MODÜLER GRUPLAR ve BAZI ALT GRUPLARI

SELİM ERTAŞ

Yüksek Lisans Tezi

Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı

Prof. Dr. Uğur S. KIRMACI

2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTA ÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI
EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MODÜLER GRUPLAR VE BAZI ALT GRUPLARI
(Modular Groups and Some Subgroups)

Selim ERTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Prof. Dr. Uğur S. KIRMACI

ERZURUM
Aralık, 2011

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Prof. Dr. Uğur S. KIRMACI danışmanlığında Selim ERTAŞ tarafından hazırlanan "Modüler Gruplar ve Bazı Alt Grupları" başlıklı çalışma ../../.... tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı 'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesi: Prof. Dr. AHMET IŞIK İmza:..................

Jüri Üyesi: Prof. Dr. M. EMİN ÖZDEMİR İmza:.................

Jüri Üyesi: Prof. Dr. UĞUR S. KIRMACI İmza:.................

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

../../....

Prof. Dr. H. Ahmet KIRKKILIÇ
Enstitü Müdürü

TEZ ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ”MODÜLER GRUPLAR ve BAZI ALT GRUPLARI” başlıklı çalışmanın tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve onurumla doğrularım.

Tezimin kağıt ve elektronik kopyalarının Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttigim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmenliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☐ Tezim sadece Atatürk Üniversitesi yerleşkesinden erişime açılabilir.

☐ Tezimin... yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım taktirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

../../....

Ad Soyad:................

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODÜLER GRUPLAR ve BAZI ALT GRUPLARI

Selim ERTAŞ

2011, 50 sayfa

Bu çalışmanın amacı, genel olarak modüler grupları, modüler grupların bazı alt grupları ve bazı normal alt grupları karakterize etmekdir.
Birinci bölümde diğer bölümler için gerekli olan gruplar, alt gruplar ve özellikleri hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, modüler gruplar, alt grupları ve temel bölgeleri kavramları verilmiştir. Ayrıca bu bölümde bazı özel alt grupları incelenecek, karakterizasyonları ve temel bölgeleri tanımlanacaktır. Üçüncü bölümde, $2l$ mertebeli homojen polinomların otomorfik yapıları, modüler formlarını ve bunlarla ilgili uygulamalardan bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise, bir modüler grubun normal alt grupları incelenmiş ve bunların bir uygulaması olarak $m = 6$ için bir karakterizasyon tanımlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Modüler gruplar ve modüler grupların alt grupları

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

MODULAR GROUPS AND SOME SUBGROUPS

Selim ERTAŞ

2011, 50 pages

The aim of this study is to characterize modular groups, some subgroups of modular gropus and some normal subgroups generally.

In the first chapter, general information about groups, subgroups and their properties which are necessary for the other chapters are given. In the second chapter, the explanations of modular groups, subgroups and fundamental regions are defined. In addition, some special subgroups are investigated and characterization and fundamental regions of these subgroups are defined in this chapter. In the third chapter, automorphic structure, modular forms of the homogeneous polynomials of degree 2l and their applications are mentioned. In the fourth chapter, normal subgroups of a modular group are investigated, and as an application of these subgroups, the characterization for m=6 is defined.

Key Words: Modular groups and subgroups of modular groups

ÖN SÖZ

Lisansüstü eğitimim süresince değerli bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, her zaman ve her konuda bana yol gösteren çok değerli hocam Prof. Dr. Uğur S. KIRMACI' ya içtenlikle teşekkür ederim. Aynı zamanda tez juri üyeleri olan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Ahmet IŞIK ve Prof. Dr. M. Emin Özdemir'e teze olan katkılarından dolayı teşekkür ederim. Ayrıca tüm yaşamım boyunca olduğu gibi yükses lisans çalışmamda da yoğun çalışma temposu içerisinde desteklerini her zaman hissettiğim aileme teşekkür ederim.

Erzurum-2011 **Selim ERTAŞ**

İÇİNDEKİLER

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$A \leq G$	A, G grubunun altgrubu
H_1	Üst yarı düzlem
$Ker(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\mathrm{Im}(f)$	f homomorfizmasının görüntüsü
$f\mid_A$	f homomorfizmasının A grubuna kısıtlanışı

BİRİNCİ BÖLÜM

1 GİRİŞ

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramlar ve bazı temel teoremleri vereceğiz. İlk olarak modüler gruplar için gerekli olan grup tanımları ve özellikleri verilecektir.

1.1 Gruplar

Tanım 1.1.1 *(Hungerford, 1976) G boş olmayan bir küme ve . da G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa* $(G, .)$ *sistemine bir grup denir.*

(i) *Her* $a, b \in G$ *için* $a.b \in G$ *dir.(Kapalılık Özelliği)*
(ii) *Her* $a, b, c \in G$ *için,* $(a.b).c = a.(b.c)$ *dir. (Birleşme Özelliği)*
(iii) *Her* $a \in G$ *için,* $a.e = e.a = a$ *olacak şekilde bir* $e \in G$ *vardır. (Birim eleman özelliği)*
(iv) *Her* $a \in G$ *için,* $a.b = b.a = e$ *olacak şekilde bir* $b \in G$ *vardır. (Ters eleman özelliği)*

Tanım 1.1.2 *(Hungerford, 1976) G bir grup olsun. Her* $a, b \in G$ *için,* $a.b = b.a$ *ise G' ye değişmeli grup denir.*

Teorem 1.1.3 *(Hungerford, 1976)* $(G, .)$ *bir grup olsun.*

(i) *G' nin birim elemanı tektir.*
(ii) *Her elemanın tersi tektir.*
(iii) *Her* $(a^{-1})^{-1} = a$ *dır.*
(iv) *Her* $a, b \in G$ *için* $(a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$ *dir.*

Tanım 1.1.4 *(Hungerford, 1976) Bir G grubunun elemanlarının sayısına G' nin mertebesi denir ve* $\mid G \mid$ *ile gösterilir.*

Tanım 1.1.5 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve $a \in G$ olsun. $a^n = e$ olacak şekilde bir en küçük pozitif n doğal sayısı varsa bu sayıya a' nın derecesi denir ve $\mid a \mid$ ile gösterilir. Böyle bir n sayısı yoksa $\mid a \mid = \infty$ yazılır.*

Tanım 1.1.6 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve $a \in G$ olsun. $< a >= \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ kümesine a tarafından üretilen grup denir. a elemanına $< a >$ grubunun üreteç elemanı denir. Eğer $G =< a >$ olacak şekilde bir $a \in G$ elemanı varsa G' ye devirli grup denir.*

Tanım 1.1.7 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve H de G' nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer H kümesi G de tanımlanan grup işlemi ile bir grup oluyorsa H' ye G' nin altgrubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.*

Teorem 1.1.8 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve $\emptyset \neq U \subseteq G$ olsun. U' nun alt grup olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in U$ için $a.b^{-1} \in U$ olmasıdır.*

Tanım 1.1.9 *(Hungerford, 1976) G bir grup, H ve K da G' nin boş olmayan iki altkümesi olsun.*

(i) $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ kümesine H ile K' nın çarpımı denir. $H + K = \{h + k : h \in H, k \in K\}$ kümesine H ile K' nın toplamı denir.
(ii) $H^{-1} = \{h^{-1} : h \in H\}$ kümesi H' nın ters kümesi denir.

Yardımcı Teorem 1.1.10 *(Hungerford, 1976) G bir grup $A, B, C, D \subseteq G$ olsun. Bu kümeler üzerinde tanımlanan çarpma işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.*

(i) $A(BC) = (AB)C$
(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
(iii) $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D$ ise $AC \subseteq BD$
(iv) $A \subseteq B$ ise $A^{-1} \subseteq B^{-1}$

Tanım 1.1.11 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve $\emptyset \neq K \subseteq G$ olsun. G' nin K' yı içeren bütün alt gruplarının arakesitine K tarafından üretilen alt grup denir ve $< K >$ ile gösterilir. Yani,*

$$< K >= \bigcap \{H : H \leq G, K \subseteq H\}.$$

Eğer $< K >= G$ ise, K' ya G'nin üreteç kümesi veya doğuray kümesi denir.

Yardımcı Teorem 1.1.12 *(Hungerford, 1976) G bir grup, $\emptyset \neq K \subseteq G$ olsun. $< K >$ altgrubu K daki elemanların kuvvetlerinin çarpımlarından oluşan kümedir; yani,*

$$< K >= \{k_1^{m_1} k_2^{m_2} \ldots k_n^{m_n} : k_i \in K, m_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Tanım 1.1.13 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bir $a \in G$ için;*

$$Ha = \{ha : h \in H\} \qquad ve \qquad aH = \{ah : h \in H\}$$

kümelerine sırasıyla H' nın G' deki sağ ve sol kosetleri denir. Koset kelimesi yerine yansınıf terimi de kullanılabilir.

Tanım 1.1.14 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer $a, b \in G$ için, $ab^{-1} \in H$ ise a elemanı H modülüne göre b' ye denktir denir ve $a \equiv b(modH)$ ile gösterilir.*

Teorem 1.1.15 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $a \in G$ için $Ha = \{x \in G : a \equiv x(modH)\}$ dır.*

Tanım 1.1.16 *(Hungerford, 1976) m ve n iki tamsayı olsun. Eğer m ile n nın en büyük ortak böleni 1 ise bu iki sayıya aralarında asaldır denir ve $(a, b) = 1$ ile gösterilir.*

Yardımcı Teorem 1.1.17 *(Hungerford, 1976) $(m, n) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $mq + nr = 1$ olacak şekilde q, r tamsayıları vardır.*

Tanım 1.1.18 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Her $g \in G$ ve her $n \in N$ için, $gng^{-1} \in N$ ise N' ye G' nin normal alt grubu denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir.*

Teorem 1.1.19 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

(i) $N \lhd G$
(ii) *Her $g \in G$ için, $gNg^{-1} = N$*
(iii) *Her $g \in G$ için, $gN = Ng$*

Tanım 1.1.20 *(Hungerford, 1976) G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. N nin G deki farklı sağ kosetlerinin kümesini*

$$G/N = \{Ng : g \in G\}$$

olmak üzere bu küme üzerinde

$$Na, Nb \in G/N \qquad icin \qquad (Na).(Nb) = N(ab)$$

şeklinde tanımlanan işlem ile $(G/N, .)$ bir grup teşkil eder bu gruba G' nin N ile olan faktör grubu ya da bölüm grubu denir.

Tanım 1.1.21 *(Hungerford, 1976) $(G, .)$ ve $(H, \star)$ iki grup olsun. $f : G \to H$ bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in G$ için;*

$$f(a.b) = f(a) \star f(b)$$

ise f' ye G' den H' ye bir grup homomorfizmi denir.

Tanım 1.1.22 *(Hungerford, 1976) G, H iki grup ve $f : G \to H$ bir homomorfizm ve H nin birim elemanı e_0 olsun.*

$$Ker(f) = \{x \in G : f(x) = e_0\}$$

kümesine f' nin çekirdeği denir.

1.2 Topolojik Dönüşüm Grupları

Modüler gruplar bir topolojik grup olduğu için topolojik dönüşüm gruplarını da ele alacağız.

