

**LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ VE UYGULAMA
ALANLARI**

Tuba KAPLAN

Yüksek Lisans Tezi

**İlköğretim Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Ahmet IŞIK
2011
(Her Hakkı Saklıdır)**

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ VE UYGULAMA ALANLARI

(Linear Equation Systems and Their Applications)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuba KAPLAN

Danışman: Prof. Dr. Ahmet IŞIK

ERZURUM

Temmuz, 2011

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Prof. Dr. Ahmet IŞIK danışmanlığında, Tuba KAPLAN tarafından hazırlanan “ Lineer denklem sistemleri ve uygulama alanları” başlıklı çalışma ^{29.10.2011} tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından. İlköğretim Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ahmet IŞIK

İmza:

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Abdullah KAPLAN

İmza:

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Enver TATAR

İmza:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.. / .. /

Prof. Dr. H.Ahmet KIRKKILIÇ
Enstitü Müdürü

TEZ ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

Yüksek Lisans/Doktora Tezi olarak sunduğum " Lineer Denklem Sistemleri ve Uygulama Alanları" başlıklı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve onurumla doğrularım.

Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

- Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.
- Tezim sadece Atatürk Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.
- Tezimin yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

09/07/2011



İmza

Tuba KAPLAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ VE UYGULAMA ALANLARI

Tuba KAPLAN

2011, 87 sayfa

Lineer denklem sistemleri; matematik, fizik, elektrik- elektronik mühendisliği ve uygulamalı bilimlerde sıkça kullanılır duruma gelmiştir. Lineer denklem sistemleri ve çözüm metodları bilimsel olarak da çalışılan ve araştırılan bir konudur. Lineer cebirin temel konularından biri olan lineer denklem sistemleri teknolojiyle yakından ilgili olup günlük hayatımızda karşılaştığımız birçok uygulamada ortaya çıkmaktadır. Lineer denklem sistemlerinin kuramsal temellerinin ve uygulama alanları ile birlikte bilime katkısının araştırıldığı bu çalışmada, lineer denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri belirtilmiş ve mühendislik, fizik, kimya ve daha birçok bilim dalında yer alan farklı uygulamalarına ve örneklere yer verilmiştir.

Çalışmada ulusal ve uluslararası alan-yazın araştırması yapılmış ve tarama modeli kullanılmıştır. Sonuç olarak, lineer denklem sistemlerinin mühendislik, fizik, ekonomi gibi birçok alanda kullanıldığı ve güncel problemlerde de kolaylık sağlayan farklı uygulama alanlarına sahip olduğu tespit edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Lineer denklem sistemleri, lineer denklem sistemlerinin uygulama alanları

ABSTRACT

MASTER THESIS

LINEAR EQUATION SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS

Tuba KAPLAN

2011, 87 pages

Linear equation systems have become widely used in mathematics, physics, electricity- electronic engineering and in applied sciences. Linear equation systems and their solution methods are also among those topics which are studied and researched scientifically. Linear equation systems which are among the basic topics of linear algebra, are closely related to technology and they occur in many problems we encounter in our daily life. In this study in which theoretical basics and application fields of linear equation systems as well as the contributions of them to science have been investigated, solution methods of linear equation systems are explained and various applications and examples existing in engineering, physics, chemistry and many other sciences have been introduced.

Literature review has been performed in national and international standard and descriptive model is adopted for the study. As a result, it is determined that linear equation systems are used in many fields such as engineering, physics and economics and also those systems have been determined to have also various usage aspects providing convenience to daily problems.

Key Words: Linear equation systems, application field of linear equation systems

TEŞEKKÜR

Yardımlını, emeğini ve sabrını esirgemeyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Ahmet IŞIK'a; ¼lkemizin saygın kurumları arasında yer alan ve sağladığı bursla y¼ksek lisans yapmamı destekleyen T¼B¼TAK'a; bilgileriyle bana yardımcı olan Atat¼rk ¼niversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fak¼ltesi İlk¼đretim ve Orta¼đretim Matematik Ana Bilim Dalının ve M¼hendislik Fak¼ltesinin saygıdeğer ¼đretim elemanlarına; imlâ kuralları a¼ısından tezimi okuyan Ferhat ¼ZT¼RK, Bilge B¼BER, Seda OKUMUŐ, ¼etin YILDIZ ve Aysun YEŐİLYURT'a ve moral katkılarından dolayı aileme teőekk¼r¼ bir bor¼ bilirim.

Erzurum – 2011

Tuba KAPLAN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI	i
TEZ ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
TABLOLAR DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
KISALTMALAR DİZİNİ.....	x

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ.....	1
---------------	---

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE	5
---------------------------	---

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM	9
3.1. Lineer Denklem Sistemleri.....	9
3.2. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri	29
3.2.1. Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi	30
3.2.2. Gauss Eliminasyon Yöntemi	31
3.2.3. Cramer Yöntemi	32
3.2.4. Ters Matris ile Çözüm Yöntemi	34
3.2.5. LU Ayrıştırma Yöntemi.....	34
3.2.6. Thomas Yöntemi	36
3.2.7. Jacobi Basit İterasyon Yöntemi	39

3.2.8. Gauss-Seidel İterasyon Yöntemi	40
---------------------------------------------	----

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR ve YORUMLAR	41
4.1. Lineer Denklem Sistemlerinin Uygulama Alanları.....	41
4.1.1. Lineer Denklem Sistemleri ile Polinomların Katsayılarını Belirleme.....	42
4.1.2. Elektrik Devreleri	44
4.1.3. Kimyasal Denklemlerin Denkleştirilmesi.....	47
4.1.4. Bir Reaktör Sisteminin Kararlı Hal Analizi	49
4.1.5. Statik Olarak Belirlenmiş Bir Kafes Yapının Analizi	52
4.1.6. Yay Kütle Sistemleri.....	55
4.1.7. Trafik Akışı Probleminin Modellenmesi	57
4.1.8. Leontief Ekonomi Modeli.....	59
4.1.9. Makara Sistemleri	61
4.1.10. Denge Sıcaklık Dağılımları	64
4.1.11. Bilgisayarlı Tomografi	72
4.1.12. Su Destek Problemi	76
4.1.13. Küresel Konumlandırma Sistemi.....	78
4.2. Yorumlar	81

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ ve ÖNERİLER	83
KAYNAKÇA.....	84
ÖZ GEÇMİŞ	87

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1. Elektrik ve su Şirketlerinin i ve dış talepleri	60
Tablo 2. Ortak kafes noktalarında sıcaklıklar	71

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. İki denklemlili iki bilinmeyenli lineer denklem sisteminin çözüm durumları ..	12
Şekil 4.2. n. dereceden bir polinomun grafiği	42
Şekil 4.3. $y = x^2 - 6x + 11$ polinomunun grafiği	44
Şekil 4.4. Bir elektrik devresi örneği	46
Şekil 4.5. Bir elektrik devresinin şematik gösterimi	46
Şekil 4.6. Tek reaktörlü bir sistem örneği	49
Şekil 4.7. Beş reaktörlü bir sistem örneği	51
Şekil 4.8. Statik olarak belirlenmiş bir kafes sisteminde kuvvetlerin gösterimi.....	52
Şekil 4.9. Statik olarak belirlenmiş bir kafes sisteminde her birleşme noktasındaki serbest cisim kuvvetlerin gösterimi.....	53
Şekil 4.10. n serbestlik dereceli zincir şekilli sistem	55
Şekil 4.11. İki serbestlik dereceli zincir şekilli sistem	55
Şekil 4.12. Trafik ağ şeması.....	57
Şekil 4.13. Sabit makara düzeneği	62
Şekil 4.14. Sabit makara düzeneği modeli	62
Şekil 4.15. Her bir kütleye etki eden kuvvetlerin gösterimi	63
Şekil 4.16. Isıca yalıtılmış plaka ve eş sıcaklık eğrisi.....	64
Şekil 4.17. Isıl dengede olan bir plaka temsili.	65
Şekil 4.18. 1, 9, 49 iç kafes noktalı plaka temsilleri	66
Şekil 4.19. 9 iç kafes noktasına sahip plakanın noktasal sıcaklık değerleri.....	69
Şekil 4.20. 49 iç kafes noktasına sahip plakanın noktasal sıcaklık değerleri.....	70
Şekil 4.21. x-ışın tomografisine hazırlanan bir hasta.....	72
Şekil 4.22. Bir hasta kafatasının bilgisayar destekli tomografi görüntüsü.....	72
Şekil 4.23. x-ışını ile görüntü alımının şematik gösterimi	73
Şekil 4.24. Bir pixelden x-ışınlarının geçişinin temsili.....	73
Şekil 4.25. x-ışınlarının aynı satırdaki ardışık pixellerden geçişinin temsili	74
Şekil 4.26. Bir su şebekesinin temsili örneği	76
Şekil 4.27. Üç uydunun temsili gösterimi	79

KISALTMALAR DİZİNİ

GPS : Global Positioning System (Küresel Konumlama Sistemi)

LU : Lower-Upper (Alt-üst üçgen ayrışımı)

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Lineer cebirin temel konuları arasında yer alan lineer denklem sistemleri, matrisler, determinantlar, lineer dönüşümler, lineer bağımsızlık, boyut, bilinear formlar, quadratik formlar ve vektör uzayları gibi konular matematiğin farklı alanlarında ve uygulamalarında sıkça kullanılır. Aynı zamanda bu konular lineer denklem sistemleri ve matrisler gibi birbiriyle ilişkili konulardır. Bu nedenle lineer cebirin sayılar teorisi, geometri, cebir (grup, halka,...), analiz (diferansiyel denklemler, integral denklemleri, fonksiyonel analiz) ve fizik gibi farklı alanlarla yakından ilişkili olması şaşırtıcı değildir (Kleiner, 2007: s. 79-80).

Lineer denklem sistemleri 4000 yıl önce Babillilerin iki bilinmeyenli lineer denklem sisteminin nasıl çözüleceğini açıklamasıyla kullanılmaya başlanmıştır. Milattan önce 200 yılında Çinlilerin ünlü "Nine Chapters of the Mathematical Art" isimli eserinde sistemin katsayılarıyla çalışılarak üç bilinmeyenli üç denklemlerli lineer denklem sistemi çözülmüştür (Kleiner, 2007: s. 79-80). Lineer cebir konularının ve matrislerin geliştirilmesi ve sunulması, lineer denklem sistemlerinin katsayılarının çalışılmasıyla ortaya çıkan determinantları takip eder. Analizin ilk öncülerinden biri olan Leibnitz, 1693 yılında determinantları kullanmıştır. Lineer denklem sistemleri ile ilgili çalışmaların Leibnitz ile başladığı söylenebilir ancak Leibnitz'in çalışmaları ilgi görmemiştir (<http://darkwing.uoregon.edu>; Kleiner, 2007: s. 79-80). 1750 de Cramer "Introduction to the Analysis of Algebraic Curves" isimli kitabında $n \times n$ lineer denklem sistemlerinin çözümü için kendi adıyla bugün "Cramer Kuralı" diye bilinen determinant temelli bir kural yayımlamıştır ancak Cramer bu kuralın ispatını yapamamıştır. Cramer, geometrik bir problemi çözmek için çabalarken $(1/2)n^2 + (3/2)n$ sabit noktalarından geçen 2. dereceden bir cebirsel eğriyi belirleyerek, lineer denklem sistemlerinin çalışılmasına sebep olmuştur (<http://darkwing.uoregon.edu>; Kleiner, 2007: s. 79-80).

Matematik bilimindeki ilerlemelerle birlikte lineer denklem sistemlerinin çözümünde daha özel durumlarla ilgilenilmeye başlanmıştır. Euler tek çözüme sahip olması gerekmeyen n bilinmeyenli n denklem sistemini ilk inceleyenlerden biri olmuştur. Belirli şartlar verilmemesine rağmen bir denklemin diğerlerine bağlı olma fikri Euler'e aittir. 18. yüzyılda lineer denklem çalışmaları genellikle determinantları kapsadığından denklem sayısı bilinmeyen sayısından farklı olan denklem sistemlerinin üzerinde durulmamıştır (Kleiner, 2007: s. 79-80).

1800'lü yıllarda Gauss ve arkadaşları, Gauss eliminasyonunu geliştirmişlerdir. Lineer denklem sisteminden değişkenlerin art arda elimine edilmesinden ibaret olan bu yöntem Gauss'un adıyla anılmasına rağmen birkaç yüzyıl önce Çin el yazmalarında Gauss eliminasyon metodu ile üç bilinmeyenli üç denklem sisteminin nasıl çözülebileceğinin açıklandığı bulunmuştur. Gauss, Pallas Asteroidi'nin yörüngesi üzerine çalışırken Gauss eliminasyonunu kullanmıştır. 1803-1809 yılları arasında Pallas'ı gözlemleyen Gauss, altı bilinmeyenli altı denklemlilik bir lineer denklem sistemi elde etmiştir (O' Connor ve Robertson, 1996). En az kare metodunun bulunmasına bağlı olarak, 1811'de Pallas Asteroidi'nin yörüngesinin belirlenmesi ile ilgili olarak bir makale yayımlanmıştır ve Gauss, matris notasyonunu kullanmamasına rağmen, lineer denklem sistemlerinin çözümü için Gauss Eliminasyon metodu ile denklem sayısının bilinmeyen sayısından farklı olması durumu ile de ilgilenmiştir (Kleiner, 2007: s. 79-80).

Lineer denklem sistemlerinin çözüm yöntemlerinden biri olan Gauss-Jordan eliminasyon metodu ise, ilk olarak Wilhelm Jordan tarafından 1888'de yazılan "Geodesy Handbook" da tanımlanmıştır (<http://darkwing.uoregon.edu>).

19. yüzyılın ikinci yarısında, denklem sistemlerinin tutarlılıklarını kapsayan lineer denklem sistemlerinin teorik özellikleri ile ilgilenilmiştir (Kleiner, 2007: s. 79-80).

II. Dünya Savaşı'ndan sonra modern dijital bilgisayarların gelişmesi ile birlikte matrislere, özellikle de matrislerin analizine olan ilgi artmıştır (<http://darkwing.uoregon.edu>). 20. yüzyılda Alan Turing ve Von Neumann bilgisayar programlamasında öncülerden olmuşlardır. Turing, 1948'de bir matrisin LU (Lower-

Upper) ayrışımını yapmıştır. L'yi, köşegenleri 1 olan üst köşegen matris ve U'yu, eşelon matris olarak tanımlamıştır. LU ayrışım metodu lineer denklem sistemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılmıştır (<http://darkwing.uoregon.edu>; Kleiner, 2007: s. 79-80). Lineer denklem sistemlerinin çözümüne ilişkin çeşitli yöntemlerin bulunması fizik, mühendislik, ekonomi, mekanik gibi alanlarda birçok problemde lineer denklem sistemlerinin kullanımını arttırmıştır.

Lineer denklem sistemlerinin çözümlerini gerektiren problemlerin varlığı ve birçok mühendislik problemde mertebesi çok değişkenli lineer denklem sistemlerinin kullanılması, lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılacak bilgisayar algoritmalarının önemini gittikçe artırmaktadır. Bu yüzden büyük lineer denklem sistemleri için işlem sayısı bakımından daha ekonomik, alternatif çözüm yöntemleri bulma çabası hala devam etmektedir.

Matematik kendi doğruları olan bir bilim dalı olmasına rağmen diğer bilim dalları ile yakın ilişkili olduğundan bu bilim dallarında bir araç olarak kullanılmaktadır. Matematiğin bir alt dalı olan lineer cebirin, mühendislik, fizik, sosyal bilimler ve davranış bilimleri için önemi gittikçe artmaktadır (Williams, 2001; Işık, 2004). Sosyal bilimlerde özellikle ekonomide çeşitli teorilerin ispatı için matematik kullanılmıştır. (Hadley, 1979). İletişimde, tıpta, mühendislikte ve hesaplama teknolojisindeki her yeni ilerleme, lineer cebirin önemini artırmaktadır. Ayrıca lineer cebirin havacılık ve uzay sanayide, elektrik devreleri, iletişim ağları, arkeoloji, hava tahminleri, nüfus değişimi, ticaret gibi konulara katkıları yadsınamaz (Williams, 2001).

Bir problemin çözümü söz konusu olduğunda ise, genellikle lineer denklem sistemleri akla gelir. Lineer denklem sistemlerinin tarihsel gelişimi boyunca genel teorisinin yanı sıra sistemlerin çözümüne yönelik çeşitli metodlar üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Bu metodların bilgisayar ve teknolojinin gelişmesine paralel olarak çeşitli güncel modellerin oluşturulmasında önemli olduğu bilinmektedir. Güncel modellerin doğası birçok faktöre bağlıdır ancak genellikle problemin ortaya çıktığı bilimler matematiğin diğer dalları ve lineer cebirin etkileşimini gerektirir (Moore ve Yaqup, 1998).

Bu çalışmanın amacı, lineer denklem sistemlerinin kuramsal temellerini inceleyerek, bu denklem sistemlerinin günlük hayatla ilişkili olan bilimsel ve teknik uygulamalardaki yerini ve önemini tespit etmektir.

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE

Tanım 2.1. K boştan farklı bir küme olmak üzere, $f: K \times K \rightarrow K$ ile tanımlanan fonksiyona K kümesi üzerinde bir ikili işlem denir (Işık, 2002).

"*" bir ikili işlem olmak üzere işlem bir fonksiyon olduğundan aşağıdaki iki özellik sağlanır.

i. $a, b \in K$ olmak üzere her (a, b) sıralı ikilisine "*" işlemi altında K nın $a * b$ elemanı karşılık gelir. (kapalılık özelliği)

ii. Bu eleman teklikle belirli olup $a * b$ ile gösterilir. (iyi tanımlılık)

Tanım 2.2. K boştan farklı bir küme olmak üzere, üzerinde ikili işlemin tanımlandığı K kümesine cebirsel yapı denir ve $(K, *)$ ile gösterilir (Bozkurt, Türen ve Solak, 2005).

Tanım 2.3. Bir K kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(K, +, \cdot)$ matematik sistemine cisim denir (Işık, 2002).

1) $(K, +)$ değişmeli (abel) grup,

2) (K, \cdot) değişmeli (abel) grup,

3) "." işleminin "+" işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır; her $x, y, z \in K$ için

i. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

ii. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

dir.

Tanım 2.4. K boş olmayan bir küme ve "*" , K da bir ikili işlem olsun. $(K, *)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(K, *)$ ya bir grup denir (Taşçı, 2005; Işık, 2002).

1-) "*" , K da bir ikili işlemidir.

2-) "*" işleminin K da birleşme özelliği vardır. Yani $\forall a, b, c \in K$ için,

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

dir.

3-) "*" işleminin K da birim elemanı vardır. Yani $\forall a, b, c \in K$ için,

$$a * e = e * a = a$$

olacak şekilde bir $e \in K$ vardır.

4-) "*" işlemine göre, K daki her elemanın bir tersi vardır. Yani $a \in K$ için,

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

olacak şekilde bir $a^{-1} \in K$ bulunabilir.

Tanım 2.5. $(K,*)$ bir grup ve $\forall a, b \in K$ için $a * b = b * a$ değişme özelliği sağlanıyorsa $(K,*)$ cebirsel yapısına değişmeli grup veya abel grup denir (Çallıalp, 2009).

Tanım 2.6. K bir cisim olsun. $S \subset K$, $K \neq \emptyset$ kümesi için S kümesi K daki işlemlere göre cisim ise bu cisme K cisminin altcismi denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.7. V boştan farklı bir küme ve $(K, +, \cdot)$ bir cisim olsun.

$$(c, \alpha) \in K \times V \rightarrow c\alpha \in V$$

fonksiyonu (işlemi) aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa V ye K cismi üzerinde bir vektör uzayı denir (Işık, 2002).

- 1) Her $\alpha, \beta, \gamma \in V$ için $(V, +)$ değişmeli gruptur.
- 2) $c_1, c_2 \in K$ skalerleri ve $\alpha, \beta \in V$ vektörleri için ,
 - i. $(c_1 + c_2) \cdot \alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$
 - ii. $(\alpha + \beta)c_1 = \alpha c_1 + \beta c_1$
 - iii. $(c_1 \cdot c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha) = c_2(c_1\alpha)$
 - iv. Her $\alpha \in V$ için $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$

dır. Ayrıca $K = R$ ise V ye reel vektör uzayı, $K = \mathbb{C}$ ise V ye kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 2.8. V, K cismi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq U \subset V$ olsun. U da V uzayının cebirsel işlemlerine göre bir vektör uzayı olsun. Bu durumda U uzayına V uzayının bir alt vektör uzayı denir ve $U \subset V$ ile gösterilir. Yani, her $u_1, u_2 \in U$ ve $\alpha \in K$ skaleri için,

$$\alpha u_1 + u_2 \in U$$

ise U, V vektör uzayının alt vektör uzayıdır (Başar, 2002).

Tanım 2.9. Başlangıcı, yönü, doğrultusu ve büyüklüğü belli olan doğru parçalarına vektör denir (Işık, 2002).

Tanım 2.10. F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya matris denir. $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$r_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$$

ifadesine matrisin satırları ve $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

ifadesine de matrisin sütunları denir. m satırlı n sütunlu bir matrise $m \times n$ matris denir (Taşçı, 2005).

Tanım 2.11. Bir K cismi üzerinde her A kare matrisine özel bir skaler karşılık gelir. Bu skalere A matrisinin determinanı denir ve genel olarak $\det A, |A|$ ile gösterilir (Işık, 2002).

Tanım 2.12. A , $m \times n$ tipinde sıfırdan farklı bir matris olmak üzere, bu matrisin bütün alt kare matrisleri arasında determinanı sıfırdan farklı olanların mertebelerinin en büyüğüne A matrisinin rankı denir (Taşçı, 2006).

Tanım 2.13. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ F cismi üzerinde tanımlı V vektör uzayının sonlu sayıdaki vektörleri ve $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ skalerleri için,

$$\beta = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_n$$

olarak yazılabiliyorsa β vektörüne α_i vektörlerinin lineer kombinasyonu (lineer terkibi veya lineer birleşimi) denir (Işık, 2002).

