T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

TEKNOLOJİ DESTEKLİ LİNEER CEBİR ÖĞRETİMİNİN İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ UZAMSAL YETENEKLERİNE ETKİSİ

Melih TURĞUT

İzmir
2010

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

TEKNOLOJİ DESTEKLİ LİNEER CEBİR ÖĞRETİMİNİN İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ UZAMSAL YETENEKLERİNE ETKİSİ

Melih TURĞUT

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Süha YILMAZ

İzmir
2010

YEMİN

Doktora tezi olarak sunduğum 'Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretiminin İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Uzamsal Yeteneklerine Etkisi' adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin Kaynak Dizini'nde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

10/06/2010

Melih Turğut

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından........İlköğretim..............................
.... Anabilim Dalı
Matematik..........Öğretmenliği......................... Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Yrd.Doç.Dr. Süha YILMAZ....................................

Üye :Prof.Dr. SNUR NİZAMOĞLU....................................

Üye :Doç.Dr. ELİF TÜRNÜKLÜ....................................

Üye :Yrd.Doç.Dr. EMİN ÖZYILMAZ....................................

Üye :Yrd.Doç.Dr. SİBEL YEŞİLDERE....................................

Onay
Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

11/06/2010

Prof. Dr. h. c. İbrahim ATALAY
Enstitü Müdürü

YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU DÖKÜMANTASYON MERKEZİ
TEZ VERİ FORMU

Tez No: **Konu Kodu:** **Üniv.Kodu:**

• **Not: Bu bölüm merkezimiz tarafından doldurulacaktır.**

Tez Yazarının

Soyadı: TURĞUT **Adı:** Melih

Tezin Türkçe adı: Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretiminin İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Uzamsal Yeteneklerine Etkisi

Tezin yabancı dildeki adı: The Effect of Technology Assisted Linear Algebra Instruction on Pre-Service Primary Mathematics Teachers' Spatial Ability

Tezin yapıldığı

Üniversite: DOKUZ EYLÜL **Enstitü:** EĞİTİM BİLİMLERİ **Yılı:** 2010

Diğer kuruluşlar

Tezin türü: **1- Yüksek Lisans** **Dili: Türkçe**

2- Doktora X **Sayfa sayısı: 262**

3- Sanatta Yeterlilik **Referans sayısı : 135**

Tez Danışmanlarının

Ünvanı: Yrd. Doç. Dr. **Adı: Süha** **Soyadı: YILMAZ**

Türkçe anahtar kelimeler:

1- Lineer Cebir Öğretimi
2- Uzamsal Yetenek
3- Teknoloji Destekli Eğitim
4- Geometrik Düşünme Düzeyi
5- Öğretmen Adayı

İngilizce anahtar kelimeler:

1- Linear Algebra Teaching
2- Spatial Ability
3- Technology Assisted Instruction
4- Geometrical Thinking Level
5- Pre-Service Teacher

TEŞEKKÜR

Üniversite birinci sınıftayken analiz problemlerime yardımcı olan araştırma görevlisinin ileride doktora hocam olacağı hiç aklıma gelmezdi. Dokuz yıl boyunca her zaman desteğini gördüğüm, üzerimde çok emeği olan tez danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Süha Yılmaz'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmanın uygulama sürecinde engin bilgi ve tecrübesini bizlerle her zaman paylaşan, yönlendiren sayın hocam Prof. Dr. Şuur Nizamoğlu'na ve araştırmanın metodolojisini oluştururken değerli bilgilerinden yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Elif Türnüklü'ye teşekkür ederim.

Yüksek lisans ve doktora çalışmalarım esnasında beni maddi olarak destekleyerek birçok bilimsel etkinliğe katılmamı ve birçok araştırmaya imza atmamı sağlayan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Dairesi Başkanlığı'na teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmayı, bu dünyadaki sahip olunan en önemli varlığın aile olduğunu bana her zaman hissettiren başta anne ve babam Emine ve İbrahim Turgut olmak üzere aileme ithaf ediyorum.

Melih Turğut

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

ÖZET

Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretiminin İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Uzamsal Yeteneklerine Etkisi

Melih TURĞUT

Bu çalışma, deneysel ve betimsel olmak üzere iki ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümün amacı teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerine, geometrik düşünme düzeylerine ve başarılarına etkisini araştırmaktır. İkinci bölümün amacı ise ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri, geometrik düşünme düzeyleri, cinsiyet, lineer cebir başarısı ve akademik başarı arasındaki ilişkiyi incelemektir.

Deneysel araştırma ön test-son test kontrol gruplu deneme modeline göre tasarlanmış ve Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi'nde öğrenim görmekte olan 85 ilköğretim matematik öğretmen adayı üzerinde gerçekleştirilmiştir. Deney grubunda teknoloji destekli lineer cebir öğretimi, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yapılmıştır. Araştırmanın betimsel kısmı ise ilişkisel tarama modelinde olup aynı bölümde öğrenim görmekte olan 193 ilköğretim matematik öğretmen adayı üzerinde gerçekleştirilmiştir.

Çalışmada, uzamsal yetenek testi, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testi, lineer cebir testi ve lineer cebir ile ilgili açık uçlu problemler olmak üzere toplam dört ölçme aracı kullanılmıştır.

Araştırmadan elde edilen verilerin analizinde, Shapiro-Wilks ve Kolmogorov-Smirnov homojenlik testi, Mann-Whitney U testi, Wilcoxon işaretli sıralar testi, Pearson korelasyon katsayısı ve ortalama kullanılmıştır.

Deneysel araştırmanın sonuçlarına göre, teknoloji destekli lineer cebir öğretimi yapılan deney grubu öğrencilerinin uzamsal test ve lineer cebir testi ortalama puanlarıyla, kontrol grubu öğrencilerinin puanları arasında deney grubu lehine anlamlı farklar bulunmuştur. Buna rağmen, iki grubun geometrik düşünme düzeyleri arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır.

Betimsel araştırmanın sonuçlarına göre, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri ile, cinsiyetleri ve geometrik düşünme düzeyleri arasında anlamlı bir fark yokken, uzamsal yetenekle lineer cebir başarısı ve akademik başarı arasında orta düzeyde pozitif ilişkilere rastlanmıştır. Ayrıca, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeyleri ile cinsiyet, lineer cebir başarısı ve akademik başarı arasında da anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Bunun yanında, öğretmen adaylarının uzamsal görselleştirme yetenekleri ile uzamsal yönelim yetenekleri arasında orta düzeyde pozitif bir ilişki görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Lineer Cebir Öğretimi, Teknoloji Destekli Eğitim, Uzamsal Düşünme, Uzamsal Görselleştirme, Uzamsal Yönelim, Geometrik Düşünme Düzeyleri, Öğretmen Adayı.

ABSTRACT

The Effect of Technology Assisted Linear Algebra Instruction on Pre-Service Primary Mathematics Teachers' Spatial Ability

Melih TURĞUT

This work consists of two main parts: the first is an experimental study and the second is a descriptive study.

The aim of the first part is to investigate the effect of technology assisted linear algebra instruction on pre-service primary mathematics teachers' spatial ability, geometric thinking levels and linear algebra achievement. The descriptive part of the study aims to determine relationships among pre-service primary mathematics teachers' spatial ability, geometric thinking level, gender, linear algebra achievement and their academic success.

Pretest-post test control group experimental design was used and the study was conducted with 85 pre-service primary mathematics teachers of Buca Educational Faculty of Dokuz Eylül University. Technology assisted linear algebra instruction was used in the experiment group and the traditional teaching method was used in the control group. The descriptive study was conducted on 193 pre-service primary mathematics teachers of the same faculty.

In the work, four measuring instruments were utilized: spatial ability test, geometric thinking level test, linear algebra test and open-ended problems for linear algebra.

In order to analyze the obtained data, Shapiro-Wilks and Kolmogorov-Smirnov homogeneity tests, Mann-Whitney U test, Wilcoxon signed rank test, Pearson product moment correlation and mean were used.

The results of the experimental study indicated that, average scores of spatial ability test and linear algebra test of the experiment group were significantly higher then those of the control group. However, there is no significant difference between the experiment and control groups with respect to geometric thinking levels.

According to the second part's results, although there is no significantly difference between spatial ability and gender; spatial ability and geometric thinking levels, linear algebra achievement and academic success are positively correlated to spatial ability. Besides, there is also no significantly difference between geometric thinking levels and linear algebra achievement and geometric thinking levels and academic success. Additionally, it has been observed that pre-service teachers' spatial visualization ability and spatial orientation ability are positively correlated.

Key Words: Linear Algebra Instruction, Technology Assisted Instruction, Spatial Thinking, Spatial Visualization, Spatial Orientation, Geometric Thinking Levels, Pre-Service Teacher.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Tarihsel bulgulara bakıldığında ilk yapılan öğretim şeklinin düz anlatım şeklinde; yani öğretmenin açıklayan ve anlatan, öğrencinin dinleyici konumunda olduğu görülmektedir. Bu sürecin değerlendirilmesi sonucu öğrencilerin başarısızlığı çalışmamalarına bağlanmış, öğrencinin nasıl öğrendiği konusu hep ikinci planda kalmıştır. Buna rağmen adı geçen süreç, felsefenin yani bilginin nasıl oluştuğunun irdelendiği dönemdir. Bilginin ve buna bağlı olarak öğrenmenin nasıl gerçekleştiği sorgulanırken öğretim sürecinde herhangi bir değişiklik yapılmamış ve bireylerin öğrenmelerindeki farklılıklar yirminci yüzyılın başına kadar göz ardı edilmiştir.

Yirminci yüzyılın başından itibaren öğrenmenin bireyin yaşantısının bir sentezi olduğu ve bu süreçte gerçekleşen bilişsel işlemlerin önemli olduğu gerçeği ortaya çıkmıştır. Aksi takdirde doğrudan alınan bilgilerin içselleşmesi ve gerçek hayat problemlerinin çözümünde kullanılması pek de mümkün olmamaktadır. Bunun yanında bireyin öğrendiğini kullanabilme becerisi ve bunlardan yeni bilgi ya da ürün çıkarabilmesi eğitimin temel amacıdır. Bu sürecin sonunda öğrencinin gerçek dünya problemlerinin çözümünde etkin bir rol üstlenmesi beklenmektedir. Bilginin oluşturulmasının amaçlandığı bu yaklaşıma genel olarak “Yapılandırmacılık” denilmektedir.

Yapılandırmacılık çatısı altında yapılan eğitim araştırmaları ders içeriğinden önce öğrenene odaklanmış, bireyin nasıl öğrendiği sorusu üzerine konular şekillendirilmeye başlanmıştır. Bu perspektif matematik eğitimcilerini sancılı bir sürece itmiştir. Çünkü matematiksel kavramların yapılandırılması oldukça güçtür ve yeri geldiğinde öğrencinin tüm bilişsel becerilerini sorgulamaktadır. Biraz da matematik eğitiminin etkisi ve bireylerde kavramların nasıl ne zaman geliştiği sorusunun gündeme gelmesiyle Jean Piaget'in bilişsel kuramı çok ilgi görmüş ve bu çatı altında matematik eğitimi araştırmaları büyük bir ivme kazanmıştır. Bu ivmeyle matematik eğitimi araştırmaları 1970'li yılların ardından büyük bir ilerleme kaydetmiştir. Günümüze kadar konu olarak ilköğretim düzeyinde bir yığılma olduğu görülmektedir, örneğin Fischbein (1975); Krutetskii (1976); Rosnik ve Clement (1980). Bunun sebebi, bireylerin yaşlarının ilerledikçe öğrenmelerin karmaşıklaşması ve zor hale gelmesi olabilir. Bunun yanında "öğrenme" sürecine ilişkin ilk yapılan çalışmaların genellikle çocukların gelişimi ve öğrenmeleriyle ilgili olmaları anılan yığılmaya bir gerekçe olarak gösterilebilir. Son yıllarda ise ileri seviyedeki derslerin öğretimine yönelik çalışmalar artmaya başlamıştır. İlk olarak da analiz (kalkulüs) konularının öğretimi üzerinde durulmuştur. Konu ile ilgili alanyazında oldukça fazla çalışma görülmektedir. Örneğin, Dubinsky (1986), Harbe ve Abboud (2006), Sierpinska (1987), Tall (1986). Son onbeş yıldır ise fen, matematik ve mühendislik öğretim programlarında analiz dersinden sonra ikinci temel ders olarak yer alan lineer cebir öğretimine yönelik araştırmalar ele alınmaya başlamıştır.

Lineer cebir ifadesinin kullanımı yirminci yüzyılın ortalarına dayansa da, bu ifadeye ait ilk temeller matris gösterimini kullanan ve geliştiren İngiliz matematikçiler Arthur Cayley, William Hamilton ve James Joseph Sylvester tarafından atılmıştır. Daha sonra, Josiah Willard Gibbs'in vektörel çarpımı tanımlarken 3x3 formatında bir determinantı kullanması, determinantlara büyük ve önemli bir anlam yüklenmesini sağlamıştır. Ardından yapılan çalışmalar ve yeni yeni gelişen vektörel analizin gerçek hayat problemlerine uygulanmaya başlamasıyla konu ile ilgili araştırmalar önemli bir ivme kazanmıştır. Geometri ile matrisler arasında sıkı bir bütünleşme kurulmuş ve bu ikili mekanik gibi konularda pratik çözümler sağlaması bakımından araştırmacıların en önem verdiği alanlardan biri haline gelmiştir. Örneğin, Maxwell denklemleri bu etkileşimin ve ilerlemenin en güzel sentezlerinden birisidir.

Yirminci yüzyılın ortalarına doğru formalizm akımı matematikçileri etkilemiş ve matematiksel kavramlarının yapısı irdelenmeye başlamıştır. Peki, bu formalizm akımı nedir? Neden matematikçileri çok etkilemiştir? Aydın (2009a:98), bu yaklaşımı "Bir formalist matematiği kesin bir ispat bilimi olarak tanımlar. Matematikte elinizde ya ispat vardır ya da bir şey yoktur" şeklinde açıklamıştır.

Formalist akım aksiyomatik yapıyı benimser, bu yaklaşıma göre her şey kanıtlanmalı ve en genel formda olmalıdır. Bu açıdan vektör kavramının en genel hali gerekli hale gelmiştir. Çünkü yapılacak genelleştirme ve ispatlar her zaman en genel halde olmalıdır. Dolayısıyla, bu süreçte vektör uzayı kavramı fazlaca kabul görmüş ve buna ardıl olarak lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, taban (baz), rank ve boyut kavramları olmuştur. Bu sürecin devamı olarak da **n** boyutlu uzaya ait genelleştirilmeler, soyut vektör uzayı kavramlarının varlığı ve afin uzay kavramları –günümüz öğretim programlarında yer aldığı gibi- yer yer şekillenmeye başlamıştır. İçeriği gereği soyut kavramlar barındıran bu dersin öğretiminde fazlasıyla sıkıntı yaşanmaktadır ve öğrencilerin başarısının oldukça düşük seviyede olduğu hakkında araştırmacıların hemfikir oldukları görülmektedir (Aydın, 2007; Dikovic, 2007; Dorier, 2002; Wu, 2004). Araştırmacılar bu konuya odaklanmış ve iyi bir öğretim için neler yapılması gerektiğini irdelemişlerdir.

Aydın (2009a:93) lineer cebir öğretimine yönelik yapılan araştırmaları aşağıdaki gibi üç aşamaya ayırmıştır.

1. Öğrencilerin öğrenme zorluklarının bazı sebeplerini ortaya çıkarmak ve yeni programlar geliştirmek için yapılan tarihsel incelemeler;
2. Lineer cebirde geometri kullanımını dengelemeyi amaçlayan ve lineer cebrin formal yapısı gibi konular üzerinde yapılan bilişsel esneklik (cognitive flexibility) araştırmaları;

3. Yazılım programları ile yapılan lineer cebir öğretiminin değerlendirilmesi.

Birinci ve ikinci gruptaki araştırma sonuçlarına göre, dersi veren öğretim elemanlarının karşılaştıkları sorunların en başında “soyut kavramların öğretimi” ve “genelleştirme yapabilme” gelmektedir. Alanyazında, bu probleme “formalizm sorunu” adı verilmektedir. Araştırmacılar, öğrencilerin çıkarsamalarının geometrik kavramlarla sınırlı olduğunu, yüksek boyutlu uzaylar ve soyut vektör uzayı kavramlarının anlaşılmadığını belirtmişlerdir (Aydın, 2007:215; Dorier, 2002:875). Bu bulgular, lineer cebir öğretmenlerini fazlasıyla etkilemiş ve lineer cebir dersinde geometrinin kullanımına dikkat edilmesi gerçeği ortaya çıkmıştır. Çünkü lineer cebir ve geometri birbiriyle sıkı bir ilişki içerisindedir. Örneğin, herhangi bir lineer cebir kitabında, lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık konuları anlatılırken ilk olarak, sırasıyla, doğru üzerindeki iki vektörün lineer bağımlılığı ve buradan yola çıkılarak düzlem üzerindeki üç vektörün lineer bağımlı olduğu gibi örnekler verilmektedir (bkz. Anton, 1981; Kolman ve Hill, 2002). Daha sonra, n-boyutlu uzaya genelleştirme ve soyut vektör uzaylarına (polinomlar, sürekli fonksiyonlar vs) ait örnekler sunulmaktadır. Adı geçen soyut kavramlara geçişte geometri ayrı ve önemli bir yere sahiptir. Üç boyutlu uzaya ait doğrular ve düzlemler reel vektör uzayı kavramının anlaşılmasında büyük rol oynamaktadır. Bu somut kavramların inşasının ardından soyut vektör uzayı kavramlarına geçilmektedir. Bu bağlamda sezgisel olarak geometrik düşünme düzeyi ile lineer cebir arasında bir ilişki olup olmadığı sorusu akla gelebilir.

Lineer cebir dersinin içeriğindeki iki ve üç boyutlu uzay kavramları somut düşünmeden soyut düşünmeye geçiş sürecinde önemli bir araç olmaktadır. Somut kavramların anlaşılmasındaki yaşanan sıkıntılar şüphesiz soyut kavramların içselleşmesine engel olacaktır. Bu açıdan bakıldığında lineer cebrin uzamsal düşünmeyle de ilişkili olabileceği sorusu akla gelmektedir. Çünkü uzamsal düşünme, üç boyutlu uzayda bir ya da daha çok parçadan oluşan cisimleri ve bileşenlerini zihinde hareket ettirilebilme veya zihinde canlandırabilme yeteneğidir (Turğut, 2007).

Bu araştırmada genel olarak, lineer cebir, uzamsal düşünme ve Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasındaki ilişki üzerinde durulmuştur. Çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde öğrencilerin, lineer cebir başarıları, geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal yeteneklerinin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaca en uygun öğretim aracının teknoloji desteği olacağı düşünülmüştür. Özet olarak "lineer cebir dersi içerisinde yer alan geometrik gösterimlerin, teknoloji desteğiyle ön plana çıkarılması öğrencilerin başarısını, geometrik düşünme düzeylerini ve uzamsal yeteneklerini etkileyecek midir?" sorusu araştırmanın ana problemi konumundadır. İkinci bölümde, uzamsal yetenek ile lineer cebir başarısı, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri, cinsiyet ve akademik başarı arasındaki ilişki incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde araştırmanın konusundan ve konunun alanyazındaki işlenişinden bahsedilmektedir. Ayrıca araştırmanın genel hatları; problem durumu, araştırmanın amacı ve önemi, problem cümlesi ve alt problemler, sayıltılar, sınırlılıklar ve tezde adı geçen tanımlamalar ve yapılan kısaltmalar verilmiştir.

İkinci bölümde, araştırma ile ilgili yayın ve araştırmalar yer almaktadır. Öncelikle lineer cebir öğretimi ile ilgili kuramsal bilgiler, uzamsal yetenek ve bu yeteneğe etki eden faktörler, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri, teknoloji destekli lineer cebir öğretimi ve lineer cebir öğretimi, uzamsal düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri bütünlemesi açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde araştırmanın yöntemi yer almaktadır. Araştırma deseni, evren ve örneklem, veri toplama araç ve yöntemleri, veri toplama araçlarının geliştirilme süreci, prosedür, araştırmanın geçerliği, güvenirliği ve veri çözümleme teknikleri belirtilmiştir.

Dördüncü bölümde araştırmanın bulguları ve yorumları yer almaktadır. Bulgular ve yorumlar deneysel kısım ve betimsel kısım olmak üzere iki ana bölümden oluşmaktadır.

Beşinci bölümde, araştırma bulgularının değerlendirilmesi yapılarak önceki yapılan araştırma sonuçlarıyla karşılaştırmalar, genellemeler yapılmıştır. Bunun yanında alana katkı sağlayacak çalışmalar için öneriler yapılmıştır.

1.1. Problem Durumu

Matematik öğretimindeki en kritik nokta, içeriğindeki kavramların sıralanışıdır. Yapısı gereği hiyerarşik olan matematiğin eğitimi sürecinde öğretim programları en önemli referanslardan birisidir. Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi [NCTM] (2000:280)'ne göre bütün matematik programları öğrencilerin;

- yaratma ve organize etme için gösterimler kullanma, kaydetme ve matematiksel fikirlerini iletme,
- seçme, uygulama ve matematiksel gösterimleri problem çözmede kullanma,
- model için, gösterimler (simgelemeler) yapma ve fiziksel, sosyal ve matematiksel doğayı yorumlama

becerilerini geliştirecek şekilde düzenlenmelidir.

Bu amaçlar incelendiğinde görselleştirmeye odaklanıldığı, öğrencilerin bu becerilerinin gelişmesine önem verildiği görülmektedir. Diğer taraftan bu beceriler gerçek dünya problemlerinin çözümü için çok önemli olup sorunu belirleme ve organize bir yol belirleme ve çözüm adımlarını seçmede de karşımıza çıkmaktadır. Gösterimler yapma ve modeller oluşturma becerisi görselleştirme adı altında toplanabilir. Görselleştirme ise uzamsal yeteneğin bir alt bileşenini oluşturmaktadır.

Alanyazında genel olarak uzamsal yetenekle matematiksel başarısı arasında pozitif ilişkiler saptanmıştır (McGee, 1979; Battista, 1990; Fennema ve Sherman, 1977; Turğut, 2007). Bunun yanında 1950 lilerin başından bilgisayar kullanımı artana kadar genellikle mimarlık, mühendislik (teknik çizimde), eğitim ve psikoloji alanlarında uzamsal yeteneği neyin etkilediği araştırılmıştır (Battista ve Clements, 1996; Bishop, 1980; Orde, 1996; Werthessen, 1999). Gene birçok çalışmada ise, cinsiyet faktörü, bilgisayar kullanma seviyesi göz önünde tutularak araştırmacılar bu konuyu ele almışlardır (Phunlapthawee, 2000; Smyser, 1994). Tüm bu araştırmaların temel odak noktası uzamsal yeteneğin geliştirilebileceği konusu olmuştur ve birçok çalışmada uygun araç ve etkinlikler (genellikle bilgisayar) kullanılarak geliştirilebileceği saptanmıştır (Lee, 2005; Smyser, 1994; Idris, 1998; July, 2001). İlköğretim matematik öğretmen adayları için bu yeteneğin önemli olduğu düşünülmüştür. Öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin geliştirmede teknoloji destekli lineer cebir öğretimi bir araç olabilecek midir? Öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri nelerle ilişkilidir?

Van Hiele (1986) teorisine göre öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri beş ayrı seviyeden oluşmaktadır ve yetişkinlerin ve bilhassa da matematik öğretmenlerinin en üst seviyede olması gerekmektedir. Konu ile ilgili son bulgular arasında matematik öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerinin beklenenden düşük seviyede olduğu gözlemlenmiştir (Duatepe, 2000; Durmuş, Toluk ve Olkun, 2002; Yılmaz et. al. 2008). Bunun yanında, çalışmakta olan öğretmenlerin de geometrik düşünme düzeylerinin en üst seviyede yığılmadıkları gözlenmiştir (Halat, 2008a). Sonuçlara göre öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin geometrik düşünme düzeyleri lise seviyesine karşılık gelmektedir. Bu bulgular aday olan ya da çalışmakta olan öğretmenlerin geometrik düşünme düzeylerinin üniversite öğrenimi boyunca gelişip gelişmediği belirsizliğini de ortaya çıkarmıştır. Örneğin lineer cebir dersi öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerini geliştirmekte midir? Teknoloji destekli lineer cebir öğretimi öğrencilerin bu becerilerini geliştirecek midir? Öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerinin ilişkili olduğu faktörler nelerdir?

Diğer taraftan, yabancı araştırmacıların lineer cebir öğretimi ile ilgili çalışmalara liderlik ettiği görülmektedir, örneğin Dorier (2000), Gueudet-Chartier (2004), Harel (2000), Sierpinska (2000). Bu çalışmaların, kimi zaman birbirine paralel olan kuramsal bilgiler ortaya koymakla beraber örnek olay çalışmalarının sonuçları şeklinde oldukları gözlenmiştir. Araştırmacıların, teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin başarılarına katkı sağlayacağı konusunda hemfikir oldukları görülmektedir (Aydın, 2007; Aydın, 2008; Aydın, 2009a; Aydın, 2009b; Dorier, 2002; Harel, 2000; Pecuch-Herrero, 2000). Bunun yanında, ulaşılabilinen alanyazında, lineer cebir öğretimi, uzamsal yetenek ve geometrik düşünme düzeyleri bütünleşmesini kuran bir araştırmaya rastlanmamıştır. İlgili alanyazın ışığında, yukarıdaki problemlerin ve adı geçen bütünleşmenin matematik öğrenme ve öğretmede önemliliği düşünülerek bu çalışma gerçekleştirilmiştir.

1.2. Amaç ve Önem

Matematiksel yetenek alan örüntüleri ve sayıları algılama yeteneği ile bu tür örüntülerin saklanmasını içermektedir (Kurt, 2002:121). Bu nitelikleriyle matematiksel yetenek saklama boyutuyla ele alındığında, uzamsal yeteneğin yani geri çağırma, akılda canlandırma ve görselleştirme yeteneklerinin matematik öğrenilmesi için mutlaka gerekli olduğu söylenebilir (Turğut, 2007:6). Clements ve Battista (1992) uzamsal düşünmenin bilimsel düşünüş için gerekli olduğunu ve birçok bilgiyi öğrenmede ve problem çözmede görsel araç olarak kullanılabileceğini vurgulamıştır. Bunun yanında Lohman (1993) ise uzamsal yeteneğin tüm insan yetenekleri içerisinde en önemli yapılardan birisi olduğunu vurgulamıştır. Bu yeteneğinin gelişiminin önemli olduğu düşünülmektedir. Çünkü her yanı üç boyutlu cisimlerle donatılmış dünyada yaşayan bir birey için, objelerin yer değiştirmesini, yeniden yapılandırılmasını algılama, kavrama becerilerinin önemli olduğu, günümüz teknolojisinin ilgi odağı olan benzetim yoluyla öğretim gibi birçok alanla ilişkili olduğu bilinmektedir. Bu becerilerin, uzamsal yeteneğin gelişmesiyle daha etkili hale geleceği, bireyin gösterimler kullanarak gerçek hayat problemlerine etkin çözümler getireceği düşünülmektedir. Bu amaçla hızla gelişen teknolojiden yararlanılabilinmektedir. Bu amaçla birçok bilgisayar programı hazırlanmış ve kullanılmıştır. Bu programların en temel amacı bireyde görselleştirmeyi sağlamak, bireyin geri çağırma ve bütünsel özümsemeler oluşturmasına yardımcı olmaktır. Teknolojik öğrenme ortamları bireyin daha fazla duyu organına ve bilhassa da görsel algısına hitap ettiğinden akılda daha kalıcı olmasını sağlamaktadır ve uzamsal yeteneğe etki ettiği sezgisel olarak düşünülebilir. Bu nedenle teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin, öğrenenlerin uzamsal yeteneklerine etkisini belirlemenin önemli olduğu düşünülmektedir.

Lineer cebir ele alındığı zaman uzamsal yeteneğin gösterimler ve üç boyutlu uzayın kullanımıyla doğrudan ilişkili olduğu görülmektedir. Uzamsal yeteneği yüksek olan öğrencinin geometrik kavramları daha kolay öğreneceği düşünülmektedir. Bu bağlamda, uzamsal yetenekle ilişkili olan faktörlerin de incelenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Lineer cebir öğretimi açısından bakıldığı zaman ise yapısı gereği, soyut kavramlar içeren bu dersin matematiksel düşünme için gerekli olduğu ve bir sonraki derslere öğrencileri hazırladığı bilinmektedir.

Diğer taraftan, ülkemizin genellikle problem çözme ve geometrik ilişkilerle donatılmış sorulardan oluşan TIMMS (1999)'deki başarısızlığı öğretmen ve öğretmen adaylarının Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin düşük olması ya da bu kavrama önem vermemeleri ile ilişkili olabilir. Öğrencilerin bu becerilerinin gelişiminin ve incelenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir.

1.3. Problem Cümlesi

Teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerine, başarılarına ve Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine etkisi nedir ve uzamsal yetenekle, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri, lineer cebir başarısı, cinsiyet ve akademik başarı ilişkili midir?

1.4. Alt Problemler

Araştırmanın alt problemleri aşağıda belirtilmektedir:

1. Teknoloji destekli lineer cebir öğretimi yapılan deney ve geleneksel öğretim yapılan kontrol grubundaki öğrencilerin:

a. Uzamsal yetenek testi son test puan ortalamaları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

b. Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ortalamaları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

c. Lineer cebir testi ortalamaları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

2. Teknoloji destekli lineer cebir öğretimi uygulanan olan deney grubundaki öğrencilerin:

a. Uzamsal yetenek testi ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

b. Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testi ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

c. Lineer cebir testi ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

3. Geleneksel Lineer cebir öğretiminin uygulandığı kontrol grubundaki öğrencilerin:

a. Uzamsal yetenek testi ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

b. Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

c. Lineer cebir testi ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

4. İzmir evreninde yer alan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının Uzamsal yetenekleri ile;

a. Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasında;

b. Lineer Cebir başarısı arasında;

c. Katılımcıların cinsiyetleri arasında;

d. Katılımcıların akademik başarıları arasında

anlamlı bir ilişki var mıdır?

5. İzmir evreninde yer alan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile;

a. Lineer Cebir başarısı;

b. Katılımcıların cinsiyetleri

c. Akademik başarıları arasında

anlamlı bir ilişki var mıdır?

6. İzmir evreninde, öğrencilerin uzamsal yönelim ve uzamsal görselleştirme puanları arasında anlamlı bir ilişki var mıdır?

1.5. Sayıltılar

1. Araştırma sürecinde, öğrencilerin, Uzamsal yetenek ölçeğini, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ölçeğini, Lineer cebir başarı testini ve açık uçlu problemleri içtenlikle yanıtlayacakları varsayılmıştır.
2. Uygulanan test ve ölçeklerin kapsam geçerliği için uzman görüşleri yeterlidir.
3. Araştırma sürecinde, deney ve kontrol grubu öğrencilerinin kontrol altına alınamayan dışsal etkenlerden eşit düzeyde etkilendikleri kabul edilmiştir.
4. Araştırma sürecinde öğrencilerin öğrenmeye karşı ilgilerinin eşit düzeyde olduğu varsayılmıştır.

1.6. Sınırlılıklar

1. Araştırma 2009–2010 öğretim yılında, Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, ilköğretim matematik öğretmenliği 2. ve 3. sınıf öğrencileri üzerinde gerçekleştirilmiştir.
2. Araştırmadaki veriler, Uzamsal Yetenek testi, Van Hiele Geometrik düşünme düzeyleri testi, Lineer Cebir başarı testi ve açık uçlu problemlerden elde edilen verilerle sınırlıdır.

1.7. Tanımlar

Teknoloji Destekli Öğretim: Bilgisayar ve ağı üzerinden erişilebilen, çok ortamlılık özelliklerine sahip, etkileşimli olarak hazırlanmış, pedagojik özellikleri olan, bilgi aktarmanın yanı sıra beceri kazandırmaya yönelik, herkesin kendi bilgi algılama ve kavrama hızına göre ilerleyebildiği ve kendilerine uygun zaman ve yerde eğitim alabilmelerine olanak sağlayan okullarda planlı, bilinçli, kontrollü, amaçlı olarak yapılan öğretim sürecidir (Yemen, 2009).

Uzamsal Yetenek: Üç boyutlu uzayda bir ya da daha çok parçadan oluşan cisimleri ve bileşenlerini zihinde hareket ettirilebilme veya zihinde canlandırabilme yeteneğidir (Turğut, 2007).

Uzamsal Yönelim: Bir şeklin görüntüsünün, başka bir pozisyondan görüntüsünün nasıl olduğunu hayal edebilme, canlandırabilme yeteneğidir (Lohman, 1988).

Uzamsal Görselleştirme: Uzamsal görselleştirmeyi zihinde hareket ettirme, döndürme ya da verilen şekli ters çevirebilme yeteneğidir (McGee, 1979).

Matematik Başarısı: Matematik dersi programına göre belirlenmiş hedef davranışlar doğrultusunda, öğrencilerde belirlenen davranış değişikliğinin istendik yönde oluşup-oluşmadığının saptanması için uygulanan sınavlar sonucunda ölçülüp, beklentilere uygunluk derecesine göre karar verilmesidir (Akkoyunlu, 2003).

1.8. Kısaltmalar

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM : National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)

TIMMS : Third International Study of Science and Mathematics (Üçüncü Uluslararası Fen ve Matematik Çalışmaları, 1999)

V.H.G.D.D. : Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyi

TeDeMe : Teknoloji Destekli Matematik Eğitimi

f : Frekans

% : Yüzde

P : Anlamlılık Düzeyi

N : Veri Sayısı

$\overline{\mathbf{X}}$: Aritmetik Ortalama

SS : Standart Sapma

2D : 2 Boyutlu Düzlem

3D : 3 Boyutlu Uzay

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde lineer cebir öğretimi, teknoloji destekli eğitim, uzamsal düşünme ve Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile ilgili yayın ve araştırmalar yer almaktadır. İlk olarak lineer cebir öğretimine yönelik kuramsal bilgiler ve ilgili araştırmalar sunulmuş, ardından uzamsal yetenek ve bileşenleri ve Van Hiele teorisi açıklanmıştır. Son olarak adı geçen üç kavramın birlikteliği tartışılmıştır.

2.1. Lineer Cebir Öğretimi ile Kuramsal Bilgiler

Harel (2000) lineer cebir öğretimine yönelik üç temel ilke belirlemiştir. Bunlar, somutluk, gereksinim ve genellenebilirlik ilkeleridir.

Birinci ilke "Somutluk" ilkesidir. Soyut matematiksel bir kavramı, somut bir kavram üzerinden öğretebilmek için bu somut kavram, öğrencilerin soyut kavramın doğasını anlamalarına olanak verecek düzeyde olmalıdır (Harel, 2000'den akt. Aydın, 2007:217). Bu açıklamaya göre, öğrencilere sunulan kavramların -matematiğin doğasından dolayı- geçişe ve yapılanmaya olanak vermesi gerekmektedir. Harel (2000)'e göre soyut lineer cebir kavramlarının geometrik olarak somutlaştırılmasının devamlılığı, öğrencilerin anlamalarını sağlam bir tabana oturtabilir (Dorier, 2002:880). Genel olarak lineer cebir öğretmenlerinin düştüğü yanılgı, dersi hep geometri üzerinden götürmektir. Fakat bu noktada somutlaştırma ve geometrinin kullanımına dikkat edilmelidir. Çünkü Harel (2000) çalışmasında bu noktaya dikkati çekmiş ve bir lineer cebir dersine geometri ile başlayıp ve geometriyle elde edilen bazı genelleştirmeler vasıtasıyla cebirsel kavramların inşasının yanlış olduğunu öne sürmüştür (Dorier, 2002:880).

Bu yaklaşıma göre doğrudan ve sürekli olarak geometriyi lineer cebir derslerinde kullanmak doğru değildir. Harel (2000)'e göre geometri, cebirsel kavramlardan önce tanıtıldığında birçok öğrencinin bilgi düzeyi geometrik vektörlerle sınırlı kalmakta ve öğrenciler genelleme yapamamaktadırlar. Öğrencilerin lineer cebir bilgileri sadece iç çarpım fonksiyonu ve vektörel çarpım üzerinde yığılabilir. Geometri, örneğin, IR^n'in detaylı sunumundan sonra verilebilir (Gueudet-Chartier, 2004:494).

Harel (2000)'e göre ikinci temel öğretim ilkesi "Gereklilik"tir. Gereklilik prensibi, "bilgi bir problemin çözümü olarak gelişir" ilkesine dayanır (Harel 2000'den akt. Aydın, 2007:218). Aydın (2007)'a göre gereklilik prensibi, öğrencilerin lineer cebir dersine aktif katılımlarını ifade eder. Öğretmen, sadece örnek çözer, sonra yine örnek çözer pozisyonunda olursa, öğrencilerin öğrenmeleri elbette sınırlı kalacaktır. Bu ilkede yatan gizlilik sınıf içi etkinliklere dikkat edilmesidir. Bu ilkenin göz ardı edilmesine Dorier (2002), vektör uzayı tanımının IR^n'in özelliklerinin sunumuyla yapılmasını örnek vermiştir. Çünkü bu süreç bilinen kavramların tekrarlanması şeklinde olup, öğrenciler sadece dinlemekte ve not almaktadır. İki adi vektörün toplamı, sabitle çarpımı, birim üç yüzlü ile ilgili işlemler vs gibi.

Harel (2000)'e göre üçüncü öğretim ilkesi "Genellenebilirlik"tir. Somutlaştırma yöntemi kullanılarak yapılan bir öğretim, kavramların genelleştirilebilmesine açık olmalı ve öğrenciyi genelleştirme yapmasını sağlayarak cesaretlendirici türde olmalıdır (Harel 2000'den akt. Dorier, 2002:880). Bu süreçte somutluk ilkesi adı altında yapılan etkinlikler önemlidir. Bu nedenle kullanılan somut kavramlar, öğrencilerin soyut kavramları anlama ve özümsemelerine yardımcı olacak şekilde düzenlenmelidir. Örneğin, öğrenciye lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramları anlatılırken, sayı ekseni üzerindeki 2 vektörün lineer bağımlı, sonra düzlemdeki üç vektörün lineer bağımlı olduğu gösterilip bırakılmamalı, genelleştirmeye gidilerek n boyutlu uzayda $n+1$ tane vektörün lineer bağımlı olduğu söylenmeli, söyletilmelidir.

Şimdiye kadar açıklanan kuramsal bilgiler öğrencilere öğretimin nasıl yapılması gerektiği ile ilgiliydi. Fakat yakın zamanlardaki çalışmalarda, lineer cebir öğretim sürecinin yanında öğrencilerin nasıl düşündüğünün de önemli olduğu vurgulanmaktadır (Oktaç, 2008:333). Sierpinska (2000), uzun yıllar süren gözlem ve araştırmalarına dayanarak lineer cebir öğretiminde üç farklı düşünme biçimi tanımlamıştır. Bunlar, Sentetik-Geometrik, Analitik-Aritmetik ve Analitik-Yapısal düşünme biçimleridir. Sierpinska (2000), bu üç farklı düşünme biçimini öncelikle geometrik ve analitik olarak iki başlık altında açıklamış daha sonra ise aritmetik ve yapısal düşünme arasındaki farklılıkları belirtilmiştir.

Öğrenciler açıklamalarında bu üç farklı düşünme biçimini ayrı ayrı kullanmaktadırlar (Dogan-Dunlap, 2009:3). Sentetik-geometrik düşünme biçimi geometrik açıklamaları kullanır ve bu düşünme şeklinde objeler kolayca anlaşılır fakat tanımlanmaz (Sierpinska, 2000). Öğrenciler, daha önceden bildikleri geometrik kavramların aracılığıyla zihinlerinde bir yapılanma sürecine girerler. Dolayısıyla da açıklamaları öğrenme süreçlerine paralel olmaktadır. Dogan-Dunlap (2009:3), bu konuya güzel bir örnek vermiştir. Öğrenciler, bir vektör kümesinin lineer bağımlı ya da lineer bağımsız olduğunu geometrik gösterimlerinden yararlanarak kolayca belirleyebilirler. Fakat geometrik gösterimin bu özelliği vektörlerin özelliklerini ve vektörlerin lineer bağımlı yada lineer bağımsızlığını tarif eder ama tanımlamaz.

Analitik düşünme biçimleri, sayısal ve cebirsel gösterimleri kullanır (Dogan-Dunlap, 2009:3). Bu düşünme şekli genellemelerle ilişkilidir. Bu bağlamda iki farklı alt düşünme şeklinden bahsedilir (Sierpinska, 2000). Oktaç (2008), analitik-aritmetik ve analitik-yapısal düşünme biçimleri aşağıdaki cümlelerle birbirinden ayırmıştır (s.334):

> …Analitik-aritmetik düşünme biçiminde nesneler formüller vasıtasıyla tanımlanır ve hesaplama yöntemiyle işlemlere önem verilir. Analitik-yapısal düşünme biçiminde ise odak nokta matematiksel nesnelerin özellikleridir…

Bu açıklamalara şu örnek verilebilir: Sayısal olarak verilen 4 elemanlı bir vektör kümesinin lineer bağımsızlığını incelemek için $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$ ifadesinde $\lambda_i = 0$ (i=1,2,3,4) gerektirmesini kullanmak analitik-aritmetik düşünme biçimine örnektir. Bu dört vektörü ilgili uzayın boyutundan hareket ederek ele almak, yani daha formal bir yol izlemek analitik-yapısal düşünen öğrenciye örnektir.

Dogan-Dunlap (2009), açıklanan bu üç farklı düşünme biçimini aşağıdaki tabloda özetlemiştir (s.3).

Tablo 1

Lineer Cebir Düşünme Biçimleri

Düşünme Biçimi	Gösterimler ve Tanım	Öğrenci Becerisi
-Sentetik-Geometrik	-Grafiksel gösterimler kullanılır. - Objelere ait özelliklerin kolayca anlaşılmasını sağlar. -Objeyi gösterir, tarif eder ama tanımlamaz.	-Öğrenci IR^2 yada IR^3'teki çizimleri verilen vektörlerin lineer bağımlı yada lineer bağımsız olduklarını belirleyebilir.
-Analitik-Aritmetik	-Sayısal gösterimler kullanılır. -Objeleri tanımlar. -Lineer kombinasyon.	-Öğrenci, vektörlerin matris formlarını oluşturabilir ve satır ve sütun işlemleriyle, lineer bağımlı olup olmadıklarını belirleyebilir. -Öğrenci, vektörlerin lineer kombinasyonunu kullanarak lineer bağımlı olup olmadıklarını inceleyebilir.
-Analitik-Yapısal	-Objeler bir sistemin elemanı olarak düşünülür. -Objeleri tanımlar.	-Öğrenci, vektörlerin lineer bağımlı yada lineer bağımsız olduğunu belirlemede vektör uzaylarının boyutunu kullanır.

Tablo 1'den de görüldüğü gibi öğrencilerin lineer cebir düşünme biçimleri sentetik-geometrik'ten analitik düşünme biçimlerine doğru giderek üst düzey bir davranış haline dönüşmektedir. Bu açıklamaların matematiksel düşünmeye de paralel olduğu kolaylıkla söylenebilir. Öğrencilerin sentetik-geometrik açıklamaları somut ilişkilerle donatılmakta, analitik-aritmetik açıklamaları sayısal örnekleri içerirken, analitik-yapısal düşünme biçimi ele alınan vektör uzayının cebirsel yapılarıyla ilgili olmaktadır. Bu bağlamda devreye soyut kavramlar girmektedir ve matematiksel düşünmenin ön planda olduğu söylenebilir.

Açıklanan üç farklı düşünme şekli niye lineer cebir öğretiminde önemlidir? Bu sorunun yanıtı çok önemlidir. Bu kuramsal çatı altında hazırlanacak ders içi sunum ve etkinliklerin üç farklı şekilde düşünen öğrencilerin hepsini ortak paydada toplayabileceği düşünülmektedir.

Giriş kısmında açıklanan lineer cebir öğretimindeki formalizm sorunu lineer cebir eğitimcilerini derin incelemelere itmiştir. Araştırmacıların, lineer cebiri formalist bir yapıya oturtma çabaları ve bu doğrultuda yazılan kitaplar lineer cebir öğretim elemanlarını açık bir kararsızlığa sürüklemiştir. Çünkü formalist bakış açısına göre, varsayılanı ortaya atıp ispat yapmaya başlamadıkça matematik yapılmaya başlanılmamaktadır (Aydın, 2009a:98). Bu bakış açısıyla yazılan kitaplar ağır olmakla birlikte öğrenciler için kaynak başka bir sorun olmuştur. Matematik eğitimcileri, öğrencilerde gözlenen ve genel olarak kuramsal çıkarımlarda yaşanan problemi çözmek için araştırmalar yürütmüşlerdir. İlk zamanlarda, öğrencilerin başarısızlığı geometri, mantık ve kümeler kuramındaki bilgi eksikliklerine bağlanmış ve bu sorunu gidermek için lineer cebir dersine başlanmadan önce bu konuların tekrarlarıyla başlanmasının da sorunu çözmediği görülmüştür (Dorier, 2000).

Genel olarak alanyazında, lineer cebirdeki formalizm sorunu, öğrencilerin cebirsel yapılar hakkındaki temel bilgilerinin eksikliğine bağlanmaktadır. Araştırmacılar, lineer cebirdeki formal yapının anlaşılması ve geliştirilmesi için birçok çalışma yürütmüşlerdir; örneğin, Dorier (1995), Dorier (1998), Dorier et. al. (2000a) ve Dorier et. al. (2000b). Araştırmacılar bu çalışmalara "meta level activities" ismini vermişler ve çalışmaların temel hareket noktası, öğrencilerin lineer cebir dersini öğrenmeye başlamadan önceki bilgilerini bu ders içinde kullanabilmeleri ve lineer cebir kavramlarını öğrenmede yeterli düzeye gelebilmeleri için belirli öğretim metotlarının kullanılmasının gerekli görülmesidir (Aydın, 2009a:99).

Konu ile ilgili sonraki araştırmalarda ise formalizm sorununun lineer cebir dersinde kullanılan matematik alan diliyle ilgili olup olmadığı incelenmiştir. Çünkü kümeler kuramı üzerine inşa edilen bu dersin içeriğinde birçok simge kullanılmaktadır ve genellikle öğrencilerin soyut matematik gibi derslerdeki bilgi eksikliği ve kavram yanılgıları, lineer cebir öğretimini olumsuz etkilemektedir. Öğrenciler, temel olarak lineer cebir dersinde çoklu gösterimlerin soyut temsilcileriyle işlem yapmaktadırlar. Bu nokta lineer cebir öğretiminde çok büyük önem taşımaktadır ve alanyazında bu becerilere “cognitive flexibility”; “bilişsel esneklik” denilmektedir (Dorier, 2002:877). Bunun yanında, NCTM (2000) tarafından matematik eğitimi için on temel standart belirlenmiştir. Gerekli içerikler; sayı ve işlemler, cebir, geometri, ölçme ve veri analizi ve olasılıktır. Bu standartlardaki gerekli işlem ve beceriler ise problem çözme, muhakeme yapma ve kanıt, iletişim (matematiksel), ilişkilendirme ve gösterim (simgeleme)’dir. Bu bağlamda, matematik alan dilinin kullanımı için matematiksel düşünme gerekmekte ve lineer cebir öğrenmede etkin bir rol üstlenmektedir. Bu noktadan hareketle Hillel (2000), lineer cebirde kullanılan gösterimleri “soyut”, “cebirsel” ve “geometrik” gösterimler olmak üzere üç başlıkta toplamıştır. Hillel (2000) yaptığı bu sınıflamaya dayanarak, lineer cebirde kullanılan alan dillerini üç temel bölüme ayırmıştır (akt. Aydın, 2009a:99):

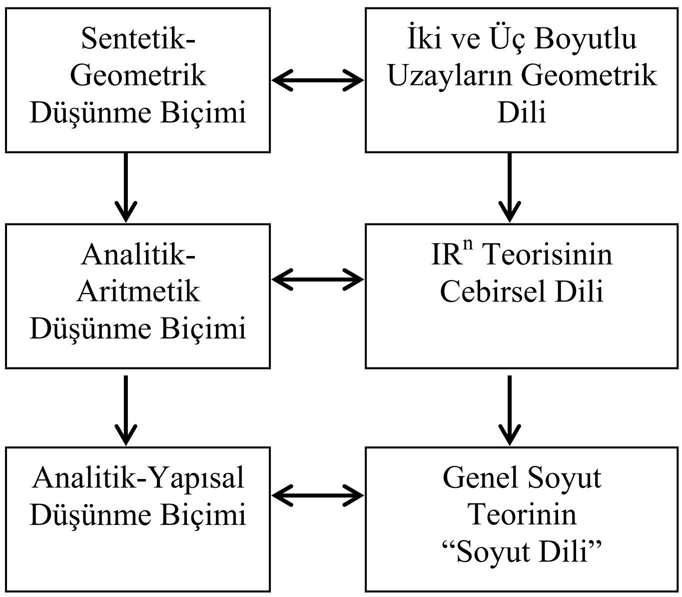
- Genel soyut teorinin “soyut dili”,
- IR^n teorisinin “cebirsel dili”,
- İki ve üç boyutlu uzayların geometrik dili.

Hillel (2000) bu diller arasındaki geçişe dikkat edilmesi gerektiğini vurgulamış, soyut temsilcilerin kullanımının öğrenciler için açık bir sorun olduğunu öne sürmüştür. Hillel (2000)’in açıklamasına şu örnek verilebilir. IR^n’in IR^2 ve IR^3 alt vektör uzaylarının özellikleri iki ve üç boyutlu uzayın cebirsel özelliklerine birebire karşılık gelmektedir. Çünkü uzayda her bir noktaya sadece bir vektör karşılık gelmektedir. IR^n'in cebirsel özelliklerini kullanmadan öğrencilere geometrik gösterimler ve geometrik kavramların öğretilmesi, soyut vektör uzaylarının öğretilmesini olumsuz etkileyebilir.

Sierpinska (2000)'nın tanımladığı lineer cebir düşünme biçimleri incelendiğinde, Hillel (2000)'nin tanımladığı lineer cebirde kullanılan dillerin örtüştükleri görülmektedir. Öğrencinin sentetik-geometrik düşünme biçiminde kullandığı dil, iki ve üç boyutlu uzayların geometrik dilidir. Analitik-aritmetik düşünen öğrenci IR^n teorisinin cebirsel dilini; Analitik-yapısal düşünen öğrenci ise genel soyut teorisinin "soyut dili"'ni kullanmaktadır. Fakat bu eşleşmeler doğrudan cümlelerle ifade edildiklerinde ayrı kavramlar gibi anlaşılmaktadır. Halbuki dikkat edilmesi gereken analitik-yapısal düşünme şeklinin en üst düzey düşünme biçimi olduğu, dolayısıyla öğrencilerin ancak sentetik-geometrik ve analitik-aritmetik düşünme biçimlerine sahip olduktan sonra analitik-yapısal düşünebileceği söylenebilir. Buna paralel olarak da öğrencilerin kullandıkları lineer cebir dillerinin, geometrik gösterimlerden soyut dile doğru gittiğini söylenebilir. Aşağıdaki şekilde bu açıklamalar toparlanmaya çalışılmıştır.

Şekil 1

Lineer Cebir Düşünme Biçimleri ve Lineer Cebir Alan Dilleri Arasındaki İlişki



Lineer cebirde kullanılan temsilciler üzerine, Duval (1995) bir teori geliştirmiştir. Duval (1995)'a göre semiyotik (göstergebilim) temsilleri kendi özel anlam ve işlev sınırlarına sahip, özel bir temsil sistemine ait işaret ve simgelerin kullanılmasıyla yapılan işlevler (ürünler) olarak tanımlamıştır (akt. Aydın, 2009:99). Yapısı gereği lineer cebir dersi soyut bir derstir. Ayrıca, lineer cebir konteksti içerisindeki birçok kavram grafik olarak gösterilememektedir (IR^n, hiperdoğru, hiperyüzey, C^n gibi). Sonuç olarak söz konusu temsilciler, lineer cebir öğrenme ve matematiksel düşünmede önemli bir yere sahiptir denilebilir. Ayrıca, Dorier (2002), bu semiyotik sistemlerin, bilişsel becerilerin ön plana çıktığı gösterimlerde, farklı fonksiyonları ayırma ve matematiksel bilgi oluşturmada çok önemli bir yere sahip olduğunu vurgulamıştır.

K. Pavlopoulou, doktora çalışmasında, Duval (1995)'ın teorisini lineer cebirin içeriğine uygulamış ve test etmiştir. K. Pavlopoulou, örneğin vektörlere ait olan semiyotik gösterimlerin üç kaydedicisini tanımlamıştır (akt. Dorier, 2000: 247-252). Bunlar;

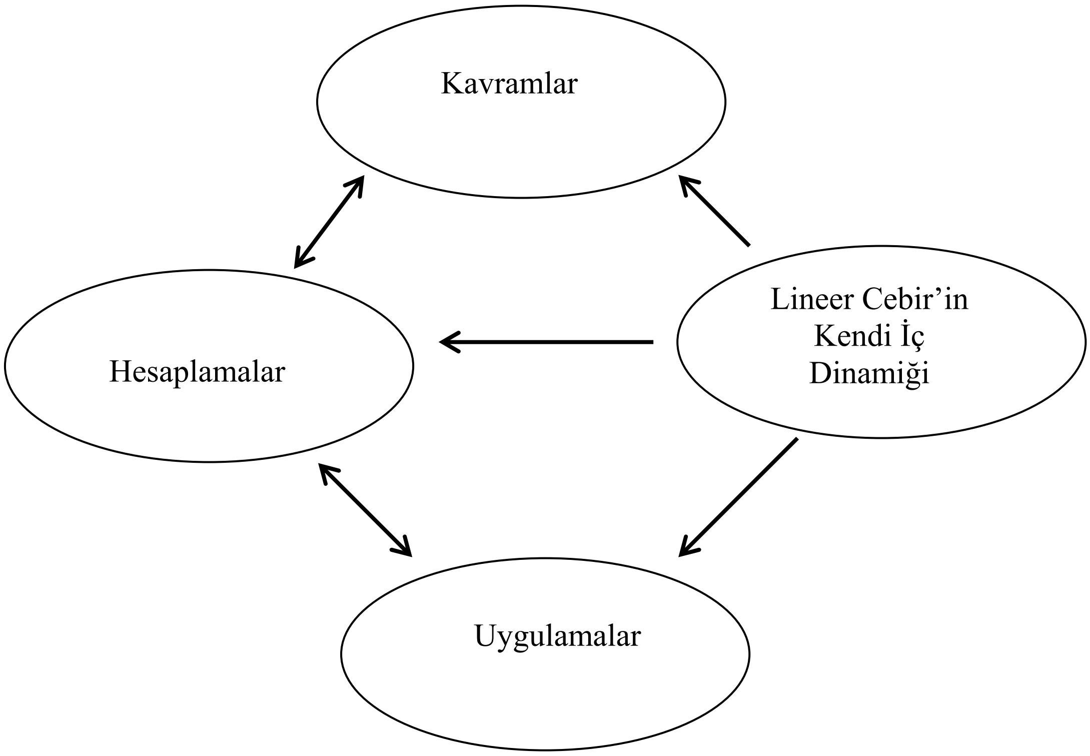
- Grafiksel kayıt (Oklar),
- Tablo kaydı (Koordinatların kolon matrisleri ile gösterimi),
- Sembolik kayıt (Vektör uzaylarının aksiyomatik teorisi).

K. Pavlopoulou genel olarak lineer cebir kitaplarında bu gösterimlere dikkat edilmediğini vurgulamış ve öğrencilerin çoğunlukla, ne zaman vektörlerin üzerine ok koyacaklarına karar veremediklerini belirtmiştir. Bu bulgular, lineer cebir kitaplarının son baskılarına ışık tutmuş, vektör kavramı koyu punto ile gösterilmiştir. Örneğin, Anton (1981), Lipschutz (1990), Kolman ve Hill (2002).

Uhlig (2003) elemanter seviyedeki lineer cebir öğretimi için felsefik ve pedagojik bir yaklaşım geliştirmiştir. Uhlig (2003)'e göre "bir lineer cebir dersi uygulamalarla ve somut örneklerle başlar ve daha sonra kavramlar üzerine yoğunlaşılır" klasik anlayışından farklıdır ve ona göre bir lineer cebir dersi öğretimi aşağıdaki diyagramın bileşenleri arasında dengeli bir yaklaşım bulunmasıyla geliştirilebilir (akt. Aydın, 2009a:100):

Şekil 2

Dengeli ve Kavramsal Bir Lineer Cebir Öğretimi İçin Gerekli İlkeler

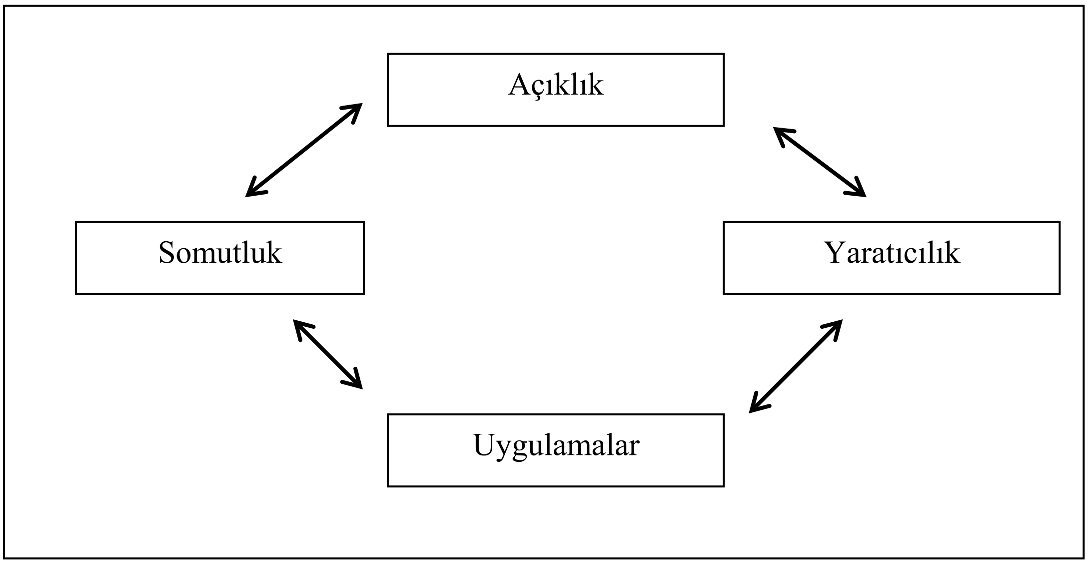


Şekil 2 lineer cebir öğretiminin sadece kavram ya da sadece uygulama ağırlıklı olamayacağını her bir lineer cebir dersine dengeli olarak yansıtılması gerektiğini vurgulamaktadır. Uhlig (2003)'in bu yaklaşımı Harel (2000) ve Sierpinska (2000)'nin teorilerine paralellik göstermektedir. Araştırmacının yaklaşımı öğretim sürecinde kavramlardan, hesaplamalardan ve kuramsal bütünlükten ayrı ayrı bahsetmektedir.

Bunun yanında öğrencinin en iyi şekilde matematik öğrenebilmesi için aşağıdaki pedagojik prensiplere uyulmalıdır (akt. Aydın, 2009a:100):

Şekil 3

Lineer Cebir Öğreniminin ve Öğretiminin Pedagojik Prensipleri



Aydın (2009a)'a göre şekil 3'deki yaratıcılık; bağımsız düşünebilmeyi harekete geçirmeyi, açıklık; öğrencilerin olgunlaşmasını ve lineer cebir dünyasına girmelerini sağlamayı, somutluk; somut hesaplamaların kavramları güçlendirmesi ve kavramayı kolaylaştırmasını; uygulamalar; lineer cebir'in güzelliğini ve gücünü göstermeyi ifade eder.

Lineer cebir derslerinin modern matematiğin geliştiği dönemlerde daha kapsamlı ve ortaöğretim kurumlarında da okutulduğu görülmektedir. Günümüzde ise temel olarak sadece matris, determinant kavramları ve vektörlerin kullanıldığı geometri, analitik geometri adı altında gösterilmektedir. Fransa'daki ortaöğretim ve üniversite matematik müfredatlarındaki lineer cebir'in epistemolojik bir analizi Dorier et. al. (2000a) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada lineer cebirle ilgili elde edilen bulguların bir değerlendirilmesi yapılmış ve bu bulgular üzerine bir öğretim tasarımı geliştirilmiştir. Dorier et. al. (2000a)'e göre bir lineer cebir öğretimi

- Uzun dönem stratejisi,
- Meta kaldıraç[1],
- Yapıların veya bakış açılarının değiştirilmesi[2].

[1,2] Bu kavramlar Aydın (2007:217) tarafından Türkçeye çevrilmiş olup orijinalleri: "meta lever" ve "the change of settings and of points of view' dir.

Uzun dönem stratejisi öğretim sürecinin bölünemeyeceğini ifade eder. Hem öğretilmek istenen bir konuya öğrencileri matematiksel olarak hazırlamak hem de hedeflenen noktaya gelmek uzun bir periyot üzerinden işlenmesi gerektiğinden “uzun dönem” programı önemlidir (Aydın, 2007:216). Bu kısımda vurgulanmak istenen öğretim sürecinde beklenen matematiksel değişimler için yeterli ve bütün bir sürenin olmasıdır.

Meta kaldıraç, bir lineer cebir dersinin organize edilmesi, lineer cebir’in kavramlarının matematiğin diğer alanlarına uygulanması, genel ve özel durumlarla ilgili farklılıkların belirtilmesi ve matematikteki farklı sorgulama tiplerini kullanarak öğrencilerin kavramlar üzerinde yoğunlaşmasını sağlamak meta kaldıracın diğer ifade şekilleridir (Aydın, 2007:217). Aydın (2007)’a göre “Meta” matematikte öğrencilerden beklenen dönüşsel davranış anlamında kullanılmıştır.

Yapıların ve bakış açılarının değiştirilmesi ile vurgulanmak istenen, ders ve alıştırmaların, bir yapıdan başka bir yapıya geçiş yapmaya vurgu yapacak şekilde organize edilmesidir (formal bir yapıdan sayısal bir yapıya dönüştürme veya sayısal bir yapıdan geometrik bir yapıya dönüştürme gibi), (Dorier, 2002’den akt. Aydın, 2007:217).

Dorier et. al. (2000a)’e göre bir lineer cebir dersinin tasarımı dört adımda gerçekleştirilir.

-1. Adım: Ders için kullanılacak olan gerekli bilgilerin verildiği adımdır. Araştırmada ilk ders olarak öğrencilerin matematiksel muhakeme kurallarını anlamalarına yardımcı olmak için fizikle alakalı bir etkinlik hazırlanmıştır. Buna ek olarak ilk derste uzay geometrisinin yanında kümeler kuramının temelleri verilmiştir. Sonra n bilinmeyenli ve m tane lineer denklemin çözümü için Gauss eliminasyon metodu sunulmuştur. Bu süreçte IR^n’in lineer yapısı kullanılmıştır. Böylece düzlem ve uzay geometrisinin gösterim kolaylığı yararlanarak parametre ve denklemlerin uzaydaki karşılıkları verilmiştir. Daha sonra, merkezinde denklem ve parametreler olan IR^3 kartezyen geometrisiyle devam edilmiştir.

-2. Adım: Bu kısımda lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık kavramları ve lineer bileşim sayesinde rank kavramına geçiş yapılır. Ardından, IR^n vektör uzayının denklemlerinden alt uzaylarının tanımı ve parametreleri sunulur. Sonra, boyut ve alt vektör uzayları verilir. Bu bölümde ilgili kanıtlar koordinatlara geçilmeden soyut formüllerle verilir. Bunun temel amacı, grup teorisi ile ilgili kısımlar yararlanarak öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini geliştirmektir. Son olarak IR^n'in alt vektör uzayı ile ilgili olarak, gömme, eşitlik, kesişim ve parametreler gibi kavramlar sunulur.

-3. Adım: Bu bölümde soyut lineer cebir öğretilir. Yani, sonlu vektör uzaylarının aksiyomatik yapıları, lineer operatörleri ve uygulamalarına yer verilir.

-4. Adım: Bu bölüm daha teknik ve kısadır. Matrisler ve dönüşümlerle ilgili ilişkiler sunulur. Kare matrislerinin terslerinin bulunması gösterilir. Lineer operatörlerde, matrislerin diğer bilim alanlarında nasıl kullanıldığı gösterilir. Fakat bu noktada asıl amaç matris analizi değildir. Ayrıca, matematik öğretim denklemler gibi).

Dorier et. al. (2000a) geliştirdikleri bu öğretim tasarımını, Morocco ve Fransa'da beş yıl boyunca yaklaşık iki yüz öğrenci üzerinde denemişler ve oldukça olumlu sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, yukarıda açıklanan kuramsal yaklaşımlardan –ileride açıklanacağı gibi- Harel (2000) ve Sierpinska (2000)'nın teorileri baz alınmıştır.

2.2. Lineer Cebir Öğretimi ve Geometri

Lineer cebirin içeriğine bakıldığında geometriden ayrılamayacağı anlaşılmaktadır. Ancak tüm araştırmacıların hemfikir olduğu gibi, lineer cebir öğretiminde geometri uygun birşekilde kullanılmalı ve her ikisinin farklı olduğu yanlar belirgin bir şekilde ortaya konulmalıdır. Aksi takdirde lineer cebir ile geometri arasında kavram kargaşası ile karşılaşabilirler. Örneğin, vektörlerin geometrik özellikleri ifade edilirken hem vektörel hem de geometrik özellikleri iyi bir şekilde belirtilmelidir. Birçok lineer cebir kitabında bu dengeye ne derece uyulduğu açık bir problemken, bu kısımda konu ile ilgili yapılmış sınırlı sayıda çalışmanın bulgularına yer verilmiştir.

Rastgele bir lineer cebir kitabının içindekiler sayfasına bakıldığında (Örneğin, H. Anton, "Elementary Linear Algebra, Prentice Inc. Hall, NJ, 1981), ilk göze çarpan kavramlar:

- Vektör,
- İç Çarpım,
- Üç boyutlu uzayda doğrular ve düzlemler,
- Boyut, ortogonal olma

ifadeleridir. Dolayısıyla öğretim sürecinde bu kavramlar devamlı olarak kullanılmaktadır. Bu kullanımların temel amacı geometrik uygulamalara yer vererek soyut kavramların bir kısmını somutlaştırmaktır. Araştırmacılar hep bu noktaya dikkati çekmiş lineer cebirin sadece iki ve üç boyutlu uzaydan ibaret olmadığının anlaşılması üzerinde çalışmışlardır.

Örneğin, Robert et. al. (1987) lineer cebir dersi için geometrik bir giriş tasarlamışlardır. Bu çalışmanın temel amacı, daha önce açıklanan formalizm sorununa çözüm bulmak ve öğrencileri somut kavramlarla; bilhassa da vektör uzayı kavramını uygun metaforlarla öğretmek olmuştur. Fakat Harel (2000), araştırmacıların çalışmalarına gönderme de bulunarak geometrinin kullanımının iki uçlu bir problem olduğunu hatırlatmıştır (Dorier, 2002:881). Çünkü hazırlanan bu girişte lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık ve rank gibi kavramların örnekleri hep iki ve üç boyutlu uzayla sınırlı kalmaktadır.

Gueudet-Chartier (2000) tarihi ve modern kitapların lineer cebir ve geometri birlikteliğini incelemek için epistemolojik bir analizi yapmıştır. Gueudet-Chartier (2000), araştırmasında kitaplarda ve lineer cebir öğretenlerin geometrik sezgiye yer verdiklerini ve kullanımını kabul ettiklerini saptamıştır. Bunun yanında, öğrencilerin afin uzayı ve vektör uzayı kavramlarını birbirleriyle karıştırdıklarını ve genellikle lineer dönüşümün geometrik bir dönüşüm olamayacağını hayal edemediklerini belirtmiştir.

Gueudet-Chartier (2000)'e göre lineer cebiri anlamada geometriyi kullanmak bir engeldir. Çünkü bazı iyi öğrencilerin geometrik gösterimleri kullanmadan formal çıkarımlarda bulunduğunu belirtmiş ve geometrinin nerede ve ne kadar kullanılması gerektiği konusunda dikkatli olunması gerektiğini öne sürmüştür.

Aynı araştırmacı, 2002 yılının sonuna kadar öğrenciler üzerinde gözlemlerine devam eden ilginç bir çalışma gerçekleştirmiştir ve bunu 2004 yılında yayımlamıştır. Bu çalışmanın tezin bu kısmına önemli derecede destek vereceği düşünülerek bu araştırmaya geniş yer verilmiştir.

Bu çalışmanın ismi "lineer cebiri geometri ile mi öğretmeliyiz?"dir. Gueudet-Chartier (2004) araştırmasına başlamadan önce altı lineer cebir kitabını incelemiş ve iç çarpım uzayları konusunda lineer cebir ve geometri ile çok sıkı bir bağ olduğunu açıklamıştır. Bilindiği üzere de geometri de diklik kavramı iç çarpım fonksiyonu ve açı kavramı kullanılarak tanımlanır. Bu bağlamda dik koordinat sistemlerine geçilerek geometrinin uygulamalarına yer verilir. Bunların ışığında, Gueudet-Chartier (2004) öğrenci ve lineer cebir öğretim elemanlarının lineer cebirde kullandıkları geometriyi incelemek amacıyla ilk olarak 31 üniversite öğretim elemanına görüşme formu uygulamıştır. Görüşme formunda öğretim elemanlarından lineer cebir derslerinde kullandıkları geometrik kavram ve çizimleri yazmalarını istenmiştir. Sonuç olarak öğretim elemanlarının %30'u, lineer cebirin yapısal formunu kullanarak neredeyse hiç çizim yapmamaktadır. Öğretim elemanlarının %40'ı, afin geometriyle grafiksel gösterimlerini kullandıklarını belirtmiştir. Öğretim elemanlarının sadece %15'i lineer cebir dersi için özel çizim tasarımları geliştirdiklerini ve kullandıklarını gözlemlenmiştir.