Tanım 1.2.1 *(Munkres, 2000) X herhangi bir küme, T ise X kümesinin altkümelerinin bir kısmından oluşan bir küme olsun. Eğer T aşağıdaki koşulları sağlıyorsa T' ye X' in üzerinde bir topoloji denir.*

(i) $\emptyset$ ve X, T' nin elemanıdır.
(ii) T' nin herhangi sayıda elemanının birleşimi yine T' nin elemanıdır.
(iii) T' nin sonlu sayıda elemanının kesişimi yine T' nin elemanı olmalıdır.

Bu koşulların sağlanması durumunda T ile donatılmış X kümesine topolojik uzay denir.

Tanım 1.2.2 *(Munkres, 2000) Bir topoljik uzayda topolojiyi oluşturan kümelerden herbirine açık küme denir.*

Tanım 1.2.3 *(Munkres, 2000) X bir topolojik uzay olsun. $a \in X$ için, a' yı içeren bir açık kümeyi kapsayan kümeye komşuluk denir.*

Tanım 1.2.4 *(Munkres, 2000) X bir topolojik uzay olsun. Herhangi x_1, x_2 noktaları için, iki açık komşuluk bulunuyorsa ve bu komşulukların arakesiti boşküme ise X' e Hausdorff uzay denir.*

Tanım 1.2.5 *(Munkres, 2000) G bir grup ve Hausdorff uzayı olsun. Her $g, h \in G$ için,*

$$F : GxG \to G \qquad\qquad f : G \to G$$
$$F : (g,h) \mapsto gh \qquad ve \qquad f : g \mapsto g^{-1}$$

üzerine dönüşümleri sürekli ise G' ye bir topolojik gruptur denir.

Tanım 1.2.6 *(Munkres, 2000) G bir topolojik grup ve X herhangi bir topolojik uzay olsun. Eğer* $g, h \in G$ *ve* $x \in X$ *için,*

$$\Delta : GxX \to X$$

$$\Delta : (g, x) \to g\Delta x$$

sürekli dönüşümü

(i) $g\Delta(h\Delta x) = gh\Delta x$
(ii) e, G' nin birim elemanı olmak üzere, $e\Delta x = x$
koşulları sağlanıyorsa $[G, X]$*' ye topolojik dönüşüm grubu denir.*

Ayrık grup tanımı ve denk ifadeler aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 1.2.7 *(Munkres, 2000) G topolojik bir grup olsun.*

(i) G' nin elemanlarının hiçbirisi G' nin yığılma noktası değilse, G' ye yarı ayrık grup denir.
(ii) Her $g \in G$ *için, g G'nin ayrık noktası ise, G' ye ayrık grup denir.*
(iii) Her $g \in G$ *için,* $\{g\}$ *kümesi g' nin bir komşuluğu ise G' ye ayrık grup denir.*
(iv) e, G' nin birim elemanı olmak üzere, G' nin bir ayrık noktası ise G' ye ayrık grup denir.

Tanım 1.2.8 *(Munkres, 2000)* $[G, X]$ *topolojik bir dönüşüm grubu olsun.* $x, y \in X$ *olmak üzere,* $g(x) = y$ *olacak şekilde bir* $g \in G$ *varsa x ve y noktalarına denktirler denir.* $x \in X$*' e denk olan noktaların kümesine x noktasının yörüngesi denir ve Gx ile gosterilir. Tüm G-yörüngelerinin kümesi* X/G *ile gösterilir ve* X/G *'ye yörünge uzayı denir.*

1.3 Möbius Dönüşümleri

Tanım 1.3.1 *(Apostol, 1990, page26)* $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *ve* $ad - bc \neq 0$ *olması koşulu ile*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

şeklindeki dönüşümlere Möbius dönüşümleri denir.

(1) eşitliği $z = -d/c$ ve $z = \infty$ dışındaki $\mathbb{C}_\infty$ daki her z için, f(z) tanımlanabilir. Bu tanımı , $z \neq 0$ için $\frac{z}{0} = \infty$ alarak $\mathbb{C}_\infty$ daki her sayı için aşağıdaki şekilde genişletebiliriz.

$$f(\frac{-d}{c}) = \infty \quad ve \quad f(\infty) = \frac{a}{c}$$

İlk olarak dikkat edilmesi gerekir ki

$$f(w) - f(z) = \frac{(ad-bc)(w-z)}{(cw+d)(cz+d)} \tag{2}$$

fonksiyonunda eğer $ad - bc = 0$ alınırsa f sabit olur. Herhangi bir karmaşa olmaması için $ad - bc \neq 0$ almamız gerekmektedir. Sonuç olarak bu yeni rasyonel fonksiyon bir Möbius dönüşüm olur. $z = -d/c$ basit kutup noktası hariç $\mathbb{C}_\infty$ üzerindeki her noktada analitiktir.

(2) eşitliği Möbius dönüşümlerinin $\mathbb{C}_\infty$ üzerinde 1-1 bir fonksiyon olduğunu söyler.(1) eşitligini çözmek için z yi $f(z)$ cinsinden yazarsak,

$$z = \frac{df(z) - b}{-cf(z) + a}$$

elde edilir ki bu da bize f' nin $\mathbb{C}_\infty$ dan $\mathbb{C}_\infty$' a örten bir dönüşüm olduğunu söyler. Bu aynı zamanda f' nin tersi olan fonksiyonu da verir. (2) eşitliğini $w - z$' ye bölersek ve $w \to z$ 'ye göre limitini alırsak eğer

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2}$$

fonksiyonu elde edilir ve böylece analitik olan her noktada $f'(z) \neq 0$ olur. Böylece kutup noktası $z = -d/c$ hariç f her yerde konform olur. Möbius dönüşümleri daireleri dairele dönüştürür. Bunu ispatlamak için A ve C reel sayılar olmak üzere,

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \tag{3}$$

eşitliğini düşünelim. A'nın sıfırdan farklı olduğu durumlarda daire üzerindeki her nokta bu denklemi sağlar. $A = 0$ olduğu durumda da doğru üzerindeki her nokta bu eşitliği sağlar.

(3) eşitliğinde z yi $(aw + b)/(cw + d)$ ile değiştirirsek A' ve C' reel sayılar olmak üzere

$$A'w\bar{w} + B'w + \bar{B}'\bar{w} + C' = 0$$

w' nun sağladığı aynı tipdeki eşitliği bulmuş oluruz. Böylece her Möbius dönüşümü daireyi daireye, doğruları doğrulara dönüştürür.

Eger a, b, c, d yi aynı sıfırdan farklı sabit sayı ile çarparsak Möbius dönüşümleri değişmeden aynı kalır. Böylece $ad - bc = 1$ kabul edersek genelliği bozmamış oluruz.

$ad - bc = 1$ olan her (1) Möbius dönüşümü, $2x2$ tipindeki

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisleri ile ilişkilendirebiliriz. Buradan $detA = ad - bc = 1$ olur. Eğer A ve B matrisleri sırasıyla, f ve g Möbius dönüşümleri ile ilgili olan matrisler ise, $(fog)(z) = f(g(z))$ olmak üzere, AB çarpım matrisi de fog bileşkesine karşılık gelen matris olur. Birim matris

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

özdeşlik dönüşümü olan

$$f(z) = z = \frac{1z + 0}{0z + 1}$$

ile ilişkilidir. Aynı zamanda, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ise

ters matris

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

f' nin tersi

$$f^{-1} = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

olan dönüşümle ilişkilidir.

Böylece $ad - bc = 1$ olan tüm Möbius dönüşümlerinin kümesi bileşke işlemi ile bir grup teşkil eder.

İKİNCİ BÖLÜM

2 MODÜLER GRUPLAR ve BAZI ALT GRUPLARI

Bu bölümde modüler grup, alt grup tanımları, bazı özellikleri ve temel bölge kavramları verilecektir.

2.1 Modüler Gruplar

Tanım 2.1.1 *(Apostol, 1990) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere*

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{1}$$

şeklindeki tüm Möbius dönüşümlerinin cümlesine modüler grup denir ve Γ ile gösterilir.

Bu grup $detA = 1$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ için,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrislerinin cümlesi olarak da ifade edilebilir. Eğer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ise

$$A\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

olarak yazılır.

$PSL(2, \mathbb{C}) = \{T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc = 1\}$ yazılır. $PSL(2, \mathbb{C})$' nin

$$PSL(2, R) = \{T \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in R \quad \text{ve} \quad ad - bc = 1\}$$

ve

$$G_0 = \{U \mid U(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, a, b, c, d \in R \quad \text{ve} \quad ad - bc = -1\}$$

biçimindeki iki altkümesi ele alınsın. $G = PSL(2,R) \cup G_0$ kümesi fonksiyonların bileşkesi işlemi altında bir grup teşkil eder ve $PSL(2,R)$, G' nin alt grubudur.

Önerme 2.1.2 *(Lehner, 1964)* Γ, H_1 *üzerinde süreksiz hareket eder.*

İSPAT. Eğer T (1) deki dönüşüm ve $y > 0$ olmak üzere $z = x + iy$ ise

$$\mathrm{Im}(T(z)) = \frac{y}{\mid cz + d \mid^2} > 0$$

olduğundan Γ nın H_1 i kendi üzerine resmettiği görülmektedir. Şimdi Γ nın H_1 de süreksiz olduğunu gösterelim. Tersini kabul edelim. Yani Γ nın farklı elemanlarında oluşan bir $\{T_n\}$ dizisi vardır öyle ki $T_n(z) \to z_0$ dir. Burada $z, z_0 \in H_1$ için $z_0 = x_0 + iy_0$ ve $T_n(z) = x_n + iy_n$ dir. $\{T_n\}$ dizisinden

$$-\frac{1}{2} \leq Re(T_n(z)) - Re(z_0) < \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlamayan dönüşümler çıkarıldığında $T_n(z) \to z_0$ olduğundan

$$y_n = \frac{y}{(c_n x + d_n)^2 + y^2 c_n^2} \to y_0$$

olur. Burada ise $\{(c_n x + d_n)^2 + y^2 c_n^2\}$ sınırlı dolayısıyla $\{c_n\}$ ve $\{d_n\}$ dizilerinin sınırlı olduğunu söyler. $\{c_n\}$ ve $\{d_n\}$ dizileri sonlu sayıda farklı değerlerden oluştuklarından $\{T_n\}$ dizisinin de paydaları aynı özelliğe sahiptir. (c, d) bu özelliğe sahip ve $T \in \{T_n\}$ olsun.

$$T'(z) = \frac{a'z + b'}{cz + d}$$

elemanı da $\{T_n\}$ dizisinin bir elemanı ise $m = ab' - a'b$ olmak üzere

$$T'T^{-1}(z) = z + m$$

için

$$T'(z) = \frac{(a + mc)z + (b + md)}{cz + d}$$

elde edilir. Sonuç olarak $T'(z) = T(z) + m$ olur. T ve T' $\{T_n\}$ dizisinin elemanları olduğundan öyle bir tamsayısı m vardır ki T', $\{T_n\}$ dizisinin elemanları üzerine koyduğumuz koşulu sağlarlar. Böylece $\{T_n\}$ dizisi paydasındaki elemanlarla tektürlü belirlenir. Bu paydadaki elemanlar sonlu olduğu için $\{T_n\}$ dizisi sonlu olur. Bu ise $\{T_n\}$ dizisinin yakınsak olması ile çelisir. O halde Γ, H_1 üzerinde süreksizdir. $\square$

Aşağıdaki teorem Γ' nın

$$T\tau = \tau + 1 \qquad \text{ve} \qquad S\tau = -\frac{1}{\tau}$$

dönüşümleri tarafından üretildiğini gösterecektir.