Tanım 2.14. v_1, v_2, \dots, v_n bir V vektör uzayının elemanları olmak üzere, v_1, v_2, \dots, v_n V yi geriyorsa ve bu vektörler lineer bağımsız ise, v_1, v_2, \dots, v_n vektörleri V vektör uzayının bir tabanını (baz) oluşturur (Kolman ve Hill, çev. 2010).

Tanım 2.15. Sıfırdan farklı bir V vektör uzayının boyutu, V vektör uzayının bir tabanındaki vektör sayısıdır. V nin boyutu genellikle $boy V$ ile gösterilir (Kolman ve Hill, çev. 2010).

Tanım 2.16. Ters olmayan bir matrise singüler matris denir (Kolman ve Hill, çev. 2010).

Tanım 2.17. A $n \times n$ kare matrisinin i inci satır ve j inci sütunu ihmal edilerek $n - 1$ kare matrisi elde edilir. Bu matris M_{ij} ile gösterilirse, $|M_{ij}|$ determinantına A matrisinin a_{ij} elemanının minörü denir (Işık, 2002; Kolman ve Hill, çev. 2010).

Tanım 2.18. A $n \times n$ bir kare matris ve $|M_{ij}|$, a_{ij} elemanının minörü olmak üzere, a_{ij} elemanının A_{ij} kofaktörü,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

olarak tanımlanır (Işık, 2002; Kolman ve Hill, çev. 2010).

Tanım 2.19. Sıfırdan farklı elemanları köşegen etrafında toplanmış matrise bant matris denir. Başka bir ifade ile eğer $A = (a_{ij})$ kare matrisi $|i - j| > 1$ olduğunda $a_{ij} = 0$ şartını sağlıyorsa A matrisine bant matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

şeklindeki matris 4×4 bant matrisine örnek verilebilir (Taşçı, 2006).

Tanım 2.20. A ve B boştan farklı iki küme olmak üzere, A nın her bir elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen f bağıntısına fonksiyon denir ve $f: A \rightarrow B$ ile gösterilir (Işık, 2002).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM

3.1. Lineer denklem sistemleri

Tanım 3.1. $a_i, b \in K$ ve x_1, x_2, \dots, x_n değişkenler olmak üzere,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

şeklinde bir ifadeye lineer denklem denir (Işık, 2002).

Tanım 3.2. K bir cisim olsun. b_1, b_2, \dots, b_m ve $a_{ij} \in K$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$), x_1, x_2, \dots, x_n bilinmeyenler olmak üzere;

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

şeklinde verilen ifadeye n bilinmeyenli m denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi denir (Bozkurt, Türen ve Solak, 2005). Bu denklem sistemi kısaca,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

şeklinde de ifade edilebilir (Çallıalp ve Kuroğlu, 1996).

Tanım 3.3. (3.1) ile verilen sistemde $b = [b_1, \dots, b_m]^T$ sütun vektörü sıfır ise sisteme homojen lineer denklem sistemi denir (Bozkurt ve diğerleri, 2005). Yani,

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

şeklinde b_i lerin sıfır olduğu lineer denklem sistemine homojen lineer denklem sistemi denir (Işık, 2002).

Tanım 3.4. m denklem ve n bilinmeyenden oluşan

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

lineer denklem sistemini göz önüne alalım. x_1, x_2, \dots, x_n bilinmeyenleri, a ve b ler ise sabitleri ifade etmek üzere lineer denklem sistemi matrislerle,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \rightarrow AX = B$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadede,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ matrisi katsayılar matrisi,}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ matrisi bilinmeyenler sütun matrisi,}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ matrisi sabitler sütun matrisi}$$

olarak tanımlanır (Eren ve Razbonyalı, 2006).

Tanım 3.5. $AX = B$ sisteminde A katsayılar matrisine $n + 1$ inci sütun olarak B sütun matrisini yazarak elde ettiğimiz $m \times (n + 1)$ tipindeki matrise arttırılmış (genişletilmiş, augmented, ilaveli) matris denir. Buna göre (3.1) sisteminin ilaveli matrisi

$$[A : B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

dir (Çallıalp ve Kuroğlu, 1996).

A katsayılar matrisi, arttırılmış matrisin alt matrisidir ve arttırılmış matris bir denklem sistemini tamamen ifade eder (Williams, 2001).

Tanım 3.6. (3.1) lineer denklem sistemini göz önüne alalım. (3.1) lineer denklem sistemi,

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir ve bu denklem sisteminin vektörel formu

$$\begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_n & \vec{b} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \end{array}$$

olarak tanımlanır. Kısaca,

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{b}$$

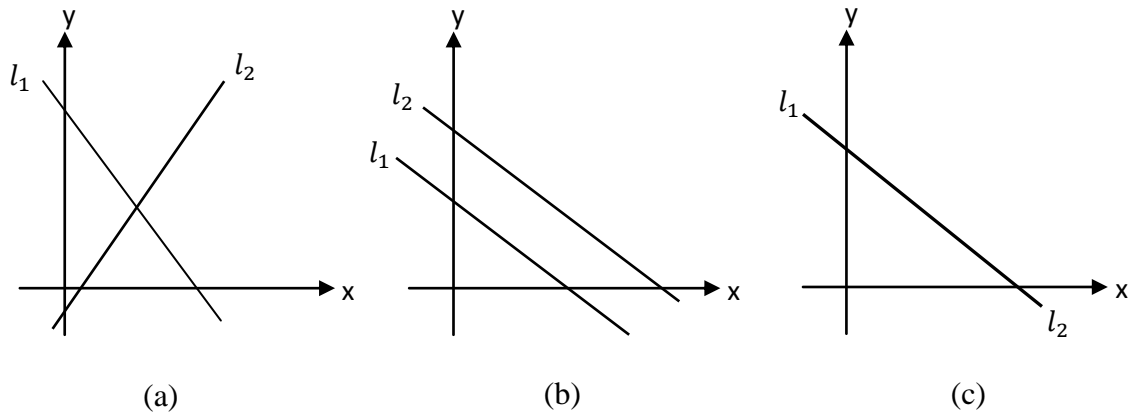
yazılır (Bretscher, 2001).

Tanım 3.7. $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ değerleri için sistemin bütün denklemlerini aynı anda sağlayacak c_1, c_2, \dots, c_n elemanlarının kümesine (3.1) lineer denklem sisteminin çözüm kümesi denir (Taşçı, 2006). Bir lineer denklem sistemi, bir veya sonsuz sayıda çözüme sahip olabileceği gibi çözümü olmayabilir. Çözümü olan bir sisteme tutarlı sistem ve çözüme sahip olmayan sisteme de tutarsız sistem denir (Başar, 2002).

Aşağıdaki iki bilinmeyenli iki denklemlili lineer denklem sistemi için çözüm olup olmadığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= c_1 \\ b_1x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Denklem sistemi göz önüne alınırsa, bu denklem sisteminin her bir denkleminin grafiği birer doğru belirtir. Bu doğrular l_1, l_2 olmak üzere, verilen lineer denklem sisteminin çözümü aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Şekil (3.1) gösterildiği gibi Şekil 3.1 (a) da doğrular bir noktada kesiştikleri için tek bir çözüm vardır. Şekil 3.1 (b) de doğrular birbirine paralel olup çözüm yoktur ve Şekil 3.1 (c) de iki doğru çakışık olduğundan sonsuz çözüm vardır (Kolman ve Hill, çev. 2010).



Şekil 3.1. İki denklemlili iki bilinmeyenli lineer denklem sisteminin çözüm durumları

Tanım 3.8. Aynı çözüm kümesine sahip olan iki denklem sistemine denk sistemler denir (Işık, 2002).

Teorem 3.1. Bir lineer denklem sistemindeki herhangi bir denkleme diğer denklemlerin lineer kombinasyonlarını eklemekle veya denklemlerden birisini sıfırdan farklı bir skalerle çarpmakla elde edilen yeni lineer denklem sistemi orjinal sisteme denktir.

İspat:

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

lineer denklem sistemini göz önüne alalım. (a_1, a_2, \dots, a_n) bu sistemin bir çözümü olsun. Birinci denklemi c_1 , ikinci denklemi c_2 ve böylece devam ederek m . denklemi de c_m ile çarpıp i . denklemle toplayalım. Bu durumda denklem sistemi,

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \vdots \\ c_1 a_{11}x_1 + c_1 a_{12}x_2 + \cdots + c_1 a_{1n}x_n \\ + c_2 a_{21}x_1 + c_2 a_{22}x_2 + \cdots + c_2 a_{2n}x_n \\ + \cdots + c_i a_{i1}x_1 + c_i a_{i2}x_2 + \cdots + c_i a_{in}x_n \\ + \cdots + c_m a_{m1}x_1 + c_m a_{m2}x_2 + \cdots + c_m a_{mn}x_n & = & c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_m b_m \\ \dots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

şeklinde yazılır. (a_1, a_2, \dots, a_n) , (3.3) sisteminin çözümü olduğundan i . denklemin dışındaki denklemleri sağlayacaktır. Ayrıca yukarıdaki çözüm, i . denklemde yerine konulursa katsayıları c_1 olan denklem $c_1 b_1$ e, katsayıları c_2 olan denklem $c_2 b_2$ ye ve böylece devam ederek katsayıları c_m olan denklem de $c_m b_m$ ye eşit olacaktır. Bu ise (3.4) denklemindeki i . denklemin sağ yanı ile sol yanının eşit olması demektir. O halde aynı çözüm takımı i . denklemi de sağlamaktadır. Dolayısıyla (3.3) sistemi ile (3.4) sistemi denk sistemlerdir (Bozkurt ve diğerleri, 2005).

Tanım 3.9. (3.1) lineer denklem sisteminin her bir denklemini c_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ile çarpıp toplamakla elde edilen

$$\left(\sum_{k=1}^m c_k a_{k1} \right) x_1 + \left(\sum_{k=1}^m c_k a_{k2} \right) x_2 + \dots + \left(\sum_{k=1}^m c_k a_{kn} \right) x_n = \sum_{k=1}^m c_k b_k \quad (3.5)$$

denklemine (3.1) lineer denklem sistemindeki denklemlerin bir lineer birleşimi denir (Başar, 2002).

Teorem 3.2. (3.1) lineer denklem sisteminin herhangi bir çözümü, (3.5) lineer birleşiminin de bir çözümüdür.

İspat: (3.1) lineer denklem sisteminin çözümü $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ olsun. Yani,

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n = b_i; \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.6)$$

denklemi yazılabilir. O halde u vektörünün (3.5) denkleminin de bir çözümü olduğu gösterilmelidir.

Bunun için,

$$\left(\sum_{k=1}^m c_k a_{k1} \right) u_1 + \left(\sum_{k=1}^m c_k a_{k2} \right) u_2 + \dots + \left(\sum_{k=1}^m c_k a_{kn} \right) u_n = \sum_{k=1}^m c_k b_k$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu denklem,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{1k} u_k \right) c_1 + \left(\sum_{k=1}^n a_{2k} u_k \right) c_2 + \dots + \left(\sum_{k=1}^n a_{mk} u_k \right) c_n = \sum_{k=1}^m c_k b_k$$

şeklinde düzenlenirse u vektörünün (3.5) denkleminin de çözümü olduğu görülür (Başar, 2002).

Teorem 3.3. (Kronoker - Kopelli teoremi) (3.1) lineer denklem sisteminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart A katsayılar matrisinin (asal matris) rankının $[A : B]$ artırılmış (genişletilmiş) matrisinin rankına eşit olmasıdır.

İspat: (3.1) sistemi tutarlı olsun, bu durumda

$$\text{Rank } A = \text{Rank } [A : B]$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

(3.1) sistemi tutarlı ise bu durumda bu sistemin tüm denklemlerini sağlayan

$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ çözümleri vardır. O halde $x_i = c_i, i = 1, 2, \dots, n$ değerleri

(3.1) sisteminde yerine yazılırsa m tane

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n &= b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n &= b_m \end{aligned} \quad (3.7)$$

denklemini elde edilir. $[A : B]$ arttırılmış matrisinin sonuncu sütun vektörü diğer kalan sütun vektörlerinin lineer kombinasyonu biçiminde gösterilmektedir. Yani,

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektörü, $u_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$, $u_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots$,
 $u_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ vektörleri cinsinden

$$b = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden görüldüğü gibi b vektörünü $[A : B]$ arttırılmış matrisinin alt sütun vektörlerinin oluşturduğu (u_1, u_2, \dots, u_n) vektörler sisteminin lineer kombinasyonu şeklinde göstermek mümkündür. Diğer bir deyişle, b vektörü, A matrisini oluşturan sütun vektörlerinin lineer kombinasyonu şeklinde gösterilmektedir. Öte yandan, A matrisini oluşturan sütun vektörleri $[A : B]$ matrisinin sütun vektörlerinin alt sistemi olduğu için, bu sistemin lineer kombinasyonu biçiminde gösterilebilir. Böylece A ve $[A : B]$ matrislerinin sütunlarından oluşan m boyutlu vektör sistemlerinin birbirine denk olması gerektiği elde edilir. Buradan;

$$\text{Rank } A = \text{Rank } [A : B]$$

yazılır.

Tersine, $\text{Rank } A = \text{Rank } [A : B]$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Dolayısıyla A matrisinin herhangi bir maksimal lineer bağımsız sütun vektörler sistemi, $[A : B]$ arttırılmış matrisin de maksimal lineer bağımsız sütun vektörler sistemini

oluşturmaktadır. Bu nedenle, $[A : B]$ matrisinin sonuncu sütunu, yani $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ sütunu, geri kalan sütunların lineer kombinasyonu biçiminde gösterilebilir. Diğer bir deyişle, en az bir tanesi sıfırdan farklı öyle c_1, c_2, \dots, c_n sayıları mevcuttur ki (3.8) eşitliği sağlanır. (3.8) eşitliği koordinatlarla ifade edilirse, (3.7) eşitliği yazılır. Dolayısıyla, (3.1) lineer denklem sistemini sağlayan c_1, c_2, \dots, c_n çözümü mevcuttur. Böylece teorem ispatlanmış olur (Şahmurov ve Uzgören, 1999).

Teorem 3.4. (3.1) sisteminin katsayılar matrisinin ve arttırılmış matrisinin ranklarının eşit olduğunu kabul edelim. Yani $Rank A = Rank [A : B] = r$ olsun.

a) Eğer, $r = n$ ise, bu sistemin çözümü tektir.

b) Eğer, $r < n$ ise, bu sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

İspat: Eğer $Rank A = r$ ise, A matrisi r tane maksimal lineer bağımsız satır vektörüne sahiptir. Genellikle bir şey kaybetmeden maksimal lineer bağımsız satır vektörlerinin birinci r satırdan oluştuğunu varsayalım. Bu durumda geride kalan satır vektörleri bu r satır vektörlerin lineer kombinasyonu biçiminde gösterilecektir.

Öte yandan $rank A = rank [A : B]$ olduğundan $[A : B]$ matrisinin de r satır vektörleri maksimal lineer bağımsız vektörler sistemi oluşturmaktadır. Diğer bir deyişle, $[A : B]$ matrisinin herhangi bir satır vektörü, r tane satır vektörlerinin lineer kombinasyonları şeklinde gösterilecektir. Buradan (3.1) sisteminin herhangi bir denklemi, bu sistemin r tane denkleminin belirli katsayılarla çarpımlarının toplamı şeklinde gösterilebileceği sonucuna varılır. Bundan dolayı (3.1) sisteminin birinci r denkleminin herhangi çözümü (3.1) sisteminin tüm denklemlerini sağlayacaktır. Böylece (3.1) sisteminin de çözümü olacaktır. Bundan dolayı (3.1) sisteminin çözümünü bulmak için bu sistemin maksimal lineer bağımsız satırlarına uygun olan

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

alt sisteminin çözümünü bulmak yeterlidir. (3.9) sisteminin katsayılarından oluşan matrisin rankı r 'ye eşit olduğundan ve $r < n$ koşulu sağlandığından, bu matrisin k boyutlu (en az) bir minörü sıfırdan farklı bulunmaktadır. Eğer $r = n$ ise, bu durumda (3.9) sisteminin katsayılar matrisinin determinanı sıfırdan farklı olduğundan bu sistemin tek çözümü mevcuttur ve bu çözüm, Cramer yöntemiyle bulunabilir.

Şimdi, $r < n$ kabul edelim. Bu durumda, (3.9) denklem sistemi,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r &= b_1 - [a_{1,r+1}x_{r+1} + a_{1,r+2}x_{r+2} + \cdots + a_{1n}x_n] \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r &= b_2 - [a_{2,r+1}x_{r+1} + a_{2,r+2}x_{r+2} + \cdots + a_{2n}x_n] \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r &= b_r - [a_{r,r+1}x_{r+1} + a_{r,r+2}x_{r+2} + \cdots + a_{rn}x_n] \end{aligned} \quad (3.10)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu sistemin r tane denklemi vardır ve denklem sisteminin sol tarafında r tane bilinmeyen mevcuttur. Diğer bilinmeyenler, yani $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ bilinmeyenleri denklem sisteminin sağ tarafında görülmektedir. Eğer bunlar bağımsız terimler olarak değerlendirilirse, bu değişkenlere keyfi değerler verilebilir ve (3.10) sistemi Cramer yöntemi ile çözülebilir. Bu durumda (3.10) sisteminin katsayılar matrisinin determinanı sıfırdan farklı olduğundan, çözülebilir ve x_1, x_2, \dots, x_n çözümleri elde edilmiş olur. Sonuç olarak, $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ değişkenlerine keyfi değerler verilerek (3.10) sisteminin sonsuz sayıda çözüm sistemleri elde edilmiş olur (Şahmurov ve Uzgören, 1999).

Teorem 3.5. $AX = 0$ homojen lineer denklem sistemi her zaman tutarlı bir sistemdir.

İspat: A katsayılar matrisi ve $[A : B]$ arttırılmış matris olmak üzere, $[A : B]$ arttırılmış matrisinin sonuncu sütunu sıfırlardan oluştuğu için A ve $[A : B]$ matrislerinin sıfırdan farklı en yüksek boyutlu minörlerinin boyutu aynı olur. Dolayısıyla,

$$\text{rank } A = \text{rank } [A : B]$$

dir. Bu nedenle Kronoker-Kopelli teoremine göre $AX = 0$ homojen lineer denklem sistemi tutarlıdır (Şahmurov ve Uzgören, 1999).

Teorem 3.6. $AX = 0$ homojen lineer denklem sisteminin rankı,

a) Bilinmeyenlerin sayısına eşit, yani $r = n$ ise, bu sistemin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm,

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$$

dır.

b) Bilinmeyen sayısından küçük, yani $r < n$ ise, bu sistemin sıfırdan farklı sonsuz sayıda çözümü vardır.

İspat:

a) $\text{rank}A = \text{rank}[A : B] = r = n$ ise, bu durumda n boyutlu A kare matrisin determinanı sıfırdan farklı olacaktır. Yani, $\det(A) \neq 0$. Öte yandan yardımcı determinantların d_i , $i = 1, 2, \dots, n$ her birinin bir sütunu sıfırdan oluştuğu için

$$d_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda Cramer kuralına göre

$$x_i = \frac{d_i}{\det(A)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

çözümü elde edilir.

b) $r < n$ olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmadan, $AX = 0$ sisteminin ilk r satırını ele alalım. Bunun ilk r sütununun maksimal lineer bağımsız vektörler oluşturduğunu varsayalım. Bu durumda teorem 3.4 e göre $AX = 0$ sisteminin kendisine denk

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= -a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r &= -a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r &= -a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{aligned} \quad (3.11)$$

sistemini göz önüne alalım. Bu sistemde $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ değişkenleri bağımsız değişkenler gibi düşünülerek bu değişkenlere keyfi değerler verilirse, $AX = 0$

sisteminin veya buna denk olan (3.11) denklem sisteminin sonsuz sayıda sıfırdan farklı çözümü olduğu görülür (Şahmurov ve Uzgören, 1999).

Teorem 3.7: $AX = 0$ homojen lineer denklem sisteminin sıfır çözümünden başka çözümünün olması için gerek ve yeter şart katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır.

İspat: Tümevarım yöntemiyle ispat yapılabilir.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

şeklinde homojen lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dir.

$$n = 1 \text{ için } \det(A) = 0 \text{ ise } a_{11} = 0 \text{ olup}$$

$$0 \cdot x_1 = 0 \quad (3.13)$$

dır. Ancak burada x_1 in sıfır olması gerekmez. Yani x_1 in sıfırdan farklı her değeri için (3.13) sağlanır.

$n - 1$ ($n \geq 2$) için iddia doğru olsun ve n için iddianın doğru olduğunu gösterelim.

$\det(A) = 0$ olsun. $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$ ise (3.12) den

$$x_1 = b, (b \neq 0), x_2 = x_3, \dots, x_n = 0$$

olur. Yani sıfır çözümünden farklı bir çözüm elde edilir. $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ elemanlarının hepsi birden sıfır olmamak üzere genelliği bozmadan, örneğin, $a_{11} \neq 0$ olsun. $\det(A)$ da birinci satırı $-a_{21}/a_{11}$ ile çarpıp ikinci satıra, $-a_{31}/a_{11}$ ile çarpıp üçüncü satıra

ve bu işleme böyle devam ederek, $-a_{n1}/a_{11}$ ile çarpıp n . satıra eklenerek

$$b_j = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} \quad (i, j = 2, 3, \dots, n)$$

olmak üzere,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

elde edilir. O halde $a_{11} \neq 0$ olduğundan

$$\begin{vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

olur. Tümevarım hipotezinden

$$\sum_{j=2}^n \left(a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} \right) x_j = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (3.14)$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan x_2, x_3, \dots, x_n sayıları vardır.

