T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

TEKNOLOJİ DESTEKLİ ORTAMDA MATEMATİKSEL MODELLEME PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM SÜREÇLERİNİN ANALİZİ: BİLİŞSEL VE ÜSTBİLİŞSEL YAPILAR ÜZERİNE BİR AÇIKLAMA

Çağlar Naci HIDIROĞLU

İzmir
2015

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

TEKNOLOJİ DESTEKLİ ORTAMDA MATEMATİKSEL MODELLEME PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM SÜREÇLERİNİN ANALİZİ: BİLİŞSEL VE ÜSTBİLİŞSEL YAPILAR ÜZERİNE BİR AÇIKLAMA

Çağlar Naci HIDIROĞLU

Danışman
Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

İzmir
2015

YEMİN METNİ

Doktora tezi olarak sunduğum "Teknoloji Destekli Ortamda Matematiksel Modelleme Problemlerinin Çözüm Süreçlerinin Analizi: Bilişsel ve Üstbilişsel Yapılar Üzerine Bir Açıklama" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin Kaynak Dizini'nde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

29/06/2015

Çağlar Naci HIDIROĞLU

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Programında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

Üye : Prof. Dr. Şuur NİZAMOĞLU

Üye : Doç. Dr. Güney HACIÖMEROĞLU TABUK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aysun Nüket ELÇİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet KURT

Onay
Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

29/06/2015

Prof. Dr. Ali Günay BALIM
Enstitü Müdürü

T.C
YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
ULUSAL TEZ MERKEZİ

TEZ VERİ GİRİŞİ VE YAYIMLAMA İZİN FORMU

Referans No	10079430
Yazar Adı / Soyadı	ÇAĞLAR NACİ HIDIROĞLU
Uyruğu / T.C.Kimlik No	TÜRKİYE / 21704410414
Telefon	5067134478
E-Posta	caglar_naci@hotmail.com
Tezin Dili	Türkçe
Tezin Özgün Adı	Teknoloji Destekli Ortamda Matematiksel Modelleme Problemlerinin Çözüm Süreçlerinin Analizi: Bilişsel ve Üstbilişsel Yapılar Üzerine Bir Açıklama
Tezin Tercümesi	Analysing Problem Solving Processes of Mathematical Modelling in the Technology Aided Environment: An Explanation on Cognitive And Meta Cognitive Structures
Konu	Matematik = Mathematics ; Eğitim ve Öğretim = Education and Training
Üniversite	Dokuz Eylül Üniversitesi
Enstitü / Hastane	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Bölüm	
Anabilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı
Bilim Dalı	Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı
Tez Türü	Doktora
Yılı	2015
Sayfa	409
Tez Danışmanları	DOÇ. DR. ESRA BUKOVA GÜZEL 11729568740
Dizin Terimleri	Teknolojik öğrenme=Technological learning ; Matematiksel modelleme=Mathematical modelling ; Teknoloji destekli öğretim=Technology based instruction ; Temelli kuram yöntemi=Grounded theory method ; Biliş=Cognition ; Üstbiliş=Metacognitive
Önerilen Dizin Terimleri	
Kısıtlama	12 ay süre ile kısıtlı

Tezimin,Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi Veri Tabanında arşivlenmesine izin veriyorum. Ancak internet üzerinden tam metin açık erişime sunulmasının 03.07.2016 tarihine kadar ertelenmesini talep ediyorum. Bu tarihten sonra tezimin, bilimsel araştırma hizmetine sunulması amacı ile Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi tarafından internet üzerinden tam metin erişime açılmasına izin veriyorum.
NOT: Erteleme süresi formun imzalandığı tarihten itibaren en fazla 3 (üç) yıldır.

03.07.2015

İmza:..................................

ÖNSÖZ

Öncelikle katılımcı olarak çalışmamda yer alan matematik öğretmeni adaylarına; birlikte yaptığımız uygulamalarda ve problem çözüm süreçlerinde çalışmama zaman ayırdıkları, tüm çalışmalara içtenlikle gönüllü olarak katıldıkları ve video kaydı almama izin verdikleri için teşekkür ediyorum.

Doktora çalışmamın tez izleme komitesinde bulunan ve bu süreçte benden görüşlerini esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Şuur NİZAMOĞLU ve Doç. Dr. Güney HACIÖMEROĞLU TABUK'a ve tez savunma jürimde olmayı kabul eden veya değerli önerilerini sunan değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Mesut TABUK, Yrd. Doç. Dr. Aysun Nüket ELÇİ ve Yrd. Doç. Dr. Mehmet KURT'a ve arkadaşım Anıl KANDEMİR'e desteklerinden ve katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunuyorum. Yoğun tez çalışması sürecimde tezimi destekleyen ve bu sayede daha aktif ve verimli bir şekilde kendimi tezime verme imkanını bana veren TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu'na teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi akademik hayatımda ve tezimi hazırlama sürecinde de her zaman yanımda olan ve zor durumlarımda hep destek olarak beni teşvik eden canım, hayatımın anlamı eşim, daimi aşkım Yeliz ÖZKAN HIDIROĞLU'na tüm sevgimle teşekkür ederim. Öğretmen ailenin öğretmen çocuğu olarak büyüdüğüm hayatımda bana hep doğru yolda ilerlemeyi öğreten benden dualarını ve desteklerini eksik etmeyen canım annem Gülderen HIDIROĞLU'na, canım babam Hasan Doğan HIDIROĞLU'na ve bir kardeş ve bir dosttan çok fazlası canım kardeşim İsmail Mert HIDIROĞLU'na sevgilerimi ve saygılarımı gönderiyorum. Sizlerle olmak benim için çok büyük bir şans oldu hep.

Kendisiyle hem yüksek lisans hem de doktora aşamamda çalışmak nasip olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL'e tez aşamasında zor durumlarımı anlayışla karşıladığı, beni her zaman desteklediği, sabırla sorunlarıma çözüm ürettiği, farklı düşünebilmemde ve yeni kapıları açmamda beni yönlendirdiği için çok teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Tablo Listesi

Şekil Listesi

ÖZET

Teknoloji Destekli Ortamda Matematiksel Modelleme Problemlerinin Çözüm Süreçlerinin Analizi: Bilişsel ve Üstbilişsel Yapılar Üzerine Bir Açıklama

Çağlar Naci HIDIROĞLU

Araştırmanın amacı, teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm sürecinde ortaya çıkan bilişsel ve üst bilişsel yapıların açıklanmasıdır. Çalışmada öncelikle teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel yapılar süreci oluşturan alt basamaklar, temel bileşenler ve temel basamaklarla açıklanmıştır. Çalışmada bilişsel yapılarla birlikte bilişsel eylemleri etkileyen üst bilişsel yapılar ortaya konulmuş, bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasındaki ayrım dikkate alınmıştır. Araştırmada teknoloji destekli ortam ise Geogebra yazılımı, hesap makinesi, problem durumuyla ilgili verilmiş video, animasyon, fotoğraflar ve ekran alıntısı programı ile sağlanmıştır.

Araştırma nitel araştırma yöntemlerinden olan bir kuram oluşturma çalışmasıdır. Araştırmanın katılımcıları 2014-2015 eğitim-öğretim yılında bir devlet üniversitesinin ortaöğretim matematik öğretmenliği birinci sınıfında öğrenim gören gönüllü yirmi bir ortaöğretim matematik öğretmeni adayıdır. Uygulamanın öncesinde katılımcılarla bir dönem boyunca farklı matematiksel modelleme problemlerine yönelik uygulamalar gerçekleştirilmiş ve GeoGebra'nın yapısını öğrenebilecekleri farklı etkinlikler gerçekleştirilmiştir. Çalışmada çözümler öğrencilerin kendi istekleri doğrultusunda oluşturdukları üçer kişilik çalışma gruplarıyla gerçekleştirilmiştir. Veriler araştırmacıların tasarladığı üç matematiksel modelleme problemi için grupların çözüm süreçlerini ve sesli düşünmelerini (think aloud) içeren video çözümlemeleri, GeoGebra çözüm dosyaları, yazılı yanıt kağıtları ve araştırmacı tarafından alınmış hatırlatıcı ve gözlem notlarından derlenmiştir. Problemlerle birlikte öğrencilere problemler ile ilgili animasyon, video ve fotoğraflar da verilmiş ve kullanmak istemeleri halinde GeoGebra'nın da yüklü olduğu bir bilgisayar kendilerine tahsis edilmiştir. Verilerin analizinde kuram oluşturma veri analizine

bağlı kalınmış ve sürekli karşılaştırmalı analiz, açık, eksensel ve seçici kodlamadan yararlanılmıştır. Verilerin analizinde kodların analiz birimi genellikle satır olsa da kategorilerin ortaya çıkması ve bazı güçlüklerin daha net ortaya konulması amacıyla bazen de kelime veya durum olarak seçilmiştir. Analiz sonunda modelleme sürecini açıklayan bilişsel ve üst bilişsel eylemlere karşılık gelen kategoriler oluşturulmuş, biliş ve üst biliş arasındaki ayrıma vurgu yapılarak kategoriler arasındaki ilişkiler açıklanmış ve teknoloji ile zenginleştirilmiş bilişsel ve üst bilişsel yapılara ilişkin kuramlar ve bu kuramları açıklayan modeller ortaya konulmuştur.

Verilerden elde edilen bulgular doğrultusunda süreç modelinde dokuz temel bileşen, dokuz temel basamak ve bu dokuz temel basamağı açıklayan elli beş alt basamak temel özellikleriyle ortaya konulmuş ve aralarındaki ilişkiler açıklanmıştır. Modelleme sürecindeki üst bilişsel yapılara bakıldığında üst bilişsel planlama boyutu altı, üst bilişsel izleme boyutu dört, üst bilişsel değerlendirme boyutu yedi ve üst bilişsel tahmin boyutu ise beş kategori ile açıklanmıştır. Modelleme sürecindeki üst bilişsel eylemlerin bilişsel eylemlerle birlikte ortaya çıktığı; fakat bilişsel eylemlerin bulunduğu ortamlarda üst bilişsel eylemlerin bulunmasının gerekmediği görülmüştür. Modelleme sürecindeki üst bilişsel eylemler bilişsel eylemleri düzenleyen, basamaklar arasındaki düzensiz geçişleri sağlayan bir rol üstlenmiştir. Üst bilişsel yapılar tüm temel basamaklarda ortaya çıkmış ve özellikle temel basamaklar ve alt basamaklar arasındaki geçişlerde rol oynamışlardır. Üst biliş süreçte bilişsel eylemleri düzenlerken ve etkililiğini arttırırken üst bilişsel eylem, üst bilişsel yapı ve üst bilişsel eylem grupları olarak üç farklı kavram karşımıza çıkmıştır. Teknoloji modelleme sürecindeki temel basamakları ve bileşenlerini değiştirmemekle birlikte alt basamakların ve üst bilişsel yapıların oluşumunda hem merkezi hem de destekleyici bir rol üstlenmiştir. Problemlerle birlikte verilen animasyon, video ve fotoğraflar çözüm sürecinde uygun bir çözüm stratejisinin önemli birer elemanları olmuşlardır. Gerçek yaşam çözümlerinden kaynaklanan işlemlerin karmaşıklığı teknoloji sayesinde en aza indirilmiştir. GeoGebra'nın cebirsel ve geometrik temsiller arasındaki ilişkiyi gösterme gücü süreçte düzenli olarak karşılaştırılmaların yapılmasında, sürekli kontrolün kolaylıkla gerçekleştirilmesinde, farkındalıkların arttırılmasında, zor sayısal değerlere ve matematiksel ifadelere kolaylıkla ulaşılmasında ve onların analiz edilmesinde etkin rol oynamıştır.

İlerleyen çalışmalarda matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan bilişsel ve üst bilişsel eylemlerden yararlanılarak, modelleme uygulamalarıyla hazırlanmış öğrenme ortamlarının değerlendirilmesi için dereceli puanlama anahtarları hazırlanabilir. Öğretimsel modelleme bakış açısıyla matematiksel modelleme problemleri veya etkinlikleri için farklı bir sınıflandırmaya gidilebilir. Süreçteki üst bilişsel eylemler mikro düzeyde daha ayrıntılı olarak incelenebilir. Teknolojinin sürece etkisi farklı boyutlarda ele alınabilir veya farklı matematik yazılımlarının sürece etkisi açıklanabilir. Grup çalışmasının zihinsel sürece etkisine ve bireysel modelleme sürecinden farklılıklarına ilişkin nitel araştırmalar da alan yazın için önemli birer araştırma konusu olarak görülmektedir. Öğrenme düzeyindeki gelişimi sağlamak için teknoloji ve matematiksel modellemenin entegre edildiği zengin zihinsel süreci ortaya çıkaran öğrenme ortamları tasarlanmalıdır. Bunun için de öncelikle bu öğrenme ortamlarını yaratacak öğretmenlerin hem teknolojiye hem de matematiksel modellemeye hakim bireyler olarak yetiştirilmesini gerektirmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Modelleme, Teknoloji Destekli Matematiksel Modelleme, Biliş, Üst Biliş, GeoGebra, Matematik Öğretmen Adayı, Birlikte Çalışma, Kuram Oluşturma.

ABSTRACT

Analysing Problem Solving Processes of Mathematical Modelling in the Technology Aided Environment: An Explanation on Cognitive And Meta Cognitive Structures

Çağlar Naci HIDIROĞLU

In the present study, it is aimed to explain cognitive and metacognitive structures occurred in modelling process within a technology enhanced environment. Cognitive structures in mathematical modelling process within a technology enhanced environment were explained with sub-stages, main components and main stages. In addition, metacognitive structures that affect cognitive activities were explained in the present study, and the difference between cognitive and metacognitive activities was also taken into account. Technology enhanced environment was designed with GeoGebra software, calculator, video, animation, photos and screen capture programme which were given with problem situation.

The design of this study is grounded theory which is one of the qualitative research methods. The participants of the study are volunteer twenty secondary mathematics programme freshman students. Before the application, activities related to various mathematical modelling problems and various activities to understand the nature of GeoGebra were carried out with participants within duration of one semester. In data analysis, it was adhered to data analysis of grounded theory, constant comparative analysis, open, axial and selective coding was benefited. An analysis unit of codes in data analysis was generally a sentence but when to show in detail having some difficulties and to form categories sometimes a word or a situation was selected. At the end of the analysis, categories were formed corresponding cognitive and metacognitive activities that can explain modelling process, the relation among categories was explained by stressing the difference between cognitive and metacognitive, and lastly theories relating to technology enriched cognitive and metacognitive structures and models that explain these

theories were presented. Solutions were carried out with groups which consisted of three students who want to work with each others. Data were collected from video transcriptions which involve groups' solution processes and thinking aloud for three mathematical modelling problems designed by researchers. Data were also collected from GeoGebra solution files, written solution papers and researchers' memos. Students were supplied with animation, video and photos related to problems and when they want to use a computer with GeoGebra installed beforehand, a computer was also given with problems.

According to the findings obtained from the data, nine main components, nine main stages and fifty five sub-stages that explain these nine main stages and relations among them were presented with key features. When metacognitive structures in modelling process were examined, each dimension was explained with a number of categories such as; metacognitive planning dimension with six categories, metacognitive monitoring dimension with four categories, metacognitive evaluation dimension with seven categories and metacognitive prediction dimension with five categories. Metacognitive activities occurred with cognitive activities in modelling process; however, it was not a must for metacognitive activities to occur in the areas of cognitive activities occurred. Metacognitive activities in modelling process played a key role in regulating cognitive activities and irregular transitions among stages. Metacognitive structures occurred in all main stages and specifically had a role in transitions among main and sub-stages. While metacognition was regulating and improving effectiveness of cognitive activities in modelling process, three different terms as metacognitive activity, metacognitive structure, and metacognitive activity groups were seen. Technology has not changed main stages and components in modelling process, but it had both a central and supportive role in forming of sub-stages and metacognitive structures. Animation, video and photos given with the problems were seen as an important factor of appropriate solution strategy in solution process. The complexity of calculations arisen from real world solutions was minimised thanks to technology. The strength of GeoGebra in showing the relationship between algebraic and geometric representations played an active role in making comparisons on a regular basis in process, in realization of the continuous control easily, in increasing awareness, in accessing difficult numerical values and mathematical expressions easily, and in analysing them.

In further studies with the help of cognitive and metacognitive activities occurred in mathematical modelling process rubrics can be designed considering cycles to evaluate learning activities on modelling problems. A different classification for mathematical modelling problems and activities can be raised with instructional modelling perspective. Metacognitive activities in process can be examined in detail as in micro levels. The effect of technology on process can be discussed with different dimensions or the effect of various mathematical softwares on process can be explained. Qualitative studies on the effect of group work on mental process and its' differences from the individual modelling process are seen as important research topics for the literature. Learning environment which integrate technology and mathematical modelling and reveal a rich mental process should be designed to ensure the development of education. To this end firstly teachers who can create such learning environments should be trained as individuals who both have knowledge in technology and mathematical modelling.

Keywords: Mathematical modelling, Technology Enhanced Mathematical modelling, Cognition, Metacognition, GeoGebra, Mathematics Teacher Candidate, Collaborative Working, Grounded Theory.

BÖLÜM I

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliğinde öğrenim gören 1. sınıf öğrencilerinin teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecinde sergiledikleri bilişsel ve üst bilişsel eylemlerinin incelendiği bu çalışmada, öğrencilerin bilişsel ve üst bilişsel düşünceleri GeoGebra, video, animasyon ve fotoğraflarla desteklenmiş bir modelleme çözüm süreci içerisinde ele alınmaktadır. Çalışmada kullanılan matematiksel modelleme problemleri Berry & Houston'ın (1995) modelleme sınıflandırması dikkate alınarak hazırlanmış ve üst bilişsel yapılar planlama, izleme, değerlendirme ve tahmin boyutları çerçevesinde yapılandırılmıştır.

Birinci bölümde doktora tez çalışmasının temel kavramları olan matematiksel modelleme ve teknolojiye ilişkin kısa bir bilgilendirmenin ardından bu çalışmanın yapılmasına neden olan probleme değinilmektedir. Devamında tez çalışmasının alandaki hangi boşlukları dolduracağı ilgili alan yazına sağlayacağı katkılar ele alınmakta ve çalışmanın yapılmasındaki amaç ve çalışmanın önemine dikkat çekilerek problem cümlesine, alt problemlere, sayıtlılara, sınırlılıklara ve tez çalışmasının ana çerçevesini oluşturan kavramlara ilişkin tanımlara yer verilmektedir.

İkinci bölümde, İlgili Yayın ve Araştırmalar başlığı altında, öncelikle tez çalışmasının odağını oluşturan matematiksel modellemedeki bilişsel süreci açıklayan çalışmalara yer verilmektedir. Çalışmalar ele alınırken aralarındaki önemli farklılıklara ve benzerliklere vurgu yapılmakta ve tarihsel akış önemsenmektedir. Ardından matematiksel modelleme sürecindeki üst bilişsel eylemlere ilişkin ilgili alan yazında yer alan çalışmalara değinilerek, okuyucuların biliş ve üst biliş arasındaki ayrıma dikkat çekmesine ve bulgularda sunulacak kodlara ilişkin farkındalığın artmasına çalışılmaktadır. Bu tez çalışmasında, teknoloji destekli matematiksel modelleme sürecindeki yaklaşımları, stratejileri, bilişsel düşünceleri, ve gerekli modelleme yeterlikleri çerçevesinde karşılaşılan güçlükleri açıklayan alan yazındaki çalışmalar da bu bölümde sunulmaktadır.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, öncelikle matematiksel modelleme problemlerinin tasarlanma sürecinde dikkate alınan etkenler kuramsal dayanaklarla birlikte açıklanmaktadır. Devamında kapsam geçerliğini sağlamak amacıyla Berry & Houston'ın (1995) sınıflandırması dikkate alınmakta ve bu sınıflandırmanın yapısından bahsedilmektedir. Devamında tez çalışmasının alan yazındaki yerinin ve temel yaklaşımının açıklanması amacıyla alan yazındaki modelleme perspektiflerinden kısaca bahsedilmekte ve çalışmansın hangi perspektifle ele alındığı kuramsal dayanaklarla açıklanmaktadır. Kuramsal çerçevenin diğer kısmında, biliş ve üst biliş arasındaki ayrımın tutarlı ve güvenilir bir şekilde yapılabilmesi ve kategorilere ilişkin okuyuculara daha kapsamlı bir anlayış sağlaması için tez çalışmasında dikkate alınan üst biliş kuramsalı okuyuculara sunulmaktadır. Son bölümde ise, teknoloji ve grup çalışmasının matematiksel modelleme sürecindeki zihinsel eylemlere etkisine ilişkin alan yazında var olan ve araştırmaya temel olan önemli düşüncelere yer verilmektedir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, öncelikle araştırmanın temel felsefense uygun olan nitel araştırmalardan kuram oluşturmaya ve tezin işleyişi için seçilmesinin nedenlerine değinilmektedir. Ardından katılımcıların seçiminde kullanılan örneklem türüne ve kuram oluşturma çalışması için tercih edilme sebeplerine ve katılımcıların özelliklerine ilişkin bilgilere yer verilmektedir. Araştırmanın veri toplama araçlarını oluşturan gözlemlere ilişkin gözlem notlarına, video kaydına alınan derslere ilişkin transkript belgelerine ve derslerden sonra gerçekleştirilen görüşmelerin ses kayıtlarına ilişkin transkript belgelerine ve verilerin kuram oluşturma yaklaşımı bağlamındaki çözümleme sürecinde kullanılan tekniklere ve kuramsal düşüncelere ilişkin bilgilere yer verilmektedir. Araştırmanın güvenirliğini sağlamak amacıyla yapılan işlemler ve araştırmacıların rolü de bu bölümde yer almaktadır.