Gueudet-Chartier (2004) araştırmasının ikinci bölümünde altı hafta boyunca bir öğretim elemanının kuadratik formlar ve iç çarpım uzayları konularının ele alındığı dersi gözlemlemiştir. Dersin öğretim elemanı öğretim esnasında 32 çizim kullanmış ve öğrencilerden bunlardan 10 tanesini çizmeleri istemiştir. Öğretim elemanı Pisagor teoreminin ifadesini matematik diliyle yazmış, çizimini göstermiş fakat kanıtını yapmamıştır. Gueudet-Chartier (2004), öğrencilere birebir olarak polinomlar vektör uzayı ve Pisagor teoremini sormuştur. Öğrencilerin kimileri yanılgıya düşmüş, polinomlarının üzerine ok koyarak kartezyen sistemde çizmeye çalışmıştır. Öğrencilerin yarısı polinomlarla ilgili soruyu doğru, yarısı yanlış yanıtlamıştır. Gueudet-Chartier (2004) öğrencilerin Pisagor teoremi ile ilgili bulgularını da incelemiştir. Birkaç öğrenci, geometriyi kullanmış, birkaçı geometriyi kullanmadan vektörlerin cebirsel özellikleriyle göstermeyi başarmış ama geriye kalanı ne yapacağına karar verememiştir. Tüm bu bulguların ışığında, araştırmacı, "lineer cebiri geometri ile mi öğretmeliyiz" sorusuna net olarak bir cevap verememiştir.

Bu tez çalışmasında, araştırma problemi olmamasına rağmen, geometrinin düzenli ve dengeli kullanımının sonuçlarına, son bölümde, kısmen yer verilecektir.

2.3. Lineer Cebir Öğretimi ile İlgili Diğer Yayın ve Araştırmalar

Dorier (1998), vektör uzayları teorisinin öğretimi üzerinde formalizmin rolünü araştırmıştır. Araştırmada, ilk olarak vektör uzayı kavramının tarihsel bir analizi sunulmuştur. Tarihsel bulgular ışığında vektör uzayı teorisinin anlaşılması ve öğretilmesi için yeni bir yaklaşım geliştirmeye çalışmıştır. Çalışmada ek olarak, öğrencilerin kavramları ve formal kavramlar arasındaki ilişkiler, öğrencilerin yaptıkları hatalar çerçevesinde toplanarak değerlendirmesi yapılmıştır.

Hadded (1999) lineer cebir öğrenme ve öğretme sürecinde yaşanan güçlükleri araştırmıştır. Hadded (1999)'in çalışması iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, lise seviyesinde öğretilen bir lineer cebir dersinde yaşanan güçlükler; ikinci bölüm ise Cabri paket programıyla hazırlanmış vektörler ve lineer dönüşümler konularının öğretiminde yaşanan güçlüklere ayrılmıştır. Araştırmacı, derlediği güçlükleri üç başlık adı altında toplamıştır. 1. lineer cebirin doğası ile ilgili olanlar, 2. lineer cebir öğretimindeki didaktik kararlarla ilgili olanlar, 3. öğrencilerin düşünme biçimleri ve matematiksel ön bilgileriyle ilgili olanlar. Sonuç olarak öğrencilerin yaşadığı en büyük sıkıntıların başında "kavramlar" olduğu gözlemlenmiştir.

Konyalıoğlu (2003), görselleştirme yaklaşımının öğrencilerin vektör uzayları ile ilgili başarılarına, işlemsel öğrenmelerine, kavramsal öğrenmelerine ve matematiğe karşı tutumlarına etkisini araştırmıştır. Lineer cebir dersini alan 103 ilköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıf öğrencisi rastgele deney ve kontrol gruplarına ayrılmıştır. Araştırma beş hafta sürmüş ve ölçme aracı olarak lineer cebir bilgi testi, matematik tutum ölçeği ve bilimsel beceri testi kullanılmıştır. Sonuçlara göre, vektör uzayları konusundaki kavramların öğrenciler tarafından anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımıyla yapılan eğitimin geleneksel lineer cebir öğretimine göre daha başarılı olduğu görülmüştür. Bunun yanında, deney grubu öğrencilerinin matematiğe yönelik tutumlarının kontrol grubu öğrencilerinin tutumlarına göre daha yüksek seviyede olduğu görülmüştür. Ayrıca, deney ve kontrol grubu öğrencilerinin işlemsel öğrenmeleri arasında anlamlı bir fark yokken, kavramsal öğrenmeleri açısından deney grubu öğrencilerinin daha başarılı olduğu görülmüştür.

Aydın (2007) bazı özel öğretim yöntemlerinin lineer cebir öğrenimine etkisini araştırmıştır. 64 öğrenci 32'si kontrol, 32'si deney olmak üzere iki gruba bölünmüş ve deney grubunda Harel (2000) ve Dorier et.al. (2000) tarafından lineer cebir öğretimine yönelik belirtilen ilkelerin bütünleşmesinden oluşan bir özel öğretim uygulamıştır. Kontrol grubunda ise geleneksel öğretim uygulanmıştır. Yapılan son test ölçümüyle deney grubundaki öğrencilerin puanlarının kontrol grubuna göre daha olumlu olduğu görülmüştür.

Konyalioglu et. al. (2005), öğrencilerin kavramsal bilgi ve işlemsel bilgileri üzerinde, geleneksel ders anlatım yöntemi ile görselleştirme yaklaşımı ile yapılan öğretimi karşılaştırılmıştır. Araştırma 103 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Deney grubunda vektör uzayı kavramı geometrik gösterimlerle öğretilmiştir. Araştırma sonuçlarına göre deney ve kontrol grubundaki öğrenciler arasında işlemsel bilgi bakımından bir fark yokken, deney grubundaki öğrenciler kavramsal bilgi bakımından daha başarılı olmuşlardır.

Bogomonly (2006), örnek ağırlıklı öğretimsel işlerin öğrencilerin lineer cebiri anlamalarındaki rolünü incelemiştir. Araştırmada şu sorulara yanıt aranmıştır. “Öğrencilerin lineer cebirle ilgili kavramları anlamasını sağlayacak araçlar nedir?”, “Söz konusu öğretimsel işlerde öğrenciler nerede zorlanmaktadır”, “Hangi öğretimsel işler öğrencilerin lineer cebiri anlamalarına yardımcı olacaktır?” ve “Bu öğretimsel işler matematik eğitimi araştırmaları için etkili ve yararlı; ayrıca da veri toplama aracı olabilecek midir?”. Bu araştırma sorularıyla, öğrencilerin vektörler, vektör uzayları, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, lineer dönüşümler ve taban gibi lineer cebir konularında yaşadıkları sıkıntılar belirlenmeye çalışılmıştır.

Erçerman (2008), lise 3. sınıf matematik dersinde yer alan lineer cebir ünitesi ile ilgili öğrenci bilgilerini işlem ve kavram bilgisi bağlamında değerlendirmiştir. Araştırma 4 ayrı lisede 250 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Ölçme aracı olarak onar soruluk işlem ve kavram bilgisi gerektiren iki ayrı başarı sınavı kullanılmıştır. Sonuç olarak öğrencilerinin çoğunun lineer cebir bilgilerinin kavramsal ve işlevsel bilgi bağlamında tutarsız, eksik ve birbirini tamamlamayan bilgiler olduğu ve işlemsel bilgilerin ağırlıkta olduğu gözlemlenmiştir.

Konyalioglu et. al. (2008), lineer cebir dersinde görselleştirme yaklaşımının, öğrencilerin kavramsal öğrenmeleri üzerindeki rolünü araştırmıştır. Lineer cebir dersini alan 60 öğrenci rastgele iki gruba; deney ve kontrol gruplarına ayrılmıştır. Deney grubunda lineer cebir dersinin öğretim elemanı tarafından haftada 2 saat geometrik gösterimler ağırlıklı lineer cebir dersi, 1 saat cebirsel ağırlıklı lineer cebir dersi verilmiştir. Kontrol grubunda ise haftada 2 saat cebirsel ağırlıklı ve 1 saat geometrik gösterimler ağırlıklı lineer cebir dersi işlenmiştir. 4 hafta uygulama sonunda yapılan son test sonucu grupların puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat deney grubundaki öğrencilerin kavramsal öğrenmelerinin daha ileri seviyede olduğu gözlemlenmiştir.

Aydın (2009b), çalışmasında lineer cebir öğretimine etki eden faktörleri kuramsal bir çerçeve altında tartışmıştır. Bu faktörleri genel olarak, formalizm, öğretim programı, öğrencilerin öğrenme profilleri, öğretme stratejileri ve lineer cebir öğretiminde teknoloji kullanımı başlıkları altında toplamıştır. Araştırmacı, ek olarak lineer cebir öğretim elemanlarına önemli önerilerde bulunmuştur.

Konyalıoğlu (2009), lineer cebir öğretiminde kullanılan görselleştirme yaklaşımını öğrencilerin bakış açısıyla değerlendirmiştir. Bu amaçla 12 ders saati boyunca görsel ağırlıklı lineer cebir dersi işlenmiştir. Dersten önce ve sonra öğrencilerle yazılı ve sözlü görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonucuna göre, öğrencilerin, görselleştirme ve lineer cebir öğretimindeki görselleştirme yaklaşımının kullanımı hakkında hemfikir oldukları gözlemlenmiştir.

2.4. Teknoloji Destekli Matematik Eğitimi ve Öğretimi

Günümüzde, hayatımızı kolaylaştırmak için yapılan çalışma ve araştırmaların tümüne genel olarak "teknoloji" denilmektedir. Son yıllarda ise bu kolaylaştırmalar daha çok elektroniğin ön planda olduğu alanlarda görülmektedir. "Teknoloji" sözlü olarak söylenildiğinde sanki sadece elektronik anlamdaki gelişimin temsilcisi gibi görünmektedir. Halbuki hayatı kolaylaştıran her şeyin teknolojik bir ürün olduğu bilinmektedir.

Galbraith (1967), teknoloji kavramını "bilimsel yada diğer sistematik bilgilerin pratik alanlara sistemli bir şekilde uygulanması" olarak tanımlamıştır (akt. Yalın, 2003:2). Teknoloji kavramının daha duyarlı bir tanımı Alkan (1987) tarafından verilmiştir. Alkan (1987)'a göre teknoloji kavramı, "makineler, işlemler, yöntemler, süreçler, sistemler, yönetim ve kontrol mekanizmaları gibi çeşitli öğeleri" kapsamakta ve teknoloji, bu öğelerin belirli bir düzende bir araya getirilmesiyle oluşan ve bilim ile uygulama arasındaki köprüdür (s.15).

Alanyazında "eğitim teknolojisi" ile "öğretim teknolojisi" kavramlarının kimi zaman birbirlerinin yerine kullanıldıkları görülmektedir. Alkan (1995) bu iki ifadeyi aşağıdaki cümlelerle birbirinden ayırmaya çalışmıştır (akt. Yalın, 2003:5):

> …"öğretim teknolojisi", öğretimin, eğitimin bir alt kavramı olduğu anlayışına dayalı olarak ve belirli öğretim disiplinlerinin kendine özgü yönlerini dikkate alarak düzenlenmiş teknolojiyle ilgili bir terimdir.

> Örneğin, “fen öğretimi teknolojisi”, “dil öğretimi teknolojisi”, “biyoloji öğretimi teknolojisi” gibi…
>
> …Eğitim teknolojisi ise … “insanın öğrenmesi” olgusunun tüm yönlerini içeren problemleri sistematik olarak analiz etmek, bunlara çözümler geliştirmek üzere ilgili tüm unsurları (insan gücünü, bilgileri, yöntemleri, teknikleri, araç-gereçleri, düzenlemeleri vb.) işe koşarak uygun tasarımlar geliştiren, uygulayan, değerlendiren ve yöneten karmaşık bir süreçtir…

Bu tanımların ışığında “eğitim teknolojisinin” veya “öğretim teknolojisinin” genel olarak bir amaca hizmet ettikleri söylenebilir. Eğitim-öğretim sürecinin temel unsuru en iyi öğrenme ortamını hazırlamak ve sağlamaktır. Eğitim teknolojisinin yararlarını İlbi (2006) aşağıdaki gibi belirtmiştir:

- Öğrenmede sürekliliği sağlar,
- Öğrenmeyi kolaylaştırır,
- Somut öğrenmeyi gerçekleştirir,
- Öğretim süresini azaltır,
- Kopyalanan bir sistemdir,
- Öğrenciler arasında fırsat eşitliği sağlar,
- Serbest eğitimi sağlar,
- Aktif öğrenmeyi sağlar,
- Düşüncede sürekliliği sağlar,
- Öğrenciyi yaratıcılığa sevk eder,
- Birinci elden bilgiye ulaşma imkanı sağlar,
- İlgi ve motivasyonu gerçekleştirir,
- Öğrenmede kalıcılığı arttırır.

Bu bölüme ait ilk cümlelerde teknoloji sözcüğünün çoğu zaman yanlış anlaşıldığı ve bu yüzden yanlış kullanıldığı açıklanmıştır. Teknoloji genel bir ifadedir ve birçok ürünü kapsamaktadır. Acaba teknoloji destekli eğitim denilince de ilk akla gelen eğitim sürecinde tüm eğitim-öğretim teknolojilerinin kullanılması mıdır? Teknoloji destekli eğitim ne demektir? Özden (2000) teknoloji destekli eğitim hakkında aşağıdaki gibi bir genelleme yapmıştır:

> …Bilgisayar ve ağı (LAN, Internet, Intranet) üzerinden erişilebilen, çok ortamlılık (multimedia) özelliklerine sahip, etkileşimli olarak hazırlanmış, pedagojik özellikleri olan, bilgi aktarmanın yanı sıra beceri kazandırmaya yönelik, eğitim alanlarının performanslarının bilgisayar tarafından otomatik değerlendirilebildiği ve kaydedilebildiği, herkesin kendi bilgi algılama ve kavrama hızına göre ilerleyebildiği ve kendilerine uygun zaman ve yerde eğitim alabilmelerine olanak sağlayan kurs malzemelerinin kullanılarak yapıldığı kişisel veya kitlesel bir uygulamadır…

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılabileceği gibi, eğitim-öğretim sürecinde kullandığımız temel öğelerin başında bilgisayarlar gelmektedir. Ayrıca, teknoloji desteğinden faydalanılarak, eğitimde kullanılan öğretim araçlarından bazıları şunlardır (Öner, 2009:11,12):

- Akıllı tahta,
- Bilgisayar,
- Projeksiyon,
- Tepegöz,
- Tarayıcı,
- Flash bellek,
- Dijital kamera,
- Web kamerası,
- Slayt makinesi,
- Video,
- Ses kayıt cihazı.

Teknolojinin son otuz yıldaki hızla ilerleyişi ve üretilen bilgi işleme araçlarının pratik ve öğrenme-öğretme sürecine uygun oluşu, eğitimcileri olumlu yönde etkilemiştir. Teknolojinin günlük hayatımıza hızla girmesi ve ilerlemeye devam etmesi; eğitimcilerin aklına, acaba teknoloji öğrencilerin başarısını artıracak mıdır sorusunu getirmiştir. Örneğin, Matematik eğitimindeki yapılan araştırmaların ortak noktası, “matematiği nasıl daha iyi öğretiriz?” sorusudur.

Bunun yanında, geleneksel yaklaşım olan "sadece konuşmayla öğretim" artık kabul edilemez ve yeterli olmamaktadır, çünkü bu yaklaşım her bir öğrencinin bilişsel seviyesini ve kişisel gelişimini göz ardı etmektedir (Dikovic, 2007:109). Bu yaklaşımlar sayesinde bilgisayarlar ve birlikteliğindeki teknolojiler matematik öğretimi için araştırabilir konular olmuştur. Yaptıkları araştırmaların başlıklarında "bilgisayar destekli eğitim" veya "bilgisayar destekli öğretim" geçmektedir. Araştırmacılar, bu iki ifadeyi birbirinden ayrı kullanmışlar ve bu ayrılığı aşağıdaki cümlelerle vurgulamışlardır.

Odabaşı (1998)'na göre bilgisayar destekli eğitim, bilgisayar teknolojisinin öğretim sürecindeki uygulamalarının her biridir. Bu uygulamalar, bilgi sunmak, özel öğretmenlik yapmak, bir becerinin gelişmesine katkıda bulunmak, benzeşim gerçekleştirmek ve sorun çözücü veri sağlamak olabilir.

Senemoğlu (2001)'na göre, bilgisayar destekli öğretim, öğrencilerin programlı öğrenme materyalleri ile bilgisayar kullanarak etkileşimde bulunduğu; diğer bir deyişle, bilgisayar programları aracılığıyla öğrenmeyi gerçekleştirdiği, öğrenmelerini izleyip kendi kendini değerlendirebildiği bir öğretim biçimidir.

Matematik eğitimi açısından bakıldığında, bu tanımlarla eğitim-öğretim sürecinde bilgisayar başında olan çocuğa, öğretmenin müdahale etme şansının az olduğu anlaşılabilir. Bu nokta küçük bir dezavantaj gibi görülebilir, ama asıl önemli olan her öğrenciyi canlı tutmasıdır. Erbaş (2005)'a göre, teknoloji matematik becerilerinin öğrenilmesinin yerini almamakta; aksine beceri seviyelerini gözetmeksizin tüm öğrencilere matematiksel düşünceyi ulaşılabilir kılmakta, aynı zamanda öğretmeni ise aktif angajman ve yükümlülükten salıvermektedir.

Bunun yanında, matematik öğrenme ve öğretmedeki teknolojinin rolünü NCTM (2008), aşağıdaki gibi açıklamıştır (akt. Özen, 2009:14,15):

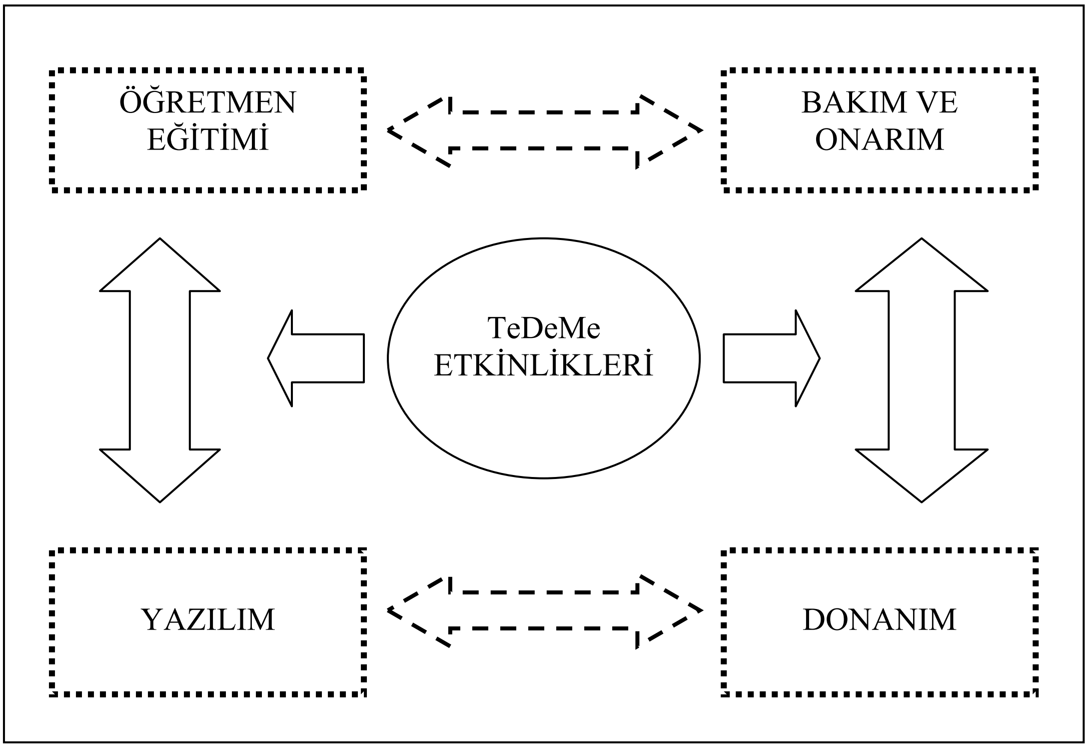
> … Teknoloji 21. yüzyılda matematik öğrenmek için gerekli bir araçtır ve tüm okullar öğrencilerinin tamamının teknolojiye erişimini sağlamalıdır. Etkili öğretmenler, öğrencilerin anlamalarını geliştirmek,

> ilgilerini canlandırmak ve matematik yeterliliklerini arttırmak için teknoloji potansiyelini en üst düzeye taşırlar. Teknoloji elverişli olarak kullanıldığında, tüm öğrencilerin matematiğe ulaşmasını sağlamaktadır…

Araştırmacılar, genel olarak matematik öğretiminde bilgisayar desteğinin önemli bir unsur olduğunu vurgulamaktadırlar. Ersoy ve Baki (2004)'ye göre teknoloji destekli matematik etkinlikleri aşağıdaki şekilde verilen boyutların eş zamanlı olarak planlanması, yatırım bütçelerinin belirtilen boyutları oluşturulan bileşenleri ve aralarındaki ilişkiler düşünülerek oluşturulması gerekmektedir.

Şekil 4

Teknoloji Destekli Eğitimin Boyutları ve Bileşenleri Arasındaki İlişki



Matematik eğitimindeki başarıyı arttırmak için, araştırmacılar, teknoloji destekli öğretimin bir araç olabileceğini düşünerek konu ile ilgili çalışmalar yapmışlar oldukça somut bulgular elde etmişlerdir. Örneğin, Birgin, Kutluca ve Gürbüz (2008), yedinci sınıf matematik dersinde bilgisayar destekli öğretimin öğrenci başarısına etkisini araştırmışlardır. Araştırma yedince sınıfta öğrenim görmekte olan, 22'si deney, 21'i kontrol grubunda olmak üzere toplamda 43 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Deney grubunda "coypu" ve "Excel" programları kullanılmış, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yapılmıştır. Araştırmada veri toplama aracı olarak, araştırmacılar tarafından geliştirilen 8 kısa ve 7 uzun cevaplı sorudan oluşan bir başarı sınavı kullanılmıştır. Araştırma öncesi grupların ön test puanları arasında anlamlı bir fark yokken, son test puanlarına göre deney grubu öğrencilerinin kontrol grubu öğrencilerine göre istatistiksel olarak daha başarılı oldukları görülmüştür.

Bedir (2005), bilgisayar destekli geometri öğretiminin ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin başarılarına ve tutumlarına etkisini incelemiştir. Araştırma toplam 49 öğrenci üzerinde deneysel olarak gerçekleştirilmiştir. Araştırmada veri toplama aracı olarak geometri başarı testi ve geometriye yönelik tutum ölçeği kullanılmıştır. Araştırma sonunda, bilgisayar destekli geometri öğretiminin öğrencilerin geometriye yönelik başarılarını ve tutumlarını arttırdığı görülmüştür.

Işıksal ve Aşkar (2005), yedinci sınıf matematik dersinde, dinamik geometri yazılımını ve hesap çizelgesini kullanımının öğrencilerin matematik başarılarına ve matematik öz yeterliliklerine etkisini araştırmışlardır. Araştırma, 2 deney ve 1 kontrol grubu olmak üzere toplamda 3 grup ve 63 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Deney grubunun birisinde Excel, diğerinde Autograph programı, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yöntemi gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonunda, Autograph kullanılan ve geleneksel öğretim yapılan grubun ortalama puanları anlamlı derecede Excel kullanılan grubun ortalama puanlarından yüksek olarak saptanmıştır. Matematik başarıları, matematik öz yeterlilikleri ve cinsiyetler arasında anlamlı bir fark bulunmamıştır. Bilgisayar öz yeterliliğine göre ise erkek öğrenciler lehine anlamlı bir farka rastlanmıştır.

Öner et. al. (2008), teknoloji destekli cebir öğretiminin altıncı sınıf öğrencilerinin fen ve teknoloji dersi kuvvet ve hareket ünitesi üzerindeki başarılarına etkisini araştırmıştır. 30 altıncı sınıf öğrencisi iki gruba ayrılmıştır ve deney grubu öğrencilerine teknoloji destekli öğretim uygulanmış, kontrol grubu öğrencilerine geleneksel öğretim yöntemi yapılmıştır. Uygulama öncesi öğrencilere kuvvet ve hareket ünitesine ait 4 açık uçlu problem verilip değerlendirilmiştir. Son test olarak da paralel sorular kullanılmıştır. Araştırma sonuçlarına göre, öğrencilerin son test puanlarına göre anlamlı bir farka rastlanmamıştır.

Özen et. al. (2008), teknoloji destekli geometri öğretiminin altıncı sınıf öğrencilerinin fen ve teknoloji dersi ışık ve ses ünitesindeki başarıları üzerindeki etkisini incelemiştir. Araştırma 17'si deney, 15'i kontrol grubunda olmak üzere toplamda 32 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırmada deney grubunda, simetri ve yansıma konuları teknoloji destekli olarak öğretilirken, kontrol grubunda geleneksel öğretim yöntemi yapılmıştır. Araştırmada, ölçme aracı olarak ışık ve ses ünitesine ait çalışma yaprakları kullanılmıştır. Araştırma sonunda, deney grubu öğrencilerinin son test puanlarının kontrol grubu öğrencilerinin puanlarına göre istatistiksel seviyede yüksek olduğu görülmüştür.

Öner (2009), yedinci sınıf cebir öğretiminde teknoloji destekli eğitimin öğrencilerin erişi düzeylerine, tutumlarına ve kalıcılığa etkisini araştırmıştır. Araştırma toplamda 56 olmak üzere, 28 deney ve 28 kontrol grubu öğrencisi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı, deney grubunda teknoloji destekli cebir öğretimi uygulanmış, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yapılmıştır. Araştırmada veri toplama aracı olarak cebir başarı testi ve matematik tutum ölçeği kullanılmıştır. Araştırmanın sonucuna göre, teknoloji destekli cebir öğretiminin öğrencilerin erişi düzeylerini arttırdığı görülmüştür. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin son test puanları arasında anlamlı bir fark olmamasına rağmen, teknoloji destekli öğretim yapılan deney grubu öğrencilerinin son test ve erişi puan ortalamaları kontrol grubunun ortalamalarına göre daha yüksek olduğu belirlenmiştir.

Özen (2009), ilköğretim yedinci sınıf geometri öğretiminde dinamik geometri yazılımlarının öğrencilerin erişi düzeylerine etkisini incelemiş ve ek olarak öğrenci görüşlerini değerlendirmiştir. Araştırma dört hafta boyunca deney ve kontrol grubunda yer alan toplam 40 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın deney grubunda dinamik geometri yazılımları ile bilgisayar destekli öğretim yöntemi, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yöntemi uygulanmıştır. Veri toplama aracı olarak Middle Grades Mathematics Project Uzamsal yetenek testi, geometrik cisimler erişi düzeyi belirleme ölçeği ve öğrenci görüş formu kullanılmıştır. Araştırma sonuçlarına göre, dinamik geometri yazılımlarının kullanıldığı deney grubu öğrencilerinin geometrik cisimler erişi ortalamalarıyla kontrol grubu öğrencilerinin erişi ortalamaları arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark bulunmuştur. Uzamsal yetenek açısından ise anlamlı bir farka rastlanmamıştır.

Yemen (2009), ilköğretim sekizinci sınıf analitik geometri öğretiminde teknoloji destekli öğretimin öğrencilerin başarısına ve tutumuna etkisini araştırmıştır. Araştırma, 25'i deney, 25'i kontrol grubunda olmak üzere toplamda 50 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırmada, veri toplama aracı olarak analitik geometri başarı testi ve matematiğe yönelik tutum ölçeği kullanılmıştır. Araştırma bulgularına göre, teknoloji destekli analitik geometri öğretimi öğrencilerin başarısını arttırırken, matematik yönelik tutuma bir etkisinin olmadığı görülmüştür. Bunun yanında iki grupta da öğrencilerin matematik başarıları ile matematiğe yönelik tutumları arasında anlamlı bir ilişkiye rastlanmamıştır.

2.5. Matematiksel ve Uzamsal Düşünme

Alanyazın incelendiğinde araştırmacıların son yıllarda uzamsal düşünme üzerine fazlaca araştırma yaptıkları görülmektedir. Bunun sebebi ise uzamsal düşümenin matematiksel düşünmeyle ilişkisi ve matematiksel düşünmeyi geliştirmek için uzamsal düşünmenin gelişmesinin bir araç olup olmayacağıdır. Bu amaç, uzamsal düşünmeyi tanımlamaksızın, sezgisel olarak bir matematik eğitimcisini uzamsal düşünmenin bir matematiksel düşünme çeşidi olduğu yanılgısına götürebilir. Halbuki uzamsal düşünme matematiksel düşünmeden ayrı bir yetenek olarak tanımlanmaktadır. Bu yaklaşım ise bireylerde var olan iki farklı düşünme çeşidinin varlığından hareketle tanımlanmaktadır.

Paivio (1986) bir nesnenin zihinde canlandırılmasının sözel gösterimlerden farklı olduğunu öne sürerken, bazı çalışmalarda insanın sahip olduğu iki farklı düşünme şeklinden sözel ve matematiksel-mantıksal düşünmeden söz edilmiştir. Bu çalışmaların ışığında Jones (2001:55) insanın düşünmesini sözel ve uzamsal muhakeme olarak ikiye ayırmıştır. Jones (2001)'a göre sözel muhakeme, sembollerle, anlamlı diziler ve örgütlemelerle fikir oluşturma işlemidir; uzamsal muhakeme ise nesneler arasındaki ilişkiler vasıtasıyla fikir oluşturma işlemidir.

Howard Gardner (1983), teorisinde bir bireyde sekiz farklı zeka çeşidinin varlığından bahsetmiştir ve matematiksel-mantıksal zeka ile görsel-uzamsal zekayı birbirinden ayrı tanımlamıştır. Gardner (1983)'a göre bu zeka farklı yeteneklerdir. Başaran (2004) bu zeka çeşitlerini aşağıdaki cümlelerle açıklamaya ve birbirinden ayırmaya çalışmıştır:

> …Matematiksel-Mantıksal zeka, sayılar ve akıl yürütme zekası olarak belirtilmektedir. Tümdengelim ve tümevarım kullanarak akıl yürütme, soyut problem çözme ve birbiri ile ilişkili kavramlar ve düşünceler arasındaki karmaşık ilişkiyi anlama yeteneği yada benzer yönleri arama zekası olarak belirtilmektedir… (s:7)

> …Görsel-Uzamsal zeka, resimler ve imgeler zekası yada görsel dünyayı doğru olarak algılama ve kişinin kendi görsel yaşantılarını yeniden yaratma kapasitesi olduğu belirtilmektedir. Şekil, renk ve dokunuşu 'Zihin Gözü' ile görme ve bunları resim olarak somut temsillerine dönüştürme yeteneğini içerdiği ileri sürülebilir… (s:8)

Jones (2001)'ın muhakeme ayrımında beceriler genellikle sözel ve uzamsal olarak ikiye ayrılmıştır. Yukarıdaki tanımlar ise uzamsal ve muhakeme kavramlarını ayırıyor gibi görülebilir. Bu noktada bu bölümün ilk cümlelerinde yapılan ayrıma ışık tutacak ifadelere ihtiyaç duyulmuştur. Carroll (1993) bu ayrıma psikometrik faktörleri de dahil ederek, uzamsal düşünmeyi, kodlama, hatırlama, dönüştürme ve benzeri ile eşleştirme yetenekleri olarak tanımlamıştır (s.305). Araştırmacının bu tanımına dayanarak, zihne bir bilgiyi kodlamak, onu tekrar geri çağırmak (burada resimsel ya da fotoğrafik hafıza dediğimiz beceri devreye giriyor), gerektiğinde elimize kalemi alıp başka bir görüntüye çevirme yada başka bir görüntüyle eşleştirebilme becerilerinin tümüne birden uzamsal düşünme denebilir.

Kahramaner ve Kahramaner (2002:21) matematiksel düşünme problem çözme etkinliğidir ve bu süreç iki aşamada gerçekleşir. Bunlar;

1. Üzerinde düşünülen sorunu açıklayıp, anlamaya çalışmak, bundan sonra ise sorunu giderici çözüm bulmaktır.
2. Sorunu giderici çözümü bulduktan sonra, doğruluğunu yoklama biçimindedir.

Birinci aşama buluş yada yaratma, ikinci aşama doğrulama yada ispatlamadır. Kabaca birinci aşamaya indüktif, ikinci aşamaya da dedüktif düşünme süreci söylenebilir.

Araştırmacıların matematiksel düşünmeden bahsedildiğinde mutlaka muhakeme sözcüğünü de birlikte kullandıkları ve bireyin bilişsel faaliyetlerinin ön planda olduğu göze çarpmaktadır. Örneğin, Yıldırım (1996) da matematiksel düşünmede kişisel deneyim ve mantığın da ön planda olduğunu aşağıdaki cümlelerle açıklamıştır:

> …Matematiksel düşünme temelde günlük ve bilimsel düşünmeden farklı değildir. Her türlü düşünmenin başta gelen amacı, doğruya ulaşmaktır. Doğruluk günlük ve bilimsel düşünmede gözlem yada deney verilerine, matematik ve mantıkta ise ispata bağlıdır… (s:54)
>
> …Matematiksel düşünme, kuralları belli salt dedüktif çıkarımdan ibaret değildir, her aşamada kişinin deneyim, sezgi yaratıcı imgelem ve zeka gücünü gerektirir… (s:159)

Bell'in matematiksel düşünme ile ilgili görüşleri ise YÖK Dünya Bankası Milli Eğitimi Geliştirme Projesi'nde şöyle aktarılmıştır (YÖK/Dünya Bankası, 1997:15):

> …Matematiğin çoğu kullanımı, matematiksel olarak ifade etme veya matematiksel model kurma, işlem yapma ve yorum yapma evrelerini içerir. Matematikten yararlanılırken, verilen durumda matematiksel ilişkilerle açıklanabilecek yönlerin tanınması ve bu ilişkilerin sembollerle ifadesi, sembolik ifadeler üzerinde yeni bir yönü ortaya çıkaracak şekilde işlem yapılması, böylece ortaya çıkan bu yeni yönün yorumlanması veya verilen durumda bu yeni yöne ilişkin bir sezgiye ulaşılması gerekir…

Yukarıdaki tanımlar incelendiğinde matematiksel düşünme için muhakeme becerisinin ve mantıksal çıkarımın mutlaka var olması gerektiği söylenebilir. Uzamsal düşünme için ise mantıksal çıkarıma ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu iki kavramın birbiriyle ilişkisi nedir? Matematik eğitiminde bu kavramlar niye çok önemlidir?

Turğut (2007)'a göre matematiksel düşünme görülen, bakılan şeylerin zihne kaydedilmesiyle tamamen elde edilemez. Karşılaşılan durumların bir sentezi yapılır, bir sonraki adım için muhakeme, karşılaştırma, örgütleme yapılır. Matematiksel bilgi doğrudan oluşmaz, oluşamaz, düşünme sürecinin bir ürünüdür, bu süreç daha önceki çözülen problem ve karşılaşılan durumlardaki deneyimleri kapsar. Matematiksel ve uzamsal düşünme arasındaki ilişki ise uzamsal düşünmenin her zaman matematiksel düşünmeyi destekler olmasıdır. Uzamsal düşünme nesneleri, karşılaşılan durumun görsel halini zihinde ele alma gücüdür. Bireyin uzamsal düşünme seviyesinin yüksek olması matematiksel düşünmesinin varlığını gerektirmez, eğer böyle olsaydı tüm ressamlar çok iyi birer matematikçi olurdu. Ayrıca teknik liselerde okuyan teknik çizimi iyi olan bir öğrencinin iyi matematik bilmesi gerekirdi. Oysa böyle bir durum sözkonusu değildir. Uzamsal düşünme, matematiksel düşünme içerisinde bireye problem çözerken açıklayıcı şekiller çizmesini, sözel problemler verildiğinde (örneğin, bir kenar uzunluğu a br olan bir küpün cisim köşegeniyle ilgili bir problem) zihninde bunu canlandırarak kolayca çizebilmesini, organize etme verileri tablo haline getirme gibi kolaylıklar sağlar. Diğer taraftan da şekiller arasındaki ilişkiyi inceleyen geometri, şekilleri akılda daha iyi tasarlamayı, kavramlar arasındaki ilişkinin daha iyi kavranmasını destekler.

2.5.1. Uzamsal Yetenek ve Bileşenleri

Alanyazında, uzamsal yetenek kavramı yerine, uzamsal görselleştirme, görsel-uzaysal yetenek, uzamsal kavrama yeteneği ve 3 boyutlu görselleştirme ifadeleri birbirlerinin yerlerine kullanılmaktadırlar (Turğut, 2007; Cantürk-Günhan et. al. 2009; Turgut et. al., 2009). Bu ifadeler araştırmacılar belli bir "uzamsal yetenek" ve bu sebeple de alt bileşenleri tanımı üzerinde hemfikir olmamalarından kaynaklanmaktadır. Uzamsal yetenek kavramını tanımlamaya çalışan ilk araştırmacılardan birisi olan French (1951), uzamsal yeteneği ‘3 boyutlu uzaydaki nesnelerin hareketlerinin canlandırma ile kavrama veya zihinde, hayalde nesneleri hareket ettirebilme yeteneği’ olarak tanımlamıştır (akt. McGee,1979:21). Ekstrom et. al. (1976) ise uzamsal yeteneği ‘ uzamsal şekilleri kavrama yada uzaydaki nesnelerle meydana gelen yeni durumlardaki yönelim yeteneği’ olarak tanımlamıştır.

Lohman (1993)’a göre uzamsal yetenek, görsel bir imgeyi meydana getirebilme, bir şekli devam ettirebilme, yeniden düzenleme ve başka bir şekle dönüştürebilme olarak tanımlanabilir.

McGee (1979:3) uzamsal yeteneğin iki alt bileşeninden uzamsal görselleştirme ve uzamsal yönelimden bahsetmiştir. Uzamsal görselleştirme 2 ve 3 boyutlu nesnelerin imgelerini oluşturma, imgeleri zihinsel olarak döndürme ve değişimleme yeteneklerini içermektedir (McGee, 1979’dan aktaran Kurt, 2002:121). McGee (1979)’ye göre uzamsal görselleştirme ile uzamsal yönelimi birbirinden ayıran cismin hareketidir. Eğer görünen, ele alınan bir cismin tüm parçalarının zihinde hareket ettirilmesi işlemi varsa o uzamsal görselleştirmeyi oluşturur. Uzamsal yönelim etkinlikleri zihinde, cismin hareketini içermez. Nesneye bakan kişinin bakış açısının, bakış noktasının değişimi sonucu meydana gelen görüntüyü canlandırma işidir. Kısaca uzamsal yönelim hareket etmeyen bir cisme başka bir açıdan bakmadır.

Uzamsal görselleştirme ve uzamsal yönelim birbirlerine benzer olmalarına rağmen uzamsal görselleştirme, nesnenin hareketini ve parçalarının zihinde yeniden oluşturulmasını gerektirir (Kim, 2002:36). Bu nedenle de uzamsal görselleştirmenin uzamsal yönelime göre daha karmaşık olduğu söylenebilir.

Alanyazın incelendiğinde uzamsal görselleştirmenin en çok tanındığı ve çalışmalarda en çok bu alt bileşenin üzerinde durulduğu görülür. Ekstrom et al. (1976:173) uzamsal görselleştirmeyi bir nesnenin hareket ettirilmesi ve dönmesi sonucunda nesnenin yeni halinin canlandırılması olarak tanımlamıştır. Diğer taraftan

Lohman (1988) ve Smith (1998)'in uzamsal yeteneğin üç ayrı bileşeni olduğunu düşünmektedirler ve tanımları aşağıdaki gibidir:

Uzamsal Yönelim: Bir şeklin görüntüsünün, başka bir pozisyondan görüntüsünün nasıl olduğunu hayal edebilme, canlandırabilme yeteneğidir (Lohman, 1988). Burada perspektif değişimi söz konusudur. Smith (1998:18) uzamsal yönelimde görüntüleyenin hareket ettiğini, cismin hareket etmediğini öne sürmüştür.

Zihinde döndürme: Zihinde döndürmeyi Smith (1998:19), bir görsel uyarıcının dönmesini hayal edebilme yeteneği olarak tanımlamıştır.

Uzamsal Görselleştirme: Uzaydaki bir görüntünün dönmesi veya hareket etmesi genel olarak uzamsal görselleştirmeyi oluşturur.

Diğer taraftan Smith (1998:22), uzamsal görselleştirmeyle uzamsal yönelim ve zihinde döndürme kavramlarını aşağıdaki cümlelerle birbirinden ayırmaya çalışmıştır.

> …Uzamsal görselleştirme bilişsel bir işlemdir, uzamsal yönelim ve zihinde döndürme ise daha çok etkinlik tarzındadır. Bilişsel işlem nedeniyle uzamsal görselleştirme problemleri, genellikle birden fazla nesnenin görüntüsünün zihinde bir dizi dönüşümlere uğramasını gerektirir ve bunun sonrasında çözülebilir. Bu dönüşümler zihinde döndürmeyi, perspektif değişimini ve yer değişimi gibi dönüşümleri gerektirir. Bu yüzden zihinde döndürme ve uzamsal yönelimin uzamsal görselleştirmenin alt bileşenleri olduğu ve gene bu alt bileşenlerin uzayda bir tek hareketi içerdiği söylenebilir…

Uzamsal yeteneğin alt bileşenleri üzerindeki bu kararsızlık, araştırma sürecinin devamı olan bu yeteneğin nasıl ölçüleceği sorusunu gündeme getirmiştir. Araştırmacılar bu soruya doğrudan maruz kalmadan önce, Linn ve Petersen (1985) bir meta analiz çalışmasıyla bu karmaşıklığı gidermeye çalışmış ve uzamsal yeteneğin 3 alt bileşeninden söz etmiştir. Bunlar uzamsal kavrama (spatial perception), zihinde döndürme (mental rotation) ve uzamsal görselleştirme (spatial visualization)'dir. Uzamsal görselleştirmeyi diğer iki bileşenden çoklu çözme stratejisinin var olma olasılığından dolayı ayırmışlar, bu bileşende çözüme ulaşmak için birden çok adımın gerekli olduğunu öne sürmüşlerdir. Uzamsal kavramayı bireyin yönelimi kavrama ve uzamsal ilişkileri belirleyebilme yeteneği olarak, zihinde döndürmeyi 2 ve 3 boyutlu uzaydaki bir nesneyi hızlı ve çabuk olarak döndürebilme yeteneği olarak, uzamsal görselleştirmeyi ise bir nesnenin birçok adımlı tamamlanmış hareketleriyle ilgili uzamsal yetenek etkinlikleri olarak tanımlamışlardır. Burada Linn ve Petersen (1985)'in yaptığı ayrım, zihinde döndürme kavramını uzamsal görselleştirmenin içerisinden ayırmak olmuştur.

Contero et. al. (2005) ise Linn ve Petersen (1985)'e benzer olarak 3 farklı alt bileşenden söz etmiştir. Birincisi uzamsal ilişkiler (spatial relations), ikincisi görselleştirme (visualization) ve üçüncüsü uzamsal yönelim (spatial orientation)'dir. Diğer taraftan psikometrik faktörler ve bilgi işleme araştırmaları uzamsal yeteneğin iki alt basamağının varlığını desteklemiştir (Pellegrino et. al. 1984'dan akt. Odell:11). Bu bileşenler uzamsal ilişkiler (spatial relations) ve uzamsal görselleştirme (spatial visualization)'dir. Bu becerilerle ilgili yetenek testleri incelendiğinde uzamsal ilişkilerle ilgili sorularda öğrencinin kağıt üzerinde verilen bir grup nesneden hangisinin ilk gösterilen şeklin döndürülmüş yada çevrilmiş hali olduğuna karar vermesi gerekmektedir (Pellegrino et al, 1984'dan akt. Olkun ve Altun, 2003:2). Bunun yanında Odell (1993:7), uzamsal ilişkileri zihinde döndürme işlemiyle hızlı ve doğru şekilde meşgul olma işini harekete geçirebilme yeteneği olarak tanımlamıştır. Olkun ve Altun (2003) uzamsal ilişkiler alt bileşenini aşağıdaki gibi özetlemiştir.

> …Uzamsal ilişkiler, öğrencinin 2 ve 3 boyutlu geometrik formları bir bütün olarak zihinde evirip çevirebilmesi ve onları çeşitli konumlanışlarında tanıyabilmesidir. Ayrıca bu testlerde kişinin doğru karar vermesinin yanında çabuk karar vermesi de beklenmektedir…

Uzamsal görselleştirmeyi Burnet ve Lane (1980)'den sonra da Olkun ve Altun (2003) bir yada birden çok parçadan oluşan 2 ve 3 boyutlu nesneler ve bunların parçalarına ait görüntülerin üç boyutlu uzayda hareket ettirilmesi sonucu oluşacak yeni durumların zihinde canlandırılabilmesi becerileri olarak tanımlamışlardır. Bu beceriyi ölçen standart testlerdeki maddeler incelendiğinde hareketli parçalardan oluşan karmaşık şekiller ve/veya zihinde katlama ya da zihinsel bütünleme (mental integration) yoluyla iki boyuttan 3 boyutluya dönüştürme gibi zihinsel eylemleri gerektirdiği görülmektedir (Pellegrino et al., 1984'den akt. Olkun ve Altun, 2003:2).

Bu testlerde uzamsal ilişkilerde olduğunun aksine hızdan çok gittikçe karmaşıklaşan maddelerdeki doğruluğa önem verilmektedir.

Turğut (2007), yukarıda açıklanan araştırmacıların uzamsal yeteneğe ait alt bileşen tanımlarını aşağıdaki tabloyla özetlemiştir (s.19):

Tablo 2

Yazarlara Göre Uzamsal Yeteneğin Bileşenleri

	Araştırmacı(lar)				
Bileşen	McGee (1979)	Linn ve Petersen (1985)	Lohman (1988) ve Smith (1998)	Pellegrino et al. (1984) ve Olkun (2003)	Contero et. al. (2005)
Uzamsal Kavrama		√			
Uzamsal Yönelim	√	√	√		√
Uzamsal Görselleştirme	√	√	√	√	√
Zihinde Döndürme			√		
Uzamsal İlişkiler				√	√

Alanyazında uzamsal yeteneği ölçmek için birçok test görülmektedir. Araştırmacıların, uzamsal yeteneğin alt bileşenleri üzerinde hemfikir olmamalarında dolayı hangi testin neyi ne kadar ölçtüğü hep tartışma konusu olmuştur. Olkun (2003:10) yapmış olduğu uzamsal ilişkiler ve uzamsal görselleştirme alt bileşenleri tanımına dayanarak standart testleri aşağıdaki gibi örgütlemeye çalışmış ve tanımlara karşılık gelen örnek test maddelerini vermiştir (akt. Turğut, 2007:20):

Tablo 3

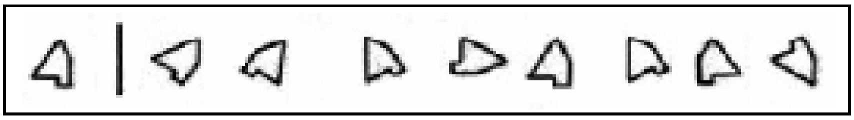
Uzamsal Yetenek Bileşenleri ve İlgili Testler

	Uzamsal Yetenek	
Bileşen	**Uzamsal İlişkiler**	**Uzamsal Görselleştirme**
Tanım	2 ve 3 boyutlu geometrik formları bir bütün olarak zihinde evirip çevirebilme	2 ve 3 boyutlu nesneler üç boyutlu uzayda hareket ettirilmesi sonucu oluşacak yeni durumları zihinde canlandırılabilme
İlgili Test	MGMP Uzamsal Görselleştirme Testi, Temel Zihinsel Yetenekler Testi, French Referans Kiti	MGMP Uzamsal Görselleştirme Testi, Purdue Uzamsal Görselleştirme Testi, Minnesota Kağıt Formu Testi, Karmaşık Yetenek Testi, French Referans Kiti
Tipik Maddeler	2 ve 3 Boyutlu Nesneleri Zihinde Döndürme, Küp Karşılaştırma	Kağıt Katlama, Yüzey Tamamlama, 2 Boyuttan 3 Boyuta Dönüşüm Yapma
Zorluk/Karmaşıklık	Birbiriyle İlintili Basit Etkinlikler	Birbiriyle İlintili Karmaşık Etkinlikler
Hız ve Güç	Hız Önemli	Güç Önemli

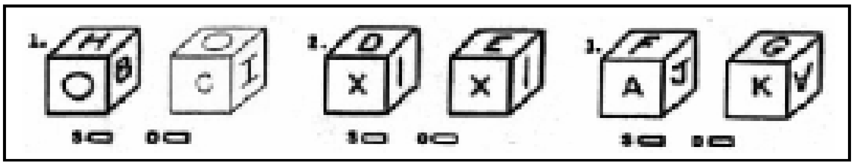
Yukarıda açıklanan kavramlara karşılık gelen test maddeleri ise aşağıdaki şekilde verilmiştir (Olkun, 2003:10'dan akt. Turğut, 2007:21):

Şekil 5

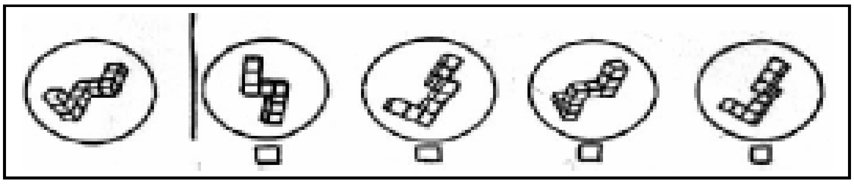
Uzamsal Yeteneğin Bileşenlerine Karşılık Gelen Örnek Maddeler



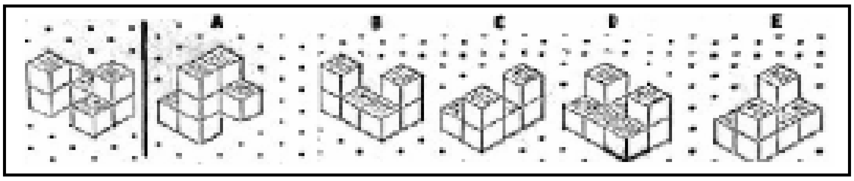
2 Boyutta Zihinde Döndürme (Uzamsal İlişkiler)



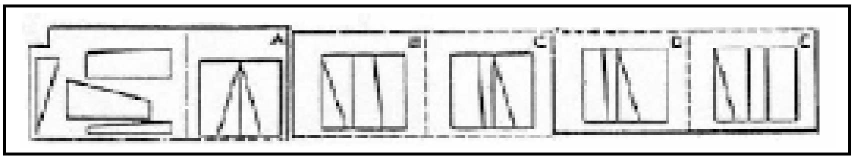
Küp Karşılaştırma (Uzamsal İlişkiler)



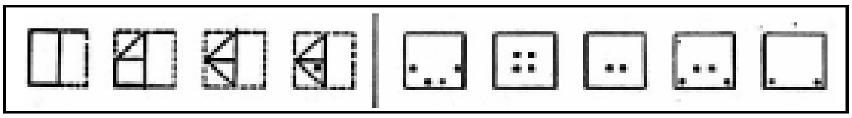
3 Boyutta Zihinde Döndürme (Uzamsal İlişkiler)



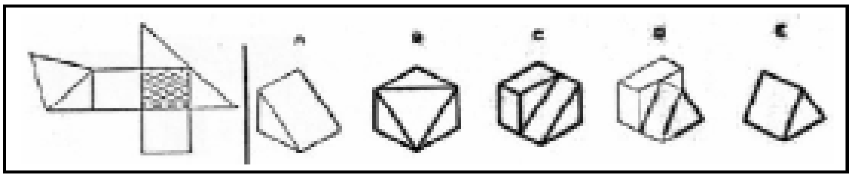
3 Boyutta Zihinde Döndürme (Uzamsal İlişkiler)



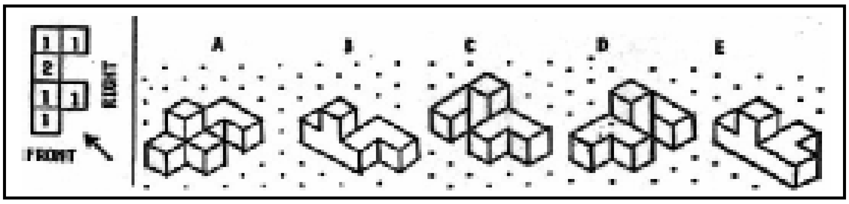
Kağıt Formu (Uzamsal Görselleştirme)



Kağıt Katlama (Uzamsal Görselleştirme)



Yüzey Tamamlama (Uzamsal Görselleştirme)



2 Boyuttan 3 Boyuta Dönüşüm Yapma (Uzamsal Görselleştirme)

2.6. Uzamsal Yeteneğe Etki Eden Faktörler

2.6.1. Cinsiyet

Alanyazın incelendiğinde genel olarak erkeklerin matematik başarılarının kızlara göre daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu durum, bazı araştırmacılar tarafından uzamsal yeteneğin doğasına bağlanmıştır. Ethington ve Wolfe (1984), bu farklılığın sebebini erkeklerin uzamsal yeteneklerinin daha güçlü olmasına bağlarken, Fennema ve Sherman (1978) bu duruma psikososyal açıdan bakarak erkeklerin kendilerine kızlara oranla daha fazla güvenmelerine bağlamıştır. Diğer taraftan McGee (1979), Fennema ve Tartre (1985) ve Tartre (1990) uzamsal yeteneğin cinsiyete; erkeklerin lehine göre farklılık gösterdiğini vurgulamışlardır. Bunun aksine bazı araştırmalarda ise cinsiyete göre farklılıklar görülmemiştir. Örneğin, Caplan, MacPherson ve Tobin (1985) uzamsal yetenekle cinsiyet arasında bir ilişkiye rastlamamışlardır. Bunun yanında Turğut (2007), ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin uzamsal yetenekleri ile cinsiyetleri arasında sınıflara göre tutarlı ilişkilere rastlamamıştır. Bunun sebebi kimi araştırmaların ilköğretim seviyesinde, kimilerinin yetişkinler üzerinde gerçekleştirilmiş olması olabilir.

Geiringer ve Hyde (1976) bir uzamsal yetenek testini ve Piaget'in su seviyesi etkinliğini kullanarak 5. ve 12. sınıf öğrencileri üzerinde bir araştırma yapmışlardır. Araştırmada 5. sınıf öğrencilerinde cinsiyet açısından ne uzamsal yetenek testinde ne de Piaget'in su seviyesi etkinliğinde anlamlı bir farka rastlanmıştır. Fakat 12. sınıf öğrencilerinde durum farklı olarak su seviyesi etkinliğinde anlamlı bir fark yokken uzamsal yetenek testinde erkekler daha yüksek puanlar elde etmişlerdir.

Manger ve Eikeland (1998) cinsiyet farklılığının matematik başarısı ve uzamsal görselleştirme yeteneği ile ilişkisini araştırmışlardır. 6. sınıftaki 724 öğrenci üzerinde yapılan araştırmada erkeklerin matematik başarısı istatistiksel olarak kızlara göre daha yüksek çıkmıştır. Fakat başarı testindeki zor maddeler çıkarıldığında bu farklılık ortadan kalkmıştır. Uzamsal görselleştirme yeteneği üzerinde ise bir cinsiyet farklılığına rastlanmamıştır.

Diğer bir araştırmada Clements ve Battista (1992) uzamsal yeteneklerin bireysel farklılıklara göre uzamsal problemin tipine de bağlı olabileceğini öne sürmüştür. Çalışmalarında uzamsal kavrama ve dönme sorularında genel olarak erkeklerin daha iyi puanlar elde ettiğini, fakat görsel ve görsel olmayan problemlerle karşı karşıya gelindiğinde puanlarda farklılığın olmadığını saptamışlardır. Dolayısıyla da uzamsal düşünmenin kız ve erkeklerde farklı olduğunu erkeklerin daha çok sözel olmayan düşünme hallerini kızların ise sözel düşünme hallerini kullanmaya çalıştıklarını saptamışlardır.

Turğut (2007)'a göre araştırmacıların en başta uzamsal yeteneği farklı tanımlamaları dolayısıyla da kendi tanımlarına uygun ölçek geliştirmelerinin ardından yapılan, her çalışmada da farklı ölçek kullanmaları ve buna bağlı olarak da farklı sonuçlar elde etmeleri çok doğaldır. Bu noktada da akla cinsiyet faktörünün soru çeşitlerine göre değişip değişmediği gelebilir. Linn ve Petersen (1985) yaptıkları meta-analiz çalışmasının ardından, kendi yaptıkları tanım ışığında, en fazla cinsiyet farklılığının zihinde döndürme, uzamsal kavrama da orta ve uzamsal görselleştirme de en az olduğunu saptamışlardır.

Uzamsal yeteneğin cinsiyete göre değişip değişmediği hala araştırılan ve alanyazında merak edilen konulardan birisidir. Bu araştırmada da uzamsal yetenek ile cinsiyet arasındaki ilişki incelenmektedir. Daha önce aynı araştırmacının ilköğretim ikinci kademede gerçekleştirdiği inceleme, bu araştırmada yetişkinler üzerinde gerçekleştirilmiştir. Böylece uzamsal yeteneğin ülkemizdeki durumunun somut bir şekilde aydınlatılması amaçlanmış ışık tutulması sağlanmıştır.

2.6.2. Matematik Başarısı

Uzamsal yetenek genel anlamda, zihinde canlandırabilme becerisi olarak tanımlanabilir. Bu tanım, matematiğin alt dallarından biri olan geometri söz konusu olduğunda, uzamsal yetenekle geometri ve dolayısıyla da matematik arasında pozitif bir ilişki olması beklenen bir durumdur. Alanyazındaki birçok çalışmada pozitif ilişkiye rastlanırken, bazı çalışmalarda ise bu ilişkiye rastlanmamıştır.

Martin (1968), ortaöğretim matematik, fen, sanat, İngilizce, sosyal bilgiler ve ilköğretim öğretmenliği, matematik bölümü öğrencileri ve ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenleri üzerinde uzamsal yeteneklerin seviyesini incelemeye çalışmıştır. Araştırma sonunda ortaöğretim matematik öğretmenlerinin, ilköğretim öğretmenleri ve diğer bölüm öğrencilerine göre istatistiksel olarak daha başarılı olmuşlardır. Fakat matematik bölümü öğrencileri ile diğer bölüm öğrencileri arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Martin (1968) bu bulguların ışığında üniversite seviyesinde alınan daha fazla matematik dersinin uzamsal yeteneği artırdığını öne sürmüştür.

Middaught (1980) uzamsal yeteneğin gelişiminin matematik performansı ile ilişkisini araştırmak için 357 lise öğrencisi üzerinde çalışmıştır. Matematik performansını 5 ayrı; matematiksel bilgisayar dilbilim (programda algoritma oluşturma), matematiksel kavramlar, matematiksel uygulamalar, grafik becerisi ve matematik başarısı olarak alt alana ayırmıştır. Araştırmasının sonunda uzamsal yetenekle tüm alt alanlar arasında olumlu ve pozitif bir ilişkiye rastlanmıştır.

Battista, Wheatley ve Talsma (1989) geometri dersini alan ilköğretim öğretmen adaylarının geometrik problem çözme becerileri ile uzamsal görselleştirme ve biçimsel muhakeme yetenekleri arasındaki ilişkiyi, ayrıcada uzamsal görselleştirme yeteneği ile geometrik problemler çözülürken kullanılan stratejileri incelemişlerdir. Derinlemesine inceleme yapmak için 8 problem geliştirmişler, öğretmen adaylarının bu soruları çözerken şekil çizmelerine izin vermişlerdir. Sonuç olarak uzamsal görselleştirme, biçimsel muhakeme ve problem çözme performansları geometri başarısı ile ilişkili ve uzamsal görselleştirme ve biçimsel muhakemenin geometrik problem çözme ile ilişkili olduğu saptanmıştır.

Battista (1990) uzamsal görselleştirme, mantıksal muhakeme, geometri başarısı ve cinsiyet arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. 75 erkek ve 53 kız lise öğrencisinden oluşan araştırmasının sonucunda uzamsal görselleştirme yeteneği ve mantıksal muhakemenin geometri başarısıyla pozitif ilişkili olduğunu saptamıştır. Ayrıca erkekler, kızlara göre uzamsal görselleştirme yeteneği testinde, geometri testinde istatistiksel olarak daha başarılı olurlarken mantıksal muhakeme de ise anlamlı bir ilişkiye rastlanmamıştır.

Pandiscio (1994) lise öğrencilerinde uzamsal yetenek ve matematik (geometri) başarıları arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Ölçme aracı olarak bir zihinde döndürme testi ve geometri başarı testi kullanmışlardır. Başarı testindeki sorulara göre sonuçlar irdelenmiş, sadece bayanlar için zihinde döndürme testi skoru ile yüzey alanı ve hacim hesaplama ile pozitif ilişkili, erkeklerle ve testteki diğer alt maddelere göre bir ilişkiye rastlanmamıştır.

Pandiscio (1994)'nun bulgularına bakıldığında genel olarak matematik başarısıyla uzamsal yetenek arasında bir ilişkiye rastlanmamıştır. Bunun sebebi olarak araştırmacının sadece zihinde döndürme testi kullanmasına bağlanabilir, çünkü Linn ve Petersen (1985) tanımladıkları uzamsal yetenek bileşenlerinin her birinde farklı oranlarda cinsiyet farklılığı olduğunu saptamışlardır.

Diğer bir çalışmada Olkun ve Altun (2003) ilköğretim öğrencilerinin bilgisayar deneyimleri ile uzamsal düşünme ve geometri başarıları arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Araştırma 4. ve 5. sınıf 297 öğrenci üzerinde gerçekleştirilen araştırmada ölçme aracı olarak 2 boyutlu uzayda uzamsal görselleştirme testi (geometri bilgisinden çok görsel algı ile yapılabilinecek 29 sorudan oluşan) kullanılmıştır. Sonuç olarak öğrencilerin bilgisayar kullanma sıklıklarına göre (daha çok bilgisayarda kelime işleme, resim yapma ve oyun oynama gibi işleri yapanlar) karşılaştırma yapılmış, karşılaştırmalarda geometrik düşünme becerileri açısından anlamlı farklılıklar saptanmamıştır. Bununla birlikte her durumda erkekler kızlara göre daha yüksek skorlar elde etmiş olsalar da istatistiksel olarak anlamlı bir farka rastlanmamıştır.

Bunun yanında Kayhan (2005), lise öğrencilerinin matematik başarıları ile uzamsal yetenekleri arasında orta düzeyde pozitif bir ilişkiye rastlamıştır. Paralel olarak Turğut (2007) da, ilköğretim ikinci kademe öğrencilerin matematik başarıları ile uzamsal yetenekleri arasında orta düzeyde pozitif bir ilişkiye rastlanmıştır. İlgili alanyazın ışığında, bu araştırmada da üniversite öğrencilerinin; ilköğretim matematik öğretmen adaylarının lineer cebir başarıları ile uzamsal yetenekleri arasındaki ilişki de incelenmiştir.

2.6.3. Uzamsal Yetenek Gelişir mi?

Yapılan araştırmalar ışığında matematik başarısının uzamsal yetenekle ilişkisi tam olarak saptanamamıştır. Bunun yanında araştırmacılar uzamsal yeteneği bir matematik yeteneği olarak görmekten çekinirlerken ilişkili oldukları düşünüldüğünde matematik gibi uzamsal yeteneğinde öğretilebileceğini, geliştirilebileceğini düşünmüşlerdir (Turğut, 2007:30). Kruetskii (1976:60) uzamsal görselleştirmenin matematik yeteneği olduğunu savunmuştur. Kruetskii (1976)'ye göre uzamsal görselleştirme yeteneği doğuştan değil, bireyin gelişimi esnasındaki yapılanmayla gelişmiş ve değişmiştir. Bu yeteneğin eğitim, öğretim etkinlikleri süresince oluşturulup geliştirildiğini iddia etmiştir. Kruetskii (1976)'nin bu yaklaşımı göz önünde tutulursa uzamsal görselleştirmenin dolayısıyla da uzamsal yeteneğin geliştirilebilineceği düşünülebilir. Araştırmacılar bu konu üzerinde çok fazla yoğunlaşmışlar fakat sonuçlar birbirleriyle çelişmiştir. Bir araştırmacı geliştirmeyi başarmışken bir diğeri başaramamıştır. Fakat genel olarak geliştirilebildiği gözlemlenmektedir.

Ferini-Mundy (1987) uzamsal yetenek eğitiminin matematik başarısı, uzamsal görselleştirme yeteneği ve problem çözme esnasındaki görselleştirme kullanımı üzerindeki etkisini araştırmıştır. Öntestin ardından 250 lise öğrencisi deney ve kontrol gruplarına ayrılmış; kontrol grubunda geleneksel yöntem uygulanırken deney grubunda 2 ve 3 boyutlu uzamsal etkinlikler, 2 boyutlu uzaydan 3 boyutlu uzaya geçiş, yaklaşık alan hesapları, 3 boyutlu görüntülerin 2 boyutludaki durumlarının çizimleri gibi etkinlikler yapılmıştır. Verilen eğitimin ardından sonuç olarak deney grubunda ne matematik başarısı ne de uzamsal görselleştirme yeteneği testinde gelişme olmuştur, fakat daha önce anlamlı bir fark yokken kızlar erkeklere göre matematikte daha başarılı hale gelmiş, erkeklerde kızlara göre uzamsal görselleştirme testinde daha başarılı hale gelmiştir. Yapılan çalışmanın ardından öğrencilerin problem çözerlerken kullandıkları görselleştirme yöntemleri arasında da bir farka rastlanmamıştır.

Diğer bir çalışmada Tillotson (1985) uzamsal görselleştirme öğretiminin uzamsal görselleştirme ve buna bağlı olarak da problem çözme performansı üzerindeki etkisini araştırmıştır. 6. sınıfta öğrenim gören 102 öğrenci üzerinde 10 haftalık bir çalışma yürütmüştür. Deney grubundaki öğrenciler 3 boyutlu uzamsal modelleri hareket ettirmişler, bunları akıllarında canlandırmışlar ve şekillerini 2 boyutlu uzaya dönüştürmeye çalışmışlardır. Sonuçta uzamsal görselleştirmenin problem çözümlerinde etkin önayak rolü oynadığını ve deney grubundaki öğrencilerin uzamsal görselleştirme puanlarının arasında olumlu yönde anlamlı bir farka rastlanmıştır.

Okul öncesi dönem incelendiğinde ise erkeklerin el aletleriyle top fırlatmayla, legolarla köprü yapma, bloklarla kuleler yapma gibi daha mekanik uğraşlarla ilgilendikleri görülmüştür (Kahle, 1990:59). Bu sonuçlar -erken deneyimlerinin- ilerideki meydana gelebilecek olan uzamsal yeteneklerindeki seviye farklılığına sebep olacak mıdır? Bu farklı hareketlerin, farklı oynanan oyuncakların çocukların uzamsal yeteneklerini etkilediği (Connor ve Serbin, 1980) ve erkeklerin uzamsal yeteneklerde kızların da sözel yeteneklerdeki performanslarını bu erken tecrübelere bağlı olduğu düşünülmektedir (Cockburn, 1995).

Werthessen (1999) üstün yetenekli ilköğretim öğrencilerinin uzamsal yetenekleriyle cinsiyetleri arasındaki ilişkiyi ve zihinde döndürme ve uzamsal görselleştirme üzerinde 3 boyutlu el materyalleri tecrübesinin etkisini araştırmış ve sonra bu 3 boyutlu materyaller vasıtasıyla uzamsal yeteneklerini geliştirmeye çalışmıştır. 9 ve 10 yaşındaki 105 öğrenci üzerinde gerçekleştirilen araştırmada zihinde döndürme testi ve uzamsal ilişkiler testi ölçme aracı olarak kullanılmıştır. Deney grubundaki öğrencilere, 4 haftalık bir süreçte 42 dakikalık 3 boyutlu cisimlerin yapılanması ve keşfetmeden oluşan 10 etkinlik yaptırılmıştır. Araştırmanın tarama kısmında sonuçları deney grubundaki cinsiyet haricindeki tüm değişkenlere göre anlamlı fark saptanmış, son test sonucunda cinsiyet üzerinde anlamlı bir fark yokken, elle yapılan aktiviteler öğrencilerin zihinde döndürme, uzamsal görselleştirme puanlarında anlamlı şekilde bir artışa sebep olmuştur.

2.7. Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri

Pierre Marie van Hiele ve Dina van Hiele-Geldof adlı iki Danimarkalı eğitimci bireylerdeki geometrik düşünme becerisini beş farklı düzeyle açıklamışlardır. Bunlar, görsel dönem, analitik dönem, informal tümdengelim dönemi (yaşantıya bağlı çıkarım), formal tümdengelim (çıkarım) ve en ileri dönemdir (Olkun ve Toluk Uçar, 2007:223). Van Hiele geometrik düşünme modeli insanların geometrik düşünme yönünden farklılıklarını beş hiyerarşik düzeye ayrılmasını esas alır ve her düzey geometri kavramlarından hangilerini ve ne kadar kazanıldığının değil, insanların geometrideki kavramlar üzerinde nasıl düşündüklerini ve bu düşüncelerin tiplerini belirtir (Baykul, 2006:364).

Görsel dönem denilen birinci düzeydeki bir öğrenci geometrik şekilleri bir bütün olarak tanır, görünüşleri itibariyle belirler, isimlendirir, karşılaştırır (Olkun ve Toluk Uçar, 2007:223,224). Bu dönemdeki öğrenciler geometrik şekilleri fiziksel olarak tanırlar. Örneğin, bu bir dikdörtgendir çünkü kapıya, pencereye benziyor gibi (Olkun ve Toluk Uçar, 2007:224). Bu düzeydeki düşünmenin ürünü, şekillerin benzerliklerine göre sınıflandırılmasıdır (Baykul, 2006:364). Bu evredeki çocuklara geometri öğretiminde fiziksel gereçlerin sunulması, çocukların bunlarla oynamaları ve kullanmaları gerekir (Altun, 2004:218). Örneğin, okul öncesi dönemde yapılan geometrik şekillerin içini doldurma, katlama ve boyama çalışmaları bu sürece uygun etkinliklerdir.