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = 0 \quad (3.15)$$

olmak üzere

$$x_1 = -\frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \quad (3.16)$$

olur. (3.14) ve (3.16) ifadelerinden

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (3.17)$$

yazılır. (3.15) ve (3.17) ifadeleri (3.9) ifadesine denktir. Böylece yeter şart ispatlanmış olur.

Tersine, (3.12) homojen lineer denklem sisteminin sıfır çözümünden başka çözümü varsa $\det(A) = 0$ dır. Yine tümevarım metodu kullanılarak ispat yapılabilir. $\det(A) \neq 0$ ve (3.12) sistemini sağlayan x_1, x_2, \dots, x_n sayıları varsa $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ olduğu gösterilmelidir.

$n = 1$ için iddia doğrudur. Gerçekten $\det(A) \neq 0$ ve $a_{11}x_1 = 0$ olduğundan $x_1 = 0$ olmalıdır.

$n - 1$ ($n \geq 2$) için iddia doğru olsun. $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ elemanlarının hepsi birden sıfır olmasın. Örneğin, $a_{11} \neq 0$ olsun. x_1, x_2, \dots, x_n sayıları (3.12) sistemini sağladığından (3.16) ifadesi ve dolayısıyla (3.14) ifadesi mevcuttur. Ancak $\det(A) \neq 0$ olduğundan

$$\begin{vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. (3.14) ve tümevarım hipotezinden $x_2 = \dots = x_n = 0$ elde edilir. (3.16) ifadesinden de $x_1 = 0$ olur. Böylece teorem ispatlanmış olur (Bozkurt ve diğerleri, 2005).

Teorem 3.8. (3.2) homojen lineer denklem sisteminin rankı denklem sistemindeki bilinmeyenlerin sayısından küçük olsun, yani $r < n$ sağlansın. Bu durumda sistemin herhangi bir temel çözüm sisteminin sayısı $n - r$ olacaktır. Yani temel çözümler sisteminin boyutu $n - r$ dir.

İspat: Genelliği bozmadan (3.2) lineer denklem sisteminin maksimal lineer bağımsız satır vektörlerinden oluştuğunu kabul edelim. Yine genelliği bozmadan (3.2) sisteminin A katsayılar matrisinin r boyutlu sıfırdan farklı, en yüksek boyutlu minörlerinden birisinin birinci r sütundan oluştuğunu varsayalım. Bu durumda, (3.2) sisteminin $n - r$ sayıda $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ bilinmeyenine bağımsız değişken gibi bakılarak bu sistem, (3.9) biçiminde yazılabilir. Şimdi $n - r$ boyutlu sıfırdan farklı

$$d = \begin{vmatrix} a_{1,r+1} & a_{1,r+2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,r+1} & a_{2,r+2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-r,r+1} & a_{n-r,r+2} & \dots & a_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

determinantını göz önüne alalım. Bu determinantın i inci ($1 \leq i \leq n - r$) satırı, bağımsız x_{k+1}, \dots, x_n değişkenlerinin herhangi değerleri olarak görülebilir.

$$x_{k+1} = a_{i,r+1}, \dots, x_n = a_{i,n}$$

Bu durumda, (3.9) sisteminden Cramer kuralı uyarınca x_1, x_2, \dots, x_r için tek bir çözüm elde ederiz. Bu çözümü $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,r}$ olarak adlandıralım. O halde (3.2) lineer denklem sisteminin $u_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,r}, a_{i,r+1}, a_{i,r+2}, \dots, a_{i,n})$, $i = 1, 2, \dots, n - r$ çözümler sistemi elde edilir. Sonuç olarak elde edilen bu u_1, u_2, \dots, u_{n-r} sayıdaki çözümler sistemi, (3.2) denklem sisteminin temel çözümler sistemini oluşturur. Gerçekten, bu u_1, u_2, \dots, u_{n-r} satır vektörlerinin koordinatlarının oluşturduğu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-r,1} & a_{n-r,2} & \dots & a_{n-r,r+1} & \dots & a_{n-r,n} \end{pmatrix}$$

matrisinin $n - r$ boyutlu sıfırdan farklı d minörü bulunduğu için, u_1, u_2, \dots, u_{n-r} satır vektörler sisteminin rankı $n - r$ olacaktır. Dolayısıyla, u_1, u_2, \dots, u_{n-r} şeklindeki n boyutlu vektörler sistemi, lineer bağımsız bir sistemdir. Şimdi $b = (b_1, b_2, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$ vektörünün, (3.2) lineer denklem sisteminin herhangi bir çözümü olduğunu varsayalım. b vektörünün u_1, u_2, \dots, u_{n-r} çözüm vektörlerinin lineer kombinasyonu ile ifade edilebildiğini gösterelim. Bunun için d determinantının satırlarından oluşan $n - r$ sayıda ve $n - r$ boyutlu

$$u'_i = (a_{i,r+1}, a_{i,r+2}, \dots, a_{i,n}), \quad i = 1, 2, \dots, n - r$$

vektör sistemini göz önüne alalım. b vektörünün $(b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n)$ koordinatlarından oluşan vektörü b' ile gösterelim. Diğer bir deyişle, $b' = (b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n)$ olsun. $d \neq 0$ olduğu için, R^n uzayının elemanı olan

$$u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), u_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, u_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$$

vektörler sisteminin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart, bu sistemin vektörlerinin koordinatlarını eleman kabul eden $A = [a_{ij}]$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ kare matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır teoremine göre, $u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-r}$

vektörleri, bir lineer bağımsız vektörler sistemi oluşturur. Ancak vektör sayısı vektörün boyutundan fazla olduğundan, n boyutlu V vektör uzayında seçilmiş u_1, u_2, \dots, u_k vektörlerinden oluşan sistem her bir $k > n$ için lineer bağımlı bir sistemdir teoremi gereğince $n - r$ boyutlu $u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-r}, b'$ vektör sistemi lineer bağımlı olacaktır. Dolayısıyla

$$b' = c_1 u'_1 + c_2 u'_2 + \dots + c_{n-k} u'_{n-r} \quad (3.18)$$

eşitliğini sağlayan en az biri sıfırdan farklı c_1, c_2, \dots, c_{n-k} sayıları bulunmaktadır. Şimdi n boyutlu

$$p = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_{n-r} u_{n-r} - b \quad (3.19)$$

vektörünü ele alalım. p vektörü (3.2) homojen lineer denklem sisteminin çözümlerinin bir lineer kombinasyonu olarak bu sistemin çözümünü oluşturur. (3.18) ve (3.19) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} p &= c_1 (a_{11}, \dots, a_{1r}, a_{1,r+1}, \dots, a_{1n}) + \dots + c_{n-r} (a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, a_{n-r,r+1}, \dots, a_{n-r,n}) \\ &\quad - (b_1, b_2, \dots, b_r, c_1 a_{1,r+1} + \dots + c_{n-r} a_{n-r,r+1}, \dots, c_1 a_{1n} + \dots + c_{n-r} a_{n-r,n}) \\ &= (c_1 a_{11} + \dots + c_{n-r} a_{n-r,1} - b_1, \dots, c_1 a_{1,r} + \dots + c_{n-r} a_{n-r,r} - b_r, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yani p vektörünün tüm serbest $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ koordinatları sıfırlardan oluşmaktadır. Fakat (3.11) sisteminin $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0$ değerleri için bir tek sıfır çözümü, yani $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$ çözümü mevcuttur. Dolayısıyla $p = 0$ alınabilir. O halde (3.19) eşitliğinden

$$b = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_{n-r} u_{n-r}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla u_1, u_2, \dots, u_{n-r} vektör sistemi (3.2) sisteminin sıfır uzayının maksimal lineer bağımsız vektörler sistemini oluşturur. Yani bu uzayın boyutu $n - r$ dir (Şahmurov ve Uzgören, 1999).

Teorem 3.9. $AX = B$ ve $AX = 0$ denklem sistemleri verilmiş olsun. Eğer birinci denklem sisteminin bir çözümü Y_1 ve ikinci denklem sisteminin bir çözümü Y_2 ise, $Y = Y_1 + Y_2$ de $AX = B$ nin bir çözümüdür.

İspat: Hipotezden $AX = B$ nin bir çözümü Y_1 olduğundan

$$AY_1 = B \quad (3.20)$$

yazılır. Yine hipotezden $AX = 0$ in çözümü Y_2 olduğundan

$$AY_2 = 0 \quad (3.21)$$

yazılır. Buna göre $Y = Y_1 + Y_2$ olmak üzere

$$AY = B$$

olduğu gösterilmelidir. Gerçekten (3.20) ve (3.21) göz önüne alınırsa

$$AY = A(Y_1 + Y_2) = AY_1 + AY_2 = B + 0 = B$$

yazılır. Böylece teorem ispatlanmış olur (Taşçı, 2006).

Teorem 3.10. $AX = 0$ homojen lineer denklem sisteminin çözümleri X_1, X_2, \dots, X_n olsun. a_1, a_2, \dots, a_n ler sabitler olmak üzere

$$H = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$$

ifadesi de bu homojen denklem sisteminin bir çözümüdür.

İspat: Hipotezden X_1, X_2, \dots, X_n ; $AX = B$ denklem sisteminin çözümleri olduğundan

$$AX_1 = 0, AX_2 = 0, \dots, AX_n = 0$$

dır. Buna göre

$$\begin{aligned} AH &= A(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n) \\ &= a_1AX_1 + a_2AX_2 + \dots + a_nAX_n \\ &= a_10 + a_20 + \dots + a_n0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılır ki bu da teoremin ispatıdır (Taşçı, 2006).

Tanım 3.10. Aşağıdaki işlemler elementer satır işlemleri diye adlandırılır (Anton ve Rorres, 1994; Işık, 2002).

- 1) Sıfırdan farklı bir sabit ile satırı çarpmak (1. tip elementer işlem),
- 2) İki satırın yerini değiştirmek (2. tip elementer işlem),
- 3) Bir satırın bir sabitle çarpımının diğer bir satırına eklenmesi (3. tip elementer işlem)

Tanım 3.11. Bir matris aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa indirgenmiş satır eşelon formdadır (Roman, 1984).

- 1) Tamamen sıfır içeren bir satır varsa matrisin altında yer alır.
- 2) Sıfırdan farklı herhangi bir satırda sıfırdan farklı ilk eleman 1 dir. Bu da satırın "leading entry " veya "pivot" udur.
- 3) Ardışık her satır için alttaki satırın pivotu üstteki satırın pivotunun sağındadır.
- 4) Bir pivot içeren her sütun, sütunun her yerinde sıfır içerir.

Tanım 3.12. Bir matris aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa satır eşelon formdadır (Perry, 1998).

- 1) Tamamen sıfır içeren bir satır en az bir tane sıfırdan farklı eleman içeren tüm satırların en altındadır.
- 2) Bütün elemanları sıfır olmayan bir satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 dir.
- 3) i inci satırdaki ilk 1 elemanı j inci sütunda ise, $i + 1$ inci satırdaki ilk 1 elemanı j inci sütunun sağındaki sütunda yer alır.

Tanım 3.13.

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

" \blacksquare " sıfırdan farklı herhangi bir sayı ve "*" herhangi bir sayı olmak üzere;

(3.22) eşelon formdaki matrislerde " \blacksquare " elemanlarına pivot, " \blacksquare " elemanının bulunduğu sütunlara ise pivot sütunları denir (Çalışkan, 2005).

Teorem 3.11. Bir lineer denklem sisteminde iki denklemin yerlerinin değiştirilmesiyle oluşan yeni denklem sistemi başlangıçtaki denklem sistemine denktir.

İspat: (S) n bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi ve (S') iki denklemin yerlerinin değiştirilmesiyle oluşan yeni denklem sistemi olsun. (S) denklem sisteminin bir çözümü $X = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ise, X (S) lineer denklem sistemini meydana getiren bütün denklemleri sağlar. (S') denklem sistemi de aynı denklemlerden oluştuğu için

$$X = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

çözümü (S') lineer denklem sisteminin de bir çözümüdür.

Tersine, (S') lineer denklem sisteminin bir çözümü $Y = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ise benzer şekilde Y , (S) lineer denklem sisteminin de bir çözümü olur. O halde çözüm kümeleri aynı olduğundan (S) ve (S') lineer denklem sistemleri denk sistemlerdir (Çallıalp ve Kuroğlu, 1996).

Teorem 3.12. Bir lineer denklem sisteminde denklemlerden herhangi birisinin sıfırdan farklı bir k skaleri ile çarpılmasıyla oluşan yeni lineer denklem sistemi başlangıçtaki lineer denklem sistemine denktir.

İspat: (S) n bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi ve (S') denklemlerden herhangi birisinin k sabitiyle çarpılmasıyla oluşan yeni denklem sistemi olsun. (S) sisteminin bir çözümü $Y = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ olsun. L_i ler (S) lineer denklem sistemindeki denklemler

olmak üzere, i inci L_i denkleminin dışındaki bütün denklemler (S) ve (S') lineer denklem sistemlerinde aynı olduğundan Y çözümü (S') deki

$$ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i \quad (3.23)$$

denklemini dışındaki tüm denklemleri sağlar.

Şimdi $Y = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ çözümünün (3.23) denklemini de sağladığı gösterilmelidir. $Y = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, (S) nin bir çözümü olduğundan

$$a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \cdots + a_{in}t_n = b_i$$

olur. Bu denklemin her iki yanını k ile çarpılırsa

$$ka_{i1}t_1 + ka_{i2}t_2 + \cdots + ka_{in}t_n = kb_i$$

bulunur. Bu ise $Y = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ nin

$$ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i$$

denkleminin bir çözümü olmasıdır.

Tersine, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, (S') denklemler sisteminin bir çözümü olsun. (S) ve (S') sistemlerinin i inci denklemleri dışındaki denklemleri aynı olduğundan z , (S) nin L_i denklemini dışındaki tüm denklemlerini sağlar. Şimdi, z nin i inci L_i denklemini de sağladığını gösterelim. z , (S') nin bir çözümü olduğundan

$$ka_{i1}z_1 + ka_{i2}z_2 + \cdots + ka_{in}z_n = kb_i$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafını $1/k$ ($k \neq 0$) ile çarpılırsa

$$a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \cdots + a_{in}z_n = b_i$$

bulunur. Bu ise $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ nin (S) lineer denklem sistemindeki bütün denklemleri sağlaması demektir. O halde (S) ve (S') lineer denklem sistemleri denktir (Çallıalp ve Kuroğlu, 1996).

Teorem 3.13. Bir lineer denklem sisteminde denklemlerden herhangi birisinin bir katının diğer bir denkleme eklenmesiyle oluşan yeni lineer denklem sistemi başlangıçtaki lineer denklem sistemine denktir.

İspat: (S) n bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi, (S') denklemlerden herhangi birisinin bir katının diğer bir denkleme eklenmesiyle oluşan yeni lineer denklem sistemi ve $X = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, (S) lineer denklem sisteminin bir çözümü olsun. i inci denklem k ile çarpılıp j inci denklem ile toplanırsa (S') lineer denklem sistemi (S) lineer denklem sistemindeki denklemlerden farklı olan

$$(ka_{i1} + a_{j1})x_1 + (ka_{i2} + a_{j2})x_2 + \dots + (ka_{in} + a_{jn})x_n = kb_i + b_j \quad (3.24)$$

denklemine sahiptir.

(3.24) denkleminin dışındaki denklemler değiştirilmediğinden $X = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ bu denklemler için bir çözümdür. O halde $X = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ çözümünün (3.24) denklemini sağladığı gösterilmelidir. (3.24) denklemini aşağıdaki gibi düzenlenip $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ değerleri yazılırsa

$$k(a_{i1}c_1 + \dots + a_{in}c_n) + (a_{j1}c_1 + \dots + a_{jn}c_n) = kb_i + b_j$$

yazılır. O halde $X = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ (3.24) denkleminin de çözümüdür.

Tersine, (S') lineer denklem sisteminin bir çözümü $z = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ olsun.

Yani

$$\begin{array}{rcl} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1n}t_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (ka_{i1} + a_{j1})t_1 + (ka_{i2} + a_{j2})t_2 + \dots + (ka_{in} + a_{jn})t_n & = & kb_i + b_j \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}t_1 + a_{m2}t_2 + \dots + a_{mn}t_n & = & b_m \end{array}$$

denklem sistemi yazılır. i inci denklem $-r$ ile çarpılıp j inci denklem ile toplanırsa j inci denklem

$$a_{j1}t_1 + a_{j2}t_2 + \dots + a_{jn}t_n = b_j$$

olarak elde edilir. Buradan $z = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ nin (S) denklem sisteminin çözümü olduğu söylenebilir. O halde (S) ve (S') denklem sistemleri denk sistemlerdir (Perry, 1998).

Teorem 3.14. $AX = 0$ lineer homojen denklem sisteminde katsayılar matrisi A nın satırca indirgenmiş eşolon formu R ise, $AX = 0$ ve $RX = 0$ sistemlerinin çözümleri aynıdır.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için $AX = 0$ sisteminde A matrisine uygulanan bir elementer satır işleminin $AX = 0$ denklem sistemini, çözümleri aynı olan bir diğer sisteme dönüştürdüğünü göstermek yeterlidir. $AX = 0$ sisteminde A matrisinin i inci satırını $c \neq 0$ ile çarparak sistemin i inci denkleminin yerine

$$ca_{i1}x_1 + \dots + ca_{in}x_n = 0$$

denklemini elde edilir. A matrisinin i inci satırının c ile çarpılmış haline aynı matrisin j inci satırını ekleyerek sistemin i inci denklemini yerine

$$(ca_{i1} + a_{j1})x_1 + \dots + (ca_{in} + a_{jn})x_n = 0$$

denklemini elde edilir. Son olarak A matrisinin iki satırının yeri değiştirilirse $AX = 0$ sisteminin bu satırlara karşılık gelen denklemleri de kendi aralarında yer değiştirir. Böylece A ya uygulanan satır işlemleri $AX = 0$ sisteminin çözümlerini değiştirmez (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 3.14. (3.1) genel sistemi ile ifade edilen bir lineer denklem sistemi veya $m \times n$ tipinde bir matris için, her $i > j$ için $a_{ij} = 0$ olduğunda denklem veya matris triangular (üçgensel) formdadır denir (Moore ve Yaqub, 1998).

3.2. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan birçok çözüm yöntemi vardır. Bu çözüm yöntemleri dolaysız (direkt) çözüm yöntemleri ve dolaylı (ardışık yaklaşım çözüm yöntemleri) olmak üzere iki grupta toplanabilir. Direkt yöntemlerde, lineer denklem sisteminin kesin çözümü yuvarlama hataları göz önüne alınmayarak sonlu sayıda yapılan işlemlerle elde edilir. Dolaylı çözüm yöntemlerinde ise, bir

başlangıç değeri seçilip bu değere bağlı olarak yeniden bilinmeyenler bulunarak ve bu işlem devam ettirilerek yaklaşık çözüm bulunur (Bakioğlu, 2004). Gauss-Jordan Eliminasyonu, Gauss Eliminasyonu, Cramer yöntemi direkt çözüm yöntemlerinden; Gauss-Siedel yöntemi, Jacobi basit iterasyon (ardışık tekrar) yöntemi gibi yöntemler ise dolaylı çözüm yöntemlerindedir.

$Ax = b$ lineer denklem sistemini, n çok büyük ve A katsayılar matrisinin sıfırdan farklı elemanlarının sayısı az ise iterasyon yöntemleri ile çözmek, çözüm için gerekli çabayı ve işlem sayısını azaltır. Çünkü direkt metodlar çok fazla bellek, dört işlem ve hesap süresi gerektirir. Ayrıca oluşan yuvarlama hataları çözümün güvenilirliğini sarsabilir. İterasyon yöntemlerinde A 'nın sadece sıfırdan farklı elemanları ile işlem yapılır, sıfır ile dört işlem yapılmaz. Böylece hem bellek ve hesap süresi hem de yuvarlama hataları önemli miktarda azalır (Topçu, 2011). İterasyon yöntemleri yinelemeli, tekrarlı yöntemler olarak da bilinir.

3.2.1. Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

Gauss-Jordan eliminasyon yönteminin temelindeki fikir oldukça basittir. Gauss-Jordan eliminasyon yönteminde, verilen denklem sistemine basit elementer işlemlerin uygulanmasıyla çözümü kolay özel bir form elde etmek amaçlanır. Bu basit işlemler sistemin çözüm kümesini etkilemeyecek özelliklere sahiptir (Roman, 1984). Yani Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi arttırılmış matrise bir dizi elementer satır işlemleri uygulanarak çözümüne direk ulaşılabilen bir matrisle denklem sisteminin çözümünü bulmaktır.

Gauss-Jordan eliminasyon metodu aşağıdaki adımlarla özetlenebilir (Williams, 2001).

1) Lineer denklem sisteminin arttırılmış matrisi yazılır.

2) Elementer satır işlemleri kullanılarak arttırılmış matrisin indirgenmiş eşelon formu elde edilir. Bu, pivotu 1 yapmak demektir. Sonra her pivotun altındaki ve üstündeki elemanlar ilk sütundan başlayarak sıfır yapılır.

3) İndirgenmiş eşelon forma karşılık gelen lineer denklem sistemi yazılır ve denklem sisteminin çözümü bulunur.

Bu adımlar izlendiğinde bir $[A : B]$ arttırılmış matrisi;

$$[A^* : B^*] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^* \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^* \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^* \end{array} \right]$$

formuna dönüşür ve (3.1) lineer denklem sisteminin çözümü

$$x_1 = b_1^*, x_2 = b_2^*, \dots, x_n = b_n^*$$

elde edilir.

3.2.2. Gauss Eliminasyon Yöntemi

Gauss eliminasyonunun prensibi Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi ile benzerdir. Lineer denklem sisteminin çözümünde, denklemin çözümü kolay hale gelinceye kadar arttırılmış matrise elementer satır işlemleri uygulanır. Ancak bu iki yöntem arasında farklılıklar vardır.

1) Gauss yönteminde sadece 1. ve 2. tip elementer satır işlemleri kullanılır.

