını Belirleme	Çok küçük noktalar olabilir Noktanın küçüklüğüne bağlı olarak değişebilir
Belirlenemez	İkisi de sonsuz olduğu için karşılaştırılamaz	

Tablo 4-30. Öğrencilerin kullandığı yöntemlerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	***Sınıf Seviyesi***									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Sonlu Büyüklükleri Karşılaştırma	12	24	4	10	9	20	10	20	35	20
Tek sonsuzluk	7	14	2	5	3	7	10	24	22	13
Sonlu-Sonsuz Karşılaştırılması	3	6	5	13	5	11	6	14	19	11
1-1 Eşleme	1	2	3	7	2	5	3	7	9	5
Nokta Sayısını Belirleme	3	6	3	7	1	2	0	0	7	4
Sınıflandırılamayan	24	48	23	58	24	55	13	31	84	47
Toplam	50		40		44		42		176	%100

Öğrencilerin %13’ü tek sonsuzluk yöntemini kullanmışlardır. Tek sonsuzluk kategorisinde yer alan öğrenciler doğru parçasındaki nokta sayısının ve sayı örüntüsündeki terim sayısının sonsuz olduğunu ve eşit sayıda olduğunu ifade etmişlerdir. Bu kategoriye örnek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir.

“Eşittir. 1 ve 0’ın arası sonsuza benziyor buna göre sayı örüntüsü de sonsuza kadar uzayabilir.” (5.sınıf)
“Eşittir. Çünkü ikisi de sonsuza kadar gider.” (5.sınıf)
“Eşittir çünkü ikisi de sonsuzdur.” (8.sınıf)

Bu kategoride yer alan öğrenciler (Ö1, Ö4, Ö13) ile yapılan görüşmede, öğrenciler doğru parçasındaki nokta sayısının ve terim sayısının sonsuz olduğunu ve sayılarının eşit olduğu cevabını tekrarlamışlardır. Bunun yanı sıra görüşmede yer alan diğer 13 öğrenciye nokta sayısı ve terim sayısı tekrar sorulmuştur. 6 öğrenci (Ö2, Ö5, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16) nokta sayısının ve terim sayısının sonsuz olduğunu ve eşit olduğunu söyleyerek cevaplarını değiştirmişlerdir. Bu öğrencilere 7. soruda da sorulduğu gibi bu sonsuzlukların aynı olup olmadığı sorulmuştur. Öğrencilerin cevapları Tablo. 4-31’de verilmiştir.

Tablo 4-31. Öğrenci cevapları ve öğrenci sayısı

Kategoriler	***Öğrenci Sayısı***
Sonsuzluklar eşittir	5 (Ö1, Ö2, Ö5, Ö9, Ö11)
Sonsuzluklar farklıdır	3 (Ö4, Ö13, Ö16)
Emin değilim	1 (Ö14)

5 öğrenci (Ö1, Ö2, Ö5, Ö9, Ö11) sonsuzlukların aynı olduğunu söylerken, 3 öğrenci (Ö4, Ö13, Ö16) sonsuzlukların farklı olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerden Ö14 ise cevabında emin olmadığını belirmiştir. Sonsuzlukların eşit olduğunu düşünen öğrenciler gerekçelerini şu şekilde açıklamışlardır.

“Terimlerde bölündüğü için sonsuza kadar gider, noktalar da saydığımızda sonsuza kadar gittiği için aynıdır diye düşünüyorum.” (7. sınıf-Ö11)

"Sonsuzluklar aynı olabilir.. çünkü sonsuzun bir değeri yok demiştim onun da değeri olmayacak öteki sonsuzluğunda da değeri olmayacak.. Onlar belirli bir yere kadar gidecek ama nerede duracağı belli olmayacağı için ikisi de eşit olabilir.."(6.sınıf-Ö5)

"Buradaki nokta sayısı sonsuzdur. Sonsuz nokta bir araya gelir bunu oluşturur ve sıfır ile 1 arasında da daha önceki sorularda dediğimiz gibi sonsuz kesir vardır. İkisi de sonsudur o yüzden eşittir. Sonsuzluğun da sonu yoktur o yüzden de eşittir dedim."(5.sınıf-Ö1)

Diğer yandan sonsuzlukların farklı olduğunu söyleyen Ö4 ve Ö16'nın sayı miktarlarına bakarak sonsuzlukları karşılaştırmış oldukları görülmüştür. 8.sınıf öğrencisi Ö13 ise farklı bir gerekçe söyleyerek doğru parçasının sınırı olduğunu sayı örüntüsünün ise sınırsız olduğunu belirmiştir. Öğrenciler düşüncelerini şu şekilde dile getirmişlerdir.

"Sonsuzluklar aynı değildir çünkü doğru parçasında her terimi yazarız ama örüntüde sadece ikinin katları olarak sonsuz yazabiliriz."(5.sınıf-Ö4)

"Burada(örüntüde) bazı sayıları atlamış, burada yani 0 ile 1 arasındaki tüm sayıları içine almış, o yüzden farklıdır sonsuzlukları."(8.sınıf-Ö16)

"Sonsuzluklar aynı değildir çünkü bu sonsuzluğun(sayı doğrusu) bir sınırı var ama diğerinde(sayı örüntüsü) bir sınır yok istediğimiz kadar devam ettirebiliriz."(8.sınıf-Ö13)

Bunun yanı sıra 8.sınıf öğrencisi Ö14 sonsuzluğun aynı olup olmamasını açıklayamadığını söyleyerek düşüncelerini şu şekilde dile getirmiştir.

"Şimdi ışın olursa nokta sayısı…ımmm şimdi sonsuz…iki tane sonsuzluk var ama bunların kaç haneli olduğunu bilmiyoruz..şimdi kesir sayısı olsa eşit diyebiliriz

ama nokta sayısı ile kesir sayısı eşit değildir. Ama şöyle de olabilir şimdi tam ortadaki noktaya ½ dersin, daha sonraki noktaya ¼ dersin ama ışın olursa öyle olmaz..sonsuza kadar gider, bölünür...yani açıklayamıyorum bende şimdi. ..”

Yukarıda verilen görüşmede Ö14’ün cevaplarında tutarsızlıklar yaşadığı görülmektedir. Ö14, iki tane sonsuzluk olduğunu ve bunların kaç haneli olduğunu bilmediğini söylerken sonsuzluğun çok haneli bir sayı olduğunu düşündüğünü söyleyebiliriz. Bunun yanı sıra terim sayılarının da bölünerek devam ediyor olması durumu açıklayamamasında etkili olduğunu söyleyebiliriz

Doğru parçasındaki nokta sayısı ve sayı örüntüsündeki terim sayısının eşit olduğunu söyleyen öğrencilerin % 5’ i ise 1-1 eşleme ile doğru parçasındaki nokta sayısı ve sayı örüntüsündeki terim sayısının eşit olduğunu düşünmüşlerdir. Bu kategoride yer alan bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

“*Eşittir. Aşağıda verilen kesirleri bu doğru üzerine yerleştirebiliriz.” (6.sınıf)*
“*Eşittir. Her bir nokta bir kesri ifade eder.”(8.sınıf)*
“*Eşittir. Çünkü yukarıda doğru da gösterince(kesirleri) eşit olabilir.” (5.sınıf)*

Doğru parçasındaki nokta sayısı ve sayı örüntüsündeki terim sayısının eşit olduğunu söyleyen öğrencilerden bir kısmı da nokta sayısını ve terim sayısını sınırlı olduğunu düşünerek sonlu büyüklükler arasında karşılaştırma yapmıştır. Bu öğrenciler noktaların ve terimlerin, [0,1] aralığı ile sınırlandırıldığını söyleyerek nokta sayısı ve terim sayısının eşit olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Öğrencilerin % 26’si doğru parçasındaki nokta sayısının sayı örüntüsündeki terim sayısından az olduğunu söylemiştir. Bu cevabı veren öğrencilerin cevapları “*sonlu-sonsuz karşılaştırması*” ve “*sonlu-sonlu karşılaştırması*” şeklinde iki kategoriye ayrılmıştır. Öğrencilerin bir kısmı doğru parçasının sınırlı, sayı örüntüsünün ise sınırsız olduğunu söyleyerek sonlu ve sonsuz olduğunu düşündüğü miktarlar arasında karşılaştırma yapmıştır. Bu kategoriye örnek olabilecek öğrenci cevapları şöyledir:

> *“Doğru parçasındaki nokta sayısı azdır çünkü doğru parçası belli bir sayıya kadar gelir ama sayı örüntüsü sonsuz.” (6.sınıf)*
>
> *“Doğru parçasındaki nokta sayısı azdır çünkü [0,1] aralığı kısıtlı ama kesirler sonsuza kadar devam ediyor.” (8.sınıf)*

Doğru parçasındaki nokta sayısının daha az olduğunu düşünen öğrencilerden bir kısmı da nokta sayısının ve terim sayısını sonlu gibi düşünerek nokta sayısı ile terim sayısı arasında karşılaştırma yapmıştır.

> *“Doğru parçasındaki nokta sayısı azdır çünkü doğru parçasında iki nokta var kesirler daha fazladır.” 5/ 48*

Öğrencilerin % 19’i ise doğru parçasındaki nokta sayısının sayı örüntüsündeki nokta sayısından daha fazla olduğunu söylemiştir. Bu cevabı veren öğrenciler, *“sonlu-sonsuz karşılaştırması”*, *“sonlu-sonlu karşılaştırması*” ve *“nokta sayısı belirleme”* yöntemlerini kullanmışlardır. Sonlu-sonsuz karşılaştırması yapan öğrenciler nokta sayısının sonsuz, terim sayısının ise sınırlı olduğunu söyleyerek nokta sayısının terim sayısından fazla olduğunu söylemişlerdir. Bu öğrenciler, *“Doğru parçasındaki noktalar daha fazladır çünkü sayı örüntüsü bir yerde duracaktır fakat noktalar sonsuz.”* şeklinde gerekçelerini ifade etmişlerdir.

Sonlu-sonlu karşılaştırması yapan öğrenciler ise nokta sayısı ve terim sayısının sınırlı olduğunu düşünerek nokta sayısı ile terim sayısı arasında karşılaştırma yapmıştır. Bu öğrenciler *“Doğru parçasındaki nokta sayısı fazladır çünkü doğru parçası daha fazla kesir içine alıyor, sayı örüntüsü belirli kesirleri içine alıyor.”* şeklinde gerekçelerini belirtmişlerdir.

Nokta sayısını belirleme yöntemini kullanan öğrenciler ise nokta sayısının çok fazla olduğunu ancak nokta büyüklüğüne göre nokta sayılarının da değişebileceğini söyleyerek doğru parçasındaki nokta sayısının terim sayısından daha fazla olduğunu ifade etmişlerdir. Bu kategoriye örnek bazı öğrenci cevapları:

“Doğru parçasındaki nokta sayısı fazladır çünkü çok küçük noktalar olabilir.”(6)

“Doğru parçasındaki nokta sayısı fazladır ama noktanın büyüklüğüne bağlı.” (7)

Öğrencilerin % 3’ü ise nokta sayısı ve terim sayısının ne kadar olduğu belirlenemeyeceği için nokta sayısı ile terim sayısı arasında karşılaştırma yapılamayacağını söylemiştir. Öğrencilerin % 47’ si ise kısa cevap verdiği için, veya açıklama yapmadığı için ne düşündüğü belirlenememiştir bu nedenle bu öğrenciler sınıflandırılamayan kategorisine dahil edilmiştir.

Dokuzuncu ve onbirinci sorudan elde edilen cevaplar sınıf bazında incelendiğinde ise dokuzuncu soruda 5. (% 30), 6. (% 47), 7. (% 50) ve 8. (% 26) sınıf öğrencilerin bir çoğu sonlu büyüklükleri karşılaştırma yöntemini kullandıkları görülmektedir. Onbirinci soruda ise sonlu büyüklükleri karşılaştırma yöntemi en fazla 5. sınıf (% 24) ve 7. sınıf (% 20) öğrencileri tarafından kullanılmıştır. Diğer yandan 6. sınıf (% 13) öğrencileri genellikle sonlu-sonsuz karşılaştırması yöntemi kullanırken 8. sınıf (% 24) öğrencilerin birçoğu tek sonsuzluk yöntemini kullandığı görülmüştür.

BÖLÜM V

5. 1. Tartışma

Bu bölümde, 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili kavrayışlarının araştırıldığı bu çalışmada elde edilen bulgular, literatür çerçevesinde tartışılacaktır.

5.1.1. Sonsuzluk kavramına ilişkin tartışma

Bu bölümde öğrencilere sonsuzluk kelimesinden ne anladığı sorulmuştur. Böylece öğrencilerin sonsuzluk kelimesini nasıl tanımladıkları ortaya konulmak istenmiştir. Bunun yanı sıra öğrenci açıklamalarından öğrencilerdeki sonsuzluk algısının ne yönde olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda fiziksel, matematiksel ve duygusal olmak üzere öğrencilerde üç tür sonsuzluk algısı tanımlanmıştır.

Sonsuzluk kelimesi öğrenciler tarafından genellikle “sonu olmayan”, “devam eden”, “bitmeyen”, “tükenmeyen” ve “sınırsızlık” şeklide tanımlanmıştır. Öğrenciler devam eden ve sonu bilinmeyen durumları, miktarı çok fazla olan veya miktarı belli olmayan büyüklükleri, sınırları tahmin edilemeyen varlık ya da nesneleri sonsuz olarak tanımlamaktadırlar. Literatürde de öğrencilerin sonsuzluk kavramını belirsizlik, sınırsızlık, çok büyük, devam eden, bitmeyen olarak tanımladıklarına dair bulgular yer almaktadır (Aztekin, 2008; Çelik ve Akşan, 2013; Maria, Thanasi ve Katerina, 2009; Monaghan, 1986; Sbaraglı, 2006; Singer ve Voica, 2007). Bu açıdan bu çalışmada da bu bulguları destekler nitelikte sonuçlar elde edilmiştir. Bunun yanı sıra bu çalışmada öğrencilerin, matematiksel sonsuzluk, fiziksel sonsuzluk ve duygusal sonsuzluk kategorileri çerçevesinde öğrencilerin sonsuzluk algılarının ne tür olduğunu belirlenmeye çalışılmıştır.

Öğrencilerin % 25’nin (5. (% 34), 6. (% 30), 7. (% 18) ve 8. (%17)) fiziksel sonsuzluk algısına sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Özellikle 5. ve 6. sınıf öğrencileri sonsuzluğu bu şekilde algılamaktadırlar. Bu öğrenciler sonsuzluğu uzay, evren, gökyüzü gibi metaforlarla ya da insan sayısı, eşya gibi miktarı değişen varlık veya nesneler ile ilişkilendirerek tanımlamışlardır. Yapılan çalışmalar göz önüne alındığında benzer bulgulara rastlanmaktadır (Çelik ve Akşan, 2013; Maria, Thanasi ve Katerina, 2009). Çelik ve Akşan (2013), üniversite öğrencilerinin sonsuzluk tanımlarında uzay kavramını kullandıklarını sonucuna ulaşmış ve sonsuzluk ile ilgili kavrayışlarının günlük yaşam deneyimleri ile şekillenebileceğini söylemiştir. Söz konusu çalışmadan elde edilen sonuçların bu argümanı desteklediğini ve öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili algılarının günlük yaşamdan önemli derece etkilendiğini söyleyebiliriz.