Bulgular ve Yorumlar başlığı altında, dördüncü bölümde, araştırma verilerinin analizleri sonucu ortaya çıkan teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel kodlar çerçevesinde oluşturulmuş kategorilere ve boyutlara ilişkin açıklamalarda bulunulmaktadır. Her bir kategori için kategorinin ne anlama geldiği, hangi sebepler sonucunda ortaya çıktığı, ne gibi zihinsel eylemlere neden olduğu, nasıl ilerlediği modelleme sürecinin transkript metinlerinden elde edilen kesitlerle, bu kesitlerde oluşturulan dokümanlar ve gözlem notlarından kesitlerle ayrıntılı olarak açıklanmaktadır. Bu bölümde teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel eylemlere göre hem bilişsel süreç modeli ortaya koyulmakta hem de üst bilişsel eylemler kuramsal bir bütünlükle ele alınmaktadır. En son bölümde ise, söz konusu modelleme sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin süreçteki dağılımına ve ne kadar sıklıkla karşılaşıldıklarına ilişkin verilere ve yorumlara yer verilmektedir.

Son bölüm olan Sonuç, Tartışma ve Öneriler bölümünde, teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel eylemlere ilişkin ortaya koyulan kategoriler, ilgili alan yazın bağlamında değerlendirilmekte, tartışılmakta ve çalışmalardaki farklılıklar ve nedenleri irdelenerek, tez çalışmasını diğer çalışmalardan ayıran sonuçlara vurgu yapılmaktadır. Son olarak ise, elde edilen sonuçlar doğrultusunda, ileriki çalışmalar ve matematik eğitimindeki niteliğini arttırma adına öneriler sunulmaktadır.

GİRİŞ

İnsanlar yaşamları boyunca öncelikle evrende var olma çabası içerisinde bulunmakta ve var olabilmek için çevrelerindeki günlük yaşam problemleriyle baş edebilecek yollar aramaktadırlar (Dönmez, 2002). Tarihsel gelişime bakıldığında var olmayı garantileyen insanların farklı bir çaba içerisinde bulundukları ve daha kaliteli bir yaşamı arzuladıkları görülmektedir. Yaşam kalitelerini yükseltmek için insanlar doğadaki olayları kavrayarak onlara yön vermekte ve doğal olaylardan yararlanarak da teknolojik icatlar gerçekleştirmektedirler (Altun, 2011). Bilimin etkisiyle yapılan bu teknolojik icatlar insanlık tarihinin belli bir seviyeye ulaşmasında her zaman itici bir güç olmakta ve insanların yaşadıkları hayata yön vermesini kolaylaştırmaktadır (Baki, 2008; McClellan III & Dorn, 2013). Bilim ve teknoloji arasındaki bu güçlü bağ 20. yy'da bilimin giderek daha fazla anlaşılmasıyla ve teknolojinin bilime olan etkisinin daha güçlü hale gelmesiyle daha iç içe bir süreci oluşturmaktadır

(McClellan III & Dorn, 2013). Bilimde önde olan toplumların teknolojide de diğer ülkelere göre daha ileride olması ve gelişmiş ülkelerin teknolojideki bu liderliklerinin bilimdeki ilerleyişlerinde daha büyük sıçramalara olanak sağlaması çağımızda teknolojiyi hayatımızın her yerinde önemli bir unsur haline getirmektedir.

Çağdaş ülkelerde bilimdeki ve teknolojideki gelişim, o ülkelerde verilen eğitimin etkililiği ve kalitesiyle doğrudan ilişkili olmaktadır (Karasar, 2004). Değişimi benimseyen ve onu içerisinde barındıran ülkeler her açıdan katlanarak güçlenirken, değişime ayak uydurmaya çalışan ülkelerin de bilim ve teknolojideki gerekli gelişmeleri sağlayabilmesi için ülkelerindeki verilen eğitimi sorguladıkları görülmektedir. Okullardaki öğretimin gerçek hayat ile uyumsuz olması, öğrencilerin okulda aldıkları bilgi ve becerileri gerçek hayatta kullanmada ve günlük yaşam problemlerini çözmede yetersiz kalmaları, problemler üzerinde ayrıntılı düşünmek ve üzerinde farklı stratejiler kurmak yerine bir an önce sonuca gitmeye çalışmaları (Mousolides, Christou & Sriraman, 2006; NCTM, 2000; Schodenfeld, 1992; Turner, 2007; Vershaffel, De Corte and Lasure, 1999) günümüz eğitim sisteminde kendisine yer bulacak temel yenilikleri ve vazgeçilmez unsurları beraberinde getirmektedir.

Eğitimde davranışçı paradigmanın önemini yitirmesiyle ön plana çıkan bilişsel ve yapılandırmacı paradigma, eğitimcilerin öğrenmeye yönelik bakış açılarında önemli değişiklikler meydana getirmiştir. Bu doğrultuda ortaya konan bilişsel kuramların, insanın öğrenmesinde çevrenin etkilerine odaklanan yaklaşımlardan uzaklaşarak, öğrenen üzerine odaklanmayı seçtikleri görülmektedir (Schunk, 2008). Diğer taraftan, son yıllarda öğrenme-öğretme sürecinde yapılandırmacı yaklaşımının etkisi ile artık öğrenme kavramına bakış tümüyle değişmektedir. Bu paradigma ile öğrenme; uyarıcı-tepki bağı kurmanın ötesine geçerek; öz düzenleme, yansıtma ve soyutlama yoluyla kavramsal yapıların oluşturulması süreci olarak tanımlanmaktadır (von Glasersfeld, 1995). Yapılandırmacı paradigma, bilişsel ve üst bilişsel aktivitelere ve bu aktivitelerin gerçekleşmesi için gerekli becerilere eğitimin temel konuları arasında yer vermektedir.

Günümüz eğitim sistemindeki yeniliklerin temel hedefinde öğrencilerin yarının yaşam koşullarına hazır olacak, değişen ve farklılaşan dünya koşullarında kendi ihtiyaçlarını karşılayarak modern dünyaya uyum sağlayacak şekilde yetiştirilmesi yatmaktadır (MEB, 2013). Değişime ayak uydurabilmemiz için matematiği anlayabilen, günlük yaşamında matematik bilgisini ve matematiksel becerilerini kullanabilen, teknolojiden anlayan ve gerçek yaşam durumlarına yanıt verirken teknolojiden en iyi şekilde faydalanabilen insanlara ihtiyaç duyulmaktadır (Ang, 2010; Lingefjärd, 2006). Günümüzdeki hakim felsefi yaklaşımla bunu sağlamanın en temel yolu öğretimde gerçek yaşam ve teknolojinin iç içe olduğu öğrenme ortamlarının oluşturularak öğrencilerin gerekli bilişsel, üst bilişsel, duygusal ve psikomotor becerileri kazanmalarına veya geliştirmelerine zemin hazırlayacak zengin ortamları yaratmaktır (Lingefjärd, 2002; Baki, 2008; Abramovich, 2007). Günlük yaşamda gerekli bilişsel ve üst bilişsel yeterliliklere sahip, teknolojiyi etkin olarak kullanan bireylerin geleceği şekillendirmede daha etkin roller alacağı kaçınılmazdır.

Problem Durumu

Baki (2008), geleneksel öğretim anlayışında matematiğin birbirinden kopuk, günlük yaşam ihtiyaçlarından uzak, değişmez, kesin, soyut kurallardan ve ayrı ayrı öğrenilmesi gereken denklemlerden oluşan bir uğraş alanı olarak algılandığını ifade etmekte, 21. yy'da bu şekilde öğrenciye sunulacak bir matematik öğretiminin istenilen amaca hizmet etmesinin mümkün olmayacağını vurgulamaktadır. Bu nedenle eğitim, ülkelerdeki çağın gereksinimlerini karşılamalı ve teknolojinin gerçek yaşamda etkili bir şekilde kullanılabilmesi için insanları gerekli bilgi ve becerilerle donatmalıdır. Eğitimdeki başarıda insanların gerçek yaşamdaki problemlere gerçek yaşamdaki koşullara ayak uydurarak yanıt vermeleri önemlidir (Ang, 2010). Son 20 yıldır, teknoloji çağındaki matematik eğitimindeki yenilikler ve paradigma dönüşümleri dikkate alındığında, iki temel kavramın eğitimin hedeflerine ulaşmasında büyük önem taşıdığı görülmektedir. Bunlardan biri, matematiksel modelleme becerisi diğeri ise teknoloji kullanımıdır. Türkiye'de 2013'de uygulamaya konulan Ortaöğretim (9-12. Sınıflar İçin) Matematik Dersi Öğretim

Programı'nda bu iki kavrama ayrı ayrı vurgu yapılmaktadır. MEB'in (2013) ortaöğretim matematik dersi öğretim programında, geliştirilmesi hedeflenen matematiksel beceri ve yeterliliklerden birisini "matematiksel modelleme ve problem çözme", diğerini "bilgi ve iletişim teknolojilerini (BİT) yerinde ve etkin kullanma" olarak ifade ettiği görülmektedir.

Matematiksel modelleme ile teknolojinin tarihsel etkileşimine bakıldığında birbirleri için büyük önem taşıdıkları göze çarpmaktadır. İnsanlar yaşamlarındaki olayların matematiksel modelleri üzerinde çalışarak yeni icatlara varabilecek düşünceler ortaya çıkarmakta ve teknolojinin gelişmesine olanak sağlamaktadır (Altun, 2011; Baki, 2008). Elde edilen teknoloji de bilimin gelişimine ve yeni matematiksel modellerin üzerinde çalışılarak yeni icatların gerçekleştirilmesine zemin hazırlamaktadır (Dönmez, 2002).

Teknoloji çağının gereksinimlerine bakıldığında, matematik eğitiminin temel hedeflerinden biri de öğrencilere matematiksel yatkınlık kazandırmaktır (Altun, 2011). Bu doğrultuda De Corte (2004) öğrencilerin matematik yapmaya eğilim kazanmalarının sağlanarak, gerçek yaşam durumlarındaki olayları sorgulama, teknolojiyi etkili kullanma, bilişsel olarak kendilerini düzenleme, problem çözme stratejilerini kullanma becerilerinin geliştirilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. 21. yy'daki matematik, eskisi gibi öğrenilmesi gerekli soyut kavramlar ve beceriler bütünü olarak görülmemekte; gerçek yaşam olaylarının modellenmesini temel alan problemleri çözme ile oluşan bilgi ve becerilerin toplamı olarak dikkate alınmaktadır (Altun, 2011). Matematik eğitimi, toplumdaki büyük bir kitleyi matematik yönünden eğiterek sanayi, teknoloji ve günlük yaşamdaki diğer alanların ihtiyaç duyduğu elemanları yetiştirmelidir (Baki, 2008).

Çağın gerek duyduğu insanların sahip olması gereken bilgi ve beceriler düşünüldüğünde, birçok araştırmacı (Berry & Houston, 1995; Blomhøj & Jensen, 2007; Blum & Niss, 1991; Ang; 2010; English & Doerr, 2004; Borromeo Ferri, 2006; Freudenthal, 1991; Kaiser; 2005; Lesh & Doerr, 2003; Lingefjärd, 2000; Maaβ, 2006; Schodenfeld, 1994 gibi) açık uçlu, sıra dışı veya gerçek yaşamda hep karşılaşılan fakat fark edilemeyen ve öğrencileri belli kalıplara hapsetmeyen gerçek yaşam problemlerinin, öğrencilerin okul dışında ve gelecekteki hayatlarında problem çözme becerisi gelişmiş bireyler olarak yetişmelerini sağlayacağına inandıkları için matematiksel modelleme problemleri üzerinde son 20 yıldan bu yana önemli araştırmalar yapmaktadırlar.

20. yy.'ın sonlarından itibaren değişen paradigma ile eğitimin felsefi anlayışına direk hizmet eder konuma gelen ve matematik eğitiminin temel kavramlarından biri olarak dikkat çeken matematiksel modelleme problemleri, öğrencileri değerlendirme sürecinde etkili bir araç olduğu gibi (Borromeo Ferri, 2012; Peter Koop, 2006); öğrenme sürecinde etkinlik veya problem olarak kullanılarak da, öğrencilerin gerekli bilgi ve becerilerini geliştirmeleri için onlara zengin bir bilişsel ve üst bilişsel süreci içeren (Borromeo Ferri, 2006; Lesh & Doerr, 2003; Stillman, Galbraith, Brown & Edwards, 2007) öğrenme ortamlarını sunarak öğrenme sürecinin en etkili anahtarlarından biri konumundadır.

En genel anlamıyla matematiksel modelleme, gerçek yaşamdaki bir problemin matematiksel olarak formüle edilerek matematiksel modeller yardımıyla çözülmesini ve matematiksel işlemlerle elde edilen çözümün tekrar gerçek yaşam durumuna göre yorumlanmasını içeren karmaşık bir süreçtir (Berry & Houston, 1995; Lingefjärd, 2006). Çözüm için gerekli olan ve matematiksel modelleme süreci içerisinde oluşturulan matematiksel model, gerçek yaşam durumunu açıklayabilen, onu matematiksel olarak ifade edebilen ve benzer durumlardaki daha karmaşık sistemlerin davranışlarını tahmin edebilen elemanlar (değişken, sabit, parametre) sistemi, işlem, ilişkiler ve kurallar bütünüdür (Doerr & English, 2003; Lesh & Harel, 2003; Richardson, 2004).

Matematiksel modellemenin öğrenciler için zengin bir zihinsel süreci içerdiği (Blum & Niss, 1999) düşünüldüğünde, Lingefjärd (2000) teknolojinin matematik eğitiminde kullanılmasına yönelik pozitif tepkileri de dikkate alarak, teknolojinin matematiksel modelleme sürecine etkisini incelemektedir. Bu doğrultuda Lingefjärd (2000) teknoloji sayesinde öğrencilerin matematiksel modelleme sürecinde gereksiz işlemlerle uğraşmadıklarını ve bu durumun da onların zihinsel yorgunluk yaşamalarını engellediğini ifade etmektedir. Teknolojideki hızlı gelişim ve teknolojinin eğitim üzerindeki etkisinin gün geçtikçe artması (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis and Lavicza, 2008) ve daha nitelikli, yeni dinamik matematik ve geometri yazılımlarının geliştirilmesi teknolojinin matematiksel modelleme sürecine olan etkisine yönelik araştırmalarının önemini daha da arttırmaktadır.

Araştırmalar incelendiğinde, matematiksel modellemenin matematik öğretim programlarında daha etkin bir role sahip olmasına rağmen, hala matematik derslerinde gerçek modelleme problemlerinin nadir olarak kullanılmakta olduğu (Blum, 2002; Mousolides, Christou & Sriraman, 2006; Turner, 2007) ve matematiksel modelleme hakkında geniş çapta araştırma olmasına rağmen matematiksel modellemeyi bilişsel yaklaşımla ele alan araştırmalara yeterince önem verilmediği görülmektedir (Blomhøj & Jensen, 2007; Borromeo Ferri, 2006; Kaiser, 2005; Peter Koop, 2004). Teknolojinin matematiksel modelleme sürecine olan etkisine yönelik matematiksel modelleme çalışmalarına (Abramovich, 2007; Barbosa, 2008; Ang, 2004; 2006; 2010 Galbraith, Stillman, Brown & Edwards, 2007; Hıdıroğlu, 2012; Hıdıroğlu ve Bukova Güzel, 2013; 2014; Lalinská & Majherová, 2010; Lingefjärd, 2000; 2002; 2013; Mousoulides, Chrysostomou, Pittalis and Christou, 2010; Siller & Greefrath, 2010) son on yıldır ağırlık verilmeye başlanmaktadır. Bunun yanında matematiksel modelleme sürecindeki zihinsel aktiviteler olan bilişsel ve üst bilişsel aktiviteler arasındaki ayrım ve ilişkiyi ortaya koyan çalışmaların olmadığı (Schoenfeld, 1992; Maaβ, 2006; Stillman, Galbraith, Brown and Edwards, 2007) göze çarpmaktadır. Literatürdeki bu eksiklikler dikkate alınarak doktora tez çalışmasında, teknoloji destekli ortamda (GeoGebra yazılımı, video, animasyon ve fotoğraf) matematiksel modelleme problemlerinin çözüm sürecinde meydana gelen bilişsel ve üst bilişsel yapılar açıklanmıştır. Bu doğrultuda, bilişsel ve üst bilişsel süreçler ortaya koyularak birbirleri arasındaki ilişkiler vurgulanmıştır. Kuram oluşturma çalışması çerçevesinde yürütülen araştırmada elde edilen bulgular yardımıyla bilişsel ve üst bilişsel süreci açıklayan iki ayrı kuramsal yapı oluşturulmuştur.

Amaç ve Önem

70'lerden itibaren matematik, fizik ve kimya eğitimindeki önemi vurgulanmaya başlanan (McLone, 1976) ve 90'ların sonlarına doğru farklı ülkelerde önemi oldukça artan matematiksel modellemeye Almanya, Amerika, Avustralya, İngiltere, İsveç, Finlandiya, Singapur, Çin (Hong Kong), Japonya, Tayvan ve daha pek çok ülkede ilköğretimden başlayıp (sayılan ülkelerden sadece Türkiye'de ortaokul programında matematiksel modellemeye yer verilmemektedir.) ortaöğretimin sonuna kadar öğretim programlarında kapsamlı bir şekilde yer verilmeye başlandığı görülmektedir (Ärlebäck, 2009; Blomhøj & Kjeldsen, 2006; Blum, 2002; Borromeo Ferri, 2009; Galbraith, Stillman, Brown & Edwards, 2007; Lingefjärd, 2000; 2006; Maaβ, 2006; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000; Niss, 1989). Farklı ülkelerdeki modelleme üzerine yapılan çalışmaların ardından ülkemizde de, yenilenen 2013 yılındaki ortaöğretim matematik dersi öğretim programında 2005'teki gibi matematiksel modellemeye önemli bir yer ayrılmaktadır. MEB (2013) matematik dersi öğretim programında öğrencilerin öğrenme-öğretme sürecinde aşağıdaki süreçleri yaşamalarının onların matematiksel yeterliklerinin güçlü ve derin bir gelişimine yardımcı olacağı ifade etmektedir:

- Merak, sebep-sonuç dahilinde sorgulama ve keşfetme,
- Değişkenler arasındaki ilişkileri gözlemleme,
- Özel durumlardan hareketle genellemelere ulaşma,
- Matematiksel yapıların ortak özelliklerinden yola çıkarak soyutlama yapma,
- Verileri sınıflandırma, analiz etme ve yorumlama,
- Matematiği, modelleme ve problem çözme sürecinde aktif olarak kullanma,
- Yeni bilgileri mevcut bilgilerle ilişkilendirme,
- Ulaşılan sonuçları matematiksel dille ifade etme, gerekçelendirme ve paylaşma,
- Bilgi ve iletişim teknolojilerinden aktif olarak yararlanma.