Teorem 2.1.3 *(Apostol, 1990) Modüler grup* Γ

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ve \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iki matris tarafından üretilir. Yani Γ *daki her* A*,* n_i *ler tamsayı olmak üzere*

$$A = T^{n_1} S T^{n_2} S \ldots S T^{n_k}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu temsil(yazılım) tektürlü değildir.

İSPAT.

İlk olarak özel bir örnek üzerinde düşünelim.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$$

olsun.

A' nın S ve T' nin kuvvetlerinin çarpımı şeklinde yazilabildiğini gösterecegiz. $S^2 = I$ olduğu için, S' nin ilk kuvveti oluşmuş olur. n bir tamsayı olmak üzere, aşağıdaki matris çarpımını düşünelim.

$$AT^n = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4n+9 \\ 11 & 11n+25 \end{pmatrix}$$

.

Dikkat edilirse ilk kolon değişmeden aynı kaldı. n' nin uygun seçimleri ile $|11n + 25| < 11$ olur. Örneğin, $n = -2$ alınırsa, $11n + 25 = 3$ ve

$$AT^{-2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

bulunur.

T' nin uygun bir kuvveti ile A yi çarparsak, $|d| < |c|$ olan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisi elde ederiz. Sonraki adımda, sağdan S ile çarparsak,

$$AT^{-2}S = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Bu işlem ile aslında iki kolonun yerini degiştirmiş ve ikinci kolonu da eksi ile çarpmış oluruz. Tekrar T' nin uygun kuvveti ile çarptığımızda $\mid d \mid < \mid c \mid$ olan bir matris elde etmiş oluruz. Bu durumda T^4 ya da T^3 kullanabiliriz. T^4 seçersek eğer,

$$AT^{-2}ST^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

bulmuş oluruz.

S ile çarparsak eğer,

$$AT^{-2}ST^4S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

elde ederiz.

Şimdi T^3 ile çarptığımızda

$$AT^{-2}ST^4ST^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S$$

elde edilir.

A için çözüm şu şekilde

$$A = ST^{-3}ST^{-4}ST^2$$

bulunur.

Herbir adımda T 'nin 1 den fazla kuvveti olabilir ve bu işlem tek değildir.

Teoremin genel olarak ispatını yapmak için, $c \geq 0$ olmak üzere $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ matrislerini göz önüne almamız yeterli olacaktır. c üzerinde tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

Eğer $c = 0$ ise, $ad = 1$ buradan da $a = d = 1$ ya da -1 dir ve

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pm b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{\pm b}$$

olur.

Böylece, A, T' nin bir kuvveti olur.

Eğer $c = 1$ ise, $ad - b = 1$ olur buradan da $b = ad - 1$ ve

$$A = \begin{pmatrix} a & ad - 1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^a S T^d$$

elde edilir. Şimdi $c \geq 1$ icin sol alt elemanı c den küçük olan tüm A matrisleri için teoremi doğru kabul edelim. $ad - bc = 1$ olduğu için $(c, d) = 1$ dir. d' yi c ile bölersek,

$0 < r < c$ için $d = cq + r$ elde edilir. Sonra

$$AT^{-q} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -aq + b \\ c & r \end{pmatrix}$$

ve

.

$$AT^{-q}S = \begin{pmatrix} a & -aq + b \\ c & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aq + b & -a \\ r & -c \end{pmatrix}$$

olur. Tümevarım kabulünden son matris S' nin ve T' nin kuvvetlerinin çarpımı olarak yazıldığı gibi A da yazılmış olur. Bu da ispatı tamamlar. □

2.2 Modüler Grubun Temel Bölgesi

Bu bölümde ise modüler gruplar da önemli bir yeri olan temel bölge kavramı ve özelliklerinden bahsedeceğiz. Aslında temel bölge düzlemin öyle bir altkümesidir ki grubun düzlemde gösterdiği tüm özellikleri bu küme üzerinde gösterir.

Tanım 2.2.1 *(Apostol, 1990) G, modüler grup Γ' nin bir alt grubu ve üst yarı düzlem H_1' in iki noktası τ ve τ' olsun. Eğer*

$$\tau' = A\tau$$

olacak şekilde $A \in G$ varsa bu iki noktaya G altında denktirler denir. Bu denklik G de bir denklik bağıntısı oluşturur.

Tanım 2.2.2 *(Apostol, 1990) Bu denklik bağıntısı üst yarı düzlem H_1' i denklik sınıflarının bir ayrık kolleksiyonuna ayırır öyle ki bu denklik sınıflarına yörünge denir ve G_τ ile gosterilir. G_τ yörüngesi, $A \in G$ olmak üzere, $A\tau$ formundaki tüm kompleks sayıların kümesidir.*

Tanım 2.2.3 *(Apostol,1990) G, Γ' nın bir alt grubu olsun. Herbir yörünge den seçilen noktaların kümesine G' nin temel kümesi denir.*

Tanım 2.2.4 *(Apostol,1990) G, modular grup Γ' nın bir alt grubu olsun. Üst yarı düzlem H_1' in açık altkümesi R_G olsun. Eğer*

(a) R_G' nin iki farklı noktası G altında denk değildir,
(b) Eğer $\tau \in H_1$ ise,G altında τ ' ya denk olacak şekilde R_G'nin kapanışında bir τ' noktası vardır,
şartlarını sağlıyorsa R_G' ye G' nin temel bölgesi denir.

Yardımcı Teorem 2.2.5 *(Apostol, 1990) ω_2'/ω_1' oranı reel olmayan ω_1', ω_2' için,*

$$\Omega = \{m\omega_1' + n\omega_2' : m,\ n \text{ tam sayı}\}$$

olsun. O zaman

$$| \omega_2 | \geq | \omega_1 | \quad , \quad | \omega_1 + \omega_2 | \geq | \omega_2 | \quad , \quad | \omega_1 - \omega_2 | \geq | \omega_2 |$$

ve

$$\begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix}, ad - bc = 1$$

olacak şekilde, (ω_1', ω_2') ikilisine denk olan (w_1, w_2) esas çifti vardır.

İSPAT. $0 <| \omega_1 |\leq| \omega_2 |\leq \dots$ ve eğer $| \omega_n |=| \omega_{n+1} |$ ise $arg\omega_n < arg\omega_{n+1}$ olacak şekilde orjinden artan uzaklıklarına göre Ω' nın elemanları bir dizi olarak düzenleyerek,

$$\Omega = \{0, \omega_1, \omega_2, \dots\}$$

yazalım.

$\omega_1 = w_1$ ve ω_2, ω_1' in bir katı olmayan bu dizinin ilk elemanı olsun. Köşeleri $0, \omega_1$ ve ω_2 olan üçgen, köşeler hariç Ω' nın hiçbir elemanını içermez. Bu yüzden (ω_1, ω_2) ikilisi Ω' yı üreten esas çifti olur. Böylece

$$\begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $ad - bc = \pm 1$ şartını sağlayan a, b, c, d tam sayıları vardır. Eğer $ad - bc = -1$ ise, c yi $-c$, d' yi $-d$ ve ω_1 ise $-\omega_1$ ile değiştirebiliriz ve aynı eşitlik korunur. $\omega_1 \pm \omega_2$, Ω da ω_2' den sonra olan periodlar olduğundan,

$$| \omega_2 | \geq | \omega_1 | \quad \text{ve} \quad | \omega_1 \pm \omega_2 | \geq | \omega_2 |$$

elde edilir. □

Teorem 2.2.6 *(Apostol, 1990) Eğer $\tau' \in H_1$ ise,*

$$| \tau | \geq 1, \qquad | \tau + 1 | \geq | \tau |, \qquad ve \qquad | \tau - 1 | \geq | \tau |$$

olacak şekilde Γ altında τ'' ye denk olan H_1 de bir τ kompleks sayısı vardır.

İSPAT. $\omega_1' = 1$, $\omega_2' = \tau'$ olsun.

$$\Omega = \{m + n\tau' : m, n \quad \text{tamsayı}\}$$

periodlarının cümlesine Yardımcı Teorem 2.2.5'i uygulayalım. O zaman

$$| \omega_2 | \geq | \omega_1 | \quad \text{ve} \quad | \omega_1 \pm \omega_2 | \geq | \omega_2 |$$

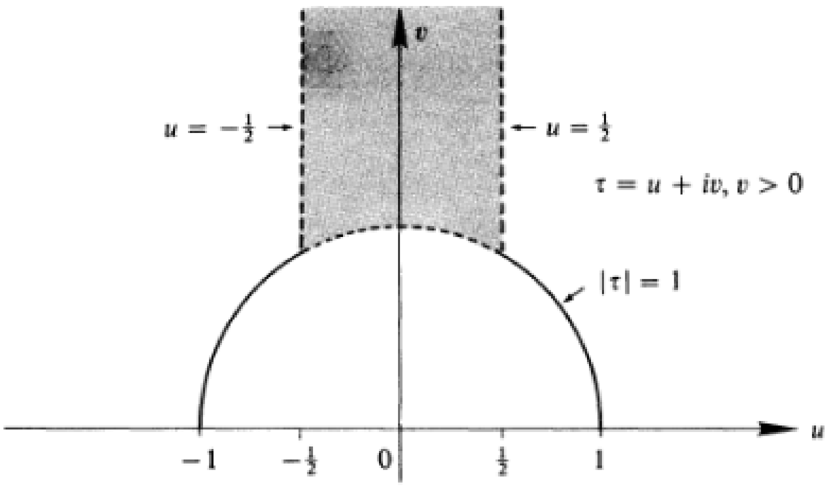
olacak şekilde (ω_1, ω_2) esas çifti vardır. $\tau = \omega_2/\omega_1$ olsun. O zaman $ad - bc = 1$ ve $| \tau | \geq 1$, $| \tau \pm 1 | \geq | \tau |$ olmak üzere $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau'$ olur. □

Örneğin, aşağıda vereceğimiz teorem Γ tam modüler grubunun R_Γ temel bölgesi, H_1' in τ elemanlarını içerir öyle ki,

$$| \tau | > 1 \qquad , \qquad | \tau + \bar{\tau} | < 1$$

eşitsizliklerini sağlar.

Bu bölge şu şekilde ifade edilebilir.