Öğrencilerin % 24‘ünün (5. (% 22), 6. (% 20), 7. (% 30) ve 8. (%24)) sonsuzluğu matematiksel sonsuzluk olarak tanımladıkları görülmüştür. 7. ve 8. sınıf öğrencilerin çoğunlukla sonsuzluk düşüncesi bu yönde olduğu tespit edilmiştir. Bu öğrenciler sonsuzluk tanımlarında sayı, doğru ve çember gibi matematiksel kavramları kullanmışlardır. Öğrenciler matematiksel sonsuzluğu, dinamik sonsuzluk, statik sonsuzluk ve büyük sayılar olarak tanımlamışlardır. Matematiksel sonsuzluğu düşünen öğrencilerin, sonsuzluk tanımlarında dinamik sonsuzluğun daha ağır bastığını söyleyebiliriz. Dinamik sonsuzluk düşüncesine sahip öğrenciler sonsuzluğu devam eden ve bitmeyen bir süreç olarak görmektedir. Bu öğrenciler “sayılar sonsuza kadar devam eder” ve “sayılar bitmez” şeklinde düşüncelerini ifade etmişlerdir. Yapılan çalışmalar da bazı öğrencilerin sonsuzluğu, süreç olarak algıladıklarını göstermektedir (Hauchart ve Rouche, 1987; Maria, Thanasi ve Katerina, 2009; Monaghan, 2001; Nunez, 1993; Singer ve Voica, 2008; Tirosh, 1999). Statik sonsuzluk düşüncesine sahip öğrenciler ise sonsuzluğu bir bütün olarak düşünmektedir. Bu öğrencilerin cevaplarında “sayıların tamamının sonsuz olması” şeklinde ifadeler yer almaktadır. Diğer yandan öğrencilerin bir kısmı da sonsuzluğu büyük sayılar olarak tanımlamıştır. Öğrenciler, sonsuzluğu büyük sayılar ile ilişkilendirerek, sonsuzluğa örnek olabilecek sayılar yazmışlardır. Özellikle 5. sınıf öğrencileri sonsuzluğa örnek olabileceğini düşündükleri “9999999”, “100000” gibi sayılar yazmışlardır. Öğrencilerin, sonsuzluğu büyük sayılar olarak algılaması sonsuzluğun sezgisel olarak algıladıklarını göstermektedir (Özmantar, 2010). Çünkü öğrencilerin sonsuzluğun sürekli artan bir şey olarak düşünmesi söz konusudur.

Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili bir diğer düşüncesi ise bazı öğrenciler somut şeylerin sonsuz olmadığını sadece sayı gibi soyut kavramların sonsuz olduğunu düşünmektedirler. Bu öğrenciler çevrelerindeki örneklerden yola çıkarak somut olarak var olan her şeyin sonlu olduğuna inanmaktadırlar. Sonsuzluk kavramından sadece sözel olarak bahsediliyor olması ve fiziksel olarak var olan bir nesne ya da varlıkta temsil edilmiyor olması öğrencileri bu düşünceye yönlendirmiş olabilir.

Öğrencilerin %20'sinin (5. (% 16), 6. (% 27), 7. (% 18) ve 8. (% 21)) sonsuzluk algısı ise duygusal sonsuzluktur. Manevi sonsuzluk olarak da tanımlayabileceğimiz bu sonsuzluk algısına sahip öğrenciler sonsuzluğu sevgi, aşk, mutluluk, ölümsüzlük, özgürlük, Allah gibi soyut kavramlar, manevi veya dini duygularla ilişkilendirerek tanımlamışlardır. Benzer sonuçlar elde eden Singer ve Voica (2008), duygusal, hisler ve dinsel olarak tanımladığı bu duyguların öğrencilerin sonsuzluk üzerine konuşmalarında kendiliğinden söylenen ifadeler olduğunu ve öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili birincil algıların bir parçası olabileceğini şeklinde açıklamıştır. Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili manevi-dinsel ilişkilendirmelerini, Lakoff ve Nunez (2009), sonsuzluk metaforik olarak eşi ve benzeri olmayan bir kavram, yani her şeyi kaplayan en büyük kavram olduğunu ve doğal olarak dinsel duyguları da içerdiği şeklinde açıklamıştır. Öğrencilerin birçoğunun da sonsuzluk denildiğinde bu metaforlarla tanımladıkları görülmektedir.

5.1.2. Büyük sayılara ilişkin tartışma

Büyük sayılar ile ilişkili bu soruda öğrencilere dünyada var olan kitaplarda toplamda ne kadar harf olduğu ve bir çöldeki kum taneciği sayısı sorulmuştur. Ardından öğrencilerden, harf sayısı ve kum taneciği sayısının karşılaştırılması istenmiştir.

Öğrencilerin cevapları "harf ve kum tanecikleri sayılamaz", "harf ve kum taneciği sayısı sonsuzdur" veya "harf ve kum taneciği sayısı büyük sayılardır" şeklinde üç başlık altında toplanmıştır. Öğrencilerin %32'si (5.(% 32), 6. (% 18), 7. (% 30) ve 8. (% 50)) harf sayısının ve %40'ı (5. (% 28), 6. (% 22), 7. (% 34) ve 8. (%50)) ise kum taneciklerinin sayılamayacağını düşünmektedir. Bu öğrenciler harf sayısı ve kum taneciğinin sayılamayacağını söylerken, sundukları gerekçelerden bir tanesi kitap sayısının ve kum taneciğinin sayılarının değişken olmasıdır. Öğrenciler, sürekli yeni kitapların oluşması ve kum taneciklerinin parçalanarak yeni kumlar oluşturması ile sayılarının değişeceğini ve sayılamayacağını düşünmektedirler. Öğrencilerin bir diğer gerekçeleri ise saymaya ömrümüz yetmez, yeterli araç gereç yok, çok fazla olduğu için sayılmaz, kum tanecikleri küçük olduğu için şeklindeki ifadeler olup saymanın imkansız olduğunu belirmişlerdir. Öğrencilerin genellikle somut gerekçeler öne sürdükleri görülmektedir.

Bu somut gerekçeleri ortadan kaldırmak için öğrencilere, yeteri kadar büyük ve kapasitesi olan bir robot ile harf sayısı ve kum taneciği sayılabilir mi şeklinde sorulduğunda harf sayısının sayılamayacağını söylen öğrencilerden (10) 4 tanesi fikrini değiştirirken, kum taneciğinin sayılamayacağını söyleyen öğrencilerden (11 öğrenci) 3 tanesi fikrini değiştirmiştir. Öğrencilerin birçoğu yine harf sayısının ve kum taneciğinin sayılamayacağını söylemiştir. Sonuç olarak, öğrenciler için somut gerekçeler mevcuttur ancak bu gerekçelere yer verilmeyecek ortamlar oluşturulduğunda öğrenciler yine harf sayısının ve kum taneciği sayısının sayılamayacağını düşünmektedirler. Buradan elde edilen bir diğer sonuç ise somut gerekçelerin özellikle 8. sınıf öğrencileri tarafından çok kullanıldığı görülmektedir. Soyut düşünme düzeyi, diğer sınıf seviyelerine göre daha üst olan öğrenciler somut gerekçelerle saymanın imkansız olduğunu söylemiştir.

Bu sorulara ilişkin bir diğer sonuç ise öğrencilerin % 27'si (5. (% 22), 6. (% 32), 7. (% 34) ve 8. (% 22)) toplam harf sayısının ve öğrencilerin % 19'u (5. (% 18), 6. (% 38), 7. (% 34) ve 8. (%14)) ise kum taneciği sayısının sonsuz olduğunu düşünmektedirler. Öğrencilerin, harf sayısının ve kum taneciğinin sonsuz olması ile ilgili söylediği gerekçelerden bir tanesi sayılarının değişken olması yani sürekli yeni kitaplar veya kum taneciklerinin oluşması şeklindedir. Öğrencilerin bir diğer gerekçe ise harf sayısı ve kum taneciğinin sayılamadığı için sonsuz olmasıdır. Öğrenciler için miktarın değişken olması ve sayılmasının imkansız olması sonsuzluğa işaret etmektedir.

“ Kum taneciklerini teker teker sayamadığımı için sonsuzdur” ifadesi imkansızlığa örnek olarak gösterilebilir.

Öğrenci cevaplarından elde edilen bir diğer sonuç ise gerçekte sonlu olan bu niceliklerin, sonsuz olduğunu düşündükleri için sayılamayacağını söylemeleridir. Öğrenci cevaplarında “sonsuzsa zaten sayılamaz” şeklinde ifadeler bu sonucun bir göstergesi olduğu söylenebilir. Bu argümanı oluşturan öğrencilerin gerekçelerine bakıldığında öğrenciler, fiziksel olarak imkansızlığı sonsuzluk olarak gördüğünü söyleyebiliriz. Buna karşılık, bazı öğrenciler de harf sayısının ve kum taneciği sayısının sonsuz olduğunu, teoride sayılabileceğini ama gerçekte sayılamayacağını söylemişlerdir.

Bunun yanı sıra, öğrenciler sayısı belli olmayan miktarları anlatmak için sonsuzluk kavramını kullandıkları görülmüştür. Harf sayısı ile ilgili “sonsuzdur çünkü ne kadar sayı olduğunu belli değildir” ifadesi bu sonuca örnek gösterilebilir. Öğrencilerde, sayısı fazla olan, bilinmeyen veya belirlenemeyen niceliklerin miktarı sonsuzdur algısı olduğunu söyleyebiliriz. Literatürde yer alan çalışmalarda da benzer bulgulara rastlanmıştır. Kolar, Cadez (2012) öğretmen adayları ile yapmış olduğu çalışmada, gerçekte sonlu olan miktarların sonsuz olduğunu söyleyen öğretmen adaylarının mevcut olduğunu görmüştür. Benzer sonuçlara ulaşan Singer ve Voice (2003), sonlu miktarların sonsuz olarak algılanmasının, insanların, çok büyük olan sonlu kümelerin (kum taneciği sayısı $(10^{10})^{10}$) gibi olan) eleman sayısını saymak için yetersiz kaldığı şeklinde açıklamıştır. Bununla beraber insanların, duyularını kullanarak bütünü algılayamadığında, bu nedenle bütünü sonsuz olarak yani ulaşılamayan olarak algıladıklarını ifade etmiştir.

Sorulara ilişkin öğrencilerin bir diğer cevabı ise, öğrencilerin %25’inin (5. (% 34), 6. (% 25), 7. (% 25) ve 8. (%14)) harf sayılarının sınırlı sayıda olduğunu, öğrencilerin %23’nün (5. (% 30), 6. (% 25), 7. (% 16) ve 8. (%19)) kum taneciklerinin sayısının sınırlı sayıda olduğu şeklindedir. Bu öğrenciler harf sayısı ve kum taneciğinin, milyonlarca, trilyonlarca vb. gibi miktarlarının çok fazla olduğunu ancak sınırlı sayıda olduğunu söylemektedirler. Bu cevabı veren öğrencilerden bir kaçı ile yapılan görüşmelerde öğrencilerin harf sayılarının sayılabileceğini söylemişlerdir. Görüşme yapılan öğrenci sayısı az olsa da bu öğrenciler harf sayısını sayılabilir büyük sayı olduğunu düşünmektedir. Buna karşılık kum taneciklerinin sınırlı olduğunu düşünen öğrenciler ile yapılan görüşmelerde ise öğrencilerin çoğunluğu, kum taneciği sayısının sınırlı ancak çok fazla olduğu için sayılamayacağını düşünmektedirler.

Bu soruya ait alt sorulardan bir tanesinde de öğrencilerden, harf sayılarının ve kum tanecikleri sayısının karşılaştırılması istenmiştir. Öğrencilerin % 48'i çöldeki kum taneciğinin daha fazla olduğunu söylemişlerdir. Bunun yanı sıra diğer öğrenciler "harf sayısının daha fazladır", "harf sayısı ile kum taneciği sayısının eşittir" ve "harf sayısı ve kum taneciği sayısı karşılaştırılamaz" şeklindeki cevaplar da mevcuttur. Bunun yanı sıra öğrencilerin %6 'sı harf sayısının ve kum taneciği sayısının sonsuz olduğunu söylemişlerdir. Sonsuz olduğunu söyledikleri miktarlar arasında da karşılaştırma yapılabileceklerini düşünerek kum taneciklerinin daha fazla olduğunu söylemişlerdir. Diğer yandan 7. ve 8. sınıf öğrencileri olmak üzere öğrencilerin %5 ise sonsuzlukların karşılaştırılamayacağını belirterek, "iki tane sonsuzluk ifade eden şey karşılaştırılamaz" şeklinde düşünmektedirler.

5.1.3. Sayı bağlamında sonsuzluk kavramına ilişkin tartışma

Sayılar ile ilişkili olan bu sorularda (3,4 ve 5.) sayı bağlamında öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili kavrayışları ortaya çıkartılmak istenmiştir. Öğrencilerin % 72'si (5. (% 54), 6. (% 87), 7. (% 70) ve 8. (% 81)) 3'ten büyük sayıların ve öğrencilerin % 39'u %23 (5. (% 28), 6. (% 33), 7. (% 36) ve 8. (%62)) [0,1] aralığındaki kesir sayısının sonsuz olduğunu düşünmektedirler. Sonsuzluk türüne bakıldığında her iki soruda da öğrencilerde (% 49(sayılar)-% 39(kesirler)) statik sonsuzluk düşüncesinin daha fazla olduğu görülmüştür. Statik sonsuzluk, sonsuzluğun bir bütün olarak algılanması olarak tanımlanmıştır. Öğrencilerin, "bütün sayılar," ve " sayıların tamamı" şeklindeki ifadeleri statik sonsuzluğa işaret etmektedir. Bu sonuç Tall'un (1980) varsayımı ile paralellik göstermektedir. Tall, birçok çocukta potansiyel sonsuzlukla ilgili olan birincil sezgilerin olmasına rağmen, alınan eğitimin öğrencilerde, sonsuz kümelerde fiili sonsuzluk, limit sürecinde ise potansiyel sonsuzlukla ilgili ikincil sezgileri desteklediğini ifade etmiştir. Benzer şekilde Kolar ve Cadez (2012), yaptığı çalışmada sonsuz kümelerle ilişkili olan “sonsuz çokluk” ve “sonsuz büyüklük” kavramları ve limit ile ilişkili olan “sonsuz yaklaşma” (infinity close) kavramları ile ilgili ilköğretim matematik öğretmenlerinin düşüncelerini incelemiştir. Çalışma sonucunda sonsuz kümeler ile ilişkili olan sorularda öğretmenlerin fiili sonsuzluk düşüncesinin ağır bastığını, limit ile ilgili sorularda ise potansiyel sonsuzluk düşüncesinin ağır bastığını ifade etmiştir. Kolar ve Cadez (2012), bu sonucun çocuklarda sonsuzluk sezgisinin 12 yaşından itibaren sabit olduğu gibi bazı kalıp bilgileri çürüttüğünü belirterek bunun aksine öğretmen adaylarında potansiyel sonsuzluk düşüncelerinin fiili sonsuzluğa doğru geliştiğini belirtmiştir.

Sayı bağlamında yapılan benzer çalışmalarda (Kolar ve Cadez, 2012; Sacristan, 2001) öğrencide potansiyel sonsuzluk ve fiili sonsuzluk düşünme süreçleri genellikle alınan eğitim ile ilişkilendirilmiştir. Bunun yanı sıra Tall, öğrencilerde ortaya çıkan fiili sonsuzluk ve potansiyel sonsuzluk düşüncesinin nedeni ile ilgili farklı bir yaklaşımda bulunmuştur. Tall (1992), insan beyninin sınırsız olduğu için bireylerin verilen bir zamanda bilginin tamamına bilinçli bir şekilde odaklanmadıklarını bu nedenle sonsuzluğun nesne olarak düşünüldüğünü ancak bireyler bilgi üzerinde daha fazla durduğunda bilginin farklı yönleri üzerinde hareket ettiğini ve sonsuzluğu süreç olarak düşündüğünü şeklinde açıklamıştır. Söz konusu çalışmada da statik sonsuzluk düşüncesine sahip olduğu düşünülen öğrenciler ile yapılan görüşmelerde, sayılar üzerine konuşulduğunda öğrencilerin potansiyel sonsuzluk kavrayışı gösterdiği görülmüştür. Statik sonsuzluk dinamik sonsuzluktan daha üst seviyede olduğu için bu sonuç normal bir durumdur. Üst aşamadaki öğrenci yani statik sonsuzluk aşamasındaki öğrenci, alt aşamaya yani dinamik sonsuzluk düşüncesine de sahiptir (Dubinsky vd. 2005). Dolayısıyla öğrenciler belli durumlarda dinamik veya statik sonsuzluk düşüncesini gösterebilir.