Tüm bu amaçlar dikkate alındığında öğrenme ortamlarında etkili bir şekilde kullanılacak matematiksel modelleme problemlerinin öğrenciler için yukarıda belirtilen uygun süreçleri sağlayacağı düşünülmektedir. Bununla birlikte teknolojinin entegre edileceği modelleme etkinlikleri ve problemleri öğrenme ortamlarında zengin bir bilişsel ve üst bilişsel süreci ortaya çıkarmada ve öğrencilerin etkili matematiksel öğrenmelerinin sağlanmasında uygun ortamlar yaratacaktır.

Pólya (1945) ve Turner (2007) öğrencilerin okulda müfredat kapsamında ele alınan konularda elde ettikleri bilgileri günlük yaşamda karşılaştıkları problemler içinde oldukça az kullandıklarını ve matematiğin yaşamda oynadığı rolü onların anlayabilmesi gereken durumlarda öğrencilerin zorluklarla karşılaştığını vurgulamaktadır. Turner'a (2007) göre, bu kapsamda hazırlanan PISA' daki soruların birçoğu tam bir matematiksel modelleme etkinliği biçiminde olmasa da modelleme sürecinin bazı evreleriyle ilişkilidir ve soruların güçlük düzeyi de modelleme basamaklarını içerme seviyesiyle orantılı biçimde artmaktadır. Bu yönüyle öğrencilerin uluslararası sınavlarda ve proje çalışmalarında başarılarının arttırılması için öğrencilerin matematiksel modelleme problemleriyle baş başa kalacağı zengin ortamların yaratılması büyük önem taşımaktadır (Turner, 2007).

Lesh & Doerr (2003) iyi bir modellemecinin sahip olması gereken becerilerin neler olduğu sorusuna kabul edilebilir bir yanıt verebilmek için modelleme sürecindeki safhaların net ve ayrıntılı olarak tanımlanmasının ve açıklanmasının gerekli olduğunu ifade etmektedir. COM^2 Projesi' nde ise matematiksel modelleme becerisinin belli bir bağlamda ele alınan matematiksel modelleme sürecinin tüm yönleriyle bağımsız olarak ve anlaşılır bir biçimde gerçekleştirmek olduğu ifade edilerek matematiksel modelleme sürecinin önemi açıklanmaktadır.

Ülkemizde matematiksel modelleme üzerine çalışmalar artarken paralel olarak uluslararası alan yazında matematiksel modelleme ve matematiksel modelleme sürecine ilişkin çalışmaların arttığı ve matematiksel modellemeye ilişkin kuramsal çerçevenin genişlediği görülmektedir. Bu doğrultuda matematiksel modellemeye ilişkin pek çok tanım karşımıza çıkmaktadır. Blum & Niss (1989), matematiksel modellemeyi bilişsel süreçlerin yaşandığı çok yönlü bir problem çözme süreci olarak tanımlarken, Galbraith, Stillman, Brown & Edwards (2007) modelleme sürecinin lineer veya tek yönlü olmaktan uzak olduğunu ve yansıtıcı üst bilişsel aktivitelerin varlığını gösterdiğini ifade ederek son yıllarda önemi sıkça belirtilen üst bilişsel aktivitelere vurgu yapmaktadır. Lingefjärd (2006) matematiksel modellemenin yukarıda bahsedilen anlamının ötesinde bir olayın gözlemlenmesi, ilişkilerin ortaya çıkarılması, matematiksel analizlerin yapılması, sonuçların elde edilmesi ve modelin tekrar yorumlanması süreçlerini içerdiğini vurgulayarak, teknolojinin matematiksel modelleme sürecinde önemli bir bileşen olarak görülmesi gerektiğinden bahsetmektedir. Excel, Cabri, Derive, Sketch, GeoGebra gibi yazılımların ve BASIC, Logo gibi programların matematik eğitimindeki etkilerinin araştırılması ve amaçlarına uygun bir şekilde öğrenme sürecinde kullanılması büyük önem taşımaktadır. Bu anlamda uluslararası alan yazın ve ülkemizde kullanılan matematik yazılımları dikkate alındığında, kısa sürede kendisine geniş bir kullanım alanı bulan GeoGebra programının Türkçe olması, internetten kolayca ulaşılabilmesi, matematiksel modelleme için çok önemli olacağını düşündüğümüz cebir ve geometriyi iç içe barındırması ve cebir ve geometri arasındaki geçişlerin kolaylıkla sağlanabileceği bir öğrenme ortamı sağlaması onu bu çalışma için ön plana almamızın nedenlerinden bazıları olmuştur. Uluslararası alan yazına bakıldığında, GeoGebra ve matematiksel modelleme sürecine yönelik çok az çalışma (Lingefjärd, 2012; Hıdıroğlu, 2012; Hıdıroğlu & Bukova Güzel, 2013) bulunmaktadır.

Baki (2002) daha verimli ve işlevsel öğrenme ortamların oluşturulmasının, öğrencilerin karmaşık gerçek yaşam problemleriyle baş başa bırakılmasıyla, onların varsayımlarda bulunup, değişik çözüm yollarını tartışarak analiz edebilecekleri ortamların sağlanmasıyla ve teknolojinin kullanılarak matematiksel örüntünün, modelin veya ilişkilerin sayısal, cebirsel veya grafiksel görüntülenmesine destek olunmasıyla gerçekleşebileceğini ifade etmektedir. Matematiksel modelleme sürecindeki zengin zihinsel süreçlerin ortaya çıkarılması için kullanılan teknoloji ile (GeoGebra, video-animasyon ve fotoğraf) sürecin ayrıntılı olarak bilişsel ve üst bilişsel bağlamda incelendiği bu çalışmanın alan yazına orijinal ve zengin bir bakış sağlayacağı düşünülmektedir.

Matematiksel modellemeye ilişkin bakış açıları uygulama alanlarına göre çeşitlilik göstermekte ve bu da matematiksel modellemenin farklı özelliklerini öne çıkaran tanımlarıyla karşılaşmamıza yol açmaktadır (Hıdıroğlu, 2012; Kaiser, 2005; Kaiser & Sriraman, 2006). Modelleme sürecinin açıklandığı çalışmalara bakıldığında genellikle temel basamakların genel özelliklerinin belirtildiği; ancak sürecin alt basamaklarının ayrıntılı bir şekilde açıklanmadığı görülmektedir. Ayrıca bu süreçte ilerleyen öğrencilerin hangi bilişsel yaklaşım ve stratejileri sergilediklerine ilişkin ayrıntılı çalışmalar da çok azdır (Almanya'da gerçekleştirilen COM²-projesi; DISUM projesi; Galbraith & Stillman, 2006; Borromeo Ferri, 2006). Bilişsel olarak süreci açıklayan çalışmalardan sadece Galbraith & Stillman (2006) teknolojinin matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel aktivitelere olan etkisine yönelik bir araştırma gerçekleştirmiştir. Fakat Galbraith & Stillman'ın (2006) bilişsel süreci açıklarken bilişsel ve üst bilişsel yapılar arasındaki ayrıma girmediği ve üst bilişsel yaklaşımları kapsamlı olarak ele almadığı görülmektedir. Almanya'da 2006 ve 2007 yıllarında gerçekleştirilen COM²-projesi, DISUM projesi de bilişsel süreci ayrıntılı analizini amaçlayan önemli çalışmalardır; fakat bu çalışmalarda da teknoloji ve üst bilişsel yapıların modellemeye etkisi ve modellemeyle ilişkisi üzerine açıklamalara çok fazla yer verilmemektedir. Bunun yanında Magiera & Zawojewski (2011) matematiksel modelleme sürecindeki üst bilişsel eylemleri açıklayan önemli çalışma gerçekleştirmiştir. Ama bu çalışmada da bilişsel ve üst bilişsel süreç arasındaki ayrıma ve ilişkiye ayrıntılı olarak yer verilmediği ve teknolojinin matematiksel modelleme sürecinde dikkate alınmadığı görülmektedir. Uluslararası alan yazına bakıldığında, teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel yapıları açıklamaya ve arasındaki ilişkiyi vurgulamaya yönelik kapsamlı bir araştırmaya rastlanılmamaktadır. Kaiser & Sriraman (2006) da matematiksel modelleme alan yazını incelendiğinde ve matematiksel modellemeye ilişkin bakış açıları dikkate alındığında, bilişsel ve üst bilişsel modellemenin araştırmalarda perspektif dışı olarak görüldüğünü ve öğrencilerin modelleme esnasındaki bilişsel süreçleri üzerine yoğunlaşan çalışmaların modelleme tartışmalarında ihmal edildiğini vurgulamaktadır. Matematiksel modelleme sürecinin karmaşık yapısı nedeniyle, yapılacak çalışmalarda matematiksel modelleme sürecinin daha ayrıntılı bir şekilde tanımlanmasının bundan sonraki matematiksel modellemeyle ilgili yapılacak çalışmalara daha farklı ve derin bakış açıları getireceği ve öğrenme ortamlarının nasıl daha zengin bir süreci içereceği hakkında kapsamlı bir fikir vereceği düşünülmektedir.

Bu doğrultuda araştırmanın amacı; teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm sürecinde meydana gelen bilişsel ve üst bilişsel süreçlerin analiz edilmesi ve bu bilişsel ve üst bilişsel süreçlerin açıklanarak birbirleri arasındaki ilişkilerinin ayrıntılı olarak ortaya çıkarılmasıdır. Çalışmada zihinsel resimler veya fiziksel resimler gibi modellerin ve planlama, soyutlama, genelleme, değerlendirme, analiz etme, matematikselleştirme, tekrar gözden geçirme vb. bilişsel veya üst bilişsel süreçlerin ele alınarak modelleme sürecindeki matematiksel düşünmelerin ayrıntılı olarak ortaya konulması planlanmaktadır.

Problem Cümlesi

Araştırmanın problemi "Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm sürecinde ortaya çıkan bilişsel ve üst bilişsel yapılar nasıl şekillenmektedir?" şeklinde ifade edilmiştir.

Alt Problemler

Bu doğrultuda araştırmanın alt problemleri ise şöyledir:

1. Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinde ortaya çıkan bilişsel yapılar nelerdir ve nasıl şekillenmektedir?
2. Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinde ortaya çıkan üst bilişsel yapılar nelerdir ve nasıl şekillenmektedir?
3. Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinde ortaya çıkan bilişsel ve üst bilişsel yapılar arasındaki ilişki nasıldır?

Sayıltılar

1. Katılımcılar sahip oldukları tüm bilgilerini, becerilerini, yaklaşımlarını ve düşünme süreçlerini çözümlerine yansıtmışlardır.
2. Araştırmanın uygulama sürecinde, gönüllü katılımcılar; kontrol altına alınamayan ve istenmeyen etkenlerden eşit düzeyde etkilenmişlerdir.

Sınırlılıklar

Araştırma,

1. Matematik Öğretmenliği programında öğrenim görmekte olan 21 öğrencinin üç matematiksel modelleme problemine ilişkin verileri,
2. problemlerin çözüm sürecinde gerçekleştirilen toplam 25 saatlik video kaydı, öğrencilerin yazılı yanıt kağıtları, GeoGebra çözüm dosyaları ve araştırmacı gözlem notları ve
3. uygulamalara katılan öğrencilerin bilgileri, deneyimleri, yaklaşımları, görüşleri ve araştırmacıların deneyimleri ve gözlemleri ile sınırlıdır.

Tanımlar

Araştırmadaki temel kavramlara ilişkin araştırmacıların dikkate aldıkları tanımlar aşağıda verilmektedir.

Matematiksel Modelleme: Matematiksel modelleme, gerçek yaşamdaki karmaşık bir durumun incelenmesini, varsayımların oluşturulmasını, durumu etkileyen değişkenlerin ortaya çıkarılmasını ve gerçek yaşam ile matematik arasında bir köprü oluşturularak matematiksel modellerin oluşturulmasını, matematiksel analizlerin yapılmasını, analizlerden sonuçların elde edilmesini ve modelin yorumlanarak gerekirse tekrar gözden geçirilmesini içeren, karmaşık, tek yönlü olmayan, bilişsel ve üst bilişsel aktiviteleri içeren problem çözme sürecidir (Berry & Houston, 1995; Hıdıroğlu, 2012; Lingefjärd, 2006)

Matematiksel Model: Gerçek yaşam problemiyle veya durumuyla ilgili dikkatlice yapılacak varsayımlar doğrultusunda grafik, denklem, eşitsizlik gibi matematiksel yapılar kurularak gerçek yaşam durumunu temsil edecek ya da tanımlayacak iki veya daha fazla değişkenin arasındaki ilişkinin matematiksel bir gösterimi olarak tanımlamaktadır (Kapur,1982; Berry & Houston, 1995).

Biliş: Canlının dünyasını öğrenmesi, anlaması ve bir nesne veya olayın varlığına ilişkin bilgili ve bilinçli duruma gelmesi için gösterdiği zihinsel faaliyetlerdir (Schurter, 2001; Hong, McGee & Howard, 2001; Türk Dil Kurumu [TDK], 2013).

Üst Biliş: Bir bireyin kendisi ve çevresindekilerle ilgili (kendi biliş yapısı, sistemi, bilişinin isleyişi, bilişsel süreçleri, neyi bilip, neyi bilmediği) ve stratejilerle ilgili (ne olduğu, ne zaman, niçin ve nasıl kullandığı) bilgisi ve davranışlarını düzenlemesi (yani davranışlarını tahmin etmesi, planlaması, izlemesi ve değerlendirmesi) olarak kabul edilmiştir (Panaoura, Philippou & Christou, 2003; Gama, 2004).

Strateji: Önceden belirlenen bir amaca ulaşmak için var olan şartları dikkate alarak seçilen yoldur (Türk Dil Kurumu [TDK], 2013).

Bilişsel Strateji: Hedefe ulaşmayı sağlayan stratejilerdir (Jegede, Taplin, Fan, Chan and Yum, 1999).

Üst Bilişsel Strateji: Hedefe ulaşmayı garantilemek için stratejilerin bilinçli bir seçimle etkin olarak kullanılmasıdır (Jegede, Taplin, Fan, Chan and Yum, 1999; Vaidya, 1999).

Beceri: Kişinin yatkınlığına ve öğrenime bağlı olarak bir işi başarma ve bir işlemi amaca uygun olarak sonuçlandırma yeteneği, maharet (TDK, 2013).

Bilişsel Beceri: Bir işi yapmak için ihtiyaç duyulan becerilerdir (Rivers, 2001; Schraw 1998; Imel, 2002; Schraw, 1998).

Üst Bilişsel Beceri: Bir şeyi nasıl yaptığını anlamak için gerekli becerilerdir (Rivers, 2001; Schraw 1998; Imel, 2002; Schraw, 1998).

Bilgi: İnsanın bilme yetisinin çalışması sonucu ortaya çıkan zihinsel faaliyetlerin ürünüdür (TDK, 2013).

Bilişsel Bilgi: Bir işi yapmak için ihtiyaç duyulan bilgilerdir (Rivers, 2001; Schraw 1998; Imel, 2002; Schraw, 1998).

Üst Bilişsel Bilgi: Bir bireyin kendisi ve çevresindekilerle ilgili (kendi biliş yapısı, sistemi, bilişinin işleyişi, bilişsel süreçleri, neyi bilip, neyi bilmediği) ve stratejilerle ilgili (ne olduğu, ne zaman, niçin ve nasıl kullandığı) bilgileridir (Panaoura, Philippou & Christou, 2003; Gama, 2004).

Düzenleme: Bir olayın veya sürecin seyir veya gelişimini kontrol altında tutmadır (TDK, 2013).

Üst Bilişsel Düzenleme: Bir bireyin davranışlarını düzenlemesi, yani davranışlarını tahmin etmesi, planlaması, izlemesi ve değerlendirmesidir (Panaoura, Philippou & Christou, 2003; Gama, 2004).

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde tez konusu ile ilgili yapılan yayın ve araştırmalara yer verilmektedir. İlgili yayın ve araştırmalar bölümü şu alt başlıklar altında sunulacaktır:

1. Matematiksel Modelleme Sürecine İlişkin Yapılan Araştırmalar,
2. Matematiksel Modelleme ve Üst Biliş İlişkine Yönelik Yapılan Araştırmalar
3. Matematiksel Modelleme ve Teknolojinin İlişkisine Yönelik Yapılan Çalışmalar

Matematiksel Modelleme Sürecine İlişkin Yapılan Araştırmalar

Matematiksel modelleme sürecini etkileyen en önemli iki faktör seviyeye ve ön bilgilere uygunluk, farklı modelleri gerektirmesi, öğrenciler için bilinen bir durumu ortaya koyması gibi matematiksel modelleme problemlerinin yapısına ilişkin özellikler ve çözücülerin bilgi ve becerileridir (Hıdıroğlu, 2012). Bu nedenle ele alınan problemlerin etkililiği ve uygulanacak öğrencilerin seviyeleri özellikle çözümdeki alt eylemlerin yapısının temel kaynağını oluşturmaktadır (Galbraith & Stilmann, 2006; Galbraith, Stillman, Brown & Edwards, 2007). Her ne kadar problem çözme süreci olarak matematiksel modelleme kavramından bahsedilmese de Dewey (1936) ve Pólya (1945) bu tür problemleri de ele almakta ve sürece ilişkin dönemdeki gelişimlerin ilerisinde açıklamalar getirmektedirler. Problem çözmede bilişsel aktivitelerin ayrıntılandırıldığı böyle çalışmaların ivme kazanarak günümüze kadar gelişimlerini sürdürdüğü görülmektedir.

Pólya 1945 yılında öğrencilerinin problem çözerken yaşadıkları sıkıntılar ve yaptığı araştırmalarda edindiği deneyimler doğrultusunda “Bulgusal Stratejiler” adını verdiği teknikleri açıklayarak problem çözmeyi dört temel evrede ele almaktadır:

1. Problemi anlama

2. Eylem planı tasarlama (genel çözüm stratejisi) tasarlama (benzer problemlerden elde edilen deneyimleri kullanma)

3. Eyleme (genel çözüm stratejine bağlı bir çözüm) geçme

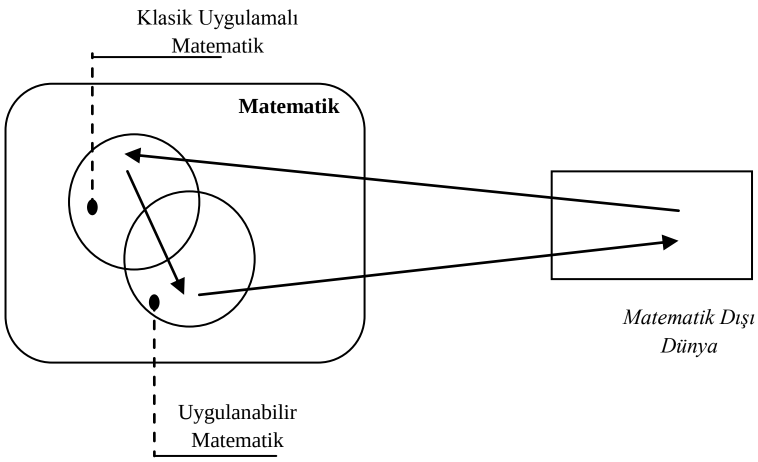
4. Bulunan yanıta gerçekten inanılıp inanılmadığını sorgulama

Pólya'nın (1945) ortaya koyduğu bu problem çözme sürecinin 1990'lara kadar araştırmacıların fazlasıyla dikkatini çektiği (Schoenfeld, 1992) ve matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinin açıklanmasında temel süreç olarak çalışmalarda dikkate alındığı ve eleştirildiği görülmektedir. 1980den sonraki çalışmalarda bu temel evreler dikkate alınarak matematiksel modelleme sürecindeki zihinsel eylemler açıklanmaya ve ayrıntılandırılmaya çalışılmaktadır. Her ne kadar Dewey (1936) ve Pólya'nın (1945) çalışmaları önemli olsa da günümüze kadar matematiksel modelleme sürecine ilişkin çok kapsamlı çalışmalar bulunmaktadır.