2) Arttırılmış matris, Gauss-Jordan eliminasyonunda indirgenmiş eşelon formun aksine gauss eliminasyonunda satır eşelon forma indirgenir.

Gauss eliminasyonu, Gauss-Jordan eliminasyonundan daha verimlidir. Çünkü Gauss eliminasyonu Gauss-Jordan eliminasyonundan daha az aritmetik işlem gerektirir (toplama, çıkarma, çarpma, bölme). $n \times n$ lineer denklem sisteminin çözümü için tahmini olarak Gauss eliminasyonu $n^3/3$ çarpım gerektirirken, Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi $n^3/2$ çarpım gerektirir. Yani Gauss eliminasyon yöntemi Gauss-Jordan eliminasyon yöntemine göre göre $2/3$ kat daha hızlı bir yöntemdir. Bu özelliğinden dolayı çözülmek istenen lineer denklem sistemi büyük olduğunda, Gauss eliminasyon yöntemi daha avantajlıdır (Roman, 1984).

(3.1) denklem sisteminin katsayılar matrisi A ve $[A : B]$ arttırılmış matrisi olmak üzere; elementer satır işlemleri yardımıyla arttırılmış matris $[A : B]$ nin A katsayılar kısmının asli köşegen elemanları 1 olan bir üst üçgen matris haline dönüştürülmesiyle $[A : B]$ matrisi

$$[A^* : B^*] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n}^* & b_2^* \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^* \end{array} \right]$$

şeklini alır. Verilen $[A : B]$ arttırılmış matrisine elementer satır işlemleri yapılarak yukarıda belirtilen eşdeğer bir $[A^* : B^*]$ matrisine dönüştürülmesiyle lineer denklem sisteminin çözümünün elde edilmesi işlemine Gauss eliminasyon yöntemi denir (Eren ve Razbonyalı, 2006).

3.2.3. Cramer Yöntemi

Tanım 3.15. Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit ve katsayılar matrisinin determinanı sıfırdan farklı olan bir lineer denklem sistemine Cramer sistemi denir (Taşçı, 2006).

Teorem 3.15.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

$\det(A)$, A matrisinin determinanı olmak üzere ve $\det(A_i)$ ler A matrisinin i inci sütununun b sütun vektörü ile yer değiştirilmesiyle oluşan matrislerin determinanı olmak üzere yani $\det(A_i)$ ler

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

olmak üzere, n bilinmeyenli n denklem den oluşan lineer denklem sisteminin çözümü

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

olarak bulunur. Bu şekilde lineer denklem sisteminin çözümünü bulma işlemine Cramer kuralı denir (Işık, 2002).

İspat: Eğer $\det(A) \neq 0$ ise " A nın singüler olmaması için gerek ve yeter şart $\det(A) \neq 0$ olmasıdır" teoremi gereğince A singüler değildir. O halde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{21}}{\det(A)} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det(A)} \\ \frac{A_{12}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1i}}{\det(A)} & \frac{A_{2i}}{\det(A)} & \dots & \frac{A_{ni}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\det(A)} & \frac{A_{2n}}{\det(A)} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

olur. Bu $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$x_i = \frac{A_{1i}}{\det(A)} b_1 + \frac{A_{2i}}{\det(A)} b_2 + \dots + \frac{A_{ni}}{\det(A)} b_n$$

olarak yazılır. Şimdi

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

olsun. Eğer i inci sütunun kofaktörleri boyunca açılımı ile $\det(A_i)$ hesaplanırsa

$$\det(A_i) = A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n$$

yazılır. Sonuç olarak $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

olup ispat tamamlanır (Kolman ve Hill, çev. 2002).

3.2.4. Ters Matris İle Çözüm Yöntemi

Eğer bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit ve A katsayılar matrisinin determinanı sıfırdan farklı ise, $AX = B$ lineer denklem sisteminin çözümü

$$X = A^{-1}B$$

şeklinde bulunabilir.

Gerçekten $\det A \neq 0$ olduğundan bu durumda A^{-1} mevcuttur. Buna göre $AX = B$ nin her iki tarafını soldan A^{-1} ile çarpılırsa

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

bulunur (Taşçı, 2006).

3.2.5. LU Ayrıştırma Yöntemi

$n < 4$ mertebeli lineer denklem sistemlerinin çözümü için Gauss-Jordan eliminasyonu, Gauss eliminasyonu, Ters Matris yöntemi, Cramer yöntemi kullanılmasına karşın lineer denklem sistemi büyük olduğunda bu yöntemlerde işlem sayısı fazla olacağından daha verimli ve kısa bir yöntem olan LU ayrıştırma yöntemi kullanılabilir. LU ayrıştırma yöntemi bir matrisin çarpanlarına ayrılması esasına dayanır. Yani herhangi bir n -kare A matrisi, bir alt üçgen bir üst üçgen matrisin çarpımı olarak yazılabilir. $A = [a_{ij}]$ n -kare matris, $L = [l_{ij}]$ esas köşegen elemanları 1 olan alt üçgen matris ve $U = [u_{ij}]$ bir üst üçgen matris olsun. $a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik}u_{kj}$ ($1 \leq i, j \leq n$) olmak üzere $A = LU$ olarak yazılabilir. L ve U matrislerinin tanımından $\forall i > j$ için $u_{ij} = 0$, $\forall j > i$ için $l_{ij} = 0$, $\forall i = j$ için $l_{ij} = 1$ olacaktır. Yani 3×3 tipinde bir A matrisi aşağıdaki formda yazılabilir.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

L ve U matrisleri yukarıdaki özelliklere sahip iki üçgen matris olmak üzere; $A = LU$ olsun. O halde $Ax = b$ denklem sistemi $Ax = LUx = b$ olacaktır. $Ux = y$ seçildiğinde $Ax = Ly = b$ olur. O halde sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan $b_1 = y_1$ olur. $b_2 = y_2 + b_1 l_{21}$ denkleminde y_2 elde edilir. İşleme bu şekilde devam edilirse

$$b_i = y_i + l_{i1}y_1 + l_{i2}y_2 + \dots + l_{i,i-1}y_{i-1}$$

denkleminde y_i elde edilir.

y_i ler bulunduğundan sonra $Ux = y$ sisteminden U üçgen matris olduğundan x bilinmeyenleri de kolayca hesaplanabilir. Bu yöntemle (3.1) lineer denklem sisteminin çözümüne ayrışım yöntemi ile çözüm denir (Bozkurt ve diğerleri, 2005).

Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -3 \\ 1 & 15 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini ayrıştırma yöntemi çözümleyelim.

$a_{11} = l_{11}u_{11} + l_{12}u_{21} + l_{13}u_{31}$ olacaktır. $i < j$ için $l_{ij} = 0$ ve $l_{11} = 1$ olduğundan $a_{11} = 1 = u_{11}$ olur. Benzer şekilde $a_{12} = u_{12} = 3$, $u_{13} = a_{13} = -2$ olarak elde edilir. $a_{21} = l_{21}u_{11} + l_{22}u_{21} + l_{23}u_{31}$ olup üçgen matrislerin özelliklerinden $a_{21} = l_{21}u_{11} = l_{21} \cdot 1 = l_{21} = 2$ ve benzer şekilde $a_{31} = l_{31} = 1$ bulunur. Buna göre; $l_{32} = 2, u_{22} = 6, u_{23} = 1$ ve $u_{33} = 1$ olur. O halde matrisler

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir (Bozkurt vd., 2005).

3.2.6. Thomas Yöntemi

Hesaplamalı akışkanlar dinamiğinde ve hesaplamalı mühendisliğin bazı problemlerinde zaman zaman üç-diyagonalli katsayılar matrisine (bant matris) sahip lineer denklem sistemleriyle karşılaşılır. Üç-diyagonalli katsayılar matrisine (bant matris) sahip böyle bir lineer denklem sistemi matris biçiminde normal olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{i,i+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ancak katsayılar matrisinin çoğu sıfır olan elemanları için bilgisayar hafızasında yer işgal etmesinden ve gereksiz işlemlerden kaçınmak amacıyla $(n \times n)$ boyutlarında bir katsayılar matrisi yerine $(n \times 3)$ boyutlarında bir katsayılar matrisi kullanacak biçimde bir düzenleme yapılması ve buna uygun bir çözüm algoritmasının kullanımı tercih edilir. Çözüm için tercih edilen bir yöntem Thomas algoritmasıdır. Thomas algoritması aslında Gauss eliminasyon yönteminin üç kolonlu bir dikdörtgensel matris kullanılarak yapılan özel bir uygulamadır.

Yukarıdaki denklem sistemi

$$a_{i,i-1} \rightarrow l_i; \quad a_{ii} \rightarrow d_i; \quad a_{i,i+1} \rightarrow u_i; \quad b_i \rightarrow r_i$$

olmak üzere düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & d_2 & u_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & l_i & d_i & u_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_n & d_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_n \end{bmatrix}$$

Gauss eliminasyon yönteminin esasının diyagonal altında kalan bütün elemanların sıfır olmasını sağlayacak işlemler olduğu hatırlanırsa bu denklem

sistemindeki ilk denklem l_2 ile ikinci denklem de d_1 ile çarpılıp birinci denklem ikincisinden çıkarıldıktan sonra her iki taraf d_1 ile bölünmesiyle

$$\begin{aligned} l_2 d_1 x_1 + l_2 u_1 x_2 &= l_2 r_1 \\ d_1 l_2 x_1 + d_1 d_2 x_2 + d_1 u_2 x_3 &= d_1 r_2 \end{aligned} \Rightarrow \left(d_2 - \frac{l_2 u_1}{d_1} \right) x_2 + u_2 x_3 = r_2 - \frac{r_1 l_2}{d_1}$$

elde edilir. Böylece ikinci denklemdeki x_1 bilinmeyeni yok edilmiş veya diğer bir deyişle katsayılar matrisinde diyagonal elemanın altındaki katsayı sıfırlanmış olmaktadır. Bu eşitlik

$$d'_2 = d_2 - \frac{l_2 u_1}{d_1}; r'_2 = r_2 - \frac{r_1 l_2}{d_1}$$

olmak üzere

$$d'_2 x_2 + u_2 x_3 = r'_2$$

şeklinde yazılabilir. Böylece denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d'_2 & u_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & l_i & d_i & u_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_n & d_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_n \end{bmatrix}$$

şekline gelir. Yukarıda yapılan eliminasyon işlemi denklem sistemindeki ikinci ve üçüncü denklem arasında tekrarlanırsa, yani ikinci denklem l_3 ile üçüncü denklem de d'_2 ile çarpılıp yine birinci denklem ikincisinden çıkarılarak, karşılıklı d'_2 ile bölünmesiyle

$$\begin{aligned} l_3 d'_2 x_2 + l_3 u_2 x_3 &= l_3 r'_2 \\ d'_2 l_3 x_2 + d'_2 d_3 x_3 + d'_2 u_3 x_4 &= d'_2 r_3 \end{aligned} \Rightarrow \left(d_3 - \frac{l_3 u_2}{d'_2} \right) x_3 + u_3 x_4 = r_3 - \frac{l_3 r'_2}{d'_2}$$

veya yine

$$d'_3 = d_3 - \frac{l_3 u_2}{d'_2}; r'_3 = r_3 - \frac{l_3 r'_2}{d'_2}$$

olmak üzere

$$d'_3 x_3 + u_3 x_4 = r'_3$$

elde edilir. Bu denklemde de x_2 bilinmeyeninin ortadan kalktığı ve katsayılar matrisinde üçüncü satırda diyagonal altındaki elemanın sıfır yapıldığı görülmektedir. Benzeri işlemler daha sonraki denklemler için de tekrarlanabilir. Bunun için yukarıda çıkartılan bağıntılar karşılaştırılarak bir genelleme yapılırsa

$$d'_i = d_i - \frac{l_i u_{i-1}}{d'_{i-1}}; r'_i = r_i - \frac{l_i r'_{i-1}}{d'_{i-1}} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

elde edilir. Bu durumda denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d'_2 & u_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d'_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d'_i & u_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d'_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ \dots \\ r'_i \\ \dots \\ r'_n \end{bmatrix}$$

şekline gelir. Bu denklem sisteminde en sonuncu denklemden x_n bilinmeyeninin kolaylıkla çözülebileceği görülmektedir.

Elde edilen

$$x_n = \frac{r'_n}{d'_n}$$

değeri bir üstteki denklemde kullanılarak

$$x_{n-1} = \frac{r'_{n-1} - u_{n-1} x_n}{d'_{n-1}}$$

bulunur. Benzer işlem herhangi bir x_i bilinmeyeni için

$$x_i = \frac{r'_i - u_i x_{i+1}}{d'_i}$$

şeklinde gerçekleştirilir (Yükselen, 2008).

3.2.7. Jacobi Basit İterasyon Yöntemi

Jacobi basit iterasyon yöntemi dolaylı yöntemlerden olup aşağıdaki gibi tanımlanır.

$AX = B$ lineer denklem sistemi için, A katsayılar matrisi

$$A = L + D + U$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde üç matrisin toplamı olmak üzere

$$L.X + D.X + U.X = B \rightarrow X = D^{-1}.[B - L.X - U.X] \quad (3.27)$$

şekline getirilebilir.

Bu durumda x_i bilinmeyenleri için uygun seçilecek başlangıç değerleri (3.27) eşitliğinde kullanılarak yeni x_i değerleri hesaplanabileceği ve bu işlemlerin iteratif olarak devam ettirilebileceği görülmektedir. Jacobi basit iterasyon yöntemi olarak bilinen bu yöntemin herhangi bir iterasyon adımı için

$$X^{k+1} = D^{-1}.[B - L.X^k - U.X^k] \quad (3.28)$$

ifadesi yazılabilir veya açık biçimde

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \dots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix} = D^{-1} \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \dots \\ x_n^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \dots \\ x_n^k \end{bmatrix} \right) \quad (3.29)$$

yazılabilir. D diyagonal (köşegen) matrisinin tersi

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

olduğundan (3.29) matris eşitliğinin herhangi i inci satırı için

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k}{a_{ij}}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

yazılarak iterasyon formülü elde edilebilir (Yükselen, 2008).

3.2.8. Gauss-Seidel İterasyon Yöntemi

Gauss-Seidel metodu ile Jacobi metodu temelde aynıdır. Aralarındaki tek fark Gauss-Seidel metodunda x_i nin her yeni değeri hemen kullanılır (Topçu, 2011). İterasyon metodlar eleme işlemi yapmadan bir önceki çözüm kümesini kullanarak, bir sonraki iterasyon çözüme ulaşır. Çözüm sabit hale geldiğinde sonuç elde edilmiş olur. Gauss-Seidel metoduna göre her hangi bir iterasyon işlemi

$$X^{k+1} = D^{-1} \cdot [B - L \cdot X^k - U \cdot X^k]$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca yukarıdaki ifade açık yazılırsa

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \dots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix} = D^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \dots \\ x_n^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \dots \\ x_n^k \end{bmatrix} \right)$$

ifadesi yazılır. Bu ifadeye göre i . satır için

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k}{a_{ij}}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

formülü yazılabilir (Yükselen, 2008; Çoban, bt).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR ve YORUMLAR

4.1. Lineer Denklem Sistemlerinin Uygulama Alanları

Fizik ve mühendislik problemlerinin çoğu lineer denklem sistemleri ve eşitsizlikleri içerir. Bu sistemler matematiksel açıdan ve mühendislik açısından yorumlanabilir. Fakat genellikle bu alanlara yoğunlaşan araştırmacılar matematiksel ve fiziksel kavramların yakın ilişkisini anlamının eksikliğinin yanı sıra, bu iki perspektiften sadece biri hakkında bilgiye sahiptir. Bu gerçek, problemlerin analizlerini yorumlamalarda sınırlamalara yol açar (Castillo, Pruneda, Soleras ve Minguez, 2006). Bu sebeple birbiriyle ilişkili kavramlar birlikte yorumlanmalıdır.

Günlük hayatın bazı bölümlerini tanımlamak için, bir veya daha fazla değişken içeren bir matematiksel modele ihtiyaç duyulabilir. Örneğin modelin amacı, zaman fonksiyonuna bağlı olarak güneşin dünyaya uzaklığını hesaplamak, dış basınçta suyun kaynama noktasını açıklamak veya motor yakıtları ve havacılık için ham rafineri depolarını karıştırmanın en iyi yolunu belirlemek olabilir. Gerçek hayata en uygun modelin tasarlanması bir veya daha fazla denklem veya eşitsizlik sistemi gerektirebilir. Bu sistemler sadece değişken içerebildiği gibi, hem değişken hem de değişkenlerin türevlerini de içerebilir (Hadley, 1979). Değişken ve eşitsizlik içeren denklem sistemleri modeli daha basit şekilde ifade eder. Denklem sistemlerinin çözümü problemin çözümünde yol göstericidir ve bu çözüm sistemi ilgili alan bilgisi ve matematiksel yorumla harmanlanarak çözüme ulaşılır.

Aşağıda lineer denklem sistemlerinin kullanıldığı çeşitli bilim dallarındaki örneklere yer verilmiştir.

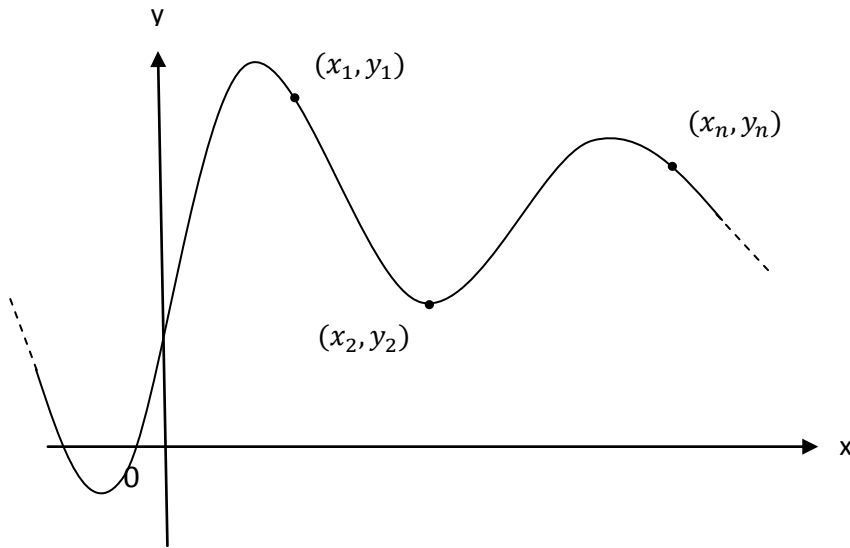
4.1.1. Lineer Denklem Sistemleri ile Polinomların Katsayılarını Belirleme

Matematik, mühendislik gibi çeşitli alanlardaki problemlerde grafik yorumlama önemlidir. Verilen noktalardan geçen polinom grafiğinin çizilmesi istenebilir. Bu durumda verilen noktaları gerçekleyen polinomun katsayılarını bulmak gereklidir.

Verilen $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ noktaları için

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

polinomunun grafiği



Şekil 4.2. n. dereceden bir polinomun grafiği (Williams, 2001)

şeklinde verilmişse, polinomu bulmak için verilen noktalar polinomda yerine yazılarak elde edilen denklem sisteminin çözümü sonucunda a_1, a_2, \dots, a_{n-1} katsayıları elde edilir. Örneğin, ikinci dereceden bir polinomun denklemi genel olarak

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

şeklinde ifade edilir. (1,6), (2,3) ve (3,2) noktalarından geçen polinomun denklemi yazılmak istenirse

$$x_1 = 1, y_1 = 6, ; x_2 = 2, y_2 = 3 ; x_3 = 3, y_3 = 2$$

olmak üzere bu değerler polinomda yerine yazılarak

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= 6 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= 3 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 &= 2 \end{aligned}$$

üç bilinmeyenli lineer denklem sistemi elde edilir. Gauss-Jordan eliminasyon metodu kullanılarak denklem sisteminin çözümü yapılırsa

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{R2 + (-1)R1 \\ R3 + (-1)R1}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{R1 + (-1)R2 \\ R3 + (-1)R2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \\ \left(\frac{1}{2} \right) R3 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{R1 + 3R3 \\ R2 + (-3)R3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

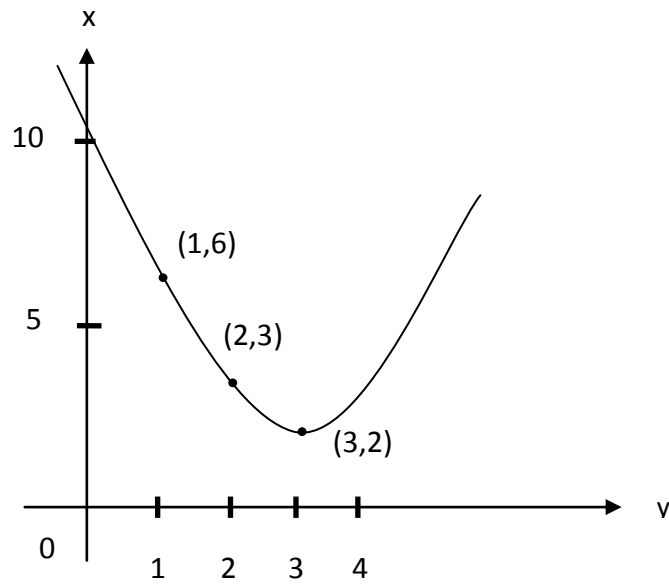
yazılır. O halde

$$a_0 = 11, a_1 = -6, a_2 = 1$$

polinom katsayıları elde edilir. Verilen noktaları sağlayan parabol denklemi

$$y = x^2 - 6x + 11$$

şeklinde yazılır. Bu parabolün grafiği ise



Şekil 4.3. $y = x^2 - 6x + 11$ polinomunun grafiği

şeklindedir (Williams, 2001).