Diğer yandan dinamik sonsuzluk düşüncesine sahip öğrenciler (% 23 (sayılar)-% 6 (kesirler)) de sayıları ve kesirleri bir süreç olarak görmektedir. Bu düşüncelerini, üçten büyük sayılara yazılabilecek sayılar için sayıların sürekli büyüdüğünü ve eklenerek sonsuza kadar devam ettiği şeklinde açıklamışlardır.

Singer ve Voica (2008), öğrencilerin bu düşünme sürecini sonsuz doğal sayılarda işlemsel algı olarak tanımlamış ve burada sayma işleminin öğrenciyi bu düşünceye yönlendirdiğini belirtmiştir. Sayma işleminin, öğrencinin doğal sayıları kümesini bir dizi gibi görmelerini sağladığını böylece öğrencilerin istedikleri kadar sayma işlemi yaparak devam edebilecekleri düşüncesine sahip olduğunu ifade etmiştir. Bu çalışmada da dinamik sonsuzluk düşüncesine sahip öğrenciler, üçten büyük sayıların sonsuzluğunu "sayıları ekleme" düşüncesi ile açıklarken, [0,1] aralığındaki kesirlerin sonsuz olmasını ise sürekli bölümlerle yeni kesirler elde edebilecekleri şeklinde açıklamışlardır. Üniversite öğrencileri ile yaptığı çalışmada benzer sonuçlar elde eden, Mamolo (200), öğrencilerin kesirler üzerinde işlem yaparak yeni kesirler elde etme düşüncelerini, verilen aralıkta sayılar ile ilgili sadece rasyonel sayıları düşündüğünü ancak irrasyonel sayıları düşünmedikleri şeklinde açıklamıştır. Bu durumun öğrencilerin rasyonel sayılara, irrasyonel sayılardan daha aşina olmasından dolayı olabileceğini ifade etmiştir.

İki soruda da sonsuz cevabını veren öğrencilerin sayılarına bakıldığında 3'ten büyük sayılar için sonsuz diyen öğrenci sayısının (% 72), [0,1] aralığındaki kesir sayısına sonsuz diyen öğrenci sayısından (% 40) fazla olduğu görülmektedir. Buna karşılık [0,1] aralığındaki kesir sayısının sınırlı sayıda olduğunu söyleyen öğrenci sayısı (% 26), üçten büyük yazılabilecek sayıların sınırlı sayıda olduğunu söyleyen öğrenci sayısından (% 18) daha fazla olduğu görülmektedir. Bu sonuç Pehkonen, Hannula, Maijala ve Soro 'nun (2006), çalışmasıyla da benzerlik göstermektedir. Pehkonen vd. (2006), 5. ve 7. sınıf öğrencilerine, sınırlı bir aralıktaki sayıların miktarını sorduğundan öğrencilerin birçoğu sınırlı sayıda olduğunu söylemiştir. Pehkonen vd. (2006), öğrencilerin doğal sayıların sonsuzluğunu rasyonel sayılar kümesinin sonsuzluğundan daha önce anladıklarını ileri sürmüştür. Bu hususta, doğal sayılar kümesi ile rasyonel sayılar kümesini karşılaştırıldığında, matematiksel nesnelerde farklı sonsuzlukların tartışılabileceğini belirtmiştir. Pehkonen vd. (2006), sınırlı olan her doğal sayı kümesi düşünüldüğünde, bu kümenin elaman sayısının da sınırlı olduğunu ancak bunun rasyonel sayılar için geçerli olmadığını ifade etmiştir. Çünkü 0 ile 1 arasında sonsuz çoklukta elaman vardır ancak sınırlı bir aralıktır. Pehkonen vd. (2006), bunun rasyonel sayılar yoğun (dense) olmasına, doğal sayılar kümesinin ise böyle bir özelliğinin olmamasına bağlamıştır. Bu nedenle, iki küme arasında farklı sonsuzlukların söz konusu olmasını kümelerin bu özellikleri ile açıklamıştır.

[0,1] aralığında sınırlı sayıda kesir olduğunu söyleyen öğrencilerin gerekçelerinden bir tanesi "0 ile 1 arasının sınırlıdır" şeklindedir. Öğrenciler aralığın sınırlı olmasından dolayı sonlu sayıda kesir yazılabileceğini düşünmektedir. Benzer sonuçlar (Boero, Douek ve Garuti, 2003; Pehkonen, Hannula, Maijala ve Soro, 2006; Singer ve Voica, 2003) çalışmalarında da karşılaşılmıştır. Singer ve Voica (2003), sonlu ve sonsuz kavramları ile ilgili öğrencilerin "sonlu belirli sınırları vardır" ve "Sonsuzun sınırı yoktur" şeklinde belli düşüncelere sahip olduğunu ifade etmiştir. Diğer yandan, bu cevap özellikle 5. sınıf (% 36) ve 7.sınıf (%22) öğrencileri tarafından çok fazla söylenmiştir. Özmantar (2010), bu tür bir düşüncenin öğrencilerin birincil sezgilerinden kaynaklanan zorluk olabileceğini belirtmiştir. Bu tür bir kavram zorluğunun sonsuzluğun sürekli artması ve daha da büyümesi gerektiği sezgisi ile tutarlı olduğunu ve neredeyse öğrencilerin hepsinde karşılaşılabilen sezgisel bilgi olduğunu ifade etmiştir.

Üçten büyük yazılabilecek sayılar için öğrencilerin %8'i (5. (% 6), 6. (% 5), 7. (% 9) ve 8. (%9)) sınır belirtmemiştir. Bu öğrenciler kaç tane sayı yazılabileceği ile ilgili net bir ifade belirtmemiş olup istenildiği kadar sayı yazılabileceğini söylemişlerdir. Kesirler ile ilgili soruda da öğrencilerin bir kısmı benzer açıklamalar ile [0,1] aralığındaki kesir sayısının belirlenemeyeceğini söylemiştir. Bunun yanı sıra [0,1] arasında kesir olmadığını söyleyen öğrenciler de mevcuttur. Bu cevaplar, özellikle 5. sınıf öğrencileri tarafından söylenmiştir. Ancak bu cevabı veren 6. sınıf ve 7. sınıf öğrencilerinin de sayısının önemli oranda olduğunu söyleyebiliriz.

En büyük sayı ile ilgili soruda, öğrencilerin %39'u (5. (% 36), 6. (% 22), 7. (% 46) ve 8. (% 50)) en büyük sayının olmadığını söylemiştir. Öğrenciler sayıların sonsuz olmasından dolayı en büyük sayının olmayacağını düşünmektedirler. Öğrencilere göre, sayılar artarak devam ettiği için her sayının daha büyüğü vardır. Dolayısıyla öğrenciler en büyük sayının olmadığına inanmaktadırlar.

En büyük sayının olmadığına yönelik öğrencilerin bir diğer düşüncesi ise farklı büyüklükte sayılar olduğu için büyüklük derecisinin herkese göre değişeceği şeklindedir. Bu öğrenciler, sayılar sonsuz olduğu için birisi için en büyük olan bir sayının bir başkası için en büyük sayı olamayabileceğini çünkü daha bu sayıdan daha büyük sayılar olduğunu söylemişlerdir. Sonuç olarak bu öğrencilere göre sayılar sonsuz olduğu için en büyük sayı yoktur. En büyük sayı olmadığını söyleyen öğrencilerin bir diğer düşüncesi ise "sayılar sonsuzdur ancak en büyük sayı için sonsuz denilemez" şeklindedir. Çünkü sayı olarak sonsuzun en büyük olduğunu söylenebilmesi için başka bir sayı ile kıyaslanmalıdır fakat böyle bir sayı olmadığı için bu mümkün değildir. Dolayısıyla en büyük sayı için sonsuz denilemez.

Diğer yandan öğrencilerin % 22'si (5. (% 24), 6. (% 27), 7. (% 23) ve 8. (% 14)) de en büyük sayının sonsuz olduğu düşünmektedirler. Bu öğrenciler sayılar sonsuz olduğu için, sayıların sonu olmadığı ve sayıların bitmediğini düşünmektedirler. Bu nedenle en büyük sayının sonsuz olduğuna inanmaktadırlar. Ayrıca en büyük sayı olarak kabul ettikleri "sonsuzun" bulunamayacağını ya da yazılamayacağını düşünmektedirler. Bunun yanı sıra sayı olarak sonsuzun, en büyük ve en son sayı olduğunu söyleyen öğrenciler mevcuttur. Bu öğrencilerin de sonsuzu bir sayı olarak görmektedir ve sayıların sonu var gibi hareket etmektedirler. Diğer yandan bazı öğrenciler en büyük sayının sonsuz olduğunu söylerken öğretmenlerini, eski öğrenmelerini ya da dışsal kaynakları referans göstermişlerdir. Örneğin, "*En büyük sayı sonsuzdur. Çünkü bilim adamları sonsuzluğu böyle açıklar*" şeklindeki bir açıklama böyle bir sonucun göstergesi olarak örnek verilebilir. Sierpinska, (1987), sonsuzluk kavramının birçok öğrenciye basitçe en büyük sayı olarak öğretildiğini söylemiştir. Dolayısıyla öğrenciler bu öğrenmelerini devam ettirmekte ve ileriki zamanlarda kavram ile ilgili yanlış öğrenme veya zorluk olarak ortaya çıkabilmektedir.

Mamolo (2009) ise bu sonucu matematik eğitim literatüründe öğrencilerin sonsuz sayılar aritmetiği ile ilgili kavram yapılarının eksik olduğunu şeklinde açıklamıştır.

En büyük sayı ile ilgili elde edilen "en büyük sayı yoktur" ve " en büyük sayı sonsuzdur" bulguları, literatürdeki (Kolar ve Cadez, 2012; Monaghan, 1986; Pehkonen vd. 2006) bulgular ile de paralellik göstermektedir.

Kolar ve Cadez, (2012) ve Pehkonen vd. (2006), “en büyük sayı yoktur” ve “en büyük sayı sonsuzdur ya da “∞” şeklindeki cevapları fiili sonsuzluk ile ilişkilendirmişlerdir. Bu cevapların öğrencilerde fiili sonsuzluk düşüncesinin göstergesi olduğunu belirtmişlerdir. En büyük sayının sonsuz olduğunu söyleyip “0.999…” şeklinde ifade eden öğrencileri de potansiyel sonsuzluk düşüncesine sahip olduğu şeklinde açıklamışlardır. Bu çalışmada bu soruda böyle bir kategorize yapılmamıştır ancak sayılar bağlamında diğer sorulardaki (3. ve 4. soru) öğrencilerin sonsuzluk düşüncelerine bakıldığında statik sonsuzluk düşüncesinin daha fazla görüldüğü sonucuna ulaşılmıştır.

Öğrencilerin % 20’si (5. (% 12), 6. (% 38), 7. (% 11) ve 8. (% 21)) en büyük sayının bilenemeyeceğini söylemiştir. Öğrenciler, “sayıların sonu yoktur” veya “sayılar sonsuzdur” şeklinde benzer gerekçelerle en büyük sayının bilenemeyeceğini ifade etmişlerdir. En büyük sayı ile ilgili bir diğer sonuç ise öğrencilerin %12’si (5. (% 20), 6. (% 8), 7. (% 9) ve 8. (% 10)) en büyük sayı olarak tahmini büyük sayılar yazdığı görülmüştür. Bu sonuca en fazla 5. sınıf öğrencilerinde rastlanmaktadır.

5.1.4. Limit durumu ile ilgili tartışma

Çalışmanın bu bölümünde öğrencilere limit durumu ile ilgili üç soru sorulmuştur. Bu sorulardan iki tanesi devirli ondalık sayılar ile ilgili olup diğer soru ise öğrencilerin günlük hayatları ile ilişkilendirebileceği bir sorudur. Devirli ondalık sayılar ile ilgili sorulan soruda öğrencilerin % 65’i “0.999..=1” eşitliğinin ve % 52’i “0.3333..... $= \frac{1}{3}$” eşitliğinin yanlış olduğunu düşünmektedir. Öğrenci cevaplarına işlemse düşünce ve nesne- süreç kategorisi olmak üzere iki kategori oluşturulmuştur.

Öğrencilerin % 34’ü (birinci eşitlik) ve % 24’ü (ikinci eşitlik) eşitlikler üzerinde sayı yuvarlama, devirli sayı kuralı gibi matematiksel bilgilerini ve işlemsel bilgilerini kullanarak sonuca ulaşmaya çalışmaktadırlar. Örneğin işlemsel düşünen öğrenciler “0.999…” sayısının devrettiğini düşünmektedirler. Bu öğrencilerden bazıları sayı devrettiği için eşitliğin yanlış olduğunu bazıları ise sayı devrettiği için eşitliğin doğru olduğunu söylemektedirler. Diğer yandan “0.333..” sayısı için devirli bir sayı olduğunu söyleyen öğrenciler devirli sayı kuralını uygulayarak eşitliğin doğru olduğunu göstermeye çalışmaktadır.

İşlemse düşünen öğrencilerin “0.999…” eşitliği ile ilgili bir diğer açıklaması ise eşitliğin sol tarafında 0 tam olduğu sağ tarafında ise 1 tam olduğudur. Dolayısıyla öğrenciler 0 ile 1’in eşit olmadığını düşünerek, “0.999…” sayının 1 sayısından küçük olduğunu düşünmüşlerdir. Eşitliğin yanlış olduğunu düşünen bazı öğrenciler ise iki sayı arasındaki farkı bulmak için işlemler yapmaya çalışmış ve sonucunda sayının küçük olduğunu söylemişlerdir. Benzer şekilde “0.333..” sayının da 1/3’ten küçük olduğunu söyleyen öğrenciler mevcuttur. Diğer yandan “0.333…” eşitliği ile ilgili elde edilen bir diğer sonuç ise öğrenciler, “0.333....” ondalık sayısını rasyonel sayı şeklinde yazmaya çalışarak, buldukları sayının 1/3 sayısına eşit olmadığını ifade etmişlerdir. Pay ve paydasını yazmaya çalışan öğrenciler, paydanın 10, 100, 1000…vb. gibi olduğunu düşünerek eşitliğin doğru olmadığı kanısına ulaşmışlardır.

Öğrencilerin %11’i “0.999..” sayısını ve % 8’i “0.333…” sayısıbı sonsuza kadar devam eden bir süreç olarak, eşitliğin sağ tarafındaki sayıları ise nesne olarak düşünmüşler ve nesne-süreç karşılaştırması yapmışlardır. “0.999..=1” eşitliği ile ilgili olarak öğrenciler “0.999…” sayının sonsuza kadar gittiğini bu nedenle sayısınınhenüz 1’e ulaşamadığını veya hiçbir zaman 1’e ulaşmayacağını düşünmektedirler. Elde edilen bu bulgular literatür ile de benzerlik göstermektedir (Edwards, 1997; Cornu,1991; Maria, Thanasia ve Katerina, 2009; Monaghan, 2001; Sacristan, 1997; Sierpinska, 1987; Tall ve Schwarzenberger, 1978). Cornu (1991), yapmış olduğu çalışmada, öğrencilerin, “0.999…” sayısının sonsuz olarak düşündüklerini ve sayının 1’e yaklaştığını ancak eşit olmadığı söylediklerini ifade etmiştir. Öğrenciler bunu söylerken sayının “0.9, 0.99, ….” şeklinde devam ettiğini ve “0.999…” şeklinde devam eden bir sayı olacağını ancak bir sınırı vardır şeklinde açıklamışlardır. Cornu, öğrencilerin burada limiti sonsuzda bir değer olarak değil, sınırı olan bir kavram olarak algıladıklarını belirtmiştir. Bu şekilde öğrencilerin limit ile ilgili kendiliğinden gelişen kavram yapılarının, öğrencilerde limitin daha çok bir süreç kavrayışı olarak yani ulaşılamayan limit olarak kavramsallaştığını gösterdiğini ileri sürmüştür. Öğrencilerde bu algının oluşmasını ilk öğrenmelerinden kaynaklandığını belirten Cornu (1991), öğrencilerin limit ve sonsuzluk kavramlarına yönelik sürekli yaklaşma (getting close), sürekli büyüyen (growing large) ya da sonsuza kadar gitme (going forever) gibi kavram yanılgısı oluşturduklarını ifade etmiştir. Ayrıca bu şekilde öğrencilerin yanlış kavramsallaştırmalarının, ileriki dönemlerde formal tanımlar ile bir araya gelince uyuşmazlıklar oluşturacağını belirmiştir.