Henry Pollak (1969) "How Can We Teach Applications of Mathematics" isimli çalışmasında sadece matematik ile ilgili yüzeysel ve yapay problemler olan geleneksel sözel problemlerin öğrencilerin öğretim programlarındaki konuları öğrenmesine katkısı olsa bile onların öğrendiklerini sınıfın dışındaki bir gerçek yaşam problemine uygulayabilmelerinde etkili olmadıklarını belirtmektedir. Bu anlamda Henry Pollak çalışmasında matematiksel modelleme kavramını ilk kez kullanmakta, günlük yaşam ile ilişkilendirdiği matematiksel modelleme problemlerini açıklamakta ve matematik öğretiminde bu tür problemlerin kullanılması gerektiğini ifade etmektedir. Aynı zamanda Pollak pragmatik yaklaşımı temel alarak eğitimdeki gerekliliğini vurguladığı matematiksel modellemeyi gerçeğe uygun modelleme perspektifini temel alan bir yaklaşım ile eğitime kazandırmaktadır. Pollak 1979 yılında matematiksel modelleme sürecini tanımlamakta ve matematiksel modelleme sürecinin, matematik ve matematik dışı dünya arasındaki karşılıklı etkileşimiyle oluştuğunu vurgulamaktadır.

Pollak (1979) matematiksel modellemenin gerçek yaşamdaki bir durumun matematiksel bir probleme dönüşümü gerektirdiğini ifade etmektedir. Bu matematiksel problemin çözümünde ise bir matematiksel model yardımıyla başarılı olunmaktadır. Süreçte matematik kendi içerisinde klasik uygulamalı matematik ve uygulanabilir matematik arasındaki etkileşimi içermektedir. Pollak'ın (1979) "other world" olarak ifade ettiği ise matematik dışındaki her şeyi içerisinde barındırmaktadır (bkz. Şekil 1).

Şekil 1. Modelleme Döngüsü (Pollak, 1979)



1978 yılında Penrose matematiksel modelleme döngüsünü yedi temel basamakta toplamaktadır. Penrose'a (1978) göre, modelleme döngüsünde öncelikle gerçek yaşam problemi belirlenmekte ve durumun gerçekliği tanımlanmaktadır. Yani problem durumundaki gerçek veriler, problemin nedeni ve sonuçları gerçek yaşam üzerinden ayrıntılı olarak incelenmektedir. Daha sonra Penrose'a (1978) göre süreçte matematiksel model oluşturulmakta ve gerçek yaşam problemi matematiksel bir probleme dönüştürülerek bir çözüm stratejisi belirlenmektedir. Genel çözüm stratejisi yardımıyla matematiksel problem çözülerek elde edilen bu matematiksel çözüm yorumlanmaktadır. Matematiksel çözüme ulaşmada yardımcı olan matematiksel modelin doğruluğu sorgulanmakta ve sonuçlar üretilmektedir. Eğer model hatalıysa revize edilmekte; model hatalı değilse çözüm raporlaştırılmaktadır (bkz. Şekil 2). Bu çalışma ileriki birçok çalışmaya temel olmasına karşın Penrose'un (1978) modelleme sürecinde matematiksel modelin, gerçek yaşam probleminin matematiksel bir probleme dönüştürülmeden önce elde edildiğini söylemesi birçok çalışma ile çelişki göstermektedir.

Şekil 2. Modelleme döngüsü basamakları (Penrose, 1978)

1) Gerçek Yaşam Problemini Belirleme

2) Matematiksel Modeli Kurma

3) Matematiksel Problemini Belirleme

4) Matematik Problemini Çözme

5) Matematiksel Çözümü Yorumlama

6) Modeli Doğrulama

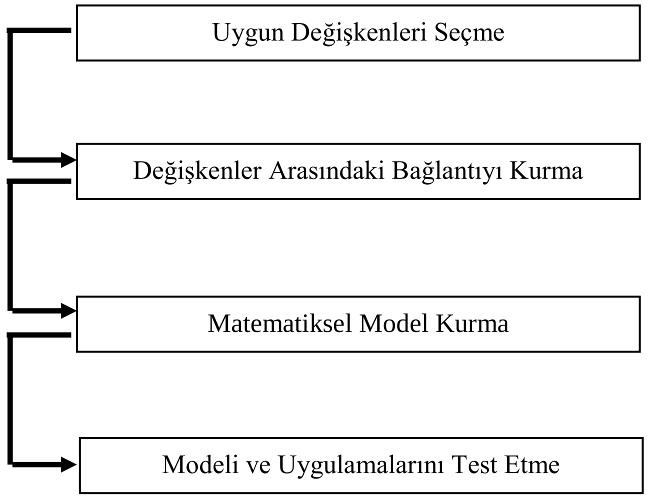
7a) Revize Etme **7b)** Raporlaştırma

Penrose (1978) modelleme süreci için revize etme basamağına dayanarak döngü ifadesini kullanmaktadır. Pollak'tan sonra ilk ayrıntılı çalışmalardan biri ve zamanında en dikkat çekeni olması yönünden literatüre önemli bir katkı sağlamaktadır. Pólya (1945), çalışmasında matematiksel modelleme ifadesini kullanmasa da bu tür problemlerde öğrencilerin değişik basamaklara geçişler yapabileceğini ifade etmekte (Örneğin çözüm yanlışsa sürecin önceki basamaklarda devam edeceğini vurgulamaktadır.); fakat kitabında döngüsel bir süreç ifadesini kullanmayı tercih etmeyerek genel olarak sürecin doğrusal fakat oldukça karmaşık olarak ilerlediğinden bahsetmektedir.

1980li yılların bir diğer önemli çalışmasında Treilibs, Burkhardt & Low (1980) bilişsel modelleme çerçevesinde hem bilişsel hem de üst bilişsel sürece ilişkin sonuçlar ortaya koymaktadır. Çalışmada matematiksel modellemenin bireysel çözüm sürecinin çok karmaşık olduğunu ve yönü tahmin etme gibi bazı üst bilişsel eylemleri içerisinde barındığını vurgulamakta ve modelleme sürecinde ilk defa bilişsel ve üst bilişsel açıklamalara yer vermektedir.

Kapur (1982), "The art of teaching the art of mathematical modelling" isimli çalışmasında matematiksel modellemenin derslerde kullanımına ilişkin önerilerde bulunurken modelleme sürecinin işleyişini genel anlamda uygun değişkenleri seçme, bu değişkenler arasındaki bağlantıyı ortaya çıkarma, bu değişken ve bağlantılara bağlı olarak matematiksel bir model ortaya koyma, bu modelin ve uygulamalarının test etme olarak ifade etmektedir (bkz. Şekil 3). Bu araştırma da, modelleme üzerine yapılmış ilk araştırmalardan biridir.

Şekil 3. Modelleme süreci (Kapur, 1982)



Lesh, Surber & Zawojewski (1983), Müller & Wittmann (1984), Schoenfeld (1985) ve Blum ve Niss (1989) çalışmalarında özellikle Pólya'nın (1945) ortaya koyduğu problem çözme evrelerinin doğrusal olmadığını vurgulamakta, çözüm sürecinin karmaşık ve çok döngülü olduğunu ifade etmektedir.

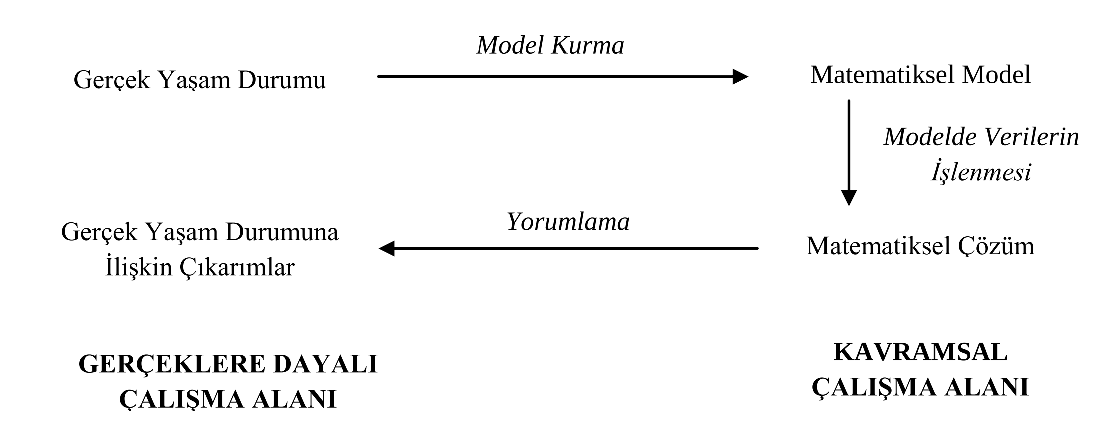
Lesh, Surber & Zawojewski (1983) problem çözme sürecinin Pólya'nın dediği gibi düzgün geçişlerden oluşmadığını ve süreçte amaçtan hedefe doğru giden düşünceler arasında karmaşık geçişlerin var olduğunu ifade etmektedir. Lesh, Surber & Zawojewski (1983) uygulamalı matematik problemlerini içeren projeleri kapsamında modelleme türündeki problemleri de ele alarak sürecin yorumlama, birleştirme, farklılaştırma, tahminlerde bulunma ve doğrulama gibi farklı aşamaları da barındırdığını söylemektedir. Lesh, Surber & Zawojewski'ye (1983) göre, öğrenciler modelleme sürecinde problemle ilgili ne anladıklarını ortaya koymaktadırlar. Buna göre modelleme süreci, basamaklar arasında herhangi düzenli geçişleri gerektirmeyen bir "mapping cycle" içerisinde ilerlemektedir. Haritalandırma döngüsü olarak ifade edebileceğimiz "mapping cycle", öğrencilerin problem çözme sürecindeki tahminlerini, bilişsel modellerini, modellerinin arasındaki dönüşümlerini ve problem durumuna geri dönüşü içeren karmaşık geçişleri ve düşünceler arasındaki ilişkileri içerisinde barındıran bilişsel süreçleri kapsamaktadır. Kısaca mapping cycle öğrencilerin kendi algılarını kendi bilişsel modellerine dönüştürdükleri ve zihinsel modellerini, algıladıkları gerçek yaşam durumuna dönüştürdükleri bir süreci ifade etmektedir.

Lesh, Surber & Zawojewski (1983) modelleme sürecinin ilk aşamalarında öğrencilerin oldukça fazla vakit kaybettiklerinden bahsetmektedir. Öğrenciler çözümlerinin uzun bir kısmını problemi anlama ve analiz etmede harcamaktadırlar. Lesh, Surber & Zawojewski'ye (1983) göre, öğrenciler çözüm boyunca düşüncelerini tartışmaktadır ve onların düşünceleri arasındaki geçişler ise tam sıralamayla gitmemektedir. Bu yüzden Lesh ve diğerleri (1983), öğrencilerin problem çözme sürecinde tekrar eden mapping cycle'larla karşılaşılabileceklerini (Buna ise spiral process demektedir) ve bu sürecin de öğrencilerin problem durumunu anlama düzeylerini arttırarak modellerini daha karmaşık yapıda kurmalarına fırsat verdiğini söylemektedir.

Meyer (1994) modelleme sürecinde matematiksel modellerin yapısının ve etkili bir şekilde oluşturulmasının sürecin işleyişi için büyük önem taşıdığını ifade etmekte ve çalışmasında matematiksel modellerin sahip olması gereken özellikleri açıklamaktadır. Buna göre matematiksel model gerçeğe yakın sonuçlar vermeli, gerçekliği doğru varsayımlarla temsil edici olmalı, hassas ölçüme fırsat vermeli, giriş verilerindeki hatalara karşı dirençli olmalı, durumun daha geniş bir uygulamasına olanak sağlamalı ve diğer modellerin elde edilmesinde yararlı birer araç olarak kullanılmalıdır.

1980lerdeki önemli çalışmalardan bir diğeri Müller & Witmann'ın (1984) Almanya'daki ilkokul öğrencileriyle yaptıkları çalışmadır. Bu araştırmada modelleme sürecinin genel olarak üç temel adımdan meydana geldiğini vurgulamaktadır. Bunlar: model kurma, modelde verileri işleme ve yorumlamadır. Araştırmacıların doğrulamayı süreç modellerinde dikkate almadıkları onu yorumlamanın içerisinde düşündükleri görülmektedir. Bunun yanında öğrencilerin çözüm sürecinde gerçeklere dayalı çalışma alanı ve kavramsal çalışma alanı olmak üzere iki farklı çalışma alanında yer aldıklarını ifade etmektedir. Müller & Witmann' ın (1984) matematiksel modelleme süreci modeli Şekil 4' de verilmiştir.

Şekil 4. Modelleme Sürecinin Yapısı (Müller & Wittmann, 1984)



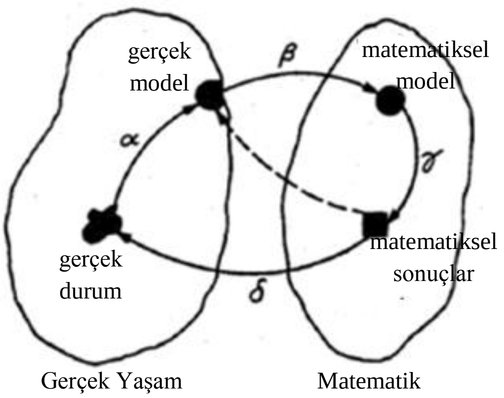
Schoenfeld (1985; 1992) sınıflarda kullanılacak problemlerin açık uçlu olması ve gerçek yaşam durumu ile ilişkilendirilmesi gerektiği düşüncesiyle problem çözme sürecinin doğrusal bir şekilde işlemeyeceğini vurgulamakta ve Pólya'nın (1945) doğrusal modelini reddetmektedir. Schoenfeld (1985) problem çözme sürecindeki kritik durumları problemi analiz etme, uygun matematiksel bilgiyi seçme, plan yapma, planı gerçekleştirme ve çözümü kontrol etme olarak ifade etmektedir. Çalışmasında problem çözme sürecini altı adımda tanımlamaktadır:

1. Problemi (tekrar) okuma
2. Problemi analiz etme (yapıyı oluşturucu ve tutarlı düşüncelerle)
3. Problem durumunu keşfetme (analizden daha az ve yüzeysel yapısal yollarla)
4. Problem ilişkin bir çözümün bir kısmını veya tamamını planlama
5. Planı uygulama
6. Çözümü doğrulama

Schoenfeld'den (1985) farklı olarak Garofolo & Lester'ın (1985) problem çözme sürecinde okuma, analiz etme, keşfetme ve planlama basamaklarının yerine problem durumuna uyum sağlama ve problemin bir çözümü için eldekileri organize etme basamakları yer almaktadır. Diğer basamaklar (uygulama ve doğrulama) ise iki çalışmada aynı şekilde ifade edilmektedir. Bir başka ifadeyle Garofolo & Lester'ın (1985) problem çözme süreci dört adımdan oluşmaktadır.

2000'li yıllardaki çalışmalarda önemli bir etkisinin olduğu görülen bir diğer çalışmada Blum (1985), modelleme döngüsü olarak ifade ettiği modelleme sürecini matematik ve gerçek yaşam arasındaki ilişkinin ortaya çıkarıldığı, dört basamak ve dört temel bileşenden oluşan bir süreç olarak açıklamaktadır (bkz. Şekil 5). Blum (1985) modelleme sürecinde öncelikle gerçek durumun basitleştirildiğini, yapılandırıldığını ve ayrıntıları ile açıklanarak gerçek bir modele ulaşıldığını vurgulamaktadır. Daha sonra gerçek modelden matematikselleştirme ile matematiksel modele geçiş yapılmaktadır. Matematiksel bir süreç izlenerek matematiksel modelden matematiksel sonuçlar elde edilmekte, son olarak da elde edilen matematiksel sonuçlar gerçek durum dikkatte alınarak geriye doğru yorumlanmaktadır.

Şekil 5. Modelleme Döngüsü (Blum, 1985)



α basitleştirme, yapılandırma, ayrıntıları belirtme

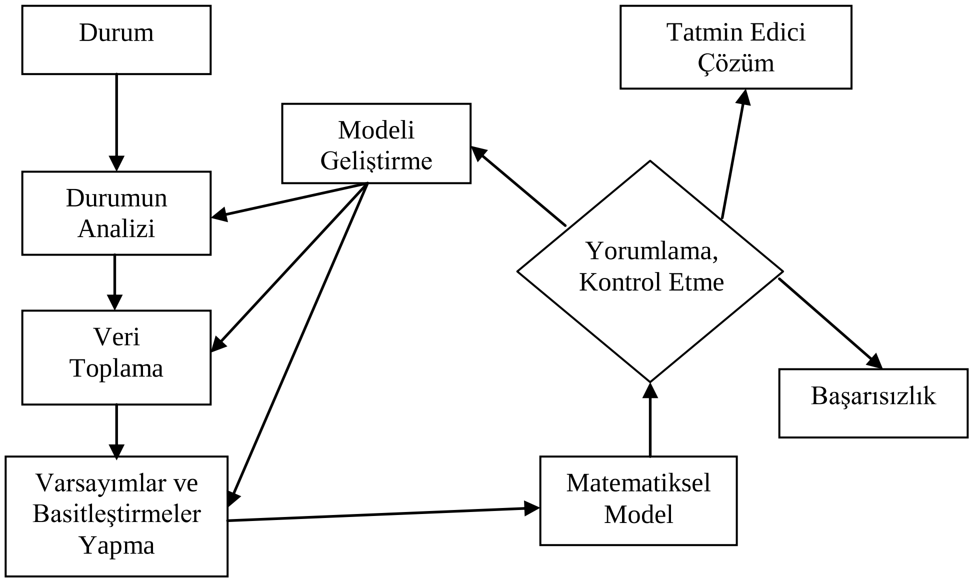
β matematikselleştirme

γ matematiksel süreç

δ geriye doğru yorumlama ve uygulama

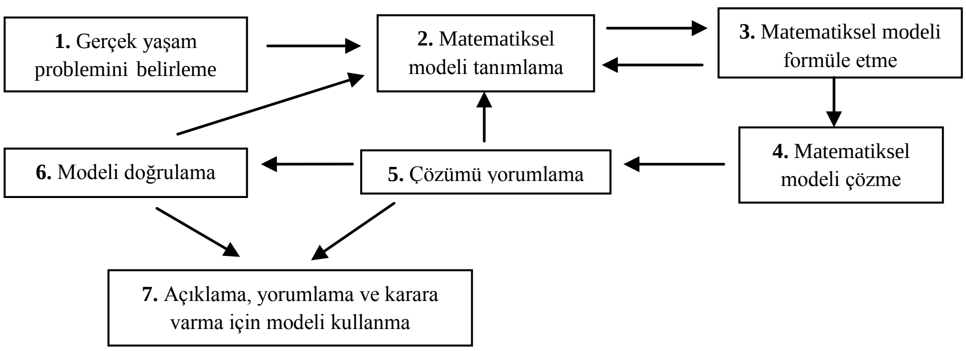
Fischer & Malle (1985), modelleme sürecinin işleyişinde durumdan matematiksel modele geçişin olduğunu ifade etmektedir (bkz. Şekil 6). Modelleme süreci bir durum ile başlamakta, durum analiz edilerek veriler toplanmakta, basitleştirmeler ve varsayımların yardımıyla matematiksel modele ulaşılmaktadır. Süreçte matematiksel model ile durumun modeli arasında sürekli düşünsel alışverişler gerçekleşmektedir. Yorumlama ve kontrol etme aşamasında çözüm ya başarısızlık ile ya da problem durumuna verilmiş tatmin edici bir çözüm ile son bulmaktadır.

Şekil 6. Modelleme Döngüsü (Fischer & Malle, 1985)



Mason (1988) matematiksel modelleme sürecini açıklarken süreç modelinde, sol taraf tamamıyla gerçek yaşamı, sağ taraf matematiksel dünyayı, ortası ise matematiksel dünya ve gerçek yaşam arasındaki ilişkinin ortaya çıkarıldığı karma dünyayı temsil etmektedir (bkz. Şekil 7). Mason' a (1988) göre, matematiksel modellemede ilk olarak gerçek yaşam durumu ve matematik arasında ilişki kurularak problem matematiksel olarak ifade edilmektedir. Problemde tanımlanan değişkenler dikkate alınarak matematiksel semboller ve bilgilerle elde edilen matematiksel model matematiksel olarak çözülmektedir. Elde edilen çözüm yorumlandıktan ve gerçek yaşam durumu bağlamında ele alındıktan sonra modelden elde edilen sonuçların gerçek yaşamı ne kadar karşıladığına ilişkin yaklaşımlar sergilenmektedir.