4.1.2. Elektrik Devreleri (Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Uygulamaları)

Bir elektrik devresinin herhangi iki noktası arasındaki potansiyel fark, 1 Coulombluk yükün o noktaların birinden diğerine götürülmesi için yapılması gereken iş olarak tanımlanmaktadır (Serway ve Beichner, 2000). Potansiyel fark V ile gösterilir, birimi voltur. Bu potansiyel fark nedeniyle oluşan elektrik alan, tanecikleri elektriksel kuvvetin etkisiyle sürükler ve böylece yük taşıyıcıları hareket ederler. Bu şekilde bir iletkenin herhangi bir kesitinden birim zamanda geçen yük miktarına akım şiddeti denir. Birimi amper olup I ile gösterilir. Metal bir iletken için potansiyel farkın akım şiddetine oranı daima sabittir. Bu sabit değer iletkenin direnci olarak adlandırılır. Ohm tarafından kurulan bu eşitliğe Ohm kanunu denir ve

$$R = \frac{V}{I}$$

şeklinde ifade edilir.

Bir elektrik devresinde dirençler birbirlerine veya başka devre elemanlarına seri veya paralel olarak bağlanabilirler. Dirençler uç uca gelecek şekilde bağlanırsa seri

bağlama; iki veya daha fazla direncin aynı uçlarının üretcin aynı kutuplarına bağlanmasıyla oluşan bağlama şekline paralel bağlama denir. Seri veya paralel bağlı dirençlerde pek çok direncin yerine geçebilen dirence eşdeğer direnç ($R_{eş}$) denir. Seri bağlı dirençlerin olduğu elektrik devresinde eşdeğer (denk, toplam) direnç

$$R_{eş} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

olarak, paralel bağlı dirençlerin olduğu devrede ise

$$\frac{1}{R_{eş}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

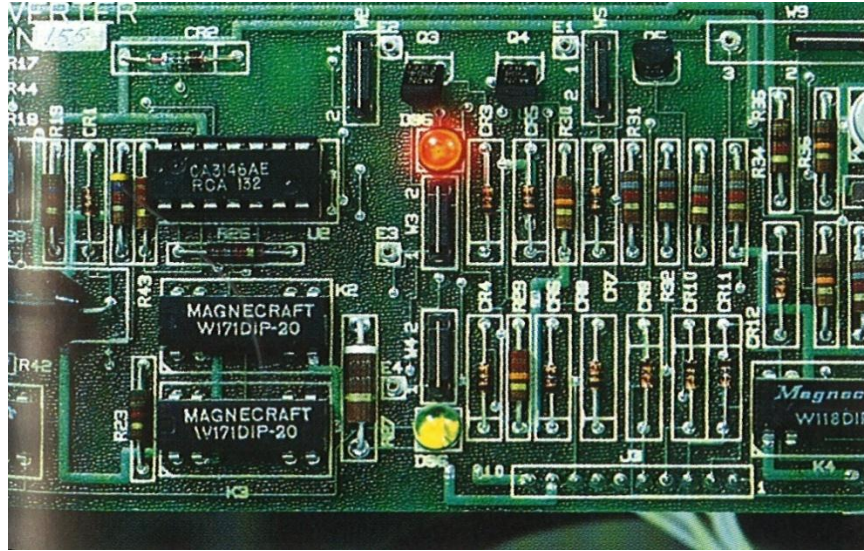
şeklinde yazılmaktadır.

Basit elektrik devrelerinde Ohm kanunu ve eşdeğer direnç ifadelerinin kullanılması yeterli olmaktadır. Ancak daha karışık elektrik devrelerinin analizi için Kirchoff kuralları kullanılmaktadır. Kirchoff kurallarının uygulanmasında genelde lineer denklem sistemlerinin kullanılması kolaylık sağlar. Bir elektrik devresinde akımın kollara ayrıldığı veya birden çok akımın toplandığı kavşak noktalar vardır. Bu noktalara düğüm noktaları veya bağlantı noktaları denir. İşte bu noktada lineer denklem sistemleri elektrik devrelerinin kollarındaki akımların belirlenmesi için kullanılır. Kirchoff kuralları aşağıdaki gibi ifade edilir (Serway ve Beichner, 2000).

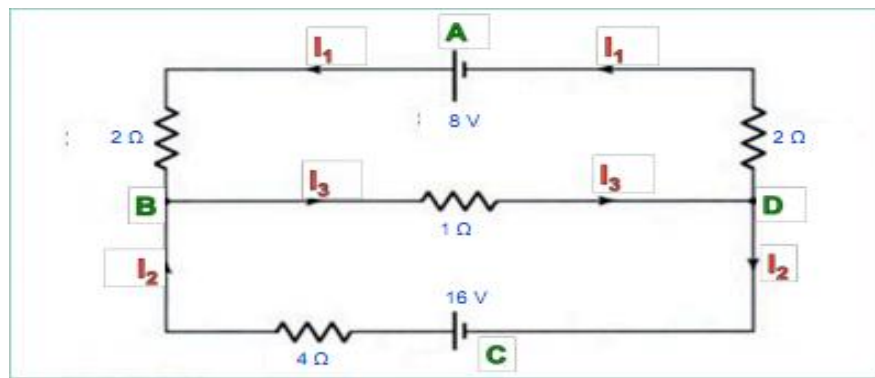
1) Bir elektrik devresinde herhangi bir düğüm noktasına gelen akımların toplamı, o düğüm noktasından çıkan (ayrılan) akımların toplamına eşittir.

2) Bir elektrik devresinin herhangi bir kapalı kısmındaki elektro motor kuvvetlerin (emk) (ϵ) toplamı RI lerin toplamına eşittir. ($\sum \epsilon = \sum RI$, $\sum \epsilon - RI = 0$)

Bu bilgilere göre aşağıdaki elektrik devresinde her bir koldaki akım değerlerini bulmak için lineer denklem sistemlerinin kullanılması gerekmektedir.



Şekil 4.4. Bir elektrik devresi örneği (Anton ve Rorres, 1994)



Şekil 4.5. Bir elektrik devresinin şematik gösterimi (Williams, 2001)

B ve D düğüm noktaları için

$$B: I_1 + I_2 = I_3$$

$$D: I_3 = I_1 + I_2$$

ifadeleri yazılabilir. Bu elektrik devresi için

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (4.1)$$

lineer denklemi yazılır.

“Bir üreteç için her yöndeki IR potansiyellerinin toplamı bu yöndeki toplam voltaja eşittir” kuralına dayanarak aşağıdaki denklemler yazılır.

$$\begin{aligned} ABDA: 2I_1 + 1I_3 + 2I_1 &= 8 \\ CBDC: 4I_2 + 1I_3 &= 16 \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.1) ve (4.2) denklemleri birlikte düşünülürse problemin çözümü, üç bilinmeyenli bir lineer denklem sisteminin çözümüne indirgenmiş olur.

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ 2I_1 + 1I_3 + 2I_1 &= 8 \\ 4I_2 + 1I_3 &= 16 \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.3) lineer denklem sistemi elementer satır işlemleri kullanılarak çözüldüğünde

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/4)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/4 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 + (-1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 2 \\ 0 & 1 & -5/4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/6)R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 2 \\ 0 & 1 & -5/4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 - (1/4)R_3 \\ R_2 + (5/4)R_3 \end{matrix}} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

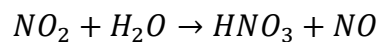
(4.3) lineer denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} I_1 &= 1 \text{ A} \\ I_2 &= 3 \text{ A} \\ I_3 &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

şeklinde (Odisho, 2009; Williams, 2001).

4.1.3. Kimyasal Denklemlerin Denkleştirilmesi (Kimya Uygulamaları)

Lineer denklem sistemleri kimyasal tepkimelerin dengelenmesinde katsayıların belirlenmesi için kullanılır. Örneğin, NO₂ (azotdioksit) ve H₂O (su) nun tepkimesinin sonucunda HNO₃ (nitrik asit) ve NO (azotmonoksit) üretilir. Aşağıdaki kimyasal denklem yazılarak bu tepkime ifade edilebilir.



Bu tepkime ile ne kadar molekül üretileceğinin yanı sıra tepkime için gerekli olan her maddenin de miktarı bilinmelidir. Bu yüzden

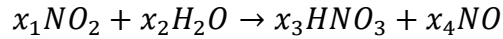
x_1 = Gerekli NO_2 molekül sayısı

x_2 = Gerekli H_2O molekül sayısı

x_3 = Üretilen HNO_3 molekül sayısı

x_4 = Üretilen NO molekül sayısı

olsun. x_1, x_2, x_3, x_4 bilinmeyenleri tepkime denkleminde yerine yazılırsa



denklemini elde edilir. x_i yi hesaplamak için tepkimenin her iki tarafındaki her elementin atomlarının sayısı eşitlenmelidir.

Azot elementi için $x_1 = x_3 + x_4$

Oksijen elementi için $2x_1 + x_2 = 3x_3 + x_4$

Hidrojen elementi için $2x_2 = x_3$

lineer denklemleri yazılabilir. Bu denklemler düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

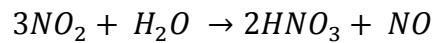
lineer denklem sistemi elde edilir. Yukarıdaki sistemde elementer satır işlemleri yapılarak $k \in R$ parametresine bağlı olarak çözüm

$$x_1 = 3k, x_2 = k, x_3 = 2k, x_4 = k$$

şeklindedir. Özel olarak, $k = 1$ seçilirse

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 1$$

olur. O halde kimyasal denklem

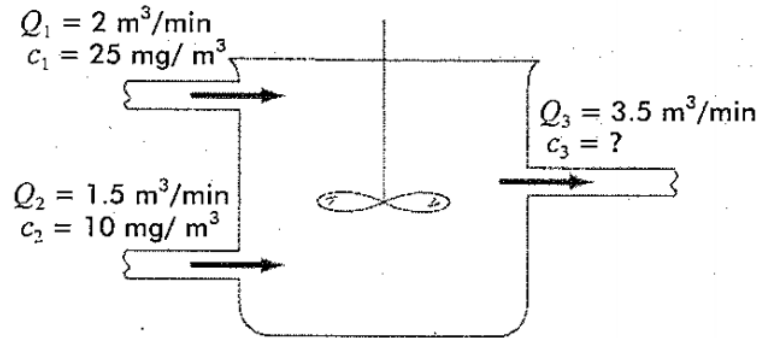


şeklinde dengelenmiş olur (Roman, 1984).

4.1.4. Bir Reaktör Sisteminin Kararlı Hal Analizi (Kimya Mühendisliği/ Biyomühendislik Uygulamaları)

Birçok matematiksel model kütle korunumu, momentum korunumu, enerji korunumu gibi korunum kurallarını temel alır (Datta, 2009). Kimya mühendisliğindeki en önemli düzenleyici ilkelerden birisi kütlenin korunumudur. Kütlenin korunumu bir reaksiyonda girdilerin miktarının çıktılarının miktarına eşit olmasıdır. Kütle korunumunun bir reaktör sisteminde modelleme için kullanılmasında lineer denklem sistemlerinden yararlanılmaktadır. Bir reaktör sisteminin kararlı hal analizini yapabilmek için kütle korunumunun sağlanması gerekir. Yani reaksiyon girdi miktarı çıktı miktarına eşit olmalıdır.

Örneğin, bir reaktör sistemin kararlı hal derişikliklerini hesaplamak için kütlenin korunumu ilkesinden faydalanalım. Bir reaktörden oluşan sistemin kütle dengesini oluşturmak için reaktöre giren ve reaktörden çıkan maddelerin hızlarını bilmek gerekir. Çünkü kütle korunumuna göre reaktöre giren borudaki debi (Q) (dakikadaki metreküp) ve derişiklik c nin (metreküpte miligram) çarpımını dakikada borudan akan kütleyi (m) verir. Bu durum aşağıda örneklendirilmiştir.



Şekil 4.6. Tek reaktörlü bir sistem örneği (Chapra ve Canale, Çev. 2004)

Yukarıdaki şekilde homojen ve kararlı halde, iki giriş borusu ve bir çıkış borusu olan bir reaktör verilmiştir. Ayrıca reaktördeki pervane karıştırıcı görevi görüp karışımın homojen olmasını sağlar.

Şekil 4.6. da 1 numaralı boruda $Q_1 = 2 \text{ m}^3/\text{dak}$ ve $c_1 = 25 \text{ mg}/\text{m}^3$ olduğundan 1 numaralı borudan reaktöre giren madde

$$\begin{aligned} Q_1 c_1 &= (2 \text{ m}^3/\text{dak})(25 \text{ mg}/\text{m}^3) \\ &= 50 \text{ mg}/\text{dk} \end{aligned}$$

dır. Yani; her dakikada bu borunun içinden reaktöre 50 mg kimyasal akmaktadır. Benzer şekilde 2 numaralı boru için

$$\begin{aligned} Q_2 c_2 &= (1,5 \text{ m}^3/\text{dak})(10 \text{ mg}/\text{m}^3) \\ &= 15 \text{ mg}/\text{dk} \end{aligned}$$

bulunur. Reaktör kararlı halde olduğundan 3 numaralı borudan akan kimyasalın derişikliği hesaplanabilir. Kütle korunumu kanununa göre bu reaktör için

$$Q_1 c_1 + Q_2 c_2 = Q_3 c_3$$

eşitliği geçerlidir. Verilen değerler eşitlikte yerine konulursa

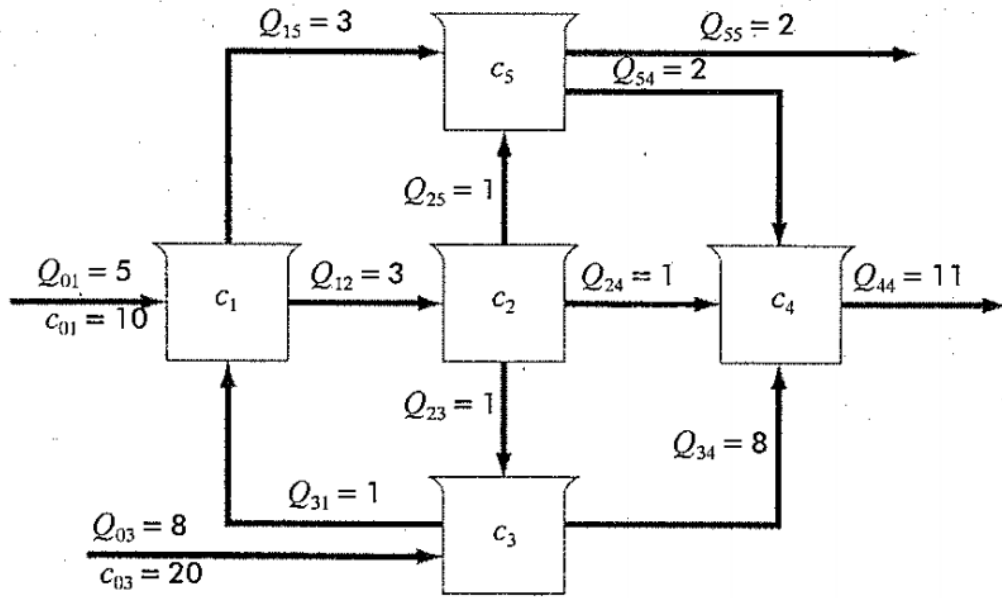
$$50 + 15 = 3,5c_3$$

ifadesinden

$$c_3 = 18,6 \text{ mg}/\text{m}^3$$

bulunur.

Tek reaktörlü sistemler için cebirsel işlemler yapmak kolaydır. Ancak birçok reaktörden oluşan sistemler için reaktör sayısı kadar denkleme sahip lineer denklem sistemlerini çözmek gerekir. Örneğin, borularla beş reaktörün birbirine bağlanmasıyla oluşan reaktör sistemi için beş bilinmeyenli beş denklemlili lineer denklem sistemini çözmek gerekir.



Şekil 4.7. Beş reaktörlü bir sistem örneği (Chapra ve Canale, Çev. 2004)

Verilen reaktör sisteminde derişiklikleri bulmak için her bir reaktör için kütle dengesi denklemlerinin oluşturulması gerekir.

1 numaralı reaktör için giren madde debisi

$$5(10) + Q_{31}c_3$$

ve çıkan madde debisi

$$Q_{12}c_1 + Q_{15}c_1$$

şeklinde yazılır. Sistem kararlı halde olduğundan giren ve çıkan kimyasal miktarları eşit olmalıdır. Yani 1 numaralı reaktör için kütle dengesi denklemi

$$5(10) + Q_{31}c_3 = Q_{12}c_1 + Q_{15}c_1$$

dir. Bu denklemde şekilde verilen Q değerleri yerine yazılırsa

$$6c_1 - c_3 = 50$$

bulunur. Diğer reaktörler için de kütle denge denklemleri yazıldığında

$$\begin{aligned}
6c_1 - c_3 &= 50 \\
-3c_1 + 3c_2 &= 0 \\
-3c_1 + 9c_3 &= 160 \\
-c_2 - 8c_3 + 11c_4 - 2c_5 &= 0 \\
-3c_1 - c_2 + 4c_5 &= 0
\end{aligned}$$

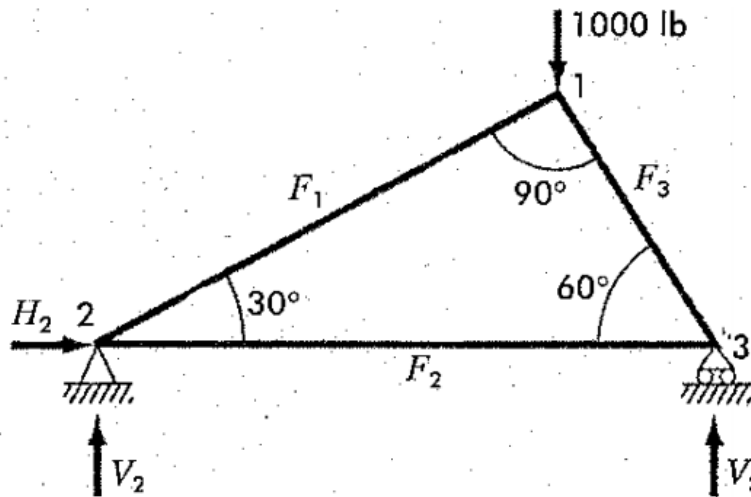
beş bilinmeyenli beş denklemlili lineer denklem sistemi oluşur. Bu lineer denklem sistemi çözüldüğünde her bir reaktörün derişiklikleri hesaplanmış olur. $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ çözüümü

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (11.51, 11.51, 19.06, 17.00, 11.51)$$

şeklindedir (Chapra ve Canale, Çev. 2004).

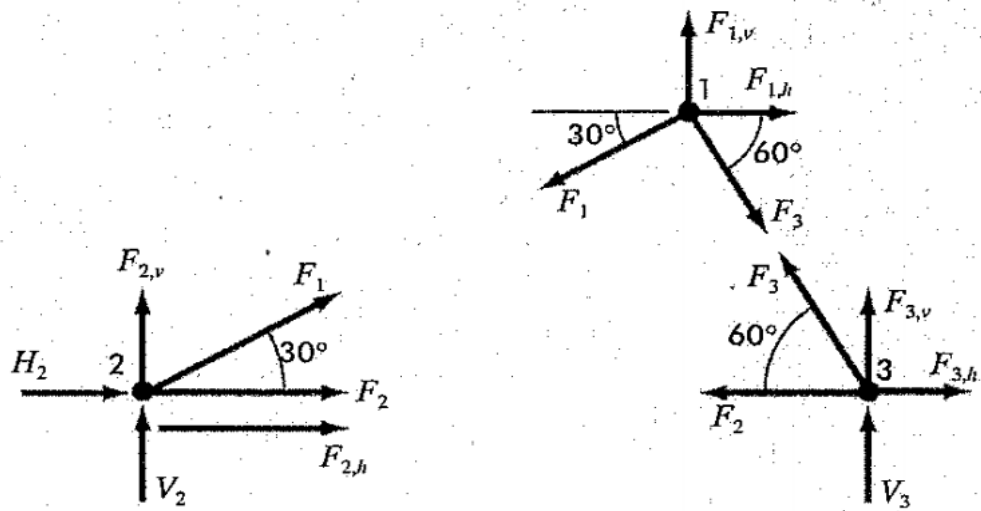
4.1.5. Statik Olarak Belirlenmiş Bir Kafes Yapının Analizi (İnşaat ve Çevre Mühendisliği Uygulamaları)

Mühendislik uygulamalarında binlerce yapısal elemanı olan kafes sistemlerin çözümleri gerekir. Yapı mühendisliğinin önemli problemlerinden biri statik olarak belirlenmiş bir kafes sisteminde kuvvetleri ve tepkileri bulmaktır. Bu kuvvet ve tepkilerin bulunmasında lineer denklem sistemlerinden faydalanılır. Aşağıdaki şekilde bu tür bir kafes yapı görülmektedir.



Şekil 4.8. Statik olarak belirlenmiş bir kafes sisteminde kuvvetlerin gösterimi (Chapra ve Canale, Çev. 2004)

Kuvvetler (F) kafes sisteminin elemanlarına gelen çekme veya basma şeklindeki gerilmeleri göstermektedir. Dış tepkiler (H_2 , V_2 ve V_3) kafes sisteminin taşıyıcı yüzeylerle nasıl etkileştiğini gösteren kuvvetlerdir. 2 numaralı birleşme noktasındaki mesnet her iki yönde de yatay ve düşey kuvvetleri yüzeye iletir öte yandan 3 numaralı birleşme noktasındaki kayar mesnet sadece düşey kuvvetleri iletir. 1000 lb (libre) lik dış kuvvetin etkisi kafes sisteminin değişik elemanları arasında dağılmaktadır. Böyle bir kafes yapıdaki kuvvetleri bulmak için lineer denklem sistemlerinden faydalanılabilir. Lineer denklem sistemi her bir birleşme noktası için kuvvet denklemlerinin yazılmasıyla oluşturulur. Şekil 4.9 de birleşme noktaları için kuvvetler gösterilmiştir.