Analitik dönemdeki yani geometrik düşüncenin ikinci seviyesindeki bir öğrenci şekilleri parçaları ve özellikleri itibariyle karşılaştırır ve açıklar (Olkun ve Toluk Uçar, 2007:224). Bu düzeydeki çocuklar şekillerle ilgili bazı genellemelere ulaşabilirler (Altun, 2004:218). Öğrenci bu seviyede şekle ait özellikleri ve kuralları örneğin katlama, ölçme gibi etkinliklerle keşfeder ve onları deneysel yollarla kanıtlar (Olkun ve Toluk Uçar, 2007:224). Öğrenciler bu dönemde şekillerle ilgili özellikleri zihinlerinde oluştururlar.

İnformal tümdengelim (yaşantıya bağlı çıkarım) dönemindeki öğrencilerin genel olarak özellikleri şunlardır. Bu düzey şekil sınıfları arasında bağ kurabilmenin geliştiği evredir (Altun, 2004:219). Üçüncü seviyedeki bir öğrenci şekiller arası ve şekillerin özellikleri arası ilişkileri ve tanımların rolünü anlayabilir (Olkun ve Toluk Uçar, 2007:225). Altun (2004)'a göre bu dönemde öğrencilere şekil ve modellerle çizim yapma, şekil sınıflarının ortak özelliklerini söyleme, genellemeye varma, hipotez kurma, hipotez test etme gibi etkinliklere yer verilmelidir.

Formal tümdengelim (çıkarım) dönemindeki öğrenciler aksiyom, teorem ve tanımlara dayalı olarak yapılan bir ispatın anlam ve önemini kavrayabilirler (Olkun ve Toluk Uçar, 2007:225). Altun (2004)'a göre çocuklar bu dönemde aksiyomatik yapıyı kullanabilirler ve bu sistem içinde kendi kendilerine ispat yapabilirler. Ayrıca, şekillerin özelliklerinin ötesine gidebilir, şekillerin özelliklerini karşılaştırabilir, formal olmayan tartışmalar yapabilir, tümevarım ve akıl yürütme süreçlerini başarabilirler (Baykul, 2006:364).

En ileri dönemde öğrenciler farklı iki aksiyomatik sistem arasındaki ilişkileri ve ayrılıkları görebilirler, geometriyi bir bilim olarak ele alıp çalışabilirler (Altun, 2004:219).

Van Hiele (1986)'ye göre bu dönemler ve bunlara karşılık gelen düzeyler hiyerarşiktir. Bir düzeyde diğerine geçilmektedir. Olkun ve Toluk Uçar (2007)'a göre ilköğretimin birinci devresindeki ortalama bir öğrenci geometrik düşüncenin birinci düzeyinde olup ikinci düzeye geçiş süreci içerisindedir. Bunun yanında, ilköğretimin ikinci kademesindeki ortalama bir öğrenci ise geometrik düşüncenin ikinci düzeyinde olup üçüncü düzeye geçiş sürecindedir. Ancak Van Hiele (1986)'nin de belirttiği gibi bu gelişim tamamen verilen eğitime bağlıdır Olkun ve Toluk Uçar (2007:225). Dolayısıyla rastgele verilecek bir öğretimin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerini geliştirmeyebileceği olasıdır. Bu nedenle Van Hiele (1986) tarafından beş aşamalı bir öğretim süreci geliştirilmiştir (akt. Olkun ve Toluk Uçar, 2007:226):

1) *Görüşme:* Öğretmen ve öğrenciler işlenecek konu hakkında bir diyaloga girerler. Bu aşamada kullanılan terim ve kavramlar büyük önem taşır. Öğretmen sorduğu sorularla öğrencinin düzeyini belirlemeye çalışır. Aynı zamanda öğrencinin konuya ilgisi çekilir.

2) *Yöneltme*: Öğretmen aldığı yanıtlar doğrultusunda öğrencilerin çalışılan konuyu araştırarak yapıyı keşfedebilmeleri için etkinlikleri sıralar.

3) *Netleştirme*: Öğrencilerin yeni öğrenilen kavramları tartışacağı; kendi kelime ve açıklamalarıyla yenilemelerinin yapılacağı süreçtir.

4) *Serbest çalışma*: Öğrenciler çok aşamalı problemlerle ve değişik çözüm yolları üzerinde çalışırlar. Çalışılan konudaki yapının değişik nesneleri arasındaki ilişkileri ortaya çıkarırlar.

5) *Bütünleme*: Öğrenciler öğrendiklerini yeni bir düşünce yapısı olarak içselleştirirler. Öğretmen, öğrencilerin ne aşamaya geldiklerini anlamak için onlara ne bildiklerini ve öğrendiklerini sorar.

Bu öğretim sürecinin önemliliği son yıllarda üzerinde durulan en önemli konulardan birisidir. Fuys, Geddes ve Tischler (1988) ve Halat, Aspinwall ve Halat (2004) öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinde öğretim yönteminin etkisini incelemiş ve Van Hiele teorisine dayalı yapılan öğretiminin başarı ve motivasyonu pozitif yönde etkilediğini göstermişlerdir (akt. Halat, 2008b:120). Dolayısıyla bu yaklaşım matematik eğitimcilerini çok etkilemiş, teoride adı geçen düzeylerin gelişimi için öğretim süreçleri revize edilmiş ve bunlara etki eden faktörleri belirlemeye çalışmışlardır Bu araştırma yetişkinler üzerinde gerçekleştirildiğinden -sonuçların anlamlılığı bakımından- bu bölümde yetişkinlerden daha çok çalışmakta olan öğretmenler ve öğretmen adayları üzerinde gerçekleştirilmiş çalışmalara yer verilmiştir.

Duatepe (2000), aday ilköğretim öğretmenlerinin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile bu düzey arasındaki sosyodemografik faktörlerin ilişkisini incelemiştir. Araştırma 478 öğretmen adayı üzerinde gerçekleştirilmiş ve veri toplama olarak Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testi kullanılmıştır.

Araştırma sonuçlarına göre, öğretmen adaylarının yaşları, mezun oldukları ortaöğretim okulu, ailelerinin eğitim seviyeleri ile Van Hiele geometri testindeki başarı puanı arasında anlamlı bir fark olmadığı görülmüştür. Ayrıca, öğretmen adaylarının cinsiyetlerine, okudukları sınıflara, okudukları bölümlere ve lisede aldıkları geometri ders sayısının Van Hiele geometrik düşünme düzeylerini etkilediğini saptamıştır. Bu araştırmanın en önemli sonucu ise katılımcıların geometrik düşünme seviyelerinin 3. düzeyde yığılmasıdır.

Durmuş, Olkun ve Toluk (2002) matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin geometri alan bilgi düzeylerini incelemeyi ve bu düzeylerin geliştirmeyi amaçlamıştır. Bu amaçla, geometri dersinde, aksiyom ve teoremlere yönelik değişik modeller kullanmanın öğrencilerin bilgi düzeylerini geliştirip geliştirilemeyeceği araştırmışlardır. Araştırma 78 ilköğretim matematik birinci sınıf öğrencisi üzerinde gerçekleştirilmiş ve 14 hafta sürmüştür. Ölçme aracı olarak ise Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ölçeği kullanılmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri arasında anlamlı bir fark bulunmamıştır. Buna ek olarak öğrencilerin hiçbirisinin en üst seviyede olmadıkları görülmüştür.

Halat ve Şahin (2008) aday ve çalışmakta olan sınıf öğretmenlerinin geometrik düşünme düzeyleri ile cinsiyet faktörünün etkisini incelemiştir. Araştırmada 186 katılımcı üzerinde gerçekleştirilmiş ve ölçme aracı olarak Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testi kullanılmıştır. Sonuçlara göre katılımcıların hiçbirisi en üst seviyede değildir; aday olan ve çalışan sınıf öğretmenlerinin geometrik düşünme düzeyleri arasında anlamlı bir fark yokken, aday sınıf öğretmenlerinde, erkeklerin düzeyleri kızlara göre daha yüksek seviyede bulunmuştur.

Halat (2008b) çevrimiçi öğrenme tabanlı bir öğretim yöntemi olan webquest ile matematik öğretiminin sınıf öğretmeni adaylarının geometrik düşünme düzeylerine etkisini araştırmıştır. Araştırma 125’i deney, 77’si kontrol grubunda olmak üzere 202 aday sınıf öğretmeni üzerinde gerçekleştirilmiştir. Çalışmada veri toplama aracı olarak Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testi kullanılmıştır. Deney grubunda webquest temelli matematik öğretimi, kontrol grubunda ise etkinlik temelli matematik öğretimi gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonuçlarına göre, kontrol ve deney gruplarının düzeyleri arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır.

Halat (2008a) çalışmakta olan ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenlerinin geometrik düşünme düzeylerini ve bu düzeyler üzerindeki cinsiyet faktörünü araştırmıştır. Araştırma 148 öğretmen üzerinde gerçekleştirilmiş ve ölçme aracı olarak Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ölçeği kullanılmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenlerinin geometrik düşünme düzeyleri arasından anlamlı bir ilişki görülmemiştir. Ayrıca, öğretmenlerin geometrik düşünme düzeyleri ile cinsiyet arasında da anlamlı bir farka rastlanmamıştır.

Halat (2008c) aday sınıf öğretmenleri ve ortaöğretim matematik öğretmenlerinin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerini ve cinsiyet faktörünü incelemiştir. Araştırma 125 sınıf öğretmen adayı ve 156 aday ortaöğretim matematik öğretmeni üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonuçlarına göre iki grup arasında geometrik düşünme düzeyleri açısından anlamlı bir fark bulunmamıştır. Buna ek olarak, ortaöğretim matematik öğretmenliği erkek öğrencilerinin düzeyleri kız öğrencilere göre daha yüksek bulunmuşken, sınıf öğretmenliği öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin cinsiyete göre farklılık göstermediği görülmüştür.

Erdoğan ve Durmuş (2009) Van Hiele öğretim modeline dayalı geometri öğretiminin sınıf öğretmenliği öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerine etkisini incelemiştir. Araştırma 72’si deney, 70’i kontrol olmak üzere 142 öğretmen adayı üzerinde gerçekleştirilmiş ve veri toplama aracı olarak Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testi kullanılmıştır. Araştırmanın bulgularına göre, deney grubunun son test puanları anlamlı derecede kontrol grubunun puanlarından yüksek çıkmıştır.

Özet olarak -yukarıdaki araştırmalardan da görüldüğü gibi- yetişkinlerin geometrik düşünme düzeylerinin cinsiyet incelemesine göre yapılan araştırmalarda bir tutarsızlık olduğu görülmektedir. Bu araştırmada da bu ilişki -bir araştırma problemi olarak- incelenmiştir. Bunun yanında yetişkinlerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri üzerine yapılan çalışmaların sınırlı olduğu ve tutarlı sonuçların bulunmadığı gözlemlenmiştir.

2.8. Uzamsal Düşünme, Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri ve Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi

Uzamsal yeteneğin matematik başarısı ile var olan pozitif ilişkisi bölüm 2.5 de açıklanmıştır. Bu bağlamda geometri başarısının da uzamsal yetenekle ve dolayısıyla da, sezgisel olarak Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin uzamsal yetenekle ilişkili olabileceği düşünülebilir. Araştırmacılar matematik eğitimi için önemli olan bu iki kavramın birlikteliğini, aşağıdaki araştırmalarla incelemeye çalışmışlardır.

Smyser (1994) The Geometric Supposers adlı bilgisayar programı kullanımının uzamsal görselleştirme yetenekleri, Van Hiele geometrik düşünme düzeyi ve başarı üzerindeki etkisini araştırmıştır. 16 deney ve 23 kontrol grubu lise öğrencilerinden oluşturulmuştur. Deney grubunda geometri dersinin öğretiminde The Geometric Supposers programı kullanılmıştır. Araştırma sonunda kontrol ve deney gruplarının son test puanlarında uzamsal görselleştirme, Van Hiele geometrik düşünme düzeyi ve başarıda ön test puanlarına göre anlamlı bir farka rastlanmıştır. Ayrıca uzamsal görselleştirme yetenekleri ile başarı ve Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasında pozitif bir ilişkiye rastlanmıştır.

Idris (1998) öğretim metodu içerisindeki etkinliklerin uzamsal görselleştirme yeteneği, tutum, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve geometri başarı üzerindeki etkisini araştırmıştır. Deney grubundaki öğrencilere geometrik yapıları görselleştirmeleri ve ilişkileri kavramaları için etkinlikler ve ekstra çizimler yaptırtmıştır. Çalışma sonunda uzamsal görselleştirme ile derse yönelik tutum arasında pozitif ve olumlu, Van Hiele geometri düşünme düzeyi ile tutum arasında pozitif ve olumlu, geometri başarısı ile tutum arasında pozitif ve güçlü, uzamsal görselleştirme ile Van Hiele geometrik düşünme düzeyi arasında pozitif korelasyonlar saptanmıştır. Tüm değişkenler üzerinde olumlu yönde anlamlı farka rastlanmıştır.

Diğer bir çalışmada July (2001) geometri dersinde Sketchpad programı kullanımının 10. sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal yetenekleri üzerindeki etkisini araştırmıştır. Deney grubunda yazılım aracılığıyla öğrencilere üç boyutlu cisimlerin 2 boyuttaki görüntüleri çizdirilmiş, tartışma ve keşfetme yaptırılmıştır. Araştırma sonunda ise öntest ve sontest puanları karşılaştırıldığında öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin geliştiği, Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin de yükseldiği saptanmıştır.

Alanyazında, öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri uzamsal yetenekleri arasında pozitif ve anlamlı ilişkiler görülmektedir. Buna paralel olarak da öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin gelişmesiyle geometrik düşünme düzeyleri de gelişmektedir. Araştırmalar da genellikle, bu gelişimin teknoloji destekli öğretimle sağlandığı görülmektedir. Buna ek olarak, teknoloji destekli öğretimle öğrencilerin uzamsal yeteneklerini geliştiren bazı araştırmalar aşağıda sunulmuştur.

Shavalier (1999) 4., 5. ve 6. sınıf 116 öğrenci üzerinde bir bilgisayar yazılımı olan Virtus WalkThrough Pro programının öğrencilerin uzamsal yetenekleri üzerindeki etkisini araştırmıştır. Deney grubu 55, kontrol grubu 61 öğrenciden oluşturularak deney grubunda bilgisayar programıyla uzamsal yetenek etkinlikleri yaptırılmıştır. Bu programda öğrenciye inşaat ve mimari malzemeler verilerek onların oda, ev vs yapmalarına izin verilmiştir. Araştırma sonunda ön testte kullanılan Eliot-Price zihinde döndürme testinde anlamlı bir fark yokken uzamsal görselleştirme testi olan kağıt katlama testinde deney grubu lehine anlamlı bir farka rastlanmıştır. Ayrıca kız ve erkek öğrencilerin uzamsal yetenekleri arasında da bir ilişkiye rastlanmamıştır.

MacMohan (1997) ilköğretim II. kademede bilgisayarın öğrencilerin uzamsal yetenek testinde performansları üzerindeki etkisini araştırmıştır. Ön testin ardından, deney grubunda İrlandaca, İngilizce ve matematik derslerinde microsoft paint programı ve özel oluşturulmuş şekiller kullanılmıştır. Diğer taraftan kontrol grubunda düz anlatım yapılmıştır. Sonuçta kontrol grubunun uzamsal yeteneklerinin seviyesi değişmezken, deney grubundaki öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin seviyesi istatistiksel olarak artmıştır.

Nimmons (1997) cebir dersinde grafik çizen hesap makinesi kullanmanın, uzamsal görselleştirme, başarı ve matematik ve teknolojiye olan tutum üzerindeki etkisini araştırmıştır. Araştırma 3 deney 1 kontrol grubundan oluşmak üzere 4 sınıf üzerinde yapılmıştır. 3 deney grubunun birinde onları cesaretlendirecek etkinlikler, diğer 2 deney grubunda ise hesap makinesi kullanmadan aynı etkinlikler, kontrol grubunda ise hesap makinesi ve etkinlik uygulanmadan geleneksel eğitim verilmiştir. Sonuç olarak hesap makinesi kullanan deney grubunda hem erkek hem de kızların uzamsal görselleştirme skorlarında olumlu bir ilişkiye rastlanmıştır. Ayrıca kızların kazanımlarının daha fazla olduğu ve kızların tutumlarının değiştiği saptanmıştır.

Araştırma bulguları öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile uzamsal yeteneklerinin çoğu zaman teknoloji destekli öğretimlerle geliştirebildiğini göstermektedir. Bu çalışma ise lineer cebir öğretimi üzerine yapılmış olup, uzamsal düşünme, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve lineer cebir başarısının gelişip gelişmeyeceği araştırılmıştır.

Hızla ilerleyen teknoloji kimi zaman bir öğretim aracı olurken, fen ve mühendislik alanlarına farklı bir perspektiften girmiştir. Bu devam eden sürecin en önemli ürünlerinin bir kısmı matematik paket programları olmuştur. Bu yazılımlar, örneğin Maple, Matlab, Mathematica, Derive vs oldukça etkili fonksiyonlara sahiptir. Bu fonksiyonlar aşağıdaki gibi özetlenebilir (Wu, 2004: 100):

- Matematiksel Hesaplamalar;
- Algoritma Oluşturma;
- Veri Değerlendirme;
- Modelleme, Simülasyon ve Ürün Oluşturma Projeleri;
- Veri Analizi, Keşfetme ve Görselleştirme;

- Bilimsel ve Mühendislikle ile ilgili Grafikler;
- Uygulama geliştirme; ve
- Sembolik hesaplamalardır.

Bu fonksiyonlar çoğu ileri matematiksel hesaplamaları yapabilmektedir. Dolayısıyla bu programlar üniversite seviyesinde çok önemli olup, son yıllarda ileri matematik eğitimi araştırmalarında da kullanılmıştır, örneğin, Dikovic (2007); Pecuch-Herrero (2000); Wu (2004). Fakat bu programların kullanımına dikkat edilmelidir. Bu programlarla tanışan öğrencilerin ilk tepkisi "o halde biz niye öğreniyoruz" sorusu olmaktadır. Bu araştırmada da ilk olarak bilgisayar yazılımlarının noktasal ve vektörel kayıt girdilerinin nasıl oluşturulduğu ve fark motorunun keşfinden sonra bilgisayarın nasıl geliştiği açıklanarak, öğrencilere bu yazımların birer matematiksel ürün olduğu ve araştırmacıların bulgularıyla geliştirildikleri hatırlatılmıştır.

Günümüzde, lineer cebir derslerinde kullanabileceğimiz iki temel teknolojik materyal vardır, bunlar matematiksel yazılımlar ve öğretim ve öğrenim amaçlı web sayfalarıdır; Matlab, Mathematica, Derive, Maple ve Linalg, lineer cebirde kullanılabilecek en etkili yazılımlardır (Aydın, 2009:103). Ayrıca, birçok araştırmacı lineer cebir öğretiminde teknoloji desteğinin oldukça önemli olduğunu vurgulamaktadır (Aydın, 2007; Aydın, 2009a; Aydın, 2009b; Dikovic, 2007; Dorier, 2002; Pecuch-Herrero, 2000; Wu, 2004).

Dikovic (2007), geçmişte verdiği lineer cebir derslerinin ışığında, öğrencilerin sayısal, sembolik ve görsel gösterimlerini geliştirmek için teknoloji destekli lineer cebir öğretimini savunmuş ve lineer denklem sistemlerinin analitik ve özel çözümü, determinant ve matris sistemleri için bazı örnekler teknoloji destekli örnekler sunmuştur.

Pecuch-Herrero (2000) sınıflardaki geleneksel olmayan öğretim yaklaşımının ve teknolojideki değişimin ışığında lineer cebir öğretme ve öğrenme için farklı stratejiler geliştirmiştir. Bu stratejilerden ilkini öğrencilerin yeni kavramları keşfetmeleri, konjektür yapmaları, teoremleri uygulamaları ve proje oluşturmaları için bilgisayar projeleri olarak belirlemiştir. Bu stratejiler (s.181):

1. Bilgisayar araştırmaları vasıtasıyla yeni kavramları keşfetme,
2. Lineer dönüşümler konusunu olabildiği kadar kısa sürede öğretme,
3. Geometrinin ön planda olması,
4. Portfolyo oluşturma yoluyla matematiği yazma öğretimi,
5. Uygulamalar ve isteklendirme için bilgisayar projelerini kullanma.

Pecuch-Herrero (2000) araştırmasında Arizona üniversitesi tarafından geliştirilen LINALG programını kullanmıştır. Sonuçlara göre öğrencilerin lineer cebir başarıların arttığı gözlemlenmiştir.

Bunun yanında, öğrencilerin lineer cebir dersinde kullanılan görselleştirme yaklaşımlarını diğer etkinliklere tercih ettiği konu ile ilgili alanyazındaki son bulgular arasındadır (Konyalıoğlu, 2009). Buraya kadar açıklanan kısımlarda, araştırmacıların, uzamsal yetenek, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve lineer cebir başarısı için tablo 4'de verilen öğretim yaklaşımlarının kullanımı hakkında hemfikir oldukları görülmektedir.

Tablo 4

Araştırmacıların Uzamsal Yetenek ve Geometrik Düşünme Düzeylerinin Gelişimi ve Lineer Cebir Başarısı Hakkındaki Önerileri

Lineer Cebir Başarısı	Uzamsal Yetenek	Geometrik Düşünme Düzeyleri
- Teknoloji Destekli Eğitim - Lineer Cebir Öğretim İlkeleri (Harel, 2000) - Lineer Cebir Düşünme Biçimleri (Sierpinska, 2000)	- İki ve Üç Boyutlu Uzaylarla İlgili Etkinlikler - Teknoloji Destekli Eğitim - Geometrik Formları Oluşturma - İzometrik Çizimler	- Van Hiele Teorisi Öğretim İlkeleri - Teknoloji Destekli Eğitim

Bu bulgular ışığında araştırma için uygun öğretim desteğinin teknoloji olmasına karar verilmiştir. Bunun yanında öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin gelişmesi için Van Hiele teorisindeki öğretim ilkeleri takip edilmelidir. Yapılacak olan teknoloji destekli lineer cebir öğretiminde, Harel (2000)'in öğretim ilkelerine, Sierpinska (2000)'nın lineer cebir düşünme biçimlerine ve Van Hiele (1986)'nin öğretim ilkelerine bir arada uyulması gerekmektedir. Araştırmaya başlanmadan önce bu birliktelik düşünülmüş, ders planlarının nasıl hazırlanması gerektiği sorgulanmıştır. Yukarıda bulgular ışığında öğretim sürecinin içeriği için aşağıdaki entegrasyon kurulmuştur. İzlenmesi gereken adımlar şunlardır:

1. Görüşme (Etkileşim ve Güdüleme)

2. Yöneltme

  2.1. Somutluk ilkesi (Sentetik-geometrik düşünme biçimini geliştirecek örnekler ve geometrinin dengeli kullanımı.)

2.2. Gereksinim ilkesi (Ders anlatımı esnasında öğrencileri aktif tutma, analitik-aritmetik düşünen öğrenciler için örnekler sunulur.)

2.3. Genellenebilirlik ilkesi (Analitik-aritmetik ve analitik-yapısal düşünme biçimini geliştirecek örnekler sunulur.)

3. Netleştirme

3.1. Gereksinim ilkesi (Yeni öğrenilen konunun farklılıkları tartışılır.)

4. Serbest çalışma

4.1. Gereksinim ilkesi (Sentetik-geometrik düşünen öğrenciler için, yeni öğrenilen kavramlarla ilgili izometrik çizimler, analitik-aritmetik düşünen öğrenciler için sayısal örnekler ve uygulamalar sunulur.)

5. Bütünleme

5.1. Genellenebilirlik ilkesi (Konunun, yeni öğretilenlerin toparlanması, konu ile ilgili yüksek boyutlu ve soyut vektör uzayları ile ilgili kavramların tekrarlanması.)

Görüşme süreci ders öncesi etkileşim ve güdüleme süreci olarak düşünülmüştür. Örneğin bu bölümde, o gün işlenecek olan lineer cebir konusunun, günlük hayattaki bazı kullanım alanlarından bahsedilir. Önceki ele alınan konularla ilişkisi sunulur. Bu süreçte öğrenciler konuşturulmaya çalışılır.

Yöneltme süreci asıl ders sunumunun olduğu bölümdür. Bu bölümde Harel (2000)'nin öğretim ilkeleri baz alınır. Öğrencilerin sentetik-geometrik düşünme biçimlerini geliştirmek için somutluk prensibine dikkat edilir. Bu aşama geometrinin dengeli olarak kullanıldığı bölümdür. Gereksinim ilkesiyle öğrenciler aktif tutmaya çalışılır. Çünkü analitik-aritmetik düşünen öğrenciler teoremlerin uygulamalarını gösteren sayısal örnekleri daha iyi anlamaktadırlar. Genellenebirlik adımıyla da analitik-yapısal düşünen öğrenciler için teoremlerin en genel halleri ve sayısal örneklerine yanı sıra soyut vektör uzaylarının kullanımına dikkat edilir.

Netleştirme sürecinde yeni öğrenilen konu enine boyuna tartışılır, öğrenciler ön planda olur. Önceki öğrenilen kavramlarla ilişkileri gözden geçirilir. Bu kısım öğrencileri aktif tuttuğu için Harel (2000)'in gereksinim ilkesiyle birleştirilmiştir.

Serbest çalışma bölümünde yeni öğrenilen kavramlarla ilgili uygulamalar yapılır. Fakat uygulamaların, öğrencilerin lineer cebir düşünme biçimlerine uygunluğuna dikkat edilir.

Bütünleme aşaması dersin en önemli sürecidir. Çünkü bu süreçte konu tamamen toparlanır ve öğrenciler yeri geldiğinde sorularla canlı tutulur. Analitik-yapısal düşünen öğrenciler için genellemeler yapılır. Soyut vektör uzaylarının kullanımına dikkat edilir. Ayrıca öğrencilere işlenen kısımla ilgili ödevlerin verildiği süreçtir.

Bu araştırmada yukarıda açıklanan öğretim süreci baz alınmıştır. Teknoloji desteğinin ve geometrinin kullanımının öğrencilerin uzamsal düşünmelerine etki edeceği, Harel (2000)'in öğretim ilkeleri ve Sierpinska (2000)'nın lineer cebir düşünme biçimlerinin öğrencilerin lineer cebir başarısını geliştireceği ve Van Hiele öğretim yaklaşımının da öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerini geliştireceği düşünülmüştür.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın yöntemi ele alınmaktadır. Araştırmanın modeli, evreni ve örneklemi ve örneklemin özellikleri, veri toplama araçları ve geliştirilmesi, verilerin analiz ve çözümlenme biçimleri açıklanmıştır.

3.1. Araştırmanın Modeli

Araştırma modeli, araştırma sorularını cevaplamak yada hipotezlerini test etmek amacıyla araştırmacı tarafından kasıtlı olarak seçilen bir plandır (Büyüköztürk, 2001). Bir başka deyişle araştırma modeli, araştırmanın amacına uygun ve ekonomik olarak verilerin toplanması ve çözümlenebilmesi için gerekli koşulların düzenlenmesidir. Bu koşulların düzenlenmesindeki temel iki yaklaşım; tarama ve deneysel modellerdir (Seltiz et al. 1959'dan aktaran Karasar, 2000:76). Tarama modellerini Karasar (2000:77) aşağıdaki gibi açıklamıştır:

> …Tarama modelleri, geçmişte yada halen var olan bir durumu varolduğu şekliyle betimlemeyi amaçlayan yaklaşımlardır. Araştırmaya konu olan olay, birey yada nesne kendi koşulları içinde ve olduğu gibi tanımlanmaya çalışılır. Onları, herhangi bir şekilde değiştirme, etkileme çabası gösterilmez. Bilinmek istenen şey vardır ve ordadır. Önemli olan, ona uygun bir biçimde gözleyip, belirleyebilmektir…

Bu tür çalışmalar, genellikle hedef kitlenin cinsiyet, yaş ve sosyo-ekonomik durum gibi kişisel özelliklerin tekil ya da ilişkisel olarak betimlenmesini; bir olay ya da olguyla ilgili olarak var olan performansların, görüşlerin, düşüncelerin, tutumların veya bir başka özelliğin tekil yada bazı faktörlerle ilişkileri bakımında betimlenmesini amaçlar (Büyüköztürk, 2001).

Araştırma modellerinden deneysel modeller, neden-sonuç ilişkilerini belirlemek amacıyla doğrudan araştırmacının kontrolü altında, gözlenmek istenen verilerin üretildiği araştırma modelleridir (Karasar, 2000). Bu araştırmada ön-test son-test kontrol gruplu deneme modeli kullanılması düşünülmektedir. Bu modelde, yansız atama ile oluşturulmuş iki grup bulunmaktadır. Değişkenlerin ne ölçüde etkili olduğunu belirlemek için ön-test ve son-test ölçme sonuçları birlikte kullanılır.

Bu araştırmada, amaca uygun olarak betimsel ve deneysel araştırma modeli birlikte kullanılmıştır.

Deneysel kısımda, araştırma sürecinde deney grubu üzerinde etkisine bakılacak bağımsız değişken teknoloji destekli lineer cebir öğretimidir ve kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yönteminin kullanılmıştır. Dolayısıyla, araştırmanın ilk kısmında Ön Test- Son test Kontrol Gruplu Model kullanılmıştır.

Tablo 5

Ön Test- Son test Kontrol Gruplu Model

G_1	R	$O_{1.1}$	X_1	$O_{1.2}$
G_2	R	$O_{2.1}$	X_2	$O_{2.2}$

G_1 :Teknoloji destekli Lineer Cebir öğretimin uygulandığı grup.

G_2 :Geleneksel öğretim yöntemin uygulandığı grup.

X_1: Deney grubunda uygulanan Teknoloji Destekli Lineer Cebir öğretimi.

X_2: Kontrol grubunda uygulanan geleneksel öğretim.

$O_{1.1}$, $O_{2.1}$: Ön Test Puanları

$O_{1.2}$, $O_{2.2}$: Son Test Puanları

Ön test-son test kontrol gruplu modelde değişkenlerin ne ölçüde etkili olduğuna karar vermek için ön test ve son test ölçme sonuçları birlikte kullanılır. Bu amaçla (Karasar, 2006:97):

1. Her grup için ön test, son test puanlarındaki yüzde artışlar bulunarak ortalama artışlar karşılaştırılır veya
2. Ön test puanlarını birlikte değişen olarak kullanıp, son test puanlarıyla, birlikte değişkenlik çözümlenmesi veya
3. Ön test puanları karşılaştırılır, arada önemli bir ayrım yoksa yalnızca son test puanları kullanılarak ortalamalar arası fark sınanır.

Araştırmanın deneysel kısmında, deney grubu üzerinde etkisi incelenen yöntem "Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi" dir. Bu yöntemin etkiliğini incelemek amacıyla kontrol grubunda ise "Geleneksel Öğretim Yöntemleri" kullanılmıştır. Bu kısmın bağımlı değişkenleri, lineer cebire yönelik başarı, Van Hiele geometrik düşünme düzeyi ve uzamsal yetenektir. Yapılacak inceleme için ölçme aracı olarak, lineer cebir testi, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ölçeği ve uzamsal yetenek ölçeği ön test ve son test olarak kullanılmıştır. Araştırmanın deneysel kısmındaki süreç aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 6

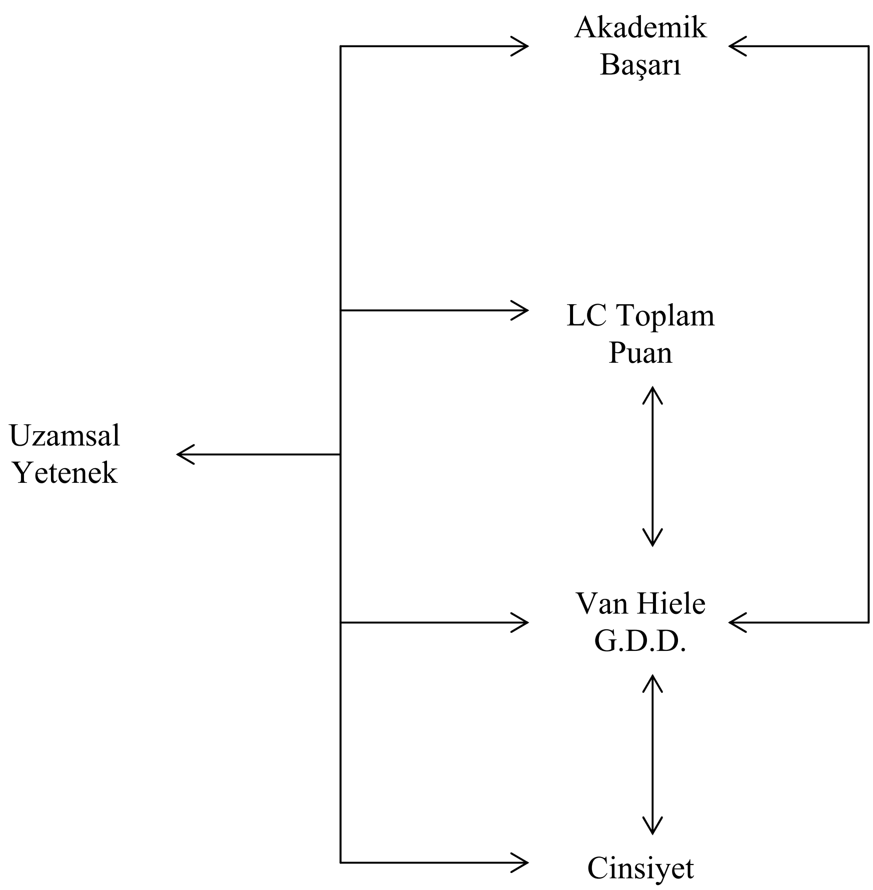
Deney Deseni

Grubun Adı	Deney Öncesi	Denel İşlemler	Deney Sonrası
Deney Grubu	— Uzamsal Yetenek Ölçeği — Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği — Lineer Cebir Testi	- Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi - İzometrik Çizimler - Mathematica'da Uygulamalar	— Uzamsal Yetenek Ölçeği — Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği — Lineer Cebir Testi
Kontrol Grubu	— Uzamsal Yetenek Ölçeği — Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği — Lineer Cebir Testi	- Geleneksel Öğretim Yöntemleri	— Uzamsal Yetenek Ölçeği — Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği — Lineer Cebir Testi

Araştırmanın betimsel kısmında ilişkisel tarama modeli kullanılacaktır. İncelenecek olan ilişkiler aşağıda özetlenmiştir.

Şekil 6

İlişkisi İncelenecek Olan Değişkenler



3.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın gerçekleştirilmesi için öncelikle Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü'nden yazılı izin alınmıştır (Ek-1). Araştırmanın deneysel kısmının çalışma grubunu, İlköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf öğrencilerinden A şubesinden öğrenim gören 44 ve B şubesinde öğrenim gören 41 ilköğretim matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırma gruplarının yansız ataması için öncelikle iki ayrı sınıfa, lineer cebir testi, Van Hiele testi ve uzamsal test ön test olarak uygulanmıştır. Kullanılacak olan istatistiksel analize karar vermek için, öncelikle yapılan ölçümlerde grupların normal dağılım gösterip göstermedikleri test edilmiştir. Büyüköztürk (2005)'e göre normallik analizleri grup büyüklüğüne bağlı olarak değişmektedir. Grup sayısı 50'den büyükse Kolmogorov-Simirnov; eğer

50’den küçükse Shapiro-Wilks normallik analizi kullanılır (s. 42). Ön test uygulaması yapılan sınıflardaki öğrenci sayıları A’da 44, B’de ise 41’dir. Bu durumdan dolayı Shapiro-Wilks normallik analizi kullanılmıştır. Yapılan ön test ölçümlerinin analizleri aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 7

Ön Test Ölçümlerinin Normallik Analizleri

Ölçüm	Sınıf	N	$\overline{X}$	SS	Shapiro-Wilks	P
Uzamsal Test	A	44	194.65	35.91	.830	.000
	B	41	183.80	36.25	.860	.000
Van Hiele Testi	A	44	3.38	.84	.863	.000
	B	41	3.41	1.13	.880	.000
Lineer Cebir Testi	A	44	1.77	1.29	.900	.001
	B	41	1.36	1.33	.851	.000

Büyüköztürk (2005)’e göre p>.05 ise gruplar normal dağılım göstermekte; eğer p<.05 ise normal dağılım göstermemektedir. Tablo 7’de görüldüğü gibi ölçümlerin Shapiro-Wilks normallik analizinde, grupların normal dağılım göstermedikleri gözlenmiştir. Bu durumlarda normal dağılım gerektiren testlerin kullanılmamasına dikkat edilir (Büyüköztürk, 2005). Bu yüzden grupları karşılaştırmak için parametrik olmayan Mann-Whitney U testiyle grupların ön test puanları karşılaştırılmıştır. Sözü edilen ön test puanları Tablo 8’de sunulmuştur.

Tablo 8

Kontrol ve Deney Grubundaki Öğrencilerin Ön Test Puanlarına İlişkin Mann-Whitney U Testi Sonuçları

Ölçüm	Grup	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	U	P
Uzamsal Test	A	44	46.25	2035	759	.208
	B	41	39.51	1620		
Van Hiele Testi	A	44	41.80	1839	849	.620
	B	41	44.29	1816		
Lineer Cebir Testi	A	44	47.06	2070	723.5	.104
	B	41	38.65	1584		

Tablo 8'den de görüldüğü gibi, öğrencilerin uzamsal test (U=759, p>.05), Van Hiele testi (U=849, p>.05) ve lineer cebir testi ön test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır (U=723.5, p>.05). Bu bulgulara dayanarak grupların homojen oldukları saptanmış ve A şubesi kontrol grubu, B şubesi de deney grubu olarak belirlenmiştir. Sınıflarda öğrenim gören öğrencilerin cinsiyetlere dağılımı aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 9

Kontrol ve Deney Grubundaki Öğrencilerin Cinsiyete Göre Dağılımı

Cinsiyet	Kontrol Grubu	Deney Grubu	Toplam
Kız	27	30	57
Erkek	17	11	28
Toplam	44	41	85

Araştırmanın betimsel kısmını ilköğretim matematik öğretmenliği anabilim dalında öğrenim gören 2. ve 3. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Anabilim dalında toplam 8 şube bulunmaktadır. Bu şubelerden ikisi ölçek geliştirme sürecinde çalışmaya katıldıkları için asıl uygulamaya alınmamıştır. Bunun yanında geriye kalan yaklaşık 260 öğrenciye 4 ayrı ölçeğin uygulanması ve eşleştirilmesinin ardından bu sayı 193'e düşmüştür. Aşağıdaki tabloda 193 katılımcının cinsiyete ve sınıfa göre dağılımları sunulmuştur.

Tablo 10

Çalışmanın Betimsel Kısmındaki Katılımcıların Cinsiyete Göre Dağılımı

Cinsiyet	2. Sınıf	3. Sınıf	Toplam
Kız	57	54	111
Erkek	47	35	82
Toplam	104	89	193

3.3. Veri Toplama Araçları

3.3.1. Uzamsal Yetenek Ölçeği

Öğrencilerin uzamsal yeteneklerini ölçmek için hangi testin daha uygun olduğuna karar vermek için alanyazın incelenmiştir. İlgili alanyazında yabancı dilde birçok uzamsal yetenek testi bulunmaktadır. Türkçe olarak ise başlıca iki tane ölçeğe ulaşılmıştır. Bunlardan birincisi Ekstrom, French, Harmon ve Derman (1976) tarafından geliştirilen ve Delialioğlu (1996) tarafından Türkçe'ye çevrilen ve iki alt bileşenden oluşan uzamsal yetenek testidir. Ayrıca Delialioğlu (1996)'ndan ölçeğin kullanımına ilişkin izin de alınmıştır (EK-2). Bu ölçek genel olarak lise öğrencilerine uygulanmıştır (Delialioğlu, 1996; Kayhan, 2005). Dolayısıyla bu ölçeğin yetişkinlere uygun olduğu söylenebilir. Diğer ölçek ise ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin uzamsal yeteneklerini incelemek amacıyla Turğut (2007) tarafından geliştirilmiştir. Türkçe olarak ulaşılabilinen alanyazında bu ölçeklerle karşılaşılmıştır. Araştırmada, çalışma grubunun yetişkinler olmasından dolayı ilk ölçek kullanılacaktır. Bu test iki alt bileşenden oluşmaktadır. Uzamsal yeteneğin alt boyutu olan uzamsal yönelim yeteneğini ölçen iki test, bir diğer alt boyut olan uzamsal görselleştirme becerisini ölçen iki test olmak üzere toplam 4 test içermektedir. Uzamsal yönelim testleri, "Kart Çevirme Testi", "Küp Karşılaştırma Testi", uzamsal görselleştirme testleri de "Kağıt Katlama Testi", "Yüzey Oluşturma Testi" nden oluşmaktadır. Tablo 11 de bu testler hakkında bilgi (güvenirliği vs.) verilmektedir.

Tablo 11

Uzamsal Yetenek Testi Hakkında Bilgiler

Uzamsal Bileşen	Soru Sayısı	Uygulama Süresi	Güvenirlik Katsayısı
Uzamsal Yönelim			
-Kart Çevirme Testi	20	6 Dakika	.80
-Küp Karşılaştırma Testi	40	6 Dakika	.84
Uzamsal Görselleştirme			
-Kağıt Katlama Testi	20	6 Dakika	.84
-Yüzey Oluşturma Testi	12	12 Dakika	.82

Tablo 11 incelendiğinde bu ölçeğin kullanıma hazır olduğu düşünülerek yeniden bir pilot çalışma gerçekleştirilmemiştir. Ölçek EK-3 de yer almaktadır.

3.3.2. Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği

İlgili alanyazın incelendiğinde, geometrik düşünme düzeylerine ilişkin, Türkçe sadece bir ölçeğe rastlanmıştır.

Usiskin (1982) tarafından geliştirilen ve geometrik düşünme düzeylerini ölçmeye yönelik literatürde var olan tek test olan Van Hiele Geometri Testinin Türkçeye uyarlanması, geçerlik ve güvenirlik çalışması Duatepe (2000) tarafından yapılmıştır. Test, her bir düzey için 5 madde olmak üzere toplam 25 maddeden oluşmaktadır. Usiskin (1982) güvenirlik çalışması için iki uygulama gerçekleştirmiştir. İkinci uygulamanın sonunda, her bir düzeyi ölçen alt testlerin güvenirliklerini sırasıyla, .39, .55, .56, .30 ve .26 olarak bulmuştur. Güvenirliklerin düşük çıkmasının sebebi, her bir alt testteki madde sayısının sadece 5 olmasıdır. Bu yüzden Usiskin (1982), benzer maddelerle alt testlerdeki madde sayılarının 25'e çıkararak güvenirliklerine baktığında düzeylerin güvenirliğinin .79, .88, .88, .69 ve .65'e yükseldiğini belirtmiştir. Üçüncü ve dördüncü düzeylerin güvenirliğinin düşük olmasının bu düzeye ulaşan kişi sayısının azlığı olduğunu ifade etmiştir. Duatepe (2000), Türkçeye uyarladığı testin güvenirliğini, her bir düzey için sırasıyla .48; .17; .32; .34 ve .22 olarak bulmuştur. Düşük çıkan bu değerleri 25 madde ile benzer testler için Spearman-Brown formülüyle, sırasıyla .82, .51, .70, .72, .59'a yükseltmiştir. Bu değerler, Usiskin'nin sonuçlarıyla örtüştüğünden testin Türkçeye uyarlamasının aslı ile aynı şekilde işlevlik gösterdiği söylenebilir (Duatepe, 2000).

Yukarıdaki bilgiler ışığında, bu ölçeğin de kullanıma hazır ve güncel olduğu düşünülerek araştırmada kullanılmıştır. Ölçek EK-4'de sunulmuştur. Ayrıca, ölçeği geliştiren Duatepe (2000)'den, elektronik posta yoluyla yasal izin de alınmıştır (EK-5).

3.3.3. Lineer Cebir Testi

Lineer cebir başarı testinin geliştirilmesine başlamadan önce, ilk olarak araştırmanın konusu ile ilgili alanyazın taraması ve test planı yapılmıştır. Geliştirilecek ölçek için lineer cebir dersinin kazanımlarının bilinmesi gerekmektedir. YÖK'ün belirlediği programlar incelendiğinde bu tarz temel alan derslerinin kazanımlarının belirlenmediği görülmüştür. Dolayısıyla ikinci aşama olarak lineer cebir dersinin 13 haftalık kazanımları oluşturulmuştur (EK-6).

Üçüncü olarak özellikle ÖYS sisteminin uygulandığı dönemdeki çalışmalar incelenmiştir. Bu çalışmalar incelendikten sonra ölçek hazırlamaya plan yapılarak başlanmıştır (Tablo 12). Bu amaçla test planında, testin kullanılış amacı, bu amaçla hangi kazanımların yoklanacağı, bu kazanımların hangi yollarla ve nasıl yoklanacağı, yoklanacak olan davranışlardan her birine ne kadar ağırlık verileceği belirlenmiştir.

Tablo 12

Test Planı

Testin Adı	Lineer Cebir Testi
Sınıf	Matematik Bölümü (Üniversite) 2. Sınıf
Testin tipi	Objektif Test
Süre	50 dakika
Testin Amacı	Lineer Cebir konusunda geçerliği güvenirliği yüksek bir Erişi Düzeyi Belirleme Ölçeği hazırlamak
Soru Sayısı	25
Belirtke Tablosu	EK-7
Soru tipi	Çoktan Seçmeli Madde
Test güçlüğü ve testte bulunacak soruların güçlük dağılımı	Ölçeğin başarı testi olmasından dolayı çeşitlilik olması açısından özellikle orta güçlükte olmak üzere her güçlükte soru seçilmeye çalışılmıştır.

Testlerde yoklanacak olan davranışların ayrıntılarıyla belirlenmesinde belirtke tablolarından yararlanılır (Özçelik, 1997). Lineer cebir testi için önce konuyla ilgili olarak “bilgi, kavrama, uygulama, analiz, sentez değerlendirme” basamaklarının her birinden kaçar madde yazılacağı belirlenmeye çalışılmıştır. Bunun için uzman görüşlerine başvurulmuş, ilgili basamaklardan yazılacak madde sayısına karar verilmiş ve belirtke tablosu yapılmıştır. Geliştirilecek testle yoklanacak kazanımlara kaçar tane maddenin taksonomik açıdan hangi düzeylere göre dağılacağı belirlenerek belirtke tablosuna geçirmiştir (EK-7). Lineer cebir başarı testine yönelik hazırlanan belirtke tablosundan yararlanarak 25 maddeden oluşan test hazırlanmış, alanda uzman iki öğretim elemanının görüşleriyle üzerinde değişiklikler yapılarak pilot çalışmaya hazır hale getirilmiştir.

Lineer cebir kazanımları incelendiğinde, bazı kazanımların çoktan seçmeli testle ölçülemeyeceği düşünülebilir bu nedenle için açık uçlu problem desteğinin alınması uygun görülmüştür.

3.3.4. Açık Uçlu Problemler

Lineer cebir gibi üst düzey beceri isteyen bir derse yönelik ölçme aracı geliştirmek oldukça zordur. Bunun yanında geliştirilen başarı testinin üst düzey davranışları ölçemeyeceği de düşünülebilir. Bu nedenle, araştırmada başarı testinin yanı sıra ölçme aracı olarak açık uçlu problemler de geliştirilecektir. Burada temel amaç, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının lineer cebir problemlerinin çözümünde matematiksel düşünmelerini ön plana çıkarmak, dolayısıyla bu kısmı ölçmektir. Yeşildere (2006)'ye göre, öğrencilerin matematiksel bilgilerinin değerlendirilmesinde, aşağıda belirtilen kriterler hakkında bilgi toplanmalıdır (s.47-48):

- Matematiğin kendi içinde ve diğer disiplinlerle ilgili problemleri çözmek için matematiksel bilgileri uygulayabilme becerisi,
- Fikirlerini aktarmada matematik dilini kullanabilme becerisi,
- Usa vurma ve analiz becerisi,
- Kavram ve kuralları anlama becerisi,
- Matematiğe olan eğilimi,
- Matematiğin doğasını anlama becerisi
- Matematiksel bilginin bu yönlerinin entegrasyonunu yapabilme becerisi.

Araştırmacının bu açıklamaları göz önüne alındığında lineer cebir gibi üst düzey derste açık uçlu problemlerin kullanılmasının önemli olduğu anlaşılmıştır. Dersin içeriği soyuttur ve muhakeme becerisinin ön plandadır. Buna ek olarak Yeşildere (2006), yukarıdaki açıklamalarının ışığında matematiksel düşünme açısından açık uçlu problemlere yaklaşmış ve açık uçlu problemlerin içeriğinin aşağıdaki gibi olması gerektiğini vurgulamıştır (s.48):

- Öğrencilerin var olan bilgilerini ortaya koymalarını ve bu bilgiler doğru da yanlış da olsa, öğrencilerin ne bildiklerini ifade etmelerini sağlamayı,
- Öğrencilerin verilen problemin içinde, problemi çözmesini sağlayacak örüntüyü, kuralı keşfederek yansıtmalarını,
- Öğrencilerin kendilerine verilen bilgilerden hareketle akıl yürüterek adım adım ilerlemelerini açığa çıkarmayı,

- Öğrencilerin doğru matematiksel iletişim kurup kurmadıklarını belirlemeyi, Problemi çözerken verilen nicel ve görsel bilgileri ne ölçüde kullandıklarını

tespit etmeyi amaçlamaktadır.

Bu belirlenen ölçütlere uygun olarak 6 açık uçlu problem hazırlanmış ve bu problemler lineer cebir dersini veren iki öğretim üyesine gösterilerek görüşleri alınmıştır. Önerilen değişiklikler yapıldıktan sonra bu problemlerin pilot çalışma için hazır oldukları düşünülmüştür.

3.4. Pilot Çalışmalar

3.4.1. Lineer Cebir Testi

Ölçeğin geçerlik ve güvenirlik çalışması, 2. sınıftayken söz konusu dersi almış olan 239 3. ve 4. sınıf matematik öğretmen adayı üzerinde gerçekleştirilmiştir. Özçelik (1997)'e göre çoktan seçmeli test maddelerinden elde edilen analiz sonuçlarının üç yönü üzerinde durulması gerekir. Bunlar; maddenin güçlüğü, maddenin ayırt ediciliği, maddenin çeldiricilerinin işlerliğidir. Bunun üzerine 25 maddelik aday ölçeğin her maddesinin ayrı ayrı güçlük ve ayırt edicilik indislerine göre dağılımları ITEMANN programında hesaplanarak, güvenirlik katsayısı 0,835 olarak bulunmuştur (EK-8). Ayrıca, edinilen sonuçlara göre maddelerin güçlük dağılımları aşağıda sunulmuştur.

Tablo 13

Test Sorularının Madde Güçlüğüne Göre Dağılımı

Madde Güçlüğü (p)	Madde numarası	Maddenin Değerlendirilmesi
0,80 ve 1,00 arasında olanlar	yok	Çok kolay maddeler
0,50 ve 0,80 arasında olanlar	1,2,6,19,24	Kolay maddeler
0,30 – 0,49 arasında olanlar	3,5,7,8,9,10,14,15,16,21,23,25	Orta güçlükte maddeler
0,29 ve altında olanlar	4,11,12,13,17,18,20,22	Zor maddeler

Aşağıdaki tabloda test sorularının maddenin ayırt etme indeksine göre dağılımı sunulmuştur.

Tablo 14

Testteki Soruların Ayırt Etme İndeksine Göre Dağılımı

Maddenin Ayırt Etme İndeksi (d)	Madde numarası	Maddenin Değerlendirilmesi
0,40 ve daha büyük	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14, 15,16,17,18,19,20,21,22,24,25	Oldukça iyi maddeler
0,30 – 0,39	yok	İyi maddeler
0,20 – 0,29	23	Düzeltilmeye ve geliştirmeye muhtaç maddeler
0,19 ve daha küçük	yok	Zayıf maddeler

Bu sonuçlara göre 23 numaralı sorunun testten çıkarılması uygun görülmüştür. Söz konusu sorunun testten çıkarılmasıyla yeniden analiz yapılmış ve yeni ölçeğin güvenirlik katsayısı 0,844 olarak bulunmuştur (EK-9). Bu sonuçlar daha önce görüşleri alınan iki öğretim elemanına yeniden gösterilerek ölçek hakkındaki son görüşleri alınmıştır. Bu görüşler doğrultusunda, 24 maddelik yeni ölçeğin kullanıma hazır olduğu düşünülmüştür (EK-10).

3.4.2. Açık Uçlu Problemler

Pilot çalışma için geçen yıl lineer cebir dersini almış ve bu dersten AA notu almış 1 Kız ve 1 Erkek olmak üzere 2; CB notu almış 1 Kız ve 1 Erkek olmak üzere 2 ve DD yada DC notu almış olan 1 Kız ve 1 Erkek olmak üzere 2 ve toplamda 6 ilköğretim matematik öğretmenliği 3. sınıf öğrencisi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Bu belirleme tez izleme komitesinin önerisi üzerine düzenlenmiştir. Pilot çalışmada, öğrencilerin en başta problemi anlama, problemlerin kendi bilgilerini ortaya koyma, akıl yürütme gibi matematiksel becerilerini ortaya çıkarmak amacıyla nitel analize başvurulmuştur. Buradaki nitel analiz, Cai (2003) tarafından matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi için oluşturulan kategoriler doğrultusunda gerçekleştirilmiştir. Bu kategoriler (akt. Yeşildere, 2006:48):

1. Cevabın doğruluğu ve hataların tespiti,
2. Çözümün gösterimi,
3. Çözümün açıklanması

dır. Bu kategori için ise her öğrencinin açık uçlu problemlere verdikleri cevaplar aşağıdaki belirtilen, Yeşildere (2006) tarafından geliştirilen sınıflama ile puanlama yapılmıştır.

- 4 puan; problemi çözme sekli ve açıklaması doğru, düşüncelerini doğru matematiksel gösterim ve sembollerle ifade eden, akıl yürütme biçimini net olarak ifade eden ve tam bir anlama içersinde olduğunu belirten cevaplara verilecektir.
- 3 puan; problemi çözme sekli ve açıklaması birkaç küçük hata veya belirsizlik dışında doğru olan, düşüncelerini doğru matematiksel gösterim ve sembollerle ifade eden, akıl yürütme biçimini ifade eden ve tam bir anlama içersinde olduğunu belirten cevaplara verilecektir.
- 2 puan; problemi çözme sekli ve açıklaması problemin biraz anlaşıldığını gösterse de, çözüme yönelik açıklamaları bazı yönlerden yetersiz bilgiye sahip olduğuna işaret eden cevaplara verilecektir.
- 1 puan; problemi çözme sekli ve açıklaması konu ile ilgili sınırlı bilgiye sahip olduğunu gösteren cevaplara verilecektir.
- 0 puan; problemi yanlış çözen veya yanıtsız bırakılan cevaplara verilecektir.

Pilot çalışmada, problemlerin amaca hizmet ettiğinin yani belirlenen kategorileri ölçtüğünün saptanmasının ardından bulgular tekrar uzmanlara gösterilmiştir. Açık uçlu problemlerin geçerliği ve güvenirliği bu sayede tamamlanmıştır. Söz konusu pilot çalışma için öğrencilere 50 dk süre verilmiştir.

Öğrencilere uygulanan problemler tek tek incelenmiş, belirtilen kriterler ışığında ölçme aracı olarak kullanılıp kullanılmayacağı üzerinde derin bir inceleme yapılmıştır. Genel olarak, bu dersten daha önce AA notu ile başarılı olan da, DC notu ile başarılı olan da tüm problemleri anlamış, fakat çözme ve matematiksel bilgileri kullanma aşamasında farklılıklar olduğu saptanmıştır. Bu farklılıkların, başarılıyı ve başarısızı değerlendirme de önemli olduğu düşünülerek, problemlerin uygun seçildiği sonucuna varılabilir. Bir önceki sayfadaki puanlamaya göre, öğrencilerin notları ve puanları aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 15

Pilot Çalışma Sonucunda Öğrencilerin Açık Uçlu Problemlerden Aldıkları Puanlar

Öğrenci Notu	**1. Soru**	**2. Soru**	**3. Soru**	**4. Soru**	**5. Soru**	**6. Soru**	**Toplam**
AA	4	3	3	4	4	3	21
AA	4	4	2	4	4	4	22
CB	4	2	2	3	2	2	15
CB	4	3	2	2	2	1	14
DC	2	1	1	2	0	0	6
DC	2	2	2	1	1	0	8

Bu verilere dayanılarak, öğrencilerin soruları anladıkları fakat matematiksel bilgi seviyelerinin farklılıklarından dolayı çözüme ulaşmakta sıkıntı çektikleri düşünülebilir. Ayrıca, puanların dağılımı da ölçekte aynı zamanda, zor, çok zor ve kolay maddelerin var olduğu da söylenebilir. Bunun yanında 6 öğrencinin, 6 aday açık uçlu probleme verdikleri yanıtların tümü, problemleri daha önce inceleyen uzmanlara aşağıdaki çizelge ve yukarıdaki puanlama ile birlikte sunulmuş ve amaca hizmet edip etmedikleri bu sayede belirlenmeye çalışılmıştır.

Tablo 16

Açık Uçlu Problemlerin Pilot Çalışma Sonrası Değerlendirmeleri

Öğrenci No	Sorular	Kriterler
-	-	Problemi Anlayabilmiş mi?
		Kendi Bilgilerini Ortaya Koyabilmiş mi?
		Problemi Çözme Şekli ve Açıklaması Yeterli mi?

Uzmanlardan gelen dönütler tek tek incelenmiş ve öğrencilerin 6. açık uçlu problemi soru kökünden dolayı anlamakta sorun yaşadığı, camdan yapılacak akvaryumla öğrencilerin paralelyüzlü arasındaki ilişkiyi anlayamadıklarını belirtmişlerdir. Bu nedenle uzmanlar soru kökünün değiştirilmesini ya da açıklama kısmına ekleme yapılması gerektiğini vurgulamışlardır. Bu görüşler ışığında, 6. açık uçlu problemin sorusu değiştirilerek yeniden ölçeğe konulmuştur. Bunun yanında uzmanlar ölçekte 1. olarak yer alan kırtasiye malzemeleri ile ilgili sorunun çözümlerinde öğrencilerin belirttikleri açıklamaların lineer cebirle ilgili olmadığını vurgulamışlardır. Bu eleştirilere dayanılarak 1. soru ölçekten çıkarılmıştır. Belirtildiği gibi, açık uçlu problemlerin geçerliği ve güvenirliği, pilot çalışma ve uzman görüşleri ile sağlanmıştır. Açık uçlu problemlerin son hali EK-11'de sunulmuştur.

3.5. Prosedür

3.5.1. Deneysel İşlem

Araştırmanın deney grubunda bölüm 2.8.'de belirlenen beş aşamalı öğretim süreci baz alınmıştır. Bu süreçte sunumlarda, projeksiyon cihazıyla birlikte, mathematica programı, Wolframalpha internet sitesi ve gerektiğinde de tahta birlikte kullanılmıştır. Wolframalpha internet sitesi ile öğrencilere derste ele alınan temel doğru ve düzlem çizimleri gösterilmiştir. Buradaki temel amaç öğrencilerin mathematica programına ulaşamaması ve kişisel bilgisayarları olmaması durumunda verilen ödevleri yapabilmelerini sağlamaktır. 9 haftalık uygulama sürecinde geometrinin kullanımına, öğrencilerin katılımı için ders içi etkinlik ve ders sonu mini sınavlara, soyut vektör uzaylarının kullanımına dikkat edilmiş ve izometrik çizimler üzerinde de durulmaya özen edilmiştir. Ders planı, sunumu, ilk dört hafta yapılan mathematica etkinliği, ders sonu değerlendirme ve ödevler EK-12-42 arasında, her hafta ayrı olmak üzere sunulmuştur. Ders sunumundan örnekler ve Mathematica etkinliği incelendiğinde, öğrencilerin sentetik-geometrik düşünme biçimlerinin gelişimi için iki ve üç boyutlu çizimlere; analitik-aritmetik düşünme biçimleri için teorem ve genel ifadelerin sayısal örneklerine ve analitik-yapısalcı düşünme biçimi için denklemlerin çıkarılışı ve soyut kavramlara yer verilmiştir.

Araştırmanın kontrol grubunda ise geleneksel lineer cebir öğretimi uygulanmış, sadece tahta kullanılarak ders işlenmiştir. Araştırma, her iki grupta da aynı kişi tarafından gerçekleştirilmiştir.

3.5.2. Betimsel İşlem

Araştırmanın bu kısmı deneysel kısmın tamamlanmasından sonra ele alınmıştır. İlköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 2. ve 3. (pilot çalışmaya katılan 2 şube hariç) sırasıyla uzamsal test, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ölçeği, lineer cebir testi ve açık uçlu beş problem birer hafta ara ile uygulanmıştır.

3.6. Verilerin Toplanması

Uzamsal yetenek testi, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testi, lineer cebir testi ve açık uçlu problemlerle ilgili gerekli açıklamalar yapıldıktan sonra, araştırmacı tarafından dağıtımları yapılmış ve gerekli süre sonunda kendisi tarafından toplanmıştır. Ayrıca araştırmanın deneysel kısmında, uzamsal yetenek testi, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testi ve lineer cebir testi ön test ve son test olmak üzere çalışma grubuna iki kere uygulanmıştır.

3.7. Verilerin Kodlanması Çözümlenmesi

Öğrencilerin uzamsal yetenek testinde işaretledikleri her doğru için birer puan verilmiştir. Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testinin düzeylere göre analizi Cantürk-Günhan (2006)'nın yaklaşımına göre yapılmıştır. Öğrencinin her birinin bir düzeyi aşabilmeleri için o düzeyden en az üç soru işaretlemeleri baz alınmıştır. Lineer cebir testinde öğrencilerin her bir doğru yanıtları için birer puan verilmiştir.

Açık uçlu problemlerin analizi ise bölüm 3.4.2'de açıklanan Yeşildere (2006)'nin sınıflamasına göre yapılmıştır. Lineer cebir başarı puanı, öğrencilerin açık uçlu problemlerden ve lineer cebir testinden aldıkları puanların toplamı olarak belirlenmiştir. Bu toplam puan hesaplanırken öğrencilerin lineer cebir testinden işaretledikleri doğru sayıları 3 ile çarpılmıştır.

Veri toplama araçlarından elde edilen verilerin analizinde SPSS 13.0 paket programı kullanılmıştır.

Öncelikle çalışma grupları üzerinde gerçekleştirilen ölçümlerin normal dağılım gösterip göstermedikleri incelemek amacıyla normallik testi yapılmıştır. Araştırmanın deneysel kısmındaki çalışma grubu olan deney ve kontrol gruplarındaki katılımcı sayısı elliden küçük olduğu için Shapiro-Wilks, grup sayıları elliden büyük diğer katılımcıların verilerine Kolmogorov-Smirnov normallik analizleri uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, parametrik olmayan Mann-Whitney U testi ve Wilcoxon işaretli sıralar testi kullanılmıştır. Bunun yanında, sayısal ilişkileri incelemek için Pearson korelasyon katsayısı kullanılmıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde araştırmanın belirlenen alt problemlerine ilişkin çözümlemeler sonucunda elde edilen bulgular ve bu bulgularla ilgili yorumlara yer verilmiştir. Her bir alt probleme ait, istatistiksel işlemler sonucunda elde edilen analiz, bulgular ve yorumlar aşağıda belirtilmiştir.

4.1. 1. Alt Probleme İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"Teknoloji destekli lineer cebir öğretimi yapılan deney ve geleneksel öğretim yapılan kontrol grubundaki öğrencilerin, uzamsal yetenek testi son test puan ortalamaları arasında; Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ortalamaları arasında ve lineer cebir testi ortalamaları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" sorusuna yanıt aranmıştır. Kontrol ve deney grubundaki öğrenci sayısı 50'nin altında olduğu için son test ölçümlerinin normallik analizini Shapiro-Wilks testi ile incelenmiştir. İlgili ölçümlerin normallik analizleri aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 17

Son Test Ölçümlerinin Normallik Analizleri

Ölçüm	Sınıf	N	$\overline{X}$	SS	Shapiro-Wilks	P
Uzamsal Test	Kontrol	44	198.09	44.85	.905	.002
	Deney	41	222.82	31.62	.902	.002
Van Hiele Testi	Kontrol	44	3.65	1.25	.861	.000
	Deney	41	3.70	.98	.876	.000
Lineer Cebir Testi	Kontrol	44	19.09	2.51	.921	.005
	Deney	41	20.39	2.11	.927	.011

Tablo 17 incelendiğinde, tüm p değerlerinin .05'in altında olduğu ve son test için yapılan üç ölçümün de normal dağılım göstermediği görülmektedir. Bu durumdan dolayı kontrol ve deney grubundaki öğrencilerin son test puanlarını karşılaştırmak için parametrik olmayan Mann-Whitney U testi kullanılmıştır. Öğrencilerin uzamsal yetenek testinden aldıkları son test puanlarının Mann-Whitney U testi aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 18

Kontrol ve Deney Grubundaki Öğrencilerin Uzamsal Test Son Test Puanlarına İlişkin Mann-Whitney U Testi Sonuçları

Grup	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	U	P
Kontrol	44	35.61	1567	577	.004
Deney	41	50.93	2088		

Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin uzamsal test son test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır ($U=577$, $p<.05$). Öğrencilerin sıra ortalamaları ve toplamları incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinin sıra ortalamasının (50.93) kontrol grubu öğrencilerinin sıra ortalamasından (35.61) daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu bulguya dayanarak teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin uzamsal yeteneklerine olumlu etkisinin olduğu söylenebilir.

Öğrencilerin Van Hiele testine ilişkin son test puanlarının Mann-Whitney U testi aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 19

Kontrol ve Deney Grubundaki Öğrencilerin Van Hiele Testi Son Test Puanlarına İlişkin Mann-Whitney U Testi Sonuçları

Grup	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	U	P
Kontrol	44	43.44	1911.5	882.5	.858
Deney	41	42.52	1743.5		

Teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin uygulandığı deney ve geleneksel öğretimin uygulandığı kontrol grubu öğrencilerinin Van Hiele son test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır (U=882.5, p>.05). Bu sonuca dayanarak ise, teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerini etkilemediği söylenebilir.

Kontrol ve deney grubu öğrencilerinin lineer cebir testinden aldıkları son test puanlarının Mann-Whitney U testi aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 20

Kontrol ve Deney Grubundaki Öğrencilerin Lineer Cebir Testi Son Test Puanlarına İlişkin Mann-Whitney U Testi Sonuçları

Grup	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	U	P
Kontrol	44	36.91	1624	634	.017
Deney	41	49.54	2031		

Tablo 20'ye göre deney ve kontrol grubu öğrencilerinin lineer cebir testi son test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır (U=634, p<.05). Öğrencilerin sıra ortalamaları ve toplamları incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinin sıra ortalamasının (49.54) kontrol grubu öğrencilerinin sıra ortalamasından (36.91) daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu bulguya dayanarak teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin başarılarına olumlu etkisinin olduğu söylenebilir.

4.2. 2. Alt Probleme İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"Teknoloji destekli lineer cebir öğretimi uygulanan olan deney grubundaki öğrencilerin, uzamsal yetenek testi ön test ve son test puanları arasında; Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testi ön test ve son test puanları arasında ve lineer cebir testi ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" sorusuna yanıt aranmıştır. Bu kısımda deney grubundaki öğrencilerin uygulama öncesi ve sonrası test puanlarına ilişkin sonuçlara değinilecektir. İlk olarak deney grubundaki öğrencilerin uzamsal test ön test-son test puanları arasında anlamlı bir fark olup olmadığı incelenmiştir. Bu amaçla -ölçümlerin normal dağılım göstermemesinden dolayı- ilişkili örneklemler için parametrik olmayan Wilcoxon işaretli sıralar testi kullanılmıştır. Aşağıdaki tabloda deney grubundaki öğrencilerin uzamsal testten aldıkları ön test-son test puanlarının Wilcoxon işaretli sıralar testi analizi sunulmuştur.

Tablo 21

Deney Grubundaki Öğrencilerin Uzamsal Test Ön Test-Son Test Puanlarına İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Son Test- Ön Test	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	P
Negatif Sıra	6	15.12	68.00	-4.59	.000*
Pozitif Sıra	34	22.12	752.00		
Eşit	1	-	-		

* Negatif sıralar temeline dayalı

Deney grubundaki öğrencilerin uzamsal testten aldıkları ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır ($z=-4.59$, $p<.05$). Fark puanlarının sıra ortalaması ve toplamları dikkate alındığında gözlenen bu farkın, pozitif sıralar yani son test lehinde olduğu görülmektedir. Bu bulguya dayanarak, teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin gelişimine katkı sağladığı söylenebilir.

Aşağıdaki tabloda ise, deney grubundaki öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testi ön test-son test puanlarının Wilcoxon işaretli sıralar testi analizi sunulmuştur.

Tablo 22

Deney Grubundaki Öğrencilerin Van Hiele Testi Ön Test-Son Test Puanlarına İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Son Test- Ön Test	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	P
Negatif Sıra	17	15.12	257.00	-1.26	.207
Pozitif Sıra	11	13.55	149.00		
Eşit	13	-	-		

* Negatif sıralar temeline dayalı

Deney grubundaki öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testinden aldıkları ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır (z=-1.26, p>.05). Bu bulguya dayanarak teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerini etkilemediği söylenebilir. Öğrencilerin lineer cebir testi ön test-son test puanlarına ilişkin Wilcoxon işaretli sıralar testi analizi aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 23

Deney Grubundaki Öğrencilerin Lineer Cebir Testi Ön Test-Son Test Puanlarına İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Son Test- Ön Test	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	P
Negatif Sıra	0	.00	.00	-5.59	.000*
Pozitif Sıra	41	21.00	861.00		
Eşit	0	-	-		

* Negatif sıralar temeline dayalı

Deney grubundaki öğrencilerin lineer cebir testinden aldıkları ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır (z=-5.59, p<.05). Fark puanlarının sıra ortalaması ve toplamları dikkate alındığında gözlenen bu farkın, pozitif sıralar yani son test lehinde olduğu görülmektedir. Bu sonuca göre, teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin lineer cebir öğrenmelerine katkı sağladığı söylenebilir.