Şekil 1: Modüler grubun esas bölgesi

Teorem 2.2.7 *(Apostol, 1990)*

$$R_\Gamma = \{\tau \in H_1 :| \tau |> 1, | \tau + \bar{\tau} |< 1\}$$

açık cümlesi Γ*' nın esas bölgesidir. Ayrıca,* R_Γ *da bazı* τ *lar için,* $A \in \Gamma$ *ve* $A\tau = \tau$ *ise,* $A = I$ *olur. Başka bir ifadeleyle, sadece birim eleman* R_Γ *da sabit bir noktaya sahiptir.*

İSPAT. Teorem 2.2.6' dan $\tau' \in H_1$ ise, Γ altında τ' ye denk olan R_Γ nın kapanışında bir τ noktası vardır. Γ altında R_Γ' nın denk olan iki farklı noktasının olamayacağını ispatlamak için, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere $\tau' = A\tau$ olsun. İlk olarak $c \neq 0$ ve $\tau \in R_\Gamma$ için, $\text{Im}(\tau') < \text{Im}(\tau)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\text{Im}(\tau') = \frac{\text{Im}(\tau)}{| c\tau + d |^2}$$

olduğunu biliyoruz. Eğer $\tau \in R_\Gamma$ ve $c \neq 0$ ise,

$$\mid c\tau + d \mid^2 = (c\tau + d)(c\bar{\tau} + d) = c^2\tau\bar{\tau} + cd(\tau + \bar{\tau}) + d^2 > c^2 - \mid cd \mid + d^2$$

dir.

Eğer $d = 0$ ise, $\mid c\tau + d \mid^2 > c^2 \geq 1$ olduğunu buluruz. Eğer $d \neq 0$ ise,

$$c^2 - \mid cd \mid + d^2 = (\mid c \mid - \mid d \mid)^2 + \mid cd \mid \geq \mid cd \mid \geq 1$$

elde ederiz ve buradan da $\mid c\tau + d \mid^2 > 1$ bulunur. Böylece $c \neq 0$ icin, $\mid c\tau + d \mid^2 > 1$ ve $Im(\tau') < Im(\tau)$ bulunmuş olur. Başka bir deyişle, her $A \in \Gamma$ ve $c \neq 0$ için, R_Γ daki her bir noktanın ordinatı azalır.

Şimdi τ ve τ' ' nın R_Γ 'nın denk iç noktaları olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \text{ve} \qquad \tau = \frac{d\tau' - b}{-c\tau' + a}$$

olur. Eğer $c \neq 0$ ise

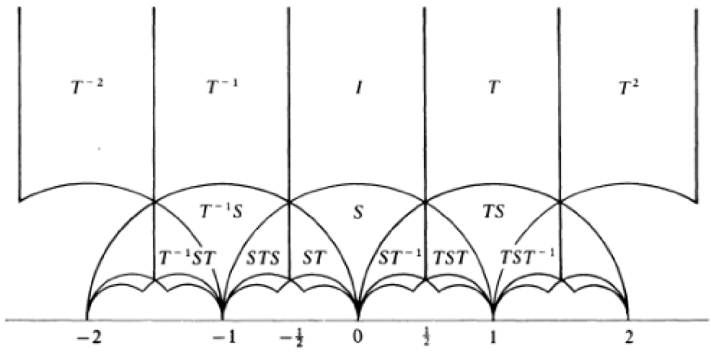
$$\mathrm{Im}(\tau') < \mathrm{Im}(\tau) \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{Im}(\tau) < \mathrm{Im}(\tau')$$

elde edilir. Böylece $c = 0$ ve $ad = 1$ olur. Buradan da $a = d = \pm 1$ ve

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = T^{\pm b}$$

elde edilir. Fakat τ ve $\tau' \in R_\Gamma$ olduğu için, $b = 0$ olur ve buradan da $\tau = \tau'$ elde edilir. Bu da R_Γ' nın farklı iki noktasının Γ altında denk olamayacağını söyler. Sonuç olarak, eğer $\tau \in R_\Gamma$ için, $A\tau = \tau$ ise, benzer işlemlerle $c = 0$, $a = d = \pm 1$ ve böylece $A = I$ bulunur. Bu ise birim elemanın R_Γ da sabit bir noktaya sahip olduğunu söyler. $\square$

Örneğin, aşağıdaki şekilde, R_Γ temel bölgesi ve modüler grubun dönüşümleri altında bazı görüntüleri gösterilmiştir. Γ' nın her bir elemanı daireleri dairelere dönüştürür. R_Γ'nın sınır eğrileri reel eksene dik çemberler olduğundan bu her $f \in \Gamma$ için, $f(R_\Gamma)$ görüntüsü içinde doğrudur. Burada, $f \in \Gamma$ için, $f(R_\Gamma)$ görüntüleri cümlesi sınır noktaları ile birlikte çakışmayan açık bölgelerin kolleksiyonudur ve H_1' ın tümünü örter.



Şekil 2: Γ' nın elemanları altında R_Γ esas bölgesinin görüntüleri

2.3 Modüler Alt Gruplar

Tanım 2.3.1 *(Apostol,1990)* $\Gamma(n)$ *altgrubuna* Γ*' nın* n *seviyeli temel denklik altgrubu denir, yani*

$$\Gamma(n) = \{\tau \in \Gamma \mid \tau(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0(modn)\}$$

dir.

Herbir $n \geq 2$ tamsayısı için, $\mathbb{Z}_n$, $(modn)$ tamsayılarının halkası için,

$$SL(2, \mathbb{Z}_n) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n \quad \text{ve} \quad ad - bc = 1\}$$

grubu ele alınsın.

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$$

$$a \to \bar{a}$$

doğal halka homomorfizması ile

$$SL(2,\mathbb{Z}) \to SL(2,\mathbb{Z}_n)$$

grup homomorfizması elde edilir. Bunun yardımıyla

$$\phi_n : PSL(2,\mathbb{Z}) = \Gamma \to PSL(2,\mathbb{Z}_n)$$

grup homomorfizmasını verir. ϕ_n homomorfizmasının cekirdeği $\Gamma(n)$, yani $a \equiv d \equiv 1(modn)$ ve $b \equiv c \equiv 0(modn)$ olmak üzere

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklindeki dönüşümlerden oluşur.

Şimdi $\Gamma/\Gamma(n) \cong PSL(2,\mathbb{Z}_n)$ olduğu gösterilecektir. Bu Teoremi ispatlamadan önce ispatımız için gerekli olan bazı bilgiler verilecektir.

Yardımcı Teorem 2.3.2 *(Schoeneberg, 1974) a, b, c, d tamsayılar ve*

$$ad - bc \equiv 1(modn)$$

denkliğinin bir çözümü olsun. $a' \equiv a$, $b' \equiv b$, $c' \equiv c$ ve $d' \equiv d(modn)$ olacak şekilde

$$a'd' - b'c' = 1$$

eşitliğini sağlayan a', b', c' ve d' tamsayıları vardır.

İspat. İspat iki aşamada yapılacaktır. İlk olarak en büyük ortak bölen $(c, d) = 1$ olarak kabul edelim. Bu ise, $c' \equiv c(modn)$ ve $d' \equiv d(modn)$ olacak şekilde c' ve d' tamsayılarını varlığını ve $(c', d') = 1$ olduğunu söyler. Hipotezden, $(c, d, n) = 1$. Eğer $c = 0$ ise, $c' := n$ ve $d' := d$ olarak seçilebilir. Diğer durumlarda, p asal sayı olmak üzere $P = \prod_{p|c, p\nmid n} p$ alalım. Burada, $c' := c$, $d' := d + ln$ olur. $d + ln \equiv$

$1(modP)$ olacak şekilde seçilebilir. $(n, P) = 1$ olduğu için, bu seçimi yapabiliriz. Şimdi $d' \equiv 1(modP)$, $c' \equiv 0(modP)$ ve böylece $(c', d') = 1$ olur. Kabul edilsin ki, $(c, d) = 1$ olsun. O zaman, $xd - yc = 1$ eşitliğinin tam çözümleri a_1 ve b_1 olsun. Bu durumda, $A_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ alınsın. Eğer $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ise, o zaman,

$$AA_1^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b_1 \\ -c & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & a_1 b - ab_1 \\ 0 & a_1 d - cb_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (modn)$$

ya da $A = U^k A_1 (modn)$ dir. Bununla birlikte $U^k A_1 \in \Gamma$ dır. $U^k A_1$ in bileşenleri istenen sonuçlar a', b', c' ve d' olur. □

$\Gamma(n)$, ϕ_n homomorfizmasının çekirdeği olduğu için Γ nin bir normal altgrubudur.

$$\phi_n : \Gamma \to PSL(2, \mathbb{Z}_n)$$

dönüşümü örten oldugu için $\Gamma/\Gamma(n) \cong PSL(2, \mathbb{Z}_n)$ dir. $\Gamma(n)$ altgrubunun Γ daki indeksi, ayni zamanda $PSL(2, \mathbb{Z}_n)$ nin mertebesini de verir. $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$[\Gamma : \Gamma(n)] = \mid PSL(2, \mathbb{Z}_n) \mid = \{ \begin{array}{ccc} 6 & eger & n = 2 \\ \frac{n^3}{2} \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p^2}) & eger & n > 2 \end{array}$$

dir.

Sonuç 2.3.3 *(Schoeneberg, 1974)* Γ *bir modüler grup olmak üzere,*

$$\Gamma/\Gamma(n) \cong PSL(2, \mathbb{Z}_n)$$

dir.

2.4 Bazı Özel Modüler Alt Grupların Temel Bölgesi

Bu bölümde bazı özel modüler alt grupların temel bölgelerini inceleyeceğiz.

Tanım 2.4.1 *(Schoeneberg, 1974) a, b, c, d reel sayı olmak üzere*

$$\overline{\Gamma}(n) := \{\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (modn)\}$$

grubuna n seviyeli homojen olmayan temel denklik altgrubu denir. Homojen grup

$$\Gamma[n] := \Gamma(n) \cup (-I)\Gamma(n)$$

kümesine de temel denklik altgrubu denir.

Aynı zamanda $\overline{\Gamma}(n)$, $\overline{A} : \tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ olmak üzere

$$\varphi : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \overline{A}$$

homomorfizmasının altında $\Gamma[n]$' nin görüntüsüdür ve çekirdeği $\{\pm I\}$ dir. $n > 2$ için $\Gamma[n]$, $\Gamma(n)$ özellikle kapsar ve aynı zamanda $\overline{\Gamma}[n] = \overline{\Gamma}(n)$ dir. Ayrıca $\overline{\Gamma}(n)$, $\overline{\Gamma}$' nin normal altgrubudur.

Tanım 2.4.2 *(Schoeneberg, 1974) $\overline{\Gamma}/\overline{\Gamma}(n)$ çarpım grubuna da n seviyeli modüler alt grup denir ve $\overline{\Gamma}_n$ ile gösterilir.*

n' nin değişik durumları için modüler alt gruplar da şu şekildedir.