Şekil 4.9. Statik olarak belirlenmiş bir kafes sisteminde her birleşme noktasındaki serbest cisim kuvvetlerin gösterimi (Chapra ve Canale, Çev. 2004)

Sistem hareket etmediği için her birleşme noktasındaki yatay ve düşey kuvvetlerin toplamı sıfır olmalıdır. O halde 1 numaralı birleşme noktası için

$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &= -F_1 \cos 30 + F_3 \cos 60 + F_{1,h} \\ \sum F_V = 0 &= -F_1 \sin 30 - F_3 \sin 60 + F_{1,v} \end{aligned} \quad (4.4)$$

2 numaralı birleşme noktası için

$$\begin{aligned}\sum F_H = 0 &= F_2 + F_1 \cos 30 + F_{2,h} + H_2 \\ \sum F_V = 0 &= -F_1 \sin 30 + F_{2,v} + V_2\end{aligned}\quad (4.5)$$

3 numaralı birleşme noktası için

$$\begin{aligned}\sum F_H = 0 &= -F_2 - F_3 \cos 60 + F_{3,h} \\ \sum F_V = 0 &= F_3 \sin 60 + F_{3,v} + V_3\end{aligned}\quad (4.6)$$

olur. Bu denklemlerde $F_{i,h}$ i numaralı birleşme noktasına uygulanan yatay dış kuvvet (pozitif bir kuvvet soldan sağa doğrudur) $F_{i,v}$ de i numaralı birleşme noktasına uygulanan düşey dış kuvvettir (pozitif bir kuvvet aşağıdan yukarıya doğrudur). O halde bu problemde 1 numaralı birleşme noktasındaki aşağıya doğru 1000 lb lik kuvvet $F_{1,v} = -1000$ demektir. Verilen örnekte $F_{i,v}$ ve $F_{i,h}$ ler sıfırdır. Dikkat edilirse iç kuvvet ve tepkilerin yönleri bilinmemektedir. Newton'un yasalarını uygulamak için yönler konusunda tutarlı davranmak gerekir. Yönün yanlış alınması sonucun negatif çıkmasına sebep olabilir. Bu problemde bütün elemanlardaki kuvvetler birleşme noktalarını birbirine doğru çekecek şekilde çekme kuvveti olarak varsayılmıştır. Dolayısıyla negatif bir sonuç çıkması basma kuvvetinin olduğunu gösterir. Bu problem her bir birleşme noktası için yazılan denklemler bir araya getirilerek altı bilinmeyenli altı denklem sistemi olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & 0 & 0 & 0 \\ -0.866 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.866 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (4.7)$$

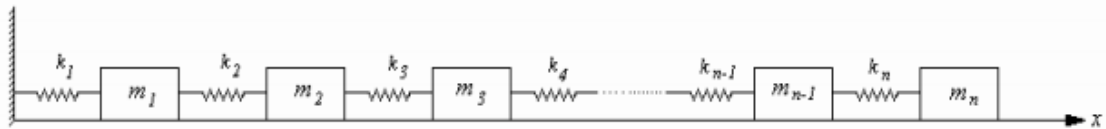
(4.7) lineer denklem sisteminin çözümü yapıldığında;

$$F_1 = -500, F_2 = 433, F_3 = -866, H_2 = 0, V_2 = 250, V_3 = 750$$

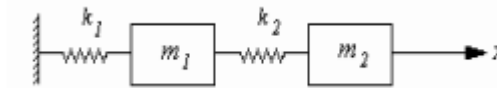
çözümü elde edilir (Chapra ve Canale, Çev. 2004).

4.1.6. Yay Kütle Sistemleri (Makine / Havacılık Mühendisliği Uygulamaları)

İdeal yay kütle problemleri makine ve diğer mühendislik problemlerinde önemli rol oynar (Chapra ve Canale, Çev. 2004). Düşük frekanslı titreşimlerde makinelerin güç ve hareket iletim mekanizmaları çok elemanlı parametreye sahip, yani n serbestlik dereceli lineer sistem gibi göz önüne alınır. Hesaplamalarda çok kapsamlı matematiksel işlemlerin olması, günümüzde makinelerin güç ve hareket iletim mekanizmalarının dinamiksel karakteristiklerinin gerekli optimizasyon işlemlerinin yerine getirilmesini engellediğinden n dereceli sistemlerin varlığı, mekanik olayların etkilemeden hesap modellerinin basitleştirilmesini sağlar ve matematiksel işlemleri önemli ölçüde azaltır (Bakşiyev ve Ertaş, 2003). Dinamik modellerden zincir şekilli sistemlere bir örnek Şekil 4.10 da gösterilmiştir.



Şekil 4.10. n serbestlik dereceli zincir şekilli sistem (Bakşiyev ve Ertaş, 2003)



Şekil 4.11. İki serbestlik dereceli zincir şekilli sistem (Bakşiyev ve Ertaş, 2003)

Uygulamalı titreşim teorisinde zincir şekilli sistemler, birbiri ile elastik ilişki ile bağlanmış atalet momentlerinin veya kütlelerin toplamıdır. Şekil 4.10 da $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ kütleler zinciri rijitlikleri $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ olan elastik yaylarla bağlanmaktadır. Zincir şekilli bu sistem x yatay eksen boyunca öteleme titreşim hareketi yapabilir. Şekil 4.11 de gösterilen iki serbestlik dereceli sistem için hareket denklemi yazılırsa m_1 ve m_2 kütlelerinin denge konumundan uzaklaşmalarını x_1 ve x_2 ile gösterilirse, bu durumda m_1 kütlelerine birinci yay tarafından uygulanan kuvvet

$$-k_1 x_1 \quad (4.8)$$

ikinci yayın uyguladığı kuvvet ise

$$k_2(x_1 - x_2) \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır. Toplam kuvvet

$$F_1 = -k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır. m_2 kütesine yalnız ikinci yay tarafından kuvvet uygulanabilir.

$$F_2 = k_2(x_1 - x_2) \quad (4.11)$$

$\sum F = ma$ nın kullanılmasıyla serbest titreşimlerde

$$m_1\ddot{x}_1 = F_1 \quad \text{ve} \quad m_2\ddot{x}_2 = F_2 \quad (4.12)$$

yazılırsa, iki serbestlik dereceli sistem için Şekil 4.10 hareket denklemi

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) \end{cases}$$

yazılır. Düzenleme yapılırsa

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

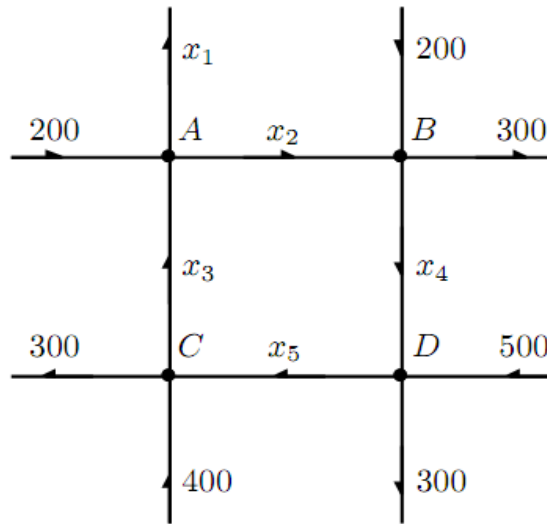
elde edilir. Serbestlik derecesi n olan öteleme, yani lineer sistem için (4.13) denklemi

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 & = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 & = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - k_3x_3 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4x_4 & = 0 \\ \vdots & \\ m_i\ddot{x}_i - k_ix_i + (k_i + k_{i+1})x_i - k_{i+1}x_{i+1} & = 0 \\ \vdots & \\ m_n\ddot{x}_n - k_nx_{n-1} + k_nx_n & = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Dönme ve burulma hareketi yapan sistemler içinde dönme açıları da kullanılarak benzer denklem sistemleri elde edilebilir (Bakşiyev ve Ertaş, 2003).

4.1.7. Trafik Akışı Probleminin Modellenmesi (Ağ akış problemleri Uygulamaları)

Ağ analizi elektrik mühendisliğinde ve diğer bilim dallarında önemli rol oynar. Son yıllarda bilgi teorisi ve taşımacılık sistemleri gibi pek çok alanda ağ analizindeki araçların ve kavramların yararlı olduğu bulunmuştur (Williams, 2001). Aşağıdaki trafik ağı modelinde bir yol ağının en yoğun olduğu saatler süresince elde edilen veriler görülmektedir. Bu verilere göre lineer denklem sistemlerinin nasıl oluşturulduğu gösterilecektir.



Şekil 4.12. Trafik ağ şeması (Williams, 2001)

Bir trafik ağı modeli, kesişme noktaları (node) diye adlandırılan noktalar kümesi ve kesişme noktalarının birkaçı veya tümünü birleştiren tek yönlü doğrulardan oluşur. Şekil 4.12 de trafik akışları bir değişken veya sayı ile gösterilmiştir. Aşağıdaki temel varsayımlar göz önüne alınarak lineer denklem sistemi oluşturulur.

- 1) Bir kesişme noktasına gelen toplam akış miktarı çıkan toplam akış miktarına eşittir.
- 2) Ağa gelen toplam akış miktarı ağdan çıkan toplam akış miktarına eşittir.

İlk olarak her kesişme noktası için giren akış miktarları çıkan akış miktarlarına eşitlenmelidir.

A kesişme noktası için

$$200 + x_3 = x_1 + x_2$$

B kesişme noktası için

$$200 + x_2 = 300 + x_4$$

C kesişme noktası için

$$400 + x_5 = 300 + x_3$$

D kesişme noktası için

$$500 + x_4 = 300 + x_5$$

denklemleri yazılır. Trafik ağı için ağa gelen akış ağdan çıkan akışa eşit olduğundan,

$$400 + 200 + 200 + 500 = 300 + 300 + x_1 + 300$$

denklemini yazılır. O halde yazılan bu denklemler

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 200 \\ x_2 & - x_4 & = 100 \\ x_3 & - x_5 & = 100 \\ x_4 - x_5 & = & -200 \\ x_1 & = & 400 \end{array}$$

beş bilinmeyenli lineer denklem sistemini oluşturur. Bu lineer denklem sisteminin çözümü için, lineer denklem sisteminin arttırılmış matrisi

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -200 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \end{array} \right]$$

şeklindedir. Gerekli elementer satır işlemleri yapıldığında bu matrisin indirgenmiş eşelon formu

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \end{array} \right]$$

şeklindedir. Bu durumda t keyfi bir değer olmak üzere genel çözüm

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (400, t - 200, t + 100, t - 200, t)$$

olarak elde edilir. Tek yönlü caddelerde zıt yönden akış olmadığından, bütün değerler negatif olmayacak şekilde t parametresi seçilmelidir. O halde $t \geq 200$ için lineer denklem sisteminin çözümü elde edilmiş olur (Chen, 2008).

4.1.8. Leontief Ekonomi Modeli (Ekonomi Uygulamaları)

1949 yılında, Harvard Üniversitesinden profesör Leontief (1973 Nobel ekonomi ödüllü) Amerikan ekonomisini kömür endüstrisi, otomotiv endüstrisi, haberleşme gibi 500 sektöre ayırmıştır. Her bir sektör için bu sektörlerin birbirleriyle ilişkilerini gösteren denklemleri yazmıştır. Böylece 500 denklem 500 bilinmeyenli bir denklem sistemi elde etmiştir. Zamanın en büyük bilgisayar Mark II; bu denklem sistemini çözemediği için denklem sistemi 42 denklem 42 bilinmeyenli bir sisteme indirgenmiştir. Programlama birkaç ay sürmüş ve Mark II indirgenen denklem sistemini 56 saatte çözmüştür (Çalışkan, 2005). Bu gelişme ekonomide lineer denklem sistemlerinin kullanılmaya başlandığı önemli uygulamalardan biridir.

Leontief ekonomi modeli (Girdi-Çıktı Analizi) bir ekonomideki endüstrilerin dış taleplerle birlikte birbirlerinin iç taleplerini de karşılayacak kadar üretim yapmalarını sağlayacak denge koşullarını belirlemek için yapılır. Girdi-Çıktı analizinin yapılmasında lineer denklem sistemleri ve matrisler kullanılarak denge koşulları sağlanmaya çalışılır.

Örnek olarak, iki endüstrili bir ekonomi düşünelim ve bu endüstriler su ve elektrik şirketleri olsun. Elektrik şirketi, su ve elektrik kullanarak elektrik; su şirketi de yine su ve elektrik kullanarak su üretmektedir. Her iki şirketin de çıktısı (output) TL ile ölçülmek üzere

1 TL lik elektrik üretmek için 0.2 TL lik elektrik ve 0.1 TL lik su,

1 TL lik su üretmek için 0.4 TL lik elektrik ve 0.2 TL lik su gerekiyor.

Dış sektörün talebi ise, 18 000 TL lik elektrik ve 12 000 TL lik su üretimi olduğuna göre elektrik ve su şirketlerinin hem dış talebi ve hem de iç talebi karşılayabilmeleri için gerekli toplam çıktıları

x_1 = elektrik şirketinin toplam çıktısı,

x_2 = su şirketinin toplam çıktısı

olsun.

Tablo 1.

Elektrik ve su şirketlerinin iç ve dış talepleri

	<i>İç talep</i>	<i>Dış talep</i>
Elektrik	$0.2x_1 + 0.4x_2$	18 000
Su	$0.1x_1 + 0.2x_2$	12 000

Girdi- çıktı dengenin sağlanabilmesi için, iç talep ve dış talebin toplamı kadar toplam çıktı olmalıdır. Buna göre denge denklemleri yazılırsa

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.2x_1 + 0.4x_2 + 18000 \\ x_2 &= 0.1x_1 + 0.2x_2 + 12000 \end{aligned} \quad (4.14)$$

denklemler sistemi elde edilir ki, bu sistemin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18000 \\ 12000 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (4.14) lineer denklemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned} x_1 &= 32000 \text{ TL} \\ x_2 &= 19000 \text{ TL} \end{aligned}$$

olur. Böylece hem iç talep hem de dış talebin karşılanması için üretimin ne kadar olacağı lineer denklem sistemleri yardımı ile bulunmuş olur (Karakaş, bt).

4.1.9. Makara Sistemleri (Mekanik Uygulamaları)

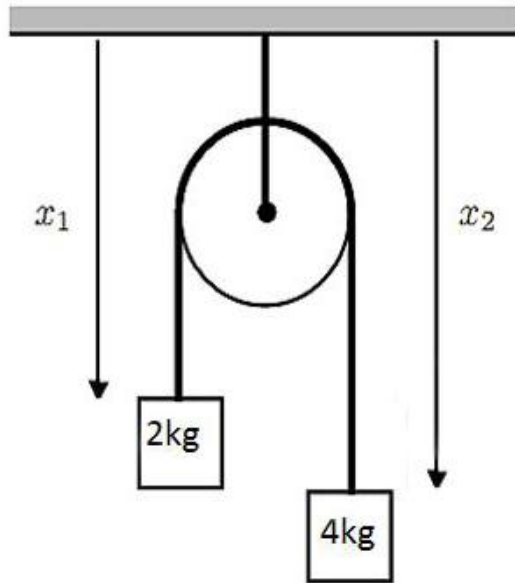
Makara sistemleri günlük hayatta çoğunlukla kullanılmaktadır. Sabit makaralardan oluşan düzenekler kuvvetin yönünü ve doğrultusunu değiştirebildikleri için iş yapma kolaylığı sağlar. Sabit makaralarda yoldan ve kuvvetten kazanç sağlanamaz (<http://www.uzaktanogrenme.com>). Makara sistemleri, yay kütle problemlerinin temelinde Newton kanunları yer alır. Newton kanunları sınırlı olmasına rağmen, geçerliliğini koruduğu ve basit olduğu için mühendislikte yaygın olarak kullanılır (Fishbane, Gasiorowicz ve Thornton, Çev. 2006). Makara sistemleri ve yay kütle sistemleri genellikle inşaatlarda tuğla, kum, harç gibi malzemeleri taşımak için kullanılır. Bu tür düzeneklerde denge şartlarının sağlanması için kuvvet, gerilme ve ivme gibi değişkenlerin hesaplanmasında Newton kanunlarının uygulanmasıyla oluşan lineer denklem sistemlerinden faydalanılır. Çeşitli problemlerle örneklendirme yapılabilir. Örneğin, pürüzsüz hafif bir makara, hafif bir ip ve ağırlıklardan oluşan bir ağırlık sistemi için iki prensibin sağlanması gerekir. Bu prensipler

1) Bir veya daha fazla makaradan oluşan bir sistemde iki uçtaki gerilim aynıdır.

2) Newton'un ikinci hareket kuralına göre, F ; kuvveti, m ; kütle ve \ddot{x} ; ivmeyi ifade etmek üzere $F = m\ddot{x}$ dir.

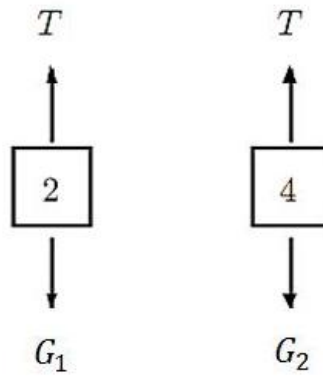


Şekil 4.13. Sabit makara düzeneği (<http://www.uzaktanogrenme.com>)



Şekil 4.14. Sabit makara düzeneği modeli (Chen, 2008)

Yukarıda sabit makaradan oluşan sistem görülmektedir. Şekil 4.14 de görüldüğü gibi 2 kg ve 4 kg lık yüklerin dengede olduğu sistemde bu yüklerle etki eden kuvvetler incelenecek olursa



Şekil 4.15. Her bir kütleye etki eden kuvvetlerin gösterimi (Chen, 2008)

şeklinde gösterilebilir. Burada T ipteki gerilme ve g yerçekiminden dolayı oluşan ivmeyi gösterir. Buradan

$$G_1 = m_1 g \quad \text{ve} \quad G_2 = m_2 g$$

olduğundan

$$G_1 = 2g \quad \text{ve} \quad G_2 = 4g$$

yazılır. Newton'un hareket yasasına göre

$$2\ddot{x}_1 = 2g - T \quad \text{ve} \quad 4\ddot{x}_2 = 4g - T$$

denklemleri yazılabilir. Ayrıca ipin uzunluğu korunmaktadır ve $x_1 + x_2 = C$ şeklinde ifade edilebilir. İpin her iki tarafındaki gerilimler eşit olacağından

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$$

eşitliği yazılır. $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, T$ bilinmeyenler olmak üzere

$$\begin{aligned} 2\ddot{x}_1 + T &= 2g \\ 4\ddot{x}_2 + T &= 4g \\ \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

üç bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. O halde bu denklem sisteminin arttırılmış matrisi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2g \\ 0 & 4 & 1 & 4g \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

şeklinde yazılır. Buradan elementer satır işlemleri yapılarak arttırılmış matris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2g \\ 0 & 0 & 3 & 8g \end{array} \right)$$

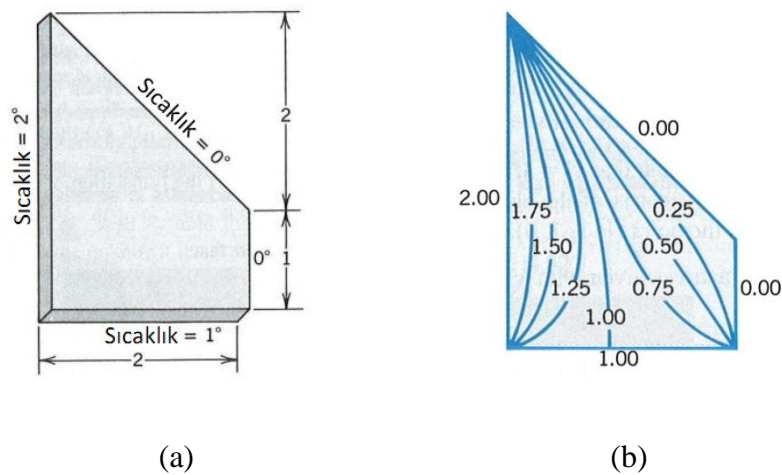
matrisine indirgenmiş olur. Buradan

$$(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, T) = \left(-\frac{1}{3}g, \frac{1}{3}g, \frac{8}{3}g \right)$$

çözümü elde edilmiş olur (Chen, 2008).

4.1.10. Denge Sıcaklık Dağılımları (Termodinamik Uygulamaları)

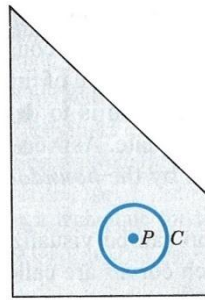
Sıcaklığı dışına veren çelik gibi maddelerin sıcaklık dağılımlarını belirlemek tekrarlı matris teknikleri vasıtasıyla bir lineer denklem sisteminin çözümü ile kolaylaştırılabilen temel bilim ve mühendislik konusudur. Bir plakanın uçlarındaki sıcaklıklar verildiğinde plakanın içindeki denge sıcaklık dağılımının bulunması probleminin çözümü için lineer denklem sistemleri kullanılır.



Şekil 4.16. Isıya yalıtılmış plaka ve eş sıcaklık eğrisi (Anton ve Rorres, 1994)

Şekil 4.16 (a) da her iki yüzü de ısıya yalıtılmış ince bir plaka ve plakanın dört köşesindeki sıcaklıklar verilmiştir. Şekilde $0^\circ, 1^\circ, 2^\circ$ değerleri ile her nokta üzerinde sabit olan sıcaklıklar ifade edilmiştir. Belli bir zaman sonra plaka üzerindeki sıcaklık dengeleneceğinden problemde amaç; plakanın içerisindeki noktaların sıcaklık dağılımlarını belirlemektir. İç sıcaklık dengesi sınır verileri ile belirlenir. Sıcaklık denge dağılımı, eşit sıcaklık noktalarını bağlayan eğrilerin kullanımı ile gösterilebilir. Böyle eğriler, sıcaklık dağılımının eş sıcaklık eğrisi (izoterm) olarak adlandırılır. Şekil 4.16 (b) de tasarlanan bir izoterm görülmektedir. Yukarıda verilen problem için kullanılacak yöntemler 3 boyutlu bir cismin içinde sıcaklık belirleme problemine de genellenebilir. Şekil 4.16 de bir barajın kesiti gösterilmiştir. Baraj üç farklı sıcaklığa maruz kalmaktadır. Bu sıcaklıklar, barajın zemininin sıcaklığı, yüzey üzerindeki suyun sıcaklığı ve havanın sıcaklığıdır. Söz konusu olan ısıl gerilimi belirlemek için baraj içerisindeki sıcaklık dağılımı bilgisi gereklidir ve sıcaklık dağılımının hesaplanmasında da termodinamiğin ilkelerini göz önüne almak gerekir.