4.3. 3. Alt Probleme İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"Geleneksel Lineer cebir öğretiminin uygulandığı kontrol grubundaki öğrencilerin; uzamsal yetenek testi ön test ve son test puanları arasında; Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ön test ve son test puanları arasında ve lineer cebir testi ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" sorusuna yanıt aranmıştır. Bu amaçla, kontrol grubundaki öğrencilerin uzamsal test ön test-son test puanları arasında anlamlı bir fark olup olmadığı Wilcoxon işaretli sıralar testi ile analiz edilmiştir. Aşağıdaki tabloda bu bulgulara değinilmektedir.

Tablo 24

Kontrol Grubundaki Öğrencilerin Uzamsal Test Ön Test-Son Test Puanlarına İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Son Test- Ön Test	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	P
Negatif Sıra	14	29.11	407.50	-1.02	.307
Pozitif Sıra	30	19.42	582.50		
Eşit	0	-	-		

* Negatif sıralar temeline dayalı

Kontrol grubundaki öğrencilerin uzamsal testten aldıkları ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır (z=-1.02, p>.05). Bu bulguya dayanarak geleneksel lineer cebir öğretiminin öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin gelişimine katkı sağlamadığı söylenebilir.

Diğer taraftan kontrol grubundaki öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünce düzeyleri testinden aldıkları ön test-son test puanlarının Wilcoxon işaretli sıralar testi ile analizi aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 25

Kontrol Grubundaki Öğrencilerin Van Hiele Testi Ön Test-Son Test Puanlarına İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Son Test- Ön Test	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	P
Negatif Sıra	21	13.50	283.50	-1.06	.286
Pozitif Sıra	9	20.17	181.50		
Eşit	14	-	-		

* Negatif sıralar temeline dayalı

Kontrol grubundaki öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünce düzeyleri testinden aldıkları ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır (z=-1.06, p>.05). Bu bulguya dayanarak geleneksel lineer cebir öğretiminin öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin gelişimine katkı sağlamadığı söylenebilir.

Aşağıdaki tabloda ise kontrol grubundaki öğrencilerin lineer cebir testinden aldıkları ön test-son test puanlarının Wilcoxon işaretli sıralar testi ile analizi aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 26

Kontrol Grubundaki Öğrencilerin Lineer Cebir Testi Ön Test-Son Test Puanlarına İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Son Test- Ön Test	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	P
Negatif Sıra	0	.00	.00	-5.78	.000
Pozitif Sıra	44	22.50	990.00		
Eşit	0	-	-		

* Negatif sıralar temeline dayalı

Kontrol grubundaki öğrencilerin lineer cebir testinden aldıkları ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır ($z=-5.78$, $p<.05$). Fark puanlarının sıra ortalaması ve toplamları dikkate alındığında gözlenen bu farkın, pozitif sıralar yani son test lehinde olduğu görülmektedir. Bu bulguya dayanarak geleneksel lineer cebir öğretiminin öğrencilerin lineer cebir öğrenmelerine katkı sağladığı söylenebilir.

4.4. 4. Alt Probleme İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"İzmir evreninde yer alan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri ile; cinsiyetleri, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri, lineer cebir başarısı ve akademik başarı arasında anlamlı bir ilişki var mıdır" sorusuna yanıt aranmıştır. İlk olarak bu alt probleme karşılık gelen betimleyici istatistiklerin sunulmasının uygun olacağı düşünülmüştür.

Tablo 27

Katılımcılar Hakkında Genel Bilgiler

Ölçüm	Cinsiyet	N	$\overline{X}$	SS
Uzamsal Yönelim	Kız	111	175.52	25.72
	Erkek	82	174.09	20.63
Uzamsal Görselleştirme	Kız	111	39.50	18.73
	Erkek	82	38.35	17.79
Van Hiele G. D. D.	Kız	111	3.86	.98
	Erkek	82	3.59	.96
Lineer Cebir Test	Kız	111	20.09	2.10
	Erkek	82	19.00	2.61
Açık Uçlu Problemler	Kız	111	5.45	3.96
	Erkek	82	7.21	5.86
Akademik Ortalama	Kız	111	2.89	.36
	Erkek	82	2.52	.48
Lineer Cebir Başarı Puanı	Kız	111	65.74	7.81
	Erkek	82	64.21	12.02
Uzamsal Toplam Puan	Kız	111	214.64	37.64
	Erkek	82	212.32	33.06

Bunun yanında yapılacak kıyaslamalar için yapılan ölçümlerin normal dağılım gösterip göstermediği de analiz edilmiştir. Öğrencilerin uzamsal testten aldıkların puanların Kolmogorov-Simirnov normallik analizi aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Bunun yanında yukarıdaki tablo incelendiğinde, ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin uzamsal test toplam puan ortalamalarının; kız öğrencilerde 214.64, erkek öğrencilerde 212.32 olduğu görülmektedir. Uzamsal yetenek testinde toplam 282 madde olduğu göz önüne alındığında, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerinin beklenenin altında olduğu görülmektedir.

Tablo 28

Uzamsal Testin Normallik Analizi

Ölçüm	Sınıf	N	$\overline{X}$	SS	Kolmogorov-Simirnov	P
Uzamsal Test	Kız	111	214.64	37.64	.102	.006
	Erkek	82	212.32	33.06	.107	.022

Tablo 28'den de görüldüğü gibi p değerleri .05'in altında olduğu ve öğrencilerin uzamsal testten aldıkları puanların normal dağılım göstermedikleri görülmektedir. Dolayısıyla 4. alt problemin ilk adımı olan öğrencilerin uzamsal test puanlarının cinsiyete göre anlamlı bir fark gösterip göstermediğini incelemek için parametrik olmayan Mann-Whitney U testi kullanılmıştır. Aşağıdaki tabloda bu bulgulara yer verilmiştir.

Tablo 29

Öğrencilerin Uzamsal Test Puanlarının Cinsiyete Göre Mann-Whitney U Testi Sonuçları

Cinsiyet	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	U	P
Kız	111	99.28	11020.50	4297.50	.509
Erkek	82	93.91	7700.50		

Kız ve erkek öğrencilerin uzamsal test puanları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır ($U=4297.50$, $p>.05$). Bu sonuca dayanarak, kız ve erkek öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin eşit seviyede oldukları söylenebilir.

Öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile ilişkisini incelemek için Pearson korelasyon katsayısı kullanılmıştır. Aşağıdaki tabloda bu sonuçlara değinilmiştir.

Tablo 30

Öğrencilerin Uzamsal Yetenekleri ile Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeylerine İlişkin Korelasyon Tablosu

		Uzamsal Yetenek	Van Hiele G. D. D.
Uzamsal Yetenek	Pearson Korelasyon Katsayısı	1	-,030
	P	.	,678
	N	193	193
Van Hiele G. D. D.	Pearson Korelasyon Katsayısı	-,030	1
	P	,678	.
	N	193	193

** Korelasyon Katsayısı 0,01 seviyesinde anlamlıdır.

Tablo 30'a göre öğrencilerin uzamsal yetenekleri ile Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasında anlamlı bir ilişkiye rastlanmamıştır [r=-0.030, p>.01]. Bu sonuca göre öğrencilerin uzamsal yetenekleri ile Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ilişkisizdir denebilir.

Öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin lineer cebir başarısı ile ilişkisi Pearson korelasyon katsayısı ile incelenmiştir. Aşağıdaki tabloda sonuçlar sunulmuştur.

Tablo 31

Öğrencilerin Uzamsal Yetenekleri ile Lineer Cebir Başarılarına İlişkin Korelasyon Tablosu

		Uzamsal Yetenek	Lineer Cebir Başarısı
Uzamsal Yetenek	Pearson Korelasyon Katsayısı	1	,354
	P	.	,000*
	N	193	193
Lineer Cebir Başarısı	Pearson Korelasyon Katsayısı	,354	1
	P	,000*	.
	N	193	193

** Korelasyon Katsayısı 0,01 seviyesinde anlamlıdır.

Tablo 31 incelendiğinde öğrencilerin uzamsal yetenekleri ile lineer cebir başarıları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu görülmektedir [r=0.354, p<.01]. Buna göre uzamsal yetenek seviyesi yüksek olan bir öğrencinin lineer cebirden başarılı olduğu söylenebilir. Ayrıca, determinasyon katsayısı (r^2=0.12) dikkate alındığında uzamsal yetenek toplam puanının (değişkenliğinin) %12'sinin lineer cebir başarısından kaynaklandığı da söylenebilir.

Aşağıdaki tabloda öğrencilerin uzamsal yetenekleri ile akademik başarıları arasındaki ilişkinin Pearson korelasyon katsayısı ile analizi sunulmuştur.

Tablo 32

Öğrencilerin Uzamsal Yetenekleri ile Akademik Başarılarına İlişkin Korelasyon Tablosu

		Uzamsal Yetenek	Akademik Başarı
Uzamsal Yetenek	Pearson Korelasyon Katsayısı	1	,362
	P	.	,000*
	N	193	193
Akademik Başarı	Pearson Korelasyon Katsayısı	,362	1
	P	,000*	.
	N	193	193

** Korelasyon Katsayısı 0,01 seviyesinde anlamlıdır.

Tablo 32'ye göre öğrencilerin uzamsal yetenekleri ile akademik başarıları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu görülmektedir [r=0.362, p<.01]. Buna göre uzamsal yetenek seviyesi yüksek olan bir öğrencinin akademik başarısının da yüksek olduğu söylenebilir. Ayrıca, determinasyon katsayısı (r^2=0.13) dikkate alındığında uzamsal yetenek toplam puanının (değişkenliğinin) %13'ünün akademik başarıdan kaynaklandığı da söylenebilir.

4.5. 5. Alt Probleme İlişkin Bulgular ve Yorumlar

"İzmir evreninde yer alan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile; cinsiyetleri, lineer cebir başarısı ve akademik başarı arasında anlamlı bir ilişki var mıdır" sorusuna yanıt aranmıştır.

Kullanılacak istatistik için öncelikle, öğrencilere uygulanan Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri testine ait düzeylerin normal dağılım dağılmadıkları analiz edilmiştir. Katılımcı sayısı 50'nin üzerinde olduğu için Kolmogorov-Simirnov testi kullanılmıştır. Aşağıdaki tabloda sonuçlara değinilmiştir.

Tablo 33

Öğrencilerin Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeylerinin Normallik Analizi

Ölçüm	Sınıf	N	$\overline{X}$	SS	Kolmogorov-Simirnov	P
Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri Testi	Kız	111	3.86	.98	.227	.000
	Erkek	82	3.59	.96	.198	.000

Tablo 33'e göre öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri normal dağılım göstermemektedir. Bu sebepten dolayı kız ve erkek grupları karşılaştırmak için parametrik olmayan Mann-Whitney U testi kullanılmıştır. Aşağıdaki tabloda bu bulgulara yer verilmiştir.

Tablo 34

Öğrencilerin Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeylerinin Cinsiyete Göre Mann-Whitney U Testi Sonuçları

Cinsiyet	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	U	P
Kız	111	102.79	11410.00	3908	.080
Erkek	82	89.16	7311.00		

Kız ve erkek öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır ($U=3908$, $p>.05$). Bu sonuca dayanarak, kız ve erkek öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin eşit seviyede oldukları söylenebilir.

Öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile lineer cebir başarıları arasında anlamlı bir ilişki olup olmadığını incelemek için Pearson korelasyon katsayısı kullanılmıştır. Aşağıdaki tabloda sonuçlar sunulmuştur.

Tablo 35

Öğrencilerin Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeylerine ile Lineer Cebir Başarısına İlişkin Korelasyon Tablosu

		Van Hiele G. D. D.	Lineer Cebir Başarısı
Van Hiele G. D. D.	Pearson Korelasyon Katsayısı	1	,099
	P	.	,171
	N	193	193
Lineer Cebir Başarısı	Pearson Korelasyon Katsayısı	,099	1
	P	,171	.
	N	193	193

** Korelasyon Katsayısı 0,01 seviyesinde anlamlıdır.

Tablo 35'e göre öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile lineer cebir başarısı arasında anlamlı bir ilişkiye rastlanmamıştır [r=-0.099, p>.01]. Bu sonuca göre öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile lineer cebir başarıları ilişkisizdir denebilir.

Aşağıdaki tabloda öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile akademik başarıları arasındaki ilişki sunulmuştur.

Tablo 36

Öğrencilerin Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri ile Akademik Başarılarına İlişkin Korelasyon Tablosu

	Van Hiele G. D. D.	Akademik Başarı
Van Hiele G. D. D. Pearson Korelasyon Katsayısı	1	,036
P	.	,624
N	193	193
Akademik Başarı Pearson Korelasyon Katsayısı	,036	1
P	,624	.
N	193	193

** Korelasyon Katsayısı 0,01 seviyesinde anlamlıdır.

Tablo 36’dan da görüldüğü gibi öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile akademik başarıları arasında anlamlı bir ilişkiye rastlanmamıştır [r=0.036, p>.01]. Bu bulguya dayanarak öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile akademik başarıları ilişkisizdir denebilir.

4.6. 6. Alt Probleme İlişkin Bulgular ve Yorumlar

“İzmir evreninde, öğrencilerin uzamsal yönelim ve uzamsal görselleştirme puanları arasında anlamlı bir ilişki var mıdır?” sorusuna yanıt aranmıştır. Söz konusu ilişkiyi incelemek için Pearson korelasyon katsayısı kullanılmıştır. Aşağıdaki tabloda bulgulara yer verilmiştir.

Tablo 37

Öğrencilerin Uzamsal Yönelim Puanları ile Uzamsal Görselleştirme Puanlarına İlişkin Korelasyon Tablosu

		Uzamsal Yönelim	Uzamsal Görselleştirme
Uzamsal Yönelim	Pearson Korelasyon Katsayısı	1	,423
	P	.	,000*
	N	193	193
Uzamsal Görselleştirme	Pearson Korelasyon Katsayısı	,423	1
	P	,000*	.
	N	193	193

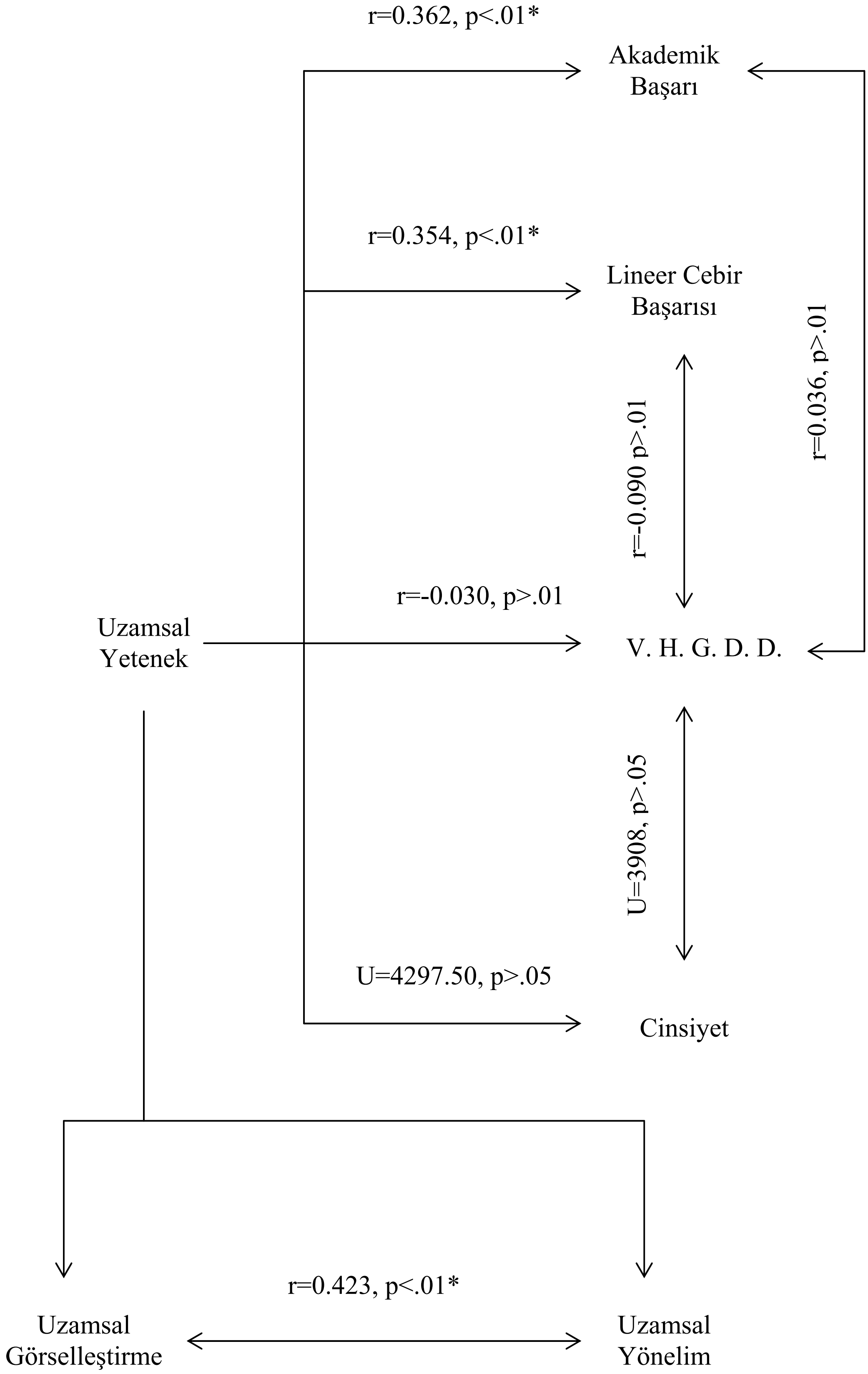
** Korelasyon Katsayısı 0,01 seviyesinde anlamlıdır.

Tablo 37'ye göre öğrencilerin uzamsal yönelim puanları ile uzamsal görselleştirme puanları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu görülmektedir [$r=0.423$, $p<.01$]. Buna göre uzamsal görselleştirme seviyesi yüksek olan bir öğrencinin uzamsal yönelim seviyesinin de yüksek olduğu söylenebilir. Ayrıca, determinasyon katsayısı ($r^2=0.17$) dikkate alındığında uzamsal yönelim toplam puanının (değişkenliğinin) %17'sinin uzamsal görselleştirmeden kaynaklandığı da söylenebilir.

Özet olarak, aşağıdaki şekilde araştırmanın betimsel kısmının verileri bir arada sunulmuştur.

Şekil 7

Betimsel Araştırmanın Sonuçları



BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışma, deneysel ve betimsel olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerine, geometrik düşünme düzeylerine ve başarılarına etkisi araştırılmıştır. İkinci bölümde ise ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri ile geometrik düşünme düzeyleri, cinsiyetleri, lineer cebir başarıları ve akademik başarıları arasındaki ilişki incelenmiştir. Elde edilen bulgular ışığında yorumlar sunulmuştur. Bu bulgular doğrultusunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

5.1. Sonuçlar ve Tartışma

- Uygulama sonrası, teknoloji destekli lineer cebir öğretimi yapılan deney grubu öğrencilerinin uzamsal yetenek son test puan ortalamaları anlamlı derecede kontrol grubu öğrencilerinin ortalamalarından yüksek çıkmıştır. Bu bulgu teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin uzamsal yeteneklerini geleneksel öğretime göre daha fazla geliştirdiği sonucunu ortaya koymaktadır. Bunun yanında, deney grubu öğrencilerinin ön test ve son test puanları arasında anlamlı bir artış varken, kontrol grubu öğrencilerinin ortalamaları az da olsa artsa da ön test ve son test ortalamaları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Alanyazın incelendiğinde teknoloji destekli öğretimin ve izometrik çizimler gibi etkinliklerle öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin geliştirilebildiği bilinmektedir. Bu araştırmanın bulguları da Kruetskii (1976)'nin yaklaşımını doğrulamış ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerinin geliştirilebileceğini göstermiştir. Sonuç olarak araştırma, Ben-Chaim et. al. (1988), Tillotson (1995), Werthessen (1999), Symser (1994), Idris (1998), July (2001), Shavalier (1999), MacMohan (1997), Nimmons (1997) ve Yolcu (2008)'nun bulgularını desteklemiştir.

- Araştırmada, teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine etkisinin olmadığı gözlemlenmiştir. Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin gelişimi açısından bakıldığında, bu sonuç alanyazındaki birkaç çalışmaya (Durmuş, Olkun ve Toluk, 2002; Halat, 2008a) paralellik göstermesine rağmen birçoğunun sonuçlarıyla çelişmiştir. Çünkü teknoloji destekli öğretimin öğrenme sürecine görsel olarak destek olduğu ve öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerini geliştirdiği alanyazındaki son bulgular arasındadır (Symser, 1994; July, 2001; Erdoğan ve Durmuş, 2009). Elde edilen sonucun alanyazındaki bulgularla çelişmesinin Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ölçeğinde yer alan soruların yapısından kaynaklandığı düşünülmektedir. Ölçekteki maddelerin sentetik geometri ile ilgili olması ve teknoloji destekli lineer cebir öğretim sürecinde sorularla ilgili hiçbir bağlantı olmaması bu tutarsızlığa bir sebep gösterilebilir. Bu noktada dikkat edilmesi gereken önemli başka bir bulgu daha vardır. Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin ayrı ayrı Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin değişmediği görülmüştür. İlköğretim matematik öğretmenlerinin geometrik düşünme düzeyleri nasıl gelişmektedir? İlköğretim ikinci kademeye matematik öğretecek olan öğrencilerin bu gelişimlerinin önemli olduğu düşünülmektedir. Araştırmanın sınırlılığı çerçevesinde öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerinin niye gelişmediği tam olarak belirlenememiştir.

- Araştırmada teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin lineer cebir başarılarını geleneksel öğretime göre daha olumlu etkilediği görülmüştür. Bu sonuç birçok araştırmacının lineer cebir dersinde teknoloji desteğini kullanma argümanını doğrulamıştır. Araştırmanın bu sonuçları Aydın (2008) ve Pecuch-Herrero (2000)'nun bulgularına paralellik göstermektedir.

- Araştırmanın betimsel sonuçlarına bakıldığında ilk göze çarpan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yetenek testi ortalama puanlarıdır. Kız öğrencilerin ortalaması 214.64, erkek öğrencilerin ortalaması 212.32 olarak bulunmuştur. Uzamsal yetenek ölçeğinde toplam 282 madde olduğu göz önünde tutulursa öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin beklenenden düşük olduğu görülmektedir. Bu durumun ölçeğin ikinci sınıf öğrencilerinin gördükleri uzamsal yeteneklerini geliştirecek dersleri; geometri, lineer cebir I ve analitik geometri I ile sınırlı olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Fakat bu derslerin hangilerinin uzamsal yeteneği ne derecede geliştirdiği üzerinde düşünülmesi gereken bir konudur. Bu araştırmanın sonucu şu problemleri de ortaya çıkarmıştır. Örneğin, aldıkları geometri dersi öğrencilerin uzamsal yeteneklerini nasıl geliştirmektedir? Öğretim programı geliştirecek etkinlikler içermekte midir? Diferansiyel geometri dersi öğrencilerin uzamsal yeteneklerini geliştirmekte midir? İlköğretim matematik öğretim programına bu ders alınmalı mıdır?

- Araştırmada, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerinin cinsiyete göre anlamlı bir fark göstermediği görülmüştür. Bu sonuç alanyazında devam eden cinsiyet ve uzamsal yetenek tutarsızlığına dahil olmuştur. Buna rağmen bu sonuç, Battista (1990), Manger ve Eikeland (1998), Olkun ve Altun (2003), Shavalier (1999), Turğut (2007) ve Werthessen (1999)'in bulgularına paralellik göstermektedir. Turğut (2007) bu tutarsızlığı, araştırmacıların en başta uzamsal yeteneği farklı tanımlayıp daha sonra her birinin farklı ölçekler kullanmalarına bağlamıştır. Bu doğrultuda çelişen sonuçlar elde etmek çok doğal görünmektedir.

- İlköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri ile Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Bu sonuç alanyazındaki bulgularla çelişmiştir. Çünkü genel olarak Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile uzamsal yetenek arasında pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu bilinmektedir (Smyser, 1994; Idris, 1998). Fakat bu sonuç araştırmanın deneysel kısmındaki uzamsal yetenek gelişirken Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin niye gelişmediği belirsizliğine ışık tutmuştur. Ulaşılabilen alanyazında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerini ve Van Hiele geometrik düşünme düzeylerini birlikte inceleyen bir araştırmaya rastlanmamıştır. İlgili çalışmaların genellikle ilköğretim seviyesindeki öğrenciler üzerinde odaklandığı gözlemlenmiştir. Bu sebepten dolayı bu sonucu karşılaştıracak bir bulgunun olmaması bu noktada bir belirsizlik oluşturmuştur.

Yukarıdaki belirsizliğin Van Hiele geometri düşünme düzeyleri ölçeğindeki sorularla ilgili olabileceği düşünülmektedir. Çünkü ölçekteki maddeler temel geometri bilgisinin yanı sıra mantıkla ilgili sorular içermektedir. Uzamsal yetenek ölçeğindeki sorular şekillerin zihinde dönmesi, açılması ve katlanması gibi etkinlikleri içermektedir. Soruların ilintisiz oluşu ve öğrencilerin temel geometri bilgileriyle şekli döndürme ve şekli yada cismi zihinde döndürebilme becerisiyle geometri problemlerini çözmelerini beklemek rasyonel görünmemektedir.

Ayrıca ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine bakıldığında ortalamalarının 3.73 olduğu görülmektedir. Van Hiele (1976)'nin teorisine göre öğretmen adaylarının en üst seviyede olması beklenmektedir. Bunun yanında ölçekteki soruların elementer seviyede olması başka bir eleştiri konusudur. Yetişkinlere uygulama sürecinde sorunlar yaşanabilmektedir. Örneğin, bu araştırmada ölçekteki mantıkla ilgili soruların çoğunlukla boş oldukları gözlemlenmiştir. Sorularda anlaşılmayan bir noktadan bu sorunun kaynaklanıp kaynaklanmadığı üzerinde durulması gereken başka bir konudur.

- Araştırmada öğrencilerin uzamsal yetenekleri ile lineer cebir başarıları arasında orta düzeyde pozitif bir ilişki görülmüştür. Bu bulguların da oldukça anlamlı olduğu düşünülmektedir. Uzamsal teoriye göre, lineer cebir dersinin içerisindeki gösterimlerin birey tarafından alınması için zihnin, sembolik ve görsel dili entegre halde alması gerekmektedir. Bu açıdan bakıldığında ilişkili olması çok normaldir.

Lineer cebir başarısı matematiksel düşünmeyi gerektirdiğinden bu başarı bir matematik başarısı olarak algılanabilir. Bu bağlamda bu bulgu alanyazındakilerle paralellik göstermektedir. Diğer taraftan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri ile akademik başarıları arasında orta düzeyde ve pozitif bir ilişki bulunmuştur. Bu bulgular Battista (1990), Battista, Wheatley ve Talsma (1989), Kayhan (2005), Martin (1968) ve Turğut (2007)'un sonuçlarına paralellik göstermektedir. Bu sonuç aynı zamanda, araştırmanın deneysel kısmındaki teknoloji destekli lineer cebir öğretimi altında uzamsal yeteneğin gelişmesi ve lineer cebir başarısının birlikte artmasına bir gerekçe gösterilebilir.

- Araştırmada öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri ile cinsiyetleri arasında anlamlı bir ilişkiye rastlanmamıştır. Bu sonuç alanyazındaki tutarsız sonuçlara dahil olmuştur. Örneğin, Duatepe (2000) ve Halat (2008c) araştırmalarında erkeklerin lehine anlamlı bir farka rastlarlarken, Halat (2008b), Halat ve Şahin (2008) anlamlı farka rastlamamışlardır. Araştırmadaki bu sonucun, 111 kız ve 82 erkek öğretmen adayı üzerinde gerçekleştirilmiş olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

- Araştırmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile lineer cebir başarıları arasında anlamlı bir ilişkiye rastlanmamıştır. Bu sonucun da yukarıda değinilen Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ölçeğinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Çünkü ölçekteki temel geometri bilgisine yönelik sorularla lineer cebire ait problemlerin ilişkili olmadıkları kolaylıkla görülebilmektedir. Bunun yanında bu bulgu deneysel bölümdeki uzamsal yetenek ve lineer cebirin gelişirken Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin gelişmemesine belirsizliğine ışık tutmuştur.

Buna paralel olara da elde edilen diğer bir sonuç, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile akademik başarıları arasında da anlamlı bir ilişki bulunmamasıdır.

- Araştırmada, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal görselleştirme yetenekleri ile uzamsal yönelim yetenekleri arasında orta düzeyde pozitif bir ilişkiye rastlanmıştır. Bu bulgular Kayhan (2005) ve Turğut (2007)'un bulgularına paralellik göstermiştir. Bu beceriler arasında güçlü bir ilişkinin görülmemesi bu iki becerinin birbirinden bağımsız olduklarını göstermiştir. Bu sonuç ışığında bu iki becerinin ayrı yetenekler olduğu söylenebilir. Bu sonuç ise, Ekstrom et. al. (1976), McGee (1976), McGee (1979)'nin teorilerini doğruladığını göstermiştir.

- Geometrinin uygun olarak kullanılmasının önemliliği bu araştırmada da belirgin olarak ortaya çıkmıştır. Öğrencilere lineer cebiri somuttan soyuta doğru öğretilmesinin, yani Harel (2000)'in belirlediği öğretim ilkelerinin takip edilmesinin öğrencilerinin başarısını arttırdığı görülmüştür. Ayrıca, öğrencilerin lineer cebir düşünme biçimlerini göz önüne alarak yapılan eğitimin öğrencilerin lineer cebir başarısını arttırdığı gözlemlenmiştir. Alanyazında henüz araştırılmakta olan "lineer cebir geometri ile mi öğretilmeli?" sorusuna bu çalışmada kısmen cevap bulunmuştur. Bu çalışmada lineer cebir geometri ile öğretilmiş, olumlu sonuçlar elde edilmiş ve lineer cebirin geometriden ayrılamayacağı görülmüştür. Örneğin, üç bilinmeyenli üç tane lineer denklemi çözerken Gauss'un eliminasyon metodu oldukça etkilidir. Bu, çözüme geometri olmaksızın yaklaşmaktır. Fakat aynı problem, her bir lineer denklemin bir düzleme karşılık geldiği ve üç lineer denklemin çözüm kümesini aramanın aslında üç düzlemin kesim noktasını aramak olduğu şeklinde revize edildiğinde farklı bir bakış açısı kazanmaktadır.

- Lineer cebir öğreten çoğu öğretim elemanı kendi birikiminin yanı sıra bir kaynak kitap takip etmektedir. Doğrudan bu kaynak kitapları takip edip öğretim sürecini düzenlemek G. Harel'in vurguladığı ilkelerin göz ardı edilmesine sebep olmaktadır. Örneğin mühendislik fakültelerinde okutulan lineer cebir kitaplarında soyut kavramlara neredeyse hiç yer verilmemektedir. Bu doğru bir tutum mudur? Bu konunun araştırılması gereken açık bir problem olduğu düşünülmektedir.

5.2. Öneriler

- Araştırmada bölüm 2.8. de oluşturulan lineer cebir öğretimi için belirlenen ilkeler, lineer cebir düşünme biçimleri ve Van Hiele öğretim modeli bütünlemesi kullanılmış ve öğrencilerin uzamsal düşünme becerileri ve lineer cebir başarıları geliştirilmiştir. Bu sonucun önemliliği ışığında, lineer cebir dersi veren öğretim elemanları bu bütünlemeyi derslerinde kullanabilir.

- Dorier et. al. (2000a), lineer cebir dersi için bir öğretim içeriği tasarlamış, farklı ülkelerde uygulamış ve oldukça olumlu bulgular edinmişlerdir. Bu araştırmada, araştırmacıların tasarımı Türkçeye çevrilmiştir (bkz. S.24-25). Bu araştırmada kullanılmamasına rağmen, aynı tasarım ülkemizde de uygunabilir, devam eden lineer cebir öğretimi zorluklarına çözüm olabilir.

- Bu çalışma, ülkemizde lineer cebir öğretimi alanında yapılan ilk deneysel çalışmalardan birisi olmuştur. Araştırmacıların lineer cebir dersi için uygun gördükleri teknoloji desteğinin önemliliği ortaya çıkmıştır. Lineer cebir dersi veren öğretim elemanlarının seminerler aracılığıyla konu hakkında bilgilendirilmeleri sağlanabilir.

- Ulaşılabilen alanyazında, uzamsal düşünme, geometrik düşünme düzeyleri ve lineer cebir öğretimi bütünlemesini kuran benzer bir çalışmaya rastlanmamıştır. Araştırma deneysel ve betimsel olarak yürütülmesine rağmen bundan sonra yürütülecek çalışmalar örnek olay çatısı altında yapılmalıdır. Çünkü çalışma grubu sayısının çok fazla oluşu öğrencilerin yakından incelenmesine engel olmuştur. Daha az örneklemle –aynı problem ele alınarak- nitel çalışmalar yürütülebilir.

- Araştırmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin oldukça düşük seviyede olduğu gözlemlenmiştir. Van Hiele'nin teorisine göre bu düzeylerin en üst seviyede olması beklenmektedir. Bu sonucun ilköğretim mateamtik öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerinin ilköğretim ve lise döneminde de düşük olmasından, yeterince gelişmemesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu sorun ile ilgili inceleme ve araştırmalara ilköğretim ve lise dönemlerinde gerekli önem verilmeli ve bu bulgulardan öğretmenlar haberdar edilmelidir. Çünkü uygun materyal ve etkinliklerle bu becerinin ilköğretim seyivesinde geliştirilebildiği bilinmektedir.

- Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ölçeğinin yetişkinlere uygulanması esnasında sorunlar yaşanabilmektedir. Ölçekteki maddelerin elementer seviyede olması ve içeriğindeki bazı soruların işaretlenme yüzdelerin oldukça az olması üzerinde düşünülmesi gereken bir konudur. Uzamsal düşünmenin geometrik düşünmeyle ilişkisini belirleyebilmek için bu ölçeğe üç boyutlu cisimlerle ilgili muhakeme soruları eklenebilir. Yada alternatif olarak içerisinde matematiksel muhakemenin olduğu uzamsal problemlerle donatılmış bir ölçek geliştirilebilir.

- Bu çalışmanın sınırlılıklarından birisi de öğrencileri yakından gözlemleyememektir. Bu bağlamda birçok nokta belirsiz kalmıştır. Çalışmada öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin geliştiği görülmüştür ama bu yetenek gelişirken öğrencilerin sentetik-geometrik, analitik-aritmetik ve analitik-yapısal düşünme biçimlerinin nasıl ve ne derece değiştiği incelenememiştir. Bu problemler araştırmanın devamı olarak ele alınabilir.

- Araştırmanın bir problemi olmamasına rağmen, bu araştırmada da formalizm sorunuyla yüzleşildiği söylenebilir. Öğrenciler genelleme yapmakta ve soyut vektör uzaylarını kullanmakta fazlasıyla sıkıntı çekmektedir. Ülkemizde bu konu ile ilgli inceleme görülmemektedir. Araştırmacıların bu konu üzerinde durmalarının önemli olacağı düşünülmektedir.

- Eğitim fakülteleri ve fen-edebiyat fakültelerinde okutulan lineer cebir dersi içeriklerinin farklı olduğu bilinmektedir. Paralel bir çalışma fen-edebiyat fakültesi öğrencileri üzerinde gerçekleştirilebilir.

- İlköğretim matematik öğretmenliği öğretim programında lineer cebir dersi ikinci sınıfta yer almaktadır. Öğrenciler lisede cebirsel yapıların temellerini görmekte ve bunun yanında birinci sınıfta soyut matematik dersi almaktadır. Buna rağmen öğrencilerin mantık, küme teorisi gibi temel kavramları lineer cebir dersinde kullanmakta fazlasıyla sıkıntı yaşamaktadır. Lise döneminde bu kavramların öğretilmesi ve anlaşılmasında yaşanan zorluklar incelenebilir.

- Paralel çalışmalar diğer alan derslerinde ele alınabilir. Örneğin, analitik geometri tamamen iki ve üç boyutlu uzayın formlarını içermektedir. Bu dersin teknoloji destekli öğretimi öğrencilerin uzamsal yeteneklerini geliştirecek midir? Bu araştırma sorusuna yanıt aranabilir.

- Ülkemizde genel olarak öğrencilerin lineer cebir düşünme biçimlerinin incelenmesi üzerine bir araştırma görülmemektedir. Bu konuda bir araştırma yürütülerek ve yurtdışındaki bulgularla kıyaslamalar yapılabilir.

- Matematik eğitimi araştırmalarında önemli olan sonuç değil öğrencinin nasıl düşündüğünün ortaya çıkmasıdır. Bu doğrultuda konu ile ilgili yapılacak çalışmalarda öğrencilerin yakından incelenilmesinin gerektiği düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Akkoyunlu, A. (2003). Ortaöğretim 10. Sınıf Öğrencilerinin Seçtikleri Alanlara Göre, Öğrenme ve Ders Çalışma Stratejileri, Matematik Dersine Yönelik Tutumları ve Akademik Başarıları Üzerine Bir Araştırma. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi D.E.Ü., Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Alkan, C. (1987). **Eğitim Teknolojisi** (3.Baskı). Yargıçoğlu Matbaası, Ankara.

Altun, M. (2004). **Matematik Öğretimi**. Bursa: Alfa Yayıncılık.

Anton, H. (1981). **Elementary Linear Algebra**. John Wiley & Sons: Toronto.

Aydın, S. (2007). Bazı Özel Öğretim Yöntemlerinin Lineer Cebir Öğrenimine Etkisi. **Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi**, 6, 214-223.

Aydın, S. (2008). Lineer Cebir Öğretimi: Öğretim Stratejileri ve Bilgisayar Projelerinin Öğrenci Başarısına Etkisi. VIII. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Özetler Kitabı, 237.

Aydın, S. (2009a). Lineer Cebir Eğitimi Üzerine. **İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**, 10, 93-105.

Aydın, S. (2009b). The Factors Effecting Linear Algebra. **Procedia Social and Behavioral Sciences**, 1, 1549–1553.

Baki, A.ve Bell, A. (1997). Milli Eğitimi Geliştirme Projesi. **Orta Öğretim Matematik Öğretimi**. Ankara :Yök Dünya Bankası

Başaran, I.(2004). Etkili Öğrenme ve Çoklu Zeka Kuramı: Bir İnceleme. **Ege Eğitim Dergisi** 1 (5), 5-12.

Battista, M.T. (1990). Spatial Visualization and Gender Differences in High School Geometry. **Journal for Research in Mathematics Education**, 21 (3), 47-60.

Battista, M.T., Clements, D.H. (1996). Students'Understanding of Three-dimensional Rectangular arrays of Cubes. **Journal for Research in Mathematics Education,** 27 (3), 258-292.

Battista, M.T., Wheatley, G.H., Talsma, G. (1989). The Importance of Spatial Visuaization and Cognitive Development for Geometry Learning in Preservice Elemantary Teachers. **Journal for Research in Mathematics Education,** 13 (5), 332-340.

Baykul, Y. (2006). **İlköğretimde Matematik Öğretimi**. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Bedir, D. (2005). Bilgisayar Destekli Matematik Öğretiminin İlköğretimde Geometri Öğretiminde Yeri ve Öğrenci Başarısı Üzerindeki Etkisi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Birgin, O, Kutluca, T ve Gürbüz, r. (2008). **Yedinci Sınıf Matematik Dersinde Bilgisayar Destekli Öğretimin Öğrenci Başarısına Etkisi.** 8th International Educational Technology Conference Book, 879-882. Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Bishop, A. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education- A Review. **Educational Studies in Mathematics,** 11, 257-269.

Bogomonly, M. (2006). The Role of Example-Generation Tasks in Students' Understanding of Linear Algebra. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Simon Fraser University.

Burnett, S., Lane, D. (1980). Effects of Academic Instruction on Spatial Visualization. **Intelligence,** Sayı 4, 233-342.

Büyüköztürk, Ş. (2001). **Deneysel Desenler Ön Test-Son Test Kontrol Gruplu Desen ve Veri Analizi**. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Büyüköztürk, Ş. (2005). **Sosyal Bilimler İçin Veri analizi El Kitabı.** Ankara:Pegem Yayıncılık.

Cantürk Günhan, B. (2006). İlköğretim II. Kademede Matematik Dersinde Probleme Dayalı Öğrenmenin Uygulanabilirliği Üzerine Bir Araştırma. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Cantürk-Günhan, B., Turgut, M. ve Yılmaz, S. (2009). Spatial Ability of a Mathematics Teacher: The Case of Oya. IBSU Scientific Journal, 1 (3), 151-158.

Caplan, P.J., MacPherson, G.M., Tobin, P. (1985). Do Sex-Related Differences in Spatial Abilities Exist? A Multilevel Critique with New Data. **American Psychologist,** 40, 786-799.

Carroll, J.B. (1993). **Human Cognitive Abilities. A Sruvey of Factor-Analytic Studies**. New York: Cambridge University Press.

Clements, D.H., Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. Grouws (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,** 420-464. New York: Macmillan Publishing Company.

Cockburn, K.S. (1995). Effects of Specific Toy Playing Experiences on The Spatial Visualization Skills of Girls Ages 4&6. Yayımlanmamış Doktora Tezi.Washington State University College of Education.

Connor, J.M., Serbin, L.A. (1980). Mathematics, Visual-Spatial Ability, and Sex Roles. (Final Report). Washington, DC:National Institue of Education (DHEW).

Contero, M., Naya, F., Compnay, P., Saorin, J.K., Conesa, J.(2005). Improving Visualization Skills in Engineering Education. **Computer Graphics in Education,** Sep/Oct 2005: 24-31.

Delialioğlu, Ö. (1996). Contribution of students' Logical Thinking Ability, Mathematical Skills and Spatial Ability on Achievement in Secondary School Physics. Yayımlanmamış Yüksek Lisans tezi. ODTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Dikovic, L. (2007). Interactive Learning and Teaching of Linear Algebra by Web Technologies: Some Examples. **The Teaching of Mathematics**, 10, 109-116.

Dogan-Dunlap, H. (2009). Linear Algebra Students' Modes of Reasoning: Geometric Representations. **Linear Algebra and Its Applications**, Basımda.

Dorier, J.L. (1995). Meta Level in the Teaching of Unifying and Generalizing Concepts in Mathematics, **Educational Studies in Mathematics**, 29.2 (1995), 175–197.

Dorier, J.L. (1998). The Role of Formalism in the Teaching of the Theory of Vector Spaces. **Linear Algebra and its Applications** (275), 14, 141–160.

Dorier, J.L. (2000). **On the Teaching of Linear Algebra**, Kluwer Academic

Publishers, Dordrecht.

Dorier, J.L., Robert, J.R., Rogalski, M. (2000a) On a Research Program about the Teaching and Learning of Linear Algebra in First Year of French Science University, **International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology,** 31 (1), 27–35.

Dorier, J.L., Robert, J.R., Rogalski, M. (2000b). **The Obstacle of Formalism in Linear Algebra**, in J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, 85–94.

Dorier, J.L. (2002). Teaching Linear Algebra at University**. Proceedings of ICM**, 3, 875-884.

Duatepe, A. (2000). An Investigation on the Relationship Between Van Hiele geometric level of thinking and Demographic Variables for Pre-Service Elementary School Teachers. Ortadoğu Teknik Üniversitesi Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi.

Dubinsky, E. (1986). Teaching Mathematical Induction I. **The Journal of Mathematical Behavior**, 5, 305-317.

Duval, R. (1995). **Semiosis et Pensee Humaine**. Registres S´emiotiques et Apprentissages Intellectuels, Peter Lang, Bern.

Durmuş, S., Toluk, Z., & Olkun, S. (2002). Sınıf öğretmenliği ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin geometrik düşünme düzeyleri. Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nce düzenlenen 5. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik eğitimi Kongresi'nde sunulmuş bildiri, 16-18 Eylül: ODTÜ, Ankara.

Ekstrom, R.B., French, J.W., Harman, H.H. (1976). **Manual for Kit of Factor Referenced Cognitive Tests**. Princeton, NJ:Educational Testing Service.

Erbaş, K. (2005). Çoklu Gösterimlerle Problem Çözme ve Teknolojinin Rolü. **The Turkish Online Journal of Educational Technology**, 4 (4), 12.

Erçerman, B. (2008). Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Bağlamında Lise Öğrencilerinin Lineer Cebir Bilgilerinin Değerlendirilmesi. Yayımlanmmış Yüksek Lisans Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Erdoğan, T. ve Durmuş, S. (2009). The Effect of the Instruction Based on Van Hiele Model on the Geometrical Thinking Levels of Preservice Elementary School Teachers. **Procedia Social and Behavioral Sciences**. 1, 154-159.

Ersoy, Y. ve Baki, A. (2004). Teknoloji Destekli Matematik Eğitimi İçin Okullarda Aşılması Gereken Engeller. Matematik Etkinlikleri 2004, Matematik Sempozyumu, Ankara.

Ethington, C.A., Wolfle, L.M. (1984). Sex Differences in a Causal Model of Mathematics Achievement. **Journal for Research in Mathematics Education,** 15 (5), 361-377.

Fennema, E., Sherman, J.A. (1978). Sex-Related Differences in Mathematics Achievement and Related Factors: A Further Study**. Journal for Research in Mathematics Education**, 7 (3), 189-203.

Fennema, E., Tartre, L.A. (1985). The use Of spatial Visualization in Mathematics ByGirls and Boys. **Journal for Research in Mathematics Education,** 16 (3), 184-206.

Ferini-Mundy, J. (1987). Spatial Training for Calculus Students: Sex differences in Achievement and in Viusalization Ability. **Journal for Research in Matehmatics Education,** 18 (2), 126-140.

Fischbein, E. (1975). **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Geiringer, E.R., Hyde, J.S. (1976). Sex Differences on Piaget's Water-Level Task:Spatial Ability Incognito. **Perceptual and Motor Skills,** 42, 1323-1328.

Gueudet-Chartier, G. (2000). Geometrical and Figural Models in Linear Algebra. www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap74.pdf 14/12/2009.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should We Teach Linear Algebra through Geometry? **Linear Algebra and Its Applications**, 379, 491-501.

Hadded, M. (1999). Difficulties in the Learning and Teaching of Linear Algebra- A Personal Experience. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Concordia Universitesi.

Halat, E. (2008a). In Service Middle and High School Mathematics Teachers: Geometric Reasoning Stgaes and Gender. **The Mathematics Educator**, 18 (1), 8-14.

Halat, E. (2008b). Webquest Temelli Matematik Öğretiminin Sınıf Öğretmeni Adaylarının Geometrik Düşünme Düzeylerine Etkisi. Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 25, 115-130.

Halat, E. (2008c). Pre-Service Elementary School and Secondary Mathematics Teachers' Van Hiele Levels and Gnder Differences. **IUMPST: The Journal**, Vol 1, May 2008.

Halat, E. Ve Şahin, O. (2008). Van Hiele Levels of Pre-Service and In-Service Turkihs Elementary School Teachers and Gender Related Differences in Geometry, **The Mathematics Educator**, 11 (1/2), 143-158.

Harbe, S., Abboud, M. (2006). Students' Conceptual Understanding of a Function and Its Derivative in an Experimental Calculus Course. **Journal of Mathematical Behavior**, 25, 57-72.

Harel, G. (2000). **Principles of Learning and Teaching of Linear Algebra: Old and New Observations** in J.-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (ss. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J. (2000). **Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra**. in J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 191–207.

Gardner, H.(1983). **Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligence.** New York: Basic Books.

Idris, N. (1998). Spatial Visualization, Field Dependence/Indepence, Van Hiele Level, And Achievent in Geometry: The Influence of Slected Activities For Middle School Students. Yayımlanmamış Doktora Tezi Graduate School of The Ohio State University.

İlbi, Ö. (2006). Ausebel'in Sunuş Yolu Yöntemi ile Bilgisayar Destekli Öğretim Yöntemlerinin Kimya Ünitelerindeki Kavram Yanılgılarının Önlenebilmesi Açısından Karşılaştırılması. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Işıksal, M. ve Aşkar, P. (2005). The Effect of Spreadsheet and Dynamic Geometry Software on the Achievement and Self-efficacy of 7th grade Students. **Educational Research**, 47 (3), 333-350.

Jones, K. (2001). Spatial Thinking and Visualization. **Teaching and Learning**. 11 (19), 55-56.

July, R.A. (2001). Thinking in Three Dimensions: Exploring Students' Geometric Thinking and Spatial Ability with The Geometer's Sketchpad. College of Education, Yayımlanmamış Doktora Tezi Florida International University.

Kahramaner, Y., Kahramaner, R.(2002). Üniversite Eğitiminde Matematik Düşüncenin Önemi. **İstanbul Ticaret Üniversitesi Dergisi,** 2,15-25.

Kahle, J. (1990). Why Girls Don't Know. In M. Rowe (Ed.). **What Research Says to the Science Teacher-The Process of Knowing**, 55-67. Washington, DC.:National Science Teachers Association.

Karasar, N. (2000). **Bilimsel Araştırma Yöntemi.** Ankara Nobel Yayın Dağıtım.

Kayhan, E. B. (2005). Investigation of High School Students' Spatial Ability. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi ODTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kim, C.S. (2002). Predicting Information Searching Performance With Measures of Cognitive Diversity. Yayımlanmamış Doktora Tezi University of Wisconsin-Madison.

Kolman, B., Hill, D.R. (2002). **Uygulamalı Lineer Cebir**. Çeviri Ed: Ömer Akın. Palme Yayıncılık, Ankara.

Konyalıoğlu, A.C. (2003). Üniversite Düzeyinde Vektör Uzayları ile İlgili Kavramların Anlaşılmasında Görselleştirme Yaklaşımının Etkinliğinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Konyalıoğlu, S., Konyalıoğlu, A.C., Sabri, I, Işık, A. (2005). The Role of Visualization Approach on Student's Conceptual Learning, **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, September.

Konyalıoğlu, A.C., Konyalıoğlu, S, Işık, A. (2008). Effectiveness of Visualization Approach on Student's Conceptual Learning. **Journal of Qafqaz University, 24, 245-249.**

Konyalıoğlu, A.C. (2009). An Evaluation from Students' Perspective on Visualization Approach Used in Linear Algebra Instructions. **World Applied Science Journal,** 6 (8), 1046-1052.

Krutetskii, V.A. (1976). **The Psychology of Mathematical Abilities in School Children.** Chicago: University of Chicago Press.

Kurt, M. (2002). Görsel-Uzaysal Yeteneklerin Bileşenleri. **38. Ulusal Psikiyatri Kongresi, Bildiriler Kitapçığı**, 20-125.

Lee, J.W. (2005). Effects of GIS Learning on Spatial Ability. Yayımlanmamış Doktora Tezi Office of Graduate Studies of Texas A&M University.

Linn, M.C., Petersen, A.C. (1985). Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A-Meta Analysis. **Child Development**, 56, 1479-1498.

Lipschutz, S. (1995). **Lineer Cebir**, Çev.Ed. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Lohman, D.F. (1988). Spatial Abilities as Traits, Processes and Knowledge. In R.J. Sternberg (Ed.), **Advances in the Psychology of Human Intelligence** (Vol. 4). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lohman, D.F. (1993). **Spatial Ability and G**. Paper presented at the First Spearman Seminar, University of Plymouth, July 21, 1993.

Manger, T., Eikeland, O.J. (1998). The Effects of Spatial Visualization and Students' sex on Mathematical Achievement. **British Journal of Psychology,** 89,17-25.

MacMohan, C.A. (1997). Can Computers improve Secondary School students' performance in spatial Ability aptitude tests. Yayımlanmamış Makale.

Martin, B.L. (1968). Spatial Visualization Abilities of Prospective Mathematics Teachers**. Journal of Research in Science Teaching**, 5:11-19.

McGee, M.G. (1976). Laterality, Hand Preference, and Human Spatial Ability. **Perceptual and Motor Skills**, 42:781-782.

McGee, M.G. (1979). Human Spatial Abilities : Sources of Sex Differences. New York: Praeger.

Middaught, D.J. (1980). Spatial Ability and Its Relationship to the Mathematical Performance of Adolescents. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Kent State University.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and Standarts for School Mathematics. Reston,** Va.: National Council of Tecahers of Mathematics.

Nimmons, L.A. (1997). Spatial Ability and Dispositions Toward Mathematics in College Algebra: Gender-Related Differences. Yayımlanmamış Doktora Tezi College of Education, Georgia State University.

Odabaşı, F. (1998). **Bilgisayar Destekli Öğretim**. Anadolu Üniversitesi

Açıköğretim Yayınları, Eskişehir.

Odell, R.L. (1993). Relationship Among Three Dimensional Laboratory Models, Spatial Visualization Ability, Gender and Earth Science Achievement. Yayımlanmamış Doktora Tezi School of Education, Indiana University.

Oktaç, A. (2008). Ortaöğretim Düzeyinde Lineer Cebir ile İlgili Kavram Yanılgıları. In M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Akkoç (Eds.), Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri, Pegem Akademi, Ankara, 2008.

Olkun, S., Altun, A. (2003). İlköğretim Öğrencilerinin Bilgisayar Deneyimleri ile Uzamsal Düşünme ve Geometri Başarıları Arasındaki ilişki. **TOJET,** 2 (4) Article 13.

Olkun, S., Toluk Uçar, Z. (2007). İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi. Maya Akademi, Ankara.

Orde, B.J.(1996). A Correlational Anaylsis of Drawing Ability and Spatial Ability. Yayımlanmamış Doktora Tezi The Graduate School of The University of Wyoming.

Öner, A. T., Özen, D., Yemen, S., & Keşan, C. (2008). The Effect Of Technology Assisted Algebra Instruction To Success on Force and Motion Unit In Science And Technology. Ioste Symposium (21-26 Eylül 2008). İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi.

Öner, A.T. (2009). İlköğretim 7. Sınıf Cebir Öğretiminde Teknoloji Destekli Öğretimin Öğrencilerin Erişi Düzeyine, Tutumlarına ve Kalıcılığa Etkisi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Özçelik, D.A. (1997). **Test Hazırlama Kılavuzu.** Genişletilmiş Üçüncü Baskı, ÖSYM Eğitim Yayınları 8, Ankara.

Özden, N. (2000). Eğitim de değişiyor mu?, **Bilişim Kültürü Dergisi**, 75-80.

Özen, D., Yemen, S., Öner, A. T. & Keşan, C. (2008). The Effect Of Technology Assisted Transformation Geometry Instruction On Light And Voice Unit In Science And Technology. Ioste Symposium (21-26 Eylül 2008). İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi.

Özen, D. (2009). Ilköğretim 7.Sınıf Geometri Öğretiminde Dinamik Geometri Yazılımlarının Öğrencilerin Erişi Düzeylerine Etkisi ve Öğrenci Görüşlerinin Değerlendirilmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Paivio, A.(1986). **Mental Representations: A Dual Coding Approach**. New York: Oxford University Press.

Pandiscio, E.A. (1994). Spatial Visualization and Mathematics Achievement : A Correlational Study Between Mental Rotation of Objects and Geometric Problems. Yayımlanmamış Doktora Tezi The Graduate School of The University Texas at Austin.

Pecuch-Herrero, M. (2000). Strategies and Computer Projects for Teaching Linear Algebra. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 31, 181-186.

Pellegrino, J.W., Alderton, D.L., Shute, V.J. (1984). Understanding Spatial Ability. **Educational Pyschologist**,19, 239-253.

Phunlapthawee, K. (2000). An Analysis of Constructures for Spatial And Error Pattern Scores Associated With The Spatial Ability and Related Gender

Differences of Twelfth Grade Students in Thailand. Yayımlanmamış Doktora Tezi.Graduate School of The Ohio State University.

Robert, A, Robinet, J., Tenaud, I. (1987). **De la G´eom´etrie `a l'Alg`ebre Lin´eaire** - Brochure 72, IREM de Paris VII.

Rosnik, P., Clement, J. (1980). Learning Without Understanding: The Effect of tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. **Journal of Mathematical Behavior**, 3, 3-27.

Shavalier, M.E. (1999). A study of the effects of Structured Activities Using CAD-Like Software on the Spatial Ability of Fourth, Fifth and Sixth Grade Students. Yayımlanmamış Doktora Tezi Graduate School of The University of Wyoming.

Sierpinska, A. (1987). Humanities Students and Epistomological Obstacles Related to Limits. **Educational Studies in Mathematics**, 18, 371-387.

Sierpinska, A. (2000). **On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra.** In J.L.Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra, 209-246. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Senemoğlu, N. (2001). **Gelişim ve Öğrenme**. Gazi Kitapevi, Ankara.

Smith, G.G. (1998). Computers, Computer Games, active Control and Spatial Visualization strategy. Yayımlanmamış Doktora Tezi Arizona state University.

Smyser, E.M. (1994). The Effects of The Geometric Supposers: Spatial Ability, Van Hiele Levels and Achievement. Yayımlanmamış Doktora Tezi The Ohio State University.

Tall, D.O. (1986). Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Computer Graphics, Doktora Tezi, Mathematics Research Centre, University of Warwick.

Tartre, L.A.(1990). Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem Solving. **Journal for Research in Matehmatics Education**, 21 (3), 216-229.

Tillotson, M.L. (1985). The Effect of Intruction in Spatial Visualization on Spatial Abilities and Mathematical Problem Solving. Yayımlanmamış Doktora Tezi. The University of Florida.

Turğut, M. (2007). İlköğretim II. Kademede Öğrencilerin Uzamsal Yeteneklerinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Turgut, M., Cantürk-Güngan, B. ve Yılmaz, S. (2009). Uzamsal Yetenek Hakkında Bir Bilgi Seviyesi İncelenmesi. **E-Journal of World Sciences Academy**, 4 (2), 317-326.

Uhlig, F. (2003). A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching linear algebra. Linear Algebra and Its applications, 361, 147-159.

Usiskin, Z. (1982). **Van Hiele Levels and Achivement in Secondary School**. (Final Report of the Cognitive Development and Achivement in Secondary School Geometry Project.) Chicago: University of Chicago.

Van Hiele, PM. (1986). **Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education**. Academic Press, Inc.: Orlando, Florida.

Yalın, H.İ. (2003). **Öğretim Teknolojileri ve Materyal Geliştirme**. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Yemen, S. (2009). İlköğretim 8. Sınıf Analitik Geometri Öğretiminde Teknoloji Destekli Öğretimin Öğrencilerin Başarısına ve Tutumuna Etkisi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Yeşildere, S. (2006). Farklı Matematiksel Güce sahip İlköğretim 6,7 ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme ve Bilgi Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Doktora Tezi Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Yıldırım, C. (1996**). Matematiksel Düşünme**. İkinci Basım, İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yılmaz, S., Keşan, C., Turgut, M., Yemen, S., Öner, A.T., Özen, D. (2008). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Öğrenme Stillerinin ve Geometrik Düşünme Düzeylerinin İncelenmesi. VIII. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Özetler Kitabı, 263.

Yolcu, B. (2008). Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Uzamsal Yeteneklerini Somut Modellerle ve Bilgisayar Uygulamaları ile Geliştirme Çalışmaları. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Werthessen, H.(1999). Instruction in Spatial Skills And Its effect on Self-Efficacy and Achievement in Mental Rotation and Spatial Visualization. Yayımlanmamış Doktora Tezi Teachers College, Columbia University.

Wu, H. (2004). Computer Aided Teaching in Linear Algebra. **The China Papers**, July, 100-102.

EKLER

EK-1

T.C
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
BUCA EĞİTİM FAKÜLTESİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI

SAYI :B.30.2.DEÜ.0.36.00-01-500- 562
KONU :

BUCA-İZM
27.10.2009

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Bölümümüz İlköğretim Matematik eğitimi anabilim dalı öğretmenliği doktora programı öğrencilerinden Melih TURGUT'un tez çalışması kapsamında uygulama yapması uygun görülmüştür.

Bilgi ve gereğini arz ederim.

Prof.Dr.Teoman KESERCİOĞLU
BÖLÜM BAŞKANI

GELEN EVR	
Tarihi	: 28 EKİM 2009
Kayıt No	: 3166
Dosya No	:

SN. N.Kordoş 28.10.2009

İstasyon Cad.135 Sk Uğur Mumcu Caddesi 135 Sokak No.5 35150 Buca / İZMİR Tel.: 0- 232 - 42048
4204886-4204887 – 4204598 – 4207602 – 4400808 – 4409609 – 4409611 – 4409612 - 4409613 – 44096
4204895 – 0-232-4409610 web: www.deu.edu.tr/egitim e-mail: egitim@deu.edu.tr

EK-2

Melih TURGUT <melih.turgut@gmail.com>

Uzamsal Yetenek Testleri ile ilgili İzin Hakkında

Omer Delialioglu <omerd@metu.edu.tr> **15 September 2009 16:10**
To: Melih TURGUT <melih.turgut@gmail.com>

Sayın Melih Turgut,

Anketi kullanmanızda sakınca yoktur. Çalışmanızda başarılar dilerim.

Dr. Ömer Delialioğlu
Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Eğitim Fakültesi

Dept. of Computer Educ. & Instr. Technology
Middle East Technical University
Faculty of Education
Ankara 06531 Turkey
http://www.ceit.metu.edu.tr
Phone: +90 (312) 210 4198
Fax:+90 (312) 210 1006
[Quoted text hidden]

EK-3

Adı Soyadı:____

KART ÇEVİRME TESTİ

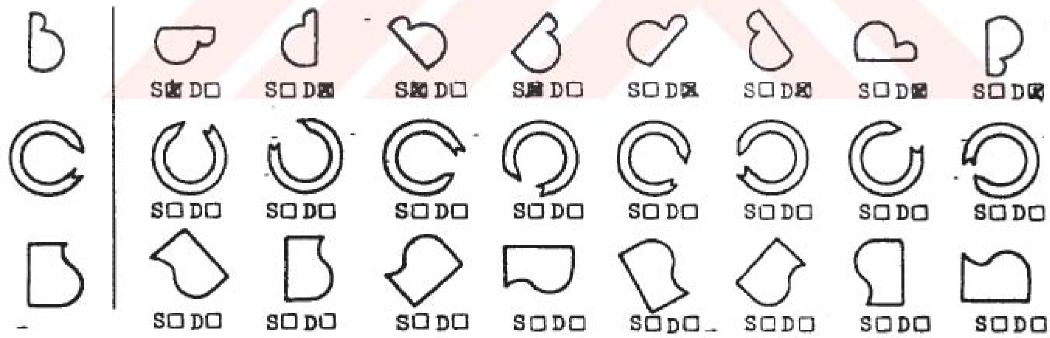
Bu test şekiller arasındaki farkı görebilme yeteneğini ölçmek için geliştirilmiştir. Aşağıdaki üçgen şeklindeki 5 kartı inceleyiniz.

Fark edeceğiniz gibi tüm şekiller baştaki kartın döndürülmüş (yuvarlanmış) halleridir. Şimdi aşağıdaki iki kartı inceleyiniz.

Gördüğünüz gibi bu kartlar aynı değildir. İlk kart döndürme (yuvarlama) yoluyla ikincisine dönüştürülemez. Ancak yüzü tam çevrilirse ilkine dönüşebilir. Dolayısıyla bu kartlar farklıdır diyebiliriz.

Bu testte yapmanız gereken dikey çizginin solundaki şekille sağındaki sekiz şekili karşılaştırıp aynı olup olmadıklarını tespit etmektir. Sağdaki şekillerden herhangi birisi soldakiyle aynı ise şeklin altındaki S (Sabit); farlı ise D (Değişik) şıklarını işaretleyiniz.

Aşağıdaki örnekleri inceleyip çözünüz. İlk sıra sizin için doğru olarak çözülmüştür.



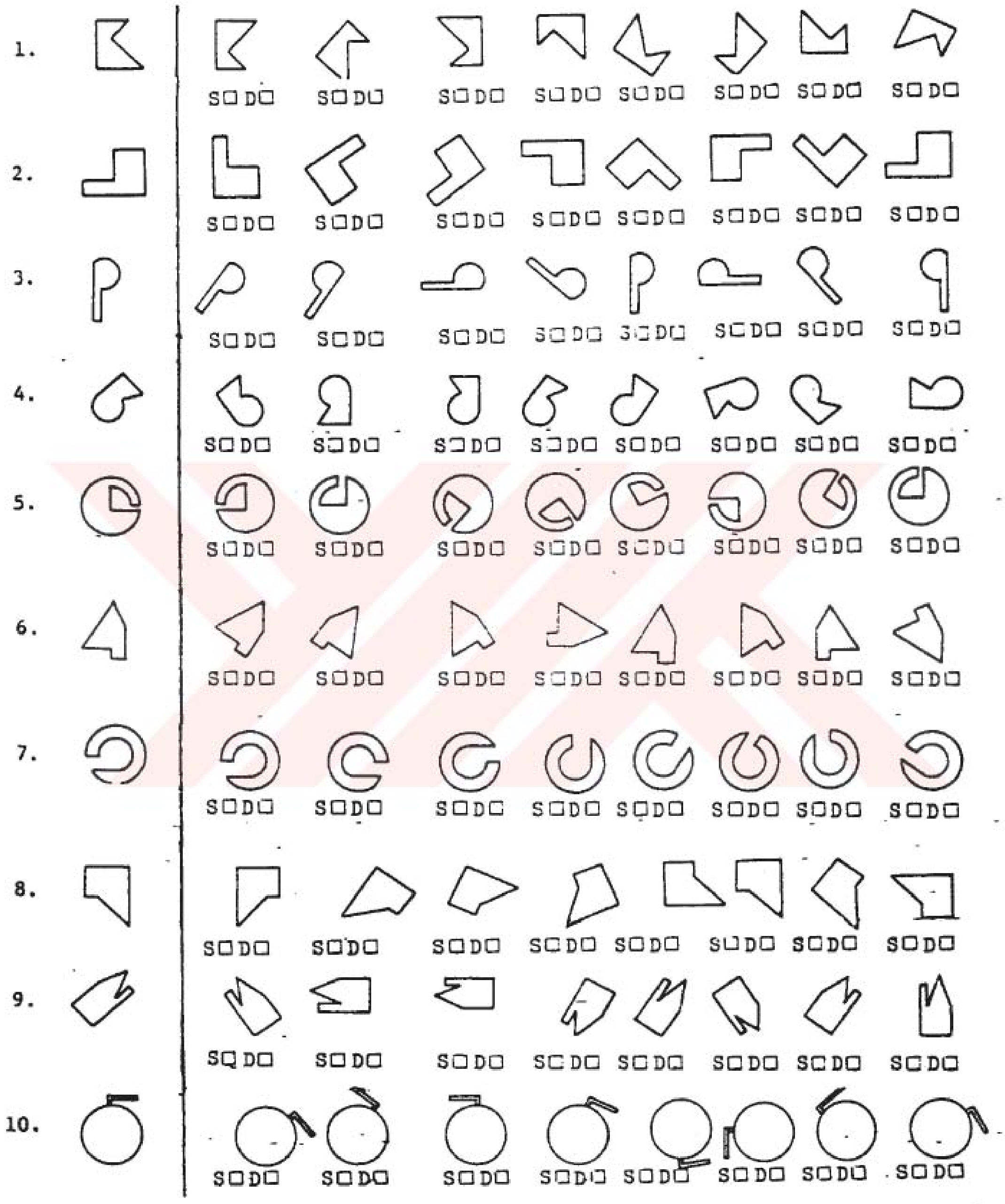
Bu testten alacağınız not doğru cevaplarınızdan yanlış cevaplarınız çıkarılarak elde edileceğinden, bir fikriniz olmadan tahminde bulunmamanız lehinize olacaktır.

Test iki bölümden oluşmaktadır ve her bölüm için 3 dakikanız vardır. Süre dolduğunda lütfen 1. Bölümü cevaplandırmayı bırakıp 2. Bölümün dağıtılmasını bekleyiniz. Başarılar;

LÜTFEN SÖYLENMEDEN SAYFAYI ÇEVİRMEYİNİZ.

Sayfa 2

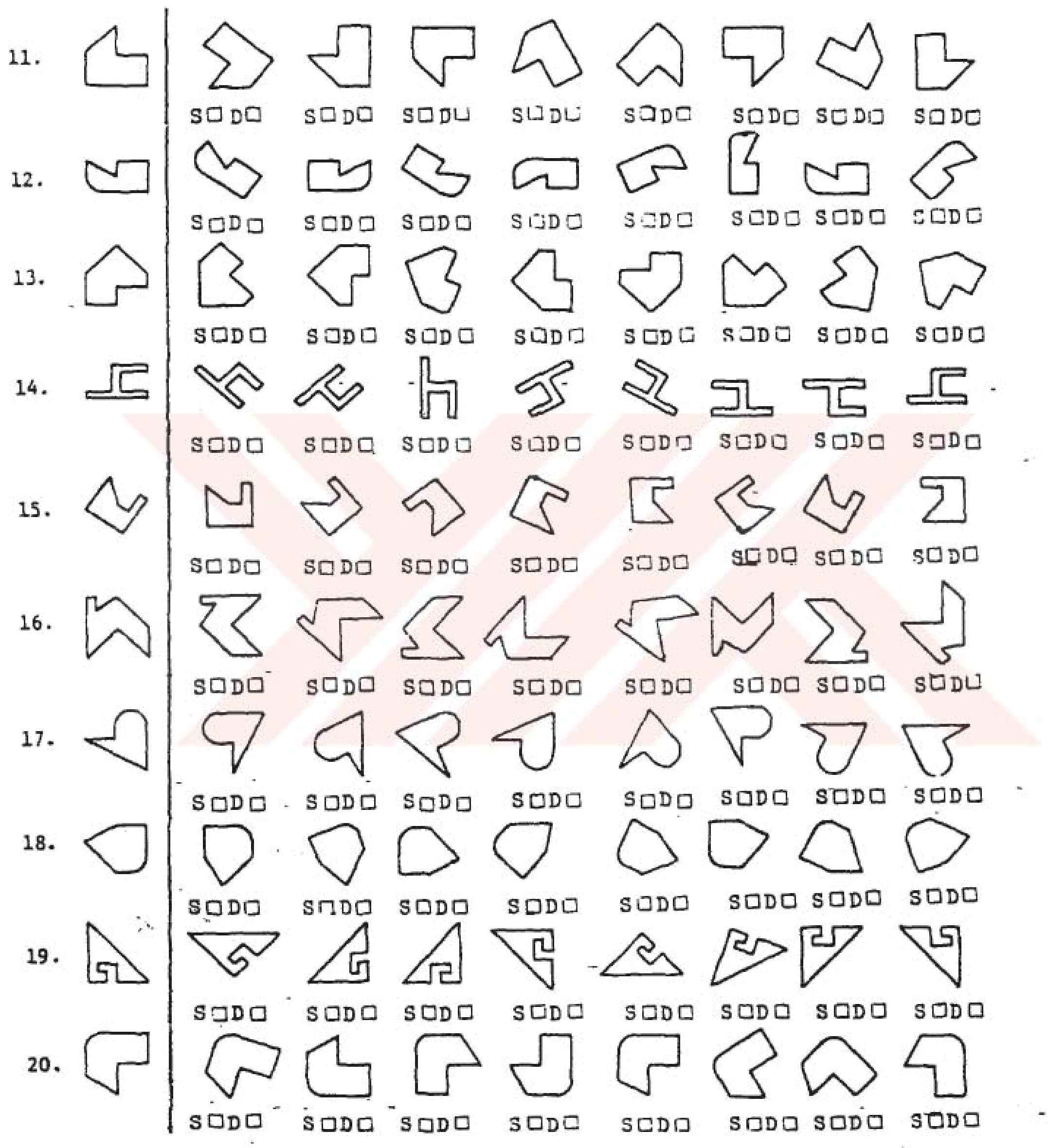
1. BÖLÜM (3 Dakika)



LÜTFEN 2.BÖLÜMÜN DAĞITILMASINI BEKLEYİNİZ

Sayfa 3

2. BÖLÜM (3 Dakika)



LÜTFEN SÜRENİZ BİTENE KADAR BEKLEYİNİZ

Adı Soyadı:____

KÜP KARŞILAŞTIRMA TESTİ

Bu testteki tüm problemlerde üzerlerinde harf, rakam veya şekil bulunan 6 yüzü (alt yüz, üst yüz ve dört yan yüz) olan küpler verilmiştir ve küplerin birbirlerinin aynı olup olmadığını bulmanız istenmektedir. Aşağıdaki iki küp çiftini inceleyiniz.