$\overline{\Gamma}_2 \cong$ triangle grup	$\cong S_3$	ve $\mid \overline{\Gamma}_2 \mid = 6;$
$\overline{\Gamma}_3 \cong$tetrahedral grup	$\cong A_4$	ve $\mid \overline{\Gamma}_2 \mid = 12;$
$\overline{\Gamma}_4 \cong$ octahedral grup	$\cong S_4$	ve $\mid \overline{\Gamma}_4 \mid = 24$
$\overline{\Gamma}_5 \cong$ icosahedral grup	$\cong A_5$	ve $\mid \overline{\Gamma}_5 \mid = 60.$

Şimdi bazı özel denklik alt gruplarından bahsedeceğiz.

$$\Gamma_0(n) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\} \in \Gamma \mid c \equiv 0(modn)\},$$

$$\Gamma^0(n) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\} \in \Gamma \mid b \equiv 0(mod n)\},$$

$$\Gamma_0^0(n) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\} \in \Gamma \mid b \equiv c \equiv 0(mod n)\}.$$

Açıktır ki bu kümeler birer gruptur. Aynı zamanda

$$[\Gamma_0(n) : \Gamma] = [\Gamma^0(n) : \Gamma]$$

dir. Eğer $c \equiv 0(mod n)$ ise,

$$[\Gamma : \Gamma_0(n)] = n \prod_{p|n}(1 + \frac{1}{p})$$

dir. Eğer $b \equiv c \equiv 0(mod n)$ ise,

$$[\Gamma : \Gamma_0^0(n)] = n^2 \prod_{p|n}(1 + \frac{1}{p})$$

dir. Şimdi bu bazı özel alt grupların temel bölgelerini inceleyeceğiz.

2.4.1 $\Gamma_0(q)$ Alt Grubu ve Temel Bölgesi

Bu bölümde özel olarak $\Gamma_0(q)$ alt grupları incelenecek ve karakterizasyonu verilecektir.

Tanım 2.4.3 *(Apostol, 1990) q pozitif bir tamsayı olmak üzere*

$$\Gamma_0(q) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0(modq)\}$$

olur.

$\Gamma_0(q)$, Γ' nın altgrubu olduğunu göstermek kolaydır. Aşağıda verilecek olan Teoremde, p asal bir sayı olmak üzere, Γ' nın elemanları $\Gamma_0(p)$' nin elemanları cinsinden yazılacaktır.

Teorem 2.4.4 *(Apostol, 1990) p asal bir sayı ve $S\tau = -1/\tau$ ve $T\tau = \tau + 1$, Γ modüler grubunun üreteçleri olsun. Bu durumda her $V \in \Gamma$ ve $V \notin \Gamma_0(p)$ için; $P \in \Gamma_0(p)$ vardır ve $0 \leq k < p$ olmak üzere k tamsayısı için,*

$$V = PST^k$$

dir.

İSPAT. $C \not\equiv 0(modp)$ olmak üzere, $V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olsun. $c \equiv 0(modp)$ olacak şekilde $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi ve $0 \leq k < p$, k tamsayısı için,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ST^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

olur. Buradaki tüm matrisler singüler değildir ve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi için çözebiliriz.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} kA - B & A \\ kC - D & C \end{pmatrix}$$

elde edilir. $C \not\equiv 0(modp)$ olduğu için, $kC \equiv D(modp)$ denkliğinin çözümü olarak $0 \leq k < p$ olmak üzere k' yı seçebiliriz. Şimdi

$$c = kC - D, \qquad a = kA - B, \qquad b = A, \qquad d = C$$

seçelim. Buradan, $c \equiv 0(modp)$ olur böylece $P \in \Gamma_0(p)$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi $\Gamma_0(p)$' ın temel bölgesini inceleyeceğiz. $S\tau = -1/\tau$ ve $T\tau = \tau + 1$ ve R_τ da Γ' nın temel bölgesi olsun. Aşağıdaki teoremde $\Gamma_0(p)$' ın temel bölgesini karakterize edeceğiz.

Teorem 2.4.5 *(Apostol, 1990) p asal bir sayı olmak üzere,*

$$R_\Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} ST^k(R_\Gamma)$$

kümesi, $\Gamma_0(p)$ *altgrubunun temel bölgesidir.*

İSPAT. $R = R_\Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} ST^k(R_\Gamma)$ olsun. R kümesinin aşağıdaki iki özelliği sağladığı gösterilecektir.

(i) $\tau \in H_1$ ise, V_τ, R' nın kapanışında olacak şekilde $V \in \Gamma_0(p)$ vardır.

(ii) R' nin $\Gamma_0(p)$ altında denk olan iki farklı noktası yoktur.

(i)' yi ispatlamak için, $\tau \in H_1$, τ_1, R_Γ' nın kapanışında ve $A\tau = \tau_1$ olacak şekilde $A \in \Gamma$ seçelim. Teorem 2.4.4' dan $0 \leq k \leq p-1$ için $W = I$ ya da $W = ST^k$ ve $P \in \Gamma_0(p)$ olmak üzere

$$A^{-1} = PW$$

olarak yazabiliriz. O zaman $P = A^{-1}W^{-1}$ ve buradan da $P^{-1} = WA$ olur. $V = P^{-1}$ olsun. Böylece $V \in \Gamma_0(p)$ ve

$$V\tau = WA\tau = W\tau_1$$

olur. $W = I$ ya da $W = ST^k$ olduğu için, (i) ispatlanmış olur. Şimdi (ii) ispatlayalım: $\tau_1,\ \tau_2 \in R$ ve $V \in \Gamma_0(p)$ için $V\tau_1 = \tau_2$ olsun. $\tau_1 = \tau_2$ olduğunu göstereceğiz. Sadece 3 durum vardır.

(a) Eğer τ_1 ve $\tau_2 \in R_\Gamma$ ise $V \in \Gamma$ olduğu için, $\tau_1 = \tau_2$ olur.

(b) $\tau_1 \in R_\Gamma$ ve $\tau_2 \in ST^k(R_\Gamma)$ olsun.

(c) $\tau_1 \in ST^{k_1}(R_\Gamma)$ ve $\tau_2 \in ST^{k_2}(R_\Gamma)$ olsun.

(b) durumunda, $\tau_3 \in R_\Gamma$ olmak üzere, $\tau_2 = ST^k\tau_3$ olur. $V\tau_1 = \tau_2$ eşitliğinden,

$$V\tau_1 = ST^k\tau_3 \qquad \text{ve} \qquad \tau_1 = V^{-1}ST^k\tau_3$$

elde edilir. Fakat $\tau_1 \in R_\Gamma$ ve $\tau_3 \in R_\Gamma$ olduğu için, $V^{-1}ST^k = I$ ve

$$V = ST^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu ise $V \in \Gamma_0(p)$ olması ile çelişir. Son olarak (c) durumunu düşünelim. Bu durumda, $\tau_1',\ \tau_2' \in R_\Gamma$ olmak üzere

$$\tau_1 = ST^{k_1}\tau_1' \qquad \text{ve} \qquad \tau_2 = ST^{k_2}\tau_2'$$

dir. $V\tau_1 = \tau_2$ olduğu için, $VST^{k_1}\tau_1' = ST^{k_2}\tau_2'$ ve $VST^{k_1} = ST^{k_2}$ elde edilir ve dolayısıyla,

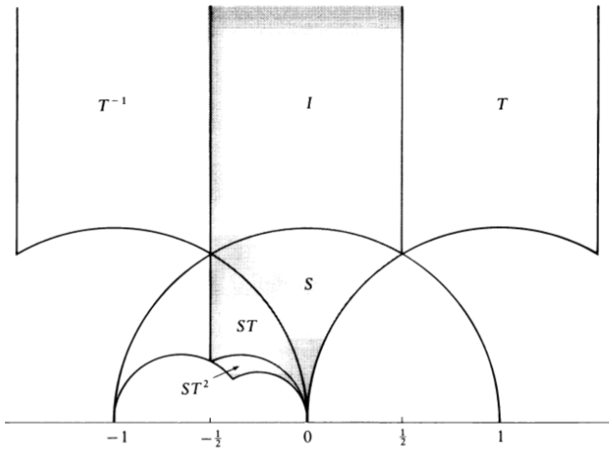
$$V = ST^{k_2-k_1}S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k_2 - k_1 & -1 \end{pmatrix}$$

olur. $V \in \Gamma_0(p)$ olduğu için, $k_2 \equiv k_1 (modp)$ denkliği bulunur. Fakat k_1, $k_2, [0, p-1]$ aralığında olduğu için, $k_1 = k_2$ olur. Bu yüzden;

$$V = ST^0S = S^2 = I$$

ve $\tau_1 = \tau_2$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi aşağıdaki şekilde, Teorem 2.4.5 kullanılarak $p = 3$ icin elde edilen $\Gamma_0(3)$ altgrubunun temel bölgesidir.



Şekil 3: $\Gamma_0(3)$ için temel bölge

$\Gamma_0(p)$' nın üreteçleri ile ilgili olan aşağıdaki Rademacher ' in Teoremi ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 2.4.6 *(Apostol, 1990) $p > 3$ olan herhangi bir p asal sayı için, $\Gamma_0(p)$ altgrubu $2[p/12]+3$ üreteçe sahiptir ve $T\tau = \tau+1$, $S\tau = -1/\tau$ ve $kk' \equiv -1(mod p)$ olmak üzere*

$$V_k = ST^kST^{-k'}S = \begin{pmatrix} k' & 1 \\ -(kk'+1) & -k \end{pmatrix}$$

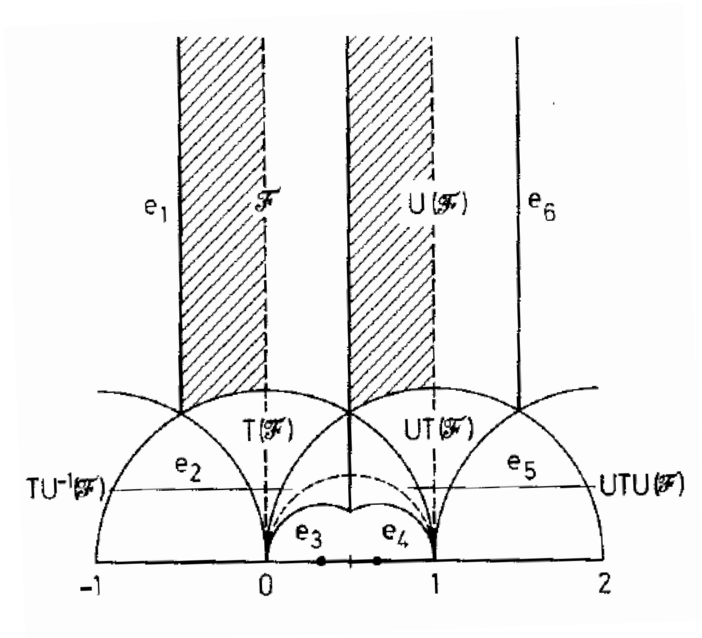
için T, V_1, V_2, $\ldots$, V_{p-1} elemanlardan seçilebilir. Özel olarak, $\Gamma_0(2)$ altgrubu T ve V_1 üreteçlerine, $\Gamma_0(3)$ altgrubu ise T ve V_2 üreteçlerine sahiptir.