Şekil 7. Modellemedeki Temel Basamaklar (Mason, 1988)



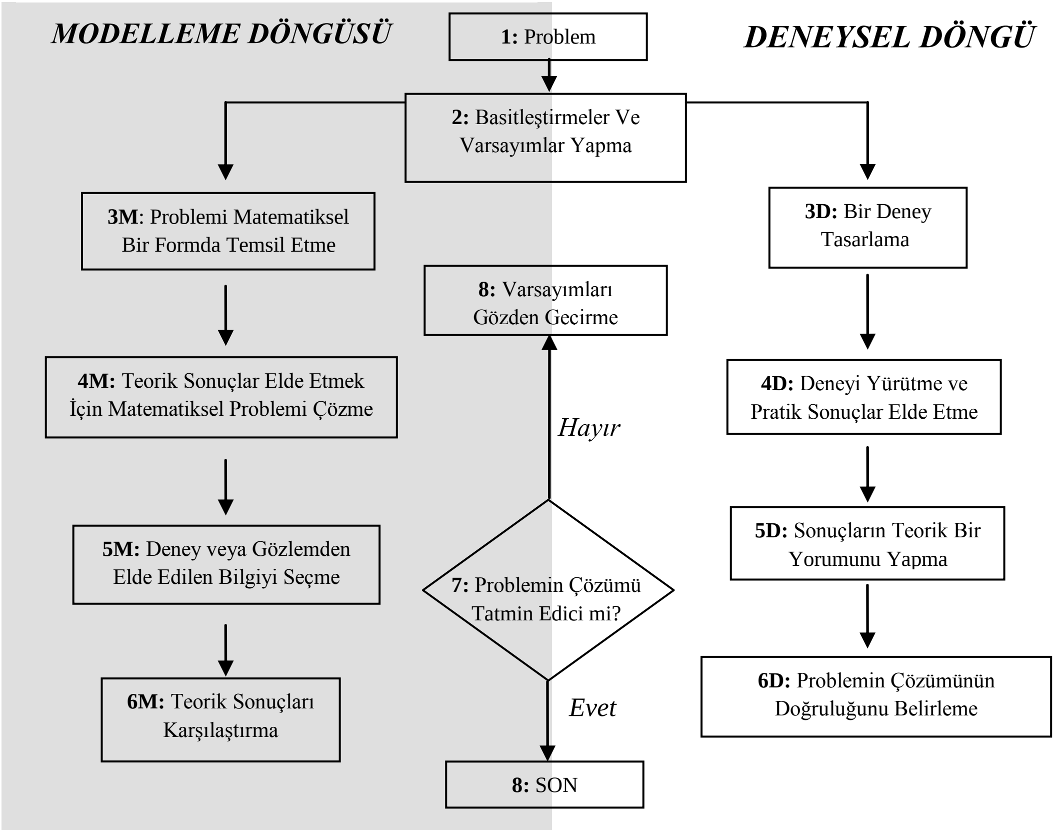
Mason (1988), matematiksel modelleme sürecinin ilk adımdan son adıma doğru doğrusal bir anlayışla ilerlese de süreçte sergilenen yaklaşımların oldukça karmaşık olduğunu ve basamaklar arasındaki geçişlere sıklıkla rastlandığını vurgulamaktadır. Eğer modelin doğruluğundan şüphe duyulursa çözümde geri dönülen basamak matematiksel modeli tekrardan tanımlamak olmalıdır. Mason (1988), öğrencilerin özellikle doğrulama basamağında zorlandıklarını ve bazılarının bu basamağa geçmeden son adıma geçtiklerini ifade etmektedir. Bununla birlikte modelleme süreci için doğrulama basamağının oldukça önemli olduğunu vurgulamakta ve fiziksel gerçeklik ile matematiksel dünya arasındaki uyumun çözümün etkiliği için gerekli olduğunu ifade etmektedir.

Berry & Houston (1995), Blum & Niss (1989), Blum (1996), Doerr (1997), Kaiser (1995), Niss (1989) ve Mason (1988) süreci bir model ile açıklarlarken matematiksel modelleme sürecinin bu kadar düz, anlaşılır ve basit bir süreç olmadığını ve sık sık basamaklar arasında geçişlerin olduğunu vurgulamaktadırlar.

1994 yılında MEI'nin [Mathematics in Education and Industry] Structured Mathematics Students' Handbook araştırmasında matematiksel modelleme süreci iki temel döngü içerisinde iki farklı çözüm ile gerçekleşmektedir (bkz. Şekil 8). Bunlardan birisi modelleme döngüsü, diğeri ise deneysel döngü olarak karşımıza çıkmaktadır. Burada deneysel döngü ve modelleme döngüsü birbirinden bağımsız düşünülememekle birlikte, birbirlerini destekleyici ve karma bir çözümü ortaya çıkarmaktadırlar (MEI, 1994).

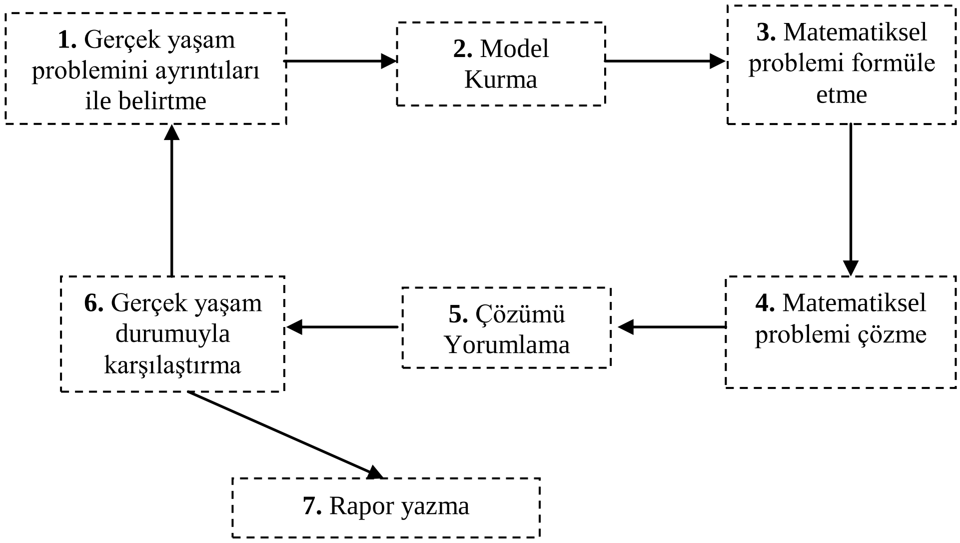
Şekil 8. Matematiksel Modelleme Sürecinin Yapısı

(MEI, 1994'den akt. Maull & Berry, 2001)



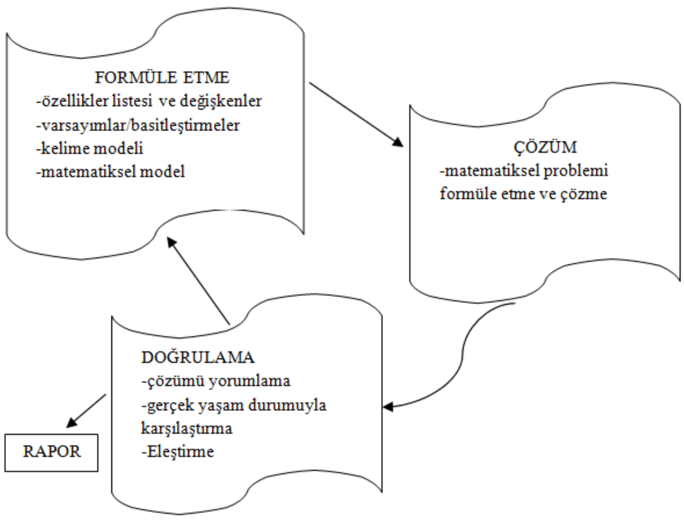
Maull & Berry (2001), The Cold Tea Problemi çerçevesinde fizik kavramlarının çözüm sürecine entegre olduğu matematiksel modelleme sürecinde hem MEI'nin (1994) modelini hem de aşağıdaki süreci (bkz. Şekil 9) benimseyerek öğrenci yaklaşımlarını açıklamaktadır. Bu doğrultuda, öğrencilerin çözümde farklı yollarla çözüme gittiklerini, bir grubun diğerlerinden tamamen farklı bir çözümü seçtiğini, üç grubun da deneysel döngüyü temel alarak çözümlerini sürdürdüğünü ifade etmektedir. Bir başka deyişle bu araştırma, modelleme sürecinin birbirlerinden tamamen ayrılamasa da iki farklı (modelleme ve deneysel) döngüyle var olduğunu ortaya koymaktadır. Aynı zamanda yedi temel basamaklı modelleme sürecinin (bkz. Şekil 9) genel özellikleri doğrultusunda öğrencilerin başarılı çözümler gerçekleştirdikleri ifade edilmektedir.

Şekil 9. Matematiksel Modelleme Süreci (Maull & Berry, 2001)



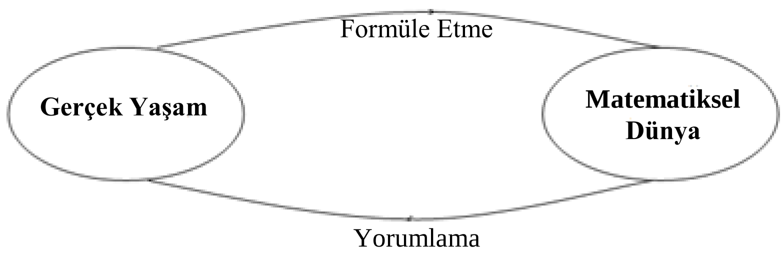
Berry & Houston (1995), modelleme sürecini öncelikle üç temel kısımda ele almakta ve bunları formüle etme, çözüm yapma ve doğrulama olarak ifade etmektedir. Berry & Houston'a (1995) göre, matematiksel modelleme sürecinde en genel anlamda gerçek yaşamdaki bir problem matematiksel bir probleme dönüştürülerek matematiksel modelleri elde edilmektedir. Daha sonra matematiksel problem çözülmekte ve gerçek yaşam durumuna yanıt verebilmek için elde edilen sonuçlar yorumlanmaktadır. Son olarak ise çözüm bir rapor haline getirilmektedir (bkz. Şekil 10).

Şekil 10. Modelleme Süreci (Berry & Houston, 1995)



Berry & Houston (1995), modelleme sürecinin en genel ifadesini iki temel bileşen ve iki temel basamak çerçevesinde ele almaktadır (bkz. Şekil 11). Buna göre, süreç gerçek yaşam ve matematiksel dünya arasında gerçekleşerek problem durumu matematiksel olarak formüle edilmekte, daha sonra elde edilen matematiksel sonuçlardan hareketle gerçek yaşam problem durumu yorumlanmaktadır.

Şekil 11. Matematiksel Modellemenin Genel Yapısı (Berry & Houston, 1995)



Berry & Houston (1995) matematiksel modelleme sürecini ayrıntılı olarak ise şu aşamalarla açıklamaktadır:

1. Problemi anlama: Gerçek yaşam problemi tanımlanmakta ve problem için gerekli veriler toplanarak analiz edilmektedir.

2. Değişkenleri seçme: Problemin belli nitelikleri gözden geçirilerek önemli etkenlerin ve durumların bir listesi oluşturulmaktadır. Modelde kullanılacak değişkenler tanımlanmaktadır. Çözücü ilk iki aşamada gerçek yaşam durumunun içerisinde düşüncelerini ortaya çıkarmaktadır.

3. Matematiksel modeli kurma: Gerçek yaşam durumuna uygun şekilde yapılan varsayımlar ve dikkate alınan değişkenler yardımıyla grafik, denklem, eşitsizlik gibi matematiksel yapılar kurularak gerçek yaşam durumunu en iyi şekilde temsil edecek matematiksel model formüle edilmektedir. Gerçek yaşamdan matematiksel dünyaya geçiş bu basamakta gerçekleşmektedir.

4. Matematiksel problemi çözme: Çözücü bu basamakta probleme ilişkin matematiksel çözüm gerçekleştirmektedir. Bu basamakta matematiksel dünya temelli bir süreç izlenmektedir. Kurulan matematiksel modeller aracılıyla problemin çözümü yapılmaktadır. Matematiksel bilgiler, matematiksel modelleme sürecinin 3. ve 4. aşamalarında büyük önem taşımaktadır.

5. Çözümü yorumlama: Bu aşamada çözüm doğrultusunda elde edilen sonuçlar değerlendirilmektedir. Çözümden elde edilen sonuçlar bu şekilde kelimelerle tarif edilmekte ve gerçek yaşam durumu için bir anlam kazanmaktadır. Modelin onaylanması için ihtiyaç duyulan veriler bu basamakta elde edilmektedir.

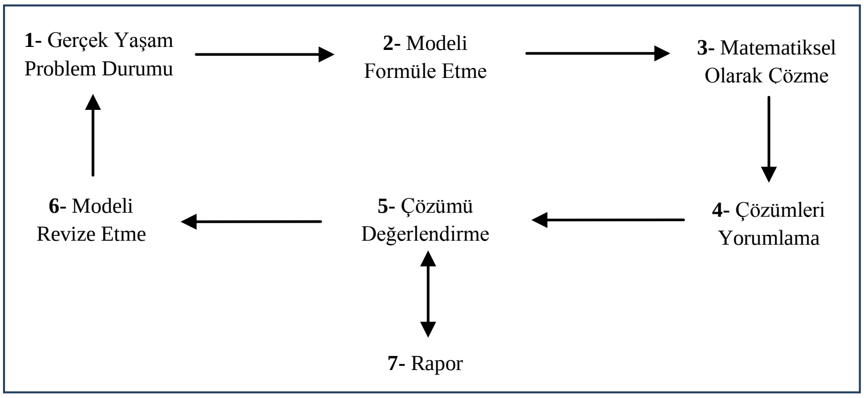
6. Modeli doğrulama: Elde edilen sonuçlar yardımıyla ve eldeki veriler kullanılarak modelin idealliği test edilmektedir. Matematiksel model ve modelin çıktıları sorgulanmaktadır.

7. Modeli başka problemler için geliştirme: Bu aşamada gerekirse önceden dikkate alınan varsayımlar tekrar gözden geçirilmektedir. Bu durumda yeni varsayımların sonuçları nasıl etkileyeceğine ilişkin bir yanıt bulabilmek amacıyla yeni matematiksel modeller kurulmaktadır.

8. Rapor hazırlama: Problem ve problemin çözümünü gösteren bir çözüm raporu hazırlanmaktadır. Bu rapor poster, yazılı bir rapor veya sözlü bir sunu şeklinde ortaya çıkabilmektedir.

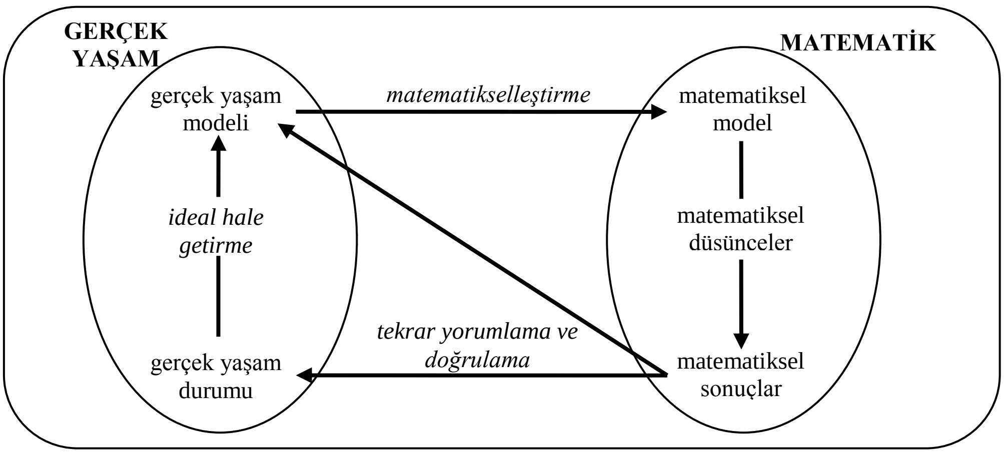
Berry & Davies (1996), matematiksel modelleme sürecine ilişkin çalışmasında matematiksel modelleme döngüsünü yedi temel basamak ile açıklamaktadır (bkz. Şekil 12). Berry & Davies'e (1996) göre, modelleme sürecinde ilk olarak gerçek dünya problem durumu ele alınmakta ve durumu tanımlayan matematiksel model üretilmektedir. Matematiksel model probleme bir cevap bulma amacıyla kullanılarak problemin matematiksel çözümü yapılmaktadır. Sonrasında, elde edilen sonuçlar yorumlanmakta ve doğruluğu irdelenmektedir. Eğer sonuçların doğruluğundan şüphe duyuluyorsa, modelin doğruluğu da zedelenmekte ve bu nedenle model tekrar revize edilmektedir. Sonuçların doğruluğu gerçek yaşam durumuna ilişkin çözücüyü bir şüpheye götürmüyorsa, yapılan çözüm yazılı veya sözlü bir rapor haline getirilerek süreç sonlanmaktadır. Önceki süreç modelleri incelendiğinde Penrose' dan (1978) sonra süreç modelinde revize etmeye ayrı bir temel basamak olarak tek yer veren Berry & Davies (1996) olmaktadır. Fischer & Malle (1985) revize etmeyi süreç modelinde modeli geliştirme temel basamağının içerisinde ifade etmektedir. Aynı zamanda Berry & Davies (1996), süreç modelinde rapor yazmaya yer veren araştırmacılardan (Berry & Houston, 1996; Penrose, 1978) biridir.

Şekil 12. Modelleme Döngüsü (Berry & Davies, 1996)



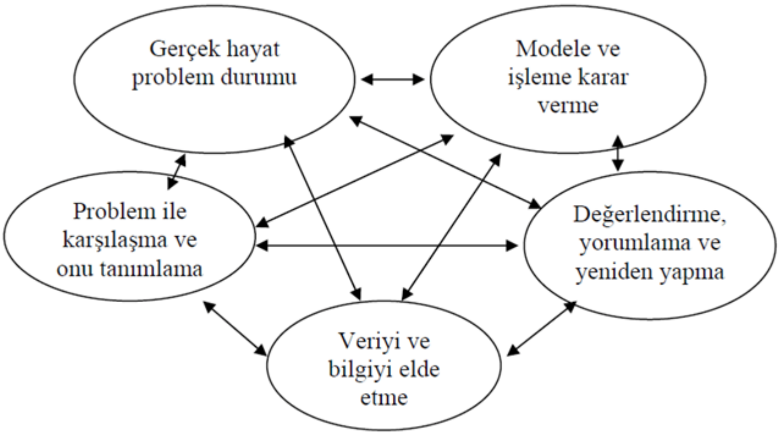
Blum (1996) ve Kaiser Meßmer (1986), çalışmalarında matematiksel modelleme sürecinde ilk olarak problemin analiz edildiğini, problemin geçmişinin araştırıldığını, problemle ilgili deneyimlerin ortaya çıkarıldığını, varsayımların oluşturulduğunu ve bu süreçte her matematiksel modelin özel bir amaç için oluşturulduğunu ifade etmektedir. Blum (1996) ve Kaiser Meßmer (1986), modelleme sürecini iki temel dünya (gerçek yaşam, matematik) ve dört temel bileşen (gerçek durum, gerçek yaşam modeli, matematiksel model) çerçevesinde gerçekleşen dört temel basamak ile açıklamaktadırlar (bkz. Şekil 13). Araştırmacıların modelleme sürecindeki temel bileşen ve basamaklar arasındaki ayrımı dikkate aldıkları ve bunu da süreç modeline yansıttıkları görülmektedir.

Şekil 13. Modelleme Süreci (Blum, 1996; Kaiser Meßmer, 1986)



Doerr (1997) diğer süreç modellerinden farklı bir yaklaşım sergilemekte ve Lesh et al.’ a (1983) paralel olarak, modelleme sürecinin kesinlikle doğrusal olmadığını ifade ederek, sürecin düşünceler arasındaki ilişkiyi ifade eden birçok düğümden meydana geldiğini vurgulamaktadır (bkz. Şekil 14). Doerr'in (1997) süreç modeline bakıldığında düğümleri oluşturan temel kategorilerden sadece gerçek yaşam durumunun bir süreç kategorisi olmadığı görülmektedir. Doerr'e (1997) göre, matematiksel modelleme sürecinde model ve model ile gerçekleştirilecek işlemlerle problem çözülmekte ve elde edilenler değerlendirilerek yorumlanmakta ve yeniden yapılandırlmaktadır. Doerr' in (1997) süreç modeli doğrusal bir sürece tamamen aykırı bir model olarak karşımıza çıkmaktadır.