Diğer yandan “0.999…” sayısını sonsuz olduğunu düşünen bazı öğrenciler, “0.999…” ile 1 arasında “0.0000….1” gibi veya çok az bir fark olduğunu söylemişlerdir. Tall ve Schwarzenberger’in (1978), üniversite öğrencileri ile yaptığı çalışmada da öğrencilerin benzer cevaplar verdiği görülmektedir. Bu cevaplardan bir tanesi *“1’den küçük fakat 0.999… ile 1 arasındaki fark sonsuz küçüktür”* şeklindedir. Tall ve Schwarzenberger (1978), öğrencilerin birçoğunun eşitliğe yönelik açıklamalarında sonsuz küçükler (infitesimal) kavramını kullandığını ifade etmişlerdir. Benzer bulgulara rastlayan (Cornu,1991; Sacristan, 1997; Sierpinska, 1987) yapmış oldukları çalışmalarda öğrencilerin limit ile ilgili sorularda sonsuz küçükler kavramını kullandığı sonucuna ulaşmışlardır.

Bu araştırmada “0.999…” eşitliği ile ilgili elde edilen bir diğer sonuç ise; “0.999…” sayısının sonsuz sayı olduğunu veya devam ettiğini düşünen öğrencilerin (12), 6 tanesi “0.999…” sayısı üzerinde işlem yapılamayacağını düşünmektedirler. Bu öğrenciler “0.999...” sayısı sonsuza kadar gittiği için veya sayı devrettiğinden dolayı bir sayı ile toplanamayacağını dolayısıyla 1 sayısına eşitlenemeyeceğini ifade etmişlerdir. Diğer yandan 6 öğrenci de sonsuz sayı olduğunu düşündükleri “0.999…” sayısı üzerinde işlem yapılabileceğini söylemişlerdir.

Bu öğrenciler “0.999…” sayısının son basamağına 1 ekleyerek ya da sonsuz sayıya sonsuz sayı eklenmesi şeklindeki açıklamaları ile eşitliğin sağlanmasının mümkün olduğunu belirmişlerdir. Bu durumun, öğrencilerin teorikte “0.999…” sayısını sonsuz sayı olarak algıladığını ancak pratikte sonlu bir sayı gibi hareket ettiklerinin göstergesi olduğunu söyleyebiliriz.

İkinci eşitlikte “0.333…” sayısını süreç olarak gören öğrencilerden bazıları bölme işlemi yaparak, bölme sonucunda elde edilen sayının sonsuza kadar gittiğini ve “0.333…” sayısı ile aynı olduğunu düşünmektedir. Birinci eşitliğe (0.999…) göre bu eşitlikte daha fazla öğrencinin eşitliğin doğru olduğu sonucuna ulaştığı görülmektedir. Edwards (1997), 1’ sayının 3’e bölümü sonucunda eşitliğin doğru olduğu kabul edilebilir ancak aynı durum “0.999…=1” eşitliği için geçerli olmadığını ifade etmiştir. Dolayısıyla öğrenciler için “0.333=1/3” eşitliği “0.999=1” eşitliğine göre daha kolay kabul edilebilir bir eşitliktir. Diğer yandan eşitliklerin anlaşılması ile ilgili öğrencilerin yaşadığı zorluğu Dubinsky vd. (2005), sayıların dinamik ve statik yapısı ile ilişkilendirmiştir. Dubinsky vd. (2005), “0.333=1/3” eşitliğinde bölüm sonucunda “0.333…” sayısı oluşturulabileceğini, ancak “0.999…” sayısının öğrenciler için sezgisel veya görsel olarak anlaşılamayacağını ifa etmiştir. Bu nedenle “0.333…” sayısı ile ilgili eşitlikte sadece potansiyel düşünce varken, “0.999…” sayısı ile ilgili eşitlikte “0.999…” sayısının devam etmesi potansiyel olarak, fakat 1 sayısı nesne olarak algılandığı için fiili sonsuzluk vardır dolayısıyla öğrenciler anlamakta zorlandığını belirmiştir.

“0.333=1/3” eşitliği ile ilgili bazı öğrenciler, bölme işlemi sonucunda aynı sayı çıkıyor gibi görünmesine rağmen işlemin sağlaması yapıldığında eşit olmadığını bu nedenle eşitliğin doğru olmadığını söylemişlerdir. Fischbein (2001), öğrencilerin çoğunun 1/3 sayısının “0.333…” sayısına eşit olduğunu düşündüğünü ancak “0.333..” sayısının 1/3’e eşit olup olmayacağı sorulduğunda ise düşüncelerinin farklı olduğunu ifade etmiştir. Bu öğrenciler “0.333...” sayısının 1/3 sayısına matematiksel olarak eşit olmadığını sadece yakın olduğunu şeklinde cevap verdiklerini ifade etmiştir. Dolayısıyla eşitliğin tam tersinin düşünülmesi öğrencilerin anlamasını zorlaştırmaktadır. Özmantar (2009), öğrencilerin yaşadığı bu zorlukların sayıların doğasında var olan epistemelojik zorluklardan kaynaklanabileceğini söylemiştir. Bu zorluklardan bir tanesi, devirli ondalık sayıların yapısal olarak sonsuzluk düşüncesini içermesi şeklinde açıklamıştır. Dolayısıyla öğrenciler sonsuz sayıda ondalık basamak içeren devirli ondalık sayıları, sayıların devam ettiği gerekçesiyle sonsuz sayıda basamağı olduğunu söyleyerek, sonsuz sayı olarak algılamaktadır.

Limit durumu ile ilgili sorulan diğer soruda öğrencilere, bir kişinin aralarında 8 km olan bir köyden diğer köye, her gün bir önceki gittiği yolun yarısını giderek kişinin köye ulaşıp ulaşmayacağı sorulmuştur. Öğrencilerin % 62'si kişinin köye ulaşabileceğini söylerken, % 32'si ise kişinin köye ulaşamayacağını söylemiştir. Öğrenciler, kişinin köye ulaşmasını veya ulaşamamasını sonlu süreç ve sonsuz süreçler olarak açıklamışlardır. Öğrencilerin % 36 'sı (5. (% 38), 6. (% 40), 7. (% 30) ve 8. (% 36)) sürecin sonlu olduğunu söylemiştir. Öğrenciler, 8 km'nin sonlu olduğunu ve kişi sürekli yol aldığı için bir şekilde 8 km'nin tamamlanacağını düşünmektedirler. Bu durumda sürekli ikiye bölme işlemi sonucunda bölünebilecek mesafe kalmayacaktır. Ancak yapılan görüşmelerde öğrencilerin bölme işleminin devam edeceğini bitmeyeceğini düşünmektedirler. Öğrenciler yolun sonlu olması ile bölme işlemin devam ediyor olmasını anlamakta zorlanmışlar ve bu durumu açıklayamadıklarını ifade etmişlerdir.

Diğer yandan öğrencilerin % 22'si (5. (% 20), 6. (% 22), 7. (% 18) ve 8. (% 29)) sürecin sonsuz olduğunu düşünmektedir. Bu öğrenciler sonsuz sayıda bölme işleminin yapılacağını ve bölme işleminin bitmeyeceğini düşünmektedirler. Öğrenciler bölme işlemi sonucunda elde edilen sayının yine bölünebileceğini ve her bölüm sonrasında mutlaka bir parça kalacağını belirtmektedir. Bu şekilde bölme işleminin sonsuza kadar gideceğini ve kişi köye ulaşamayacağını söylemektedirler. Bölme işlemleri sonucunda elde edilen sayıları toplayan öğrenciler 8 sayısına ulaşmaya çalışmıştır ancak toplama işlemi sonucunda 8'in elde edilemeyeceğini fark etmişlerdir. Öğrenciler bir noktadan sonra bölme işlemine devam etmemiş ve sonsuz sayıda bölme işleminin yapılabileceğini ifade etmişlerdir.

5.1.5. Sonsuz kümelerin karşılaştırılmasına ilişkin tartışma

Çalışmanın bu bölümünde sonsuz kümeler ve sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili öğrencilere farklı bağlamlarda dört soru sorulmuştur. Bu sorulardan iki tanesi aritmetik ve geometrik temsilde hazırlanmış olup, doğal sayılar ve çift doğal sayıların elaman sayılarının karşılaştırılmasını içermektedir. Bir diğer soruda farklı uzunluktaki iki doğru parçası verilmiş, doğru parçalarının uzunlukları ve nokta sayıları bakımından karşılaştırılması istenmiştir. Son soruda ise öğrencilere devam eden bir sayı örüntüsünün eleman sayısı ile [0,1] aralığındaki doğru parçasının nokta sayısının karşılaştırılması istenmiştir. Bu bölümde sorulardan elde edilen bulgular, literatür çerçevesinde tartışılacaktır.

Doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümesinin eleman sayılarının karşılaştırılmasıyla ilgili elde edilen bulgular doğrultusunda söyleyebiliriz ki öğrencilerin temsil türüne göre cevapları ve kümelerin karşılaştırılmasında kullandıkları yöntemler değişmektedir. Geometrik temsilde sorulan soruda öğrencilerin % 25’i doğal sayılar kümesi ile çift doğal sayılar kümesinin elaman sayılarının eşit olduğunu söylerken, aritmetik temsilde öğrencilerin % 19’u eleman sayılarının eşit olduğunu söylemiştir. Bu bulgu literatürde yer alan çalışmalar ile benzerlik göstermektedir (Maria, Thanasia ve Katerina, 2009; Sbaraglı, 2006; Tirosh ve Tsamir, 1996; Tsamir ve Tirosh; 1999; Tsamir, 2001). Tirosh ve Tsamir (1996), sonsuz kümelerin gösteriminde kullanılan bazı temsillerin, gerçekte ayni kardinaliteye sahip iki sonsuz kümenin, öğrencide oluşan farklı büyüklükteki sonsuz iki küme algısını değiştirebileceğini ifade etmiştir. Yapılan çalışmalar da geometrik temsilin bu noktada etkili olduğunu göstermektedir.

Doğal sayılar ve çift doğal sayıların elaman sayılarının karşılaştırılmasında öğrencilerin kullandığı yöntemler incelendiğinde, aritmetik temsil ile sorulan soruda öğrencilerin, tek sonsuz, kapsama, artış miktarını belirleme ve birebir eşleme yöntemleri kullandıkları görülmüştür. Geometrik temsilde sorulan soruda ise öğrenciler bu yöntemlerle birlikte sayı değerlerini karşılaştırma yöntemini kullanmışlardır.

İki soruda da öğrencilerin bu yöntemler arasından en fazla artış miktarını belirleme yöntemi kullandıkları tespit edilmiştir. Aritmetik temsil ile ilgili soruda öğrencilerin % 32’si bu yöntemi kullanırken, geometrik temsilde öğrencilerin % 20’sinin bu yöntemi kullandığı tespit edilmiştir. Sınıf seviyelerine göre bakıldığında aritmetik temsilde bu yöntemi kullanan öğrencilerin sayısı (5. (% 30), 6. (% 40), 7. (% 30) ve 8. (%31)) birbirine yakınken geometrik temsilde ise öğrencilerin sayısına bakıldığında (5. (% 26), 6. (% 25), 7. (% 9) ve 8. (% 19)) 7. ve 8. sınıf öğrencilerin sayısında azalma olduğu görülmüştür. Bu yöntemi kullanan öğrenciler genellikle sayıların artış miktarını dikkate alarak bu soruyu cevaplandırmışlardır. Örneğin, öğrenciler çift doğal sayıların 2'şer 2'şer arttığı için 4 ile 6 arasındaki sayıların atlandığını ancak doğal sayılar kümesinde 4, 5, 6… şeklinde ard arda devam ettiği için böyle bir durumun söz konusu olmadığını söylemişlerdir. Bu nedenle doğal sayılar kümesinin eleman sayısının çift doğal sayılar kümesin eleman sayısından fazla olduğunu düşünmüşlerdir. Yapılan çalışmalarda da öğrencilerin bu yöntemi kullandığına dair bulgular yer almaktadır (Güven ve Karataş, 2004; Singer ve Voica; 2003; Tirosh ve Tsamir, 1996). Singer ve Voica'ya (2004) göre sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında öğrenciler bu yöntemi kullanırken sonlu kümeleri karşılaştırma mantığı ile hareket etmektedir ve sonlu kümeler ile ilgili sezgisel düşüncelerinden etkilenmektedir. Örneğin "*Pozitif saylar kümesi; {0;1;2;3;… } çif doğal sayılar kümesinden; {0;2;4;6;…} daha fazladır çünkü ikişer ikişer gitmiyor*" şeklindeki bir argüman sezgisel bir argümandır. Singer ve Voica (2004), öğrencilerin burada doğal sayılarda sayma kuralını kullandıkların, verilen kümenin başlangıcı ve bitişi bellidir şeklinde düşündüklerini ifade etmiştir. Güven ve Karataş (2004), lise öğrencileri ile yaptığı çalışmada benzer öğrenci cevaplarına rastlamış ve öğrencilerin kullandığı bu yöntemi eksik eleman belirleme yöntemi olarak adlandırmıştır. Bu yöntemin öğrenciler tarafından çok sık kullanılan yöntem olduğunu söylemiştir. Öğrencilerin kullandığı bu yöntemin sonlu kümeler için geçerli olduğunu ancak sonsuz kümeler için geçerli olmadığını vurgulamıştır.

Doğal sayılar ve çift doğal sayıların elaman sayılarının karşılaştırılmasında öğrenciler tarafından en çok kullanılan bir diğer yöntem ise kapsama yöntemidir. Kapsama yönteminin aritmetik temsilde öğrencilerin % 27'si (5. (% 18), 6. (% 30), 7. (% 39) 8. (%24)) kullanırken, geometrik temsilde öğrencilerin % 8'i (5. (% 6), 6. (% 12), 7. (% 9) 8. (% 7)) tarafından kullanıldığı görülmüştür. Geometrik temsilde bu yöntemi kullanan öğrenci sayısının önemli oranda azaldığını söyleyebiliriz. Sınıf seviyelerine göre bakıldığında kapsama yönteminin iki temsil türünde de en fazla 6. ve 7. sınıf öğrencileri tarafından kullanılmıştır. Bu yöntemi kullanan öğrenciler doğal sayılar kümesinin çift doğal sayılar kümesini kapsadığını düşünmektedirler. Parça-bütün ve küme-alt küme düşüncesini içeren bu yöntemin, sonsuz kümelerin karşılaştırmasında birçok öğrenci tarafından kullanıldığı görülmektedir (Duval, 1983; Güven ve Karataş, 2004; Maria, Thanasia ve Katerina, 2009; Moreno A. ve Waldegg, 1991; Singer ve Voica, 2003; Tirosh, 1991; Tirosh ve Tsamir, 1996; Tsamir, 1999).