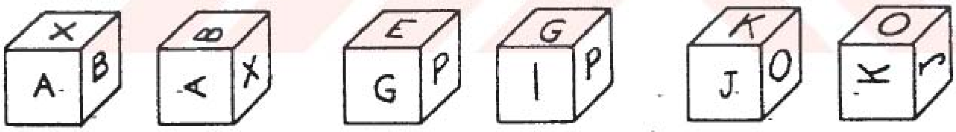
S ☐ D ■ S ■ D ☐

İlk çift için D şıkkı seçilmiştir çünkü küpler birbirinden **farklıdırlar** (Değişik). Soldaki küpün A harfi bulunan yüzü size bakacak şekilde çevrildiğinde, N harfi bulunan yüzü A harfi bulunan yüzün soluna ve görünmeyecek konuma gelir. Oysa sağdaki küpün N harfli yüzü A harfli yüzün sağında ve görünür haldedir, dolayısıyla bu küpler farklıdırlar.

İkinci çiftte ise S şıkkı seçilmiştir çünkü küpler **aynı olabilir**. A harfli yüzey yana çevrildiğinde X harfli yüzey görünmez konuma, B harfli yüzey üste gelir ve görünmez konumdaki C harfli yüzey görünür konuma gelir. Buda küplerin aynı olabileceğini gösterir.

Not: Bütün harf, rakam ve şekiller bir küpte birden fazla bulunamaz, fakat görünmeyecek konumda olabilir.

Aşağıdaki üç örneği inceleyiniz.



S ☐ D ☐ S ☐ D ☐ S ☐ D ☐

İlk çift hemen D işaretlenmelidir çünkü X harfi bir küpte iki defa bulunamaz.İkinci ve üçüncü çiftleri inceleyip cevaplandırınız.

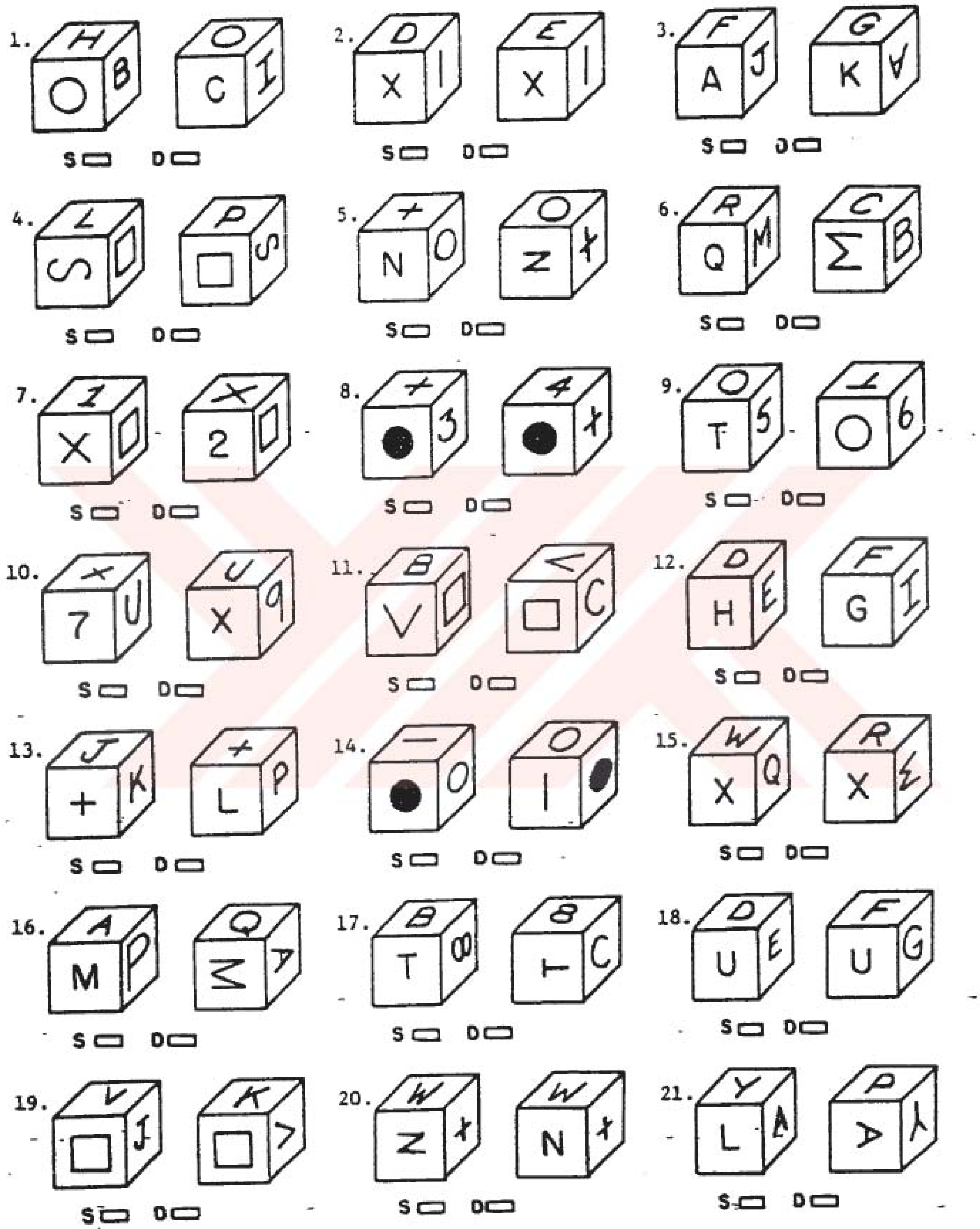
Bu testten alacağınız not doğru cevaplarınızdan yanlış cevaplarınız çıkarılarak elde edileceğinden, bir fikriniz olmadan tahminde bulunmamanız lehinize olacaktır.

Test iki bölümden oluşmaktadır ve her bölüm için <u>3 dakikanız</u> vardır. Süre dolduğunda lütfen 1. Bölümü cevaplandırmayı bırakıp 2. Bölümün dağıtılmasını bekleyiniz. Başarılar;

LÜTFEN SÖYLENMEDEN SAYFAYI ÇEVİRMEYİNİZ.

Sayfa 2

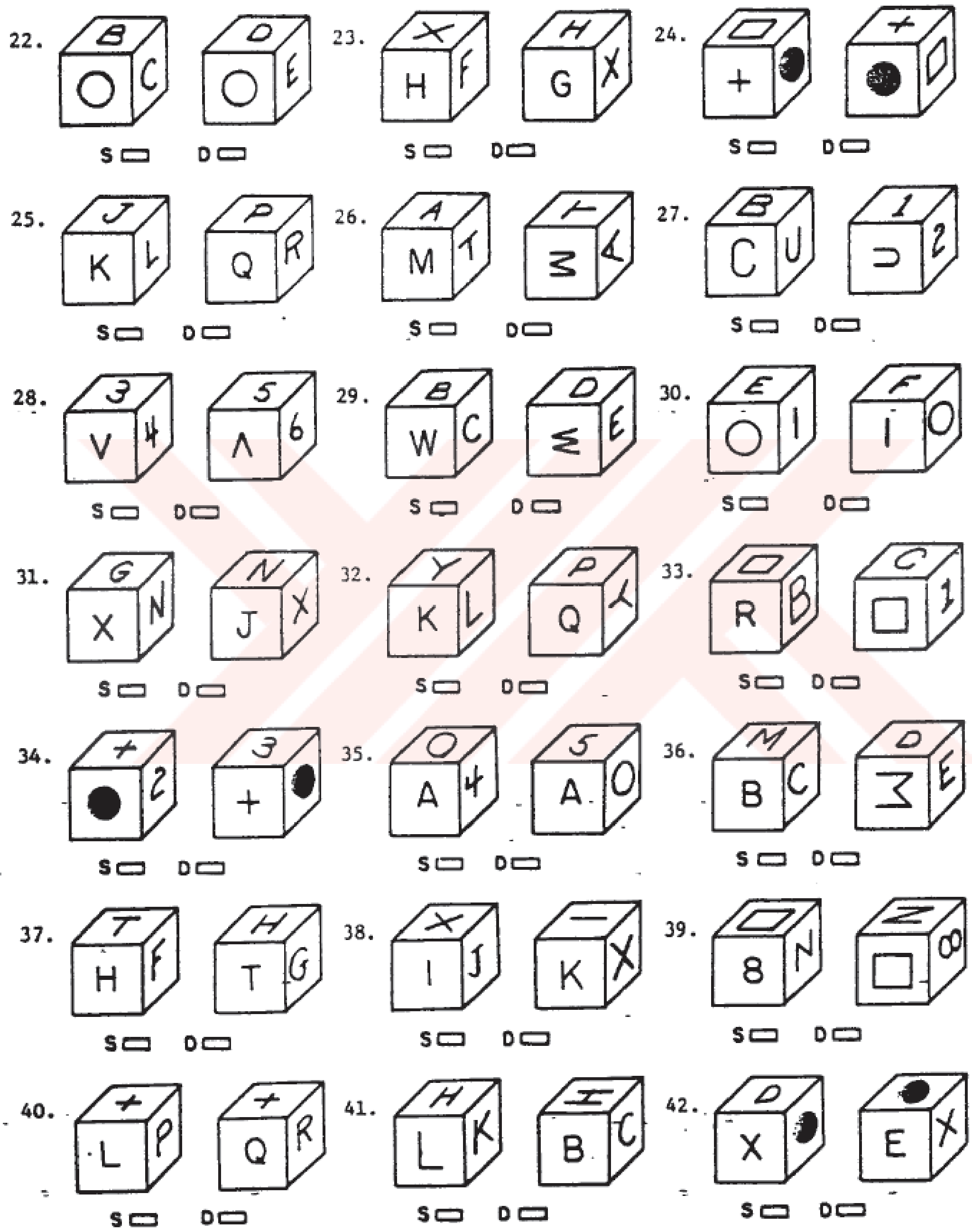
1. BÖLÜM (3 Dakika)



LÜTFEN 2.BÖLÜMÜN DAĞITILMASINI BEKLEYİNİZ

Sayfa 3

2. BÖLÜM (3 Dakika)

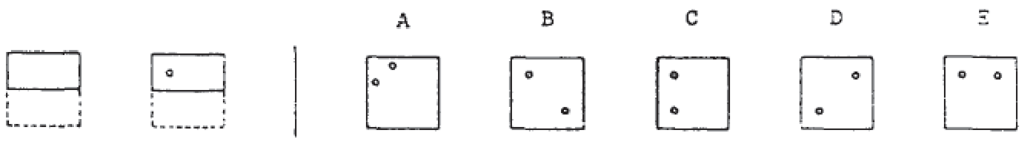


LÜTFEN SÜRENİZ BİTENE KADAR BEKLEYİNİZ

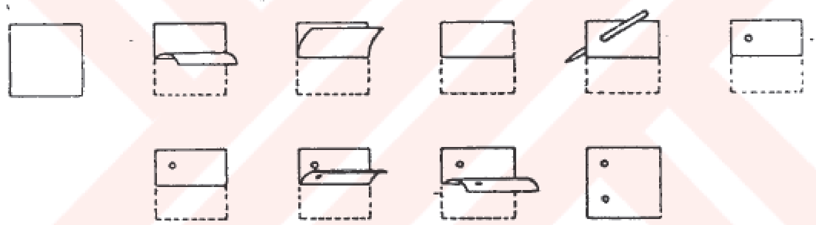
Adı Soyadı:____

KAĞIT KATLAMA TESTİ

Bu testte bir parça kağıdın katlanıp açılmasını hayal etmeniz gerekmektedir. Aşağıdaki örnekte dikey çizginin solundaki kare şeklindeki kağıt, katlanıp bir noktadan deliniyor. Kağıt açıldıktan sonra sağdaki şekillerden hangisinin oluşacağını bulunuz.



Yukardaki örnekte doğru cevap C şıkkıdır. Kağıdın nasıl katlandığını ve doğru cevabın neden C şıkkı olduğunu gösteren şekilleri inceleyiniz.



Tüm problemlerde katlamalar dikey çizginin solunda yapılmaktadır. Ayrıca kağıt hiç bir yöne çevrilmemekte sadece katlanmaktadır. Doğru cevabın kağıdın tamamen açıldıktan sonraki deliklerin yerini gösteren seçenek olduğunu unutmayınız.

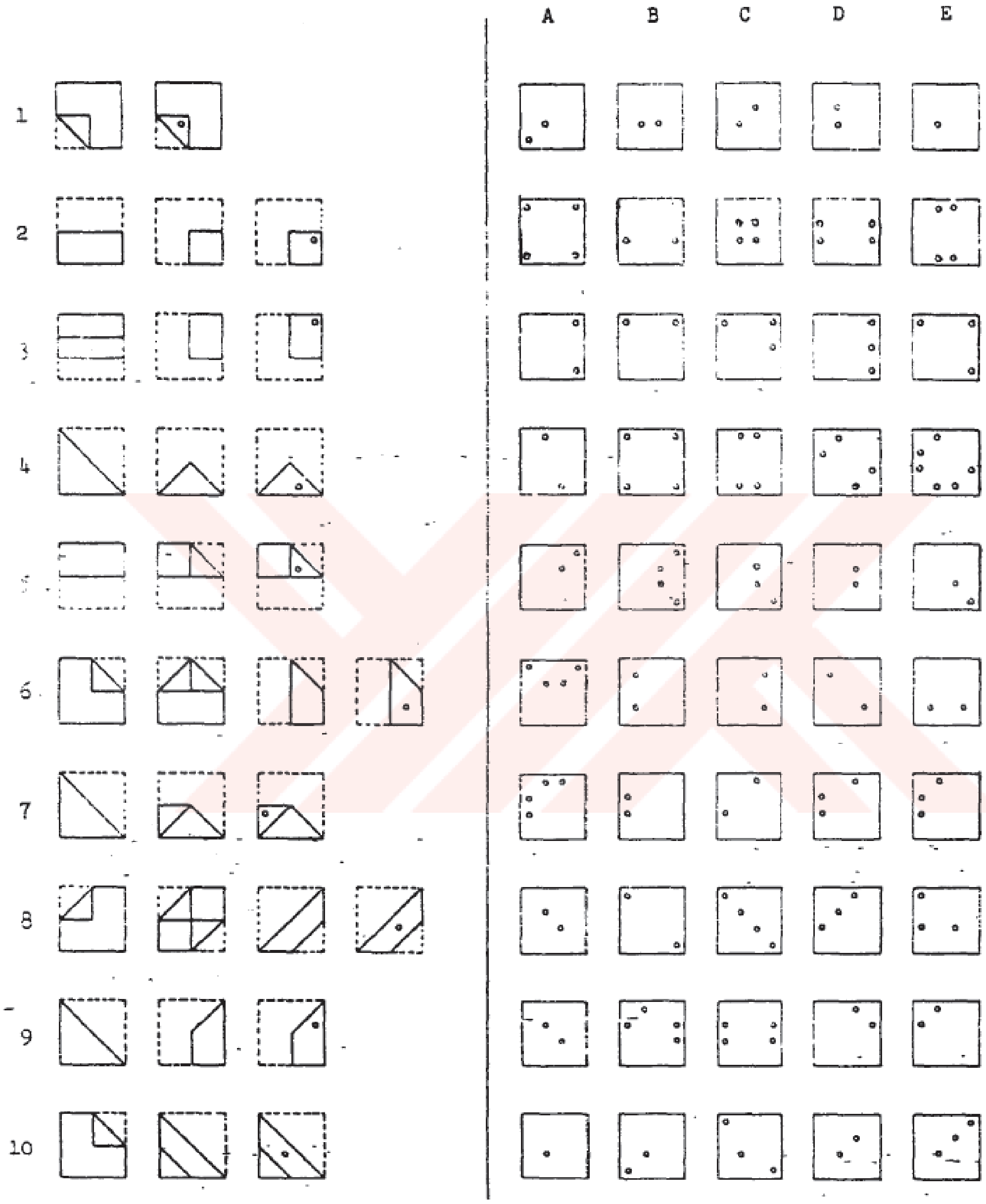
Bu testten alacağınız not doğru cevaplarınızdan yanlış cevaplarınız çıkarılarak elde edileceğinden, birkaç seçeneği bertaraf etmeden tahminde bulunmamanız lehinize olacaktır.

Test iki bölümden oluşmaktadır ve her bölüm için 3 dakikanız vardır. Süre dolduğunda lütfen 1. Bölümü cevaplandırmayı bırakıp 2. Bölümün dağıtılmasını bekleyiniz. Başarılar;

LÜTFEN SÖYLENMEDEN SAYFAYI ÇEVİRMEYİNİZ.

Sayfa 2

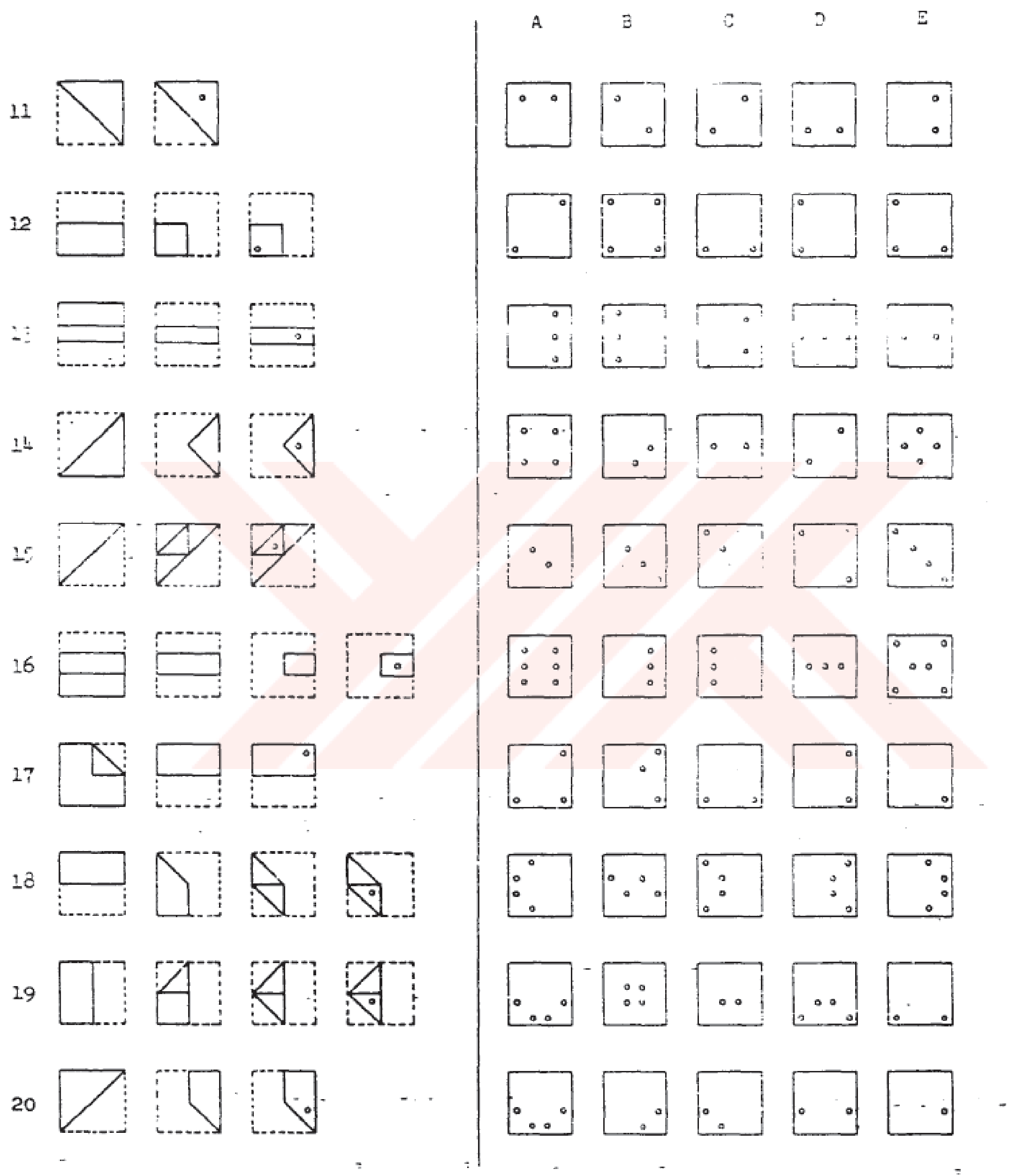
1. BÖLÜM (3 Dakika)



LÜTFEN 2.BÖLÜMÜN DAĞITILMASINI BEKLEYİNİZ

Sayfa 3

2. BÖLÜM (3 Dakika)

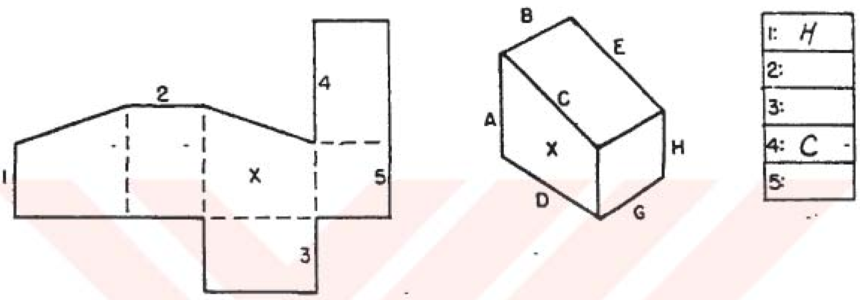


LÜTFEN SÜRENİZ BİTENE KADAR BEKLEYİNİZ

Adı Soyadı:____

YÜZEY OLUŞTURMA TESTİ

Bu testte bir parça kağıdı katlayarak değişik cisimler hayal etmeniz istenmektedir. Aşağıdaki şekillerden soldaki şekil noktalı çizgili yerlerden katlandığında sağdaki cisim oluşmaktadır. Katlamayı hayal ederek numaralı köşelerin hangi harflere denk geldiğini bulunuz ve en sağdaki kutunun içine yazınız. 1 ve 4 sizin için doldurulmuştur.



Not: Düz parçadaki X ile işaretlenmiş yüzey katlandıktan sonra oluşan cisimdeki X yüzeyiyle aynıdır. Dolayısıyla kağıt her zaman X yüzeyi cismin dış yüzünde olacak şekilde katlanmalıdır.

Yukardaki problemde, 1 köşeli yüzey cismin arka yüzünü oluşturmak için arkaya katlandığında, 1 köşesi H köşesiyle aynı olur. 5 köşeli yüzey arkaya katlandığında, 4 köşeli yüzey aşağı katlanır ve C köşesiyle aynı olur. Diğer cevaplarsa şöyledir: 2 B olur; 3 G olur; 5 H olur. İki cevabın aynı olabileceğine dikkat ediniz.

Bu testten alacağınız not doğru cevaplarınızdan yanlış cevaplarınız çıkarılarak elde edileceğinden, birkaç seçeneği bertaraf etmeden tahminde bulunmamanız lehinize olacaktır.

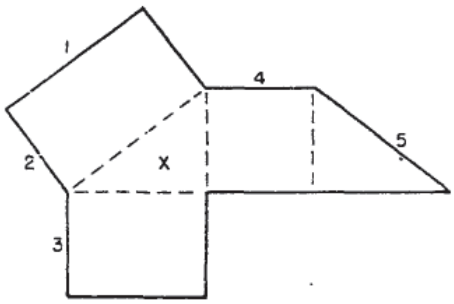
Test iki bölümden oluşmaktadır ve her bölüm için <u>6 dakikanız</u> vardır. Süre dolduğunda lütfen 1. Bölümü cevaplandırmayı bırakıp 2. Bölümün dağıtılmasını bekleyiniz. Başarılar;

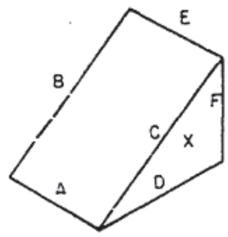
LÜTFEN SÖYLENMEDEN SAYFAYI ÇEVİRMEYİNİZ.

Sayfa 2

1. BÖLÜM (6 Dakika)

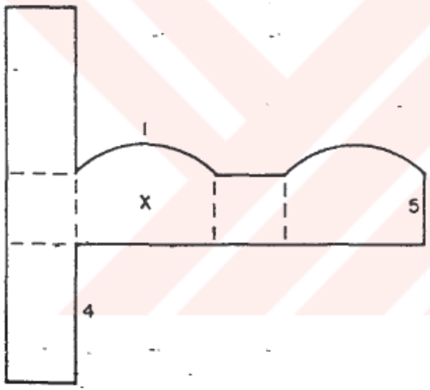
1

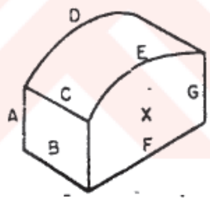




1:
2:
3:
4:
5:

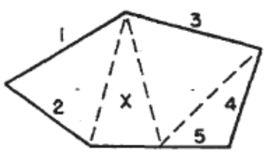
2

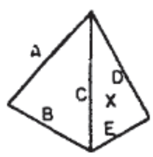




1:
2:
3:
4:
5:

3





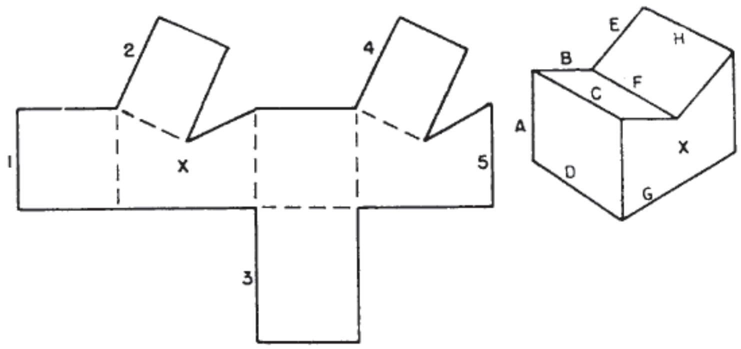
1:
2:
3:
4:
5:

DİĞER SAYFAYA GEÇİNİZ

Sayfa 3

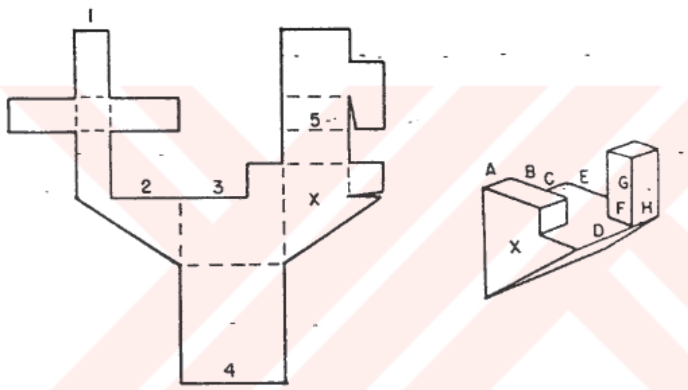
1. BÖLÜM (6 Dakika)

4



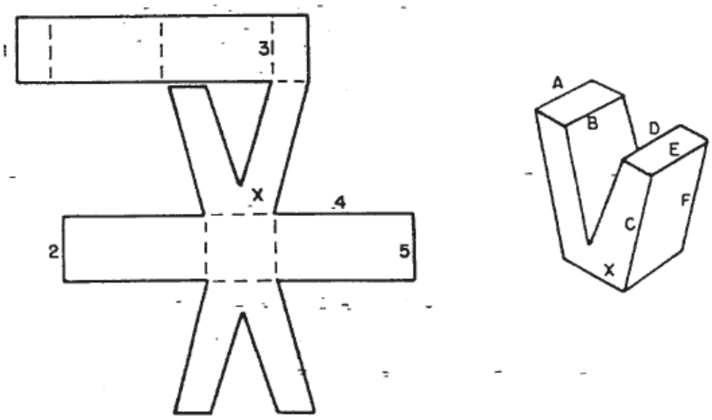
1:
2:
3:
4:
5:

5



1:
2:
3:
4:
5:

6



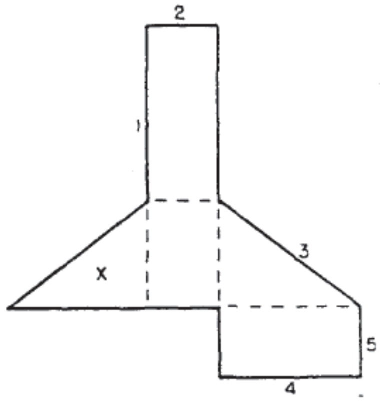
1:
2:
3:
4:
5:

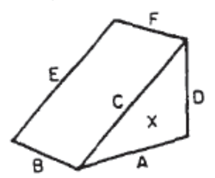
LÜTFEN 2.BÖLÜMÜN DAĞITILMASINI BEKLEYİNİZ

Sayfa 4

2. BÖLÜM (6 Dakika)

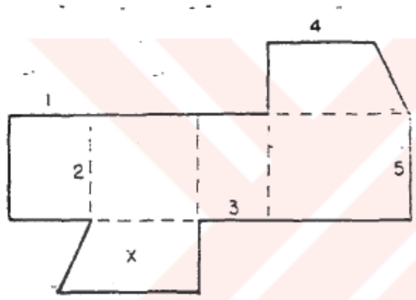
7

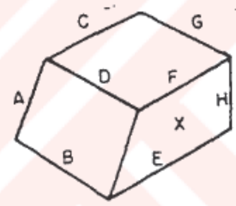




1:
2:
3:
4:
5:

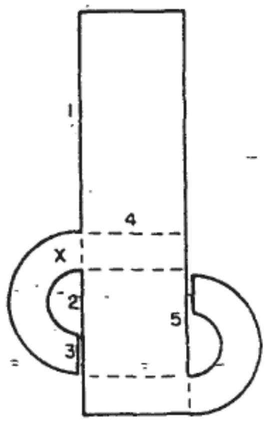
8

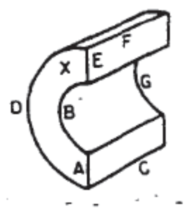




1:
2:
3:
4:
5:

9





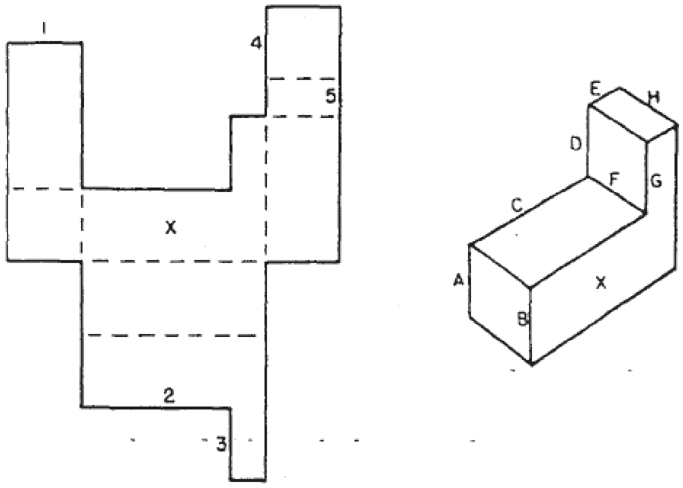
1:
2: –
3:
4:
5:

DIĞER SAYFAYA GEÇİNİZ

Sayfa 5

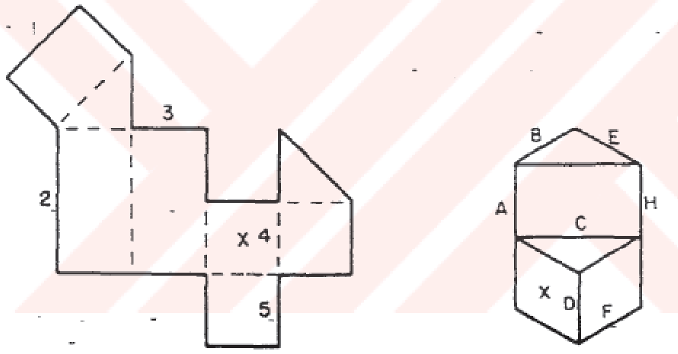
2. BÖLÜM (6 Dakika)

10



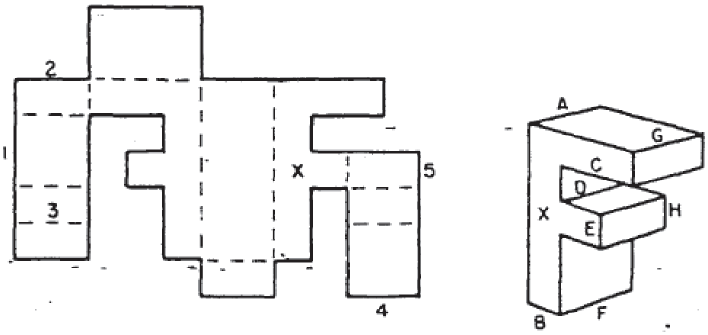
1:
2:
3:
4:
5:

11



1:
2:
3:
4:
5:

12



1:
2:
3:
4:
5:

LÜTFEN SÜRENİZ BİTENE KADAR BEKLEYİNİZ

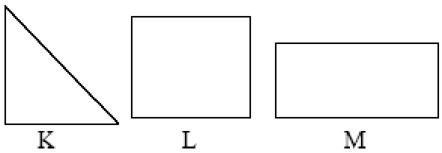
EK-4

VAN HIELE GEOMETRİ TESTİ
YÖNERGE

Bu test 25 sorudan oluşmaktadır. Sizden testteki her soruyu bilmeniz beklenmemektedir.
Testte bulunan;
1- Bütün soruları dikkatlice okuyun.
2- Doğru olduğunu düşündüğünüz seçenek üzerinde düşünün. Her soru için tek bir doğru cevap vardır. Cevap kâğıdına doğru olduğunu düşündüğünüz seçeneği işaretleyin.
3- Lütfen soru kâğıdının üzerine her hangi bir işaret koymayın. Cevap kâğıdındaki boşlukları çizim yapmak için kullanabilirsiniz.
4- İşaretlemiş olduğunuz cevabı değiştirmek isterseniz, ilk işareti tamamen siliniz.
5- Bu test için size verilecek süre 35 dakikadır.

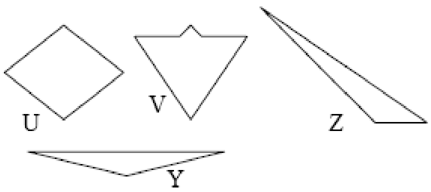
VAN HIELE GEOMETRİ TESTİ

1- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri karedir?



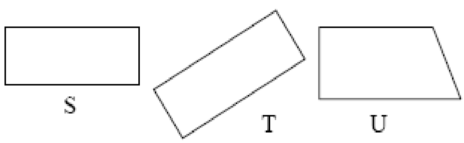
a) Yalnız K b) Yalnız L c) Yalnız M
d) L ve M e) Hepsi karedir.

2- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri üçgendir?



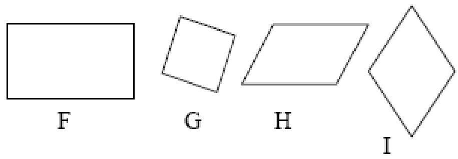
a) Hiçbiri üçgen değildir.
b) Yalnız V
c) Yalnız Y
d) Y ve Z
e) V ve Y

3- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri dikdörtgendir?



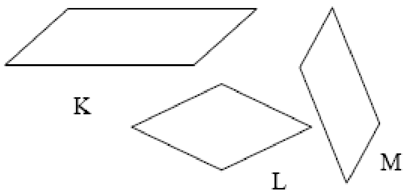
a) Yalnız S
b) Yalnız T
c) S ve T
d) S ve U
e) Hepsi dikdörtgendir.

4- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri karedir?



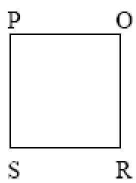
a) Hiçbiri kare değildir.
b) Yalnız G
c) F ve G
d) G ve I
e) Hepsi karedir.

5- Aşağıdakilerin hangisi ya da hangileri paralel kenardır?



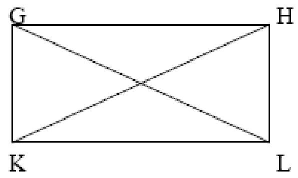
a) Yalnız K b) Yalnız L c) K ve M
d) Hiçbiri paralel kenar değildir.
e) Hepsi paralel kenardır.

6- PORS bir karedir. Aşağıdakilerden hangi özellik her kare için doğrudur?



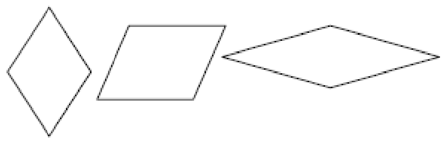
a) [PR] ve [RS] eşit uzunluktadır.
b) [OS] ve [PR] diktir.
c) [PS] ve [OR] diktir.
d) [PS] ve [OS] eşit uzunluktadır.
e) O açısı R açısından daha büyüktür.

7- Bir GHLK dikdörtgeninde, [GL] ve [HK] köşegendir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi her dikdörtgen için doğru değildir?



a) 4 dik açısı vardır.
b) 4 kenarı vardır.
c) Köşegenlerinin uzunlukları eşittir.
d) Karşılıklı kenarların uzunlukları eşittir.
e) |GL|, |GH| den kısadır.

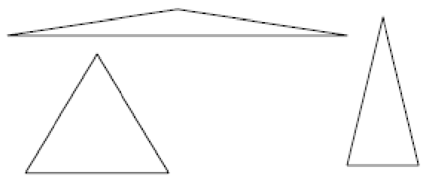
8- Eşkenar dörtgen tüm kenar uzunlukları eşit olan, 4 kenarlı bir şekildir. Aşağıda 3 tane eşkenar dörtgen verilmiştir.



Aşağıdaki seçeneklerinden hangisi her eşkenar için doğru değildir?

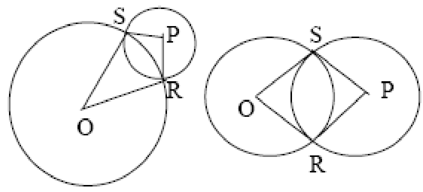
a) İki köşegenin uzunlukları eşittir.
b) Her köşegen, aynı zamanda açıortaydır.
c) Köşegenleri birbirine diktir.
d) Karşılıklı açılarının ölçüsü eşittir.
e) Seçeneklerin hepsi her eşkenar dörtgen için doğrudur.

9- İkizkenar üçgen, iki kenarı eşit olan üçgendir. Aşağıda üç ikizkenar üçgen verilmiştir.



Aşağıdaki seçeneklerinden hangisi her ikizkenar üçgen için doğrudur?
a) Üç kenarı eşit uzunlukta olmalıdır.
b) Bir kenarının uzunluğu, diğerinin iki katı olmalıdır.
c) Ölçüsü eşit olan en az iki açısı olmalıdır.
d) Üç açısının da ölçüsü eşit olmalıdır.
e) Seçeneklerinden hiçbiri her ikizkenar üçgen için doğru değildir.

10- Merkezleri P ve O olan iki çember 4 kenarları PROS şeklini oluşturmak üzere R ve S noktalarında kesişirler. Aşağıda iki örnek verilmiştir.

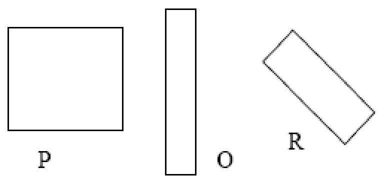


Aşağıdaki seçeneklerinden hangisi her zaman doğru değildir?
a) PROS şeklinin iki kenarı eşit uzunlukta olacaktır.
b) PROS şeklinin en az iki açısının ölçüsü eşit olacaktır.
c) [PO] ve [RS] dik olacaktır.
d) P ve O açılarının ölçüleri eşit olacaktır.
e) |PO|, |OR| den daha uzundur.

11- Önerme S: ABC üçgeninin üç kenarı eşit uzunluktadır.
Önerme T: ABC üçgeninde, B ve C açılarının ölçüleri eşittir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) S ve T önermeleri ikisi de aynı anda doğru olamaz.
b) Eğer S doğruysa, T de doğrudur.
c) Eğer T doğruysa, S de doğrudur.
d) Eğer S yanlışsa, T de yanlıştır.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

12. Önerme 1: F şekli bir dikdörtgendir.
Önerme 2: F şekli bir üçgendir.
Bu iki önermeye göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) Eğer 1 doğruysa, 2 de doğrudur.
b) Eğer 1 yanlışsa, 2 doğrudur.
c) 1 ve 2 aynı anda doğru olamaz.
d) 1 ve 2 aynı anda yanlış olamaz.
e) Yukarı seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

13. Aşağıdaki şekillerden hangisi ya da hangileri dikdörtgen olarak adlandırılabilir?



a) Hepsi
b) Yalnız O
c) Yalnız R
d) P ve O
e) O ve R

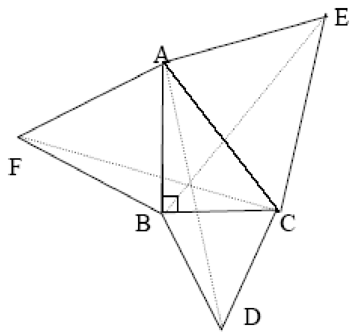
14. Tüm dikdörtgenlerde olup, bazı paralel kenarlarda olmayan özellik nedir?

a) Karşılıklı kenarları eşittir.
b) Köşegenler eşittir.
c) Karşılıklı kenarlar paraleldir.
d) Karşılıklı açıları eşittir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

15. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) Dikdörtgenlerin tüm özellikleri, tüm kareler için geçerlidir.
b) Karelerin tüm özellikleri, tüm dikdörtgenler için de geçerlidir.
c) Dikdörtgenin tüm özellikleri, tüm paralel kenarlar için geçerlidir.
d) Karelerin tüm özellikleri, tüm paralel kenarlar için geçerlidir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

16. Aşağıda bir ABC dik üçgeni verilmiştir. ABC üçgeninin kenarları üzerinde; ACE, ABF ve BCD eşkenar üçgenleri çizilmiştir.



Bu bilgilerden [AD], [BE] ve [CF] ortak bir noktadan geçtikleri kanıtlanabilir. Bu kanıt size neyi ifade eder?

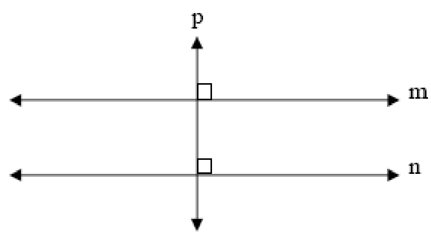
a) Yalnızca bu üçgen için; [AD], [BE] ve [CF] nin ortak bir noktası olduğundan emin olabiliriz
b) Sadece bazı dik üçgenlerde; [AD], [BE] ve [CF] nin ortak bir noktası vardır.
c) Herhangi bir dik üçgende, [AD], [BE] ve [CF]nin ortak bir noktası vardır.
d) Herhangi bir üçgende, [AD], [BE] ve [CF]nin ortak bir noktası vardır.
e) Herhangi bir eşkenar üçgende, [AD], [BE] ve [CF]nin ortak bir noktası vardır.

17. Aşağıda iki önerme verilmiştir.
I- Eğer bir şekil dikdörtgense, köşegenleri birbirini ortalayarak keser.
II- Eğer bir şeklin köşegenleri birbirini ortalayarak kesiyorsa şekil dikdörtgendir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) I'in doğru olduğunu kanıtlamak için, II nin doğru olduğunu kanıtlamak yeterlidir.
b) II'nin doğru olduğunu kanıtlamak için, I in doğru olduğunu kanıtlamak yeterlidir.
c) II'nin doğru olduğunu kanıtlamak için, köşegenleri birbirini ortalayan bir dikdörtgen bulmak yeterlidir.
d) II'nin yanlış olduğunu kanıtlamak için, köşegenleri birbirini ortalayan dikdörtgen olmayan bir şekil bulmak yeterlidir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

18. Aşağıdaki üç ifadeyi inceleyin.
{1} Aynı doğruya dik olan iki doğru paraleldir.
{2} İki paralel doğrudan birine dik olan doğru, diğerine de diktir.
{3} Eğer iki doğru eş uzaklıktaysa paraleldir.

Aşağıdaki şekilde, m ve p, n ve p doğrularının birbirine dik olduğu verilmiştir. Buna göre yukarıdaki cümlelerden hangisi ya da hangileri m doğrusunun n doğrusuna paralel olmasının nedeni olabilir?



a) Yalnız {1}
b) Yalnız {2}
c) Yalnız {3}
d) {1} ya da {2}
e) {2} ya da {3}

19. Aşağıda bir şeklin üç özelliği verilmiştir.
Özellik D: Köşegenleri eşit uzunluktadır.
Özellik S: Bir karedir.
Özellik R: Bir dikdörtgendir.
Bu özellikler dikkate alındığında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) D gerektirir S, o da gerektirir R.
b) D gerektirir R, o da gerektirir S.
c) S gerektirir R, o da gerektirir D.
d) R gerektirir D, o da gerektirir S.
e) R gerektirir S, o da gerektirir D.

20. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?
Geometride,
a) Her terim tanımlanabilir ve her doğru önermenin doğru olduğu kanıtlanabilir.
b) Her terim tanımlanabilir ama bazı önermelerin doğru olduğunu varsaymak gerekir.
c) Bazı terimler tanımsız kalmalıdır, ama bütün doğru önermelerin doğruluğu kanıtlanabilir.
d) Bazı terimler tanımsız kalmalıdır ve doğru olduğu varsayılmış bazı önermelere gerek vardır.
e) Yukarıdaki seçeneklerinden hiçbiri doğru değildir.

21. Bir açıyı üçlemek demek onu üç eşit parçaya bölmek demektir. 1847 yılında, P.L. Wantzel bir açının yalnızca pergel ve işaretlenmemiş cetvel kullanarak üçlenemeyeceğini kanıtlamıştır. Bu kanıttan nasıl bir sonuca varabilirsiniz?

a) Açılar yalnızca pergel ve işaretlenmemiş cetvel kullanarak iki eş parçaya ayrılamazlar.
b) Açılar yalnızca pergel ve işaretlenmiş cetvel kullanarak üçlenemezler.
c) Açılar herhangi bir çizim aracı kullanarak üçlenemezler.
d) Gelecekte, birinin yalnız pergel ve işaretlenmiş cetvel kullanarak açıları üçlemesi mümkün olabilir.
e) Hiç kimse, açıları yalnızca pergel ve işaretlenmemiş cetvel kullanarak üçleyecek genel bir yöntem bulamayacaktır.

22. F geometrisinde, her şey alışık olduklarımızdan farklıdır. Burada sadece dört nokta ve 6 doğru vardır. Her doğru iki nokta içerir. Eğer P, O, R ve S nokta ise, {P,O}, {P,R}, {P,S}, {O,R}, {O, S} ve {R, S} doğrulardır.

. P

O .

. R . S

Kesişme ve paralel terimlerinin F- geometrisindeki kullanımı şöyledir: {P, O} ve {P,R} doğruları P' de kesişirler çünkü P {P, O} ve {P,R} ın ortak noktasıdır. {P, O} ve {R, S} doğruları paraleldir çünkü ortak hiçbir noktaları yoktur.
Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) {P, R} ve {O, S} kesişirler.
b) {P, R} ve {O, S} paraleldir.
c) {O, R} ve {R,S} paraleldir.
d) {P, S} ve {O, R} kesişirler.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

23. Ali adlı bir matematikçinin kendi tanımladığı geometriye göre, aşağıdaki önerme doğrudur.
Bir üçgenin iç açılarının ölçüsü toplamı 180 dereceden azdır.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) Ali üçgenin açılarını ölçerken hata yapmıştır.
b) Ali mantıksal bir hata yapmıştır.
c) Ali doğru sözcüğünün anlamını bilmiyordur.
d) Ali bilinen geometridekilerden farklı varsayımlarla başlamıştır.
e) Yukarıdaki seçeneklerden hiçbiri doğru değildir.

24. İki ayrı geometri kitabı 'dikdörtgen' sözcüğünü iki farklı şekillerde tanımlamıştır. Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) Kitaplardan birinde hata vardır.
b) Tanımlardan biri yanlıştır. Dikdörtgen için iki farklı tanım olamaz.
c) Bir kitapta tanımlanan dikdörtgenin özellikleri diğer kitaptakinden farklı olmalıdır.
d) Bir kitapta tanımlanan dikdörtgenin özellikleri diğer kitaptakiyle aynı olmalıdır.
e) Kitaplarda tanımlanan dikdörtgenlerin biçimsel olarak farklı özellikleri olabilir.

25. Varsayalım aşağıdaki önerme I ve II yi kanıtladınız.
I. Eğer p ise q dir.
II. Eğer s ise q değildir.
Buna göre önerme I ve II den aşağıdakilerden hangisi çıkartılabilir?
a) Eğer s ise, p değildir.
b) Eğer p değil ise q değildir.
c) Eğer p veya q ise s dir.
d) Eğer p ise s dir.
e) Eğer s değil ise p dir.

EK-5

Gmail by Google

Melih TURGUT <melih.turgut@gmail.com>

Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği Hakkında

Asuman DUATEPE PAKSU <aduatepe@pau.edu.tr> **16 September 2009 12:54**
To: Melih TURGUT <melih.turgut@gmail.com>

Ölçeği kullanabilirsiniz.
İyi çalışmalar dilerim.

Asuman DUATEPE PAKSU
[Quoted text hidden]

EK-6

Lineer Cebir I Dersinin Kazanımları

1. Hafta	1. Grup, halka ve cisim yapılarını tanımlar ve örnekler.
2. Hafta	2. Bir cisim üzerinde vektör uzayı tanımlayarak, vektör uzayı üzerinde tanımlanan iç ve dış işlemleri belirler, örnekler. 3. Vektöre has özellikleri belirler, toplama, çıkarma ve sabitle çarpma işlemini yapar.
3. Hafta	4. Bir vektör uzayı üzerinde iç çarpım fonksiyonunu tanımlar, farklı ve soyut iç çarpım uzaylarında işlem yapar. Geometrik vektörler üzerinde tanımlanmış iç çarpım uzaylarında, çemberi, küreyi oluşturur ve grafiklerini çizer. 5. İç çarpım fonksiyonunu kullanarak bir vektörün uzunluğunu (normunu) ve buna bağlı olarak iki vektör arasındaki uzaklığı hesaplar. İç çarpım fonksiyonunu kullanarak iki vektör arasındaki açıyı hesaplar.
4. Hafta	6. İç çarpım fonksiyonunu kullanarak soyut ve geometrik ortogonal sistemleri tanımlar. Vektörleri birim haline getirir. 7. İki vektörün vektörel çarpımını ifade eder, örnekler ve bu kavramdan hareketle, bir paralelkenarın alanını hesaplar. 8. Kosinüs ve sinüs teoremlerini geometrik vektörleri kullanarak ispatlar.
5. Hafta	9. Üç vektörün karma (karışık) çarpımını ifade eder ve geometrik yorumunu yapar. Karışık çarpımın sonucunun sıfır çıkmasını açıklar. 10. İki katlı vektörel çarpımdan hareketle, uzayda doğru denklemini ifade eder, farklı gösterimlerini elde eder ve örnekler. 11. Uzayda düzlemin genel ifadesi yazar, üç boyutlu uzayda vektörel çarpımı kullanarak düzlem denklemini oluşturur.
6. Hafta	12. Alt vektör uzayı kavramının özelliklerini alan diliyle oluşturur, bu kavramın vektör alanı ile benzer ve farklı yönlerini belirler. 13. Geometrik vektörler yardımıyla alt vektör uzayı kavramlarını kartezyen sistemde gösterir, hangi geometrik şekillerin iki ve üç boyutlu uzayın alt vektör uzayı olduğunu belirler.

7. Hafta	14. Bir vektör kümesinin lineer bağımlılığını ve bağımsızlığını matematiksel (lineer birleşimi kullanarak) olarak ifade eder ve örnekler. 15. Doğru, düzlem ve uzay gibi geometrik kavramları kullanarak geometrik vektörlerin lineer bağımlılığını ve lineer bağımsızlığını açıklar.
8. Hafta	16. Lineer bağımsız vektör kümesini ve germe aksiyomunu kullanarak bir vektör uzayının tabanını ve boyutunu hesaplar. 17. Bir vektörü lineer bağımsız bir vektör kümesi ile ifade eder ve lineer birleşimi kullanarak taban vektörlerini oluşturur.
9. Hafta	18. Bir vektör uzayı kümesine ait arakesit alt vektör uzayını tanımlar. 19. Arakesit alt vektör uzaylarının özelliklerini inceler ve bu vektör kümelerine ait bir taban bulabilir. 20. Geometrik vektörlerin özelliklerinden yararlanarak alt vektör uzaylarının birleşiminin ve arakesitinin boyutları hesaplar.
10. Hafta	21. Ara kesit alt vektör uzaylarından hareketle, toplamsal sıfırın özelliğini belirler ve direkt toplamı ifade eder. 22. Bir vektör kümesinin rankını hesaplar, boyut ile farkını söyler. 23. Herhangi bir tabanda verilen bir vektörü başka bir taban cinsinden yazar.
11. Hafta	24. Dönüşümle fonksiyon arasındaki farkı ve ilişkiyi açıklar. 25. Lineer dönüşüm kavramını açıklar ve örnekler. Öteleme ve simetri dönüşümlerini ifade eder.
12. Hafta	26. Reel vektör uzayı üzerinde tanımlı bir dönüşüm altında geometrik şekilleri inceler. 27. Bir lineer dönüşümün çekirdek ve görüntü kümesini bulur, rankını hesaplar.
13. Hafta	28. Gram-Schmidt Ortonormalleştirme yöntemini matematiksel olarak uygular, örnekler. 29. Özel lineer dönüşümleri, endomorfizim, epimorfizim ve izomorfizimleri tanımlar.

EK-7

Lineer Cebir Testi Belirtke Tablosu

BASAMAKLAR / KAZANIM No	BİLGİ	KAVRAMA	UYGULAMA	ANALİZ	SENTEZ	DEĞERLEN DİRME	Soru sayısı	Soru yüzdesi
3		1					1	%4
5	3	4	5				3	%12
7			2				1	%4
9			14				1	%4
10		19,20	21	22			4	%16
11		23,25	24				3	%12
12				13			1	%4
14			7				1	%4
16						18	1	%4
23					12		1	%4
25	17		16				2	%8
26			6,10	9		8	4	%16
27			11		15		2	%8
Toplam Soru Sayısı	2	6	10	3	2	2	25	-
Soru Yüzdesi	%8	%24	%40	%12	%8	%8	-	%100

EK-8

MicroCAT (tm) Testing System

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file C.Dat   Page 1

		Item Statistics			Alternative Statistics				
Seq. No.	Scale -Item	Prop. Correct	Biser.	Point Biser.	Alt.	Prop. Endorsing	Biser.	Point Biser.	Key
1	1-1	0.715	0.573	0.431	A	0.715	0.573	0.431	*
					B	0.084	-0.387	-0.215	
					C	0.084	-0.285	-0.158	
					D	0.067	-0.484	-0.251	
					E	0.050	-0.272	-0.129	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
2	1-2	0.515	0.620	0.494	A	0.067	-0.460	-0.239	
					B	0.515	0.620	0.494	*
					C	0.201	-0.244	-0.171	
					D	0.184	-0.329	-0.226	
					E	0.033	-0.422	-0.175	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
3	1-3	0.448	0.520	0.413	A	0.050	-0.486	-0.230	
					B	0.134	-0.275	-0.174	
					C	0.448	0.520	0.413	*
					D	0.251	-0.234	-0.172	
					E	0.117	-0.109	-0.067	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
4	1-4	0.280	0.514	0.385	A	0.184	0.051	0.035	
					B	0.280	0.514	0.385	*
					C	0.234	-0.305	-0.221	
					D	0.151	-0.132	-0.086	
					E	0.151	-0.267	-0.174	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
5	1-5	0.364	0.597	0.466	A	0.167	-0.463	-0.311	
					B	0.151	-0.334	-0.219	
					C	0.184	0.028	0.019	
					D	0.364	0.597	0.466	*
					E	0.134	-0.172	-0.109	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
6	1-6	0.598	0.599	0.473	A	0.084	-0.429	-0.238	
					B	0.117	-0.318	-0.195	
					C	0.100	-0.123	-0.072	
					D	0.100	-0.464	-0.272	
					E	0.598	0.599	0.473	*
					Other	0.000	-9.000	-9.000	

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file C.Dat Page 2

		Item Statistics			Alternative Statistics				
Seq. No.	Scale -Item	Prop. Correct	Biser.	Point Biser.	Alt.	Prop. Endorsing	Biser.	Point Biser.	Key
7	1-7	0.448	0.496	0.394	A	0.117	-0.190	-0.116	
					B	0.201	-0.244	-0.171	
					C	0.448	0.496	0.394	*
					D	0.117	-0.350	-0.214	
					E	0.117	-0.109	-0.067	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
8	1-8	0.464	0.716	0.571	A	0.167	-0.463	-0.311	
					B	0.464	0.716	0.571	*
					C	0.151	-0.334	-0.219	
					D	0.117	-0.318	-0.195	
					E	0.100	-0.158	-0.093	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
9	1-9	0.331	0.635	0.489	A	0.331	0.635	0.489	*
					B	0.134	-0.231	-0.146	
					C	0.100	-0.410	-0.240	
					D	0.351	-0.208	-0.161	
					E	0.084	-0.202	-0.112	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
10	1-10	0.347	0.435	0.338	A	0.067	-0.192	-0.100	
					B	0.184	-0.447	-0.307	
					C	0.335	0.040	0.031	
					D	0.347	0.435	0.338	*
					E	0.067	-0.241	-0.125	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
11	1-11	0.280	0.626	0.470	A	0.251	-0.234	-0.172	
					B	0.134	-0.421	-0.267	
					C	0.201	0.060	0.042	
					D	0.134	-0.289	-0.183	
					E	0.280	0.626	0.470	*
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
12	1-12	0.264	0.587	0.435	A	0.184	0.016	0.011	
					B	0.285	-0.293	-0.221	
					C	0.167	-0.148	-0.099	
					D	0.264	0.587	0.435	*
					E	0.100	-0.338	-0.198	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file C.Dat Page 3

		Item Statistics			Alternative Statistics				
Seq. No.	Scale -Item	Prop. Correct	Biser.	Point Biser.	Alt.	Prop. Endorsing	Biser.	Point Biser.	Key
13	1-13	0.247	0.728	0.533	A	0.247	0.728	0.533	*
					B	0.151	-0.213	-0.139	
					C	0.268	-0.293	-0.218	
					D	0.184	-0.210	-0.144	
					E	0.151	-0.118	-0.077	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
14	1-14	0.331	0.757	0.583	A	0.134	-0.289	-0.183	
					B	0.117	-0.511	-0.312	
					C	0.331	0.757	0.583	*
					D	0.318	-0.199	-0.152	
					E	0.100	-0.230	-0.135	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
15	1-15	0.364	0.554	0.433	A	0.184	-0.174	-0.120	
					B	0.201	-0.176	-0.123	
					C	0.134	-0.216	-0.137	
					D	0.117	-0.334	-0.204	
					E	0.364	0.554	0.433	*
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
16	1-16	0.397	0.737	0.581	A	0.397	0.737	0.581	*
					B	0.301	-0.340	-0.258	
					C	0.084	-0.429	-0.238	
					D	0.151	-0.240	-0.157	
					E	0.067	-0.338	-0.176	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
17	1-17	0.230	0.798	0.576	A	0.084	-0.346	-0.192	
					B	0.230	0.798	0.576	*
					C	0.268	-0.187	-0.139	
					D	0.318	-0.217	-0.166	
					E	0.100	-0.284	-0.166	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
18	1-18	0.297	0.628	0.476	A	0.285	-0.200	-0.151	
					B	0.134	-0.128	-0.081	
					C	0.218	-0.254	-0.181	
					D	0.297	0.628	0.476	*
					E	0.067	-0.363	-0.188	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file C.Dat Page 4

		Item Statistics			Alternative Statistics				
Seq. No.	Scale -Item	Prop. Correct	Biser.	Point Biser.	Alt.	Prop. Endorsing	Biser.	Point Biser.	Key
19	1-19	0.632	0.573	0.448	A	0.084	-0.326	-0.181	
					B	0.134	-0.406	-0.258	
					C	0.067	-0.046	-0.024	
					D	0.084	-0.470	-0.261	
					E	0.632	0.573	0.448	*
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
20	1-20	0.280	0.476	0.357	A	0.184	-0.091	-0.063	
					B	0.285	-0.172	-0.130	
					C	0.167	-0.110	-0.074	
					D	0.084	-0.326	-0.181	
					E	0.280	0.476	0.357	*
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
21	1-21	0.331	0.574	0.442	A	0.331	0.574	0.442	*
					B	0.067	-0.436	-0.226	
					C	0.117	-0.302	-0.185	
					D	0.418	-0.132	-0.104	
					E	0.067	-0.314	-0.163	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
22	1-22	0.264	0.732	0.543	A	0.117	-0.286	-0.175	
					B	0.351	-0.225	-0.175	
					C	0.264	0.732	0.543	*
					D	0.117	-0.077	-0.047	
					E	0.151	-0.361	-0.236	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
23	1-23	0.464	0.120	0.095	A	0.033	-0.507	-0.210	
					B	0.050	0.155	0.074	
					C	0.464	0.120	0.095	*
					D	0.318	-0.031	-0.023	
					E	0.134	-0.070	-0.044	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
24	1-24	0.598	0.542	0.427	A	0.067	-0.192	-0.100	
					B	0.598	0.542	0.427	*
					C	0.184	-0.376	-0.258	
					D	0.084	-0.367	-0.204	
					E	0.067	-0.216	-0.112	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	

MicroCAT (tm) Testing System

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file C.Dat Page 5

		Item Statistics			Alternative Statistics				
Seq. No.	Scale -Item	Prop. Correct	Biser.	Point Biser.	Alt.	Prop. Endorsing	Biser.	Point Biser.	Key
25	1-25	0.481	0.524	0.418	A	0.184	-0.293	-0.201	
					B	0.100	-0.482	-0.282	
					C	0.100	-0.194	-0.114	
					D	0.481	0.524	0.418	*
					E	0.134	-0.055	-0.035	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	

MicroCAT (tm) Testing System

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file C.Dat Page 6

There were 239 examinees in the data file.

Scale Statistics

Scale:	1
N of Items	25
N of Examinees	239
Mean	9.971
Variance	28.045
Std. Dev.	5.296
Skew	1.486
Kurtosis	1.843
Minimum	3.000
Maximum	25.000
Median	9.000
Alpha	**0.835**
SEM	2.152
Mean P	0.399
Mean Item-Tot.	0.451
Mean Biserial	0.586

EK-9

MicroCAT (tm) Testing System

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file K.Dat Page 1

		Item Statistics			Alternative Statistics				
Seq. No.	Scale -Item	Prop. Correct	Biser.	Point Biser.	Alt.	Prop. Endorsing	Biser.	Point Biser.	Key
1	1-1	0.715	0.558	0.419	A	0.715	0.558	0.419	*
					B	0.084	-0.383	-0.212	
					C	0.084	-0.300	-0.167	
					D	0.067	-0.466	-0.242	
					E	0.050	-0.231	-0.109	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
2	1-2	0.515	0.650	0.519	A	0.067	-0.466	-0.242	
					B	0.515	0.650	0.519	*
					C	0.201	-0.272	-0.191	
					D	0.184	-0.341	-0.234	
					E	0.033	-0.427	-0.177	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
3	1-3	0.448	0.535	0.426	A	0.050	-0.507	-0.240	
					B	0.134	-0.280	-0.178	
					C	0.448	0.535	0.426	*
					D	0.251	-0.245	-0.180	
					E	0.117	-0.106	-0.065	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
4	1-4	0.280	0.526	0.394	A	0.184	0.053	0.036	
					B	0.280	0.526	0.394	*
					C	0.234	-0.332	-0.241	
					D	0.151	-0.130	-0.085	
					E	0.151	-0.252	-0.165	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
5	1-5	0.364	0.594	0.463	A	0.167	-0.457	-0.307	
					B	0.151	-0.320	-0.209	
					C	0.184	-0.019	-0.013	
					D	0.364	0.594	0.463	*
					E	0.134	-0.133	-0.084	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
6	1-6	0.598	0.584	0.461	A	0.084	-0.444	-0.247	
					B	0.117	-0.283	-0.173	
					C	0.100	-0.109	-0.064	
					D	0.100	-0.470	-0.275	
					E	0.598	0.584	0.461	*
					Other	0.000	-9.000	-9.000	

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file K.Dat Page 2

Seq. No.	Scale -Item	Item Statistics: Prop. Correct	Item Statistics: Biser.	Item Statistics: Point Biser.	Alt.	Alternative Statistics: Prop. Endorsing	Alternative Statistics: Biser.	Alternative Statistics: Point Biser.	Key
7	1-7	0.448	0.495	0.394	A	0.117	-0.170	-0.104	
					B	0.201	-0.250	-0.175	
					C	0.448	0.495	0.394	*
					D	0.117	-0.364	-0.223	
					E	0.117	-0.106	-0.065	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
8	1-8	0.464	0.721	0.574	A	0.167	-0.508	-0.341	
					B	0.464	0.721	0.574	*
					C	0.151	-0.333	-0.218	
					D	0.117	-0.299	-0.183	
					E	0.100	-0.127	-0.074	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
9	1-9	0.331	0.642	0.494	A	0.331	0.642	0.494	*
					B	0.134	-0.221	-0.140	
					C	0.100	-0.470	-0.275	
					D	0.351	-0.202	-0.157	
					E	0.084	-0.176	-0.098	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
10	1-10	0.347	0.419	0.325	A	0.067	-0.147	-0.077	
					B	0.184	-0.448	-0.308	
					C	0.335	0.051	0.040	
					D	0.347	0.419	0.325	*
					E	0.067	-0.270	-0.140	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
11	1-11	0.280	0.639	0.479	A	0.251	-0.225	-0.165	
					B	0.134	-0.427	-0.271	
					C	0.201	0.044	0.031	
					D	0.134	-0.295	-0.187	
					E	0.280	0.639	0.479	*
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
12	1-12	0.264	0.586	0.434	A	0.184	-0.007	-0.005	
					B	0.285	-0.296	-0.222	
					C	0.167	-0.115	-0.077	
					D	0.264	0.586	0.434	*
					E	0.100	-0.343	-0.201	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	

MicroCAT (tm) Testing System

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file K.Dat Page 3

		Item Statistics			Alternative Statistics				
Seq. No.	Scale -Item	Prop. Correct	Biser.	Point Biser.	Alt.	Prop. Endorsing	Biser.	Point Biser.	Key
13	1-13	0.247	0.732	0.536	A	0.247	0.732	0.536	*
					B	0.151	-0.198	-0.129	
					C	0.268	-0.310	-0.230	
					D	0.184	-0.222	-0.152	
					E	0.151	-0.103	-0.067	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
14	1-14	0.331	0.773	0.596	A	0.134	-0.324	-0.206	
					B	0.117	-0.525	-0.321	
					C	0.331	0.773	0.596	*
					D	0.318	-0.192	-0.147	
					E	0.100	-0.217	-0.127	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
15	1-15	0.364	0.577	0.450	A	0.184	-0.174	-0.119	
					B	0.201	-0.193	-0.135	
					C	0.134	-0.236	-0.150	
					D	0.117	-0.332	-0.203	
					E	0.364	0.577	0.450	*
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
16	1-16	0.397	0.743	0.585	A	0.397	0.743	0.585	*
					B	0.301	-0.338	-0.257	
					C	0.084	-0.465	-0.258	
					D	0.151	-0.225	-0.147	
					E	0.067	-0.343	-0.178	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
17	1-17	0.230	0.818	0.591	A	0.084	-0.341	-0.190	
					B	0.230	0.818	0.591	*
					C	0.268	-0.175	-0.130	
					D	0.318	-0.237	-0.181	
					E	0.100	-0.307	-0.180	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
18	1-18	0.297	0.626	0.474	A	0.285	-0.193	-0.145	
					B	0.134	-0.118	-0.075	
					C	0.218	-0.276	-0.197	
					D	0.297	0.626	0.474	*
					E	0.067	-0.343	-0.178	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	

MicroCAT (tm) Testing System

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file K.Dat   Page 4

		Item Statistics			Alternative Statistics				
Seq. No.	Scale -Item	Prop. Correct	Biser.	Point Biser.	Alt.	Prop. Endorsing	Biser.	Point Biser.	Key
19	1-19	0.632	0.616	0.481	A	0.084	-0.341	-0.190	
					B	0.134	-0.442	-0.280	
					C	0.067	-0.050	-0.026	
					D	0.084	-0.506	-0.281	
					E	0.632	0.616	0.481	*
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
20	1-20	0.280	0.450	0.338	A	0.184	-0.055	-0.037	
					B	0.285	-0.193	-0.145	
					C	0.167	-0.115	-0.077	
					D	0.084	-0.279	-0.155	
					E	0.280	0.450	0.338	*
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
21	1-21	0.331	0.554	0.427	A	0.331	0.554	0.427	*
					B	0.067	-0.441	-0.229	
					C	0.117	-0.283	-0.173	
					D	0.418	-0.111	-0.088	
					E	0.067	-0.343	-0.178	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
22	1-22	0.264	0.712	0.528	A	0.117	-0.315	-0.193	
					B	0.351	-0.211	-0.164	
					C	0.264	0.712	0.528	*
					D	0.117	-0.057	-0.035	
					E	0.151	-0.347	-0.227	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
23	1-23	0.598	0.527	0.415	A	0.067	-0.196	-0.102	
					B	0.598	0.527	0.415	*
					C	0.184	-0.353	-0.242	
					D	0.084	-0.383	-0.212	
					E	0.067	-0.196	-0.102	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	
24	1-24	0.481	0.523	0.417	A	0.184	-0.293	-0.201	
					B	0.100	-0.506	-0.296	
					C	0.100	-0.163	-0.095	
					D	0.481	0.523	0.417	*
					E	0.134	-0.060	-0.038	
					Other	0.000	-9.000	-9.000	

Item and Test Analysis Program -- ITEMAN (tm) Version 3.00

Item analysis for data from file K.Dat Page 5

There were 239 examinees in the data file.