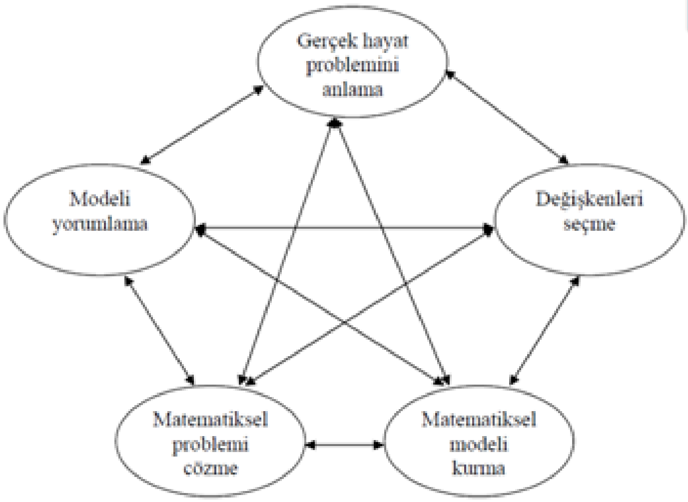
Şekil 14. Modelleme Sürecinin Düğümleri (Doerr, 1997)



Doerr (1997), modelleme sürecindeki doğrusallıktan sadece matematiksel yapıların (gösterimler, matematiksel modeller, matematiksel işlemler) oluşum sırasında bahsedilebileceğinden, bunun dışında süreçte ortaya çıkan düşüncelerin karmaşık ve iç içe geçmiş bir yapıda olduğundan bahsetmektedir. Doerr'e (1997) göre, problem için kurulan model bir çözüm değil çözüme ulaşmak için kullanılması gereken bir araç olarak ortaya çıkmaktadır.

Özer Keskin (2008), "Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel Modelleme Becerilerinin Geliştirilmesi Üzerine Bir Araştırma" isimli doktora tez çalışmasında Berry & Houston (1995) ve Doerr (1997) çalışmalarını temel alarak Şekil 15'deki modelleme süreci şemasını dikkate almakta ve öğretmen adaylarının çözüm süreçlerini bu döngüyü dikkate alarak incelemektedir.

Şekil 15. Matematiksel Modelleme Diyagramı (Özer Keskin, 2008)



Doerr'den (1997) farklı olarak Özer Keskin (2008), temel basamakların genel anlamda bir sıraya bağlı olarak gerçekleştiğini ifade etmektedir. Aynı zamanda, bu temel basamaklar arasında sürekli geçişlerin varlığından söz etmektedir. Kategorileri süreç kategorileri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bir başka deyişle, Özer Keskin'in (2008) ifadelerinde modelleme sürecinin ilk başta doğrusal bir şekilde oluşumunun gerçekleştirdiği, sonrasında kendi içerisinde karmaşık ve döngüsel bir süreci ortaya çıkardığı anlaşılmaktadır. Süreç modelinde Doerr'in (1997) yapısını dikkate aldığından dolayı da temel basamakların oluşum sırası görülmemektedir:

> Burada yer alan ilk aşama gerçek hayat problemini anlamadır. Burada kişi problemin ne ifade ettiğini belirlemeye çalışır. Daha sonraki aşama bu problemi çözebilmek için gerekli olan değişkenleri seçme aşamasıdır. Bu aşamadan sonra matematiksel model oluşturulur. Burada, problemin çözümüne ulaşıldıktan sonra model yorumlanarak doğruluğu test edilir. Daha sonra da elde edilen çözüm gerçek hayata yorumlanır.
> …
> Bu aşamaların doğrusal bir sıra takip etmesi gerekmemektedir. Örneğin, modeli oluşturamayan bir kişi tekrar problemi anlama aşamasına gidip problemi tekrardan incelemek isteyebilir. Problemi çözme aşamasında zorlanan bir kişi, değişkenleri seçme aşamasına gidip değişkenleri tekrardan değişkenleri belirlemek isteyebilir. (Özer Keskin, 2008: 19-20)

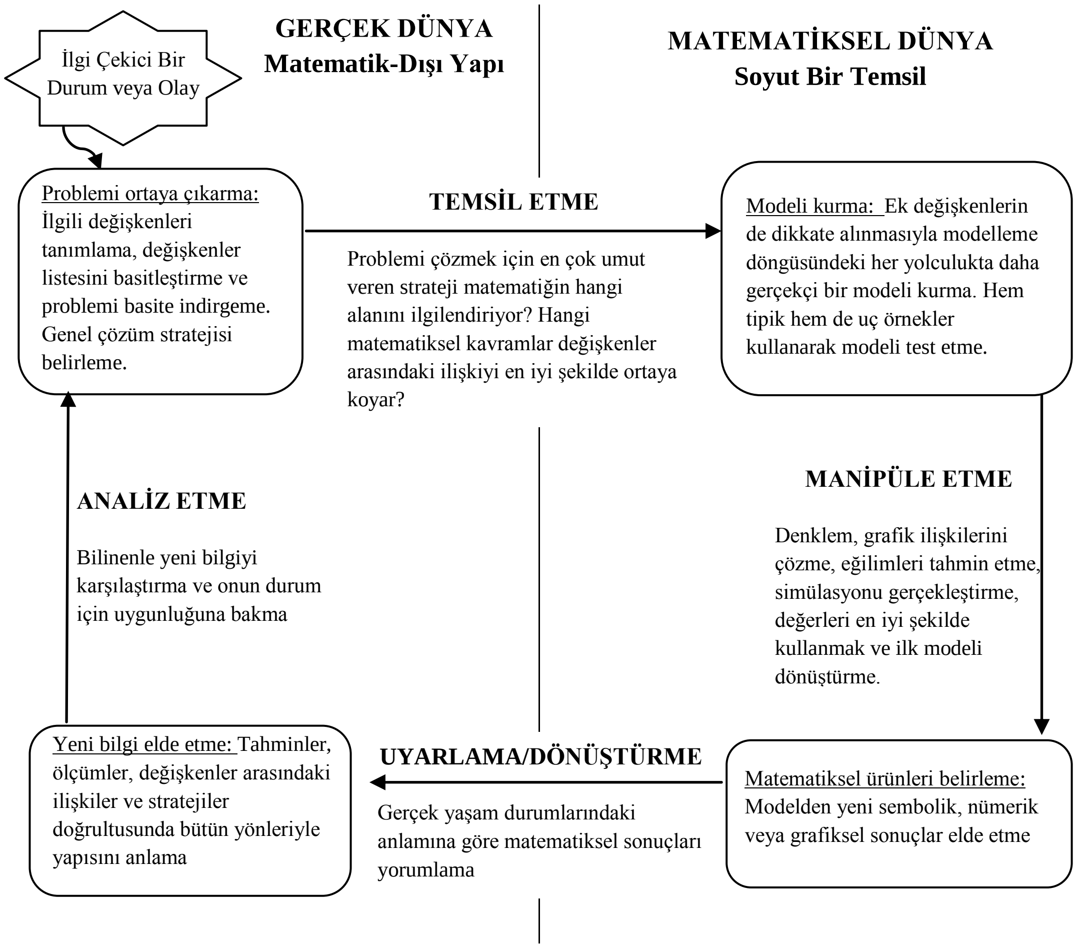
2000 yılına kadar yapılmış süreci açıklayan çalışmalara bakıldığında, araştırmacıların genel olarak süreç modellerinde ön plana çıkarmak istedikleri modelleme bileşenlerinin ve basamaklarının aralarındaki ayrıma dikkat çekmeden onları vurguladıkları görülmektedir. Sadece Müller & Witmann (1984), Kaiser (1986) ve Blum'un (1985) çalışmalarında ortaya koydukları süreç modelleri temel bileşen (Süreci değil bir durumu ifade eder.) ve temel basamak (Süreci ifade eder.)

dikkate alınarak açıklanmaktadır. Bununla birlikte 1995 öncesi çalışmalarda süreç modellerin nerdeyse çoğunda doğrulama basamağının önemine dikkate çekilmekte ve modelleme sürecinin gerçek yaşam ve matematiğin arasındaki bir ilişkinin sonucu olarak ortaya çıktığı vurgulanmaktadır.

Abrams (2001), matematiksel modellemenin hem pür hem de uygulamalı matematikte ortaya çıkan matematiksel düşünmelerin keşfedilmesinde güçlü bir süreci yarattığını vurgulamaktadır. Abrams'a (2001) göre, matematiksel modelleme matematiğin dışındaki bir problemi incleemek için matematiğin kullanılması sürecidir. Öğrencilerin modelleme sürecinde, problemi çözmek için ihtiyaç duyacakları en gerekli şeylerden biri probleme ilişkin sahip oldukları deneyimleri olmaktadır (Abrams, 2001). Paralel olarak Pólya (1945), problemlerin çözümünde deneyimlerin büyük bir rol oynadığı ifade etmektedir. Ayrıntılı olarak matematiksel modelleme döngüsünü Şekil 16'daki gibi açıklamaktadır.

Abrams (2001) süreci problemi ortaya çıkarma, temsil etme, modeli kurma, manipüle etme, matematiksel ürünleri belirleme, uyarlama veya dönüştürme, yeni bilgi elde etme ve analiz etme olmak üzere sekiz temel basamak altında açıklamaktadır. Modelleme sürecinde ilk olarak problem tanımlanmakta, değişkenler ifade edilmekte ve problem basitleştirilerek genel çözüm stratejisi belirlenmektedir. Temsil etme basamağı problemin matematik ile olan ilişkisinin ortaya çıkarıldığı basamaktır. Bu doğrultuda, çözüm için hangi matematiksel kavramların gerekli olduğu ortaya çıkarılmaktadır. Matematiksel modeli kurma basamağında değişkenlerin yapısındaki ve niteliğindeki değişimler daha gerçekçi bir modeli kurmaya olanak sağlamakta ve her tekrarlayan modelleme döngüsü ile gerçek yaşamı daha iyi açıklayan matematiksel modellere ulaşılmaktadır (Abrams, 2001).

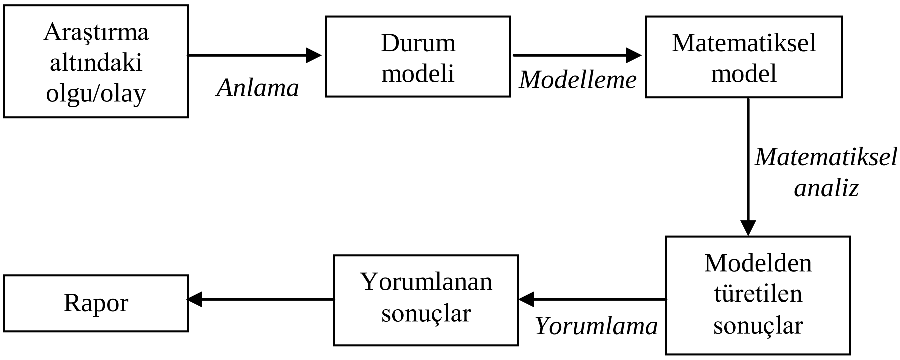
Şekil 16. Matematiksel Modelleme Döngüsü (Abrams, 2001)



PISA (2000) raporunda matematiksel modelleme döngüsü beş adımda ele alınmaktadır. Buna göre, gerçek yaşam durumundaki kaynakları içeren matematiksel modelleme sürecinde ilk olarak basitleştirme gerçekleştirilmektedir. Daha sonra gerçek yaşam problemi matematiksel bir probleme dönüştürülmektedir. Sonra bu matematiksel problem çözülmekte ve sonuçlar açıklanarak gerçek yaşam bağlamında doğrulanmaktadır.

Verschaffel, De Corte & Borghart (1997), matematiksel modelleme sürecindeki öz düzenleme stratejilerini, bilişsel ve üst bilişsel stratejileri yeni bir duruma transfer etmek için matematiksel problemlerdeki farklılıkları ve içindeki matematiksel benzerlikleri tanıma yeteneği olarak ifade etmektedir. Modelleme sürecini araştırma altındaki olgu/olay, durum modeli, matematiksel model, modelden türetilen sonuçlar, yorumlanan sonuçlar ve rapor olmak üzere altı temel bileşen ve anlama, modelleme, matematiksel analiz ve yorumlama olmak üzere dört basamak ile açıklamaktadır (bkz. Şekil 17).

Şekil 17. Modelleme Süreci (Verschaffel et al., 2000)



Lesh & Doerr (2003) ve Blum & Niss (1991) matematiksel modellemedeki problem çözme eylemlerini şu şekilde açıklamaktadırlar (bkz. Şekil 18):

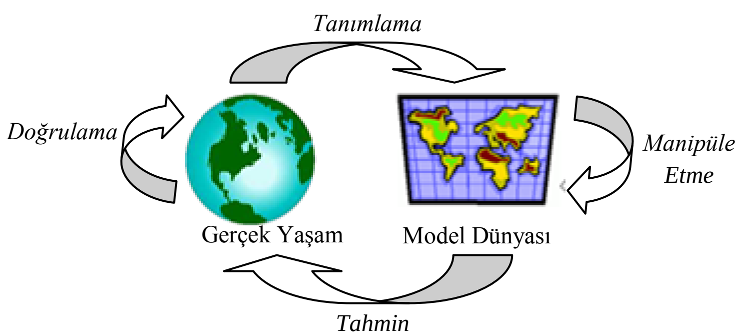
a. Problemi basitleştirme ve anlama; tabloyu, grafiği, sözel ifadeleri ve yapılan ve onlardan elde edilen çıkarımları anlama.

b. Problem manipüle etme ve bir matematiksel model geliştirme; değişkenleri ve aralarındaki ilişkileri tanımlama; hipotezler kurma; kavramsal bilgiyi değerlendirme ve modeller geliştirme.

c. Çözümü yorumlama; kararlar verme, sistemi analiz etme ve yeni sonuçlar önerme.

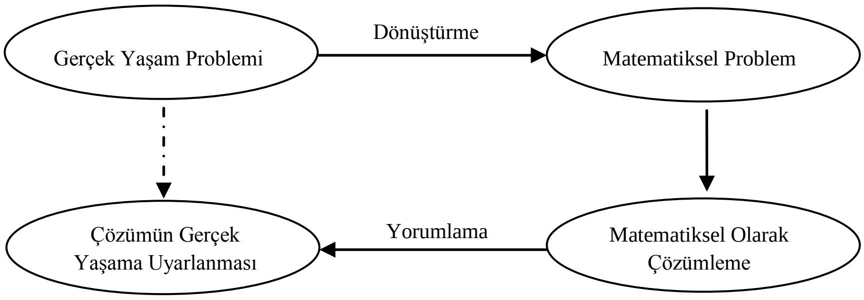
d. Çözümü gösterme ve doğrulama; çözümleri paylaşma ve genelleme; farklı açılardan çözümü değerlendirme.

Şekil 18. Modelleme Döngüsü (Lesh & Doerr, 2003)



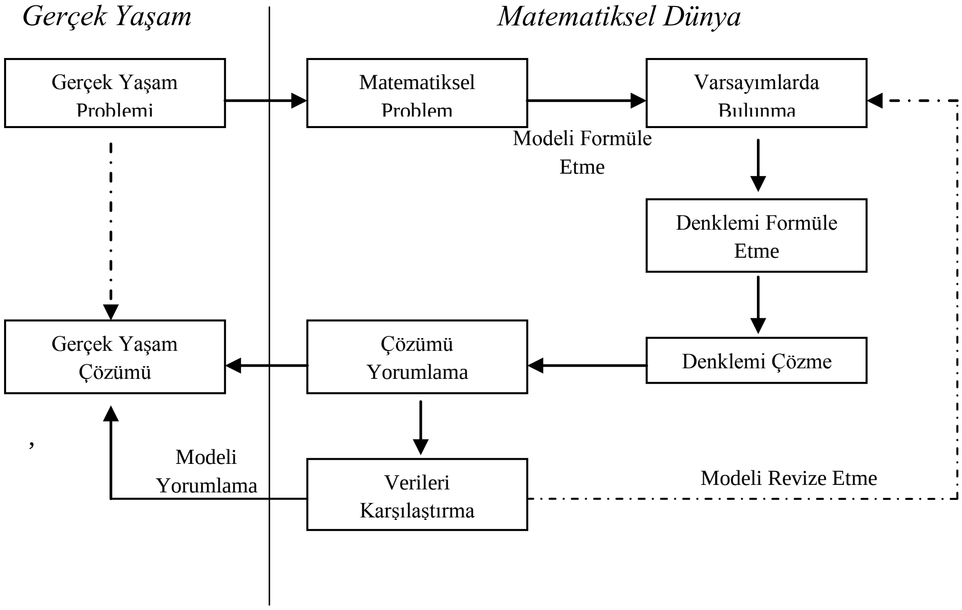
Ang (2001), matematiksel modellemeyi gerçek yaşam problemlerinin matematiksel terimlerle temsil edilme süreci, matematiksel modeli karmaşık bir gerçek yaşam durumunun yalın bir hali olarak ifade etmektedir. Matematiksel modelleme süreci gerçek yaşam problemlerinin matematiksel bir probleme dönüştürülmesiyle başlamakta, devamında matematiksel problem matematiksel teknikler kullanılarak çözülmekte ve elde edilen matematiksel çözümler gerçek yaşama uyarlanıp yorumlanmaktadır (bkz. Şekil 19). Ang'in (2001) süreç modeline bakıldığında bileşen ve basamakların ayrımına dikkat etmediği ikisini de süreç modelinde aynı şekillerde ele aldığı görülmektedir

Şekil 19. Modelleme Sürecinin Basit Bir Görünümü (Ang, 2001)



Ang'in (2010) "Teknoloji ile Matematiksel Modellemeyi Öğretme ve Öğrenme" isimli bir diğer çalışmasında Ang' daki (2006b) modelleme sürecini derleyerek daha ayrıntılı bir süreç modeli sunmaktadır (bkz. Şekil 20). Ang'e (2010) göre matematiksel modelleme süreci gerçek yaşam ve matematiksel dünya arasındaki yoğun bir etkileşimin iç içe olduğu bir süreci ifade etmektedir. Gerçek yaşam probleminden hareketle elde edilen matematiksel bir problemin çözümü gerçek yaşam durumunu temsil eden matematiksel modelin çözümünü içermektedir. Bu matematiksel model (denklem vb.) gerçek yaşam durumuna ilişkin yapılan varsayımlar, matematiksel yöntemler ve araçlar yardımıyla formüle edilmektedir.

Şekil 20. Matematiksel Modelleme Süreci (Ang, 2010)



Ang' e (2010) göre, matematiksel modellemede gerçek yaşam problem durumlarının gerçek verileri içermesi ve daha karmaşık değişkenleri ve etkenleri içerisinde barındırması problemi çözmek için gerekli matematiksel modelin yapısının da karmaşık olmasına neden olmaktadır ve bu gibi durumlarda da bilgisayar gibi teknolojik araçlardan yararlanılması gerekmektedir. Çünkü teknoloji kullanımı matematiksel modelin uygun bir şekilde yorumlanmasına ve doğruluğunun daha ayrıntılı ve sağlıklı bir şekilde irdelenmesine olanak sağlayan zengin bir süreç ortamını yaratılmasına neden olmaktadır (Ang, 2010). Aynı zamanda diğerlerinden farklı olarak süreç modelinde Ang'in (2010) problemi revize etme temel basamağına yer verdiği ve bu süreci doğrulama basamağından ayrı olarak ve doğrulamanın bir sonucu olarak ele aldığı görülmektedir. Modelleme sürecinde çözüm yorumlandıktan sonra verilerle karşılaştırılarak doğrulama yapılmaktadır. Bu doğrultuda, doğrulama sonrasında hata olduğu düşünülüyorsa, varsayımlarda bulunma temel basamağına geri dönülerek model revize edilmektedir.