Tirosh (1991), öğrencilerin, sonlu kümeleri karşılaştırırken kullandığı bu yöntemin sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında da geçerli olduğunu düşüncesinden hareketle bu yönteme başvurduklarını belirtmiştir. Ancak söz konusu yöntem sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında geçerli değildir (Güven ve Karataş, 2004). Dolayısıyla sonsuz kümelerin karşılaştırılmasına da uygulamaya çalışılan "alt küme onu içeren kümeden daha az elaman sahiptir düşüncesi" tutarsızlıklara neden olabilmektedir. Fischbein vd. (1979), oluşabilecek tutarsızlıklar ile ilgili bizim şemalarımızın pratik ve gerçek hayat tecrübelerimizin üzerine kurulu olduğunu bu nedenle "Bütün parçasına eşit olabilir" gibi düşüncelerin zihinsel şemalarımızla uyuşmadığını belirtmiştir. Dolayısıyla doğal sayıların kümesinin, bir alt kümesi ile elaman sayısının aynı olması düşüncesi "parça bütüne eşit olamaz" mantığı ile tutarlı değildir (Maria, Thanasia ve Katerina, 2009). Güven ve Karataş (2004) ise öğrencilerin sonlu kümeler için geçerli olan bu yöntemleri kullanmasını, öğrencilerin sonlu kümelerden sonsuz kümelere geçişte sorunlar yaşadığını bu nedenle bilişsel dengeyi kuramadıkları şeklinde açıklamıştır.

Doğal sayılar ve çift doğal sayıların elaman sayılarının karşılaştırılmasında öğrencilerin kullandığı yöntemlerden bir tanesi de tek sonsuzluk yöntemidir. Her iki temsil türünde de öğrencilerin % 10'unun bu yöntemi kullandıkları görülmüştür. Öğrenciler doğal sayılar ve çift doğal sayılar örüntüsünün sonsuza kadar devam ettiğini ve terim sayılarının eşit olduğunu söylemişlerdir. Burada "Sonsuz kümelerin hepsi eşittir" düşüncesi temel alınmıştır. İlgili literatürde de sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında benzer yöntemin kullanıldığını gösteren çalışmalar mevcuttur (Güven ve Karataş, 2004; Moreno A. ve Waldegg, 1991; Sbaraglı, 2006; Singer ve Voica, 2007, 2008; Tsamir ve Tirosh, 1999; Tsamir, 2001).

.

Tirosh (1985), öğrencilerin bu cevaplarının sezgisel olduğunu belirtmiştir. Burada öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili sezgisel anlayışlarının, sonsuzluğu "tükenmezlik" ile eş görme şeklinde olduğunu ifade etmiştir. Çalışmasında benzer öğrenci cevaplarına rastlayan Singer ve Voica (2003), öğrencilerin cevaplarını tek sonsuzluk sezgisi olarak tanımlamıştır. Bu sezginin geometrik temsilde sorulan sorularda daha çok ortaya çıktığını belirtmiştir. Öğrencilerde var olan tek sonsuzluk sezgisinin, öğrencilerin, sonsuzluk kavramının doğası ile ilgili belirsizliklerin ne kadar farkında olduğu ile ilişkili olabileceğini söylemiştir. Çünkü 5. sınıf öğrencileri ile sonsuz kümeler üzerine yapılan tartışmalar sonunda öğrencilerin "Bütün sonsuz diziler aynı tür mü?" (Are all the infinite sets of the same type) şeklinde soru sorduklarını gözlemlemiştir. Diğer yandan Güven ve Karataş (2004), tek sonsuz yönteminin doğrudan sonsuz kavramını bir sayıya atfetmekle ortaya çıktığını belirtmiştir. Bunun öğrenciler için önemli bir kavram yanılgısı olduğunu vurgulamıştır.

Doğal sayılar ve çift doğal sayıların elaman sayılarının karşılaştırılmasında öğrencilerin kullandığı bir diğer yöntem ise Cantor Küme Teorisine göre sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında kullanılan birebir eşleme yöntemidir. Birebir eşleme yöntemini kullanan öğrenciler iki kümenin elamanları arasında birebir eşleme yaparak iki kümenin eleman sayısının eşit olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Aritmetik temsilde, öğrencilerin % 6'sı (5. (% 8), 6. (% 7), 7. (% 11) ve 8. (% 12))bu yöntemi kullanırken, geometrik temsilde ise öğrencilerin % 11'inin (5. (% 6), 6. (% 5), 7. (% 14) ve 8. (% 19)) bu yöntemi kullandığı görülmüştür. Bu açıdan öğrencilerin geometrik temsilde birebir eşleme yöntemi daha kolay akla getirdiklerini söyleyebiliriz. Çünkü öğrenciler burada doğal sayılardan oluşan A sayı örüntüsü ve çift doğal sayılardan oluşan B sayı örüntüsündeki sayılar arasındaki ilişkiden çok, karenin bir kenar uzunluğu ile karenin çevre uzunluğu arasındaki ilişkiye odaklanmışlardır. Böylece öğrenciler, bir karenin kenar uzunluğu var ise bide buna karşılık çevre uzunluğu vardır şeklinde düşünmüşlerdir. Dolayısıyla bu düşüncenin öğrencileri birebir eşleme yöntemine yönlendirdiğini söyleyebiliriz. Bu bağlamda yapılan çalışmalar da bu sonucu desteklemektedir (Maria, Thanasia ve Katerina, 2009; Tirosh ve Tsamir, 1996; Tsamir, 2001). Moreno A. ve Waldegg, (1991), geometrik temsil, öğrencilerin sonsuz kümeler arasında birebir eşlemeyi daha iyi anlaşılmasını sağladığını ifade etmiştir. Söz konusu araştırmanın da bu sonucu desteklediğini söyleyebiliriz.

Sonsuz dizilerin karşılaştırılması ile ilgili geometrik temsilde sorulan sorulardan bir tanesi de farklı uzunluktaki doğru parçalarının nokta sayılarının karşılaştırılması sorusudur. Bu soruda öğrencilerin % 54’ü uzunluğu daha fazla olan DE doğru parçasındaki nokta sayısının, kısa olan AB doğru parçasındaki nokta sayısından daha fazla olduğunu söylemiştir. Öğrencilerin % 26’sı iki doğru parçasındaki nokta sayısının eşit olduğunu söylerken, % 4’ü iki doğru parçasında nokta olmadığını ve öğrencilerin % 3’ü de doğru parçalarında sonsuz nokta olduğunu söylemiş nokta sayıları bakımından karşılaştırma yapmamıştır.

Öğrencilerin nokta sayılarını karşılaştırırken kullandıkları yöntemler tek sonsuzluk, sonlu büyüklükleri karşılaştırma, nokta sayısını belirleme şeklinde üç kategoride toplanmıştır. Öğrencilerin % 38’i (5. (% 30), 6. (% 47), 7. (% 50) 8. (% 26)) sonlu büyüklükleri karşılaştırma yöntemini kullanmıştır. Bu öğrenciler görsel olarak bakıldığında DE doğru parçasının daha uzun olduğunu dolayısıyla daha uzun doğru parçasında daha fazla nokta olduğunu söylemişlerdir. Literatürde de benzer bulgulara rastlanmaktadır (Kolar ve Cadez, 2012; Mamolo, 2009; Moreno A. Ve Waldegg, 1991). Çalışmasında benzer sonuçlar elde eden, Mamolo (2009), bu sonucu öğrencilerin, sonlu niceliklerdeki ölçme özelliğini sonsuz nicelilere de kullanmaya çalıştıklarını ve doğru parçasındaki nokta sayısı gibi sonsuz niceliklerin de ölçülebileceğini düşündükleri şeklinde yorumlamıştır. Tall (1980), ise öğrencilerin bu tür cevaplarını öğrencilerin sezgisel düşüncesi olarak ifade etmiştir. Sezgisel olarak mantıklı olan bir niceliğin iki katı kendisinden daha fazladır. Çocuklarda doğal olarak doğru parçalarının sahip olduğu nokta sayısı ile doğru parçası uzunluğunda oran kurmaktadırlar.
Tall (1980), “Sonsuzluğu Ölçme” şeması olarak geliştirdiği şema ile çocuklara doğru parçasındaki nokta sayısı gibi sonsuz birimleri anlamaya yönelik sezgisel ve mantıklı açıklamalar sunulabileceğini ifade etmiştir.

Farklı temsiller üzerinde duran Kolar ve Cadez (2012), öğrencilerin bu düşüncelerinde geometrik temsilin de etkisi olduğunu söylemiştir. Doğru parçasının görsel olarak belli bir uzunlukta sunulması, öğrencilerde doğru parçasındaki nokta sayısının fiziksel olarak sınıflandırılıyor şeklinde düşünmesine neden olmaktadır. Dolayısıyla öğrencilerde sınırlı uzunluktaki bir doğru parçasında sonsuz nokta yoktur algısı ve uzun olan doğru parçasında daha fazla nokta vardır algısı oluşturduğunu ifade etmiştir. Moreno A. ve Waldegg (1991), temsil ile ilgili bazen kullanılan bir temsilin öğrenciler için içeriği anlamada zorluk olabileceğini söylemiştir. Elde edilen sonuçlar da öğrencilerin bu anlamda zorlandığını göstermektedir.

Öğrencilerin % 19'u (5. (% 28), 6. (% 20), 7. (% 11) 8. (% 17)) nokta sayısını belirmeye yöntemini kullanmıştır. Bu kategoride yer alan öğrenciler doğru parçalarında sınırlı sayıda nokta olduğunu düşünmektedirler. Doğru parçasındaki nokta sayısı ile ilgili tahmin sayılar söylemişlerdir. Sınıf seviyelerine göre bakıldığında en fazla 5. ve 6. Sınıf öğrencilerinin bu kategoride yer aldığı görülmektedir. Bu sonuç benzer bulgulara ulaşan (Mamolo, 2009; Singer ve Voica, 2003) çalışmalarını destekler niteliktedir. Singer ve Voica (2003), yapmış olduğu çalışmada öğrencilerin "doğru parçasının nokta sayısının sınırlıdır çünkü 2 tane nokta vardır" gibi cevaplar verdiğini görmüştür. Buradan hareketle öğrencilerin, "sonlu belli marjinlere sahiptir" ve "sonsuz marjini olmayan bir şeydir" şeklinde kavram yanılgılarının olduğu ifade etmiştir. Bu açıdan bu çalışmada bu sonucu desteklemektedir. Öğrenciler sadece sonlu olan şeylerin belli sınırları olduğunu, sonsuz olan şeylerin sonu olmadığını dolayısıyla belli aralıklarda sınırlandırılamayacağını düşünmektedirler.

Öğrencilerin %5'i (5. (% 4), 8. (% 21)) tek sonsuzluk yöntemini kullanmıştır. Doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümesinin karşılaştırılmasında da öğrencilerin kullandığı bu yöntemin temelinde "Bütün sonsuz kümeler eşittir" düşüncesi yatmaktadır. Bu soruda da öğrenciler iki doğru parçasında sonsuz nokta olduğunu bu nedenle nokta sayısının eşit olduğunu söylemişlerdir. Bu bağlamda yapılan görüşmede 9 öğrenciye iki doğru parçasındaki sonsuzluğun aynı olup olmadığı sorulmuştur. 6 öğrenci sonsuzlukların eşit olduğunu söylemiş ancak öğrencilerin kararsız kaldıkları görülmüştür. Öğrenciler doğru parçalarının uzunluklarının farklı olmasından dolayı sonsuzlukların aynı olması ile ilgili kararsızlıklar yaşadıklarını söylemişlerdir. Öğrencilere göre "doğru parçasında sonsuz nokta var o zaman nokta sayılar eşittir" ancak doğru parçalarının uzunluklarının farklı olmasını tam olarak açıklayamamaktadırlar. Bazı öğrenciler ise bu durumu nokta büyüklüğü ile açıklamaya çalışmıştır. Bu bağlamda noktaları istediğimiz kadar küçültürsek iki doğru parçasında da sonsuz nokta olabileceğini söylemişlerdir.

Bu bağlamda yapılan çalışmalar da bazı öğrencilerin tek sonsuzluk algısına sahip olduğunu söylemektedir (Singer ve Voica, 2003; Tsamir, 2001) Bu çalışmada da öğrenciler birden fazla sonsuzluk olabileceğini düşünmemektedir. Örneğin öğrencinin "*Üç kere de sonsuz desek iki kere de sonsuz desek aynı şey*" gibi bir ifadesi bunun göstergesi olarak söylenebilir. Ancak öğrencilerin *"uzun olan doğru parçasında sonsuzluk daha fazladır"* gibi bir ifadeleri de yer almaktadır. Öğrenciler bu noktada uzunluklarının farklı olmasında dolayı kararsızlık yaşamaktadırlar. Fischbein (1981), bizim doğal sezgimize göre sonsuzluğun seviyesi olmadığını ifade etmiştir. Sonsuzluk düşüncesini çok kolay kabul edeceğimizi ancak bir sonsuz, başka bir sonsuzluktan daha fazladır fikrini sezgisel olarak kabul etmeyeceğimizi belirtmiştir. Sezgisel olarak bu fikrin bizim için mantıklı olmadığını vurgulamıştır.

Son soruda ise öğrencilere [0,1] aralığında bir doğru parçası ile devam eden bir sayı örüntüsü verilmiş, doğru parçasındaki nokta sayısının ve sayı örüntüsündeki terim sayısının karşılaştırılması istenmiştir. Geometrik ve aritmetik temsilde sorulan bu soru diğer üç sorunun birleşimi gibi sorulmuştur. Öğrencilerin % 31'i doğru parçasındaki nokta sayısı ile sayı örüntüsündeki terim sayısının aynı olduğunu söylemiştir. Öğrencilerin % 26'sı doğru parçasındaki nokta sayısının, terim sayısından az olduğunu söylerken, % 19'u ise doğru parçasındaki nokta sayısının terim sayısından daha fazla olduğunu söylemiştir.

Öğrencilerin nokta sayısı ile terim sayısını karşılaştırırken kullandığı yöntemlere bakıldığında sonlu büyüklükleri karşılaştırma, tek sonsuzluk ve nokta sayısının belirleme yöntemlerinin yanı sıra sonlu-sonsuz karşılaştırma ve birebir eşleme yöntemlerini kullandığı görülmüştür. Öğrencilerin % 20'si (5. (% 24), 6. (% 10), 7. (% 20) ve 8. (% 24)) sonlu büyüklükleri karşılaştırma yöntemini kullanmıştır. Burada öğrenciler doğru parçasını ve sayı örüntüsünü sonlu büyüklük olarak düşünmüşlerdir. Örneğin doğru parçası ve sayı örüntüsünün [0,1] aralığında olduğunu veya terim sayısının ve nokta sayısının sınırlı olabileceğini söylemişlerdir. Doğru parçasının [0,1] aralığında olması öğrencileri sayı örüntüsünün de [0,1] aralığında sınırlandırıldığı düşüncesine götürmüştür. Öğrencilerden tarafından söylenilen "*Doğru parçasında noktalar biterse terim sayısı da biter bu yüzden sayılar sonsuz olmayabilir*." ifadesi bu sonucun bir göstergesi olduğunu söyleyebiliriz.