Şimdi üreteçler için kısa bir tablosu verilecektir.

p	2	3	5	7	11	13	17	19
Üreteçleri	T	T	T	T	T	T	T	T
	V_1	V_2	V_2	V_3	V_4	V_4	V_4	V_5
			V_3	V_5	V_6	V_5	V_7	V_8
						V_8	V_9	V_{12}
						V_{10}	V_{13}	V_{13}

2.4.2 $\Gamma[2]$ Esas Kongruans Alt Grubu için Esas Bölge

$\Gamma[2]$ esas kongruans alt grupları için sınırlar, U^2, $TU^{-2}T$, $(UT)U^{-2}(UT)^{-1}$, $e_6 = U^2(e_1)$, $e_3 = TU^{-2}T(e_2)$ ve $e_5 = UTU^{-2}TU^{-1}(e_4)$ olur. Buna göre $\Gamma[2]$ esas kongruans altgrubunun esas bölgesi Şekil 4 de verilir.

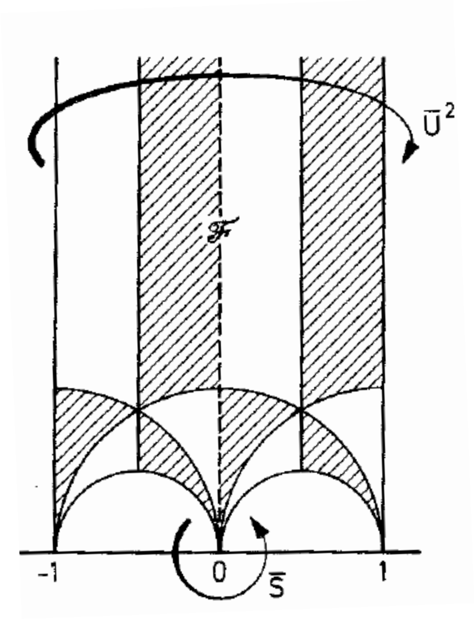


Şekil 4: $\Gamma[2]$ esas kongruans altgrubu için esas bölge

$\overline{\Gamma}[2]$' nin üreteçleri olan

$$\overline{U}^2 : \tau \mapsto \tau + 2 \qquad \text{ve} \qquad \overline{S} : \tau \mapsto \frac{\tau}{2\tau + 1}$$

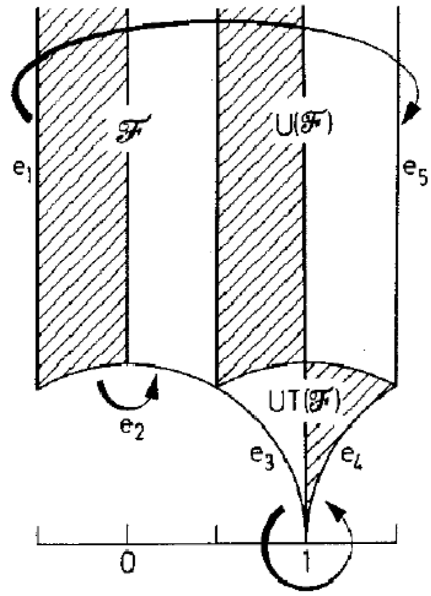
yardımıyla ikinci temel bölgesi Şekil 5 de verilmiştir.



Şekil 5: $\overline{\Gamma}[2]$ esas kongurans altgrubunun esas bölge

2.4.3 $\Gamma_1 := \Gamma[2] \bigcup \Gamma[2]T$ Teta Grubunun Temel Bölgesi

$T^2 = -I$ olduğundan, $\Gamma[2], \Gamma_1$ de $(\Gamma_1 : \Gamma[2]) = 2$ indeksli bir alt gruptur. Böylece $(\Gamma : \Gamma_1) = 3$ olur. U^2 ve $T \in \Gamma_1$ olmak üzere, Γ_1' in temel bölgesi Şekil 6 da verilir.



Şekil 6: $\Gamma_1 = \Gamma[2] \cup \Gamma[2]T$ Teta Grubunun Esas Bölgesi

Temel bölgesinden de görüldüğü gibi Γ_1, Γ' nın normal altgrubu değildir. Sınırları $e_5 = U^2(e_1)$, $e_2 = T(e_2)$ ve $e_4 = (UT)U^{-1}(UT)^{-1}(e_3)$ olur. $\overline{\Gamma}_1$ in üreteçleri, $\overline{U}^2$ ve $\overline{T}$ yardımıyla ikinci bir temel bölgesi elde edilir ki bölge Şekil 7 de verilir.

Teta fonksiyonun

$$\vartheta(\tau) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i m^2 \tau}$$

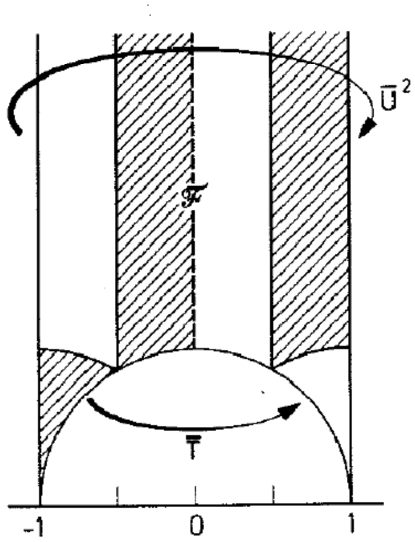
dönüşüm formülleri ile olan ilişkisi sebebiyle Γ_1' e teta grup da denir. $\Gamma_1 = \Gamma_\vartheta$ teta grubuna konjuge gruplar, $\Gamma^0(2) = U^{-1}\Gamma_\vartheta U$ olur. Esas bölgesi,

$$U^{-1}(\mathcal{F}) \bigcup \mathcal{F} \bigcup T(\mathcal{F})$$

sınırları,

$$U^2, U^{-1}TU, UTU$$

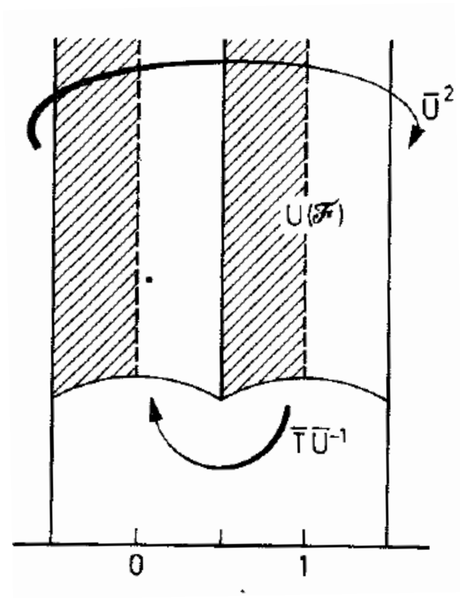
olur. Bir başka konjuge grup ise , $\Gamma_0(2) = (UT)^{-1}\Gamma_\vartheta UT$ olur.

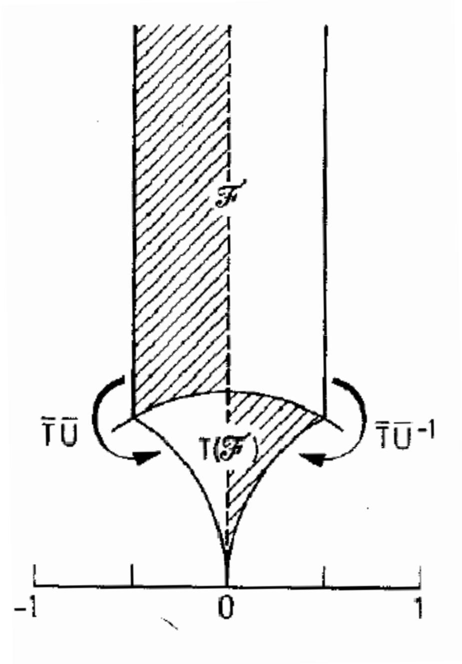


Şekil 7: $\Gamma[2] \cup \Gamma[2]T$ Teta Grubu için Esas Bölge

2.4.4 $\Gamma'_1 := \Gamma[2] \bigcup \Gamma[2]UT \bigcup \Gamma[2](UT)^2$ Alt Grubu ve Temel Bölgesi

Teta grup ve bu grubun iki konjuge grubundan başka $\Gamma[2]$' yi içeren, $\overline{\Gamma}'_1$ alt grupları vardır. $[\Gamma : \overline{\Gamma_1}'] = 2$ olduğu için, Γ' nın normal altgrubudur. $U \notin \Gamma'_1$ ve $T \notin \Gamma'_1$ olduğu için, temel bölgesi olarak, aşağıdaki bölgelerden biri seçilebilir.





Şekil 8: $\Gamma_1' := \Gamma[2] \bigcup \Gamma[2]UT \bigcup \Gamma[2](UT)^2$ Altgrubunun Esas Bölgesi

.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3 $2l$ DERECELİ HOMOJEN POLİNOMLARIN UZAYINDA OTOMORFİK ve MODÜLER FORMLAR

Bu bölümde $2l$ dereceli homojen polinomların uzayında otomorfik ve modüler formlar üzerinde durulacaktır. Ve bunlarla ilgili uygulamalar ele alınacaktır.

3.1 Genel Bilgiler

1940 lardan bu zamana kadar grup temsilleri teorisinin temelleri üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. (Özdemir, 1995)

$$g = g(x) = \frac{1}{\beta}[f(x + x_0) - (\beta - \alpha)f(x)]$$

dönüşümünün X lineer uzayında bazı ilave şartlar altında bir G topolojik grubun temsili olduğu gösterdi. $\Gamma(1)$ homojen modüler grubun matris elemanları için çeşitli ifadeler yazacağız. Üstel fonksiyonların genelleştirilmesi grup temsilleri ile oldukça önemlidir. Örnegin, e^{ax} üstel fonksiyonu $f'(0) = a$ başlangıç şartını sağlayan

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

fonksiyonel denkleminin bir sürekli çözümü olarak tanımlanabilir.

Bu eşitliği herhangi bir G grubuna genelleştirirsek,

$$f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2) \tag{1}$$

şartını sağlayan G üzerinde skaler bir fonksiyonu düşünmek zorunda kalırız.

Bununla birlikte değişmeli olmayan gruplarda böyle bir fonksiyon yoktur. Çünkü yukarıdaki eşitlikden

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = f(g_2)f(g_1) = f(g_2g_1)$$

elde edilir.

Bu yüzden, (1) eşitligini sağlayan skaler fonksiyonlar, G grubu üzerindeki herhangi bir $F(g)$ fonksiyonun açılmasında yetersiz olmuştur.

(1) eşitliğinin çözümünü elde edebilmek için skaler fonksiyonları matris veya lineer dönüşümler cinsinden fonksiyonlara dönüştürmeye ihtiyaç duyulur.

(Özdemir, 1995) de tek değişkenli $2l$ dereceli polinomlar uzayında, $T_l(g)$ operatorunun temsilini

$$T_l(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{2l}\varphi(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}) \tag{2}$$

biçiminde olduğunu göstermiştir öyle ki $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in PSl(2,\mathbb{C})$ dir. Burada $PSl(2,\mathbb{C})$ bir determinantlı $2x2$ kompleks matrislerinin grubudur. Özel fonksiyonlara grup teorisi ile yaklaşım, fonksiyonların harmonik analizi ile oldukça ilgilidir. Tipik bir örnek olarak, $(f(\phi))$ dairesinin grup rotasyonunun temsili

$$T(g_a)f(\varphi) = f(\varphi + a)$$

daire üzerinde bir fonksiyondur. Gruplar üzerindeki harmonik analiz temsillerin matris elemanlarına göre homojen uzayları ve grup üzerine fonksiyonların ayrışımı ile bağlantılıdır.Çünkü matris elemanları, özel fonksiyonlar cinsinden ifade edilebildiğinden böylece özel fonksiyonların integralleri ve serilerinin ayrışımı elde edilebilir.