Pedley (2005) matematiksel modelleme sürecindeki döngüsel yapının çözüm sürecindeki gerekli modelleme eylemlerinin keşfedilmesinde ve sürecin özünün ortaya çıkarılmasında büyük önem taşıdığını vurgulamaktadır. Bu doğrultuda modelleme sürecini altı temel basamakta ele almaktadır. Bu yaklaşıma göre, öncelikle gerçek problem durumu anlamlandırılarak matematiksel soru/problem oluşturulmaktadır. Sonra matematiksel soruya yanıt verebilmek için varsayımlar kurularak bir model formüle edilmektedir. Elde edilen matematiksel model analiz edilmekte ve matematiksel çıktılarla gerçeklik karşılaştırılmaktadır. Eğer çözümden memnun olunmamışsa, çözüm süreci gerçek yaşam durumunu açıklayacak yeterli bir çözüm bulunana dek tekrar edilmekte ve çözüm geliştirilmektedir (bkz. Şekil 21). Pedley'in (2005) modelleme sürecine bakıldığında son basamağın revize etme basamağına karşılık geldiği görülmektedir. Varsayım kurmaya temel basamakta yer vermekte ve modeli formüle etme ile birlikte 3. aşama olarak düşünmektedir. Bununla birlikte Pedley (2005), Penrose (1978), Mason (1988) ve Berry & Houston'ın (1995) matematiksel problemi çözme olarak ifade ettikleri temel basamağı modeli analiz etme olarak açıklayarak bu aşamada yapılan matematiksel analize vurgu yapmaktadır. Blum (1985) ise bu temel basamağı matematiksel çalışma olarak ifade etmektedir.

Şekil 21. Modelleme Süreci (Pedley, 2005)

1. Gerçek problem durumunu anlamlandırma

2. Uygun bir matematiksel soruyu oluşturma

3. Bir modeli formüle etme, basitleştirilmiş varsayımlar kullanma

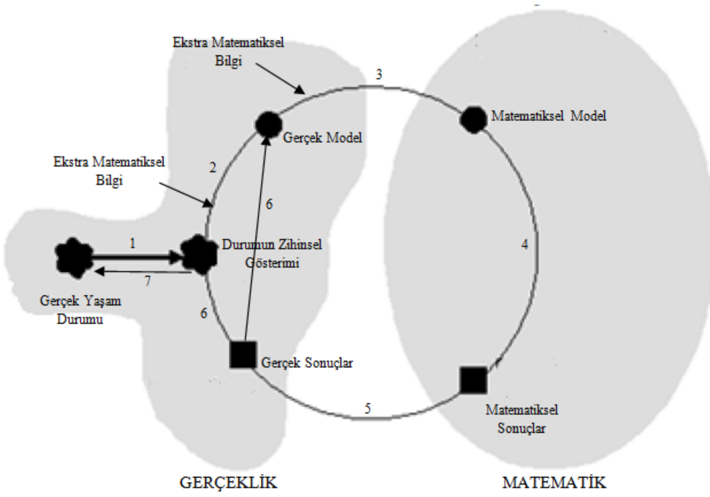
4. Modeli analiz etme

5. Gerçeklikle matematiksel çıktıları birleştirme

6. Bulunacak uygun bir çözüme kadar süreci tekrarlama ve geliştirme

Modelleme sürecini Blum'un (1985) modelini temel alarak geliştirmiş bilişsel modelleme yaklaşımını tam olarak dikkate alan ve süreç modeli çalışmalarının en kapsamlılarından biri Borromeo Ferri'nin (2006) çalışmasıdır (bkz. Şekil 22). Borromeo Ferri (2006), Blum'un (1985) süreç modelindeki genel düşünce yapısını dikkate alarak, bileşen ve basamak ayrımını gözetmekte ve süreçteki bilişsel eylemleri ayrıntılı olarak ortaya çıkarmaktadır.

Şekil 22. Modelleme Döngüsü (Borromeo Ferri, 2006; Blum, 2011)



1- Problemi anlama

2- Problemi basitleştirme ve yapılandırma (Problem için gerekli ekstra matematiksel bilgileri kullanma)

3- Matematikselleştirme (Ekstra matematiksel bilgiye güçlü bir şekilde ihtiyaç duyulur.)

4- Matematiksel olarak çalışma (Bireysel matematiksel becerileri kullanma)

5- Yorumlama

6- Doğrulama

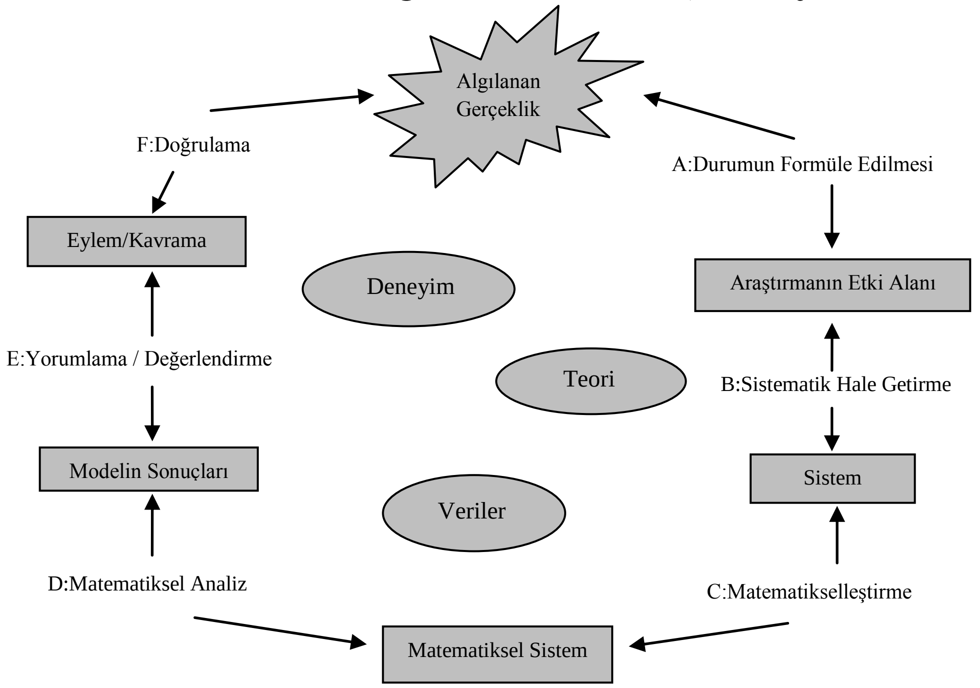
7- Sunma

Borromeo Ferri (2006) matematiksel modellemedeki zihinsel süreçleri açıklarken sürece ilişkin birçok yeni kavramı ortaya koymaktadır. Örneğin süreçte ortaya çıkan durum modeli ve durumun zihinsel gösterimi gibi yeni kavramlarla süreci daha da ayrıntılandırmaktadır. Bununla birlikte, doğrulamada sezgisel ve bilgiye dayalı iki farklı doğrulamanın gerçekleştiğinden bahsetmektedir. Öğrencilerin modelleme sürecindeki matematiksel düşünme stillerini görsel (visual), analitik (analytic) ve birleştirici (integrated) bağlamında incelemektedir. Blum & Leiβ'de (2005) matematiğin dışında kalan dünya (rest of the world) ve Blum & Leiβ'de (2007) gerçek yaşam olarak tanımlanan evreni çalışmasında gerçeklik olarak ifade etmektedir. Bunun yanında, Penrose (1978), Maull & Berry (2001), Berry & Houston (1995) ve Berry & Davies'in (1996) raporlaştırma veya rapor yazma olarak ifade ettiği temel basamağı Borromeo Ferri (2006) sunma (presenting) olarak vurgulamaktadır. Blum & Leiβ (2007) bu basamağı açığa çıkarma (exposing) olarak ifade etmektedir. Bir başka ifade ile, Borromeo Ferri' ye (2006) göre modelleme sürecinde gerçek sonuçlar yorumlandıktan sonra elde edilen son zihinsel modelin gerçek yaşam durumunu ayrıntılarıyla ortaya koyması açısından sunma gerçekleştirilmektedir. Borromeo Ferri (2006) matematiksel modelleme sürecindeki ilk basamağı problemi anlama olarak ifade etmektedir. Blum & Leiβ' e (2007) göre, bilişsel yaklaşım temelli matematiksel modelleme süreci ilk olarak kesinlikle problemi okumayı ve hem gerçek yaşam durumunu hem de problemin ne olduğunu anlamayı içermelidir. DISUM projesi kapmasında Blum & Leiβ'in (2007) bu ilk basamağı problemi anlama değil de yapılandırma olarak ifade ettiği görülmektedir. The COM²-project (Borromeo Ferri, 2010) bu projeden daha kapsamlı bir bilişsel görüşe sahip çalışma olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu projede öğrencilerin matematiksel düşünme stillerinin arkasında yatan bilişsel teoriye odaklanılmaktadır. Bu projenin temel sonucu, öğrencilerin sınıftaki modelleme aktivitelerinin üstesinden gelirken bireysel modelleme döngülerini tekrardan yapılandırdıklarıdır. Bu durum öğrencilerin matematiksel düşünme stillerinin modelleme davranışlarının üzerinde güçlü bir etkisinin olduğunu göstermektedir (Borromeo Ferri, 2011).

1980'lerden bu yana sınıflarda etkili matematiksel modelleme uygulamalarının gerçekleştirilmesinde ve bu şekilde etkili bir öğrenme ortamının oluşturulmasında öğretici ve bağlamsal yaklaşımlarla gerçekleştirilen çalışmalar önemli olmakta ve bu tür çalışmalar bilişsel yaklaşım ile gerçekleştirilmiş süreç çalışmalarını temel alarak modellemenin gösterimlerine, güçlüklerine ve gerekli becerilerine odaklanmaktadır (Haines & Crouch, 2010).

Blomhøj & Jensen (2006) süreci altı temel basamak ve altı temel bileşen çerçevesinde ele alarak süreç modelini döngüsel olarak ifade etmektedir (bkz. Şekil 23). Blomhøj & Jensen'in (2006) süreç modeline bakıldığında temel basamakları durumun formüle edilmesi, sistematik hale getirme, matematikselleştirme, matematiksel analiz, yorumlama/değerlendirme ve doğrulama olarak karşımıza çıkmaktadır.

Şekil 23. Modelleme Döngüsünün Bir Modeli (Blomhøj & Jensen, 2006)



A: Durumu Formüle Etme: Gerçek yaşam durumunu daha az veya çok ilgilendiren özellikler tanımlanmaktadır. Bu problemi çözebilmek ve gerçek yaşam durumunu temsil eden zihinsel modeli oluşturabilmek için gereklidir.

B: Sistematik Hale Getirme: Durumun olası matematiksel gösterimini yapabilmek için ilgili nesneler ve ilişkiler belirlenmektedir. Bu süreçte teorik yapıyı oluşturma, deneyimlerden yararlanma ve üst düzey varsayımlarda bulunma davranışları ileri aşamada matematiksel sistemin kurulmasına olanak sağlamaktadır.

C: Matematikselleştirme: Oluşturulan sistemdeki nesneler ve ilişkiler tutarlı bir şekilde matematiksel olarak ifade edilmekte ve matematiksel sistem ortaya çıkarılmaktadır.

D: Matematiksel Analiz: Matematiksel sistemden hareketle matematiksel yöntemler kullanılarak modelin sonuçları elde edilmektedir.

E: Yorumlama/Değerlendirme: Araştırmanın etki alanı dikkate alınarak elde edilen modelin sonuçları yorumlanmakta ve değerlendirilmektedir.

F: Doğrulama: Deneyimlerle, gözlemlerle ve tahmini verilerle veya teorik bilgilerden yararlanarak modelin ve modelden elde edilen sonuçların doğruluğu sorgulanmaktadır.

Voskoglou (2006) ICME 3 (1976), Berry & Davies (1996), Pollak (1979) ve Edwards & Hamson'ın (1996) modelleme süreci hakkındaki açıklamalarını dikkate alarak matematiksel modelleme sürecinin temel basamaklarını problemin analizi, matematikselleştirme, modelin çözümü, modelin doğrulanması ve modelin yorumlanması olarak ifade etmektedir. Voskoglou'nun (2006) süreç modeline göre modelin doğruluğu incelendikten sonra çözümün tatmin edici bir sonuca ulaştırmadığı düşünüldüğünde, matematikselleştirme basamağına geri dönüş gerçekleşmektedir. Voskoglou (2006), süreç modelinde farklı olarak sonuçların yorumlanması basamağını doğrulamadan daha sonra ele almaktadır. Ayrıca Voskoglou'a (2006) göre, sonuçların yorumlanmasından sonra problemin analizine tekrar dönüş yapılması öğrencilerin yeni bir problem durumuyla karşılaşarak süreci tekrar yaşaması anlamına gelmektedir. Bu doğrultuda süreç modelinde modelleme sürecini (flow-diagram) beş basamakta ele almaktadır (bkz. Şekil 24).

S1. Problemin analizi: Problem durumu anlaşılmakta ve gerçek yaşam durumu için gereksinimler ve sınırlandırmalar ortaya konulmaktadır.

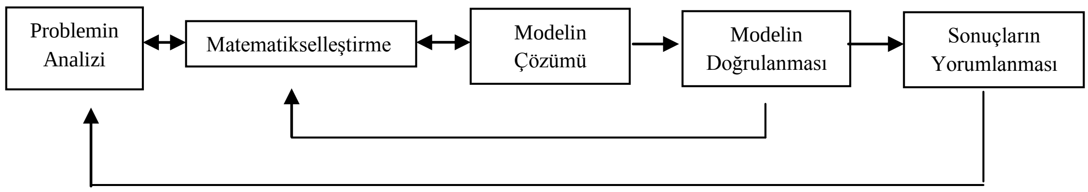
S2: Matematikselleştirme: Matematiksel olarak bir çözüm sağlanmakta ve modelin kurulması için gerçek yaşam durumu formüle edilmektedir.

S3: Modelin çözümü: Elde edilen model kullanılarak çözüm uygun matematiksel işlemlerle elde edilmektedir.

S4: Modelin Doğrulanması: Modelin çözümünden önce var olan şartlar altındai gerçek yaşam durumu, davranışlarla karşılaştırılmakta ve gerekirse model yeniden üretilmektedir.

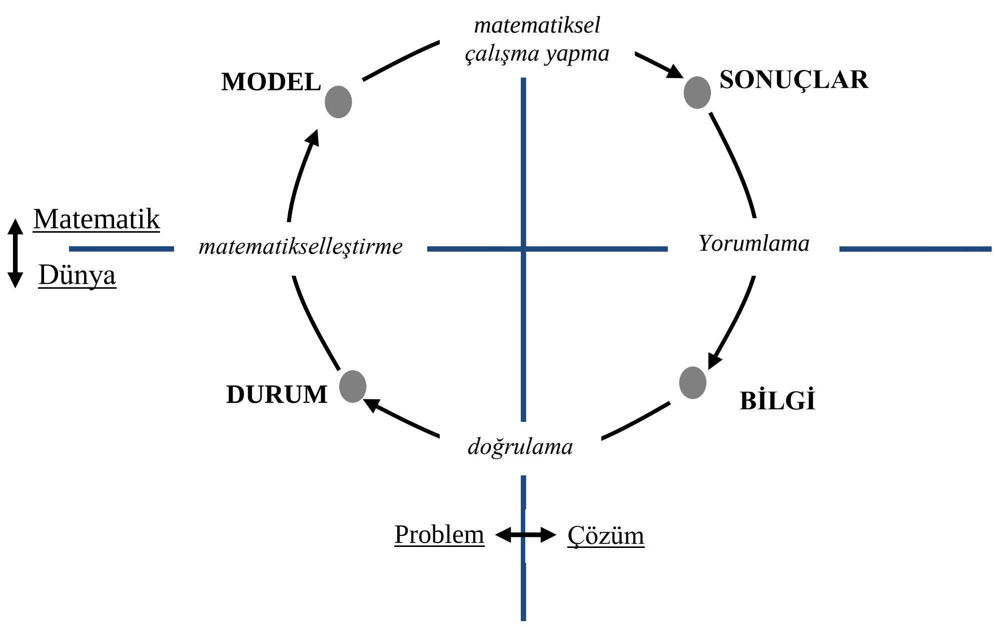
S5: Probleme cevap vermek için elde edilen son matematiksel sonuçların yorumlanması yapılmakta ve bu sonuçlar gerçek yaşam durumuyla ilişkilendirilerek çözümde öne çıkan önemli etkenler ifade edilmektedir.

Şekil 24. Matematiksel Modelleme Sürecinin Akış Diyagramı (Voskoglou, 2006)



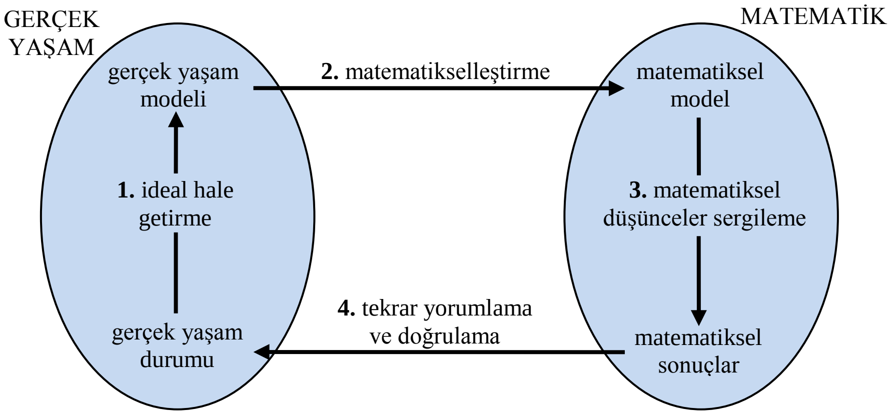
Neubrand (2013), çalışmasında süreç modelinde Schupp'un (1988) düşüncelerini temel alarak süreci kategorilendirmede dört temel karardan bahsetmektedir. Buna göre çözümde süreç modeli dört temel bölmeden meydana gelmektedir (bkz. Şekil 25). Dikey geçiş gerçek yaşamdan matematiğe, yatay geçiş ise problemden çözüme geçişi temsil etmektedir. Ayrıca süreç modelinde bileşen ve basamak arasındaki ayrımı dikkate almaktadır. Süreç modeli durum, model, bilgi ve sonuç olmak üzere dört bileşenden, matematikselleştirme, matematiksel çalışma yapma, yorumlama ve doğrulama olmak üzere dört basamaktan oluşmaktadır.

Şekil 25. Matematiksel Modelleme Sürecindeki Bilişsel Eylemlerin Döngüsü (Neubrand, 2013)



Schwarz, Wissmach and Kaiser (2008) modelleme sürecinin yapısını açıklarken gerçek yaşamdan matematiğe geçişin matematikselleştirme basamağında, matematikten gerçek yaşama geçişin ise yorumlama ve doğrulama basamağında gerçekleştiğini ifade etmektedir. Diğer basamaklardan biri olan ideal hale getirme, gerçek yaşam durumundan gerçek yaşam modeline ulaşırken gerçek yaşam evreni içerisinde gerçekleşmektedir. Matematiksel düşünceler sergileme basamağı, matematiksel modelden matematiksel sonuçlar elde edilirken matematiksel dünyada gerçekleşmektedir. Blum (1996) ve Kaiser'in (1995) araştırmalarını dikkate alarak gerçekleştirilen bu çalışmada, süreci açıklarken özellikle bileşen ve basamaklar arasında ayrıma dikkat çekilmekte ve bu doğrultuda süreç iki temel evren, dört temel basamak ve dört temel bileşen kapsamında genel ve sade bir şekilde ortaya koyulmaktadır (bkz. Şekil 26).

Şekil 26. Modelleme Döngüsü (Kaiser, 1995; Blum, 1996'dan adapte eden Schwarz, Wissmach and Kaiser, 2008)



Ärlebäck & Bergsten (2010), Schoenfeld'in (1985) süreç modelini ve özelliklerini dikkate alarak kendi süreç modelini beş modelleme eylemi çerçevesinde ele almaktadır (bkz. Şekil 27). Bu doğrultuda matematiksel modelleme süreci problemi okuma ile başlamakta ve raporlaştırma basamağıyla son bulmaktadır. Matematiksel dünyaya geçiş model kurma basamağında gerçekleşmekte ve matematikselleştirme ifadesi de bu temel basamak içerisinde kendisine yer bulmaktadır. Bunun yanında, bu süreç modelinin diğerlerinden en büyük farkı tahmin etme eyleminin temel basamaklar arasında kendisine yer bulmasıdır. Ayrıca, sürecin son basamağı yazma olarak ifade edilmektedir.