Doğru parçasındaki nokta sayısı ve devam eden sayı örüntüsündeki terim sayısının karşılaştırılmasında öğrenciler tarafından en çok kullanılan yöntemlerden bir diğeri de tek sonsuzluk yöntemidir. Öğrencilerin % 13'ü (5. (% 14), 6. (% 5), 7. (% 7) 8. (% 24)) bu yöntemi kullanmıştır. Sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili diğer sorularda da (7., 8. ve 9. soru) öğrenciler tarafından kullanılan bu yöntem temelinde "Bütün sonsuz kümeler eşittir." yatmaktadır. Öğrenciler sayı örüntüsünün devam ettiğini bu nedenle sonsuz olduğunu söylerken, doğru parçasındaki nokta sayısının sonsuz olmasını ise *"Doğru parçasının kendi içinde küçük parçalara ayrılacaktır" "Noktalar küçülerek sonsuz tane olabilir."* şeklinde gerekçeler ile açıklamışlardır. Öğrenciler doğru parçalarını bölerek yeni noktalar oluşturulabileceğini ve nokta boyunu küçülterek istedikleri kadar nokta oluşturabileceklerini söylemişlerdir. Literatürde de benzer öğrenci cevaplarına rastlanmaktadır (Fischbein, Tirosh ve Melamed, 1981). Fischbein vd. (1981), yaptıkları çalışmada öğrencilerin cevaplarını sezgisel kabulleri olarak yorumlamıştır. Öğrencilerin 7.sınıftan itibaren rasyonel ve irrasyonel sayıların öğrenmesi sonsuzluk ile ilgili "doğru parçasının sürekli bölümü ile her noktayı ulaşılabilir" gibi temel sezgilerini etkilemediğini ifade etmiştir. Fischbein vd. (1981), burada öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili temel sezgisel anlayışlarının, sonsuzluğu "tükenmezlik" ile eş görme şeklinde olduğunu ifade etmiştir. Bu sezgi öğrencileri "Bütün sonsuz kümeler eşittir." düşüncesine götürmektedir.

Böylece öğrenciler nokta sayısı ve terim sayısı sonsuz olduğu için eşit olduğunu söylemişlerdir. Bu noktada 9. soruda da sorulduğu gibi öğrencilere bu sonsuzlukların aynı olup olmadığı sorulmuştur. Görüşme yapılan 9 öğrenciden 5 tanesi sonsuzlukların eşit olduğunu söylerken, 3 öğrenci sonsuzlukların farklı olduğunu ve bir öğrenci ise kararsız olduğunu söylemiştir. 9. soruda öğrenciler doğru parçalarının uzunluklarının farklı olmasından dolayı ile ilgili kararsız kalmışlardır. Bu soruda ise sonsuzluğun farklı olduğunu söyleyen öğrenciler doğru parçasına yazılabilecek sayıların, sayı örüntüsüne göre daha fazla sayı olduğu için sonsuzlukların farklı olduğunu söylemişlerdir. Ancak bir öğrenci doğru parçası sınırlı ve sayı örüntüsü devam ettiği için sonsuzlukların farklı olduğunu söylemiştir. Doğru parçasının sınırlı olması öğrencilerde farklı sonsuzluk olabileceği algısı oluşturduğunu söyleyebiliriz.

Doğru parçasındaki nokta sayısı ve devam eden sayı örüntüsündeki terim sayısının karşılaştırılmasında öğrenciler tarafından kullanılan bir diğer yöntem ise sonlu-sonsuz karşılaştırılmasıdır. Öğrencilerin % 11'i (5. (% 6), 6. (% 13), 7. (% 11) ve 8. (% 14)) karşılaştırma yaparken bu yöntemi kullanmıştır. Buradaki öğrenciler doğru parçasının sınırlı olduğu için nokta sayısının sınırlı olacağını ancak sayı örüntüsü devam ettiği için terim sayısının sonsuz olacağını söylemişlerdir. Öğrencilerin, sonsuzluğu devam eden bir süreç olarak algılaması, sayı örüntüsü devam ettiği içi sonsuz olabilir şeklinde düşünmesine yönlendirmektedir. Çünkü öğrencilerin birçoğu sayı örüntüsü devam ettiği için sonsuz olduğunu söylemişlerdir. Bu hususta Özmantar (2010), öğrencilerin sadece sonlu şeylerin belli aralıklardadır gibi bir düşünceye sahip olduğunu ve bu nedenle sonsuzluğun belli sınırlar arasında sınıflandırılmasını anlam veremediklerini söylemiştir. Bu açıdan bu çalışmadan elde dilen bulgular bu argümanı destekler niteliktedir. Öğrencilerin yaşadığı söz konusu zorluk, [0,1] doğru parçasındaki nokta sayısı ile ilgili öğrencilerin düşüncelerinde kendini göstermektedir.

Doğru parçasındaki nokta sayısı ve devam eden sayı örüntüsündeki terim sayısının karşılaştırılmasında öğrencilerin kullandığı bir diğer yöntem ise birebir eşleme yöntemi olup, öğrencilerin % 5'i (5. (% 2), 6. (% 7), 7. (% 5) 8. (% 7)) doğru parçasındaki noktalar ile sayı örüntüsündeki terimler arasında birebir eşleme yapılabileceğini söylemişlerdir. Öğrenciler doğru parçasındaki her noktanın bir kesir ile eşlenebileceğini düşünmüşlerdir. Ancak sınırlı reel sayılar aralığı olan [0,1] aralığı rasyonel ve irrasyonel sayıları içermektedir. Öğrenciler burada birebir eşlemeye yapılabilir derken irrasyonel sayıları göz ardı etmektedir.

5.2. Sonuçlar

Bu bölümde, ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk kavrayışlarının araştırıldığı çalışmadan elde edilen sonuçlar sunulacaktır.

1. Çalışmadan elde edilen bulgular doğrultusunda, ortaokul öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili bazı düşüncelerinin olduğu tespit edilmiştir. Ancak bu düşünceler daha çok kendiliğinden gelişen, öğrencilerin günlük hayattaki deneyimleri ile oluşan sezgisel düşünceler olduğu ve matematiksel bilgiye çok dayandırılmadığı görülmüştür. Bir başka ifadeyle, öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili bilgilerinin daha çok informal bilgi olduğunu söyleyebiliriz. Bu bilginin oluşumunda öğrencilerin kendi yaşantılarının yanı sıra, dışsal kaynakların veya otoriterin sonsuzlukla ilgili söylemleri de etkili olduğu gözlenmiştir. Öğrenciler bu söylemleri doğru olarak kabul edip, sonsuzluk üzerine konuşmalarında söz konusu kaynakları referans göstermektedirler.

2. Öğrencilerin almış oldukları matematik eğitiminin öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili kavramsal gelişimini etkilediği görülmektedir. Bu gelişimi bazı öğrenmeler olumlu yönde etkilerken bazı öğrenmeler de olumsuz yönde olduğu görülmektedir. Örneğin doğal sayılarda sayma düşüncesi öğrencilerin her sayıdan daha büyük bir sayı olabileceği ve böylece sezgisini destekleyerek en büyük sayının olmadığı sonucuna götürürken, kesirlerin öğretiminde öğrencinin kesir kavrayışlarının sonsuzluk düşüncesinin gelişiminde engel olduğu görülmektedir. Kesir öğretiminin birim kesirler ile sınırlandırılması öğrencilerde kesirlerin sonlu sayıda olduğu düşüncesini geliştirirken, kesir kavramının bir sayıdan ziyade pay ve payda olarak öğretimi ise öğrencilerin 0 ile 1 arasına yazılabilecek kesir sayısını paydaya yazılabilecek doğal sayıların sayısı ile eş tutmalarına yönlendirmektedir. Ancak öğrencilerin matematiksel öğrenmeleri ile ikincil sezgilerinin geliştiği ve bu sezgilerinin sonsuzluğu öğrenmeye elverişli olduğu görülmektedir. Örneğin öğrencilerin sonsuz bir küme (doğal sayılar kümesi) ile alt kümesinin (çift doğal sayılar kümesi) eleman sayılarınının aynı olduğunu bilmesi öğrencinin matematiksel öğrenmesi sonucu gelişen ikincil sezgileridir.

3. Öğrencilerin aldığı matematik eğitimi sonsuzluk sezgisinin gelişimine etkisi olmasına rağmen öğrencilerin bazı temel sezgilerini etkilemediği görülmüştür. Öğrencilerin bu temel sezgileri ile formal bilgi bir araya gelince öğrencilerin düşüncelerinde kararsızlıkları yaşamaktadırlar. Örneğin öğrenciler farklı uzunluktaki doğru parçalarındaki nokta sayılarını karşılaştırırken, geomteride nokta ile ilgili öğrenmeleri doğrultusunda iki doğru parçasında da sonsuz nokta olduğunu söyleyebilmişlerdir. Ancak doğru parçalarının uzunluklarının farklı olması öğrencileri sezgisel olarak uzun olan doğru parçasında daha fazla nokta vardır düşüncesine götürmüş ve öğrencilerin bu durumu açıklamakta zorlandıkları görülmüştür. Kısacası, öğrenciler sezgisel düşünceleri ve formal bilgileri arasında tutarsızlıklar yaşamaktadırlar.

4. Öğrencilerin sonsuzluk kavrayışlarında büyük sayılar→dinamik sonsuzluk→statik sonsuzluk olarak hiyerarşik bir sıralama gözlemlenmiştir. Büyük sayılar seviyesindeki bir öğrencinin sonsuzluğu büyük sayılar ile ilişkilendirdiği hatta bazı öğrencilerin sonsuzluğu büyük sayı olarak tanımladığı görülmüştür. Özellikle 5. sınıf öğrencilerinin çoğunlukla bu seviyede olduğunu söyleyebiliriz. Dinamik sonsuzluk seviyesindeki bir öğrenci ise sonsuzluğu devam eden, bitmeyen bir süreç olarak görmektedir. Statik sonsuzluk seviyesi ise sıralamanın en üst seviyesi olup, bu seviyede olan öğrenciler sonsuzluğu bir bütün olarak görmektedir.

5. Öğrencilerin doğal sayılar kümesinin sonsuz olmasını, [0,1] aralığı ile sınırlandırılmış rasyonel sayılar kümesinin sonsuz olmasından daha kolay algılayabildiği görülmüştür. Bu noktadan yola çıkarak, öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili kavrayışlarından bir tanesi olan “sonsuzluğun sonu yoktur” algısının ön planda olduğu görülmektedir. Doğal sayıların devam ediyor olması ve bir sınırı olmaması öğrencilerdeki bu sonsuzluk kavrayışı ile ilgili uyuşurken, sınırları belli bir aralıkta sonsuz rasyonel sayı olması durumu ile uyuşmamaktadır. Dolayısıyla öğrenciler sonsuzluğun belli noktalarla sınırlandırılmasına anlam vermekte zorlandıklarını söyleyebiliriz. .

6. Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili düşüncelerinin verilen temsil türüne göre değiştiği görülmüştür. Örneğin sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında öğrenciler geometrik temsil bağlamındaki sonsuzluğu daha kolay düşünebilmekte ve sonsuz kümeler arasındaki

ilişkiyi daha kolay görebilmektedirler. Ancak bu durumun her zaman geçerli olduğunu söyleyemeyiz. Çünkü geometrik temsil ile sorulan farklı soru bağlamında temsil türünün (örneğin; [0,1] aralığındaki bir doğru parçası verildiğinde öğrenci, doğru parçası üzerine yazılabilecek sayıların sınırlı olduğunu düşünmekte dolayısıyla [0,1] aralığındaki sayıların da sınırlı olduğunu düşünmekte) öğrencinin anlamasını zorlaştırdığı görülmüştür. Bu nedenle sonsuzluk kavramının incelenmesinde sadece tercih edilen temsil türü değil, verilen içeriğe göre doğru temsil türünün kullanılması da önemli olmaktadır.

7. Öğrencilerin sonsuz kümeler ile ilgili sezgilerinin olduğu görülmektedir. Bu sezgilerden bir tanesi "Bütün sonsuz kümeler eşittir." sezgisidir. Bu sezgi öğrencilerde tek bir sonsuzluk olduğu algısını oluşturmaktadır. Ancak sonsuz kümeler birbirine her zaman eşit değildir. Reel sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesi sonsuz olmasına rağmen denk kümeler değildir. Reel sayılar kümesinin daha yoğun olduğu Cantor tarafından ispatlanmıştır. Dolayısıyla bu algı öğrencilerde sonsuzluk ve sonsuzluk ile ilişkili olan diğer kavram ile ilgili matematiksel olarak doğru olmayan anlamalar oluşturmaktadır. Öğrencide bu kavramların anlaşılması ve gelişmesi, zaman ve derin bir eğitim gerektirmektedir.

8. Sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında ortaya çıkan bir diğer düşünce ise öğrencilerin sonsuzluğun bir boyutu olab ileceğini düşündükleri görülmektedir. Farklı uzunluktaki doğru parçasındaki nokta sayısını karşılaştırmasında öğrenciler, iki doğru parçasında sonsuz nokta olduğunu ve nokta sayısının eşit olduğunu söylemektedir ancak doğru parçalarının farklı uzunlukta olmasını açıklayamamaktadırlar. Buna yönelik uzun olan doğru parçasında sonsuzluk daha büyüktür gibi cevaplar görülmektedir. Bu cevaplar ise öğrencilerin sonsuzluğu bir büyüklük olarak algıladığı ve kavram kargaşası yaşadıklarını göstermektedir.

9. Öğrencilerin sınıf seviyelerine göre sonsuzluğa yönelik kavrayışlarına bakıldığında, sınıf seviyeleri arasında çok büyük bir fark olmadığı görülmüştür. Öğrencilerin soyut düşünme düzeylerinin sonsuzluk ile ilgili düşüncelerini çok etkilemediği bunun aksine daha çok somut yaşantılarının sonsuzluk düşüncelerini şekillendirdiği görülmüştür.

Yine sınıf seviyelerine göre bakıldığında öğrencilerde benzer sonsuzluk algısı ve kavram yanılgıları olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ancak öğrencilerin sınıf seviyesi arttıkça matematiksel öğrenmelerinin artması ile öğrencilerin matematiksel bağlamda sonsuzluk kavrayışlarında farklılık olduğunu söyleyebiliriz. Farklı sınıf seviyelerinde öğrencilerin matematiksel bilgileri matematiksel sonsuzluk ile ilgili kavrayışlarını etkilemektedir.

5.3. Öneriler

Bu bölümde, ortaokul öğrencilerin sonsuzluk kavrayışlarının ortaya koyulmasına yönelik yapılan çalışmanın sonuçları doğrultusunda, öğretim ve ileride yapılacak çalışmalara ışık tutmak amacıyla sunulan öneriler aşağıda sırayla verilecektir.

1. Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili günlük yaşam deneyimleri ile oluşan ve daha çok sezgisel olan kavrayışlarının olduğu görülmektedir. Bu sezgisel bilgi, formal bilgi ile birleşince ortaya bilişsel uyuşmazlıklar çıkmaktadır. Bu zorlukların oluşmasına önlemek amacıyla öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili kavram yapılarının ortaya çıkartılabilecek tartışma ortamları oluşturulabilir. Böylece öğrencilerin, sonsuzlukla ilgili kavrayışlarının farkında olması sağlanabilir ve ileriye dönük oluşabilecek tutarsızlıklara önlem alınabilir.

2. Sonsuzluk kavramı soyut ve doğası gereği anlaşılması zor bir kavramdır. Bu durum göz önüne alındığında ortaokul öğrencilerine sonsuzluğun öğretiminin gerekliliği tartışılır bir konudur. Ancak ortaokul müfredatında yer alan konulara bakıldığında sayı kavramı, kesirler, devirli ondalık sayılar gibi konular sonsuzluk düşüncesini içermektedir. Bu nedenle ortaokul seviyesindeki öğrencilere öncelikli amaç sonsuzluk kavramının öğretiminden ziyade öğrencilerde sonsuzluğun kavramsal gelişimi desteklenmesi olmalıdır. Bu amaçla yapılacak etkinlikler oluşturulurken kavram ile ilgili epistemelojik zorluklar da göz önüne alınmalıdır.