M. E. Özdemir, R. Ocak ve U.S. Kırmacı (2000) homojen polinom uzaylarında klasik gruplarının temsilini $P_n \cong H_n$ olduğu kullanılarak, burada,

$$P_n = \{f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\}$$

ve

$$H_n = \{f(x,y) \in C[x,y] : f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y), \lambda \neq 0\}$$

dir. Yani, $\lambda \neq 0$ ve b ya da $d \neq 0$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ olmak üzere H_n üzerindeki $\Gamma(1)$' in etkisi

$\Gamma(1)\text{x}H_n \longrightarrow H_n$, $(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f)(x,y) = \lambda^n f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$

olduğu kullanarak, derecesi n' den küçük olan tek değişkenli polinomların uzayına tasınabilir.

Bu yapılarak, iki değişkenli homojen polinom uzaylarından, tek değişkenli ve aynı dereceli polinomlar uzayına kısıtlanışı elde edilir.

2 boyutlu kompleks uzayda kompleks dogru $z_1 = 1$' i düşünelim. Bu doğru, $z_2 = 0$ doğrusu hariç orjinden geçen her doğru ile bir noktada kesişir. Böylece her $f(z_1, z_2)$ polinomu, $z_2 = 1$ doğrusu üzerindeki değerleri ile tek türlü ifade edilebilir. Homojen polinom uzayındaki her $f(z_1, z_2)$ polinomu ile $2l$ dereceli ve tek değişkenli

$$\varphi(z_1) = f(z_1, 1) = \Sigma_{n=-l}^{l} a_n z_1^{l-n} \qquad f(z_1, z_2) = \Sigma_{n=-l}^{l} a_n z_1^{l-n} z_2^{l+n}$$

polinomunu eşleştirebiliriz.

3.2 $\Gamma = \Gamma(1)$ 'in Temsili ve Homojen Polinomlar

Möbius dönüşümleri kullanılarak iki değişkenli fonksiyonlar uzayında

$$T(g)f(x,y) = f(ax + cy, bx + dy) \tag{3}$$

eşitliğini yazabiliriz.

Açıktır ki, $T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$ dir ve böylece $T(g)$, $\Gamma(1)$ modüler grubunun temsili olur. Örneğin, $\Gamma(1)$ in T ve S gerenlerine göre temsili şu şekilde yazılabilir:

$$T(T)f(x,y) = f(x, x+y)$$
$$T(S)f(x,y) = f(y, -x). \tag{4}$$

İki gerçel değişkenli fonksiyonlar uzayı $T(g)$ dönüşümleri için bir invariant altuzaylar içerdiği için, bu temsiller daha indirgenebilir bir şekilde ifade edilebilir. Aynı zamanda $T(g)$ yardımıyla, herhangi iki değişkenli homojen polinomu aynı dereceli homojen polinoma dönüştürülür.

Bunu yapabilmek için, $\Gamma(1)$ in temsillerini, l tamsayı ya da yarı tamsayı ve $\mathfrak{P}_{2l}$ $2l$ dereceli tüm homojen polinomlarının uzayı olmak üzere

$$\mathfrak{P}_{2l} = \{f(x,y) \in R[x,y] : f(\lambda x, \lambda y)\} = \lambda^{2l} f(x,y), \quad \lambda \neq 0$$

üzerine taşınır.

Şimdi, $T_l(g)$, $T(g)$' nin $\mathfrak{P}_{2l}$ uzayına kısıtlaması olsun. $T_l(g)$' nin $\Gamma(1)$' in indirgenemez temsili olduğunu görecegiz.

$\mathfrak{P}_l$ nin her $f(x,y)$ polinomu $2l$ dereceli olan tek degişkenli

$$\varphi_{2l}(x) = f(x,1) = \Sigma_{n=-l}^{l} a_n x^{l-n} \tag{5}$$

polinomu ile bağlantısı vardır.

Açıkca $y \neq 0$ olmak üzere $f(x,y)$, $\varphi_{2l}(\frac{x}{y})$ ile aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$f(x,y) = y^{2l}\varphi_{2l}(\frac{x}{y}) \tag{6}$$

Teorem 3.2.1 *$2l$ dereceli tek değişkenli polinomlar uzayında $\Gamma(1)$' in $T_l(g)$ operatorünün temsili*

$$T_l(g)\varphi(x') = (bx'+d)^{2l}\varphi_{2l}(\frac{ax'+c}{bx'+d})$$

veya

$$T_l(g)\varphi(x') = (bx'+d)^{2l}\sum_{n=-l}^{l} a_n(\frac{ax'+c}{bx'+d})^{l-n}$$

formülü ile verilir.

İSPAT. (5) deki polinom (6) de verilen $f(x,y)$ homojen polinomuna karşılık gelir. $T_l(g)$ operatoru bu polinomu,

$$f_g(x,y) = f(ax+cy, bx+dy) \tag{7}$$

polinomuna dönüştürür. $f(z_1,z_2)$ homojen olduğu için, b ya da d den en az biri sıfırdan farklı olmak koşulu ile

$$\begin{aligned} f_g(x,y) &= (bx+dy)^{2l} f(\frac{ax+cy}{bx+dy},1) \\ &= (bx+dy)^{2l}\varphi_{2l}(\frac{ax+cy}{bx+dy}) \end{aligned} \tag{8}$$

elde edilir. Böylece $\varphi_g(x') = f_g(x',1)$ polinomu $f_g(x,y)$ polinomuna karşılık gelir ve $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ olmak üzere

$$\varphi_g(x') = (bx'+d)^{2l}\varphi_{2l}(\frac{ax'+c}{bx'+d}) \tag{9}$$

ile ifade edilir. Böylece $2l$ dereceli tek degişkenli polinomlar uzayında, $\Gamma(1)$ in $T_l(g)$ operatorunun temsili

$$T_l(g)\varphi(x') = (bx'+d)^{2l}\varphi_{2l}(\frac{ax'+c}{bx'+d})$$

ya da

$$T_l(g)\varphi(x') = (bx'+d)^{2l}\sum_{n=-l}^{l} a_n(\frac{ax'+c}{bx'+d})^{l-n} \tag{10}$$

formülü ile verilir. □

Teorem 3.2.2 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ve* $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *için;*

$$T_l T_1 \varphi(x) = (sec^2\theta)^{2l} \Sigma_{n=-l}^{l} a_n (sin^2\theta)^{l-n}$$

ve

$$T_l S_1 \varphi(x') = (tg^2\theta)^{2l} \Sigma_{n=-l}^{l} a_n (-cot^2\theta)^{l-n}$$

dir.

İSPAT.

(10) daki formülü $a = b = d = 1$ ve $c = 0$ ve $a = d = 0$, $b = -1$ ve $c = 1$ sırasıyla alınarak $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tekrar yazıldığında,

(i) T gerenine göre ;

$$T_l(T)\varphi(x') = (x'+1)^{2l} \varphi_{2l}\left(\frac{x'}{x'+1}\right) = (x'+1)^{2l} \sum_{n=-l}^{l} a_n \left(\frac{x'+1}{x'}\right)^{l-n} \tag{11}$$

ve

(ii) S gerenine göre;

$$T_l(S)\varphi(x') = (x')^{2l} \varphi_{2l}\left(-\frac{1}{x'}\right)^{l-n} = (x')^{2l} \sum_{n=-l}^{l} a_n \left(-\frac{1}{x'}\right)^{l-n} \tag{12}$$

elde edilir.

Ayrıca, $T_l(T)$ ve $T_l(S)$ $2l$ dereceli polinomlar uzayının elemanları olduğu kolayca anlaşılır. Bunun için $x' + 1 = sec^2\theta$ ve $\theta \in (0, 2\pi]$ olmak üzere

$$T_l T \varphi(x) = (sec^2\theta)^{2l} \varphi_{2l}(sin^2\theta) = (sec^2\theta)^{2l} \Sigma_{n=-l}^{l} a_n (sin^2\theta)^{l-n} \tag{13}$$

ve

$$T_l(S)\varphi(x') = (tg^2\theta)^{2l}\varphi_{2l}(-cot^2\theta) = (tg^2\theta)^{2l}\Sigma_{n=-l}^{l} a_n(-cot^2\theta)^{l-n} \qquad (14)$$

elde edilir. $\square$

Şimdi üçüncü sonucu verelim.

b ve d den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,
$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
ve $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ matrisleri için sırasıyla

$U(z) = z + 1$, $V(z) = \frac{1}{z}$, $W(z) = \frac{z}{z+1}$, $P(z) = -\frac{1}{z+1}$, ve $I(z) = z$ dönüşümleri karşılık gelir.

Teorem 3.2.3 $\Gamma(1)$ *homojen modüler grubunun temsilleri,* T_{2l} *çarpanlı* $2l$ *ağırlıklı otomorfik formdur.*

İSPAT. Yukarıdaki U, V, W ve P matrisler düşünüldüğünde, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
$U^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $W = UVU$ ve $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ dir.
Şimdi (2), (5) formülleri tekrar düşünüldüğünde,

$$T_l(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{2l}\varphi(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta})$$

elde edilir ve $g = U \in \Gamma(1)$, $\beta = b$, $\delta = d$, $\alpha = a$, $\gamma = c$ olarak seçildiğinde

$$T_{2l}(U)\varphi(z) = (bz + d)^{2l}\varphi_{2l}(\frac{az + c}{bz + d}) \qquad (15)$$

$$(a) \quad T_{2l}(U)\varphi(z) = (z+1)^{2l}\varphi_{2l}(\frac{z}{z+1}) = [U(z)]^{2l}\varphi(W(z))$$

$$= [U(z)]^{2l}(\frac{z}{z+1}) = [U(z)]^{2l} \sum_{n=-l}^{l} a_n(\frac{z}{z+1})^{l-n}$$

$$(b) \quad T_{2l}(V)\varphi_{2l}(z) = (-z)^{2l}\varphi_{2l}(-\frac{1}{z}) = [-I(z)]^{2l}\varphi_{2l}(V(z))$$

$$= z^{2l} \sum_{n=-l}^{l} a_n(-\frac{1}{z})^{l-n}$$

$$(c) \quad T_{2l}(W)\varphi(z) = \varphi_{2l}(U(z)) = \varphi_{2l}(z+1) = \sum_{n=-l}^{l} a_n(z+1)^{l-n}$$

$$(d) \quad T_{2l}(P)\varphi(z) = (-z+1)^{2l}\varphi_{2l}(\frac{1}{-z+1}) = (-z+1)^{2l}\varphi_{2l}(P^{-1}(z))$$

$$= (-z+1)^{2l} \sum_{n=-l}^{l} a_n(P^{-1}(z))^{l-n}$$

$$(e) \quad T_{2l}(I)\varphi(z) = \varphi_{2l}(I(z)) = \varphi_{2l}(z) = \sum_{n=-l}^{l} a_n(z)^{l-n}$$

$$(f) \quad T_{2l}(U^k)\varphi(z) = (kz+1)^{2l}\varphi_{2l}(\frac{z}{kz+1}) = (kz+1)^{2l}\varphi_{2l}(U^k(z))$$

$$= (kz+1)^{2l} \sum_{n=-l}^{l} a_n(\frac{z}{kz+1})^{l-n}$$

$$(g) \quad T_{2l}(P^2)\varphi_{2l}(z) = (-z)^{2l}\varphi_{2l}(\frac{-z+1}{-z}) = (-z)^{2l}\varphi_{2l}(P^2(z))$$

$$= (-z)^{2l} \sum_{n=-l}^{l} a_n(P^2(z))^{l-n}$$

$$(h) \quad T_{2l}(UVU)\varphi(z) = T_l(W)\varphi_{2l}(z) = \varphi_{2l}(z+1) = \varphi_{2l}(U(z))$$

$$= \sum_{n=-l}^{l} a_n(U(z))^{l-n} = \sum_{n=-l}^{l} a_n(z+1)^{l-n}$$

formülleri elde edilir.