Scale Statistics

Scale:	1
N of Items	24
N of Examinees	239
Mean	9.506
Variance	27.790
Std. Dev.	5.272
Skew	1.362
Kurtosis	1.462
Minimum	2.000
Maximum	24.000
Median	8.000
Alpha	**0.844**
SEM	2.083
Mean P	0.396
Mean Item-Tot.	0.468
Mean Biserial	0.608

EK-10

LİNEER CEBİR TESTİ

Yönerge

1. Bu test 24 maddeden oluşmaktadır.
2. Lütfen Soru kağıdının üzerine herhangi bir işaret koymayın. Yanıtının doğru olduğunu düşündüklerinizi cevaplama kağıdına işaretleyin.
3. Cevaplama Süresi 50 dakikadır.

Sorular

1. $A=(x-1,3y)$ ve $B=(-3x+1,-y-3)$ noktaları için $\mathbf{AB}=(-2,9)$ ise $x+y$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) -2 b) -1 c)0 d)1 e) 2

2. $\mathbf{a}=(-2,4)$ ve $\mathbf{b}=(1,3)$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı kaç birim karedir?

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 24

3. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ vektörleri için $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=0$, $\mathbf{a}=-3\,\mathbf{b}$ ve $\|\mathbf{a}\|=2\|\mathbf{b}\|$ eşitlikleri verildiğine göre $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{c}$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü kaç derecedir? ($\sin 30°=0.5$)

a) 30 b) 45 c) 60 d) 120 e) 150

4. $\mathbf{a}=(1,-2,3)$ vektörünün $\mathbf{b}=(3,-1,0)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünün uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $10\sqrt{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ c) $\sqrt{10}$ d)10 e) $2\sqrt{10}$

5. $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ standart taban vektörlerini göstermek üzere $A=(-1,-2)$, $B=(1,4)$ ve $C=(m+1)\,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ için $\mathbf{AB}\perp\mathbf{AC}$ ise m kaçtır?

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

6. f ve $g:R^2\to R^2$ lineer dönüşümleri $f(x,y)=(x-y,2x+y)$ ve $g(x,y)=(x,-y)$ şeklinde tanımlanıyor. $f-2g$ dönüşümü altındaki <u>görüntüsü</u> $(0,-1)$ olan ikili nedir?

a) (1,1) b) (-1,1) c) (1,0) d) (0,-1) e) (1,-1)

7. $\mathbf{a}=(m+1,-2)$ ve $\mathbf{b}=(m-\frac{n}{2},-1)$ vektörleri lineer bağımlı ise m ve n arasında aşağıdaki bağıntıların hangisi vardır?

a) $m.n=-1$ b) $m+n=1$ c) $m-n=1$ d) $m+n=-1$ e) $m.n=1$

8. $f:R^3 \to R^2$ bir lineer dönüşümdür. $\mathbf{e}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0)$ ve $\mathbf{e}_3=(0,0,1)$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)=(-1,1)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)=(1,2)$ ve $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)=(-2,4)$ ise $\mathbf{j}=(1,1,1)$ vektörünün görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

a) (2,7) b) (-2,7) c) (7,2) d) (-7,2) e) (-2,-7)

9. $f:R^2 \to R^2$ lineer dönüşümü $f(x,y)=(x-y,-2x)$ şeklinde tanımlanıyor. Bu dönüşümle $x+y+1=0$ doğrusunun görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $x+1=0$ b) $y+1=0$ c) $x+y-1=0$ d) $x-y+1=0$ e) $x+y+1=0$

10. f ve $g:R^2 \to R^2$ dönüşümleri $f(x,y)=(x-2,1-y)$ ve $g(x,y)=(x+1,-y)$ şeklinde tanımlanıyor. fog dönüşümü altındaki $x^2+y^2-8=0$ çemberinin görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $x^2+y^2+x-y-3=0$ b) $x^2+y^2+2x-2y+6=0$ c) $x^2+y^2-2x+2y+6=0$

d) $x^2+y^2+2x-2y-6=0$ e) $x^2+y^2+3x-3y-6=0$

11. $f:R^2 \to R^2$ dönüşümü $f(x,y)=(2x-y-1,-x+y+1)$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre $f^{-1}(0)$ uzayı aşağıdakilerden hangisidir?

a) {(-3,2)} b) {(2,-3)} c) {(1,1)} d) {(3,1)} e) {(2,3)}

12. R^3 uzayının bir bazı $\mathbf{a}_1=(1,-1,0)$, $\mathbf{a}_2=(0,1,1)$ ve $\mathbf{a}_3=(0,0,1)$ olmak üzere, $\mathbf{u}=(1,2,3)$ vektörünün bu baza göre koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

a) (-2,-1,2) b) (2,2,-1) c) (1,2,-2) d) (2,1,2) e) (-1,2,2)

13. Aşağıdaki kümelerden hangisi R^2 vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır?

a) $\{t(1,-1):t\in R\}$ b) $\{(t+4,t-2):t\in R\}$ c) $\{(t-3,1):t\in R\}$ d) $\{t(1,1,0):t\in R\}$ e) $\{(2-t,2+t):t\in R\}$

14. $\mathbf{a}=(1,0,1)$, $\mathbf{b}=(-1,2,2)$ ve $\mathbf{c}=(0,-2,-1)$ vektörleri üzerine kurulan paralelyüzlünün hacminin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 9

15. $f: R^2 \to R^2$ **lineer** dönüşümü $f(x,y) = (2x - my, mx - 8y)$ şeklinde tanımlanıyor. Bu lineer dönüşümün sıfırlılık uzayı $f^{-1}\{0\} = \{(x,y) : x, y \in R\}$ ise m reel sayısının bir değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

16. $f: R^2 \to R^2$ için bir f dönüşümü $f(x,y) = (x+2, -y+1)$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre $f((-1,1)) + f((1,-2))$ vektörünün uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

a) 5 b) $\sqrt{5}$ c) 3 d) $\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

17. Aşağıdakilerden hangisi bir lineer dönüşümdür?

a) $f: R^3 \to R^2$, $f(x,y,z) = (x-1, y)$ b) $f: R^2 \to R^3$, $f(x,y) = (x, y, x+y)$

c) $f: R^2 \to R^2$, $f(x,y) = (x-y, y+5)$ d) $f: R^3 \to R^3$, $f(x,y,z) = (x, y, z-3)$

e) $f: R^3 \to R^2$, $f(x,y,z) = (x+y, z+1)$

18. U bir vektör uzayı ve bu uzayın bir bazı $w = sp\left\{ f_1 = (3k-18), f_2 = (-\frac{1}{2}, 3) \right\}$ olmak üzere; $boyU > 1$ ise k aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

19. $A = (1,-2,3)$ noktasından geçen ve $\mathbf{b} = (-1,0,3)$ vektörüne paralel olan doğrultunun Kartezyen denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-3}{3} = \lambda$ b) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+3}{3} = \lambda$ c) $x+1 = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-1}{3} = \lambda$

d) $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z+1}{-3} = \lambda$ e) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-3}{3} = \lambda$

20. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 5\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ parametrik denklemleriyle verilen doğrunun geçtiği sabit nokta aşağıdakilerden hangisidir?

a) (0,-5,-1) b) (2,3,-1) c) (2,1,3) d) (3,-1,2) e) (2,3,1)

21. $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{-z}{4}=\lambda$ doğrusunun doğrultman vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\mathbf{u}=(-3,5,-4)$ b) $\mathbf{u}=(2,5,1)$ c) $\mathbf{u}=(-2,1,0)$ d) $\mathbf{u}=(-3,5,4)$ e) $\mathbf{u}=(3,5,-4)$

22. $d_1 : x-1=\dfrac{y}{0}=-z=\lambda$ ve $d_2 : \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=2 \end{cases}$ doğruları veriliyor. Bu doğrular arasındaki açının ölçüsü kaç derecedir? ($\sin 30° = 0.5$)

a) 30 b) 45 c) 60 d) 90 e) 120

23. $A=(-1,0,1)$ noktasından geçen ve $\mathbf{n}=(1,-1,2)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $x+y+z-1=0$ b) $x-y+2z-1=0$ c) $x+y+2z+1=0$ d) $x+y-2z-1=0$
e) $x-y-2z-1=0$

24. Denklemi $3x-5y-z+4=0$ olan düzlemin normal vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

a) (-3,5,-1) b) (3,-5,4) c) (3,5,1) d) (3,-5,-1) e) (-3,-5,1)

EK-11

Açık Uçlu Problemler

1. Glasgow şehrindeki tüm otobanlar doğru şeklinde inşa edilmiştir. Bir sürücü, eğimli ve düz doğru şeklinde olan bir otobanda hız limitini a km/h aşarak sabit hızla ilerlemektedir. Görevli trafik polisi, sürücünün $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü yönünde ilerlediğini fark ediyor. Fakat polis memurunun doğru şeklindeki yolun denklemini bilgisayara girerek genel merkeze bildirmesi gerekmektedir.

a. Polis memuru nasıl bir yol izlemelidir? Örnekleyiniz.

b. Sürücünün, herhangi bir andaki genel merkeze (orijine) olan uzaklığı hesaplanabilir mi?

2. Bir inşaat mühendisi, bir düzlem üzerine kuracağı apartmanla ilgili sağlama yapmak istiyor (apartmanın düzleme dik oturması gerekmektedir). Lineer cebir dersini almış olan sizin yardımınıza başvuruyor.

a. Bu durumda sağlama yapması için neler gereklidir?

b. Hangi bağıntı yada metodu kullanırdınız? Şekil çiziniz, açıklayınız.

3. Bir mimar camdan paralelyüzlü şeklinde farklı bir akvaryum tasarlamak istiyor. Mimarın çalışması için rastgele üç vektör yeterli midir? Cevabınızı gerekçesiyle açıklayıp, örnek veriniz.

4. Radar, genel olarak havada hareket eden araçların koordinatlarını belirleyen bilgisayara verilen addır. Bir hava kontrol merkezinde en az üç tane bulunur. Bir bilgisayarın başında olan görevli, ekranındaki cisimlerin diğerinden farklı göründüğünü fark ediyor. Sorunu anlamaya çalışan görevli, gerekli incelemeleri yaptıktan sonra problemin, bilgisayarı programlayan teknisyenin radar için Öklid uzayının standart tabanını (bazını) girerken hata yapmasından kaynaklandığını fark etmiştir.

a. Hatalı olarak çalışan bilgisayardaki cisimlerin gerçek konumları bulunabilir mi?

b. Örnekleyiniz.

5. GS şehrindeki FB adlı bir cezaevinden 2 suçlu firar etmiştir. Suçlular, yakalanmamak için iki farklı yöne doğru hareket etmişler ve güvenlik görevlileri farklı yönde izler bulmuşlardır. Suçluların cezaevinde kaldıkları yeri inceleyen güvenlik görevlileri üzerinde

$$F : IR^3 \to IR^3$$

$$F(*****,*****,*****) = 0$$

yazılı olan bir kağıt parçası bulmuşlardır. Firari suçlular, parantezin içindeki ifadeleri karalamışlardır. Suçluların farklı yönlere gittiklerini bilen güvenlik görevlileri, bu yüzden bu ifadenin bir şifre veya bir buluşma noktası olabileceğini düşünmektedirler. Lineer cebir bilen sizden yardım istemektedir.

a. Bu ifade ne olabilir?

b. Bir buluşma noktası olabilir mi?

EK-12

DERS PLANI-1

DERS VE KONU İLE İLGİLİ BİLGİLER	
Dersin Adı	Lineer Cebir I
Sınıf	İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2
Konu	İç Çarpım Fonksiyonu, İç Çarpım Uzayı
Sınıf	3 Ders Saati (45dk+45dk+45dk)
Öğrenci Kazanımları	• Bir vektör uzayı üzerinde iç çarpım fonksiyonunu tanımlar, farklı ve soyut iç çarpım uzaylarında işlem yapar. Geometrik vektörler üzerinde tanımlanmış iç çarpım uzaylarında, çemberi, küreyi oluşturur ve grafiklerini çizer. • İç çarpım fonksiyonunu kullanarak bir vektörün uzunluğunu (normunu) ve buna bağlı olarak iki vektör arasındaki uzaklığı hesaplar. İç çarpım fonksiyonunu kullanarak iki vektör arasındaki açıyı hesaplar.
1)Ünite Kavramları ve Sembolleri 2)Davranış Örüntüsü	• Lorentz Uzayı, Galileo Geometrisi, Euclidean İç Çarpımı • İç Çarpım Fonksiyonunun farklılığı
Öğretme-Öğrenme-Yöntem ve Teknikleri	Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi
Kullanılan Eğitim Teknolojileri-Araç, Gereçler ve Kaynakça 1)Öğretmen 2)Öğrenci	• Bilgisayar • Projeksiyon cihazı • Mathematica Paket programı, Powerpoint Sunumu, İzometrik Kağıt.
Öğretme-Öğrenme Etkinlikleri:	

Görüşme	• Günlük hayattaki özel bir eğrinin karakterizasyonu sayesinde meydana çıkan DNA kodumuzun hatırlatılması. • Lineer cebir konularının tarihçesi, vida ve bazı özel helislerin yapılarının tanıtılması, radyo dalgalarının ve telefonların çalışma prensipleri ile dersin konuları arasındaki ilişkinin sunulması.
Yöneltme	• Ders sunumu Powerpoint ve tahta ile yapılacaktır. EK-13 • Sunumun ardından Mathematica uygulaması yapılacaktır. EK-14
Netleştirme	Bu süreçte aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilir: - Yeni öğrendikleriniz hakkında ne söyleyebilirsiniz? - Vektör uzayları üzerinden tanımlanan her fonksiyon bir iç çarpım mıdır? - İç çarpım fonksiyonu tanımlarken nelere dikkat edilir? - Farklı iç çarpım fonksiyonu tanımlamak neyi ve neleri değiştirir? - Belli bir iç çarpım uzayındaki üçgen, başka bir iç çarpım uzayında da bir üçgen midir?
Serbest Çalışma	EK-15 - İzometrik çizimler - Soyut problemler
Bütünleme	- Öğrencilere yeni kavramlar tamamen tekrarlanır. - Uzaydaki uzaklık ve metrik kavramlarının iç çarpım fonksiyonuna bağlı olarak değiştiği tekrarlanır. - Bir sonraki ders olan ortogonal kümelere hazırlık için iç çarpım ile diklik arasında bir ilişki olup olmadığı sorulur. - Soyut vektör uzaylarından ders içi etkinlikte geçen; [0,1] kapalı aralığında tanımlı sürekli fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayı üzerinden de iç çarpım fonksiyonu tanımlanabileceği tekrarlanır ve ödevler verilir.

EK-13

Teknoloji Destekli
Lineer Cebir Öğretimi

Ders İçeriği

- Niye Lineer Cebir Öğreniyoruz? : Kısa bir "Tarihsel Bilgi"
- Notasyonlar
- İç Çarpım Fonksiyonu
- Bir Vektörün Normu
- N-boyutlu uzayda açı kavramı
- Ortogonal ve Ortonormal Vektör Sistemleri
- Afin Uzay
- İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Kartezyen, Kartezyen ve Kartezyen

- Kartezyen Düzlem
- Kartezyen Koordinatlar
- Kartezyen Çarpım (Ref: Genel Matematik ve Soyut Matematik)

Nedir bu Kartezyen? ☺

- Kartezyen sözcüğü, geometrinin büyük adlarından Fransız matematikçi ve filozof Rene Descartes'ın Latince adı olan **Renatius Cartesius'**dan gelir.

Çalışmalarda grafik neredeyse hiç yok…
Sadece denklemler var:

$$3x^2 + y^2 + 3xy + 9 = 0$$

gibi

Rene Descartes 1596-1650

Kartezyen çarpımla sıralı ikilileri oluşturdu, bir x değerine karşılık gelen y değerlerini birbirine dik kesişen doğru üzerinde göstererek Analitik Düzlem'i ve Analitik Geometri'yi oluşturdu.

Eğik Koordinat Sistemleri
ve
Leonard Euler 1707-1783

x ve y doğrularının dik kesişmedikleri durumun da var olabileceği fark ederek iç çarpım fonksiyonunu tanımladı.

- Tüm 2. derece denklemler (Çemberler, Elipsler, Paraboller, Hiperboller,….) çalışıldı.
- Fakat, İçinde yaşadığımız uzay **3** boyutluydu…

???

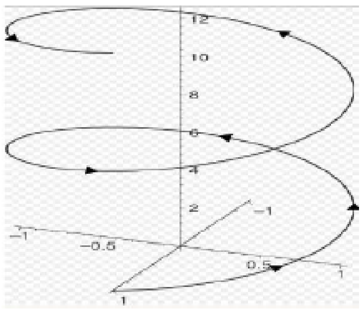
Elimizde 2 boyutlu bir uzay vardı…

Professor Josiah Willard Gibbs

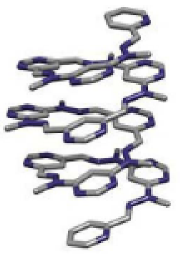
- Josiah Willard Gibbs (1839-1903), vektörel çarpımı ilk olarak tanımladı. İki boyutlu uzayı kullanarak 3 boyutlu uzaya geçmemizi sağladı.

Peki bu üstteki cümle teknolojide ne gibi değişmelere sebep oldu?

- Radyo dalgalarının hareketleri modellendi.
- Eğriler ve Yüzeyler Teorisi hızla gelişti.
- Dünyanın hareketi, yörüngesi ve uydular eğrilerle modellenip, uzayla ilgili çalışmalar arttı.
- Otoparklar, binalar helis eğrisi kullanılarak modellendi.



Ve 1950'de Watson ve Crick keşfediyorlar ki, DNA'mız çift sarmallı bir helisten oluşuyor. DNA kodlarımız ise helisin eğriliğe bağlı olarak değişiyor.



- Ve Özel bir helis olan Vida:
- Teknolojideki en önemli gelişmenin sahibiyle tanışın…

…

Notasyonlar

- Uzaydaki noktaları büyük harfle göstereceğiz.

$$P = (P_1, P_2)$$

- Geometrik vektörleri ise küçük harfle ve üzerinde vektör işaretiyle gösteriyoruz.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$$

- Soyut vektör uzaylarının elemanlarını ise kalın punto ile göstereceğiz. Örneğin, V polinomlar vektör uzayının bir elemanını aşağıdaki gibi göstereceğiz.

$$\mathbf{u} = x$$

Not: Bazı kaynaklarda kolaylık olması bakımından, vektörlerin tümü küçük harflerle, üzerinde vektör işareti olmadan kalın puntoda gösterilir.

- Çalıştığımız uzayın yapısı gereği, her bir noktaya bir vektör karşılık gelirken, her bir vektöre bir nokta karşılık gelir. Dolayısıyla P noktasına karşılık gelen vektör:

$$\overrightarrow{OP} = (P_1, P_2)$$

Noktalar ve (Geometrik) Vektör

- Verilen iki nokta

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

$$B = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

olsun. Bunlarla

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$$

şeklinde oluşturulur.

- Çalıştığımız uzayları ifade ederken:

$$IR, IR^2, IR^3, ..., IR^n$$

birini kullanırız. Niye IR? ☺

Not: Bazı kaynaklarda ise E harfi kullanılır. Bu standart Euclidean iç çarpımıyla donatılmış demektir. İleride, tekrar hatırlatılacaktır.

İç Çarpım Fonksiyonu

- Tanım: V reel bir vektör uzayı olmak üzere, kullanacağımız notasyonlar:

$$\forall\, u, v \in \mathrm{V}$$

$$<,>: V \times V \to V$$

Tanım: V reel bir vektör uzayı olmak üzere, $<,>: V \times V \to V$ fonksiyonu eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, V üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur denir:

$\forall u, v \in V$ olmak üzere;

i) $< u, v > = < v, u >$ Simetri Özelliği

ii) $\forall \lambda \in IR$ için

$< \lambda u, v > = \lambda < u, v >$
$< u, \lambda v > = \lambda < u, v >$ Bilineerlik Özelliği

iii) $< u, u > > 0$ yada $< u, u > = 0$ iken ancak $u = 0$ oluyorsa (Pozitif Definit Özelliği)

- Not: Tanımlanan iç çarpım fonksiyonuyla birleşen uzaya "İç Çarpım Uzayı" denir.

Standart Euclidean İç Çarpımı

$\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektörleri için:

$<,>: IR^n \times IR^n \to IR$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \to < \vec{x}, \vec{y} > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Şeklinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonuna "Standart Öklit İç Çarpım Fonksiyonu" denir.

Koşulları Kontrol Edelim

i) $\vec{x}, \vec{y} \in IR^n$ için:

$$< \vec{x}, \vec{y} > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$
$$= y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots + y_n x_n$$
$$= < \vec{y}, \vec{x} >$$

Simetri Özelliği sağlanıyor ☺

ii) $\lambda \in IR$ için

$$< \lambda \vec{x}, \vec{y} > = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 + \ldots + \lambda x_n y_n$$
$$= \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)$$
$$= \lambda < \vec{x}, \vec{y} >$$

Bilineerlik Özelliği sağlanıyor ☺

iii)

$$< \vec{x}, \vec{x} > = x_1 x_1 + x_2 x_2 + \ldots + x_n x_n$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 0$$

Pozitif Tanımlılığı sağlıyor ☺

Not: Bundan sonra iki vektörün iç çarpımı denildiğinde <,> ifadesi aklımıza gelecektir.

Örnek

$\vec{u} = (1,2,-1,3)$ ve $\vec{v} = (-2,0,1,2) \in IR^4$ vektörleri için standart Euclidean iç çarpımını bulunuz.

$$<\vec{u},\vec{v}> = 1.(-2) + 2.0 + (-1).1 + 3.2 = 3$$

Lorentz İç Çarpımı

$\forall\, \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektörleri için:
$<,>: IR^n \times IR^n \to IR$

$$(\vec{x},\vec{y}) \to <\vec{x},\vec{y}> = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} x_iy_i - x_ny_n$$

Şeklinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonuna Pozitif Definit olmayan "Lorentz İç Çarpım Fonksiyonu" denir.

Özellikler Sağlanıyor mu?

i) $\vec{x},\vec{y} \in IR^n$ için:

$$\begin{aligned} <\vec{x},\vec{y}> &= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_{n-1}x_{n-1} - y_nx_n \\ &= <\vec{y},\vec{x}> \end{aligned}$$

ii) $\lambda \in IR$ için

$$\begin{aligned} <\lambda\vec{x},\vec{y}> &= \lambda x_1y_1 + \lambda x_2y_2 + \ldots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n \\ &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n) \\ &= \lambda <\vec{x},\vec{y}> \end{aligned}$$

Not: Lorentz iç çarpımı çoğu zaman $<,>_L$ ile gösterilir.

$$<\vec{x},\vec{x}> = x_1x_1 + x_2x_2 + \ldots + x_{n-1}x_{n-1} - x_nx_n$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{array}$$

Bu farklılıktan dolayı Pozitif Definit olmayan İç Çarpım Fonksiyonudur diyoruz.

Sizde Tanımlayabilirsiniz ☺

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in IR^4$ Vektörleri için:

$$<,>: IR^4 \times IR^4 \to IR$$
$$(\vec{x},\vec{y}) \to <\vec{x},\vec{y}> = 3x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Pozitif Tanımlı İç Çarpım Fonksiyonudur.

Not: IR Reel Vektör Uzayı üzerinde tanımlı olan iç çarpım Fonksiyonlarına genel olarak Euclidean iç çarpımı denir (Standart olanın farkını unutmayın !). Yukarıdaki örnek de Euclidean İç Çarpımıdır fakat standart değildir.

Örnek 2

$$(\vec{x},\vec{y}) \to <\vec{x},\vec{y}> = 3x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + 8x_4y_4$$

Pozitif Tanımlı olmayan bir İç Çarpım Fonksiyonudur.

Bir Vektörün Normu, Uzunluğu, Şiddeti

Bir Vektörün Normu (Uzunluğu, Şiddeti)

V bir iç çarpım uzayı olsun;
$x \in V$ olmak üzere, $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlanır.

Dolayısıyla

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

yazılabilir.

Not: Uzunluk kavramı hiçbir zaman negatif olamayacağı için Lorentz iç çarpımına göre norm alınırken karekök içine mutlak değer konulur.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} \text{ gibi.}$$

Örnekler

$\vec{x} = (1,2,3) \in IR^3$ vektörünün normunu Standart Euclidean iç çarpımına göre:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{1.1 + 2.2 + 3.3} = \sqrt{14} \text{ br.}$$

Lorentz iç çarpımına göre:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} = \sqrt{|1.1 + 2.2 - 3.3|} = \sqrt{|-4|} = 2 \text{ br.}$$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in IR^3$ Vektörleri için:
$<,>: IR^3 \times IR^3 \to IR$
$(\vec{u}, \vec{y}) \to <\vec{u}, \vec{y}> = 3u_1y_1 + 5u_2y_2 + u_3y_3$
İç çarpımına göre $\vec{x}$ vektörünün normu:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{3(1.1) + 5(2.2) + 3.3} = \sqrt{32} \text{ br.}$$

Galileo İç Çarpımı

Galileo iç çarpımı 2 boyutlu reel vektör uzayı üzerinde:
$\vec{x} = (x_1, x_2)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2) \in IR^2$ Vektörleri için:
$<,>: IR^2 \times IR^2 \to IR$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \to <\vec{x}, \vec{y}> = x_1y_1$$

3 boyutlu uzayda ise

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in IR^3$ Vektörleri için:
$<,>: IR^3 \times IR^3 \to IR$
$(\vec{x}, \vec{y}) \to <\vec{x}, \vec{y}> = x_1y_1 + x_2y_2$

$\vec{x} = (1,2,3)$ vektörünün Galileo iç çarpımına göre uzunluğu:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{1.1 + 2.2} = \sqrt{5} \text{ br.}$$

Sonuç:

- Uzunluğun değiştiğini fark ettiniz mi?

- ???????

İç Çarpım Uzaylarında Çember

Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların kümesine "Çember" denir.

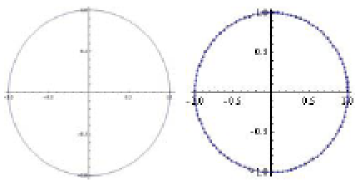
Uzaklık kavramı iç çarpım fonksiyonuna bağlı olarak değiştiğine göre farklı iç çarpım uzaylarında çember denklemlerini araştıralım.

Standart Euclidean iç çarpımına göre:

$\vec{x} = (x_1, x_2) \in IR^2$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r = sabit$ alırsak

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2$$



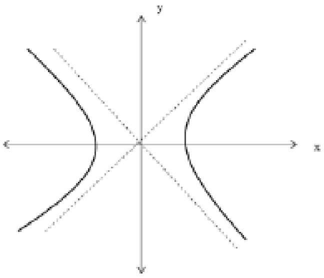
Lorentz İç Çarpımına Göre

Lorentz iç çarpımına göre:

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 - x_2^2} = r = sabit$

Sonuçta denklemini $x_1^2 - x_2^2 = r^2$ bulunur ki bu da ikizkenar hiperbol denklemidir.

Lorentz Çemberi

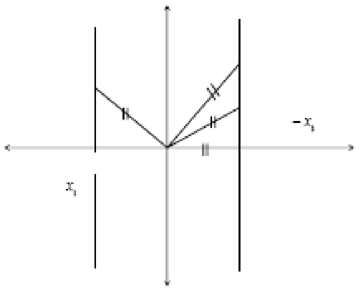


Galileo İç Çarpımına Göre

Galileo iç Çarpımına göre:

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2} = r = sabit$

$\pm x_1 = r$ doğruları Galileo çemberi olur.



$\cos g\psi = 1$

Özel bir iç çarpıma göre:

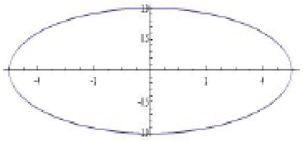
$\vec{x} = (x_1, x_2)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2) \in IR^2$ Vektörleri için:
$<,>: IR^2 \times IR^2 \to IR$
$(\vec{x}, \vec{y}) \to <\vec{x}, \vec{y}> = 5x_1y_1 + x_2y_2$

Şeklinde bir iç çarpımı tanımlayıp, bu iç çarpım uzayındaki çemberi oluşturalım.

Denklemi
$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{5x_1^2 + x_2^2} = r = sabit$

Bu bir elips demektir.

Özel Çember ☺



3 Boyutlu Haller

3 boyutlu uzayda, sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların kümesine "Küre" denir.

Standart Euclidean iç çarpımına göre küre denklemi:

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in IR^3$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = r = sabit$ alırsak

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ elde edilir.

Lorentz İç Çarpımına Göre:

Lorentz iç çarpımına göre:

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2} = r = sabit$

Sonuçta denklemi $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = r^2$.

Galileo İç Çarpımına Göre

Galileo iç Çarpımına göre:

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r = sabit$

$x_1^2 + x_2^2 = r^2$ Galileo küresi olur.

Farklı bir İç Çarpım ☺

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ ve $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in IR^3$ Vektörleri için:
$<,>: IR^3\times IR^3\to IR$
$(\vec{x},\vec{y})\to<\vec{x},\vec{y}>=5x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

Şeklinde bir iç çarpımı tanımlayıp, bu iç çarpım uzayındaki çemberi oluşturalım.

Denklemi
$\|\vec{x}\|=\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}=\sqrt{5x_1^2+x_2^2+x_3^2}=r=sabit$

Teorem

Teorem: V bir iç çarpım uzayı ve $x,y\in V$ olsun. x ve y vektörleri arasındaki açı θ ise,

$$<x,y>=\|x\|\|y\|\cos\theta$$

dır.

Sonuç: $x,y\in V$ olmak üzere, bu iki vektör arasındaki açının kosinüsü

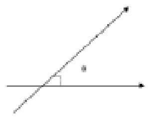
$$\cos\theta=\frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}$$

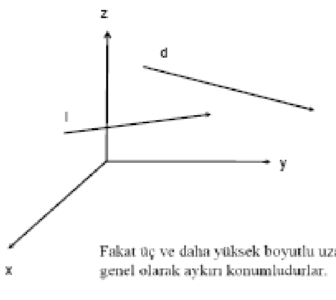
şeklinde tanımlanır.

Not: Yukarıdaki vektörlerin üzerinde işaret olmadığına dikkat ediniz. Bu sonuç herhangi bir reel iç çarpım uzayı için geçerlidir.

IR^2' de Açı Kavramı:

Düzlemde paralel olmayan iki doğru mutlaka kesişir. Dolayısıyla da bir açı oluştururlar.





Fakat üç ve daha yüksek boyutlu uzayda doğrular genel olarak aykırı konumludurlar.

Teoremle ilgili Uygulamalar

Sonuç: $\vec{x},\vec{y}\in IR^n$ olmak üzere, bu iki vektör arasındaki açının kosinüsü

$$\cos\theta=\frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$$

$\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ve $\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ vektörleri için:
Eğer $\theta=\frac{\pi}{2}$ ise $\cos\theta=0$ olacağından

$$<\vec{x},\vec{y}>=0.$$

Bu da

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=0.$$

Not:

Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise IR^2'de, vektörler (doğrular) diktir.

IR^3 ve üst boyutlu uzaylarda ise dik konumludur diyoruz.

Örnekler

IR^3 ve IR^4 uzaylarında birbirine dik ikişer vektör bulun.

$\vec{x} = (1,2,3,4)$ ve $\vec{y} = (a,-1,2,0) \in IR^4$ iki vektör alırız.

$< \vec{x}, \vec{y} >= 1.a + 2.(-1) + 3.2 + 4.0 = 0$

Dolayısıyla $a = -4$ bulunur.

$w = \{\vec{x}, \vec{y}\}$ kümesine IR^4'ün dik konumlu bir vektör kümesidir denir.

Örnek 2

IR^4 uzayında $\vec{x} = (3,2,1,-1)$ ve $\vec{y} = (2,-1,1,0)$ vektörleri arasındaki açıyı

a) Standart Euclidean iç çarpımına;
b) Lorentz iç çarpımına göre hesaplayınız.

EK-14

Mathematica ' da vektör girişi { , , } ile yapılır. Örneğin

```
u = {x1, y1, z1}
```

$\{x_1, y_1, z_1\}$

İki vektörün iç çarpımını hesaplamak için vektörler arasına "." konulur.

```
v = {x2, y2, z2}
```

$\{x_2, y_2, z_2\}$

```
u.v
```

$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

Örnek :

```
u = {1, 2, -1}
```

{1, 2, -1}

```
v = {-2, 1, 3}
```

{-2, 1, 3}

```
u.v
```

-3

Bir vektörün normu Norm[] komutu ile hesaplanır. Örneğin;

```
Norm[u]
```

$\sqrt{6}$

İki Vektör arasındaki açı, VectorAngle[,] komutu ile hesaplanır.

```
VectorAngle[u, v]
```

$\mathrm{ArcCos}\left[-\frac{\sqrt{\frac{3}{7}}}{2}\right]$

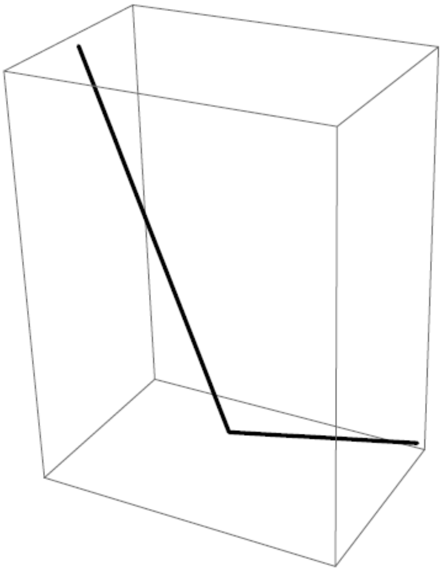
Grafiksel olarak bu açıyı göstermek için,
öncelikle u ve v vektörlerinin üzerinde olduğu doğruları çizmeliyiz. Mathematica ' da iki noktadan geçen doğru Line[,] komutu ile hesaplanır. Bunun yanında, grafiğini çizmek için önüne Graphics3D eklenmelidir. Örneğin;

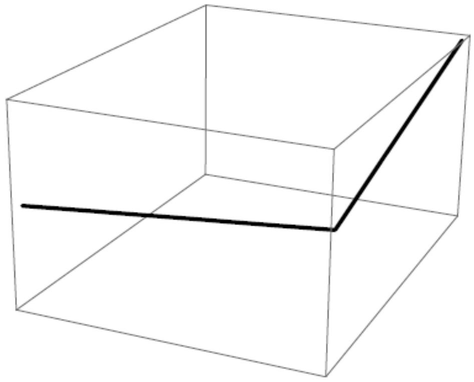
```
d = Line[{0, 0, 0}, u]
l = Line[{0, 0, 0}, v]
```

```
Line[{0, 0, 0}, {1, 2, -1}]
```

```
Line[{0, 0, 0}, {-2, 1, 3}]
```

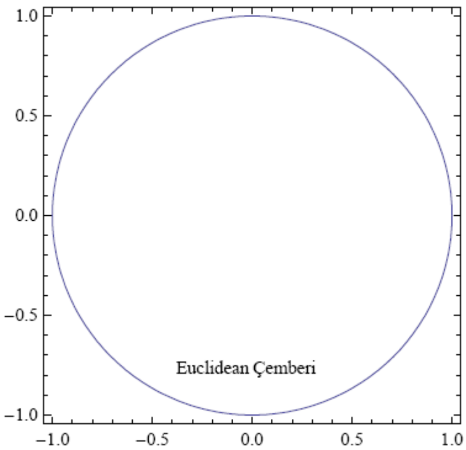
```
Graphics3D[{Thick, Line[{{0, 0, 0}, {1, 2, -1}}], Line[{{0, 0, 0}, {-2, 1, 3}}]}]
```





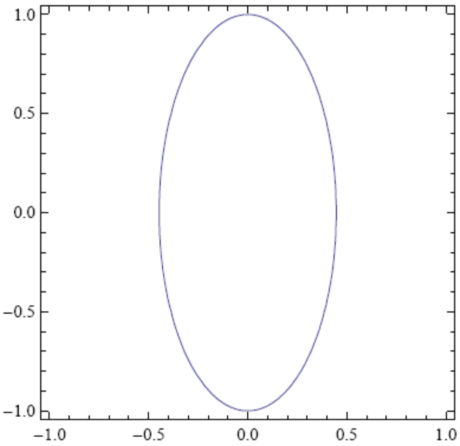
Standart Euclidean iç çarpımı ile donatılmış bir iç çarpım uzayında, bir vektörün normunu kullanarak merkezil çemberin denklemini $x^2 + y^2 = 1$ olarak bulmuştuk. Mathematica ' da düzlemsel eğriler ContourPlot[] komutu ile çizilir. Verilerin yazılmasına ve sınırların yazılışına dikkat ediniz.

```
ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
```



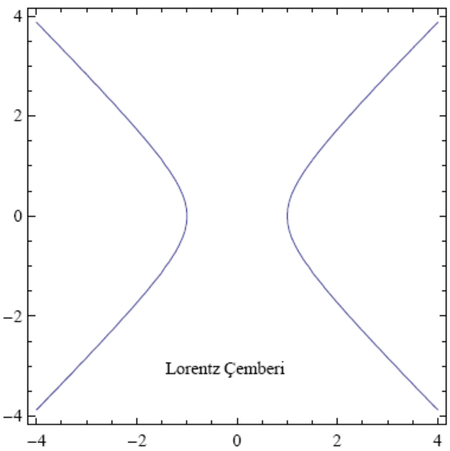
Özel iç çarpıma göre $5x^2 + y^2 = 1$ olarak bulunmuştu. Grafiği;

```
ContourPlot[5 x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```



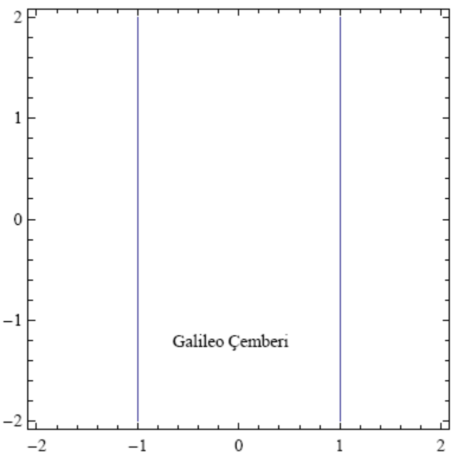
Lorentz iç çarpımı ile donatıldığında çemberin denklemi $x^2 - y^2 = 1$ olacağından, grafiği;

```
ContourPlot[x^2 - y^2 == 1, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
```



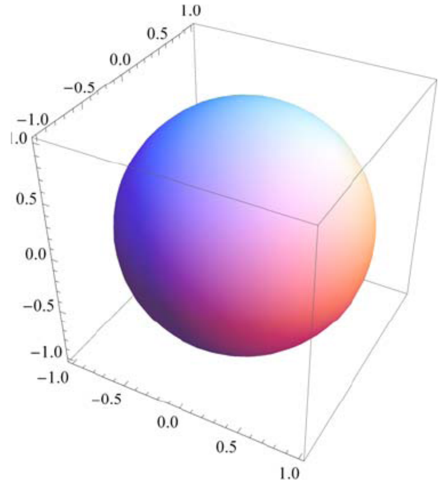
Galileo iç çarpımı ile donatıldığında çemberin denklemi $x^2 = 1$ olacağından, grafiği;

```
ContourPlot[x^2 == 1, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



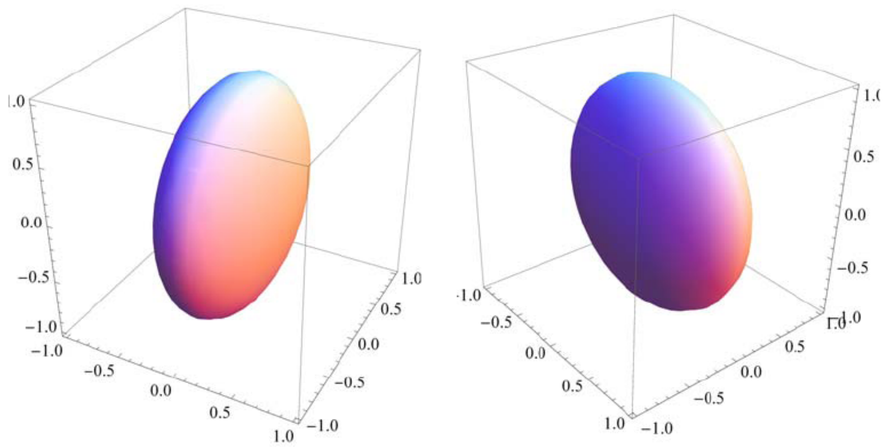
Benzer şekilde bulunan, denklemi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ olan standart Euclidean küresinin grafiği;

```
ContourPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 == 1, {x, -1, 1 }, {y, -1 , 1}, {z, -1, 1}, Mesh → None]
```



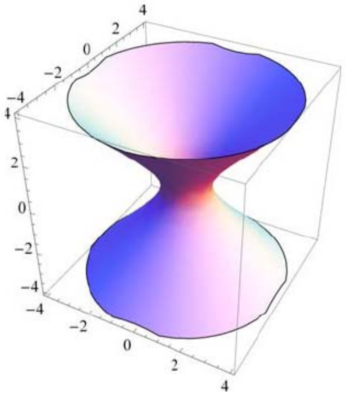
Özel iç çarpıma göre denklemini $5x^2 + y^2 + z^2 = 1$ olarak bulundu, bu yüzeyin grafiği;

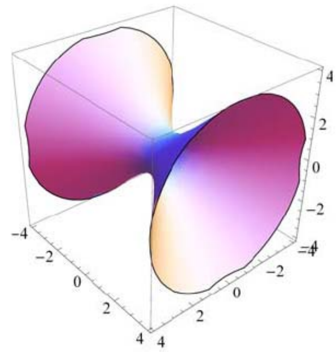
```
ContourPlot3D[5 x^2 + y^2 + z^2 == 1, {x, -1, 1 }, {y, -1 , 1}, {z, -1, 1}, Mesh → None]
```



Pozitif Lorentz küresinin denklemini $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ idi. Bunun grafiği;

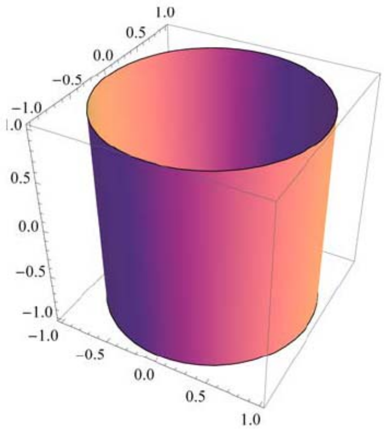
```
ContourPlot3D[x^2 + y^2 - z^2 == 1, {x, -4, 4 }, {y, -4 , 4}, {z, -4, 4}, Mesh → None]
```

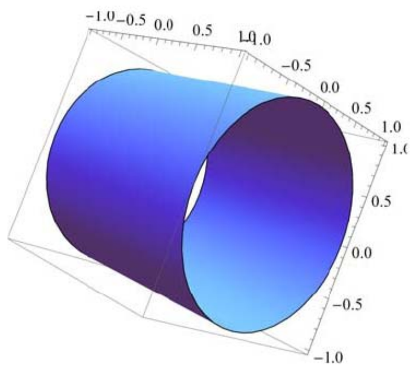




Galileo küresinin denklemini $x^2 + y^2 = 1$ idi. Bunun grafiği;

```
ContourPlot3D[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1 , 1}, {z, -1, 1}, Mesh → None]
```





Denklemde z olmamasına rağmen grafiğin üç boyutlu oluşuna dikkat ediniz.

EK-15

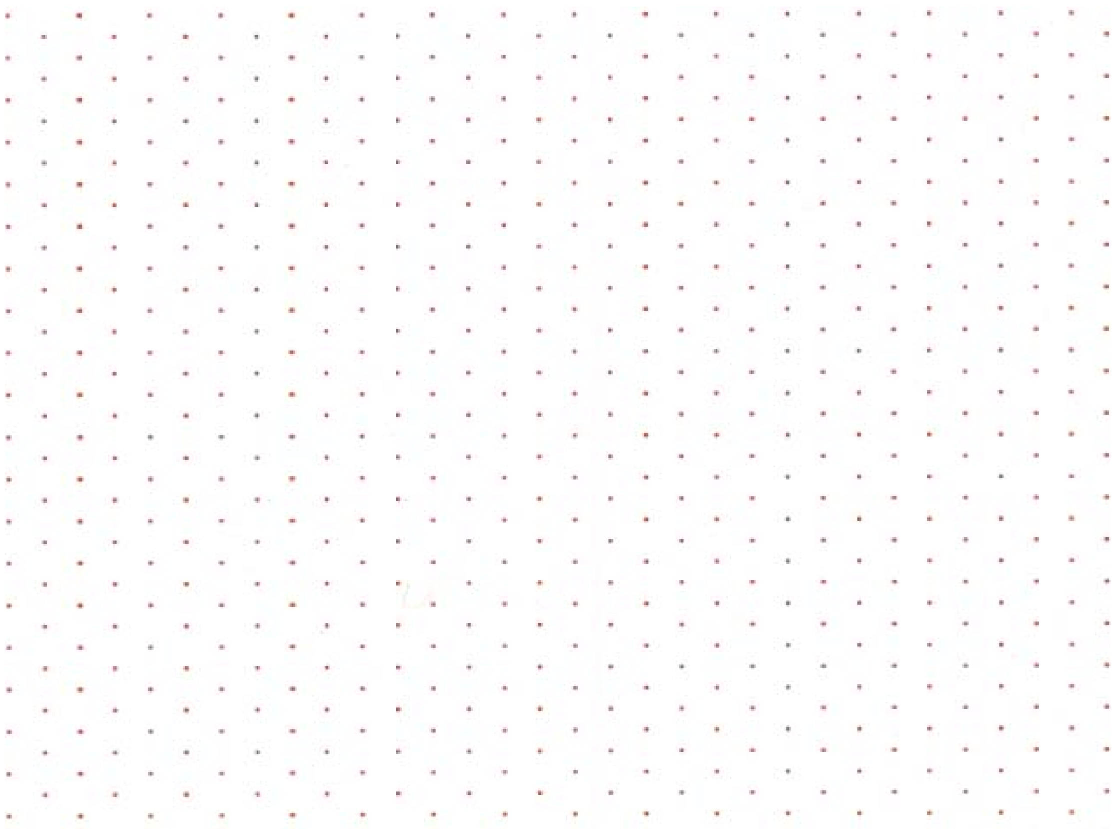
Problemler

1. Aşağıdaki izometrik bölge üzerinde x=-1, y=2 ve z=5 düzlemlerini çiziniz.
2. [0,1] birim aralığı üzerinde tanımlı bütün reel değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayı V olsun. $\forall f, g \in V$ için

$$<,>: V \times V \to V$$
$$(f, g) \to < f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonu mudur?

Bu iç çarpım fonksiyonu üzerinden elde edeceğiniz "dik olma" durumunun geometrik bir anlamı var mıdır?



ÖDEV

1. IR^3 ile birleşen bir iç çarpım fonksiyonu tanımlayınız. Bu uzaydaki birim kürenin denklemini çıkarınız, grafiğini http://wolframalpha.com' da araştırınız ve grafiğini izometrik bölgeye çiziniz.

EK-16

DERS PLANI-2

DERS VE KONU İLE İLGİLİ BİLGİLER	
Dersin Adı	Lineer Cebir I
Sınıf	İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2
Konu	Ortogonal ve Ortonormal sistemler, Vektörel Çarpım.
Sınıf	3 Ders Saati (45dk+45dk+45dk)
Öğrenci Kazanımları	• İç çarpım fonksiyonunu kullanarak soyut ve geometrik ortogonal sistemleri tanımlar. Vektörleri birim haline getirir. • İki vektörün vektörel çarpımını ifade eder, örnekler ve bu kavramdan hareketle, bir paralelkenarın alanını hesaplar. • Kosinüs ve sinüs teoremlerini geometrik vektörleri kullanarak ispatlar.
1)Ünite Kavramları ve Sembolleri 2)Davranış Örüntüsü	• Ortogonal Vektörler, Ortonormal Vektörler • Vektörel Çarpım • Dış Çarpım • Kosinüs ve Sinüs Teoremleri
Öğretme-Öğrenme-Yöntem ve Teknikleri	• Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi
Kullanılan Eğitim Teknolojileri-Araç, Gereçler ve Kaynakça 1)Öğretmen 2)Öğrenci	• Bilgisayar • Projeksiyon cihazı • Mathematica Paket programı, Powerpoint Sunumu, İzometrik Kağıt.
Öğretme-Öğrenme Etkinlikleri:	
Görüşme	• Önceki iki vektörün birbirine dik olma ölçütü hatırlatılarak birbirine dik üç vektör bulunup bulunamayacağı sorulur. • Koordinat sistemlerinin eğik kesişmesiyle bir sistem oluşturup oluşturulamayacağı sorulur. • Günlük hayattan birbirine dik olan üç vektör örneği vermeleri

	istenir. Bilgisayar ekranlarında kullanılan vektörel girdilerin çalışma prensipleri tarif edilir. • Bir dikdörtgenin çevrelediği bölgenin alanının nasıl hesaplandığı sorulur.
Yöneltme	• Ders sunumu Powerpoint ve tahta ile yapılacaktır. EK-17 • Sunumun ardından Mathematica uygulaması yapılacaktır. EK-18
Netleştirme	Bu süreçte aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilir: - Yeni öğrendikleriniz hakkında ne söyleyebilirsiniz? - Eğik koordinat sisteminde geometri yapılabilir mi? Şekiller nasıl olur? - Vektörel çarpımla dış çarpım arasındaki fark nedir? - Birbirine dik olmayan iki vektörü kullanarak bu ikisine aynı anda dik bir vektör bulabilir misiniz? Nasıl? - Vektörel çarpımın sonucu sıfır olabilir mi? Bunun bir geometrik yorumu var mıdır? - Sağ el kuralının anlamı nedir? Örneğin niye sol el kuralı değil?
Serbest Çalışma	EK-19 - İzometrik çizimler - Soyut problemler
Bütünleme	- Öğrencilere yeni kavramlar tamamen tekrarlanır. - Ortogonal ve ortonormal vektör sistemlerinin sadece geometrik vektörlerle sınırlı olmadığı tekrarlanır. Örneğin polinomlar üzerinde tanımlanan iç çarpımın sonucu vs. - İki vektörün vektörel çarpımının geometrik yorumu tekrar açıklanır. - Soyut vektör uzaylarında vektörel çarpım kavramının olup olamayacağı tartışılır. - Son olarak beyin fırtınası yapılmasının ardından ödev verilir.

EK-17

Önceki Derste:

- İç Çarpım Uzayından Hareketle Bazı özel Uzaylar
- Uzaklık Kavramı, Çember ve Küre
- Bir Vektörün Normu
- İki Vektör Arasındaki Açı
- İki Vektörün Dik Olma Şartı

Bu derste:

- Ortogonal ve Ortonormal Vektör Sistemleri
- Afin Çatı
- Standart Euclidean Çatısı
- İki nokta arası uzaklık
- Afin uzayda iki nokta arası uzaklık
- Kosinüs Teoremi
- Vektörel Çarpım

Ortogonal ve Ortonormal Vektör Kümeleri

V herhangi bir K cismi üzerinde tanımlanmış bir iç çarpım uzayı olsun.

$w = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektör kümesini göz önüne alalım.

Eğer, bu kümenin bütün elemanları birbirlerine dik konumlu ise bu w kümesine V vektör uzayının ortogonal bir vektör kümesi;

Aynı zamanda, w kümesinin her bir elemanı aynı zamanda birim vektör ise, w kümesine V vektör uzayının ortonormal bir vektör kümesi adı verilir.

Sözü edilen ortonormal vektör kümesi için

$$< x_i, x_j > = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \quad \text{ise} \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Kronecker Deltası yukarıdaki şekilde tanımlanır.

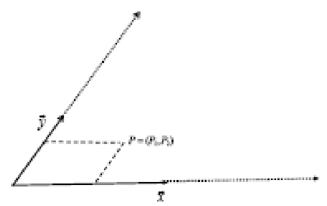
İncelemeler: IR^2

$$w_1 = \{\vec{x} = (2,1), \vec{y} = (-1,3)\}$$

$$w_2 = \{\vec{x} = (3,5), \vec{y} = (2,1)\}$$

Bu iki küme ne ortogonal ne de ortonormal bir kümedir. Bu tarz sistemlere IR^2'de afin (eğik) çatı denir.

Ve bu çatının oluşturduğu koordinat sistemine de eğdik koordinat sistemi denir.



Bu koordinat sisteminde alınan bir $P = (P_1, P_2)$ noktasının, bu çatıya göre koordinatlarına da P noktasının afin koordinatları denir.

$$w_1 = \{\vec{x} = (1,-1), \vec{y} = (-1,1)\}$$

$$w_2 = \{\vec{x} = (3,5), \vec{y} = (-5,3)\}$$

Her iki kümenin elemanları birbirine dik olduklarından bu iki küme IR^2 nin ortogonal iki vektör kümeleridir.

$$w_1 = \left\{\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}$$

$$w_2 = \left\{\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{34}}(3,5), \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{34}}(-5,3)\right\}$$

Bu kümeleri ise her bir elemanı birim vektör olduklarından, IR^2 nin ortonormal vektör kümeleridir.

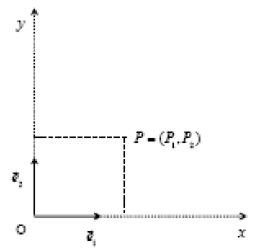
- Bu ortogonal ve ortonormal kümelerin oluşturdukları çatıya **Euclidean çatısı**, bu çatının oluşturduğu koordinat sistemine **Euclidean koordinat sistemi**, herhangi bir P noktasının koordinatlarına da **Euclidean koordinatları** denir.

Bu yazılanların içerisinde bir standart vardır.

$$w = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_1 = (0,1)\}$$

IR^2 nin ortonormal vektör kümesidir. Bu kümeye standart Euclidean çatısı, bu çatının oluşturmuş olduğu sisteme standart Euclidean koordinat sistemi denir.

Standart Euclidean Uzayı

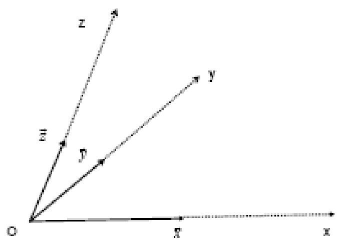


İncelemeler

$$w_1 = \{\vec{x} = (2,1,5), \vec{y} = (-1,3,-7), \vec{z} = (-1,1,1)\}$$

$$w_2 = \{\vec{x} = (3,5,-2), \vec{y} = (2,3,6), \vec{z} = (-2,-1,8)\}$$

Bu iki küme ne ortogonal ne de ortonormal bir kümedir. Bu tarz sistemlere IR^3'de afin (eğik) çatı denir.



Bu çatının oluşturduğu koordinat sistemine, afin koordinat sistemi ve herhangi bir $P = (P_1, P_2, P_3)$ noktasının koordinatlarına P noktasının afin koordinatları denir.

$$w_1 = \{\vec{x} = (0,2,-1), \vec{y} = (0,1,2), \vec{z} = (1,0,0)\}$$

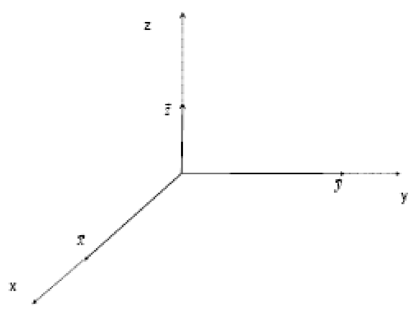
$$w_2 = \{\vec{x} = (1,0,1), \vec{y} = (-1,0,1), \vec{z} = (0,1,0)\}$$

Kümeleri ortogonal kümelerdir, fakat ortonormal değildirler.

$$w_1 = \left\{\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,-1), \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2), \vec{z} = (1,0,0)\right\}$$

$$w_2 = \left\{\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \vec{z} = (0,1,0)\right\}$$

Bu küme ise ortonormal bir kümedir. Böyle ortogonal ve ortonormal kümelerin oluşturduğu çatıya IR^3'ün herhangi bir Euclidean çatısı, bu çatının oluşturmuş olduğu koordinat sistemine de Euclidean koordinat sistemi denir.

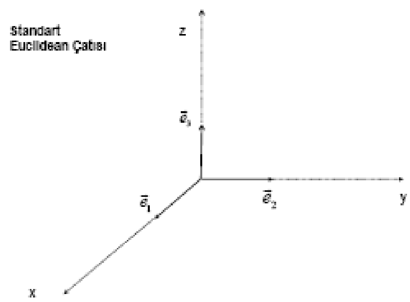


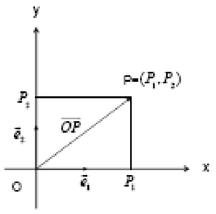
Standart Hal:

$$w = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$$

IR^3 nin ortonormal vektör kümesidir. Bu kümeye standart Euclidean çatısı, bu çatının oluşturmuş

olduğu sisteme standart Euclidean koordinat sistemi denir.





$\overline{OP}=\overline{OP_1}+\overline{P_1P}$

$\overline{OP_2} \,//\, \overline{P_1P}$

Hatta $\overline{OP_2}=\overline{P_1P}$

$\overline{OP}=\overline{OP_1}+\overline{OP_2}$

$\overline{OP_1}=P_1\vec{e}_1$ ve $\overline{OP_2}=P_2\vec{e}_2$

$$\overline{OP}=P_1\vec{e}+P_2\vec{e}_2 = (P_1,P_2)$$

IR^3'te bir $P=(P_1,P_2,P_3)$ noktası için

$$\overrightarrow{OP}=P_1\vec{e}+P_2\vec{e}_2+P_3\vec{e}_3$$

IR^n'te bir $P=(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ noktası için

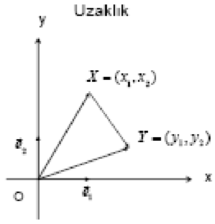
$$\overline{OP}=P_1\vec{e}+P_2\vec{e}_2+\ldots+P_3\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} P_i\vec{e}_i$$

Örnek

$\vec{u}=(1,2,3)\in IR^3$

$$\vec{u}=(1,2,3)=1.\vec{e}_1+2.\vec{e}_2+3.\vec{e}_3 =1.(1,0,0)+2.(0,1,0)+3.(0,0,1)$$

İki Nokta Arası Uzaklık



$\overline{OX}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$ ve $\overline{OY}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2$

$\overline{OX}+\overline{XY}=\overline{OY}$

$$\overline{XY}=\overline{OY}-\overline{OX} =(y_1-x_1)\vec{e}_1+(y_2-x_2)\vec{e}_2$$

$$d(X,Y)=\left\|\overline{XY}\right\|=\sqrt{<\overline{XY},\overline{XY}>}$$

$$=\sqrt{<(y_1-x_1)\vec{e}_1+(y_2-x_2)\vec{e}_2,(y_1-x_1)\vec{e}_1+(y_2-x_2)\vec{e}_2>}$$

$$=\sqrt{(y_1-x_1)^2<\vec{e}_1,\vec{e}_1>+2(y_2-x_2)(y_1-x_1)<\vec{e}_1,\vec{e}_2>+(y_2-x_2)^2<\vec{e}_2,\vec{e}_2>}$$

$\vec{e}_1=(1,0)$ ve $\vec{e}_2=(0,1)$

$<\vec{e}_1,\vec{e}_1>=1.1+0.0=1$

$<\vec{e}_1,\vec{e}_2>=1.0+0.1=0$

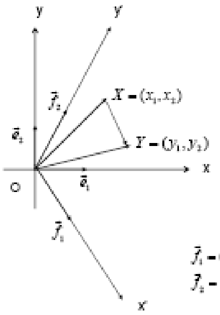
$<\vec{e}_2,\vec{e}_2>=0.0+1.1=1$

$$d(X,Y)=\left|\overline{XY}\right|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$$

Sonuç

IR^n için

$$d(X,Y)=\left|\overline{XY}\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$$



$$\overline{OX}=x_1\vec{f}_1+x_2\vec{f}_2 \text{ ve } \overline{OY}=y_1\vec{f}_1+y_2\vec{f}_2$$

$$\overline{OX}+\overline{XY}=\overline{OY}$$

$$\overline{XY}=\overline{OY}-\overline{OX}$$

$$=(y_1-x_1)\vec{f}_1+(y_2-x_2)\vec{f}_2$$

$\vec{f}_1=(2,-1)$

$\vec{f}_2=(4,3)$

$$d(X,Y)=\left\|\overline{XY}\right\|=\sqrt{<\overline{XY},\overline{XY}>}$$

$$=\sqrt{<(y_1-x_1)\vec{f}_1+(y_2-x_2)\vec{f}_2,(y_1-x_1)\vec{f}_1+(y_2-x_2)\vec{f}_2>}$$

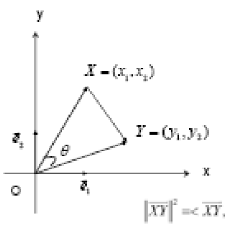
$$=\sqrt{(y_1-x_1)^2<\vec{f}_1,\vec{f}_1>+2(y_2-x_2)(y_1-x_1)<\vec{f}_1,\vec{f}_2>+(y_2-x_2)^2<\vec{f}_2,\vec{f}_2>}$$

$\vec{f}_1=(2,-1)$ $\quad$ $\vec{f}_2=(4,3)$ $\quad$ $<\vec{f}_1,\vec{f}_1>=2.2+(-1)(-1)=5$

$<\vec{f}_1,\vec{f}_2>=2.4+(-1).3=5$ $\quad$ $<\vec{f}_2,\vec{f}_2>=4.4+3.3=25$

$$d(X,Y)=\left\|\overline{XY}\right\|=\sqrt{5(y_1-x_1)^2+10(y_2-x_2)(y_1-x_1)+25(y_2-x_2)^2}$$

Kosinüs Teoremi



$$\overline{OX}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2 \text{ ve } \overline{OY}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2$$

$$\overline{OX}+\overline{XY}=\overline{OY}$$

$$\overline{XY}=\overline{OY}-\overline{OX}$$

$$\left\|\overline{XY}\right\|^2=<\overline{XY},\overline{XY}>=<\overline{OY}-\overline{OX},\overline{OY}-\overline{OX}>$$

$$=<\overline{OX},\overline{OX}>+<\overline{OY},\overline{OY}>-2.<\overline{OX},\overline{OY}>$$

$$=\left\|\overline{OX}\right\|^2+\left\|\overline{OY}\right\|^2-2.\left\|\overline{OX}\right\|\left\|\overline{OY}\right\|\cos\theta$$

Vektörel Çarpım

$\wedge : IR^3\times IR^3\to IR^3$

$\forall \;\; \vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ ve $\forall \;\; \vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ için

$$(\vec{x},\vec{y})\to\vec{x}\wedge\vec{y}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}$$

$$=(x_2y_3-y_2x_3)\vec{e}_1-(x_1y_3-y_1x_3)\vec{e}_2+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{e}_3$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona IR^3'te iki vektörün vektörel çarpımı denir.

Buradaki $\vec{e}_i$'ler standart Euclidean çatısının elemanlarıdır.

Dış Çarpım:

$\wedge : IR^n\times IR^n\times \ldots IR^n\to IR^n$

$\forall \;\; \vec{x}_1=(x_{11},x_{12},\ldots,x_{1n})$

$\vec{x}_2=(x_{21},x_{22},\ldots,x_{2n})$

.

.

.

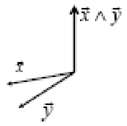
$\vec{x}_{n-1}=(x_{n-11},x_{n-12},\ldots,x_{n-1n})$

$$\vec{x}_1\wedge\vec{x}_2\wedge\ldots\wedge\vec{x}_{n-1}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n\\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\\ x_{n-11} & x_{n-12} & \cdots & x_{n-1n}\end{vmatrix}$$

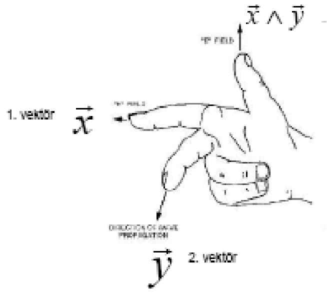
ifadesine ise (n-1) tane vektörün dış çarpımı denir.

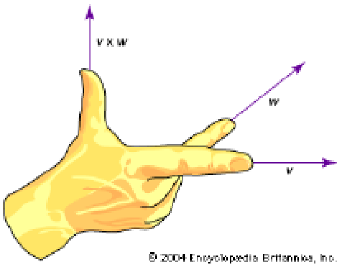
- Dış çarpımın, özel olarak n=3 durumuna Vektörel Çarpım yada Çapraz çarpım diyoruz.
- Dolayısıyla, vektörel çarpım sadece 3 boyutlu uzayda tanımlıdır. Üst boyutlu uzaylarda dış çarpım adını alacaktır.

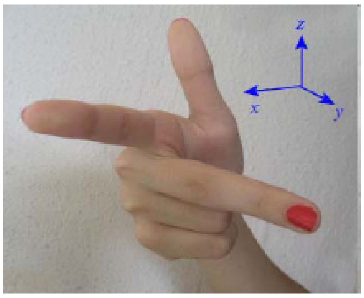
Vektörel çarpım sonucu elde edilen vektör, vektörel çarpılan iki vektörün oluşturmuş olduğu düzleme diktir. Yani her iki vektöre de aynı anda diktir.

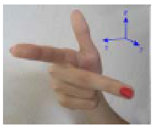


Sağ el Kuralı









$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_3$$

Örnek:

$\vec{u} = (1,0,2)$ ve $\vec{v} = (1,1,3)$ vektörlerinin vektörel çarpımını hesaplayınız.

Yada: Bu iki vektöre aynı anda dik olan bir vektör bulun.

Bulduğunuz vektörün hem u'ya hem de v'ye dik olduğunu gösterin.

Örnek:

$\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ vektörlerini bulunuz.

Özellikler

1. $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$
2. $\vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \wedge \vec{y}) + (\vec{x} \wedge \vec{z})$
3. λ sabiti için $\lambda(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \lambda\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{x} \wedge \lambda\vec{y}$

Not: Bir vektörün kendi kendisiyle vektörel çarpımı sıfırdır.

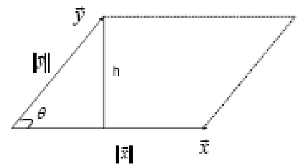
Vektörel Çarpımın Normu

$$\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\| \sin\theta$$

şeklinde tanımlanır.

Bu ifadeden hareketle, bir vektörün kendi kendisiyle vektörel çarpımını tekrar hatırlayınız.

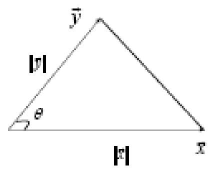
Paralel Kenarın Alanı ve Vektörel Çarpım



$$S = \|\vec{x}\|.h$$
$$= \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\| \sin\theta$$

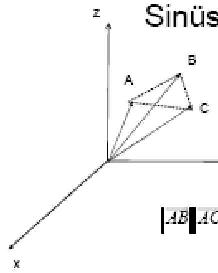
$$S = \|\vec{x} \wedge \vec{y}\|$$

Üçgenin alanı



$$S = \frac{1}{2}\|\vec{x} \wedge \vec{y}\|$$

Sinüs Teoremi



$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BA} \wedge \overline{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{CA} \wedge \overline{CB}\right|$$

$$\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right| \sin a = \left|\overline{BA}\right|\left|\overline{BC}\right| \sin b = \left|\overline{CA}\right|\left|\overline{CB}\right| \sin c$$

$$\frac{\sin a}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{\sin b}{\left|\overline{AC}\right|} = \frac{\sin c}{\left|\overline{AB}\right|}$$

EK-18

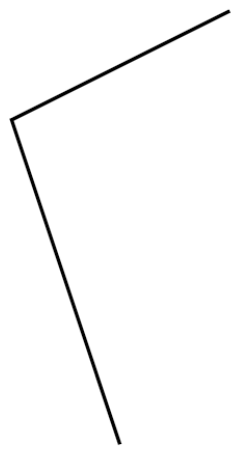
Mathematicada iki vektörün dik olup olmadığı "." (iç çarpım) komutuyla kontrol edilir. Örneğin, {1, -3} ve {2, 1} vektörleri için

```
{1, -3} .{2, 1}
```

-1

```
In[13]:= Graphics[{Thick, Line[{{0, 0}, {1, -3}, {0, 0}, {2, 1}}]}]
```

Out[13]=



Dik olmadığı anlaşılır. Aynı komut {-2, 1} ve {1, 2} (IR^2 ' nin bir afin çatısı olduğunu hatırlayınız) için yazılırsa

```
{-2, 1} .{1, 2}
```

0

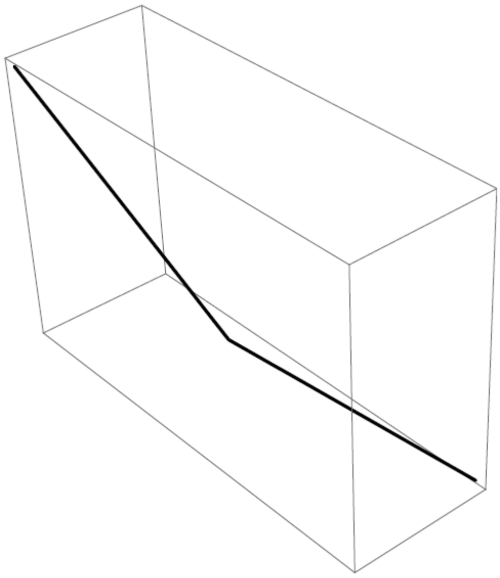
Diktir demektir. Üç boyutlu uzayda ise {1, 1, -1} ve {-2, 0, 1} için;

```
{1, 1, -1} .{-2, 0, 1}
```

-3

```
In[12]:= Graphics3D[{Thick, Line[{{0, 0, 0}, {1, 1, -1}, {0, 0, 0}, {-2, 0, 1}}]}]
```

Out[12]=



Dik olmadıkları görülür.