Bu tür problemler için bir matematiksel model birçok yolla elde edilebilir. Burada sıcaklık denge dağılımlarının özellikleri dikkate alınarak çözüme ulaşılmaya çalışılacaktır. Bu özellikler ortalama değer özelliği ve ayırık ortalama değer özelliğidir.

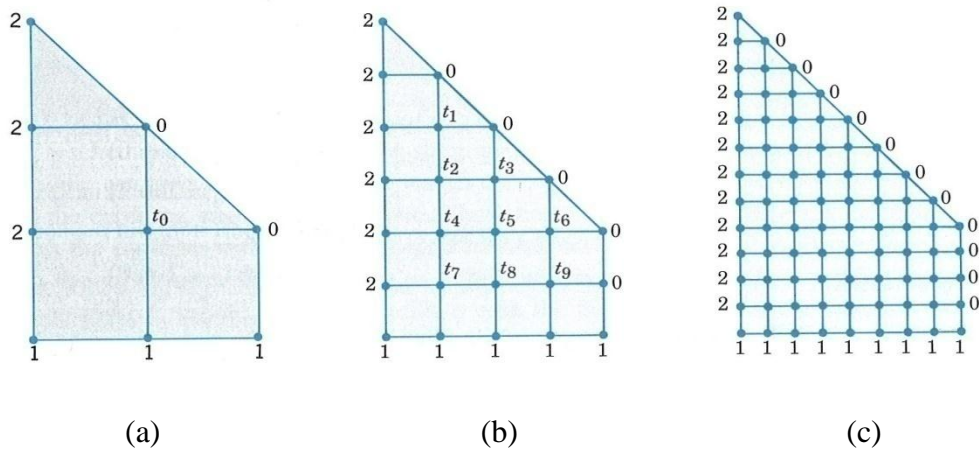


Şekil 4.17. Isıl dengede olan bir plaka temsili (Anton ve Rorres, 1994)

Şekil 4.17 de gösterilen ısıl dengede olan bir plaka için ortalama değer özelliği, P ısıl dengede olan bir plakanın herhangi bir noktası ve C tamamen plaka içinde olan, P noktasını merkez alan herhangi bir çember olmak üzere; P noktasının sıcaklığı çemberin sıcaklığının ortalama değeridir. Bu özellik moleküler hareketin bir sonucu olup ısıl dengede olan durumlarda geçerlidir. Fakat ortalama değer özelliğinden faydalanarak sıcaklık dağılımını belirlemek kolay bir işlem değildir. Problem plaka içerisindeki sonlu

nokta kümelerinin sıcaklığını bulunmasıyla sınırlandırıldığı takdirde problem bir lineer denklem sistemine indirgenebilir. Böylece sıcaklık dağılımlarının belirlenmesi için daha ekonomik bir yöntem uygulanmış olur.

Problemin çözümü için problem farklı şekillerde ifade edilebilir. Şekil 4.18 de görüldüğü gibi problemde verilen plaka büyük karelerle kaplanacağı gibi küçük karelerle de kaplanabilir. Şekil 4.18 (b) de Şekil 4.18 (a) da oluşturulan karelerin yarısı alınarak kareler oluşturulmuş ve Şekil 4.18 (c) de Şekil 4.18 (b) deki karelerin yarısı alınarak daha küçük kareler oluşturulmuştur. Bu şekillerde kesişim noktaları kafes noktaları diye adlandırılır. Eğer bu noktalar plakanın sınırları üzerindeyse sınır kafes noktası, noktalar plakanın içerisindeyse iç kafes noktası olarak adlandırılır. Şekil 4.18 de gösterilen üç farklı ağ aralıkları için sırasıyla 1, 9, 49 iç kafes noktası bulunmaktadır.



Şekil 4.18. 1, 9, 49 iç kafes noktalı plaka temsilleri (Anton ve Rorres, 1994).

Verilen farklı gösterimlerde en küçük karelere bölünmüş plakada sıcaklık dağılımı daha açık olarak görülmektedir. Sınır kafes noktalarındaki sıcaklıklar sınırların sıcaklıklarıyla eşleşmiş olup aynı sıcaklık değeri ile gösterilmiştir. İç kafes noktalarının sıcaklıklarının belirlenmesi için ortalama değer probleminin farklı bir versiyonu kullanılabilir. Bu özellik ayırık ortalama değer özelliği olarak bilinir. Kısaca bu özellik, "her bir iç kafes noktasının sıcaklığı, o noktaya komşu dört kafes noktasının sıcaklığının ortalamasıdır" şeklinde ifade edilebilir. Bu farklı versiyon ortalama değer özelliği için kabul edilebilir bir yaklaşımdır fakat yaklaşık bir değer olduğundan iç kafes noktalarının doğru sıcaklıklarının yaklaşık değerleri elde edilir. Ancak bu tahminler

kafes aralıkları azaldıkça kesin değere yaklaşır. Yani, kafes aralığı sifira yaklaştıkça tahmin edilen sıcaklık değeri normal sıcaklık değerine oldukça yaklaşır. Şekil 4.18 de gösterilen üç farklı kafes aralığı için verilen noktaların yaklaşık sıcaklığı hesaplanarak tahminlerin değişimi incelenmiştir.

Şekil 4.18 (a) da sıcaklık dağılımını hesaplamak kolaydır. Eğer şekilde verilen kafes noktasının sıcaklığı t_0 alınırsa, ayırık ortalama değer özelliğine göre

$$t_0 = \frac{1}{4}(2 + 1 + 0 + 0) = 0.75$$

olur.

Şekil 4.18 de 9 iç kafes noktası t_1, t_2, \dots, t_9 olsun. Her bir iç kafes noktası için ortalama değer özelliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{4}(t_2 + 2 + 0 + 0) \\ t_2 &= \frac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 2) \\ t_3 &= \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + 0 + 0) \\ t_4 &= \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + t_7 + 2) \\ t_5 &= \frac{1}{4}(t_3 + t_4 + t_6 + t_8) \\ t_6 &= \frac{1}{4}(t_5 + t_9 + 0 + 0) \\ t_7 &= \frac{1}{4}(t_4 + t_8 + 1 + 2) \\ t_8 &= \frac{1}{4}(t_5 + t_7 + t_9 + 1) \\ t_9 &= \frac{1}{4}(t_6 + t_8 + 1 + 0) \end{aligned} \tag{4.15}$$

9 bilinmeyenli 9 denklemlili bir lineer denklem sistemi elde edilir.

$$t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

olmak üzere (4.15) denklem sistemi matris formunda

$$t = Mt + b \quad (4.16)$$

olarak yazılabilir. t çözümünü elde etmek için (4.16) ifadesi

$$(I - M)t = b$$

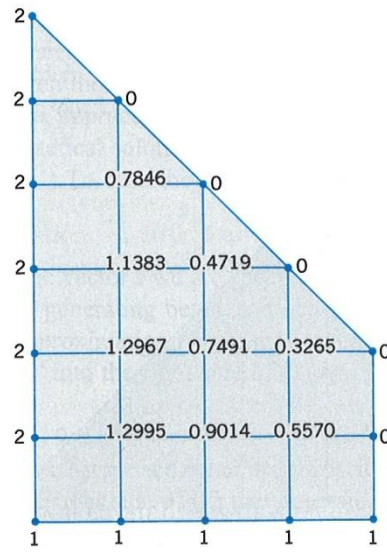
olarak yazılır. Buradan $(I - M)$ matrisi tersinir olmak üzere t

$$t = (I - M)^{-1}b \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.16) sisteminden t hesaplandığında

$$t = \begin{bmatrix} 0.7846 \\ 1.1383 \\ 0.4719 \\ 1.2967 \\ 0.7491 \\ 0.3265 \\ 1.2995 \\ 0.9014 \\ 0.5570 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Bu çözümlere göre Şekil 4.19, problemde verilen plakanın sıcaklık dağılımını gösteren şekildir.



Şekil 4.19. 9 iç kafes noktasına sahip plakanın noktasal sıcaklık değerleri (Anton ve Rorres, 1994)

Şekil 4.18 (c) de iç kafes noktaları t_1, t_2, \dots, t_{49} olarak isimlendirilerek ve her bir iç kafes noktası için ayrık ortalama değer özelliğinden faydalanılarak 49 bilinmeyenli 49 denklemlilik bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{1}{4}(t_2 + 2 + 0 + 0) \\
 t_2 &= \frac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 2) \\
 &\vdots \\
 t_{48} &= \frac{1}{4}(t_{41} + t_{47} + t_{49} + 1) \\
 t_{49} &= \frac{1}{4}(t_{42} + t_{48} + 0 + 1)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

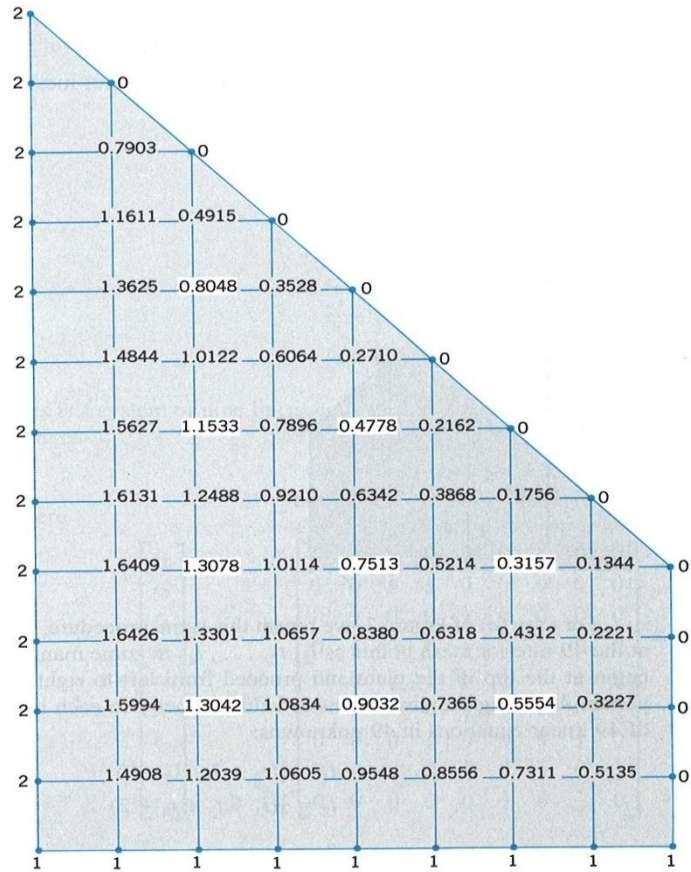
dir. Bu denklem sistemi matris formunda

$$t = Mt + b$$

şeklinde ifade edilir. Buradan $(I - M)$ matrisi tersinir olmak üzere t

$$t = (I - M)^{-1}b \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.19) sisteminden t hesaplandığında t değerleri bulunmuş olur. Bu değerler Şekil 4.20 de gösterilmiştir.



Şekil 4.20. 49 iç kafes noktasına sahip plakanın noktasal sıcaklık değerleri (Anton ve Rorres, 1994)

Şekilde gösterilen sıcaklık dağılımlarından gölgelendirme yapılmamış olan sıcaklık değerleri Şekil 4.19 deki kafes noktalarındandır. Aşağıdaki tabloda Şekil 4.18 de gösterilen üç farklı kafes aralığı için kafes noktalarındaki sıcaklıklar karşılaştırılmıştır.

Tablo 2.

Ortak kafes noktalarında sıcaklıklar (Anton ve Rorres, 1994)

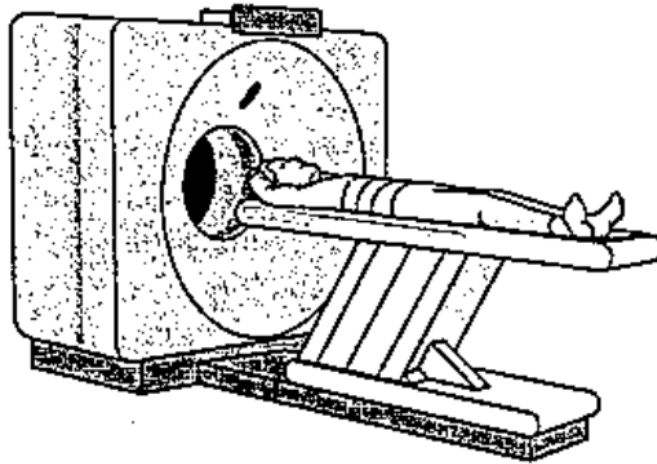
	A durumu	B durumu	C durumu
t_1	-	0.7846	0.8048
t_2	-	1.1383	1.1533
t_3	-	0.4719	0.4778
t_4	-	1.2967	1.3078
t_5	0.7500	0.7491	0.7513
t_6	-	0.3265	0.3157
t_7	-	1.2995	1.3042
t_8	-	0.9014	0.9032
t_9	-	0.5570	0.5554

Şekil 4.18 (c) deki kafes aralığına göre hesaplanan sıcaklık değerleri gerçek sıcaklık değerine Şekil 4.18 (b) de olduğundan daha yakındır. Çünkü kafes aralığı azaldıkça herhangi bir noktanın tahmin edilen sıcaklık değeri gerçek sıcaklık değerine yaklaşır (Anton ve Rorres, 1994).

Bu uygulamada bir metal plakanın istenilen noktalarında sıcaklık dengesinin kurulmasında lineer denklem sistemlerinin ve çözüm yöntemlerinin önemi anlatılmaya çalışılmış ve termodinamiğin prensiplerinden faydalanılarak problemin çözümü yapılmıştır.

4.1.11. Bilgisayarlı Tomografi

Bilgisayarlı tomografinin temel problemi, kesit boyunca geçen x-ışınlarından toplanan verileri kullanarak insan vücudunun bir kesitinin görüntüsünü resmetmektir. x-ışınları taramalarının analizi ile bir insan vücudunu kesitsel resmetmek görüntünün sayısal gösterimi için tutarsız lineer sisteme yol açar. x-ışınlarından toplanan veriler bir bilgisayar ile analiz edilir ve bu kesit bir video monitörde gösterilir.

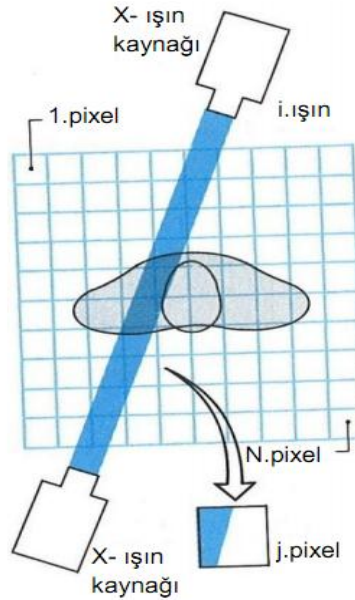


Şekil 4.21. x-ışın tomografisine hazırlanan bir hasta (Anton ve Rorres, 1994)



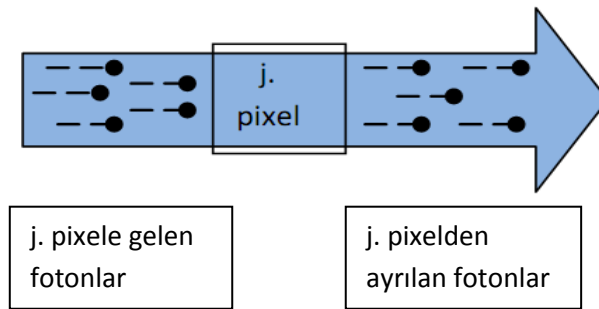
Şekil 4.22. Bir hasta kafatasının bilgisayar destekli tomografi görüntüsü (Anton ve Rorres, 1994)

Şekil 4.21 de x-ışın tomografisine hazırlanan bir hasta ve Şekil 4.22 de bu sistem tarafından elde edilen bir insan kafasının kesiti görülmektedir. Böyle bir sistem bilgisayar destekli tomografi olarak adlandırılır.



Şekil 4.23. x-ışını ile görüntü alımının şematik gösterimi (Anton ve Rorres, 1994)

Şekil 4.23 de görüldüğü gibi kesitlerin görüntüsünün elde edilmesi için görüntü alanı 1 den N ye kadar numaralandırılmış birçok pixele ayrılabilir. Her bir pixelin x-ışın yoğunluğunu belirlemek isteğe bağlıdır. Pixel sayısı artırılıp azaltılabilir. Çeşitli metotlarla pixellerdeki ışın yoğunluğu hesaplandıktan sonra bir video ekranında gölgelendirme yapılarak gösterilir. Çünkü insan vücudundaki farklı dokular farklı x-ışın yoğunluğuna sahiptir.



Şekil 4.24. Bir pixelden x-ışınlarının geçişinin temsili (Anton ve Rorres, 1994)

Şekil 4.24 de, hemen hemen aynı genişliğe sahip x-ışınlarının j. pixelden geçişi gösterilmektedir. x-ışınlarını oluşturan fotonlar, dokuların x-ışın yoğunluğu için belli bir oranda dokular tarafından absorbe edilir. Nicelik olarak ifade edilecek olursa j. pixelin x-ışın yoğunluğu x_j ile gösterilmek üzere

$$x_j = \ln \left(\frac{j. \text{pixele gelen foton sayısı}}{j. \text{pixelden ayrılan foton sayısı}} \right)$$

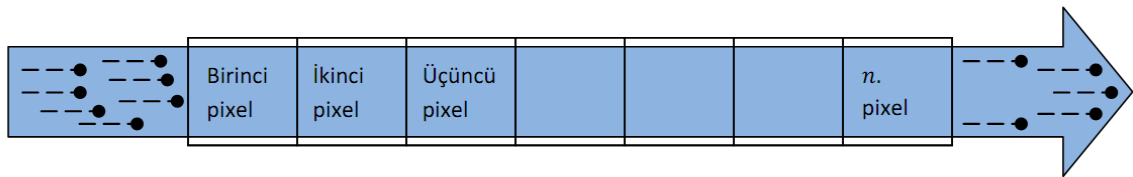
dir. Burada "ln" logaritma fonksiyonudur. Logaritmanın

$$\ln(a/b) = -\ln(b/a)$$

özelliği kullanılarak x_j

$$x_j = -\ln \left(\frac{j. \text{pixelden absorbe edilmeden}}{\text{geçen foton miktarı}} \right)$$

elde edilir.



Şekil 4.25. x-ışınlarının aynı satırdaki ardışık pixellerden geçişinin temsili (Anton ve Rorres, 1994)

Şekil 4.25 de pixellerin başlangıç satırı boyunca x-ışınlarının geçmesi durumunda bu pixelden ayrılan fotonların sayısı bu satırdaki bir sonraki pixele giren fotonların sayısına eşittir. Eğer, pixeller 1 den n ye kadar numaralandırılırsa logaritmik fonksiyonun toplama özelliğinden,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \ln \left(\frac{\text{İlk pixele giren foton sayısı}}{n. \text{pixelden ayrılan foton sayısı}} \right) \\ &= -\ln \left(\frac{\text{absorbe olmadan } n. \text{pixelden}}{\text{geçen fotonların sayısı}} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

yazılır. O halde pixellerin bir satırındaki toplam x-ışın yoğunluğunu bulmak için pixellerin yoğunluklarının toplanması gerekir.

Şekil 4.23 de pixellerde x-ışının yoğunluğu düşünülürse, i . ışın yoğunluğu b_i ile gösterilmek üzere

$$b_i = \ln \left(\frac{\text{Görüntü alanında kesit olmaksızın dedektöre gelen } i. \text{ ışının foton sayısı}}{\text{Görüntü alanında kesit olması durumunda dedektöre gelen } i. \text{ ışının foton sayısı}} \right) \\ = -\ln(\text{Absorbe olmaksızın kesitten geçen } i. \text{ ışının foton sayısı}) \quad (4.22)$$

yazılır. Bu şekilde elde edilen dedektör ölçümlerinin sonuçları bilgisayar belleğinde depolanır. Sonra klinik yönden tarama, görüntü alanında kesit ile oluşturulur. Tarama ile oluşan bütün ışınların b_i leri hesaplanır ve değerler sonraki süreç için depolanır. Pixeller boyunca geçen her ışın için aşağıdaki eşitliğin olduğu bilinmektedir.

$$\left(\text{Absorbe edilmeden pixelin satırlarından geçen fotonların sayısı} \right) = \left(\text{Absorbe edilmeden kesitten geçen fotonların sayısı} \right)$$

Bu durumda eğer i . ışın n pixelin satırı boyunca geçiyorsa (4.21) ve (4.22) den

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = b_i$$

Denklemini elde edilir. Bu denklemde b_i , klinik ölçümlerden bilinmektedir ve x_1, x_2, \dots, x_n ler belirlenmesi gereken pixellerin yoğunluklarıdır. Genel olarak, eğer i . ışın j_1, j_2, \dots, j_i ile ifade edilen pixellerin sütun ve satırlarından geçiyorsa denklem

$$x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_i} = b_i$$

şeklinde olur. Eğer a_{ij} aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & j = j_1, j_2, \dots, j_i \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

bu durumda i . ışın denklemi

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iN}x_N = b_i \quad (4.23)$$

olarak yazılabilir.