3. Öğrencilerin sınıf içi tartışmalardan sonra sonsuzluk ile ilgili düşüncelerinin değiştiğini ve sabit kalmadığını gösteren çalışmalar yer almaktadır (Boero, Douek ve

Garuti, 2003; Singer ve Voica, 2003). Bu bağlamda sonsuzluk kavramı öğrencilere açık bir şekilde söylenmeden sonsuzluk düşüncesini içeren konular üzerine konuşulabilecek ortamlar oluşturulabilir. Örneğin sonsuzlukla ilgili paradokslar seçilerek öğrencilerle tartışılabilir. Böylece öğrencinin sonsuzluk kavramı söylenmeden, sonsuzluk düşüncesinin kavramsal gelişimi desteklenebilir. Ancak bu ortamların oluşturulabilmesi için öğretmenlerin de bu yönde hazırlanması önemli olmaktadır.

4. Sacristan (2001), öğrencilerin sonsuz süreçler ve sonsuz nesneler (matematiksel) ile kendiliğinden gelişen kavramlarının ve sezgilerinin var olduğunu ve bunların söz konusu kavramların formal inşasında zorluklar oluşturabileceğini ifade etmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin matematikte karşılaştığı sonsuzluğun daha çok cebirsel ve sembolik temsilde sunulduğu bu temsillerin de sezgisel bilgi ile formal bilgi arasında ilişkilendirmede öğrenciler için daha zor olduğunu belirtmiştir. Buna karşılık Moreno ve Waldegg (1991), ise yapmış olduğu çalışmada farklı temsillerde öğrencilerin yaşadığı zorlukların azaltılabileceğini göstermiştir. Temsillerin öğrenme üzerindeki etkisi göz önüne alındığında, öğrencilerde farklı bakış açılarının oluşturulabilmesi için aynı içerikli farklı temsiller ile sonsuzluk düşüncesini içeren problemler öğrencilere sunulabilir. Böylece öğrencinin hangi temsilde sonsuzluk düşüncesini daha kolay algılayabildiği tespit edilir veya temsil ile ilgili yaşanılan zorluklar fark edilirse bu zorluklar ortadan kaldırılmaya çalışılabilir.

5. Bu çalışma ortaokul öğrencileri ile yapılmıştır. İleriye dönük çalışmalar için benzer bir çalışma matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ile yapılabilir. Böylece farklı yaş gruplarında sonsuzluk ile ilgili kavram yapılarının nasıl olduğu ortaya koyulabilir. Bunun yanı sıra öğrencilerin sonsuzluk kavrayışları ile öğretmenlerin sonsuzluk kavrayışlarına ilişkin bir resim ortaya koyulabilir.

6. Söz konusu çalışmada öğrencilere aynı içerikler farklı temsiller ile sunulduğunda öğrencilerin farklı cevaplar verdikleri gözlemlenmiştir. Ancak bu sorular farklı zamanlarda öğrencilere sorulduğu için öğrenci cevaplarındaki farklılığın çok farkında olmamıştır. Bu nedenle öğrencilerin cevaplarındaki farklılıkları görmesi adına aynı

içerikli farklı temsillerdeki sorular öğrencilere aynı anda verilerek sorulabilir. Böylece öğrencinin iki durumu aynı anda nasıl değerlendirildiği gözlemlenebilir.

7. Yeniden düzenlenen matematik müfredatında (MEB, 2013) küme kavramına yer verilmemiştir. Küme kavramı yerine sayı örüntüsü kavramı kullanılmaktadır. Küme kavramının müfredatta olmaması öğrencilerde sonsuzluk düşüncesinin gelişimini nasıl etkilediği araştırılabilir.

KAYNAKÇA

Akbulut, K. ve Akgün, L. (2005). Matematik ve sonsuzluk. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11, 548-559.

Allen, G.D. (2000). The History of İnfinity. (http://www.math.tamu.edu/~dallen/history/infinity.pdf, 15.04.2013 tarihinde erişildi.

Altun, M. (2008). *İlköğretim ikinci kademe (6, 7 ve 8. Sınıflarda) matematik öğretimi* (6. Baskı). Bursa: Aktüel Yayıncılık

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. ve Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in collegiate mathematics education*, 2, 1-32.

Aydın, B. (2003). Bilgi toplumu oluşumunda bireylerin yetiştirilmesi ve matematik öğretimi. *Pamukkale Üniversitesi Egitim Fakültesi Dergisi*, 14(2), 183-190.

Aztekin, S. (2008). *Farklı yaş gruplarındaki öğrencilerde yapılanmış sonsuzluk kavramlarının araştırılması.* Yayınlanmış Doktora Tezi, Ankara: Gazi Üniversitesi Eğitim Bölümleri Enstitüsü

Baki, A., Karataş, İ. ve Güven, B. (2002). *Klinik mülakat yöntemi ile problem çözme becerilerinin değerlendirilmesi*. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulan bildiri (16-18 Eylül, Ankara, ss. 16-18).

Baki, A. ve Kartal, T. (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin karakterizasyonu. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2 (1), 27-46.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik öğretimi.* Ankara: Pegem Akademi.

Ben-Zeev, T. ve Star, J. (2001). Intuitive mathematics: Theoretical and educational implications. *Understanding and teaching the intuitive mind: Student and teacher learning*, 29-56.

Bingölbali, E. ve Özmantar, M. F.(2009). Matematiksel Kavram Yanılgıları: Sebepleri ve Çözüm Arayışları. E. Bingölbali ve M.F. Özmantar (eds.). *İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri* (ss. 1-30) İçinde, (1.Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Boero, P., Douek, N. ve Garuti, R. (2003). *Children's conceptions of infinity of numbers in a fifth grade classroom discussion context.* Proceedings of PME27 sunulan bildiri (13-18 July, Honolulu, ABD, ss. 121-128).

Cornu, B. (1991). Limits. D.O. Tall (ed.)*, Advanced Mathematical Thinking (ss. 153-166)* İçinde. New York: Kluwer Academic Publishers

Çelik, D. ve Akşan, E. (2013). Matematik öğretmen adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarına ilişkin anlamları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1), 166-190.

Çepni, S.(2007). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (3. Baskı). Trabzon:Pegem Akademi.

Demircioğlu, H. (2012). *Sınıf Öğretmeni Adaylarının Bazı Temel Kimya Kavramlarını Anlama Düzeyleri ve Karşılaşılan Yanılgılar*. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, Trabzon: Karadeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü .

Denzin, N. ve Lincoln, Y. (2000). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks: Sage.

Dreyfus, T. ve Eisenberg, T. (1984). Intuitions on functions. *The Journal of Experimental Educational*, 52(2), 77-85.

Dubinsky, E. ve McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Derek Holton, et al. (eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (ss. 273–280) İçinde, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A. ve Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58* (3), 335-359.

Dubınsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A. ve Brown,A. 2005. Some historical issues and paradoxes regardin the concept of infinity: an APOS-based anlysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253-266.

Duval, R. (1983). L'Obstacle du dédoublement des objets mathématiques, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 385–414.

Edwards, B. (1997). An undergraduate student's understanding and use of mathematical definitions in real analysis. J. Dossey, J.O. Swafford, M. Parmentier ve A.E. Dossey (eds.), Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Columbus, ABD), *ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education* (ss. 17-22) İçinde.

Falk, R., Gassner, D., Ben Zoor, F. ve Ben Simon, K. (1986). *How do children cope with the infinity of numbers?*. Proceedings of the 10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education sunulan bildiri (20 July-25 July, London, England, ss. 13–18).

Fischbein, E., Tirosh, D. ve Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3-40.

Fischbein, E., Tirosh, D. ve Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(4), 491-512.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics, 3*(2), 9-24.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. *Springer*,10(1), 3-40

Fischbein, E., Jehiam, R. ve Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 29-44.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 309-329.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics*, *1*(3), 4-11.

Güven, Y. (2000). Erken çocukluk döneminde sezgisel düşünme ve matematik. *Ya-Pa Yayın Pazarlama San. Tic. AŞ Kaptan Ofset. İstanbul*.

Güven, B. ve Karataş, İ. (2004). Sonsuz kümelerin karşılaştırılması: öğrencilerin kullandığı yöntemler. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15, 65 -73.

Hauchart, C. ve Rouche, N. (1987). *Apprivoiser l'Infini. Un enseignement des débuts de l'analyse.* Belgium: GEM, Ciaco Editeur.

Jirotková, D. ve Littler, G. (2003). Student's Concept of Infinity in the Context of a Simple Geometrical Construct. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 126-132.

Jirotková, D. ve Littler, G. (2004). *Insight into pupils' understanding of infinity in a geometrical context.* In Proceedings of the 28th Conference of the International sunulan bildiri (14-18 July, Bergen, Norway, ss. 97-104).

Jonker, L. B. (2006). *Romantic Imagination and the Introduction of Infinity in Mathematics Education*. Proceedings of the Imaginative Education Research Symposium sunulan bildiri (12 - 15 July, Vancouver, Canada).

Karataş, İ. ve Güven, B. (2003). Problem çözme davranışlarının değerlendirilmesinde kullanılan yöntemler: Klinik mülakatın potansiyeli. *İlköğretim Online*, *2*(2), 2-9.

Kidrom, I. (2011). Tacit models, treasured intuitionsand the discrete-continuous interplay. *Educational Studies Mathematics*, 78, 109-126.

Kolar, V. M. ve Cadez, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389-412.

Lakoff, G. ve Nunez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Mamolo, A. ve Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, *10* (2), 167-182.

Mamolo, A. M. (2009). Intuitions of "infinite numbers": Infinite magnitude vs. infinite representation. *The Montana Mathematics Enthusiast.*, *6*(3), 305-330.

Mamolo, A. M. (2009). *Glimpses of infinity: intuitions, paradoxes, and cognitive leaps.* Yayınlanmış Doktora Tezi, Canada, British Columbia: Simon Fraser University.

Maria, K., Thanasia, M., Katerina, K., Constantinos, C. ve George, P. (2009). *Teachers' perceptions about infinity: a process or an object?*. Proceedings of CERME 6 sunulan bildiri (28 January- 1 February, Lyon, France, ss.1771-1780).

Martin, W. G. ve Wheeler, M. M. (1987). *Infinity concepts among preservice elementary school teachers.* Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education *sunulan bildiri* (19-25 July, Montreal, Canada, ss. 362–368).

Milli Eğitim Bakanlığı. (2013). Ortaokul matematik dersi öğretim programı.

Monaghan, J.D. (1986). *Adolescents' Understanding of Limits and Infinity*. Yayınlanmış Doktora Tezi, University of Warwick.

Monaghan, J.D. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 239–257.

Moreno, L.E., Waldegg, G. (1991) The conceptual evolution of actual infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211 – 231.

Na, L. ve Lee, E., *(2006). Mathematically gifted students' conception of infinity.* Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education sunulan bildiri (16-21 July, Prague, Cilt 1, ss. 412).

Nesin, A. (2009). *Matematik ve Gerçek*. İstanbul: Nesin Yayıncılık

Nesin, A. (2010). *Matematik ve Sonsuz* (4. Baskı). İstanbul: Nesin Yayıncılık

Nunez, R. (1993). *Psychocognitive aspects underlying the concept of infinity in mathematics*. Fribourg, Switzerland: University Press.

Núnez, R. E. (2005). Creating mathematical infinities: Metaphor, blending, and the beauty of transfinite cardinals. *Journal of Pragmatics, 37*(10), 1717-1741.

O'Connor, J.J. ve Robertson, E.F. (2002). History topic: infinity (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Infinity.html 02.04.2013 tarihinde erişildi).

Özçelik, D.A. (2010). *Test Hazırlama Kılavuzu* (4.Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Özmantar, F.(2010). Sonsuzluk Kavramı: Tarihsel Gelişimi, Öğrenci Zorlukları ve Çözüm Önerileri. M.F. Özmantar, E. Bingölbali ve H.Akkoç (eds.). *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (ss. 151-180) İçinde, (2.Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Pehkonen, E., Hannula, M. S., Maijala, H. ve Soro, R. (2006). Infinity of numbers: How students understand it. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 345.

Petty, J. A. (1996). *The Role of Reflective Abstraction in the Conceptualization of Infinity and Infinite Processes. Yayınlanmış tez,* West Lafayette, ABD; Purdue University.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement supdrieur. *Recherches en didactique des mMathematiques*, 3(3), 307-341.

Sacristan, A. I. (1997). *Windows on the infinite: Creating meanings in a logo-based microworld. Yayınlanmış Doktora tezi, UK:* University of London, Institute of Education.

Sacristan, A. I. (2001). *Students' shifting conceptions of the infinite through computer explorations of fractals and other visual models*. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education sunulan bildiri (11-18 July, Utrech, Netherlands, ss. 4-129).

Sacristan, A. I. ve Noss, R. (2008). Computational construction as a means to coordinate representations of infinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(1), 47-70.

Sbaraglı, S., (2006). Primary school teachers' beliefs and change of beliefs on mathematical infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* 5(2), 49-76.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6(1), 5-67.

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*(4), 371-397.

Singer, M. (2002). *New ways of developing mathematical abilities*. Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education sunulan bildiri (21-26 July 2002, Norwich, UK).

Singer, M. ve Voica, C. (2003). *Perception of infinity: does it really help in problem solving*. In Proceedings of the International Conference "The Decidable and the Undecidable in Mathematical Education" sunulan bildiri (Ekim, *Brno, Czech Republic*, ss. 252-256).

Singer, M. ve Voica, C. (2007). *Children's Perceptions on Infinity: Could They be Structured?. Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education sunulan bildiri, Working Group 3-506, (*22 - 26 February, Larnaca, Cyprus, ss. 506-515).

Singer, F. M. ve Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(3), 188-205.

Tall, D. O., 1976, Conflicts and catastrophes in the learning of mathematics, *Mathematical Education for Teaching* 2(4), 2–18.

Tall, D. O. ve Schwarzenberger, R. L. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *82*, 44-49.

Tall, D. O. (1980). *Mathematical intuition, with special reference to limiting processes.* In Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education sunulan bildiri *(*16-17 August, Berkeley, California, ss. 170-176).

Tall, D. O. ve Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics, 12*(2), 151-169.

Tall, D.O. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and prof. D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (*ss. 495-511) İçinde, New York: MacMillan Publishers.

Tall, D.O. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 199-238.

Tall, D. O. ve Tirosh, D. (2001). Infinity–The never-ending struggle. *Educational studies in Mathematics*, *48*(2), 129-136.

Tall, D. O. (2004). *Thinking through three worlds of mathematics*. InProceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education sunulan bildiri (*14-18 July*, Bergen, Norway, Cilt. 4, ss. 281-288).

Tirosh, D. (1985). The intuition of infinity and its relevance for mathematics education. Yayımlanmamış Doktora Tez, İsrail: Tel Aviv Üniversitesi.

Tirosh, D. (1991). The Role of Students' Intuitions of Infinity in Teaching the Cantorian Theory. D. Tall (ed), In *Advanced mathematical thinking* (ss.199-214) İçinde. New York: Kluwer Academic Publishers.

Tirosh, D. ve P, Tsamir. (1994).). *Comparing infinite sets: intuitions and representations.* In proceedings of PME18 sunulan bildiri (29 July- 3 August, Lisbon, Portugal, Cilt 4, ss. 345-352).

Tirosh, D. ve P, Tsamir. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27(1), 33–40.

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 209–234

Tsamir, P. (2001). WhenThe Same'is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 289-307.

Tsamir, P. (2001). Intuitive Structures: The Case of Comparisons of Infinite Sets. L. Novotna (ed.), CERME 2 (24-27 February, Mariánské Lázně, Czech Republic), *European Research in Mathematics Education II* (ss. 112-121 *)* İçinde, Prague.

Tsamir, P. ve Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets—a process of abstraction: The case of Ben. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 1-23.

Tsamir, P. ve Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 213-219.

Toluk Uçar, Z. ve Olkun, S. (2009). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi* (4.Baskı). Ankara: Maya Akademi.

Türk Dil Kurumu. (2014). http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GTS.53a152e825dc56.29776694 , 10.04.2014 tarihinde erişildi).