Herhangi iki nokta arası uzaklığı hesaplamak için
EuclideanDistance[{a, b, c}, {x, y, z}] komutu kullanılır. Örneğin;

```
EuclideanDistance[{1, 1, -1} , {-2, 0, 1}]
```

$\sqrt{14}$

Mathematicada iki vektörün vektörel çarpımı Cross[] komutu ile hesaplanır. Örneğin,

```
Cross[{1, 1, -1} , {-2, 0, 1}]
```

{1, 1, 2}

Dik oldukları kontrol edilebilir.

```
{1, 1, -1}.{1, 1, 2}
```

0

```
{1, 1, 2}.{-2, 0, 1}
```

0

Bu sonuç vektörel çarpımın sonucunda bulunan vektörün diğer iki vektöre dik olduğunu gösterir.

Not : Vektörel çarpımda vektörlerin sırasının önemli olduğunu hatırlayınız.

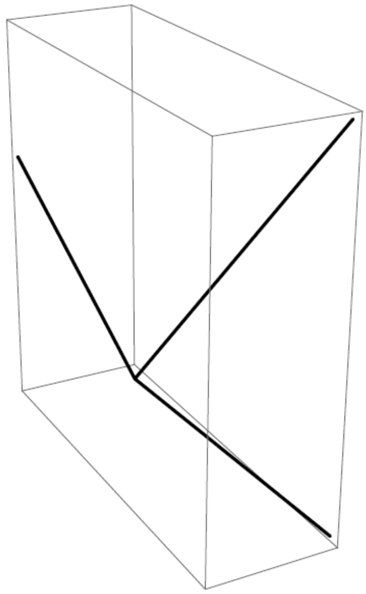
```
Cross[{-2, 0, 1}, {1, 1, -1} ]
```

{-1, -1, -2}

Sonucun farklı olduğuna dikkat ediniz.

In[10]:= `Graphics3D[{Thick, Line[{{0, 0, 0}, {1, 1, -1}, {0, 0, 0}, {-2, 0, 1}, {0, 0, 0}, {1, 1, 2} }]}]`

Out[10]=

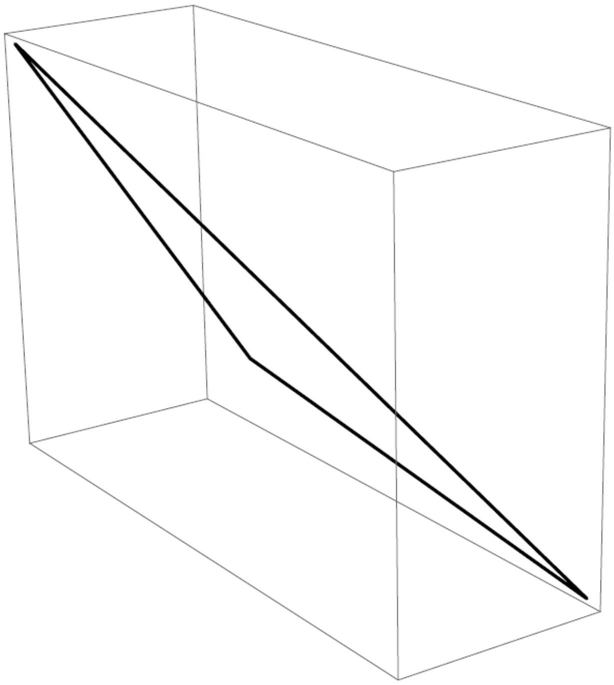


Üçüncü vektörün her ikiside dik olduğuna dikkat edin.

Bunun yanında ilk iki vektörün oluşturduğu paralel kenarın alanından yola çıkılarak da üçgensel bölgenin alanı hesaplanabilir.

In[11]:= `Graphics3D[{Thick, Line[{{0, 0, 0}, {1, 1, -1}, {-2, 0, 1}, {0, 0, 0}}]}]`

Out[11]=



`Norm[{-1, -1, -2}]`

$\sqrt{6}$

Bulunanın yarısı yani $\sqrt{6}/2$ üçgensel bölgenin alanı bulunmuş olur.

EK-19

Problemler

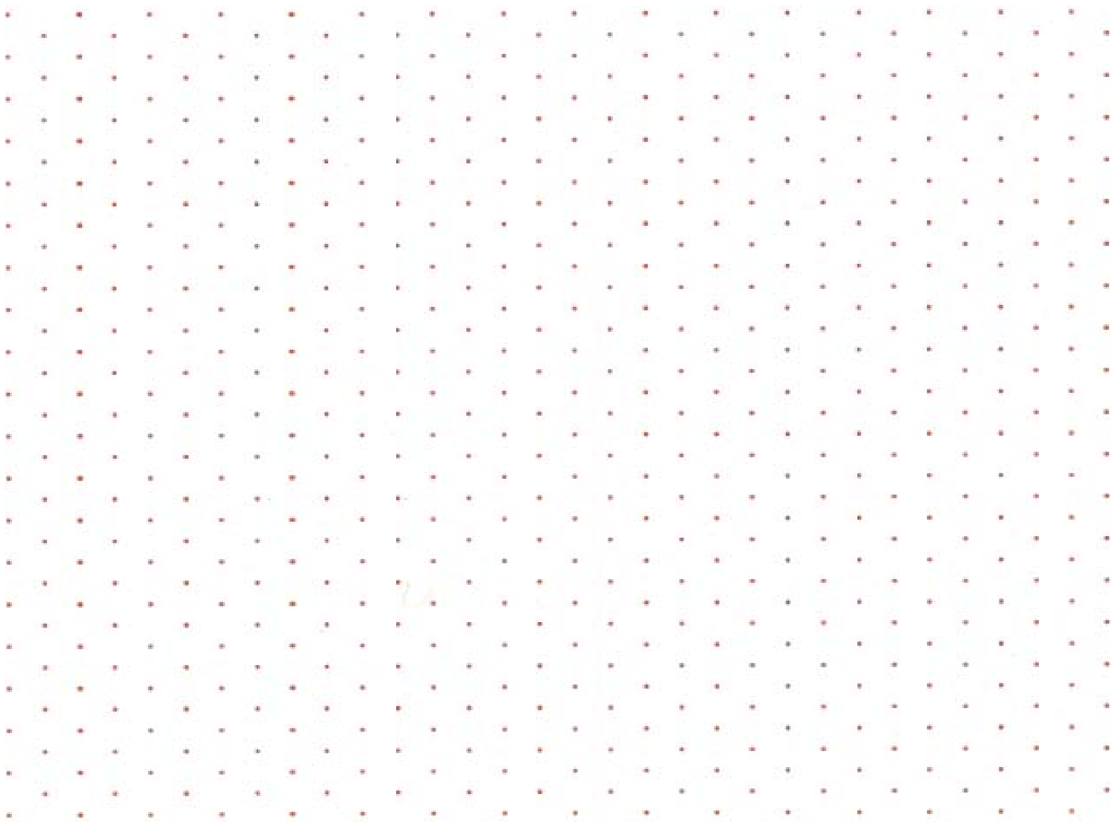
3. Aşağıdaki izometrik bölge üzerine aşağıdakileri çiziniz.

a- Eğik bir koordinat sistemi oluşturunuz.

b- İkisi birbirine dik olmayan fakat üçüncünün diğerlerine dik olduğu bir sistem çiziniz.

c- Üçü de birbirine dik olan başka bir sistem çiziniz.

2. Vektörel çarpım sadece geometrik vektörlerde mi geçerlidir? Açıklayınız, örnekleyiniz, gerekirse şekil çiziniz.



ÖDEV

1. Üç boyutlu uzayda üç tane alınız. Bu üç noktanın çevrelediği üçgensel bölgenin alanını vektörel çarpımı kullanarak hesaplayın.

EK-20

DERS PLANI-3

DERS VE KONU İLE İLGİLİ BİLGİLER	
Dersin Adı	Lineer Cebir I
Sınıf	İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2
Konu	Karışık Çarpım, Doğrular ve Düzlemler
Sınıf	3 Ders Saati (45dk+45dk+45dk)
Öğrenci Kazanımları	• Üç vektörün karma (karışık) çarpımını ifade eder ve geometrik yorumunu yapar. Karışık çarpımın sonucunun sıfır çıkmasını açıklar. • İki katlı vektörel çarpımdan hareketle, uzayda doğru denklemini ifade eder, farklı gösterimlerini elde eder ve örnekler. • Uzayda düzlemin genel ifadesi yazar, üç boyutlu uzayda vektörel çarpımı kullanarak düzlem denklemini oluşturur.
1)Ünite Kavramları ve Sembolleri 2)Davranış Örüntüsü	• Karışık Çarpım • Paralelyüzlü • Uzayda doğru ve düzlem
Öğretme-Öğrenme-Yöntem ve Teknikleri	• Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi
Kullanılan Eğitim Teknolojileri-Araç, Gereçler ve Kaynakça 1)Öğretmen 2)Öğrenci	• Bilgisayar • Projeksiyon cihazı • Mathematica Paket programı, Powerpoint Sunumu, İzometrik Kağıt.
Öğretme-Öğrenme Etkinlikleri:	
Görüşme	• İlk olarak önceki derste ele alınan vektörel çarpım hatırlatılır. • Vektörel çarpılan bir vektör ve çarpımın sonucu verilirse diğer vektörün hesaplanıp hesaplanamayacağı tartışılır. • Hacim kavramı tartışılır. Katı cismin hacim formülünün

	nereden çıkarıldığı sorulur. • "Paralelyüzlü" kavramı tartışılır.
Yöneltme	• Ders sunumu Powerpoint ve tahta ile yapılacaktır. EK-21 • Sunumun ardından Mathematica uygulaması yapılacaktır. EK-22
Netleştirme	Bu süreçte aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilir: - Yeni öğrendikleriniz hakkında ne söyleyebilirsiniz? - Karma çarpımın geometrik yorumu nedir? - Karma çarpımın sonucunun sıfır çıkması ne anlama gelmektedir? - Aynı düzlemde yer alan dört vektör bulunabilir mi? - Geometrik bölme ne anlama gelmektedir? - Doğru denkleminde parametre ne anlama gelmektedir?
Serbest Çalışma	EK-23 - İzometrik çizimler
Bütünleme	- Öğrencilere yeni kavramlar tamamen tekrarlanır. - Lineer cebirin bu bölümünün geometri ile sınırlı olduğu açıklanır. - Vektörel çarpım aracılığıyla düzlem denkleminin nasıl çıkarıldığı tekrarlanır. - Lisedeki doğru denklemi ile yeni öğrenilen denklem arasındaki ilişki açıklanır. - Doğru bir parametre ile ifade edilirken, düzlemin parametrik bir ifadesi olup olmayacağı tartışılır. - İki düzlemin arakesitinden doğru denkleminin nasıl çıkarılabileceği sorulur. - Son olarak beyin fırtınası yapılmasının ardından ödev verilir.

EK-21

Önceki Derste:

- Ortogonal ve Ortonormal sistemler
- İki nokta arası uzaklık
- Afin çatı
- Vektörel Çarpım
- Kosinüs Teoremi
- Sinüs Teoremi

Ders İçeriği

- Karma (Karışık Çarpım)
- Bir Paralelyüzlünün Hacmi
- İki Katlı Vektörel Çarpım
- Uzayda Doğru Denklemi
- Genel Düzlem Denklemleri

Karma (Karışık) Çarpım

$() : IR^3 \times IR^3 \times IR^3 \to IR$

$\forall \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$

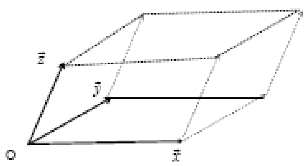
$\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)$

için

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Şeklindeki fonksiyona x,y,z vektörlerinin karma çarpımı denir.

Karma çarpım sonucu elde edilen sabit değer, bu vektörler üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmini verir.



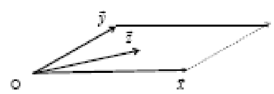
$$V = |(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})|$$

Örnekler

- Standart Euclidean çatı vektörlerinin karışık çarpımını bulunuz.
- Bulduğunuz sonucun geometrik yorumunu açıklayınız.

Soru

- Üç vektörün karışık çarpımının 0 çıkması ne anlama gelmektedir?



Bu sonuca göre:

- Aynı düzlemde yer alan üç vektör bulunuz?

İki Katlı Vektörel Çarpım

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in IR^3$ vektörleri için

$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = <\vec{a}, \vec{c}> \vec{b} - <\vec{a}, \vec{b}> \vec{c}$

Biçiminde tanımlanan fonksiyona iki katlı vektörel çarpım denir.

Notasyon: $<\vec{x}, \vec{y}> = \vec{x}.\vec{y}$

İki katlı vektörel çarpımın yeni görüntüsü:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

Bu akılda tutmak açısından "bac-cab kuralı" olarak hatırlayabiliriz.

Soru: Bize $\vec{u} \wedge \vec{v}$ vektörel çarpımının sonucu ve $\vec{u}$ vektörü verilmiş olsa, $\vec{v}$ vektörünü hesaplayabilir miyiz?

Geometrik Bölme

$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ ifadesini sağlayan $\vec{x}$ vektörünü bulma işlemine Geometrik Bölme denir.

Bu ifadede, hesapların kolaylığı bakımından, $\|\vec{a}\| = 1$ olsun.

$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$

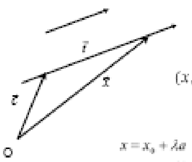
$<\vec{a}, \vec{x}> .\vec{a} - <\vec{a}, \vec{a}> .\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ $\quad \lambda = <\vec{a}, \vec{x}>$ seçersek

$\vec{x} = -\vec{a} \wedge \vec{b} + \lambda\vec{a}$ $\quad$ **burada ise** $\vec{c} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$ **alınırsa**

Bu ifade
$\vec{x} = \vec{c} + \lambda\vec{a}$ dönüşür ki, bu ifade ise, IR^3'te $\vec{c}$ vektörünün ucundan geçen ve $\vec{a}$ vektörüne paralel olan bir doğrunun vektörel ifadesidir.

Doğru Denklemi

$\vec{a} = (a, b, c)$



$\vec{c} + \vec{t} = \vec{x}$ $\quad \vec{t} = \lambda\vec{a}$

$$\vec{x} = \vec{c} + \lambda\vec{a}$$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$

$x = x_0 + \lambda a$
$y = y_0 + \lambda b$
$z = z_0 + \lambda c$

bu gösterime doğrunun parametrik ifadesi denir.

$\vec{c} = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{x} = (x, y, z)$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \lambda$$

Gösterimine doğrunun simetrik (kanonik) ifadesi denir.

Soru buradaki λ'nın geometrik bir yorumu var mıdır?

Daha açıkçası bu değer ne işe yarar?

Örnekler

$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{3}=\lambda$ doğrusu M=(2,-3,2) noktasından geçen ve doğrultu vektörü $\vec{a}=(-1,2,3)$ olan doğrunun denklemidir.

Soru: Doğrunun üzerinde olan ve olmayan birer nokta bulunuz.

$\lambda=2$ için K=(x,y,z)=(0,1,8) noktası elde edilir. Bu nokta doğru üzerindedir.

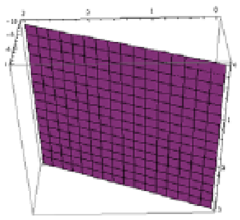
Örneğin; L=(7,11,14) doğru denklemini sağlamaz, dolayısıyla doğru üzerinde değildir.

Önemli Bir Not

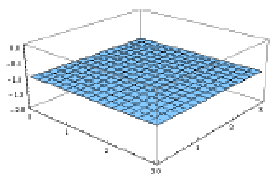
Not; $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\lambda$ doğru denkleminde hiçbir zaman 2x, 4y, -56z gibi ifadeler bulunmaz.

Denklem x,y ve z cinsinden ifade edilir.

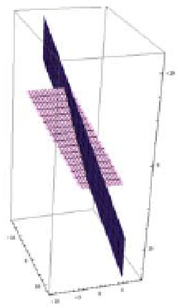
$\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{2}$ düzlemi



$z=-1$ düzlemi



$d:(\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{2}, z+1=0)$ doğrusu



Soru: Orijinden geçen ve $\vec{u}=(-1,2,4)$ doğrultusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Not: n'in 3 den büyük olması durumunda hiperdoğru adını kullanıyoruz.

Soru: IR^4'de genel bir hiperdoğru denklemi yazınız.

Örneğin:

$A=(x_0,y_0,z_0,t_0)$ noktasından geçen ve $\vec{u}=(a,b,c,d)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\frac{t-t_0}{d}=\lambda \text{ dır.}$$

Genel Düzlem Denklemi

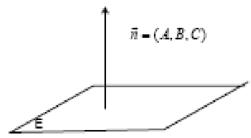
Genel olarak x,y ve z arasındaki lineer bir bağıntı düzlem denklemi oluşturur.

$A,B,C,D\in IR$ olmak üzere

$$Ax+By+Cz+D=0$$

denklemi en genel düzlem denklemidir.

$\vec{n}=(A,B,C)$ vektörüne düzlemin doğrultu vektörü denir. Düzleme dik olan vektördür.



$\vec{n}=(A,B,C)$ vektörüne düzlemin doğrultu vektörü denir. Düzleme dik olan vektördür.

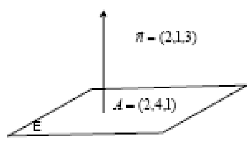
Örnek

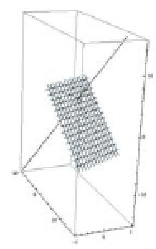
Örnek: Doğrultu vektörü $\vec{n}=(2,1,3)$ olan ve $A=(2,4,1)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

2x+y+3z+D=0.

2.2+4+3.1+D=0 olduğundan D=-11.

Aranılan düzlem: 2x+y+3z-11=0 düzlemidir.





ÖZET

Vektörel Çarpım: Verilen iki vektörün oluşturduğu düzleme dik bir vektör bulmamızı sağlar.

Aynı zamanda normu, ele alınan vektörler üzerine kurulan paralelkenarın alanını verir.

Sonuçta bulunan vektör sağ el kuralına göre belirlenir.

Karma Çarpım: Geometrik olarak yorumu, çarpılan üç vektör üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmini verir. Sonucunun 0 çıkması, alınan 3 vektörün aynı düzlemde olduğunu gösterir.

İki Katlı Vektörel Çarpım: bac-cab Kuralı ☺

Geometrik Bölmeyi kullanarak doğru denklemine geçtik. En genel formu

$$\frac{x_1 - x_{01}}{u_1} = \frac{x_2 - x_{02}}{u_2} = \ldots = \frac{x_n - x_{0n}}{u_n} = \lambda$$

En Genel Düzlem Denklemi Ax+By+Cz+D=0' dır.

Düzleme her noktada normal olan vektörün bileşenleri (A,B,C)' dir.

Doğru denklemindeki lambda'nın anlamlılığını hatırlayınız.

EK-22

Karışık çarpım, iç çarpım ile vektörel çarpımla oluşturabilir. Örneğin {-3, 1, -1}, {1, 0, 1} ve {0, 2, 1} vektörleri üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi;

In[19]:= Cross[{1, 0, 1}, {0, 2, 1}]

Out[19]= {-2, -1, 2}

Bu sonuç ilk vektörlerle iç çarpılırsa

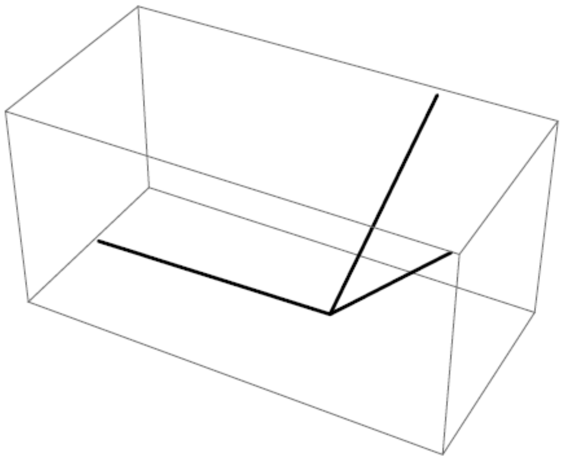
In[21]:= {-3, 1, -1}.{-2, -1, 2}

Out[21]= 3

3 birimküp demektir.

In[23]:= Graphics3D[{Thick, Line[{{0, 0, 0}, {-3, 1, -1}, {0, 0, 0}, {1, 0, 1}, {0, 0, 0}, {0, 2, 1} }]}]

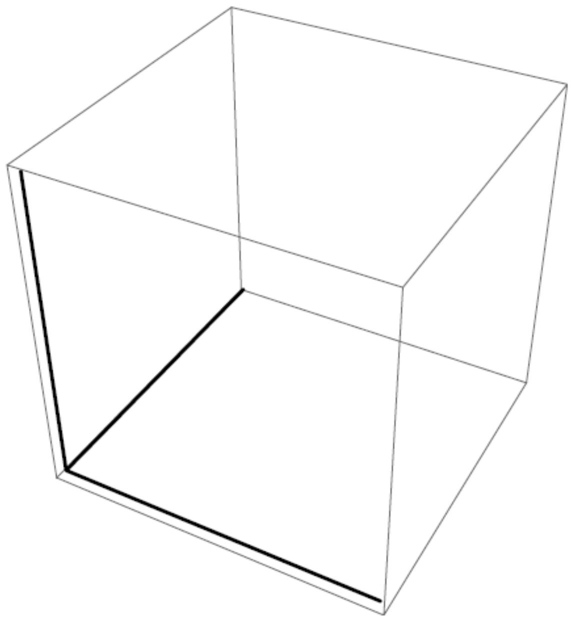
Out[23]=



{1, 0, 0}, {0, 1, 0} ve {0, 0, 1} vektörleri üzerine kurulanı inceleyelim.

In[9]:=
```
Graphics3D[{Thick, Line[{{0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 1} }]}]
```

Out[9]=



Farklı bir vektör kümesini deneyelim. Örneğin {3, 0, -1},
{1, 1, 0} ve {0, 1, 1} vektörleri üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmini araştıralım.

Öncelikle vektörel çarpım :

In[24]:=
```
Cross[{1, 1, 0}, {0, 1, 1} ]
```

Out[24]= {1, -1, 1}

Ardından,

In[25]:=
```
{3, 0, -1}.{1, -1, 1}
```

Out[25]= 2

In[28]:=
```
Cross[{-2, 0, 2}, {1, 3, -4}]
```

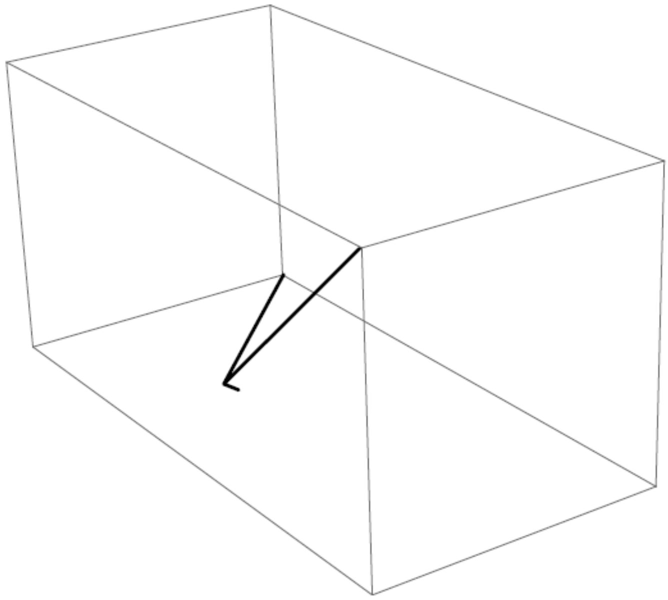
Out[28]= {-6, -6, -6}

In[29]:=
```
{1, 1, -2}.{-6, -6, -6}
```

Out[29]= 0

```
In[30]:= Graphics3D[
  {Thick, Line[{{0, 0, 0}, {-2, 0, 2}, {0, 0, 0}, {1, 3, -4}, {0, 0, 0}, {1, 1, -2} }]}]
```

Out[30]=

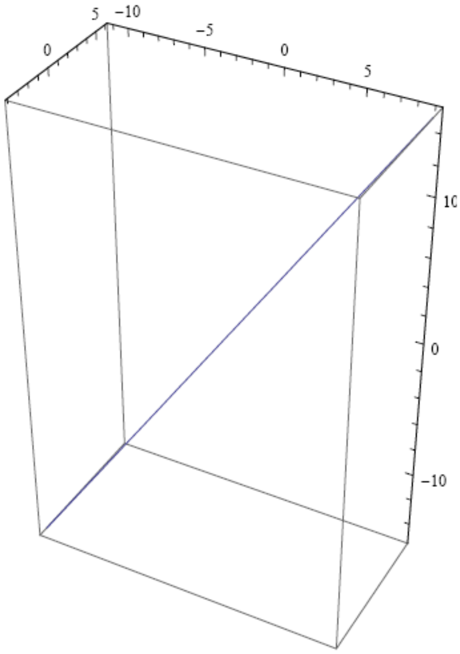


Hacmin sıfır çıkması görüldüğü gibi aynı düzlemde olmalarından kaynaklanmaktadır.

Mathematicada Doğru ParametricPlot3D komutu ile çizilir : Örneğin,
{1, -1, 0} noktasından geçen ve {2, 1, 3} doğrultusunda olan doğrunun
denklemi "s" parametre olmak üzere {2 s - 1, s + 1, 3 s} tir. Bunun grafiği

In[39]:= `ParametricPlot3D[{2 s - 1, s + 1, 3 s}, {s, -5, 5}]`

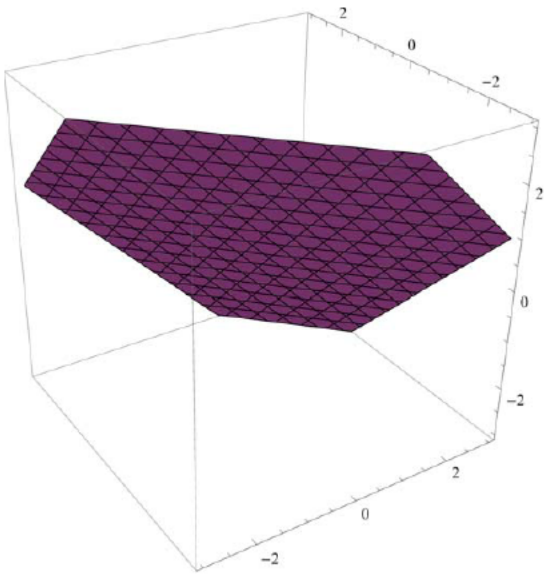
Out[39]=



Bir düzlemi çizmek için Plot3D komutu kullanılır. Örneğin; x + y + z = 6 düzlemi

In[45]:= `ContourPlot3D[x + y + z == 1, {x, -3 , 3 }, {y, -3 , 3}, {z, -3, 3}]`

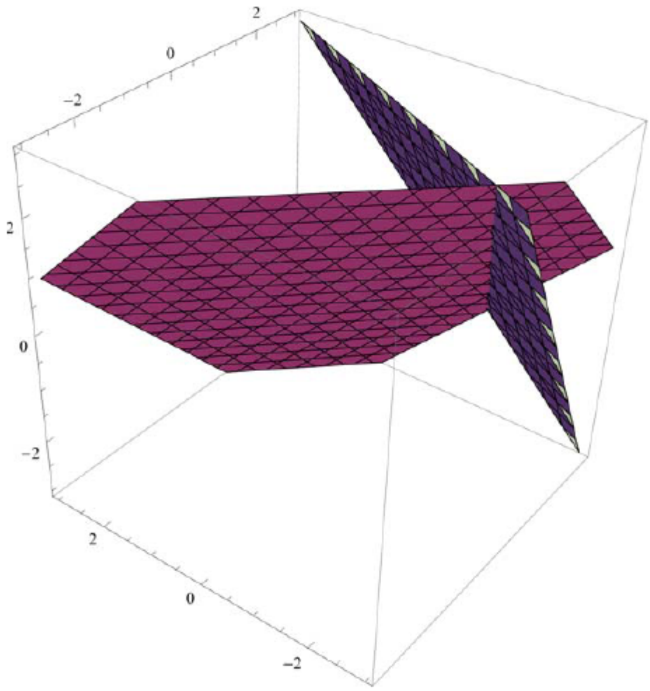
Out[45]=



İki düzlemin arakesitinin bir doğrudur. Örneğin,
x + y + z = 6 düzlemi ile 2 x - y + z = 6 düzlemlerinin arakesiti

In[48]:= `ContourPlot3D[{x + y + z == 1, 2 x - y + z == 6}, {x, -3 , 3 }, {y, -3 , 3}, {z, -3, 3}]`

Out[48]=



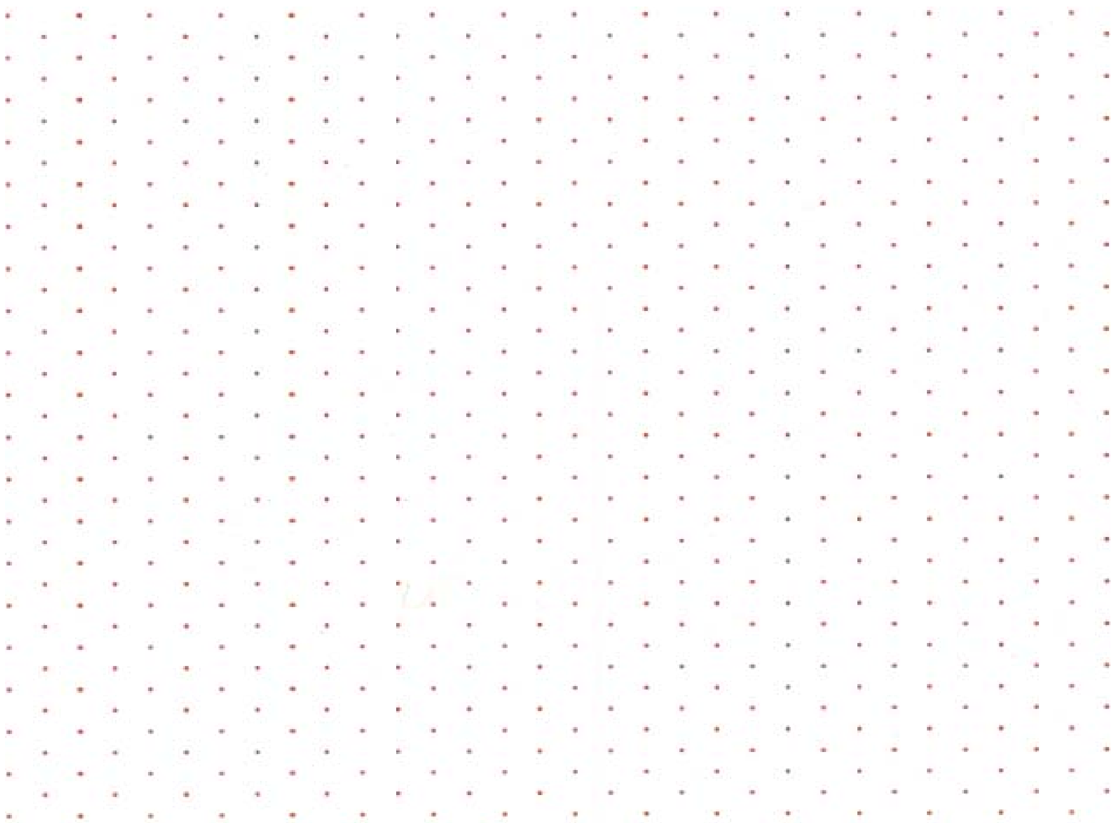
doğrusudur.

EK-23

Problemler

4. Aşağıdaki izometrik bölgeye
   a. bir paralelyüzlü çiziniz.
   b. orijinden geçen ve **u**=(1,1,1) doğrultusunda olan doğruyu ölçekli olarak çiziniz.
   c. x+y+z=1 düzlemini çiziniz. (ipucu: b şıkkından yararlanabilirsiniz)

2. Düzlemde iki doğrunun kesişme koşulunu biliyorsunuz. Üç boyutlu uzayda bu koşul nasıl olabilir? Açıklayınız, gerekirse şekil çiziniz.



ÖDEV

1. Karma çarpım yüksek boyutlu uzaylarda tanımlı mıdır? Örneğin dört boyutlu uzayda karma çarpımın ifadesi ve geometrik yorumu nedir?
2. Wolframalpha.com'da birer doğru ve düzlem çiziniz.

EK-24

DERS PLANI-4

DERS VE KONU İLE İLGİLİ BİLGİLER	
Dersin Adı	Lineer Cebir I
Sınıf	İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2
Konu	Alt Vektör Uzayları
Sınıf	3 Ders Saati (45dk+45dk+45dk)
Öğrenci Kazanımları	• Alt vektör uzayı kavramının özelliklerini alan diliyle oluşturur, bu kavramın vektör alanı ile benzer ve farklı yönlerini belirler. • Geometrik vektörler yardımıyla alt vektör uzayı kavramlarını kartezyen sistemde gösterir, hangi geometrik şekillerin iki ve üç boyutlu uzayın alt vektör uzayı olduğunu belirler.
1)Ünite Kavramları ve Sembolleri 2)Davranış Örüntüsü	• Alt Vektör Uzayı • Vektör Alanı • Trivial Alt Vektör Uzayı
Öğretme-Öğrenme-Yöntem ve Teknikleri	• Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi
Kullanılan Eğitim Teknolojileri-Araç, Gereçler ve Kaynakça 1)Öğretmen 2)Öğrenci	• Bilgisayar • Projeksiyon cihazı • Mathematica Paket programı, Powerpoint Sunumu, İzometrik Kağıt.
Öğretme-Öğrenme Etkinlikleri:	
Görüşme	• Öğrencilere vektör uzayı kavramı sorulur ve bu sayede hatırlatma yapılır. • Alt küme-küme ilişkisi sorulur. Bu soruya alınan cevaplar üzerinden alt vektör uzayı kavramının ne olabileceği sorulur. • IR vektör uzayının bir alt vektör uzayının ne olabileceği sorulur.

	• Soyut vektör uzaylarının alt vektör uzayları olup olmayacağı sorulur.
Yöneltme	• Ders sunumu Powerpoint ve tahta ile yapılacaktır. EK-25 • Sunumun ardından Mathematica uygulaması yapılacaktır. EK-26
Netleştirme	Bu süreçte aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilir: - Yeni öğrendikleriniz hakkında ne söyleyebilirsiniz? - Her vektör uzayının bir alt vektör uzayı var mıdır? - Uzayda uçları sınırsız geometrik şekiller, üç boyutlu uzayın bir alt vektör uzayı mıdır? - n. dereceden polinomların vektör uzayı P ise, bunun bir alt vektör uzayı var mıdır? Ne olabilir?
Serbest Çalışma	EK-27 - İzometrik çizimler - Soyut problemler
Bütünleme	- Öğrencilere yeni kavramlar tamamen tekrarlanır. - Vektör uzayının bir küme olduğu dolayısıyla da alt kümesinin olacağı hatırlatılır. - Alt vektör uzayı olma ölçütleri söylenir. Cebirsel özelliklerden dolayı her kümenin niye alt vektör uzayı olmadığı tekarlanır. - Vektör alanı kavramı tekrarlanır. Soyut vektör uzaylarında vektör alanı kavramının olup olmayacağı tartışılır. - Orijinden geçen bir doğrunun alt vektör uzayı olmasına rağmen orijinden geçen bir eğrinin niye olmadığı tartışılır. - Son olarak beyin fırtınası yapılmasının ardından ödev verilir.

EK-25

Önceki Derste:

- Karma (Karışık Çarpım)
- İki Katlı Vektörel Çarpım
- Geometrik Bölme
- Genel Doğru ve Düzlem Denklemleri

Ders İçeriği

- Alt Vektör Uzayları
- Sırasıyla IR, IR^2 ve IR^3

Alt Vektör Uzayları

- V Reel bir vektör uzayı olsun (bir iç işlem birde dış işlem ele alınıyor demektir). W, V'nin bir alt (nokta) kümesi olmak üzere;

  Eğer W, V'de tanımlanan iç işlem ve dış işlemler altında vektör uzayı olma koşullarını sağlıyorsa, **W'ya V'nin bir alt vektör uzayı denir.**

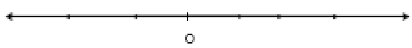
Eğer, W, V'nin bir alt vektör uzayı ise aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir.

i) $0 \in W$,

ii) $\forall\ x, y \in W$ için, $x + y \in W$ (İç İşlem)

iii) $\lambda \in IR$ için, $\lambda . x \in W$ (Dış İşlem)

Örneğin: $V = IR$ alarak, bu kümeyi inceleyelim.



Not: Toplamsal sıfır, her vektör uzayının alt vektör uzayıdır… Bu alt vektör uzayına "Trivial" yada "Öz Olmayan" alt vektör uzayı denir.

Bunu, IR için gösterelim.

$W = \{0\} \subset IR$ için:

i) $0 \in W$'dir. ☺

ii) $0 \in W$ için, $0 + 0 = 0 \in W$. ☺

iii) $\lambda \in IR$ için, $\lambda . 0 = 0 \in W$. ☺

IR'nin sadece trivial alt vektör uzayı vardır.

IR^2

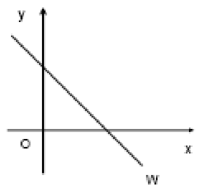
İlk olarak biliyoruz ki "Toplamsal Sıfır" da IR^2'nin alt vektör uzayıdır.

$W=\{(x,y)|\ \ x+y=1,\quad x,y\in IR\}\subset IR^2$

kümesini göz önüne alalım.

W 1. alt vektör uzayı olma koşulunu sağlamaz, yani: $0\notin W$'dır. Dolayısıyla diğer koşullara bakmaya gerek yoktur.

W kümesi düzlemde $x+y=1$ doğrusuna karşılık gelir.



$y=\lambda$ alırsak,

$x=1-\lambda$ olur. Bu ise

$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\lambda$ demektir.

Önceki derslerde ise, doğru denklemine farklı bir imaj vermiştik?

Not: Toplamsal sıfırı sağlamayan, yani orijinden geçmeyen doğrular alt vektör uzayı olma koşullarını sağlamazlar. Bunlara, "Vektör Alanları" denir.

$W=\{(x,y)|\ \ x-2y=0,\quad x,y\in IR\}\subset IR^2$ kümesini göz önüne alalım.

W, IR^2'nin bir alt vektör uzayı mıdır?

i) $0\in W$ ☺

ii) $\forall\ \ \vec{x}=(x_1,x_2),\vec{y}=(y_1,y_2)\in W$ için $\vec{x}+\vec{y}\in W$ mı?

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}\in W \text{ olduğu için, } x_1=2x_2\\ \vec{y}\in W \text{ olduğu için, } y_1=2y_2\end{array}\right\}\quad x_1+y_1=2(x_2+y_2)$$

$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ vektörünün doğru denklemini sağladığını gösterir. ☺

iii) $\lambda\in IR$ için, $\lambda\vec{x}\in W$ mı?

$\vec{x}\in W$ olduğu için, $x_1=2x_2$'dir. $\lambda x_1=2\lambda x_2$

$\lambda x_1-2\lambda x_2=0$ Doğru denklemini sağlar… ☺

W, IR^2'nin bir alt vektör uzayıdır.

Not: Orijinden geçen tüm doğrular IR^2'nin bir alt vektör uzayıdır.

$W_1=\{(x,y)|\ \ x=y,\quad x,y\in Q\}\subset IR^2$

Ve

$W_2=\{(x,y)|\ \ 2x-3y=0,\quad x,y\in IN\}\subset IR^2$

Kümeleri de IR^2'nin bir alt vektör uzayıdır.

Not: Yazılan yada yazdığımız tanım kümelerine dikkat ediyorsunuz.

$W = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leq 1, \quad x, y \in IR\} \subset IR^2$

Koşulları inceleyelim.

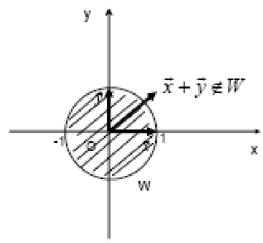
i) $0 \in W$ 'dır. Çünkü $0^2 + 0^2 = 0 \leq 1$'dir.

ii) $\forall \quad \vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in W$ için $\vec{x} + \vec{y} \in W$ mı?

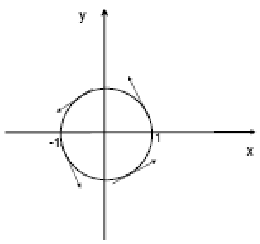
Örneğin; $\vec{x} = (1,0)$, $\vec{y} = (0,1) \in W$ vektörlerini göz önüne alalım.

$\vec{x} + \vec{y} = (1,1) \notin W$'dır. $(1^2 + 1^2 = 2 > 1)$

Dolayısıyla, bir alt vektör uzayı değildir.



$W = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in IR\} \subset IR^2$ alsaydık durum ne olurdu?



Çemberin dönmesiyle oluşan hız vektörlerinin kümesi, reel düzlemin bir alt vektör uzayı mıdır?

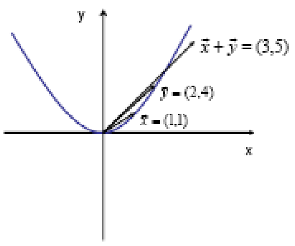
$W = \{(x, y) |\ y = x^2, \quad x, y \in IR\} \subset IR^2$ kümesini göz önüne alalım. Koşulları inceleyelim:

i) $0 \in W$ 'dır. ☺

ii) $\forall \quad \vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in W$ için $\vec{x} + \vec{y} \in W$ mı?

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} \in W \text{ olduğundan } x_2 = x_1^2 \\ \vec{y} \in W \text{ olduğundan } y_2 = y_1^2 \end{array}\right\} \quad x_2 + y_2 = x_1^2 + y_1^2$$

Bu yüzden $\vec{x} + \vec{y} \notin W$'dır. Ancak $x_2 + y_2 = (x_1 + y_1)^2$ sağlanması durumunda gerçeklenirdi.



Dolayısıyla bir vektör alanıdır.

Sonuç:

IR^2'de orijinden geçsin yada geçmesin tüm eğriler alt vektör uzayı değildir.

IR^2'nin iki tane alt vektör uzayı vardır. Toplamsal sıfır ve orijinden geçen doğrular.

IR^3'ü inceleyelim.

İlk olarak "Toplamsal Sıfır", IR^3'ün Trivial Alt vektör uzayıdır.

$$W=\left\{(x,y)\left|\right. ,\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}=\lambda,\ \ x,y,z\in IR\right\}\subset IR^2$$

Kümesini inceleyelim.

i) $0\notin W$ olduğundan, alt vektör uzayı değildir.

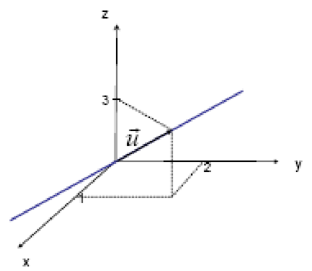
$$W=\left\{(x,y)\left|\right. ,\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\lambda,\ \ x,y,z\in IR\right\}\subset IR^2$$

Nokta kümesi IR^3'ün bir alt vektör uzayı mıdır?

Dikkat!

$$W=\left\{(x,y)\left|\right. ,\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}=\lambda,\ \ x,y,z\in IR\right\}\subset IR^2$$

Aynı doğrunun başka bir gösterimidir.



Alt vektör uzayı olma koşullarını inceleyelim:

i) $0\in W$'dır. Çünkü $\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}=\lambda=0$'dır.

ii) $\forall\ \ \vec{x}=(x_1,x_2,x_3),\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in W$ için $\vec{x}+\vec{y}\in W$ mı?

$\vec{x}\in W$ olduğundan $x_1=\lambda, x_2=2\lambda$ ve $x_3=3\lambda$

$\vec{y}\in W$ olduğundan $y_1=\lambda, y_2=2\lambda$ ve $y_3=3\lambda$

$x_1+y_1=2\lambda=k$
$x_2+y_2=2.2\lambda=2k$ ki buradan da
$x_3+y_3=2.3\lambda=3k$

$\frac{x_1+y_1}{1}=\frac{x_2+y_2}{2}=\frac{x_3+y_3}{3}=k$ olur ki bu da $\vec{x}+\vec{y}\in W$

$\frac{x_1+y_1}{1}=\frac{x_2+y_2}{2}=\frac{x_3+y_3}{3}=k$ olur ki bu da $\vec{x}+\vec{y}\in W$, yani doğru üzerindedir demektir.

iii) $\forall\ \ \vec{x}\in W$ ve $\forall\ \ \gamma\in IR$ için, $\gamma.\vec{x}\in W$ mı?

$\vec{x}\in W$ olduğundan, $x_1=\lambda, x_2=2\lambda$ ve $x_3=3\lambda$

$\gamma.\vec{x}=(\gamma x_1,\gamma x_2,\gamma x_3)$ olacağı için;

$$\begin{cases}\gamma x_1=\gamma\lambda=\mu\\ \gamma x_2=\gamma.2\lambda=2\mu\\ \gamma x_3=\gamma.3\lambda=3\mu\end{cases}$$ ki bu ifadeden hareketle;

$\frac{\gamma x_1}{1}=\frac{\gamma x_2}{2}=\frac{\gamma x_3}{3}=\mu$ olur ki bu da $\gamma\vec{x}\in W$, yani doğru üzerindedir demektir.

Sonuç: IR^3'te orijinden geçen tüm doğrular, IR^3'ün alt vektör uzayıdır.

$W = \{(x, y, z) : x + y + z - 1 = 0, \quad x, y, z \in IR\} \subset IR^3$

Alt nokta kümesini ele alalım. W, IR^3'ün bir alt vektör uzayı mıdır?

Sonuç: IR^3'te orijinden geçmeyen tüm düzlemler alt vektör uzayı değildir. Bir vektör alanıdır.

$W = \{(x, y, z) : 2x - y + 3z = 0, \quad x, y, z \in IR\} \subset IR^3$

Nokta kümesi IR^3'ün bir alt vektör uzayı mıdır?

i) $0 \in W$'dır. Çünkü 2.0-0+3.0=0'dır. ☺

ii) $\forall \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in W$ için;

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in W$ mı?

$\vec{x} \in W$ olduğundan $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$\vec{y} \in W$ olduğundan $2y_1 - y_2 + y_3 = 0$

$2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0$ ki bu ise $\vec{x} + \vec{y} \in W$. ☺

iii) $\forall \quad \lambda \in IR$ için $\lambda\vec{x} \in W$ mı?

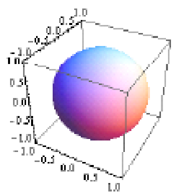
$\vec{x} \in W$ olduğundan $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ yazılabilir.

$\lambda(2x_1) - \lambda(x_2) + \lambda(x_3) = 0$ yazılabilir. $\lambda\vec{x} \in W$. ☺

Sonuç: Orijinden geçen tüm düzlemler IR^3'ün bir alt vektör uzayıdır.

$W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \quad x, y, z \in IR\} \subset IR^3$

Nokta kümesini inceleyelim.



i) $0 \in W$ ☺

ii) $\forall \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in W$ için;

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in W$ mı?

$\vec{x} \in W$ olduğundan $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1$

$\vec{y} \in W$ olduğundan $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \le 1$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + (y_3^2 + x_3^2) \le 2$????

Sonuç: IR^3'te orijinden geçen ve geçmeyen tüm eğri ve yüzeyler birer alt vektör alanıdırlar.

Sonuç: IR^3'ün Alt vektör uzayları:

Toplamsal Sıfır, Orijinden geçen Doğrular ve Orijinden geçen Düzlemlerdir.

IR^4'ü inceleyelim.

$W = \{(x,y,z,t) : 2x - t = 0, \quad y - 3z = 0, \quad x,y,z,t \in IR\} \subset IR^4$

i) $0 \in W$ ☺

ii) $\forall \quad \vec{x} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ ve $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W$ için;

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in W$ mı?

$\vec{x} \in W$ olduğundan $2x_1 - t_1 = 0, \quad y_1 - 3z_1 = 0$

$\vec{y} \in W$ olduğundan $2x_2 - t_2 = 0, \quad y_2 - 3z_2 = 0$

$2(x_1 + x_2) - (t_1 + t_2) = 0$ ve $(y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2) = 0$ olur ki

Bu da $\vec{x} + \vec{y} \in W$ 'dır. ☺

iii) $\forall \quad \lambda \in IR$ için $\lambda\vec{x} \in W$ mı?

$\vec{x} \in W$ olduğundan $2x_1 - t_1 = 0, \quad y_1 - 3z_1 = 0$ yazılabilir.

$\lambda \in IR$ için, $\lambda(2x_1) - \lambda t_1 = 0, \quad \lambda y_1 - \lambda(3z_1) = 0$ bu da

$\lambda\vec{x} \in W$. ☺

Özet

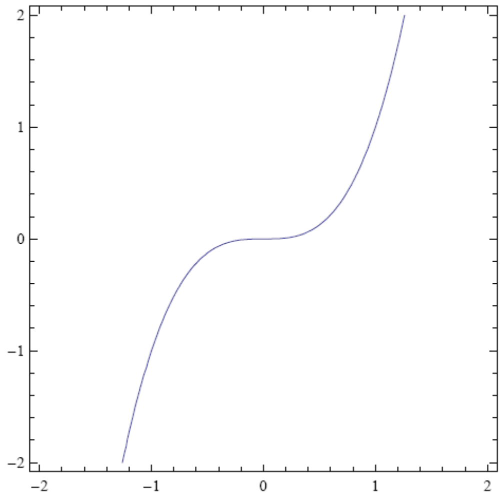
- Alt Vektör Uzayı olma Kriterleri
- Trivial alt vektör uzayı
- IR'nin ve üst boyutlu geometrik uzayların alt vektör uzayları
- Orijinden geçip geçmeme, doğru ve eğri ilişkisi

EK-26

```
Mathematicada üç boyutlu uzayın eğri ve yüzeylerini çizmek
 için ContourPlot3D [] komutu kullanılır. Düzlem eğrileri için ise
 ContourPlot[] komutu yeterlidir. Örneğin,  y = x^3 eğrisi için
```

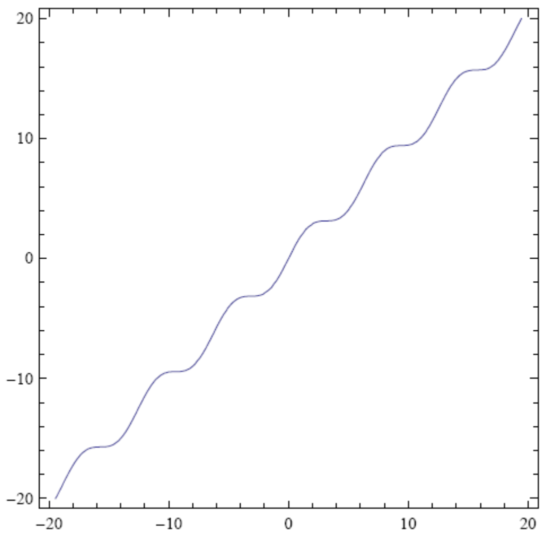
```
In[1]:= ContourPlot[x^3 == y, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```

Out[1]=



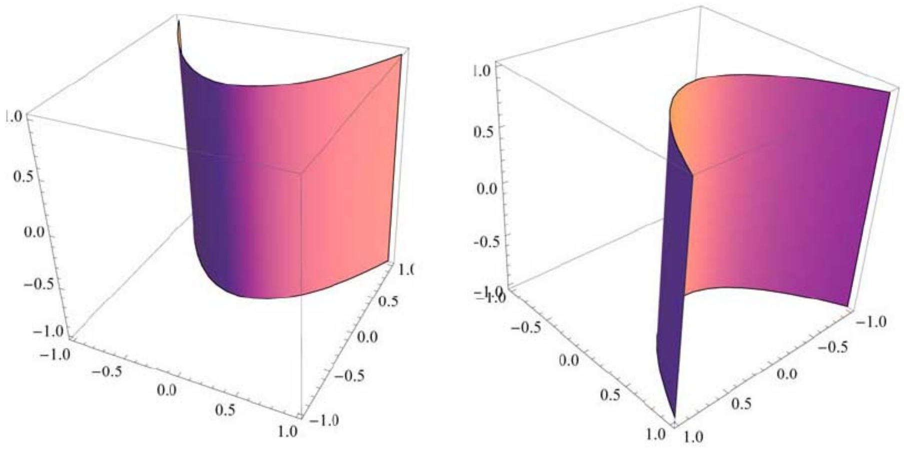
```
In[4]:= ContourPlot[x + Sin[x] == y, {x, -20, 20}, {y, -20, 20}]
```

Out[4]=



Not : Uzaydaki doğruların ParametricPlot3D komutuyla çizildiğini unutmayınız. Uzayda herhangi bir eksen boyunca değişen verilmediğinde, şeklin gene üç boyutlu olacağını hatırlayınız. Örneğin, IR^3 ' te $y = x^2$ bir parabol değil artık bir silindirdir.

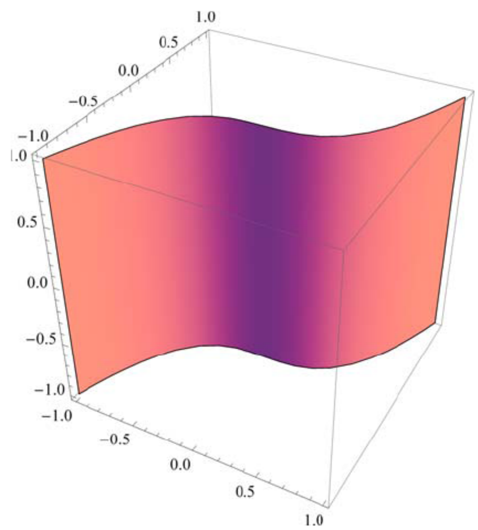
In[14]:=
```
ContourPlot3D[y == x^2, {x, -1, 1 }, {y, -1 , 1}, {z, -1, 1}, Mesh → None]
```



Diğer örnek y = x^3 yüzeyi olsun.

In[8]:=
```
ContourPlot3D[y == x^3, {x, -1, 1 }, {y, -1 , 1}, {z, -1, 1}, Mesh → None]
```

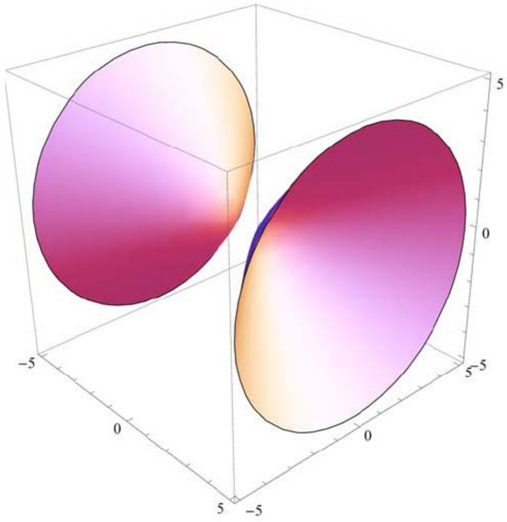
Out[8]=



Diğer yüzeyler de benzer şekilde çizilir.