$ad - bc = ad - cb$ eşitliğinden (15) eşitliği tekrar yazıldığında $k \geq 3$ olan k tamsayısı için

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \quad \text{için} \quad \varphi_{2l}(\frac{az+c}{bz+d}) = (bz+d)^{2l} T_{2l}(U)\varphi(z) \qquad (16)$$

eşitliği, poincare serisi düşünüldüğünde ise

$$T_{2l}(U) = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(1)} (z+1)^{2l}, (-\frac{3}{2} > l \in \mathbb{Z}^{-}) \qquad (17)$$

elde edilir.Toplam $a = 1, d = 1$ için $\Gamma(1)$ üzerinde alınır. Bu toplam yakınsaktır. Böylece (17) eşitliği bir otomorfik form olur. Başka bir deyişle, (16) eşitliği $f(T\tau) = (c\tau + d)^k v(T) f(\tau)$ ya benzerdir ve böylece (16) eşitliği ile $\Gamma(1)$' in temsilleri T_{2l} çarpanlı ve $2l$ ağırlıklı olan otomorfik form olur. $\square$

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4 Γ ' NIN NORMAL ALT GRUPLARININ KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde Γ' nın normal alt grupları çalışılacak ve normal alt grupları için bir karakterizasyon verilecektir. Γ modüler grup olsun. J.L. Brenner (1960), Γ' nın normal alt grupları $\Delta(m)$' yi

$$T^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisini içeren en küçük normal altgrubu olarak tanımlamıştır. $\Delta(m)$ 'nin seviyesi m den büyük olan temel denklik alt gruplarını içerip içermeyeceği sorusunu sormuştur. Reiner (1961)' de bu soruya asal sayının kuvveti olmayan m ler için olumsuz cevap vermiştir. Knopp (1963) $m \geq 6$ için $\Delta(m)$, Γ da sonsuz indeksli olduğundan, Γ' nın bir temel denklik altgrubunu içeremeyeceğini, Γ da sonlu indeksli olmak gerektiğini ispatladı. Daha sonraları Newman (1963)' de $m = 6$ için $\Delta(m)$' yi inceledi.

4.1 Γ ' nın Normal Alt grupları

$\Delta(m)$, T^m ile üretilen Γ' nın normal altgrubu olsun. Yani, $\Delta(m)$, T^m ihtiva eden Γ' nın en küçük normal altgrubudur. Açıktır ki, $\Delta(m) \subseteq \Gamma(m)$. Reiner (1960)' de Reiner iki soru üzerinde durmuştur.

(a) Her m için, $\Delta(m) = \Gamma(m)$ olur mu?

(b) Herbir m için, $\Gamma(mk) \subseteq \Delta(m)$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı var mıdır?

Yardımcı Teorem 4.1.1 *(Knopp, 1963)* $T^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *olmak üzere* $\Delta(m)$,

$$H = \{X^{-1}T^m X \mid X \in \Gamma\}$$

cümlesi ile üretilir.

İSPAT. H ile üretilen G grubunun Γ' nın bir normal altgrubu ve $G \subseteq \Delta(m)$ olduğundan elde edilir. □

Teorem 4.1.2 *(Knopp, 1963) $m \geq 6$ için, $\Delta(m)$, $\Gamma(m)$ de sonsuz indekse sahiptir. Temel denklik grubu Γ da sonlu indeksli olduğundan $m \geq 6$ için, $\Delta(m)$ temel denklik altgrubu içermez.*

İSPAT. Yardımcı Teorem 4.1.1 ve $1 \leq m \leq 5$ için, (Klein ve Fricke 1960, sayfa 267, 354-356), $\Delta(m) = \Gamma(m)$ bulunur.Ayrıca, (Klein ve Fricke 1960, sayfa 267, 356-360), $m \geq 6$ için, $\Delta(m)$, $\Gamma(m)$ de sonsuz indeksli olduğu görülür. □

4.2 $\Delta(6)$ Normal Altgrubu

Bu bölümde $m = 6$ için $\Delta(m)$' nin bir uygulamasını ve karakterizasyonunu inceleyeceğiz.

Tanım 4.2.1 *G bir grup ve $g, h \in G$ olsun. $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ elemanına g ve h elemanlarının ilk komutatoru denir. G' nin tüm komutator elemanları tarafından üretilen altgruba ilk komutator alt grup denir ve $G' = [G, G]$ ile gösterilir.*

Tanım 4.2.2 *G bir grup ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.*
$G^0 := G$
$G^{(n)} := [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$
olmak uzere G^2, G^3, ... şeklindeki alt gruplarada sırasıyla G' nin ikinci komutator, üçünçü komutator, ... denir.

Yardımcı Teorem 4.2.3 *(Newman,1963) G, α ve β elemanları tarafından üretilen bir grup olsun. N, $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ elemanını içeren G' nin bir normal altgrubu olsun. O zaman N, G' nin komutator altgrubu olan G'' yi içerir.*

İSPAT. $G, mod(N)$ değişmeli olduğu için sonuç açıktır. □

Yardımcı Teorem 4.2.4 *(Newman, 1963) Γ' rankı 2 olan ve*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ve \qquad \beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tarafından üretilen serbest grup olsun. Bu durumda, komutator $[\alpha, \beta]$ *için,*

$$[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dır.

İSPAT. Γ'' nın α ve β tarafından üretildiği Frasch, (1933)' den açıktır. Üreteçler genellikle

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak alınır. Böylece $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ eşitliği yardımıyla

$$[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu kolayca bulunabilir. □

Teorem 4.2.5 *(Newman, 1963)* $\Delta(6)$ *grubu* Γ*' nın ikinci komutator altgrubu olan* Γ'' *' dir.*

İSPAT. Yardımcı Teorem 4.2.3' de $G = \Gamma'$ ve $N = \Delta(6)$ alınırsa,

$$\Delta(6) \supset \Gamma''$$

elde edilir. Fakat $\Delta(6)$, $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ içeren Γ' nın en küçük normal altgrubu olduğu ve Γ'' de $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisini içerdiği için $\Gamma'' \supset \Delta(6)$ dır. Böylece

$$\Gamma'' = \Delta(6)$$

elde edilir. □

KAYNAKLAR

Apostol, T. M. (1990). *Modular functions and Dirichlet series in number theory.* New York: Springer-Verlag.

Brenner, J.L. (1960). The linear homogeneous group III. *Annals of Mathematics* 71(2), 210-223.

Bizim, O. (1991). *Modüler grup*, Yüksek Lisans tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Bizim, O. (1995). *Genişletilmiş modüler grup*, Doktora tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Bizim, O., and Baskan, T. (1996). Some properties of the modular group. *Turkish Journal of Mathematics*, 2, 17-20.

Frasch, H. (1933). Die erzeugenden der hauptkongruenzgruppen fur primzahlstufen. *Mathematische Annalen*, 108, 229-252.

Gelfand, I. M., and Naimark M.A. (1957). *Unitöre darstellungen der klassichen gruppen.* Translation of Russian publication of 1950. German: Acedemia-Verlag.

Hungerford, T. W. (1976). *Abstract algebra: an introduction.* New York: Springer.

Kırmacı, U.S., and Özdemir, M. E. (2000). On the modular functions. *International Journal of Applied Mathematics.* 2(12), 171-179.

Kırmacı, U.S., and Özdemir, M. E. (1998). On the modular forms. *Bulletin of Pure and Applied Science*. 17E(2), 337-340.

Klein, F., and Fricke, R. (1960). *Vorlesungen uber die theorie der elliptischen modulfunktionen*. 1, Leibziq: Johnson Reprint Corporation. 1890-1892.

Knopp, M. I. (1961). Construction of a class of modular functions and forms II. *Pacific Journal of Mathematics.* 11, 661-678.

Knopp, M. I. (1963). A note on subgroup of the modular group. *Proceeding of Mathematical Society.* 14(1), 95-97.

Lehner, J. (1964). *Discontinuous groups and automorphic functions.* American Mathematical Society. Rhode Island: Providence.

Lehner, J. (1966). *A short course in automorphic functions*. New York: Holt-Reinhart and Winston Inc.

Munkres, R. J. (2000). *Topology*. (Second Edition), New Jersey: Prentice Hall.

Newman, M. (1955). Structure theorems for modular subgroups. *Duke Mathematical Journal*, 22, 56-64.

Newman, M. (1963). A note on modular groups.*Proceeding of American Society*, 14(1), 124-125.

Reiner, I. (1961). Subgroups of the unimodular group. *Proceeding of American Mathematical Society*, 12, 173-174.

Özdemir, M. E. (1995). *Özel fonksiyonlar ve grup temsilleri*, Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Özdemir, M. E., Ocak, R., and Kırmacı, U. S. (2000). The undetachable representation of groups $Sl(2,C)$, K_2, $R = Gl(n,C)/Sl(n,C)$, $\overline{G} = (\frac{Gl(n,C)}{K_2})/(\frac{Sl(n,C)}{K_2})$. *International Journal of Applied Mathematics*, 3(2), 1385-1397.

Özdemir,M. E., Kırmacı, U.S., Ocak, R., and Dönmez, A. (2004). On automorphic and modular forms in the space of the homogeneous polynomials with degree $2l$ and applications to the specila matrix. *Applied Mathematics and Computations*, 1552, 897-904.

Schoeneberg, B. (1974). *Elliptic modular functions.* New York: Springer-Verlag.

ÖZ GEÇMİŞ

Selim ERTAŞ 1977 yılında Erzurum' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzurum' da tamamladıktan sonra 1996 yılında Atatürk Üniversitesi Erzincan Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı ve bu bölümden 2000 yılında mezun oldu. Aynı yıl başladığı meslek hayatına halen Erzurum Mecidiye Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak devam etmektedir. Evli olup Büşra ve Hayrunnisa adında iki kız çocuk babasıdır.