Vinner, S. ve Kidrom, I. (1985). *The concept of repeating the non-repeating decimals at the senior high level*. In the Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education sunulan bildiri (22-29 July, Noordwijkerhout, The Netherlands, ss. 357-361).

Yıldırım, A. ve Şimşek,H. (2011). *Nitel Araştırma Yöntemleri (*8. Baskı*).*Ankara : Seçkin Yayıncılık

Waldegg, G. (2005). Bolzano‘s Approach to the Paradoxes of Infinity: Implications for *Teaching. Science & Education*, *14*(6), 559-577.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. ve Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the AMS*, *51*(7), 741-750.

EK A: Durum Tespit Testi

1. Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayınız.

2. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- **d.** Dünyada var olan bütün kitaplarda toplam ne kadar harf vardır? **Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

- **e.** Bir çöldeki kum taneciklerinin toplam sayısı ne kadardır? **Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.**

- **f.** Dünyada var olan bütün kitaplardaki toplam harf sayısı mı yoksa bir çöldeki kum taneciğinin sayısı mı daha fazladır? **Nedenleri ile açıklayınız.**

3. Aşağıda verilen ifadede noktalı yere kaç tane sayı yazılabilir? **Nasıl bulduğunuzu açıklayarak yazınız.**

3 < …..

4. Aşağıdaki soruları cevaplayınız**.**

- **e.** 0 ile 1 arasında kaç tane kesir vardır?

- **f.** Kesirlerin hepsini yazabilir misiniz? Eğer kesirlerin hepsini yazabilirseniz **nasıl bulduğunuzu açıklayarak yazınız.**

5. En büyük sayı var mıdır? Cevabınızı nedenleri ile **açıklayarak yazınız.**

6. Aşağıda verilen eşitlikler doğru mudur? **Nedenleri ile açıklayınız.**

d) **0.9999…..= 1**

e) **0.3333.....=** $\frac{1}{3}$

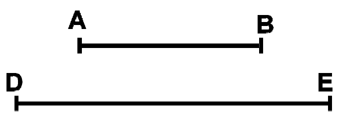
7. Aşağıda doğal sayılar ile çift doğal sayıların oluşturduğu sayı örüntüleri verilmiştir. Bu iki sayı örüntüsünü devam ettirdiğimizi düşünelim. İki sayı örüntüsünü karşılaştırdığınızda hangi sayı örüntüsündeki terim sayısı daha fazladır? **<u>Nedenleri ile açıklayınız</u>.**

Doğal Sayılar: 0,1, 2, 3, …..

Çift Doğal Sayılar: 0, 2, 4, 6, ...

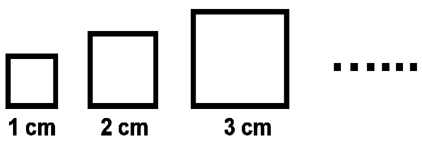
8. Bir kişi aralarında 8 km olan bir köyden diğer köye gidecektir. Bu kişi birinci gün yolun yarısını gidecektir, 2. gün ise birinci gün gittiği yolun yarısını gidecektir. Bu şekilde her gün bir önceki gün gittiği yolun yarısını giderek köye ulaşmaya çalışacaktır. Bu kişi sizce köye ulaşabilir mi? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu **<u>açıklayarak yazınız.</u>**

9. Aşağıda AB doğru parçası ile DE doğru parçası verilmiştir. Bu ifadeye göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



e) AB doğru parçasının uzunluğu ile DE doğru parçasının uzunluğunu karşılaştırınız. AB doğru parçası, DE doğru parçasından uzun mu, kısa mı, eşit midir? **<u>Nedenleri ile açıklayınız.</u>**

f) AB doğru parçası üzerindeki nokta sayısı ile DE doğru parçası üzerindeki nokta sayısını karşılaştırınız. AB doğru parçasındaki nokta sayısı, DE doğru parçasındaki nokta sayısından az mıdır, çok mudur yoksa eşit midir? **<u>Nedenleri ile açıklayınız.</u>**



10. Yukarıda kenar uzunlukları 1 cm’den başlayıp 1’er cm büyüyen kareler verilmiştir. Aşağıda ise A ve B sayı örüntüleri verilmiştir. A sayı örüntüsünün terimleri karelerin kenar uzunluklarından, B sayı örüntüsünün terimleri ise karelerin çevre uzunluklarından oluşmaktadır.

A ile B sayı örüntülerini devam ettirdiğimizde örüntülerin terim sayılarını karşılaştırınız. Hangi sayı örüntüsünün terim sayısı daha fazladır? **Nedenleri ile açıklayınız.**

A : 1, 2, 3, …..

B : 4, 8, 12, …..

11. Aşağıda [0,1] aralığındaki doğru parçası ve bir sayı örüntüsü verilmiştir. Doğru parçasındaki nokta sayısı ile sayı örüntüsündeki terim sayısını karşılaştırınız? Doğru parçasındaki nokta sayısı, sayı örüntüsündeki terim sayısından az mıdır, fazla mıdır yoksa eşit midir? **Nedenleri ile açıklayınız.**

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

EK-B: Klinik Mülakat Soruları

1. Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayınız.

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?
- Günlük hayatta sonsuz olduğunu düşündüğün şeyler var mıdır? Örnek verebilir misin?
- Matematik de sonsuza olduğunu düşündüğün şeyler var mıdır? Örnek verebilir misin?

2. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. Dünyada var olan bütün kitaplarda toplam ne kadar harf vardır? **<u>Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.</u>**

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?
- Bütün kitaplaraa ulaşabilir miyiz?

Ulaşılabilir Cevabı:

- ➢ Harf sayısının hepsini sayabilir miyiz?
- ➢ Harf sayısını saydığımızda nasıl bir sayı ile karşılaşırız?

Ulaşılamaz Cevabı:

- ➢ Farzedelim ki elimizde sürekli elektrik ile çalışan bir robot var. Bu robot harf sayısını sayabilir mi?

b. Bir çöldeki kum taneciklerinin toplam sayısı ne kadardır? **<u>Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.</u>**

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?
- Çöldeki kum taneciklerinin hepsine ulaşabilir miyiz?

Ulaşılabilir Cevabı:

- ➢ Kum taneciklerinin hepsini sayabilir miyiz?
- ➢ Kum taneciklerini saydığımızda nasıl bir sayı ile karşılaşırız?

Ulaşılamaz Cevabı:

- ➢ Farzedelim ki elimizde sürekli elektrik ile çalışan bir robot var. Bu robot kum taneciklerinin hepsini sayabilir mi?

c. Dünyada var olan bütün kitaplardaki toplam harf sayısı mı yoksa bir çöldeki kum taneciğinin sayısı mı daha fazladır? **<u>Nedenleri ile açıklayınız</u>.**

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?
- Sence dünyada var olan kitap sayısı mı yoksa çöl sayısı mı daha fazladır?
  - ➢ Fazla- Hangisinin daha fazla olduğuna nasıl karar verdin?
  - ➢ Eşit-Eşit olduğuna nasıl karar verdin?

3. Aşağıda verilen ifadede noktalı yere kaç tane sayı yazılabilir? **<u>Nasıl bulduğunuzu açıklayarak yazınız.</u>**

3 < …..

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?
- Bu sayıların hepsini yazabilir miyiz?

5. En büyük sayı var mıdır? Cevabınızı nedenleri ile **<u>açıklayarak yazınız.</u>**

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?
- Daha önce en büyük sayı hakkında düşünmüş müydün?
- Sen bu sayıyı bulabilir misin?

4. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. 0 ile 1 arasında kaç tane kesir vardır?

b. Kesirlerin hepsini yazabilir misiniz? Eğer kesirlerin hepsini yazabilirseniz **nasıl yazdığınızı açıklayarak gösteriniz.**

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?
- 0 ile 1 arasında düşündüğün kesirlerden başka kesir var mıdır?
- 0 ile 1 arasına kaç tane kesir vardır?
- Bu kesirlerin hepsini yazabilir miyiz?

6. Aşağıda verilen eşitlikler doğru mudur? Nedenleri ile açıklayınız.

a. 0.9999…..= 1

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?

Eşit değildir cevabı:

- ➢ Neden eşit olmadığını düşünüyorsun?
- ➢ Bu iki sayı arasında ne kadar fark vardır?
- ➢ Hangisinin daha büyük olduğunu düşünüyorsun?
- ➢ İki sayıyı eşitlemek için ne yapabiliriz?

b. 0.3333.....= $\frac{1}{3}$

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?

Eşit değildir cevabı:

- ➢ Neden eşit olmadığını düşünüyorsun?
- ➢ Bu iki sayı arasında ne kadar fark vardır?
- ➢ Hangisinin daha büyük olduğunu düşünüyorsun?
- ➢ İki sayıyı eşitlemek için ne yapabiliriz?

- $\frac{1}{3}$ = 0.3333..... olsaydı ne düşünürdün**?**

8. Bir kişi aralarında 8 km olan bir köyden diğer köye gidecektir. Bu kişi birinci gün yolun yarısını gidecektir, 2. gün ise birinci gün gittiği yolun yarısını gidecektir. Bu şekilde her gün bir önceki gün gittiği yolun yarısını giderek köye ulaşmaya çalışacaktır. Bu kişi sizce köye ulaşabilir mi? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu **açıklayarak yazınız.**

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?

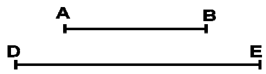
Ulaşılır Cevabı için;

- Kişi köye kaç günde ulaşabilir?
- Sınırlı bir zamanda köye ulaşabilir mi?
- Bu işlemleri ne zamana kadar devam ettirebilirsin?

Ulaşılamaz Cevabı için;

- Sence bu kişi bu köye neden ulaşamaz bunu biraz daha açabilir misin?
- Yeterli zaman verilseydi kişi köye ulaşabilir miydi?

9. Aşağıda AB doğru parçası ile DE doğru parçası verilmiştir. Bu ifadeye göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



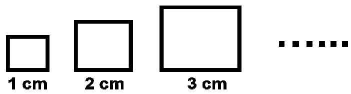
a. AB doğru parçası üzerindeki nokta sayısı ile DE doğru parçası üzerindeki nokta sayısını karşılaştırınız. AB doğru parçasındaki nokta sayısı, DE doğru parçasındaki nokta sayısından az mıdır, çok mudur yoksa eşit midir? **Nedenleri ile açıklayınız.**

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?
- Doğru parçalarındaki noktaların sayısını bulabilir miyiz? Örneğin AB doğru parçasında kaç tane nokta olabilir?

Sonsuz nokta vardır diyenler için;

- Sonsuz sayıda nokta ile ne demek istedin?
- AB doğru parçasındaki sonsuz sayıdaki nokta ile DE doğru parçasındaki sonsuz sayıda nokta aynı şey midir?

- Doğru parçalarındaki noktalar arasında bir fark var mıdır? Varsa sence nasıl bir fark vardır?



10. Yukarıda kenar uzunlukları 1 cm’den başlayıp 1’er cm büyüyen kareler verilmiştir. Aşağıda ise A ve B sayı örüntüleri verilmiştir. A sayı örüntüsünün terimleri karelerin kenar uzunluklarından, B sayı örüntüsünün terimleri ise karelerin çevre uzunluklarından oluşmaktadır. A ile B sayı örüntülerini devam ettirdiğimizde örüntülerin terim sayılarını karşılaştırınız. Hangi sayı örüntüsünün terim sayısı daha fazladır? **<u>Nedenleri ile açıklayınız</u>.**

A : 1, 2, 3, …..

B : 4, 8, 12, ….

- Bu cevabını biraz daha açabilir misin? Burada ne demek istedin?
- Sayı örüntülerinin terim sayılarını nasıl karşılaştırdın?
- B sayı örüntüsüne bir sayı daha eklemiş olsaydım eşit olur muydu?

12. Aşağıda [0,1] aralığındaki doğru parçası ve bir sayı örüntüsü verilmiştir. Doğru parçasındaki nokta sayısı ile sayı örüntüsündeki terim sayısını karşılaştırınız? Doğru parçasındaki nokta sayısı, sayı örüntüsündeki terim sayısından az mıdır, fazla mıdır yoksa eşit midir? **<u>Nedenleri ile açıklayınız.</u>**

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

- B sayı örüntüsüne bir sayı daha eklemiş olsaydım eşit olur muydu?
- Sayı örüntüsü ile doğru parçalarını karşılaştırırken kullandığın bir yöntem var mıydı?

Terim sayısı ile nokta sayısı eşit diyenler için;

> - Doğru parçası sınırlı, sayı örüntüsü ise devam ediyor bu konuda ne düşünüyorsun?
> - Sayı örüntüsündeki her bir sayı için doğru parçası üzerinde bir nokta bulabilir miyiz?

İkisi de sonsuz diyenler için;

- Sınırlı bir bölge (doğru parçası) için de sonsuzluktan bahsedebilir miyiz?
- Doğru parçası sınırlı, sayı örüntüsü ise devam ediyor bu konuda ne düşünüyorsun?
- Doğru parçasındaki sonsuzluk ile sayı örüntüsündeki sonsuzluk aynı şey mi?

EK-C: Araştırma İzin Belgesi

T.C.
KOCAELİ VALİLİĞİ
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

SAYI : 99332089/100.01.01
KONU : Araştırma İzni

13.03.2013* 06523

VALİLİK MAKAMINA
KOCAELİ

İlgi: Millî Eğitim Bakanlığına Bağlı Okul ve Kurumlarda Yapılacak Araştırma ve Araştırma Desteğine Yönelik İzin Ve Uygulama Yönergesi.

Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümüm Öğretim Eşemanlarından Araştırma Görevlisi Figen BOZKUŞ 'un, "İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Sonsuzluk Kavramı İle İlgili Sezgisel Algılarının Araştırılması" konulu araştırma çalışmasını İlimiz İzmit İlçesine bağlı Ortaokullarında uygulama talebi, ilgili Üniversitenin 19/02/ 2013 tarih ve 804.01.42/ 672 sayılı yazıları ile bildirilmektedir.

Adı geçenin söz konusu çalışmasına esas olmak üzere, ekte sunulan çalışmayı İlimiz İzmit İlçesi Orta Okullarında uygulama talebi komisyonumuzca uygun görülmüş olup, Müdürlüğümüzce de uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde olurlarınıza arz ederim.

Nevzat İSPİRLİ
İl Millî Eğitim Müdürü

OLUR
13/03/2013

Ali SÖZEN
Vali a.
Vali Yardımcısı

EK-D: Araştırma yapılan okulların SBS sonuçlarına göre okul sıralaması

YILLARA GÖRE SEVİYE BELİRLEME SINAVI SBS-8 SINAV SONUÇLARINA GÖRE OKUL SIRALAMASI

YIL: 2013

İL SIRASI	İLÇE ADI	OKUL ADI	SBS-8
16	İZMİT	TÜRKAN DERELİ ORTAOKULU	474,819
59	İZMİT	HIZIR REİS ORTAOKULU	412,258
135	İZMİT	TÜRK PİRELLİ ORTAOKULU	379,541

YIL: 2012

İL SIRASI	İLÇE ADI	OKUL ADI	SBS-8
38	İZMİT	HIZIR REİS İLKÖĞRETİM OKULU	351,210
58	İZMİT	TÜRKAN DERELİ İLKÖĞRETİM OKULU	340,838
181	İZMİT	TÜRK PİRELLİ İLKÖĞRETİM OKULU	304,883

YIL: 2011

İL SIRASI	İLÇE ADI	OKUL ADI	SBS-8
20	İZMİT	TÜRKAN DERELİ İLKÖĞRETİM OKULU	369,280
86	İZMİT	HIZIR REİS İLKÖĞRETİM OKULU	312,653
200	İZMİT	TÜRK PİRELLİ İLKÖĞRETİM OKULU	281,694

25.02.2013

DİLAVER DÖRTOK

KOCAELİ MEBBİS YÖNETİCİSİ