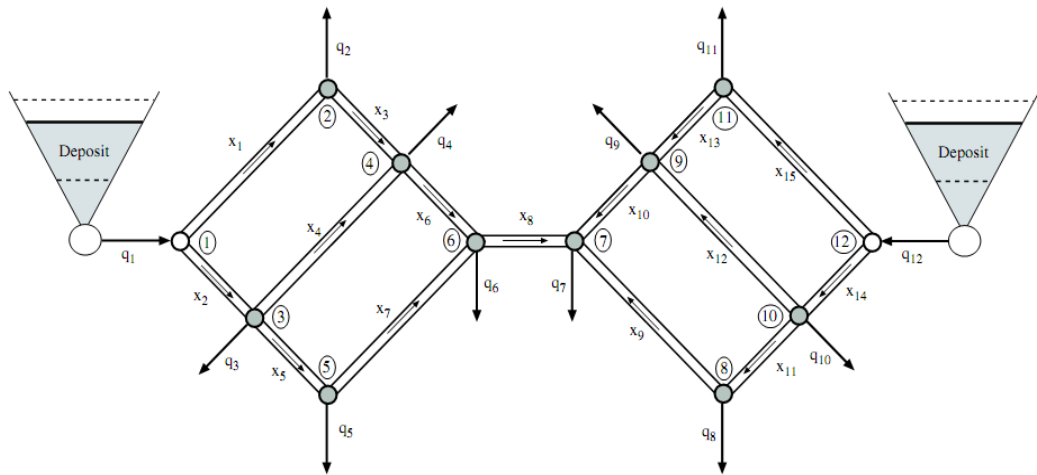
Tamamlanmış bir taramanın M tane ışın denklemi yazılarak,

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N &= b_M \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

N bilinmeyenli M denklemlilik lineer denklem sistemi elde edilir. Pixel ve ışın sayısına bağılı olarak lineer denklem sistemi $M > N$, $M = N$, $M < N$ durumlarına sahip olabilir (Anton ve Rorres, 1994).

4.1.12. Su Destek Problemi

Mühendislik problemlerinde matematiğin öneminin anlaşılacağı ve bu iki bilim dalının birbirini tamamladığının belirtildiği problemlerden biri olan su destek problemleri günlük hayatımızı yakından ilgilendirmektedir. Bu tip problemler "ağ akış problemleri" olarak bilinen problemlerin özel bir hali olarak tanımlanabilir (Castillo vd., 2006). Bu problemlerde su akış dengesinin sağlanması ve koşulların ekonomik düzeyde olması için lineer denklem sistemleri ve eşitsizliklerden faydalanılır.



Şekil 4.26. Bir su şebekesinin temsili örneği (Anton ve Rorres, 1994)

Herhangi bir şehir için suların aktığı borular, boruların kesişme noktaları yani suyun aktığı veya borudan ayrıldığı noktalardan oluşan ve suların akış yönünün

belirtildiği su destek sistemi şekildeki diyagramla gösterilebilir. Diyagramda 1 ve 12 numaralı kesişme noktaları iki depoya karşılık gelir. Problemden bilinmek istenen her bir borudaki su miktarları olduğundan bilinmeyen sayısı boru sayısı ile aynı olacaktır. Su destek probleminde lineer denklem sisteminin elde edilmesi her bir boruda su kaybının olmadığı farz edilmesi ve kesişme noktalarında giren su miktarı ile çıkan su miktarının eşit olması esasına dayalı denge kurulmasından oluşmaktadır. Sonuç olarak, boru sayısı kadar denkleme sahip lineer denklem sistemi elde edilecektir ve herhangi bir i . kesişme noktasına giren veya bu noktadan çıkan su miktarı q_i ile gösterilirse, aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir. Ayrıca eğer değişken pozitif ise akış yönünde, negatif ise akış yönüne ters yönde olduğunu ifade etmektedir.

1. kesişme noktası için giren ve çıkan su miktarı için denge denklemi yazılırsa

$$-x_1 - x_2 = -q_1$$

yazılır.

2. kesişme noktası için

$$x_1 - x_3 = q_2$$

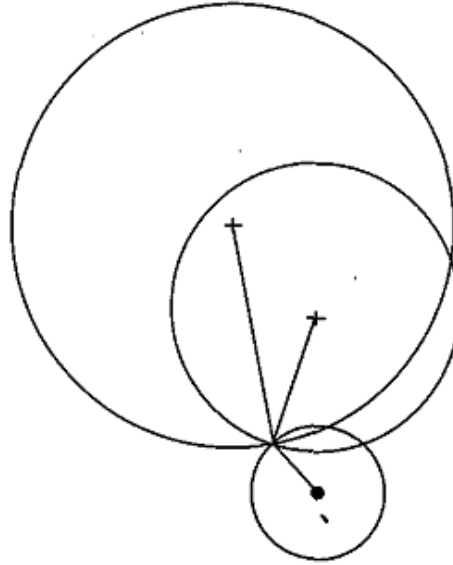
denkleme yazılır.

3. kesişme noktası için

$$x_2 - x_4 - x_5 = q_3$$

denkleme elde edilir. Bu şekilde diğer kesişme noktaları için de denge denklemleri yazılırsa

geliştirilmiştir. Ayrıca küresel konumlandırma sistemleri deniz araçları, otomobiller ve uçaklara monte edilebilirler. Deniz, kara, hava ve demiryolu ulaşımında araçların izlenmesinde, ulaşım güvenliğinin sağlanmasında, birçok mühendislik alanında, spor ve turizm gibi alanlarda da bu sistemin kullanımı yaygınlaşmaya başlamıştır (Çelik, 1999).



Şekil 4.27. Üç uydunun temsili gösterimi (Kolman ve Hill, çev. 2010)

GPS sistemi yörüngede sürekli dönen uydulardan oluşur. GPS uyduları radyo sinyalleri yayarlar ve GPS alıcısı da bu sinyalleri alır. Böylece konum belirlemek için bu sinyaller kullanılır. Yani GPS sistemi, bir alıcı ile üç ya da daha fazla uydunun konumu arasındaki uzaklığı hesaplama ve sonra matematik uygulamaları esasına dayanır. Bu küresel konumlandırma sistemlerinde uyduların konumlarının bilindiği kabul edilir ve her bir alıcıya uzaklıkları belirlenerek alıcının konumu belirlenir. GPS alıcısı uydudan gelen sinyallerin uzaklığını belirlemek için hesaplamalarda kullanıldığından zaman gibi faktörler mutlaka göz önünde bulundurulmalıdır. Bir nesnenin konumunu belirlemek için kullanılan GPS sistemlerinin matematiksel modelinde lineer denklem sistemleri kullanılır.

Basit bir matematiksel model olarak 2 boyutta üç uydu göz önüne alınırsa ve her bir uydu merkezi bilinen birer çember ile ifade edilirse matematiksel olarak üç çember denklemi yazılabilir. (a_j, b_j) merkezli ve r_j yarıçaplı çemberler için çember denklemleri

$$\begin{aligned}
(x - a_1)^2 + (b - y_1)^2 &= r_1^2 \\
(x - a_2)^2 + (b - y_2)^2 &= r_2^2 \\
(x - a_3)^2 + (b - y_3)^2 &= r_3^2
\end{aligned} \tag{4.25}$$

olarak yazılır. GPS alıcısının yeri her bir çemberin uzunluğu üzerinde olduğundan, (4.25) denklem sisteminde her bir denklemi sağlayan (x, y) noktası vardır. Bu denklem sistemi açık olarak yazılırsa (4.25) denklem sistemi

$$\begin{aligned}
x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 &= r_1^2 \\
x^2 - 2a_2x + a_2^2 + y^2 - 2b_2y + b_2^2 &= r_2^2 \\
x^2 - 2a_3x + a_3^2 + y^2 - 2b_3y + b_3^2 &= r_3^2
\end{aligned} \tag{4.26}$$

olur ve bu denklem sisteminin lineer olmadığı görülmektedir. (4.26) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned}
x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 - r_1^2 &= 0 \\
x^2 - 2a_2x + a_2^2 + y^2 - 2b_2y + b_2^2 - r_2^2 &= 0 \\
x^2 - 2a_3x + a_3^2 + y^2 - 2b_3y + b_3^2 - r_3^2 &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde (x, y) noktası her bir denklemi sağlayacağından birinci ve ikinci denklemin sol tarafı birbirine eşitlenirse ve aynı işlem ikinci ve üçüncü denklem için de yapılırsa

$$\begin{aligned}
-2a_1x + a_1^2 - 2b_1y + b_1^2 - r_1^2 &= -2a_2x + a_2^2 - 2b_2y + b_2^2 - r_2^2 \\
-2a_3x + a_3^2 - 2b_3y + b_3^2 - r_3^2 &= -2a_2x + a_2^2 - 2b_2y + b_2^2 - r_2^2
\end{aligned}$$

x, y bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi oluşur. Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
-2(a_1 - a_2)x - 2(b_1 - b_2)y &= (r_1^2 - r_2^2) + (a_1^2 - a_2^2) + (b_1^2 - b_2^2) \\
-2(a_3 - a_2)x - 2(b_3 - b_2)y &= (r_3^2 - r_2^2) + (a_3^2 - a_2^2) + (b_3^2 - b_2^2)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Buradan her iki taraf (-1) ile çarpılarak tekrar düzenlenirse aşağıdaki gibi 2×2 matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 2(a_1 - a_2) & 2(b_1 - b_2) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_2^2 - r_1^2) + (a_1^2 - a_2^2) + (b_1^2 - b_2^2) \\ (r_2^2 - r_3^2) + (a_3^2 - a_2^2) + (b_3^2 - b_2^2) \end{bmatrix}$$

Böylece üç çemberin yarıçapları ve merkez koordinatları verildiğinde GPS alıcısının yeri bulunabilir. 3 boyutta düşünülürse yine benzer denklemler elde edilir (Kolman ve Hill, çev. 2010).

4.2. Yorumlar

Lineer denklem sistemleri, matematik ve mühendislik gibi çeşitli bilim dallarında kullanılmasının yanı sıra günlük hayatta da sıklıkla kullanılır. Birçok güncel problemde lineer denklem sistemlerini içeren matematiksel modellerin oluşturulmasına ve bu lineer denklem sistemlerinin çözümlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Denklem ve bilinmeyen sayısı az olan lineer denklem sistemlerinin çözümü için Gauss eliminasyon yöntemi, ters matris yöntemi gibi direkt çözüm yöntemleri kullanılmasına karşın, denklem sayısının artmasıyla oluşan lineer denklem sistemlerinin çözümü için direkt yöntemler ile elle hesaplama yapmak hatalara yol açabilir. Ayrıca denklemin mertebesi büyüdükçe denklem sistemlerinin çözümü için yapılan işlem sayısı artmaktadır. Bu sebeple, değişken ve denklem sayısı çok olan lineer denklem sistemlerini gerektiren problemlerin varlığı araştırmacıları bilgisayar yardımı ile bu denklem sistemlerini çözmeye yöneltmiştir. Denklem sayısı ve bilinmeyen sayısının fazla olduğu durumlarda çeşitli algoritmalar kullanılarak Gauss-Siedel gibi iterasyon yöntemleri ile büyük lineer denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri elde edilir. Lineer denklem sistemlerini içeren problemlerde lineer denklem sistemlerinin çözümleri söz konusu olan problemlerin çözümüne ışık tutar ve problemlerin basite indirgenmesinde büyük rol oynar.

Lineer denklem sistemlerinin matematik ve diğer disiplinlerde yoğun olarak kullanılması, denklemleri çözebilme kolaylığına ihtiyaç duyulması ve buna bağlı olarak bilgisayar destekli algoritmaların gelişmesiyle araştırmacılar yeni ve çağın teknolojisinin gerektirdiği problemleri ele almaya başlamışlardır.

Bu çalışmada, lineer denklem sistemlerinin polinomların grafiklerinin çiziminde; elektrik-elektronik mühendisliğinde bir elektrik devresinin her bir kolundaki akımı belirlemede; kimya da kimyasal denklemlerin denkleştirilmesinde ve kimya mühendisliğinde, bir reaktör sisteminin kararlı hal analizinde; inşaat ve çevre mühendisliğinde kuvvet ve tepkilerin hesaplandığı kafes yapılarda; makine ve havacılık mühendisliğinde yay kütle sistemlerinde her bir kütle için ivmesini bulmak için

kullanıldığı görülmüştür. Ayrıca trafik ağ akışı problemleri ve su akış problemleri gibi ağ akış problemlerinde; ekonomi alanında leontief ekonomi modelinin uygulanmasında; inşaatlarda sıklıkla kullanılan makara sistemlerinde kuvvet dengesinin sağlanmasında; bilgisayarlı tomografide her bir pixelden geçen ışın yoğunluklarını hesaplamada ve termodinamikte bir plakada verilen bir noktanın sıcaklığını bulmak için lineer denklem sistemlerinin sıklıkla kullanıldığı ve bu uygulamalarda ortaya çıkan lineer denklem sistemlerinin çözümü için farklı algoritmalar ve çözüm yöntemlerinin kullanıldığı görülmüştür.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Matematik, problemleri ortaya koyan ve bu problemlere çözüm üreten bilimin ortak dili olarak görülmektedir. İlerleyen bilim ve teknoloji pek çok problemi beraberinde getirdiğinden bu problemler için çözüm yöntemi arayışı da buna paralel olarak artmıştır. Problemleri ifade etmek ve çözümlerini yapmak için matematik sıklıkla kullanılır (Tapramaz, 2002). Matematiğin önemli alt dallarından olan lineer cebir de çeşitli bilim dallarındaki problemlerin çözümü için temel oluşturur. Lineer cebir ve lineer cebirin önemli konularından olan matrisler, vektör uzayları ve lineer denklem sistemleri gibi konuları ile matematiğin cebir, analitik geometri, diferansiyel denklemler, analiz, fraktal geometri, nümerik analiz gibi birçok alanında karşılaştığı gibi, anatomi, genetik, kimya, fizik, istatistik, mühendislik ve ekonomi gibi farklı alanlarda da karşılaşılmaktadır. Matematiğin alt dallarında lineer cebir amaç olarak yer almasına karşın farklı alanlarda araç olarak değerlendirilmektedir (Kardeş, 2010).

Başta mühendislik ve fizik olmak üzere, matematikle uğraşan diğer bilim dallarında problemlerin çözümü söz konusu olduğunda ilgili problemin matematiksel ifadesi için genellikle lineer denklem sistemleri kullanılır.

Lineer denklem sistemlerinin, çözüm yöntemlerinin ve uygulama alanlarının araştırıldığı bu çalışmanın sonucunda; lineer denklem sistemlerinin ekonomi, makine ve uçak mühendisliği, elektrik elektronik mühendisliği, inşaat mühendisliği, termodinamik, bilgisayarlı tomografi gibi alanlarda sıklıkla kullanıldığı görülmüştür.

Bu bağlamda soyut bir ders olan lineer cebir dersi işlenirken, konuların diğer bilim dallarıyla ilişkileri göz önünde bulundurularak; mühendislik, ekonomi, ağ analizi gibi alanlara yönelik uygulamalara yer verilmesine özen gösterilmelidir. Bu uygulamalar vasıtasıyla öğrencilere; lineer cebirin çeşitli disiplinlerle olan ilişkisinin ve birçok bölümde temel ders olarak okutulmasının önemi aktarılmalıdır.

KAYNAKÇA

- Anton, H. and Rorres, C. (1994). *Elementary linear algebra: Application version*. (7th ed.). New York: John Wiley
- Bakioğlu, M. (2004). *Sayısal Analiz*. İstanbul: Birsen Yayınevi.
- Başar, F. (2002). *Lineer cebir*. Malatya: Uğurel Matbaası.
- Başkiyev, İ. ve Ertaş, H.A. (4-6 Eylül, 2003). *Makinaların güç ve hareket iletim mekanizmalarının lineer hareket denklemleri*. 11. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu, Ankara.
- Bozkurt, D., Türen, B. ve Solak, S. (2005). *Lineer cebir*. (3. baskı). Konya: Dizgi Ofset Matbaacılık.
- Bredscher, O. (2001). *Linear algebra with applications*. (2 th ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Castillo, E., Pruneda, R.E. Solares, C. and Minguez, R. (2006). Interpreting linear systems of equalities and inequalities. Application to the water supply problem. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 13, 361-397.
- Chapra, S.C. ve Conale, R.P. (2004). *Mühendisler için sayısal yöntemler: yazılım ve programlama uygulamalarıyla*. (4. Baskı). (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin). İstanbul: Literatür Yayıncılık.
- Çalışkan, F. (2005). *Lineer cebir ve uygulamaları*. İstanbul: Birsen Yayınevi.
- Çallıalp, F. (2009). *Örneklerle soyut cebir*. (1. baskı). İstanbul: Birsen Yayınevi.
- Çallıalp, F. ve Kuroğlu, N. (1996). *Lineer cebir*. (2. baskı). Samsun: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları.
- Çelik, R.N. (29 Eylül-2 Ekim, 1999). *Ulaşım da GPS kullanımları ve GPS sisteminin Türkiyedeki alt yapısı*. II. Ulaşım ve Trafik Kongresi, Ankara.
- Chen, W. W. (2008). *Linear algebra*. Web: <http://rutherglen.science.mq.edu.au/wchen/lnlafolder/la01.pdf> adresinden 9 Kasım 2010 tarihinde edinilmiştir.
- Çoban, T. (bt). *Optimizasyon*. Web: http://www.yto.com.tr/turhan_coban/kitap/OPT%C4%B0M%C4%B0ZASYON.pdf adresinden 5 Mayıs 2011 tarihinde edinilmiştir.

- Datta, B.N. (2009). *Numerical linear algebra and applications*. (2 Th ed.). US: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Eren, Ş. ve Razbonyalı, M. (2006). *Lineer cebir*. İstanbul: Ege Basım Matbaa ve Reklam Sanatları Ltd. Şti.
- Fishbane, P.M., Gasiorowicz, S. ve Thornton, S.T. (2006). *Temel fizik cilt 1*. (2. Baskı). (Çev. C. Yalçın). Ankara: Arkadaş Yayınevi.
- Hacısalihoglu, H. (2000). *Lineer cebir*. (7. Baskı).
- Hadley, G. (1979). *Linear algebra*. London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Işık, A. (2002). *Lineer cebir*. (3. baskı). Erzurum: Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Yayınları.
- Işık, A. (2004). *Çözümlü lineer cebir*. Erzurum: Bakanlar Matbaacılık.
- Karakaş, H.İ. (bt.). *Determinantlar, cramer kuralı leontief giridi-çıkıti analizi*. http://www.baskent.edu.tr/~afet/dersler/genel...2/.../DERS_%204.pdf adresinden 1 Nisan 2011 tarihinde edinilmiştir.
- Kardeş, D. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının lineer denklem sistemleri çözüm süreçlerinin öz-yeterlik algısı ve çoklu temsil bağlamında incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Kleiner, I. (2007). *A history of abstract algebra*. Boston: Birkhauser.
- Kolman, B. ve Hill, D. R. (2002). *Uygulamalı lineer cebir yedinci baskıdan çeviri*. (Çev. Ö. Akın). Ankara: Palme Yayıncılık.
- Kolman, B. ve Hill, D. R. (2010). *Uygulamalı lineer cebir dokuzuncu baskıdan çeviri*. (Çev. Ö. Akın). Ankara: Palme Yayıncılık.
- Moore, H. G., and Yağub, A. (1998). *A first course in linear algebra with applications*. (3 th ed.). San Diego: Academic Press.
- O' Connor, J. J. ve Robertson, E. F. (1996). *Abstract linear spaces*. http://www.history.mcs.standrews.ac.uk/HistTopics/Abstract_linear_spaces.html adresinden 25 Mayıs 2011 tarihinde edinilmiştir.
- Odisho, R. (2009). *Applications of systems of linear equations to electrical networks*. California State University, Long Beach.
- Perry, W. L. (1998). *Elementary linear algebra*. New York: McGraw Hill.
- Roman, S. (1984). *An introduction to linear algebra with applications*. New York: Saunders College Pub.

- Serway, R.A. and Beichner, R.J. (2009). *Fen ve mühendislik için fizik cilt 2*. (Beşinci baskıdan çeviri). (Çev. Edt. K. Çolakoğlu). Ankara: Palme Yayıncılık.
- Şahmurov, V. ve Uzgören, G. (1999). *Lineer cebir*. İstanbul: Papatya Yayıncılık.
- Tapramaz, R. (2002). *Sayısal çözümler*. (1. Baskı). İstanbul: Literatür Yayınları.
- Taşçı, D. (2005). *Lineer cebir*. (3. Baskı). Ankara: Gazi Kitabevi.
- Taşçı, D. (2006). *Lineer cebir*. (Genişletilmiş 3. Baskı). Ankara: Gazi Kitabevi.
- Topçu, A. (2011). *Bilgisayar destekli nümerik analiz*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, <http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu/> adresinden 3 Nisan 2011 tarihinde edinilmiştir.
- Williams, G. (2001). *Linear algebra with applications*. (4 th ed.). Boston: Jones and Bartlett Publishers.
- http://www.uzaktanogrenme.com/Subjects/_html/SimpleMachines.aspx adresinden 25.05.2011 tarihinde edinilmiştir.
- Yükselen, M.A. (2008). *Lineer takımlarının çözüm yöntemleri*. Web: <http://web.itu.edu.tr/~yükselen/HM504/01-%20Lineer%20Denklemler%20Takımlar%20E7F6z%20FCm%20FC.pdf> adresinden 28 Nisan 2011 tarihinde edinilmiştir.

ÖZ GEÇMİŞ

1987 yılında Şanlıurfa da doğdu. İlköğrenimini Sabancı İlköğretim okulu ve ortaöğrenimini Nevzat Karabağ Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde yükseköğrenimine başladı. 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2011 yılında Eğitim Bilimleri Enstitüsü bünyesinde Atatürk Üniversitesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda araştırma görevlisi olarak göreve başladı.