```
In[19]:= ContourPlot3D[-1 == x^2 + y^2 - z^2, {x, -5, 5 }, {y, -5 , 5}, {z, -5, 5}, Mesh → None]
```

Out[19]=



Bu eğri ve yüzeylerin birer alt vektör uzayı olması için,
bu grafikler üzerinde aldığınız iki vektörün gene bu eğri yada yüzey
üzerinde olması gerekmektedir. Alt vektör uzayı olma ölçütlerini hatırlayınız.

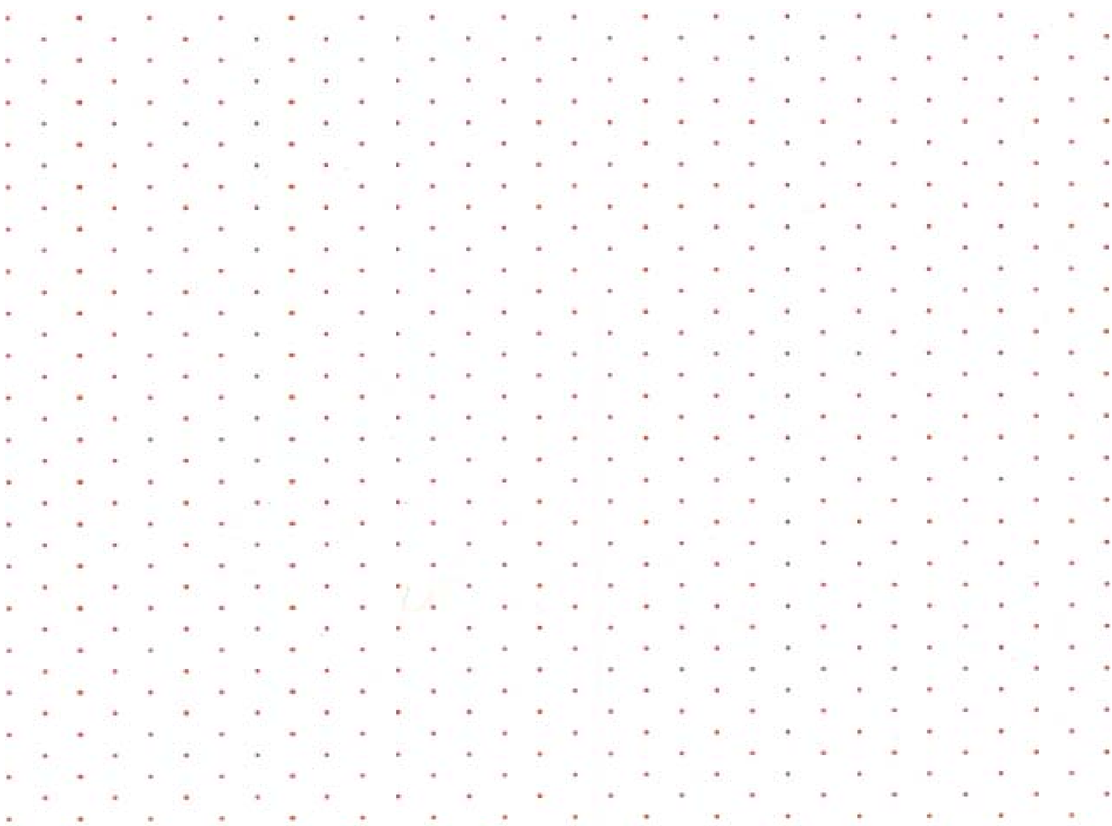
EK-27

Problemler

5. Aşağıdaki izometrik bölgeye
   a. Orijinden geçen bir doğruyu ölçekli olarak çiziniz. (Sabit noktayı ve doğrultuyu göstererek)
   b. orijinden geçen bir eğri çiziniz.

Bu grafiklerden hangisinin IR^3'ün bir alt vektör uzayı olduğunu açıklayınız. Şekil üzerinde açıklama yapınız.

6. [0,1] aralığı üzerinde tanımlanan bütün reel değerli fonksiyonların V vektör uzayında f(0)=0 olacak şeklinde tanımlanan küme, V'nin bir alt vektör uzayı mıdır?



ÖDEV

1. IR^4 vektör uzayının alt vektör uzaylarını araştırınız. Üç boyutlu uzaydaki durumlarla karşılaştırınız.

EK-28

DERS PLANI-5

DERS VE KONU İLE İLGİLİ BİLGİLER	
Dersin Adı	Lineer Cebir I
Sınıf	İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2
Konu	Lineer Bağımlılık, Lineer Bağımsızlık
Sınıf	3 Ders Saati (45dk+45dk+45dk)
Öğrenci Kazanımları	• Bir vektör kümesinin lineer bağımlılığını ve bağımsızlığını matematiksel olarak ifade eder ve örnekler. • Doğru, düzlem ve uzay gibi geometrik kavramları kullanarak geometrik vektörlerin lineer bağımlılığını ve lineer bağımsızlığını açıklar.
1)Ünite Kavramları ve Sembolleri 2)Davranış Örüntüsü	• Lineer Bağımlılık • Lineer Bağımsızlık • Lineer Birleşim
Öğretme-Öğrenme-Yöntem ve Teknikleri	• Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi
Kullanılan Eğitim Teknolojileri-Araç, Gereçler ve Kaynakça 1)Öğretmen 2)Öğrenci	• Bilgisayar • Projeksiyon cihazı • Powerpoint Sunumu, İzometrik Kağıt.
Öğretme-Öğrenme Etkinlikleri:	
Görüşme	• Bağımlı ve bağımsız kavramları tartışılır. Ülkelerin bağımlılığı ve bağımsızlığı konuşulur. • Dersin adının lineer cebir olmasıyla üstteki kavramlar arasında ne gibi bir ilişki olacağı sorulur. • İki paralel vektörün birbiriyle ilişkisinin ne olabileceği, birbiri cinsinden yazılabilmeleri durumunda “bağımlı” veya “bağımsız” sözcüklerinden hangisini tercih edecekleri

	sorulur. • Yeterli açıklamalar alınması durumunda, soyut vektör uzaylarında bu durumun nasıl olacağı tartışılır.
Yöneltme	• Ders sunumu Powerpoint ve tahta ile yapılacaktır. EK-29
Netleştirme	Bu süreçte aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilir: - Yeni öğrendikleriniz hakkında ne söyleyebilirsiniz? - Reel sayı doğrusu, düzlem ve uzayda hangi vektörler lineer bağımlıdır? - Lineer birleşim ne demektir? - Düzlemde üç vektörün lineer bağımlı olması ne demektir? - IR^5 uzayında birbirine paralel olmayan kaç vektör lineer bağımlıdır?
Serbest Çalışma	EK-30 - İzometrik çizimler - Soyut problemler
Bütünleme	- Öğrencilere yeni kavramlar tamamen tekrarlanır. - Lineer bağımlılık kavramının, sezgisel olarak birbiri cinsinden elde edilmek olduğu hatırlatılır. - Doğru üzerindeki iki, düzlem üzerinde üç ve uzaydaki dört vektörün lineer bağımlı olduğu tekrarlanır. n boyutlu uzaydaki durum tartışılır. - Soyut vektör uzaylarında, örneğin polinomlar uzayında da lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarının var olduğu tekrarlanır. - Bir sonraki ders olan taban, boyut gibi kavramlara hazırlık için doğru, düzlem ve uzayda alınabilen lineer bağımsız vektör sayıları çizelge yapılır. - Son olarak beyin fırtınası yapılmasının ardından ödev verilir.

EK-29

Önceki Derste

- Alt Vektör Uzayları
- Sırasıyla IR, IR^2 ve IR^3

Bu derste:

- Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Tanım

V reel bir vektör uzayı olsun. V'de bir

$W=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ vektör kümesi göz önüne alalım. $\lambda_i \in IR$

için;

$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+...+\lambda_n x_n=0$ ifadesinin gerçekleşmesi için

$\forall \lambda_i$'nin aynı anda **0** olmasını şart koşuyorsa

$(\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0)$ W vektör kümesine V reel vektör

uzayı üzerinde **lineer bağımsız** bir vektör kümesi denir.

Eğer, ifadenin $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+...+\lambda_n x_n=0$; gerçekleşmesi için en az bir tane λ_i'nin sıfırdan farklı olmasıyla gerçekleniyorsa, W vektör kümesine, V reel vektör uzayının **lineer bağımlı** bir vektör kümesi denir.

Not: Lineer bağımlı kümenin her bir vektörü kümenin diğer vektörleri cinsinden **lineer birleşimi** şeklinde yazılabilir.

Örnekler

Örnekler: Genel İfadeler:

V reel bir vektör uzayı olmak üzere;

1) $W=\{0\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Çünkü $\lambda_1.0=0$

Gerçekleşmesi için $\lambda_1=0$ olması gerekmez.

2) $W=\{x\}$ $(x\neq 0)$kümesi lineer bağımsızdır. Çünkü,

$\lambda_1 x=0$

Eşitliğinin gerçekleşmesi için $\lambda_1=0$ olmak zorundadır.

3) $W=\{0,x\}$ lineer bağımlıdır.

$\lambda_1.0+\lambda_2 x=0$

Sağlanması için $\lambda_2=0$ olsa bile λ_1 sıfır olmak zorunda değildir.

4) $W=\{0,x,y\}$ alsak ne olurdu?

Sonuç: Toplamsal sıfırı içeren her vektör kümesi daima lineer bağımlıdır.

5) $W=\{x_1,x_2\}$ $(x_1 // x_2)$ vektör kümesi lineer bağımlıdır.

Çünkü: $x_1=\mu.x_2$ $(\mu\neq 0)$ yazılabilir.

$\lambda_1.x_1+\lambda_2 x_2=0$

İfadesine bulunanlar taşınırsa,

$\lambda_1.\mu.x_2+\lambda_2 x_2=0$

$x_2(\lambda_1.\mu+\lambda_2)=0$ olur ki buradan da $\mu=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ $(\lambda_1\neq 0)$ ve

$x_1=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2$ bulunur. Dolayısıyla lineer bağımlı bir kümedir.

Not: Paralel vektörler lineer bağımlıdır.

5) $W=\{x_1,x_2\}$ $(x_1\perp x_2)$ vektör kümesi lineer bağımsızdır.

$\lambda_1.x_1+\lambda_2 x_2=0$ ifadesinin her iki yanını x_1 ile iç çarpımını alırsak;

$\lambda_1.<x_1,x_1>+\lambda_2<x_2,x_1>=0$.

Buradan da:

$\lambda_1.<x_1,x_1>=0$. Buradan da $\lambda_1=0$ olmalıdır.

Benzer şekilde, $\lambda_1.x_1+\lambda_2 x_2=0$ ifadesinin her iki yanını x_1 ile iç çarpımını alırsak;

$\lambda_2.<x_2,x_2>=0$. Buradan da $\lambda_2=0$ olmalıdır.

Sonuç: Ortogonal vektör kümeleri daima lineer bağımsızdır.

V=IR alalım. Bu durumda;

i) $W=\{0\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

ii) $W=\{\vec{x}\}$ $(\vec{x}\neq 0)$kümesi lineer bağımsızdır.

iii) $W=\{0,\vec{x}\}$ lineer bağımlıdır.

Sonuç: IR'de bir tane vektörden oluşan küme lineer bağımsızdır.

V=IR^2'yi inceleyelim.

i) $W=\{0\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

ii) $W=\{\vec{x}\}$ $(\vec{x}\neq 0)$kümesi lineer bağımsızdır.

iii) $W=\{0,\vec{x}\}$ lineer bağımlıdır.

iv) $W=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ $(x_1 \not\parallel x_2)$ vektör kümesi IR^2'de daima lineer bağımsızdır.

Örneğin: $W=\{\vec{x}_1=(1,3),\vec{x}_2=(5,7)\}$ kümesi IR^2'nin herhangi bir lineer bağımsız vektör kümesidir. Bunun gibi çok sayıda küme yazılabilir.

Çünkü: $\lambda_1.\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2=0$ için

$\lambda_1.(1,3)+\lambda_2(5,7)=(0,0)$ Olur ki buradan

$\begin{cases}\lambda_1+5\lambda_2=0\\3\lambda_1+7\lambda_2=0\end{cases}$ denklem sisteminin çözümünden

$\lambda_1=\lambda_2=0$ bulunur.

Not: Lineer bağımsız her vektör kümesinin alt kümeleri de lineer bağımsızdır.

Örnek: $W=\{\vec{x}_1=(3,2),\vec{x}_2=(1,5),\vec{x}_3=(4,1)\}$ kümesi IR^2'nin herhangi bir lineer bağımlı vektör kümesidir. Bunun gibi çok sayıda küme yazılabilir.

$\lambda_1.\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\lambda_3\vec{x}_3=0$ için

$\lambda_1.(3,2)+\lambda_2(1,5)+\lambda_3(4,1)=(0,0)$

$\begin{cases}3\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3=0\\2\lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$ denklem sisteminin çözümünden

$\lambda_1 = -\frac{19}{5}\lambda_2$ ve $\lambda_3 = \frac{13}{5}\lambda_2$ elde edilir ki, bu da W'nın lineer bağımlı olduğu anlamına gelir.

Neden Lineer Bağımlı? Ne demek Bağımlılık?

$\lambda_2 = 5$ seçersek, $\lambda_1 = -19$ ve $\lambda_3 = 13$ bulunur. Buradan

$-19.\vec{x}_1 + 5\vec{x}_2 + 13\vec{x}_3 = 0$. Bu ise;

$$\vec{x}_1 = \frac{5}{19}(1,5) + \frac{13}{19}(4,1)$$

Buradan da $\vec{x}_1 = (3,2)$ elde edilir.

Lineer Bağımlı demek, kümedeki bir elemanın diğer elemanların cinsinden elde edilebiliyor olması demektir (Paralel iki vektörün niye lineer bağımlı olduğunu hatırlayınız).

Sonuç: IR^2'de üç yada daha yukarı sayıda vektörden oluşan kümeler lineer bağımlıdırlar. Lineer bağımlı vektör kümelerinin üst kümeleri de lineer bağımlı kümelerdir.

V=IR^3'ü inceleyelim.

i) $W = \{0\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

ii) $W = \{\vec{x}\}$ $(\vec{x} \neq 0)$kümesi lineer bağımsızdır.

iii) $W = \{0, \vec{x}\}$ lineer bağımlıdır.

iv) $W = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ $(x_1 \not\parallel x_2)$ vektör kümesi IR^3'de daima lineer bağımsızdır.

5) $W = \{\vec{x}_1 = (1,2,3), \vec{x}_2 = (2,4,5)\}$ lineer bağımsız bir vektör kümesidir.

$\lambda_1.\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = 0$ için;

$\lambda_1.(1,2,3) + \lambda_2(2,4,5) = (0,0,0)$ buradan

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \text{buradan } \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

6) $W = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, IR^3'ün lineer bağımsız bir vektör kümesidir. Not: Herhangi bir paralellik yok.

Örnek: $W = \{\vec{x}_1 = (-1,3,4), \vec{x}_2 = (-2,1,2), \vec{x}_3 = (-1,1,3)\}$ vektör kümesi IR^3'ün lineer bağımsız bir vektör kümesidir.

7) $W = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\}$, IR^3'ün lineer bağımlı bir vektör kümesidir.

$W = \{\vec{x}_1 = (1,1,1), \vec{x}_2 = (-1,1,2), \vec{x}_3 = (-2,1,-1), \vec{x}_4 = (-1,3,4)\}$ vektör kümesi IR^3'ün lineer bağımlı bir vektör kümesidir.

Çünkü: $\lambda_1.\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 + \lambda_4\vec{x}_4 = 0$ için

$\lambda_1.(1,1,1) + \lambda_2(-1,1,2) + \lambda_3(-2,1,-1) + \lambda_4(-1,3,4) = (0,0,0)$

Buradan da;

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{sistemi elde edilir.}$$

Çözümümüzün bir parametreye bağlı olacağı aşikardır.

$\lambda_4 = -\frac{7}{2}\lambda_3$, $\lambda_2 = \frac{11}{2}\lambda_3$, $\lambda_1 = 4\lambda_3$ elde edildiği için küme lineer bağımlıdır.

Örneğin; $\lambda_3 = 2$ için, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 11$ ve $\lambda_4 = -7$ bulunur.

$8.\vec{x}_1 + 11\vec{x}_2 + 2\vec{x}_3 - 7\vec{x}_4 = 0$ buradan da;

$\vec{x}_4 = \frac{8}{7}.\vec{x}_1 + \frac{11}{7}\vec{x}_2 + \frac{2}{7}\vec{x}_3$ veya

$\vec{x}_4 = \frac{8}{7}.(1,1,1) + \frac{11}{7}(-1,1,2) + \frac{2}{7}(-2,1,-1)$

Ve $\vec{x}_4 = (-1,3,4)$ bulunur.

Sonuçlar: IR^3'te dört veya daha fazla vektörden oluşan vektör kümeleri lineer bağımlıdır.

$IR^4, IR^5, ..., IR^n$ kümeleri için de benzer düşünceler geçerlidir.

IR^2'nin en bilinen ve kullanılan lineer bağımsız kümesi $W = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ standart çatı vektörleridir.

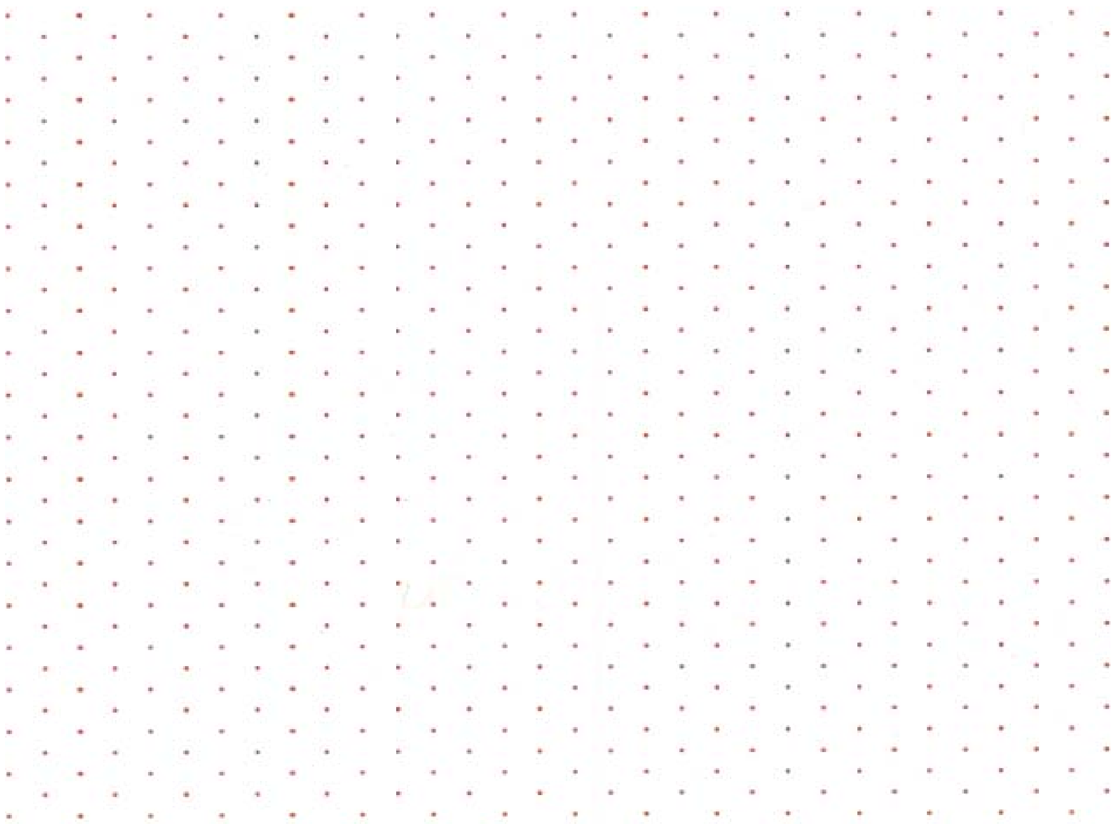
IR^3'ün en bilinen ve kullanılan lineer bağımsız kümesi $W = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ standart çatı vektörleridir.

EK-30

Problemler

7. Aşağıdaki izometrik bölgeye x+y+z=1 düzlemini ölçekli olarak çiziniz. Bu düzlem üzerinde dört nokta alarak, üç vektör oluşturunuz ve bu vektörlerin lineer bağımlı olduklarını gösteriniz.

8. n. dereceden polinomların uzayı P olmak üzere, bu uzayın $\{1,x,x^2\}$ kümesi lineer bağımlı mıdır? Araştırınız.



ÖDEV

1. IR^n uzayının bir lineer bağımlı, bir de lineer bağımsız kümelerini bulunuz.
2. Uzaydaki eğri ve yüzeyler üzerinde alınan vektörlerin lineer bağımlı ya da lineer bağımsız olma durumlarını açıklayınız. Şekil çiziniz.

EK-31

DERS PLANI-6

DERS VE KONU İLE İLGİLİ BİLGİLER	
Dersin Adı	Lineer Cebir I
Sınıf	İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2
Konu	Taban, Baz, Boyut
Sınıf	3 Ders Saati (45dk+45dk+45dk)
Öğrenci Kazanımları	• Lineer bağımsız vektör kümesini ve germe aksiyomunu kullanarak bir vektör uzayının tabanını ve boyutunu hesaplar. • Bir vektörü lineer bağımsız bir vektör kümesi ile ifade eder ve lineer birleşimi kullanarak taban vektörlerini oluşturur.
1)Ünite Kavramları ve Sembolleri 2)Davranış Örüntüsü	• Lineer Bağımsızlık • Germe Aksiyomu • Taban (Baz) • Boyut
Öğretme-Öğrenme-Yöntem ve Teknikleri	• Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi
Kullanılan Eğitim Teknolojileri-Araç, Gereçler ve Kaynakça 1)Öğretmen 2)Öğrenci	• Bilgisayar • Projeksiyon cihazı • Powerpoint Sunumu, İzometrik Kağıt.
Öğretme-Öğrenme Etkinlikleri:	
Görüşme	• Önceki derste elde edilen doğru üzerinde, en fazla bir; düzlem üzerinde iki… vektörün lineer bağımsız olduğunun ne anlama gelebileceği sorulur. • Taban ve baz kelimelerinin dersimizde ne anlama gelebileceği sorulur. • Boyut sözcüğünün anlamı tartışılır.

	• Uzaydaki herhangi bir vektörün, hangi vektörler kullanılarak yazıldığı sorulur.
Yöneltme	• Ders sunumu Powerpoint ve tahta ile yapılacaktır. EK-32
Netleştirme	Bu süreçte aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilir: - Yeni öğrendikleriniz hakkında ne söyleyebilirsiniz? - Bir vektör kümesinin taban olması için ölçütler nelerdir? - Bir vektör kümesinin taban olması için yalnızca lineer bağımsız olması yeterli midir? - Germe aksiyomu ne anlama gelmektedir? - Standart tabanın farkı nedir? Afin uzayla ilişkisi nedir? - Soyut vektör uzaylarının da tabanı olabilir mi? Boyut ne anlama gelmektedir?
Serbest Çalışma	EK-33 - İzometrik çizimler - Soyut problemler
Bütünleme	- Öğrencilere yeni kavramlar tamamen tekrarlanır. - Bir vektör uzayına ait boyutun taban kavramı üzerinden belirlendiği tekrarlanır. - Bir vektör kümesinin taban olması için aynı anda lineer bağımsız olması ve germe aksiyomunu sağlaması gerektiği tekrarlanır. - Germe aksiyomunun, çalışılan vektör uzayındaki her elemanı lineer bileşim şeklinde yazabilmek olduğu hatırlatılır. - Doğrunun boyutunun bir, düzlemin iki ve içinde yaşadığımız uzayınkinin üç olduğu tekrarlanır. - Soyut vektör uzaylarındaki taban ve boyut kavramları tekrarlanır. - Son olarak beyin fırtınası yapılmasının ardından ödev verilir.

EK-32

Önceki Derste

- Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Bu derste:

- Taban, Baz ve Boyut

Tanım: V reel bir vektör uzayı olsun. $W=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ vektör kümesinin V reel vektör uzayının herhangi bir tabanı (bazı) olması için;

1) W kümesi lineer bağımsız olacak.

2) W vektör kümesi, V reel vektör uzayını gerecek.

Yani, V'nin her vektörü, W elemanları cinsinden tek türlü yazılacak.

$\forall v\in V$ için $v=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n$ şeklinde tek türlü yazılır. Yani λ_i değerleri tek türlü belirlenir.

W vektör kümesi V'nin bir tabanı ise
$W=sp\{x_1,x_2,...,x_n\}$
Şeklinde gösterilir.

W vektör kümesi V'nin bir tabanı olmak üzere, kabul edelim ki $v\in V$ vektörü ikinci bir şekilde
$v=\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+...+\gamma_nx_n$
biçiminde yazılsın.

$v=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n=\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+...+\gamma_nx_n$ olur.

Buradan da

$(\lambda_1-\gamma_1)x_1+(\lambda_2-\gamma_2)x_2+...+(\lambda_n-\gamma_n)x_n=0$ bulunur.

W kümesi lineer bağımsız bir küme olduğundan

$\lambda_1-\gamma_1=\lambda_2-\gamma_2=...=\lambda_n-\gamma_n=0$ 'dır.

Buradan da $\lambda_1=\gamma_1,\lambda_2=\gamma_2,...,\lambda_n=\gamma_n$

bulunur. Bu ise v vektörünün W vektör kümesi cinsinden tek türlü yazıldığını gösterir.

Soru: W'nın V'nin bir tabanı (bazı) olması için sadece lineer bağımsız demek yeterli midir? Niye V'nin her elemanını tek türlü yazmamız gerekiyor?

W'yı ayakkabının tabanı gibi düşünün. Üzerine bastığımız, V de üzerine basan insan olsun. Dolayısıyla, W söz konusu insanı taşımak zorundadır.

- İnsanın tüm ağırlığı ayakkabının tabanı üzerindedir.
- Taban tüm kümeyi taşımak, (matematiksel olarak doğurmak oluşturmak, germek) zorundadır.

Tanım: W bir taban olmak üzere, W vektör kümesindeki eleman sayısına V'nin bir boyutu denir ve **boy W=n** şeklinde gösterilir.

IR'yi inceleyelim.

Bu kümedeki tüm vektörler birbirine paraleldir. Ve biliyoruz ki tek elemandan oluşan kümeler lineer bağımsızdı. O halde

$W = sp\{\vec{x}\}$ kümesi bir tabandır.

Örneğin: $W = sp\{1\}$, $W = sp\{2\}$ kümeleri IR'nin birer tabanıdır. Fakat, $W = \{1,2\}$ kümesi taban değildir, çünkü lineer bağımlıdır (paraleldir).

Dolayısıyla, boy IR=1'dir.

IR^2'yi inceleyelim.

$W = \{\vec{x}\}$ kümesi lineer bağımsız olmasına rağmen, IR^2'nin bir tabanı değildir… Neden?

Çünkü IR^2'yi tek bir vektör germez, yani IR^2'nin tüm elemanlarını W cinsinden yazamayız. Örneğin: $\vec{x} = (2,0)$ vektörü olsun, bu vektörü kullanarak $\vec{v} = (-4,9)$ vektörünü elde edemezsiniz.

$W = sp\{\vec{x}, \vec{y}\}$ (birbirine paralel olmayan) vektör kümesi IR^2'nin herhangi bir tabanıdır.

i) Paralel olmadıklarından W lineer bağımsızdır.

ii) IR^2'nin her vektörünü W cinsinden yazabiliriz.

Örneğin: $W = sp\{\vec{x} = (-1,1), \vec{y} = (3,5)\}$ kümesi IR^2'nin herhangi bir tabanıdır. Herhangi bir $\vec{z} = (1,3) \in IR^2$ vektörünü bu taban cinsinden;

$\vec{z} = \lambda_1 \vec{x} + \lambda_2 \vec{y}$ şeklinde tek türlü yazılır. Yani

$(1,3) = \lambda_1(-1,1) + \lambda_2(3,5)$ yazılabilir. Buradan da

$\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = 3 \end{cases}$ sonuç olarak $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ve $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ tek türlü bulunur.

Sağlama: $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = \frac{1}{2}(-1,1) + \frac{1}{2}(3,5) = (1,3)$

Soru: IR^2'de $W = sp\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{w}\}$ gibi 3 vektörden oluşan bir küme alındığı durumda W bir taban mıdır?

$W = sp\{\vec{x} = (-1,1), \vec{y} = (3,5)\}$ kümesi IR^2'nin herhangi bir afin tabanıdır.

$W = sp\{\vec{x} = (-1,1), \vec{y} = (1,1)\}$ kümesi IR^2'nin ortogonal bir tabanıdır.

$W = sp\left\{\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{34}}(3,5), \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{34}}(-5,3)\right\}$ kümesi IR^2'nin ortonormal bir tabanıdır.

Bu kümelerden standart olanı:

$W = sp\{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ tabanıdır. Çünkü IR^2'nin herhangi vektörü $\vec{v} = (a,b) = a.\vec{e}_1 + b.\vec{e}_2$ şeklinde yazılabilir.

Sonuç: Taban vektörlere bağlı değil, vektörlerin sayısına bağlıdır. boy IR^2=2'dir.

IR^3'ü inceleyelim.

i) $W = \{\vec{x}\}$ kümesi lineer bağımsız olmasına rağmen, IR^3'nin bir tabanı değildir.

ii) $W = sp\{\vec{x}, \vec{y}\}$ (birbirine paralel olmayan) vektör kümesi IR^3'nin herhangi bir tabanı değildir. Örneğin, $W = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ kümesi ile IR^3'ün herhangi bir vektörünü oluşturamazsınız.

iii) $W = sp\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ (aynı düzlemde bulunmayan) kümesi IR^3'ün herhangi bir (afin) tabanıdır.

Örneğin: $W = sp\{\vec{x} = (1,-1,2), \vec{y} = (3,1,2), \vec{z} = (2,1,3)\}$

$\vec{u} = (2,-1,5) \in IR^3$ vektörünü bu taban cinsinden yazmaya çalışalım.

$\vec{u} = \lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} + \lambda_3\vec{z}$
yada $(2,-1,5) = \lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(3,1,2) + \lambda_3(2,1,3)$ buradan

$\lambda_3 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ ve $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ olacak şekilde tek türlü bulunur.

O halde W IR^3'ün bir tabanıdır.

$W = sp\{\vec{x} = (1,-1,2), \vec{y} = (3,1,2), \vec{z} = (2,1,3)\}$ kümesi IR^3'ün herhangi bir (afin) tabanıdır.

$W = sp\{\vec{x} = (4,3,0), \vec{y} = (-3,4,0), \vec{z} = (0,0,1)\}$ kümesi IR^3'ün herhangi bir ortogonal tabanıdır.

$W = sp\left\{\vec{x} = (1,0,0), \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \vec{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\right\}$ kümesi IR^3'ün herhangi bir ortonormal tabanıdır.

Bu kümelerden standart olanı ise;
$W = sp\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ kümesidir.

Soru: $W = sp\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}\}$ gibi dört vektörden oluşan bir küme IR^3'ün bir tabanı mıdır?

Örnek: $W=\left\{(x,y,z):\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\lambda\ ,\ x,y,z\in IR\right\}$

Kümesi IR^3'ün bir Alt vektör uzayıdır. W'nın herhangi bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Doğruyu sağlayan: $\lambda=1$ için $\vec{u}=(1,2,3)$ (lineer b.sız)

$\lambda=2$ için $\vec{v}=(2,4,6)$

$\lambda=3$ için $\vec{v}=(3,6,9)$

$\cdots \qquad \cdots$

Oluşan vektörler, doğru üzerinde olduğundan hep paraleldir. Dolayısıyla, max sayıdaki lineer bağımsız vektör sayısı 1'dir.

W'nin herhangi bir bazı:

$W=sp\{\vec{x}=(1,2,3)\}$ yada $W=sp\{\vec{x}=(2,4,6)\}$ …

boy W=1'dir.

$W=\{(x,y,z):2x-y+z=0\ ,\ x,y,z\in IR\}$ alt nokta kümesi IR^3'ün bir alt vektör uzayıdır. W'nın bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

$W_1=\{\vec{u}=(1,1,-1)\}$ lineer bağımsızdır.

$W_2=\{\vec{u}=(1,1,-1),\vec{v}=(-3,-2,4)\}$ lineer bağımsızdır.

$W_3=\{\vec{u}=(1,1,-1),\vec{v}=(-3,-2,4),\vec{w}=(0,1,1)\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını araştıralım.

O halde boy W=2'dir. W'nin herhangi bir tabanı:

$W=sp\{\vec{u}=(1,1,-1),\vec{v}=(-3,-2,4)\}$

$W=sp\{\vec{u}=(1,1,-1),\vec{w}=(0,1,1)\}$ yada …

Sağlama: IR^3'ün herhangi bir vektörü $\vec{x}=(x,y,z)$ olsun.

Bunu taban cinsinden tek türlü ifade etmemiz, yani:

$\vec{x}=\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}$

yada $(x,y,z)=\lambda_1(1,1,-1)+\lambda_2(-3,-2,4)$

Buradan, $x=\lambda_2$, $y=\lambda_1+\lambda_2$, $z=\lambda_1-\lambda_2$

x diğer ifadelerde yazılırsa; 2x-y+z=0 elde edilir ki bu da W'nın denklemidir.

$W=\{(x,y,z,t):x-2y=0\ ,\ z+3t=0,\quad x,y,z,t\in IR\}\subset IR^4$

IR^4 uzayının bir alt vektör uzayıdır. W'nın herhangi bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

$W_1=\{\vec{u}=(1,1,-3,1)\}$ lineer bağımsızdır.

$W_2=\{\vec{u}=(1,1,-3,1),\vec{v}=(-1,-1,6,-2)\}$ lineer bağımsızdır. Fakat taban olup olmadığı henüz belli değildir.

$W_3=\{\vec{u}=(1,1,-3,1),\vec{v}=(-1,-1,6,-2),\vec{w}=(0,0,3,-1)\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını inceleyelim.

$\lambda_1=\lambda_2=-\lambda_3$ olduğundan bu küme lineer bağımlıdır. Lineer bağımsız vektör sayısı 2 olduğundan, boy W=2'dir.

Herhangi bir tabanı ise:

$W=sp\{\vec{u}=(1,1,-3,1),\vec{v}=(-1,-1,6,-2)\}$

$W=sp\{\vec{v}=(-1,-1,6,-2),\vec{w}=(0,0,3,-1)\}$ yada …

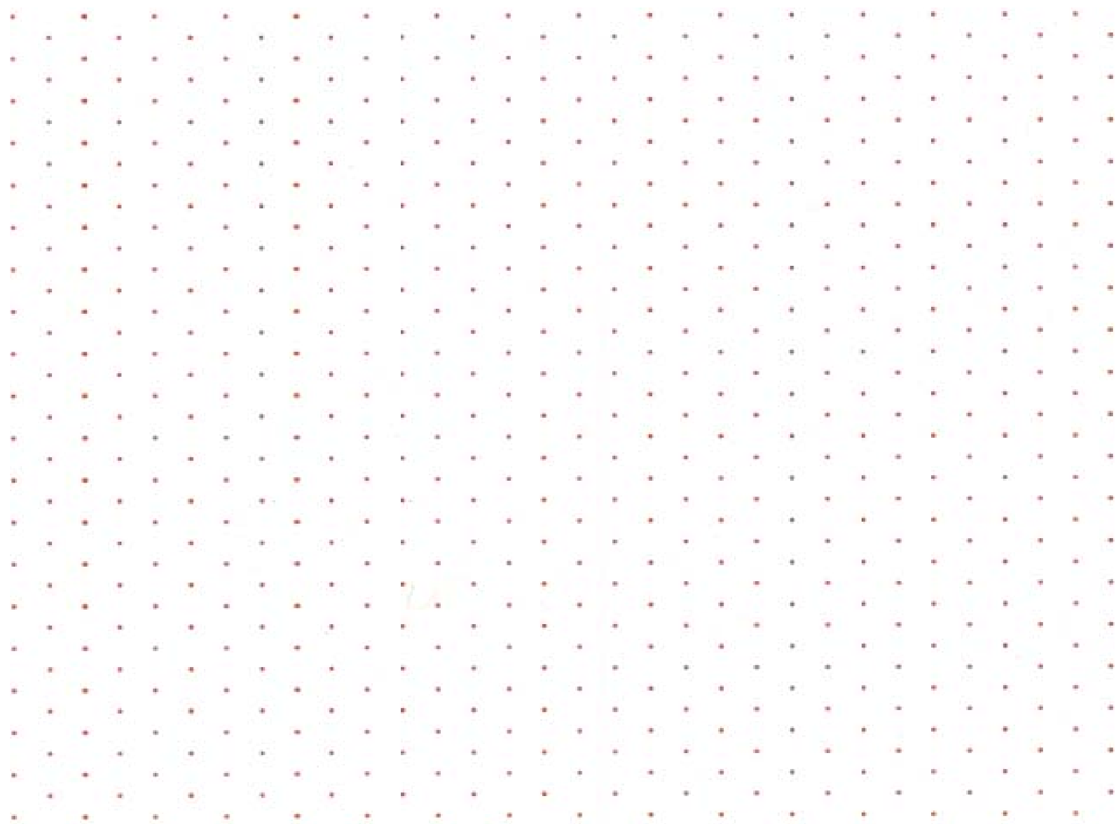
Ne olabilir? Siz devam edin…

EK-33

Problemler

9. Aşağıdaki izometrik bölgeye IR^3'ün standart olmayan bir tabanını çiziniz. Derste tartışılan boyut kavramı ve ayrıt kavramlarının yardımıyla boyut kavramının neye bağlı olarak değiştiğini açıklayınız. (Şekli kullanınız)

10. n. dereceden polinomların uzayı P olmak üzere, bu uzayın $\{1,x,x^2,x^3\}$ kümesi P'nin bir tabanı mıdır? Matematiksel olarak ölçütleri kontrol ediniz.



ÖDEV

3. IR^3 uzayından bir düzlem teşkil ediniz. Bu düzlemin bir tabanını bulunuz. Bu tabandan hareketle düzlem üzerindeki tüm noktaların (düzlemin denkleminin) oluşturulup oluşturulamayacağını araştırınız.

EK-34

DERS PLANI-7

DERS VE KONU İLE İLGİLİ BİLGİLER	
Dersin Adı	Lineer Cebir I
Sınıf	İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2
Konu	Arakesit Alt Vektör Uzayları, Tabanları ve Boyutları
Sınıf	3 Ders Saati (45dk+45dk+45dk)
Öğrenci Kazanımları	• Bir vektör uzayı kümesine ait arakesit alt vektör uzayını tanımlar. • Arakesit alt vektör uzaylarının özelliklerini inceler ve bu vektör kümelerine ait bir taban bulabilir. • Geometrik vektörlerin özelliklerinden yararlanarak alt vektör uzaylarının birleşiminin ve arakesitinin boyutları hesaplar.
1)Ünite Kavramları ve Sembolleri 2)Davranış Örüntüsü	• Lineer Bağımsızlık • Germe Aksiyomu • Taban (Baz) • Boyut
Öğretme-Öğrenme-Yöntem ve Teknikleri	• Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi
Kullanılan Eğitim Teknolojileri-Araç, Gereçler ve Kaynakça 1)Öğretmen 2)Öğrenci	• Bilgisayar • Projeksiyon cihazı • Powerpoint Sunumu, İzometrik Kağıt.
Öğretme-Öğrenme Etkinlikleri:	
Görüşme	• Öğrencilere iki kümenin arakesitinin de bir küme olduğu hatırlatılır. • Bir vektör uzayının iki alt vektör uzayının kesişiminin de bir alt vektör uzayı olup olamayacağı sorulur.

	• Bir alt vektör uzayının boyutunun nasıl hesaplanabileceği sorulur. • Arakesit alt vektör uzayının boyutunun nasıl hesaplanabileceği sorulur.
Yöneltme	• Ders sunumu Powerpoint ve tahta ile yapılacaktır. EK-35
Netleştirme	Bu süreçte aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilir: - Yeni öğrendikleriniz hakkında ne söyleyebilirsiniz? - Bir alt vektör uzayının boyutunu nasıl buluruz? Öncelikle bir tabanını bulmamız mı gerekir? - İki alt vektör uzayının arakesiti de mi bir alt vektör uzayıdır? - Tabanların kesişimi diye bir şey olabilir mi? - Soyut vektör uzaylarının iki alt vektör uzayının kesişimi nasıl olabilir? Örneğin [0,1] aralığındaki sürekli fonksiyonlardan birisi f(0)=0 alınırsa diğeri ne olabilir?
Serbest Çalışma	EK-36 - İzometrik çizimler - Soyut problemler
Bütünleme	- Öğrencilere yeni kavramlar tamamen tekrarlanır. - Bir vektör uzayına ait boyutun taban kavramı üzerinden belirlendiği tekrarlanır. - Bir vektör uzayının boyutunun ona ait olan diğer alt vektör uzaylarının boyutu yardımıyla da hesaplanabileceği tekrarlanır. - IR^3 uzayının bazı özel arakesit uzayları ve bunlara ait tabanların ve boyutların nasıl bulunduğu tekrarlanır. - Öğrencilere, IR^4 uzayındaki bir hiperdoğru ve düzlemin boyutunun ne olabileceği sorulur ve tartışılır. - Son olarak beyin fırtınası yapılmasının ardından ödev verilir.

EK-35

Önceki Derste

- Taban (Baz)
- Boyut

Bu derste:

- Arakesit alt vektör uzayları
- Arakesit alt vektör uzayının boyutu
- Arakesit alt vektör uzayının tabanı

Teorem: V reel bir vektör uzayı ve V_1 ve V_2'de V'nin birer alt vektör uzayı olmak üzere;

$W = V_1 \cap V_2$

kümesi de V'nin bir alt vektör uzayıdır.

Kanıt: i) V_1 ve V_2'de V'nin birer alt vektör uzayı olduğundan $0 \in V_1$ ve $0 \in V_2$'dir. Bu ise $0 \in V_1 \cap V_2$ demektir ☺

ii) $\forall \quad x, y \in W = V_1 \cap V_2$ için $x + y \in W$ mı?

$x, y \in V_1 \cap V_2$ olduğundan; $x, y \in V_1$ ve $x, y \in V_2$'dir.

V_1 ve V_2 birer alt vektör uzayı olduğundan

$x + y \in V_1$ ve $x + y \in V_2$ olur

Bu ise $x + y \in W = V_1 \cap V_2$ demektir. ☺

iii) $\forall \quad \lambda \in IR$ için $\lambda x \in W$ mı?

$x \in V_1 \cap V_2$ ise $\quad x \in V_1$ ve $x \in V_2$ demektir.

V_1 ve V_2 birer alt vektör uzayı olduğundan

$\lambda x \in V_1$ ve $\lambda x \in V_2$ bu ise

$\lambda x \in V_1 \cap V_2$ demektir. ☺

Fakat: $W = V_1 \cup V_2$ kümesi ***her zaman*** V'nin bir alt vektör uzayı değildir.

$x \in V_1 \cup V_2$ ise $\quad x \in V_1$ ***veya*** $x \in V_2$ dir. Seçilen eleman iki kümenin birinden gelebilir.

Eğer, $V_1 \subset V_2$ veya $V_2 \subset V_1$ olursa sağlanır.

Genelleştirilmiş Hal:

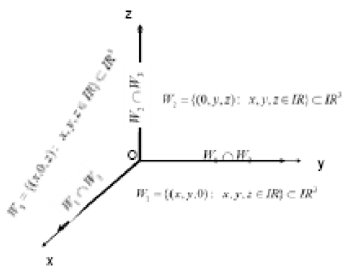
$V_1, V_2, \ldots, V_n$ kümeleri, V'nin birer alt vektör uzayı olmak üzere;

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

kümesi de V'nin bir alt vektör uzayıdır ve bu kümeye V'nin ara kesişim alt vektör uzayı denir.

Aynı zamanda; $W' = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset V_i$ olduğundan, W'da V'nin bir alt vektör uzayı olur.

Bu konuşulanları aşağıdaki grafik üzerinden özetleyelim.



Her bir kümenin birer alt vektör uzayı olduğuna dikkat ediniz.

Buradan IR^3'ün boyutunu;

boy (IR^3)=boy(W_1)+boy(W_2)-boy $(W_1 \cap W_2)$

=2+2-1=3

Olarak buluruz.

Sonuç olarak şu teoremi verebiliriz.

Teorem: U ve W, V vektör uzayının iki alt vektör uzayı olmak üzere

boy(V)=boy (U)+boy (W)-boy $(U \cap W)$'dir.

Eğer U,W ve D, V'nin birer alt vektör uzayı ise bu sefer

boy(V)=boy (U)+boy (W)+boy(D)-boy $(U \cap W)$- boy $(W \cap D)$- boy $(U \cap D)$+boy$(U \cap W \cap D)$ olur.

Üstteki şekilde;

$V_1 = W_1 \cap W_2 \quad V_2 = W_2 \cap W_3 \quad V_3 = W_1 \cap W_3$ alırsak

$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$ ki bu ise IR^3'ün trivial alt vektör uzayıdır.

Örnek: IR^3 vektör uzayının

U=$\{(x,y,z): x+y-3z=0; x,y,z \in IR\} \subset IR^3$,

W=$\{(x,y,z): 3x-y-3z=0; x,y,z \in IR\} \subset IR^3$

nokta kümeleri verilsin.

1.Bu nokta kümelerinin IR^3'ün birer alt vektör uzayı olup olmadıklarını araştırınız.

2.Eğer alt vektör uzayı iseler birer tabanlarını bulunuz ve boyutunu bulunuz.

3.U∩W nokta kümesini bulunuz. Bunun bir alt vektör uzayı olup olmadığını inceleyiniz. Sonra tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm: U ve W orijinden geçen birer düzlem olduğuna göre, IR^3'ün birer alt vektör uzayıdır. Önceki derslerden de hatırlanacağı gibi düzlem üzerinde alınan (birbirine paralel olmayan) iki vektör taban olacaktır ve boyutları da 2'dir.

3. için:

x+y-3z=0

3x-y-z=0

Önceki derslerinden hatırlayınız. İki düzlemin arakesiti bir doğrudur. Taraf tarafa toplanılaraka ve $x=\lambda$ seçilirse,

$y = 2\lambda$ ve $z = 3\lambda$

olur. Sonuç olarak bu bir doğrudur

$$U \cap W = \left\{(x,y,z): \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \lambda; x,y,z \in IR\right\} \subset IR^3$$

orijinden bir doğru olduğu için IR^3'ün birer alt vektör uzayıdır. Doğrunun herhangi bir tabanı Q olmak üzere

Q=$sp\{\vec{u} = (1,2,1)\}$.

Başka bir lineer bağımsız vektör olamayacağına göre boyutu 1'dir.

Örnek: V=IR^4 uzayının

U=$\{(x,y,z,t): x+y+z+t=0; x,y,z,t \in IR\} \subset IR^4$,

W=$\{(x,y,z,t): x-t=0, 2y-z=0; x,y,z,t \in IR\} \subset IR^4$

alt vektör uzaylarının arakesit alt vektör uzayının analitik ifadesini yazınız. Herhangi bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm: İkinci alt vektör uzayındaki x=t ve 2y=z eşitlikleri birinci denklemde yazılır ve $x = \lambda$ seçilirse, sırasıyla

$$y=-\frac{2}{3}\lambda\ ,\ z=-\frac{4}{3}\lambda \text{ ve } t=\lambda$$

bulunur. Bu sonuç söz konusu arakesitin bir hiperdoğru olduğunu gösterir.

U∩W=

$$\left\{(x,y,z,t):\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-4}=\frac{t}{3}=\lambda; x,y,z,t\in IR\right\}\subset IR^4$$

Bu kümenin tabanını nasıl hesaplarız?

Boyutunu nasıl buluruz?

Alıştırmalar

$W_1=\{(x,y,z):2x+y-z=0,\quad x,y,z\in IR\}\subset IR^3$

$W_2=\{(x,y,z):x-y-2z=0,\quad x,y,z\in IR\}\subset IR^3$

Alt nokta kümeleri için: $W=W_1\cap W_2$ ara kesit uzayını bulunuz ve alt vektör uzayı olup olmadığını inceleyiniz.

$$2x+y-z=0$$
$$x-y-2z=0$$

$z=\lambda$ alırsak; $x=\lambda$ ve $y=-\lambda$ olur. Sonuçta $x=z$ bulunur.

Kim devam etmek ister?

Alıştırma 2

Örnek: Aynı problemi aşağıdaki kümeler için çözelim.

$W_1=\{(x,y,z):2x+y+2z=0,\quad x,y,z\in IR\}\subset IR^3$

$W_2=\{(x,y,z):x-y-2z=0,\quad x,y,z\in IR\}\subset IR^3$

Burada farklı bir sonuç elde ettiniz mi?

Sonuçta arakesitin bir doğru olduğunu tahmin ediyorsunuz, x=0 bulmanızın geometrik anlamı nedir?

IR^4'de tanımlanmış:

$W_1=\{(x,y,z,t):x+y-2z+t=0,\quad x,y,z,t\in IR\}\subset IR^4$

$W_2=\{(x,y,z,t):x-2y=0,\quad z+t=0,\quad x,y,z\in IR\}\subset IR^4$

Kümeleri için arakesit uzayını ve A.V.U. olup olmadığını inceleyiniz.

Sonuçta arakesitin ne olmasını tahmin ediyorsunuz?

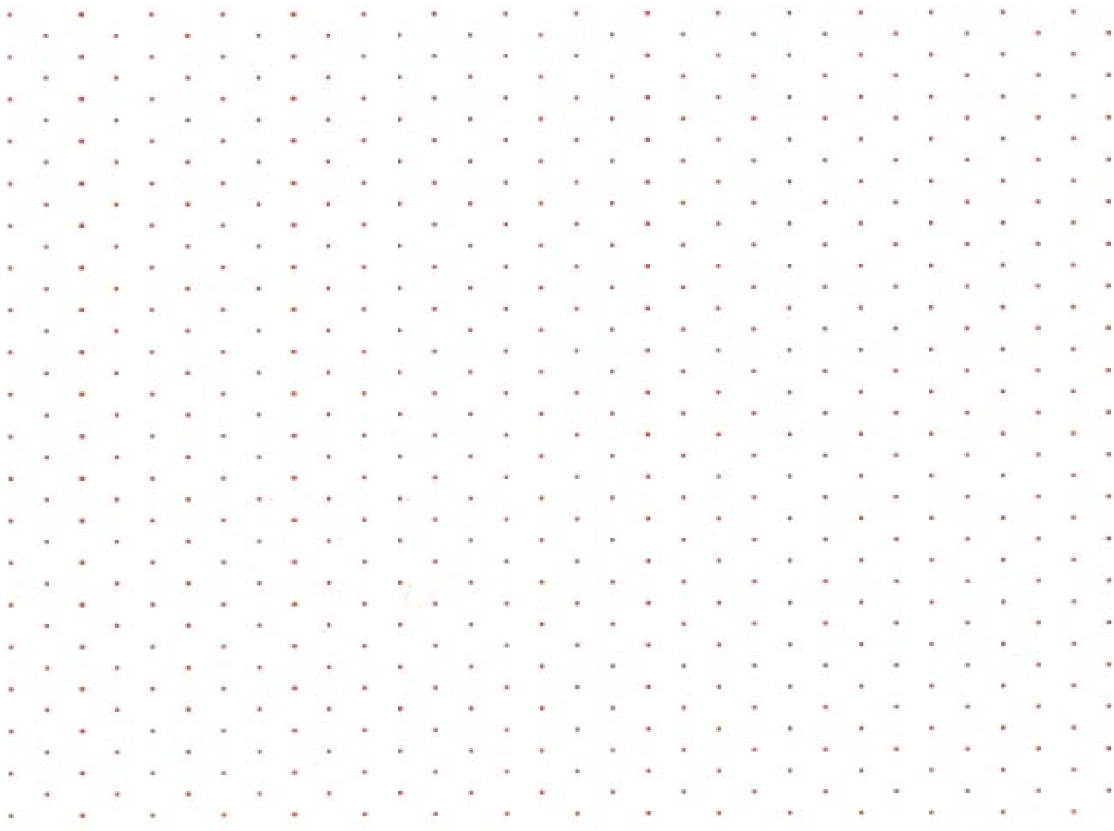
Neden?

EK-36

Problemler

11. Aşağıdaki izometrik bölgeye, (standart Euclidean tabanından yararlanarak) IR^3'ün alt vektör uzaylarını çiziniz ve arakesit uzayının tabanını ve boyutunu bulunuz. (Örneğin orijinden geçen bir düzlem ve doğru gibi). Sonra IR^3'ün boyutunu bu iki alt vektör uzayının yardımıyla elde ediniz.

12. [0,1] aralığındaki sürekli fonksiyonların kümesi V olmak üzere, bu kümenin iki alt vektör uzayı bulunabilir mi? Eğer bulabiliyorsanız, arakesit alt vektör uzayının varlığını ve anlamlılığını tartışınız.



ÖDEV

4. IR^3'te iki düzlemin (paralel olmayan) bir doğru boyunca kesiştiğini biliyoruz. Sonuçta arakesit uzayının boyutu da 1 oluyor. IR^4'te iki hiperdüzlemin arakesiti için de aynı şeyi söyleyebilir miyiz?

EK-37

DERS PLANI-8

DERS VE KONU İLE İLGİLİ BİLGİLER	
Dersin Adı	Lineer Cebir I
Sınıf	İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2
Konu	Toplamsal Alt Vektör Uzayı, Direkt Toplam, Rank ve Taban Dönüşümleri
Sınıf	3 Ders Saati (45dk+45dk+45dk)
Öğrenci Kazanımları	• Ara kesit alt vektör uzaylarından hareketle, toplamsal sıfırın özelliğini belirler ve direkt toplamı ifade eder. • Bir vektör kümesinin rankını hesaplar, boyut ile farkını söyler. • Herhangi bir tabanda verilen bir vektörü başka bir taban cinsinden yazar.
1)Ünite Kavramları ve Sembolleri 2)Davranış Örüntüsü	• Toplamsal Alt Vektör Uzayı • Direkt Toplam • Toplamsal Sıfır • Rank • Taban Dönüşümü
Öğretme-Öğrenme-Yöntem ve Teknikleri	• Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi
Kullanılan Eğitim Teknolojileri-Araç, Gereçler ve Kaynakça 1)Öğretmen 2)Öğrenci	• Bilgisayar • Projeksiyon cihazı • Powerpoint Sunumu, İzometrik Kağıt.

Öğretme-Öğrenme Etkinlikleri:

Görüşme	• Öğrencilere iki düzlemin toplanıp toplanamayacağı sorulur. • Buna ek olarak iki doğrunun toplanmasıyla boyutun iki olup olmayacağı sorulur. • Bir vektör kümesinin, bir vektör uzayının tabanı olması için

	niye sadece lineer bağımsızlığın yetmediği sorulur. • Standart tabanda verilen bir vektörün başka tabanda yazılıp yazılamayacağı sorulur.
Yöneltme	• Ders sunumu Powerpoint ve tahta ile yapılacaktır. EK-38
Netleştirme	Bu süreçte aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilir: - Yeni öğrendikleriniz hakkında ne söyleyebilirsiniz? - Alt vektör uzaylarının toplanması nasıl yapılmaktadır? Direkt toplam sözcüklerinin anlamı sadece geometrik midir? - İki alt vektör uzayının direkt toplamı gene bir alt vektör uzayı mıdır? - Alınan alt vektör uzaylarının toplamsal sıfır olmaması ne anlama gelmektedir? - Rank nedir? Düzlemde her tabandan diğerine geçilebilir mi? bu sonuç düzlemde her noktaya bir taban yerleştirilir mi demektir?
Serbest Çalışma	EK-39 - İzometrik çizimler - Soyut problemler
Bütünleme	- Öğrencilere yeni kavramlar tamamen tekrarlanır. - Direkt toplam yapılırken toplamsal sıfırın rolüne dikkat edilmesi gerektiği tekrarlanır. - Bir vektör uzayının alt vektör uzayları cinsinden tek türlü oluşturulabileceği tekrarlanır. - Üç boyutlu uzayı bir doğru ile bir düzlemin; üç doğrunun oluşturduğu, fakat iki düzlemin oluşturmadığı açıklanır. - Öğrencilere, IR^4 uzayındaki bir hiperdoğru ve düzlemin IR^4'ü oluşturup oluşturmayacağı sorulur ve tartışılır. - Son olarak beyin fırtınası yapılmasının ardından ödev verilir.

EK-38

Önceki Derste

- Arakesit alt vektör uzayları
- Ara kesit alt vektör uzayının bir tabanı
- Ara kesit alt vektör uzayının boyutu

Bu derste:

- Direkt Toplam
- Rank
- Taban Dönüşümleri

Teorem:

Teorem: V reel bir vektör uzayı ve V_1 ve V_2'de V'nin alt vektör uzayı olsunlar. Bu durumda;

boy $(V_1 + V_2)$=boy V_1 + boy V_2 – boy $(V_1 \cap V_2)$ dir.

Tanım: Direkt Toplam

V reel bir vektör uzayı ve V_1 ve V_2'de V'nin alt vektör uzayı olsunlar. Eğer, $V_1 \cap V_2=\{0\}$ ise $V_1 + V_2$'ye V reel vektör uzayının direkt toplamı denir ve

$$V_1 \oplus V_2$$

sembolü ile gösterilir.

Direkt Toplam demek, V_1 ve V_2 alt vektör uzaylarının V reel vektör uzayını tek türlü oluşturmasıdır.

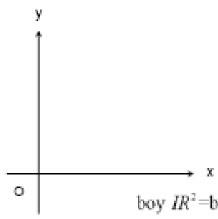
$$V_1 \oplus V_2 = \{v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \quad w = v_1 + v_2\}$$

biçiminde tek türlü yazılmasıdır.

Not: Eğer, $V_1 \cap V_2=\{0\}$ ise, V_1 ve V_2'ye **tümleyen alt vektör uzayları** denir (Bazı kaynaklarda **bütünleyen** yazar).

Not: Bazı kaynaklarda toplamsal sıfırın boyutu 0 olarak alınırken, bazılarında boyutsuz olduğu yazar. Hesaplamalarda genel olarak boyutunu 0 alıyoruz.

Örnekler: IR^2'yi paralel olmayan iki doğru tek türlü belirler.



$V_1 = \{(x,0) : x, y \in IR\} \subset IR^2$ bir A.V.U.

$V_2 = \{(0,y) : x, y \in IR\} \subset IR^2$ bir A.V.U.

$V_1 \cap V_2=\{0\}$ dır.

O halde $IR^2 = V_1 \oplus V_2$ yazabiliriz.

boy IR^2=boy V_1 + boy V_2 – boy $(V_1 \cap V_2)$

=1+1-0=2 dir.

Herhangi bir $\vec{x} = (x, y) \in IR^2$ alırsak:

$\vec{x} = (x,0) + (0, y)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\in V_1 \quad \in V_2$

Tek türlü yazılır (V_1 ve V_2'den alındıklarına dikkat ediniz.)

Bu sonucun geometrik yorumu: IR^2'yi paralel olmayan iki doğru tek türlü belirlemesidir.

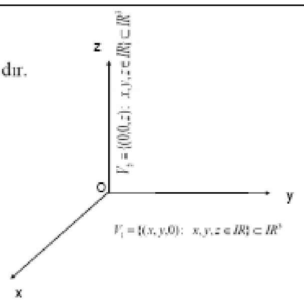
Örnek:

$V_1 = \{(x, y, 0): \ x, y, z \in IR\} \subset IR^3$

$V_2 = \{(0,0,z): \ x, y, z \in IR\} \subset IR^3$

olarak alalım.

$V_1 \cap V_2 = \{0\}$ dır.



O halde $IR^3 = V_1 \oplus V_2$ yazabiliriz.

boy IR^3 = boy V_1 + boy V_2 – boy ($V_1 \cap V_2$)

=2+1-0=3 tür.

Herhangi bir $\vec{x} = (x, y, z) \in IR^3$ alırsak:

$\vec{x} = (x, y, 0) + (0,0,z)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\in V_1 \quad \in V_2$

Bu sonucun geometrik yorumu ise IR^3'ü bir düzlem ve içinde olmayan bir doğrunun tek türlü belirlemesidir.

Örnek:

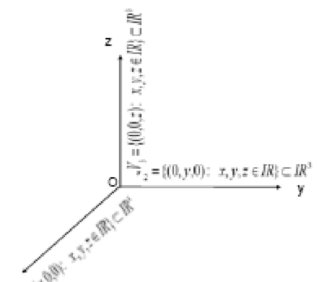
$V_1 = \{(x,0,0): \ x, y, z \in IR\} \subset IR^3$

$V_2 = \{(0, y, 0): \ x, y, z \in IR\} \subset IR^3$

$V_3 = \{(0,0,z): \ x, y, z \in IR\} \subset IR^3$

Burada: $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$'dır.

O halde $IR^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ yazabiliriz.



$: V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$'dır.

Herhangi bir $\vec{x}=(x,y,z)\in IR^3$ alırsak:

$$\underset{\in V_1}{\underset{\downarrow}{\vec{x}=(x,0,0)}}+\underset{\in V_2}{\underset{\downarrow}{(0,y,0)}}+\underset{\in V_3}{\underset{\downarrow}{(0,0,z)}}$$

Bu sonucun geometrik yorumu ise IR^3'ü herhangi ikisi paralel olmayan üç doğrunun tek türlü belirlemesidir.

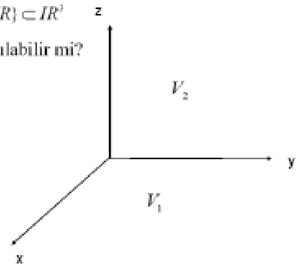
Üç küme olduğuna göre burada boy IR^3 nasıl hesaplanacak?

Örnek:

$V_1=\{(x,y,0):\ x,y,z\in IR\}\subset IR^3$

$V_2=\{(0,y,z):\ x,y,z\in IR\}\subset IR^3$

alalım. $IR^3=V_1\oplus V_2$ yazılabilir mi?



Geometrik sonuç: İki düzlem IR^3'ü tek türlü ………………..

Aklımıza şu soru gelebilir. IR^3'te herhangi bir düzlem ve bir doğru IR^3'ü tek türlü oluşturur denildiğinde doğrunun düzlemle dik konumlu olması mı gerekir?

Cevap: Hayır. Örneğin;

$V_1=\{(x,y,z):\ x+y+z=0, x,y,z\in IR\}\subset IR^3$

$V_2=\{(x,y,z):\ \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=\lambda, x,y,z\in IR\}\subset IR^3$

Orijinden geçen düzlem ve doğruyu göz önüne alalım.

$V_1\cap V_2=\{0\}$ dır. Ayrıca;

$\vec{x}=(1,2,3)\in IR^3$ alırsak:

$$\underset{\in V_1}{\underset{\downarrow}{\vec{x}=(2,2,2)}}+\underset{\in V_2}{\underset{\downarrow}{(-1,0,1)}}$$

olacak şekilde tek türlü yazılır.

Rank Kavramı

Tanım: V reel bir vektör uzayı olmak üzere

$$W=\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$$

vektör kümesini göz önüne alalım. Bu vektör kümesindeki maksimum sayıdaki lineer bağımsız vektör sayısı r ise, bu W kümesinin rankı r'dir denir ve

$$\text{Rank}(W)=r$$

yazılır.

Not: Rank ile boyutun farklılığına dikkat ediniz.

Örneğin; IR^2'de;

$$V=\{\vec{x}_1=(1,2),\vec{x}_2=(3,1),\vec{x}_3=(-1,4),\vec{x}_4=(7,8)\}$$

Kümesinin rankı 2'dir.

Bunun yanında IR^4 uzayının

$$V=\{\vec{x}_1=(1,1,1,1),\vec{x}_2=(2,1,3,0),\vec{x}_3=(-1,2,0,0)\}$$

Kümesinin rankı için:

$V_1=\{\vec{x}_1\}$ lineer bağımsızdır.

$V_2=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ lineer bağımsızdır.

Üçü için

$$\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\lambda_3\vec{x}_3=0$$

eşitliğini kullanalım.

Sonuç: Rank(W)=3'tür.

Rank ile boyut arasındaki farklılık nedir?

Boyut kavramı taban üzerinden tanımlanmaktadır, rank'ın tek farkı germe aksiyomunu gerçeklememesi midir?

Taban Dönüşümleri (Lineer Formlar)

IR^2'de;

$W_1=sp\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ ve $W_2=sp\{\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$ tabanlarını göz önüne alalım.

$x\in IR^2$ vektörünün W_1 tabanına göre bileşenleri (x_1,x_2)

W_2 tabanına göre bileşenleri (y_1,y_2)

olsun. Diğer taraftan;

$\vec{e}_1$ vektörünün W_2 tabanına göre bileşenleri (a_{11},a_{12}),

$\vec{e}_2$ vektörünün W_2 tabanına göre bileşenleri (a_{21},a_{22}),

$\vec{f}_1$ vektörünün W_1 tabanına göre bileşenleri (b_{11},b_{12}),

$\vec{f}_2$ vektörünün W_1 tabanına göre bileşenleri (b_{21},b_{22})

olsun. Bu durumda

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2=y_1\vec{f}_1+y_2\vec{f}_2$$

Yazılabilir.

Sonra

$\vec{e}_1=a_{11}\vec{f}_1+a_{12}\vec{f}_2$ ve

$\vec{e}_2=a_{12}\vec{f}_1+a_{22}\vec{f}_2$ yada matris formunda

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{f}_1\\ \vec{f}_2\end{bmatrix}$$

Şeklinde gösterilir.

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2=y_1\vec{f}_1+y_2\vec{f}_2$$

eşitliğinde f vektörlerinin W_1'e göre karşılıkları yazılırsa

$$x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2=y_1(b_{11}\vec{e}_1+b_{12}\vec{e}_2)+y_2(b_{21}\vec{e}_1+b_{22}\vec{e}_2)$$

oluşturulabilir. Burada her iki taraftaki vektörler eşitlenerek katsayılar bulunabilir.

Örnek: IR^2'nin W_1=sp$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ standart tabanı olsun. W_2=sp$\{\vec{f}_1=(1,2), \vec{f}_2=(1,-1)\}$ tabanı verilsin. Bir $x \in IR^2$ vektörünün bileşenleri W_1'e göre (1,2) olarak verildiğine göre aynı vektörün W_2 tabanına göre koordinatları nedir?

Çözüm:

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

ve

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \text{ yazılabilir.}$$

Taraf tarafa toplarsak, buradan

$$\vec{f}_1 - \vec{f}_2 = 3\vec{e}_2$$

ve

$$\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 = 3\vec{e}_1$$

bulunur.

Dolayısıyla

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{f}_1 - \frac{1}{3}\vec{f}_2$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\vec{f}_1 + \frac{2}{3}\vec{f}_2$$

bulunur. Bu ifadeler taban dönüşüm denklemine aktarılırsa, yani

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2$$

ifadesine yazılırsa,

$$\frac{1}{3}\vec{f}_1 - \frac{1}{3}\vec{f}_2 + 2(\frac{1}{3}\vec{f}_1 + \frac{2}{3}\vec{f}_2) = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2$$

buradan y değerlerini bulalım.

$y_1=1$ ve $y_2=0$

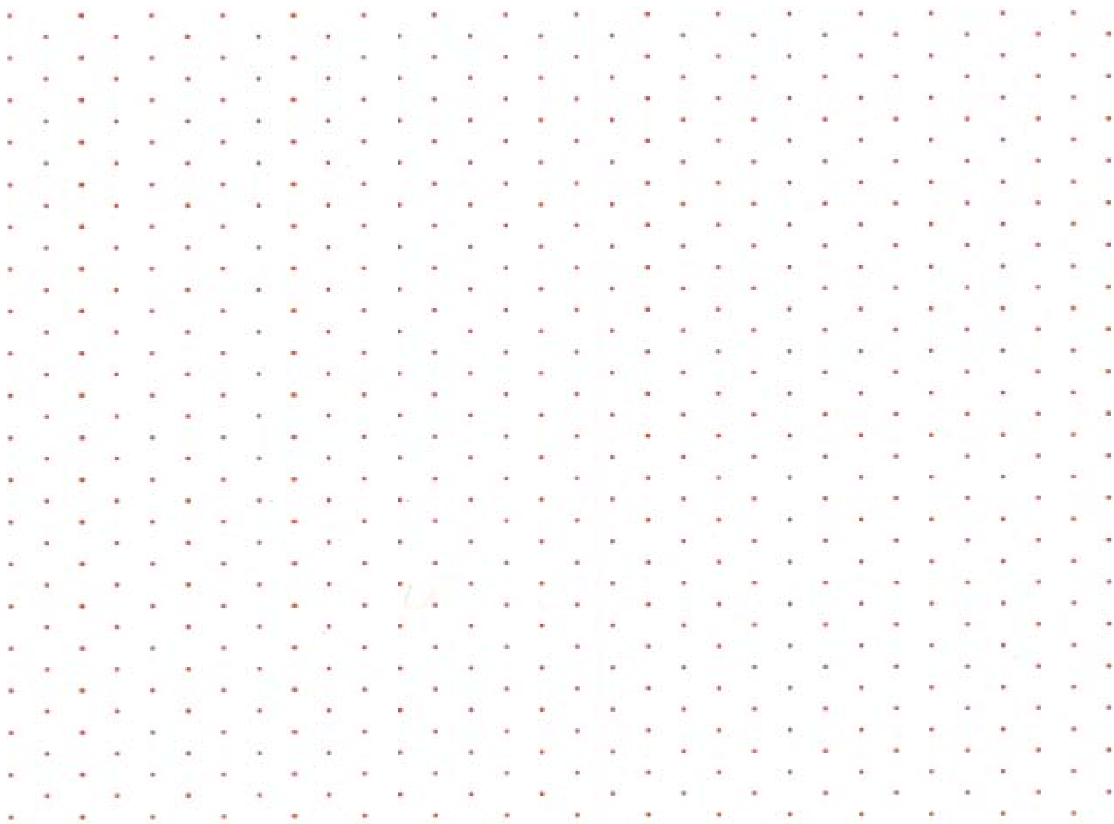
bulunur. Bu $x \in IR^2$ vektörünün W_2 çatısına göre koordinatlarının (1,0) olduğunu gösterir.

EK-39

Problemler

13. Aşağıdaki izometrik bölgeye, (ölçekli olarak) öyle bir doğru ve düzlem çiziniz ki, bu iki küme IR^3'ü tek türlü oluştursun.

14. n. dereceden polinomlar uzayı P olmak üzere, P'nin rankı için ne söyleyebilirsiniz. (ipucu: önce bu kümeden vektörler alarak denemeler yapın).



ÖDEV

5. Dersimizde IR^2'de taban dönüşümlerini gördük. IR^3'e taban dönüşümlerini nasıl olduğunu açıklayan ve örnekleyen bir ödev hazırlayınız.

EK-40

DERS PLANI-9

DERS VE KONU İLE İLGİLİ BİLGİLER	
Dersin Adı	Lineer Cebir I
Sınıf	İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2
Konu	Dönüşüm, Fonksiyon, Lineer Dönüşüm
Sınıf	3 Ders Saati (45dk+45dk+45dk)
Öğrenci Kazanımları	• Dönüşümle fonksiyon arasındaki farkı ve ilişkiyi açıklar. • Lineer dönüşüm kavramını açıklar ve örnekler. Öteleme ve simetri dönüşümlerini ifade eder.
1)Ünite Kavramları ve Sembolleri 2)Davranış Örüntüsü	• Dönüşüm • Fonksiyon • Lineer Dönüşüm
Öğretme-Öğrenme-Yöntem ve Teknikleri	• Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretimi
Kullanılan Eğitim Teknolojileri-Araç, Gereçler ve Kaynakça 1)Öğretmen 2)Öğrenci	• Bilgisayar • Projeksiyon cihazı • Powerpoint Sunumu, İzometrik Kağıt.
Öğretme-Öğrenme Etkinlikleri:	
Görüşme	• Öğrencilere dönüşümün ne demek fonksiyonun ne demek olduğu sorulur. • Dönüşüme verilen cevaplar doğrultusunda lineer dönüşüm kavramının ne olabileceği sorulur. • Bir vektör kümesinin başka bir vektör kümesine dönüşüp dönüşmeyeceği sorulur. • Lineer dönüşüm demenin doğruların doğrulara dönüşmesi mi demek olduğu sorulur.

Yöneltme	• Ders sunumu Powerpoint ve tahta ile yapılacaktır. EK-41
Netleştirme	Bu süreçte aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilir: - Yeni öğrendikleriniz hakkında ne söyleyebilirsiniz? - Dönüşüm ile fonksiyon ayrı kavramlar mıdır? - Lineer dönüşüm yazarken nelere dikkat edilir? Ölçütler nelerdir? - Fonksiyonun tersi bulunabilir. Lineer dönüşümünki de bulunabilir mi? - Lineer dönüşümler uzaklıkları korur mu?
Serbest Çalışma	EK-42 - İzometrik çizimler - Soyut problemler
Bütünleme	- Öğrencilere yeni kavramlar tamamen tekrarlanır. - Fonksiyonun özel bir dönüşüm olduğu, genellikle de yabancı kaynaklarda (geometrik anlamda) fonksiyon değil dönüşüm denildiği açıklanır. - Lineer dönüşüm kavramının geometrik vektörlerle sınırlı olmadığı tekrarlanır. - Bir geometrik şeklin bir lineer dönüşüm altında, gene aynı geometrik şekle dönüşüp dönüşmeyeceği sorulur ve tartışılır. - Bir kürenin üzerindeki tüm noktaların bir doğruya dönüşüp dönüşmeyeceği tartışılır. Lineer dönüşüm denkleminin nasıl olabileceği konuşulur. - Son olarak beyin fırtınası yapılmasının ardından ödev verilir.

EK-41

Lineer Dönüşümler

Dönüşüm nedir? Fonksiyon nedir?

$f : IR \to IR$
$x \to f(x) = x^2$ (Tek değişkenli gerçel değerli fonksiyon)

$f : IR \times IR = IR^2 \to IR$
$(x, y) \to z_1 = f(x, y) = x + y$

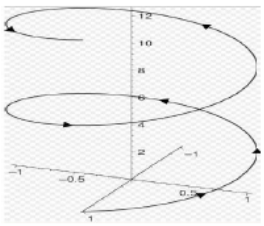
İki değişkenli, gerçel değerli fonksiyon, orijinden geçen düzlem.

$f : IR \times IR = IR^2 \to IR$
$(x, y) \to z = f_2(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

İki değişkenli, gerçel değerli fonksiyon, Kürenin üst kısmı.

$t : I \subset IR \to IR^2$
$t \to \vec{\alpha}(t) = (t, t^2)$ parabolün parametrik ifadesi.

$t : I \subset IR \to IR^2$
$t \to \vec{\delta}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $a, b \in IR$ helis eğrisidir.



$f : IR^2 \to IR^4$
$(x, y) \to f(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y, -y)$

Bunların birbirinden farkı nedir?

Dönüşümleri büyük harflerle gösteriyoruz. F, G gibi.

$F : IR^2 \to IR^3$
$(x, y) \to F(x, y) = (e^x \cos y, \ln(x + y), \tan \frac{y}{x})$

Bir dönüşümdür. IR^2'nin noktalarını alıp IR^3'e yapıştırır.

$F : IR^3 \to IR^2$
$(x, y, z) \to F(x, y, z) = (x + \sin(yz), xy^2z)$

İfadesi de bir dönüşümdür. IR^3'ün noktalarını IR^2'ye yapıştırır.

Peki Lineer dönüşüm nedir? Yukarıdaki ifadeler birer lineer dönüşüm müdür?

V ve W IR cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa;

$F : V \to W$
$\forall u \in V$ için $u \to F(u)$ dönüşümüne bir lineer dönüşüm adı verilir.

i) $\forall u, v \in V$ için $F(u + v) = F(u) + F(v) \in W$
ii) $\forall \lambda \in IR$ için $F(\lambda u) = \lambda . F(u) \in W$
sağlanacak.

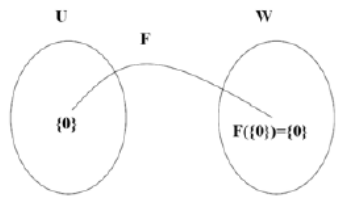
Bazı kaynaklar bu iki koşulu aynı anda; $\alpha, \mu \in IR$ olmak üzere

$F(\alpha.u+\mu.v)=\alpha.F(u)+\mu.F(v)$

biçiminde tek koşul altında ifade ederler.

$\lambda=0$ alırsak; $F(0.u)=0.F(u)=0\in W$.

Bunun anlamı: V'nin toplamsal sıfırı W'nın toplamsal sıfırına gidecek.



Örneğin; toplamsal sıfırı F altında yazdığımızda 0'a gitmiyorsa lineer dönüşüm olmaz.

Örnekler:

$F: V \to W$

$\forall u \in V$ için $u \to F(u)=0$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir lineer dönüşümdür.

i) $\forall u,v \in V$ için $F(u+v)=0=0+0=F(u)+F(v)\in W$

ii) $\forall \lambda \in IR$ için $F(\lambda u)=0=\lambda.0=\lambda.F(u)\in W$

özellikleri sağlandığından F bir lineer dönüşümdür.

$F: V \to W$

$\forall u \in V$ için $u \to F(u)=u$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir lineer dönüşümdür. Buna özdeşlik dönüşümü yada birim dönüşüm denir. Doğruluğunu gösteriniz.

$F: IR^3 \to IR^3$

$(x,y,z)\to F(x,y,z)=(x,y,0)$

Şeklinde tanımlanan dönüşüm bir lineer dönüşümdür.

$\forall \vec{x}=(x_1,y_1,z_1)$
$\forall \vec{y}=(x_2,y_2,z_2)$ için $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

Olur ayrıca $F(\vec{x})=(x_1,y_1,0)$ ve $F(\vec{y})=(x_2,y_2,0)$ olur.

i) $\forall \vec{x},\vec{y}\in IR^3$ için
$$\begin{aligned} F(\vec{x}+\vec{y}) &= (x_1+x_2, y_1+y_2, 0) \\ &= (x_1,y_1,0)+(x_2,y_2,0) \\ &= F(\vec{x})+F(\vec{y}) \end{aligned}$$

ii) $\lambda \in IR$ için, $F(\lambda\vec{x})=(\lambda x_1,\lambda y_1,0)=\lambda(x_1,y_1,0)=\lambda F(\vec{x})$.

$F: IR^2 \to IR^2$

$(x,y)\to F(x,y)=(x+1,y+2)$ şeklinde tanımlanan dönüşüme öteleme dönüşümü denir. **<u>Lineer dönüşüm değildir</u>**. Çünkü, $F(0)=(1,2)\neq(0,0)$ dır.

Her dönüşüm lineer değildir. Yazılan sıralı n-lilerin lineer olması gerekir. Örneğin;

■ Bileşenlerin içerisinde sabit terim olmaz.

■ Transandantal fonksiyonlar olmaz.

■ Çarpım şeklinde, n. Dereceden ifadeler olmaz.

Örneğin;

$F : IR^3 \to IR^4$

$(x, y, z) \to F(x, y, z) = (2x + y - z, x + z, x - z, z)$

Bu bir lineer dönüşümdür. İstenen özellikleri sağlar.

$F : IR^2 \to IR^3$

$(x, y) \to F(x, y) = (e^x \cos y, \ln(x + y), \tan \frac{y}{x})$

$F : IR^3 \to IR^2$

$(x, y, z) \to F(x, y, z) = (x + \sin(yz), xy^2 z)$

Bunlar sadece dönüşümdür, lineer **değildir.** İstenen özellikleri sağlamaz.

Örnek:

$F : IR^2 \to IR^2$

$(x, y) \to F(x, y) = (x.\cos\theta + y.\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$

Dönüşümü lineerdir. Çünkü trigonometrik ifadeler değişken değil sabit sayı durumundadır.

Buna dönme dönüşümü denir. Örneğin; $\theta = \frac{\pi}{4}$ alındığında daha açık görülür.

Örnek: $F : IR^2 \to IR^2$, $(x, y) \to F(x, y) = (x + y, x - y)$ lineer dönüşümü verilsin. Bu dönüşüm altında;

i) A(2,3) noktasının görüntüsünü;

ii) Bu dönüşüm altında x+y=1 doğrusunun görüntüsünü bulunuz.

iii) $x^2+y^2=1$ çemberinin görüntüsünü bulunuz.

EK-42

Problemler

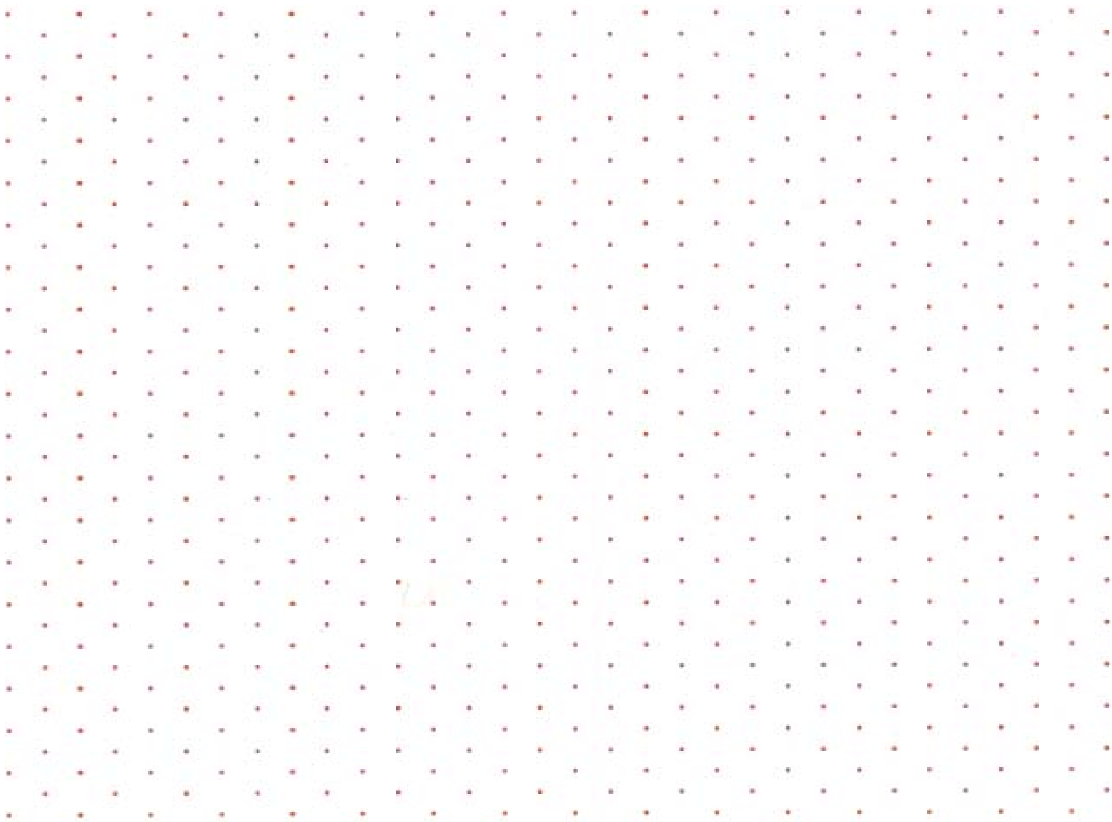
15. Üç boyutlu uzaydan üç boyutlu uzaya bir lineer dönüşüm tanımlayınız. Lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz ve dönüşüm grafiğini aşağıdaki izometrik bölgeye çiziniz.

16. [0,1] aralığındaki tüm reel değerli ve sürekli fonksiyonlar V olmak üzere

$$j : V \to IR$$

$$j(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

şeklinde tanımlanan j dönüşümü, bir lineer dönüşüm müdür?



ÖDEV

6. IR^3 uzayındaki bir düzlem üzerindeki noktalar, bir doğru üzerinde toplanabilir? Bir düzlem bir doğruya dönüşebilir mi?