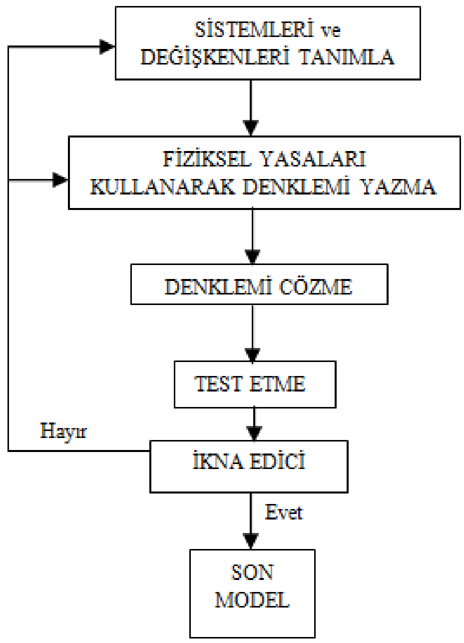
Şekil 27. Modelleme Süreci (Schoenfeld 1985'den adapte eden Ärlebäck & Bergsten 2010)

1. Problemi okuma:	Problem okunmakta ve anlamlandırılmaktadır.
2. Modeli kurma:	Problem basitleştirilmekte, yapılandırılmakta ve matematikselleştirilmektedir.
3. Tahmin etme:	Problemin gerçek durumuna uygun sayısal tahminler yapılmaktadır.
4. Hesaplama	Elde edilen denklemler ya da grafikler doğrultusunda problem çözülmektedir.
5. Doğrulama	Elde edilen sonuçlar, hesaplamalar ve model yorumlanmakta ve doğruluğu irdelenmekte ve doğru hale getirilmektedir.
6. Yazma	Problemde elde edilen bulgular özetlenmekte ve bir rapor haline getirilmekte, çözüm yazılı hale getirilmektedir.

Ärlebäck & Bergsten'ın (2010) süreç modelinde problemi okuma basamağı Borromeo Ferri'nin (2006) problemi anlama basamağıyla, modeli kurma basamağı problemi basitleştirme/yapılandırma ve matematikselleştirme basamağıyla, hesaplama basamağı matematik olarak çalışma basamağı ile doğrulama basamağı ise yorumlama ve doğrulama basamaklarıyla paralellikler göstermektedir.

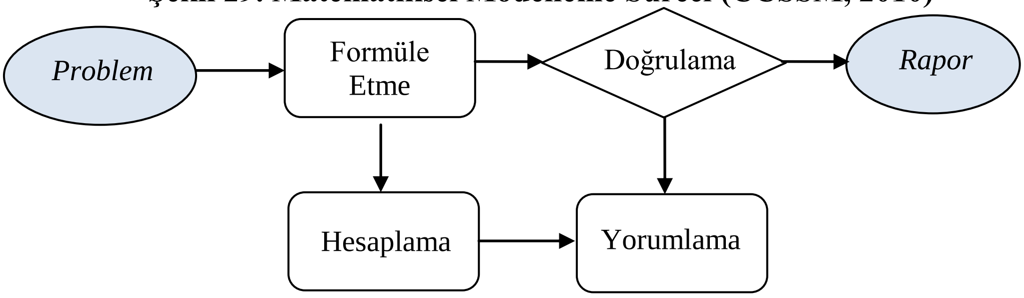
Matematiksel modelleme sürecine ilişkin çalışmalar teknoloji, mühendislik, ekonomi, fizik, kimya vb. gibi birçok alandaki ihtiyaçlara açıklamalar getirmekte ve modelleme süreci bu yüzden önemli görülmektedir. Mühendislik alanında çalışmalar yapan Bazoune'a (2010) göre, matematiksel modelleme sürecinde ilk olarak sistemler ve değişkenler tanımlandıktan sonra fiziksel yasalardan yararlanarak matematiksel bir denkleme ulaşılmaktadır (bkz. Şekil 28). Matematiksel denklem kurulduktan sonra çözülmekte ve elde edilen sonuçların doğruluğu test edilmektedir. Eğer ikna edici bir sonuca ulaşıldıysa, modelin son haline ulaşılmaktadır. Eğer ikna edici bir modele ulaşılmadıysa, birinci veya ikinci temel eyleme dönülerek süreç tekrar edilmektedir. Bu süreç modelinde bileşen ve basamak ayrımına yer verilmemektedir. Çalışma mühendislik alanının bakış açısını içerdiğinden dolayı modelleme sürecinde fizik yasalarının ikinci basamağın önemli bir bileşeni olduğu görülmektedir.

Şekil 28. Matematiksel Modelleme Sürecinin Akış Diyagramı (Bazoune, 2010)



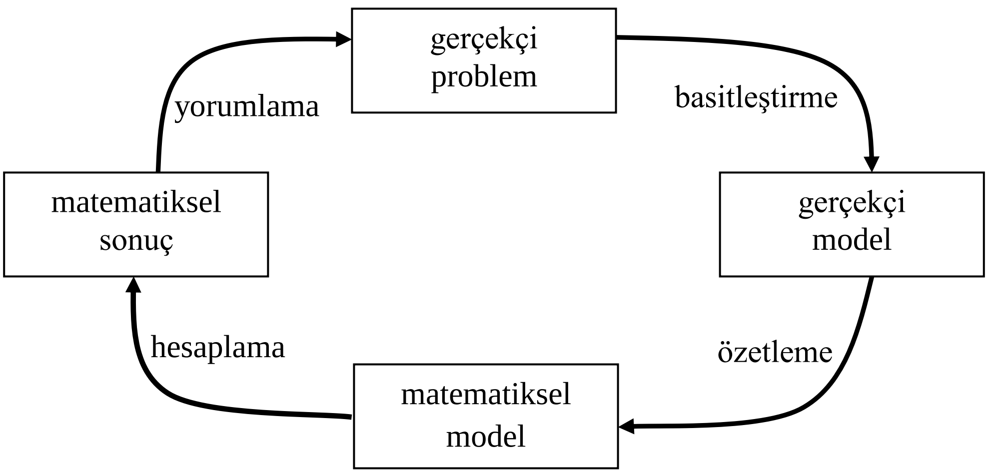
CCSSM (2010) [Common core state standarts for mathematics] raporunda öğrencilerin modelleme becerilerinin ortaya çıkarılmasında ve geliştirilmesinde modelleme sürecindeki zihinsel eylemlerin büyük önem taşıdığı ve onların sürecin yapısına ilişkin daha fazla şey bilmelerinin başarılarını arttıracağı ifade edilmektedir. Bu doğrultuda, modelleme döngüsü problem ile başlamakta ve rapor temel bileşeniyle son bulmaktadır (bkz. Şekil 29). Modelleme sürecinin temel basamakları formüle etme, hesaplama, yorumlama ve doğrulamadır. Süreç modelindeki temel basamaklar için bir öncelik sonralık ilişkisine yer verilmediği, daha çok bileşen ve basamakların ayrımının dikkate alınarak en temel zihinsel eylemlerin ortaya koyulduğu görülmektedir. Süreçte öğrenciler iki şekilde doğrulama basamağına geçiş yapmaktadır. Bunlardan biri formüle etmeyi tamamladıktan sonra, diğeri ise hesaplama ve yorumlamayı gerçekleştirdikten sonra olmaktadır.

Şekil 29. Matematiksel Modelleme Süreci (CCSSM, 2010)



Tatsis'e (2010) göre matematiksel model, sistemlerin yapısal karakteristiklerine odaklanmakta ve bu şekilde karmaşık bir sistemi tanımlamada, açıklamada ve yapılandırmada önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. Tatsis (2010), modelleme sürecini dört temel bileşen (gerçekçi problem, gerçekçi model, matematiksel model, matematiksel sonuç) ve dört temel basamak (basitleştirme, özetleme, hesaplama, yorumlama) çerçevesinde açıklamaktadır. Bu süreci diğerlerinden ayıran temel unsur, ikinci temel basamağın özetleme olarak ifade edilmesidir. Ayrıca, doğrulama basamağına süreç modelinde yer vermediği görülmektedir (bkz. Şekil 30).

Şekil 30. Modelleme Döngüsü (Tatsis, 2010)



Biccard & Wessels (2011), modelleme süreci üzerine yapılmış bazı önemli araştırmaları dikkate alarak ve onlardaki düşünceleri düzenleyerek matematiksel modellemedeki önemli on bir temel basamağı ortaya koymakta ve bu şekilde modelleme döngüsünü açıklamaktadır. Buna göre, matematiksel modelleme süreci birçok önemli alt süreci içerisinde barındırmaktadır ve bu durum zengin bir modelleme sürecini ortaya çıkarmaktadır:

Anlama: Bir şeyin gerçek yaşamdaki doğasını bilmek ve anlamlandırmaktır. Eğer bir gerçek yaşam durumu anlamlandırılıyorsa, karmaşık yapısından dolayı onu dolaylı olarak açıklayabilecek varsayımlar oluşturulmalıdır. Anlama, bireyin duruma ilişkin deneyimlerini ortaya çıkarmasını ve durumun kapsamını irdeleyebilmesini sağlamaktadır.

Basitleştirme: Problemi çözmek için gerekli olan stratejik etkenleri ve özelliklerini ayırt edebilmektir. Verilerin önemli bir örneğini seçerek kullanmada ve yapılan seçimlerin nedeni açıklamada büyük önem taşımaktadır.

Matematikselleştirme: Gerçek yaşam durumunu gerçek yaşamdan matematiksel dünyaya dönüştürmektir. Gerçek yaşam durumunun hangi matematiksel kavramlarla açıklanabileceği belirlenmektedir.

Matematiksel çalışma yapma: Matematiksel dünyaya taşınmış problem durumuna yanıt vermek için gerekli matematiksel işlemler ve yöntemler seçilmektedir. Problemi çözmek için gerekli olan matematiğin türüne (burada kastettiği yöntem-teknik bilgisi, yardımcı araçları kullanma ve bunun matematik ile uyumlu olması, matematiksel işlemlerin duruma uygun gerçekleştirilmesi gibi) dikkat edilmektedir.

Yorumlama: Borromeo Ferri (2006) yorumlamayı matematiksel sonuçların gerçek yaşam durumunda tekrar yorumlaması olarak görmektedir. Matematiksel sonuçların bir anlam kazanabilmesi için problemin gerçek yaşam durumu dikkate alınarak tekrar değerlendirilmesi gerekmektedir.

Doğrulama: Elde edilen matematiksel sonuçların gerçek yaşam durumu için geçerli olup olmadığı değerlendirilmekte ve çözümün etkililiği ile ilgili bir karara varılmaktadır.

Sunma: Mousoulides, Sriraman & Christou'ya (2007) göre, öğrencilerin düşüncelerini açık ve bütüncül bir şekilde açıklamalarıdır. Lesh & Doerr (2003) bunu "trail of documentation" olarak ifade etmektedir.

Tartışma: Çözümde yapılanlar anlatılırken gerçekleşen tartışmalar çözümdeki eksikliklerin veya tutarsızlıkların ortaya çıkarılmasını sağlamaktadır.

Yönü tahmin etme: Treilibs, Burkhardt & Low'un (1980) ortaya attığı bu modelleme yeteneği, kişinin veya grubun sürecin başından itibaren ileriki aşamalarda neye nasıl ulaşacaklarını bilmesini kapsamaktadır.

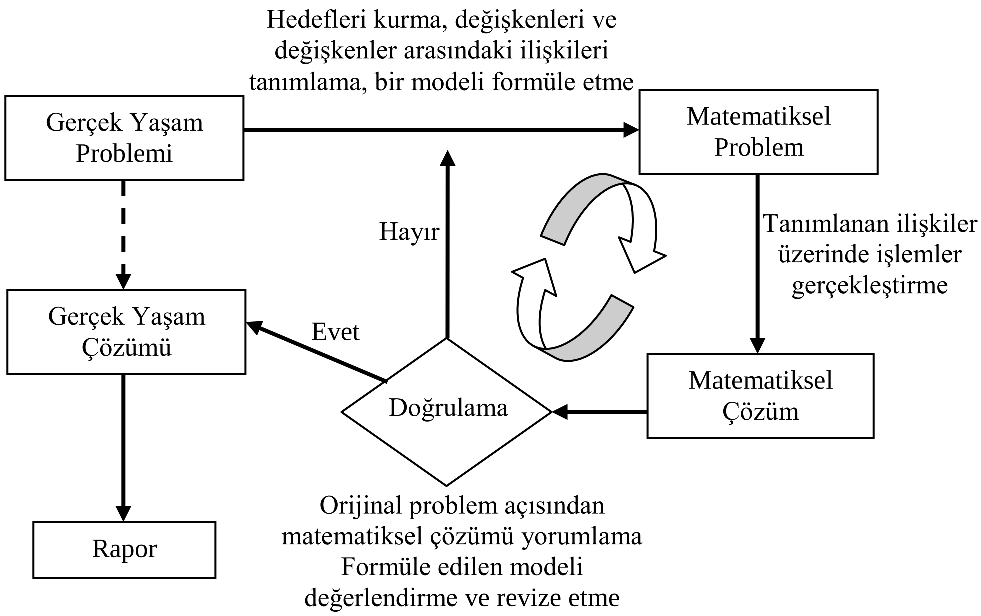
İnformal bilgiyi kullanma: Mousoulides et al.' e (2007) göre, modelleme sürecinde informal bilgiler ortaya çıkmakta ve bu informal bilgiler matematiksel modellemenin özellikle matematiksel alanı ilgilendirmeyen kısımlarının üstesinden gelmede çözüm için kullanılmaktadır.

Planlama ve izleme: Çözüm sürecinde düşünceler organize edilmekte ve çözüm döngüleri denetlenmektedir. Bu yetenek veya zihinsel eylem çözücünün problem sürecini nasıl yürüttüğüyle yakından ilişkilidir.

İnançlar: Blomhøj & Jensen (2007), modelleme sürecinde yönlendirmenin olmamasından veya aşırı derecede çözüm yolunun ortaya çıkmasından dolayı yaşanan şaşkınlık duygusuyla baş edilebilecek bir öğrenme olarak modellemede tanımlamaktadır. Buna göre, çözücülerin modelleme sürecinde sahip oldukları inançları onların zorlukların üstesinden gelmelerinde büyük önem taşımaktadır. Modelleme sürecinde ortaya çıkan inanışlar, matematik hakkındaki inançlar, problemin doğası hakkındaki inançlar, gerçek yaşam durumunu çözmede matematiğin önemine ve problemin nasıl çözüleceğiyle ilgili inançlar olarak ifade etmektedir.

Kang & Noh (2012) literatürdeki Abrams (2001), Dossey, McCrone, Giordano, & Weir (2002), Kang (2010); Meyer (1984), NCTM (1989), Swetz & Hartzler'ın (1991) çalışmalarını dikkate alarak matematiksel modelleme sürecini beş temel bileşen (gerçek yaşam problemi, matematiksel problem, matematiksel çözüm, gerçek yaşam çözümü ve rapor) ile ele almaktadır (bkz. Şekil 31). Buna göre, modelleme sürecinde sonuca ulaşabilmek için hedefler kurulmakta ve durum incelenmektedir. Gerçek yaşam durumundaki değişkenler tanımlanmakta ve temel özelikleri temsil eden değişkenler seçilmektedir. Sonra değişkenler arasındaki ilişkilerin tanımlandığı geometrik, grafiksel, tablo, cebirsel veya istatistiksel gösterimler seçilerek ve oluşturularak bir model formüle edilmektedir. Sonuçlara ulaşmak için, bu ilişkilerdeki işlemler gerçekleştirilmekte ve analiz edilmektedir. Gerçekleştirilen işlemlerin sonuca ulaşmadığı durumlarda, modeli formüle etmede kullanılan değişkenlerin seçimi tekrar gözden geçirilmekte ve model revize edilmektedir. Eğer sonuçlara ulaşıldıysa, elde edilen bu matematiksel sonuçlar orijinal durum açısından yorumlanmaktadır. Durum ile karşılaştırılan sonuçlar doğrulanmaktadır. Sonra ya model tekrar geliştirilmekte ya da kararlar kabul edilerek model arındırma ve değerlendirme için benzer durumlara uygulanmaktadır. Modellerin spesifik durumlar için kurulması ve gerçek yaşam durumunun biraz değişimi sürekli test etmeyi ve modeli revize etmeyi gerektirmektedir. Bu yüzden süreç boyunca sergilenen seçimler, varsayımlar ve yaklaşımlar modelleme döngüsü boyunca var olmaktadır.

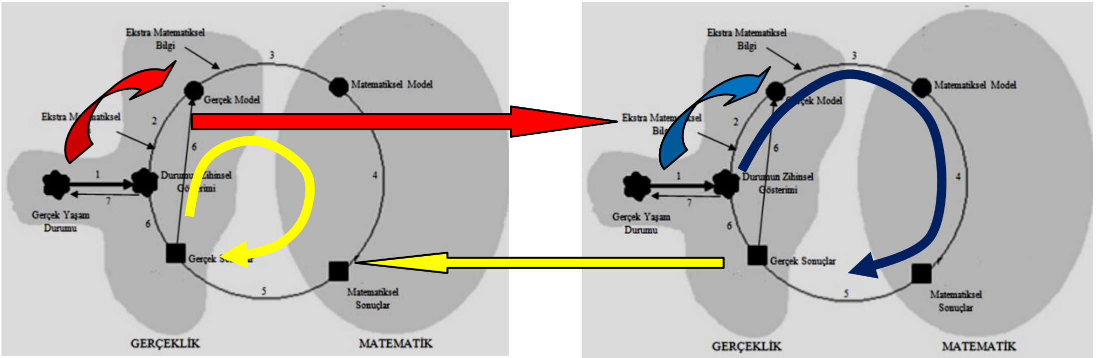
Şekil 31. Matematiksel Modelleme süreci (Kang & Noh, 2012)



Matsuzaki (2011), Saeki & Matsuzaki (2011), Kawakami, Saeki & Matsuzaki (2012), Lamb, Kawakami, Saeki & Matsuzaki (2014) matematik öğretiminde “dual modeling process” kavramını ele almaktadırlar (bkz. Şekil 32). Buna göre Saeki & Matsuzaki (2013), ikili (dual) modelleme ile öğrencilere verilecek iki modelleme problemine ilişkin gerçek yaşam durumundan ikinci problem için bir çözüm geliştirirlerken daha basit ve benzer matematiksel modeller kullanmak için ilk modelleme döngüsünden yaralanmaları ve bu iki modelleme döngüsü arasında geçiş yapmaları sağlanmaktadır. Bu şekilde öğrencilerin farklı becerilerinin geliştirileceği ve zihinsel olarak zengin bir sürecin sağlanacağı ifade edilmektedir. Hıdıroğlu’na

(2012) benzer olarak, çözümde öğrencilerin birden fazla matematiksel model ile alakadar olmaları onların zihinsel süreçlerindeki zenginliği arttırmaktadır.

Şekil 32. Dual Modelling Süreç Yapısı (Saeki & Matsuzaki, 2013)



Şen Zeytun (2013) doktora tez çalışmasında modelleme sürecindeki zihinsel eylemleri anlamlandırma, planlama, çalışma, yorumlama & doğrulama olarak dört temel basamakta açıklamaktadır. Bu doğrultuda çalışmada her bir temel basamaktaki zihinsel eylemlere ilişkin açıklamalar aşağıda verilmektedir:

Anlamlandırma

1. Doğru anlamayı sağlamak için problemi okuma veya tekrar okuma

2. Matematiksel yapı, matematiksel içerik, zorluk düzeyi, problemin bağlamsal çerçevesi açısından problemi değerlendirme

3. verilen bilgileri özetleme (anahtar noktaları yazma, çizimler yapma)

Planlama

1. zihinde problem durumunu görselleştirme ve temsil etme.

a. problem durumunda sahip olduklarını görselleştirme

b. bağlamdan bağımlı/bağımsız görselleştirmeler

2. Plan tasarlama

a. problem ile önceki deneyimlerini ilişkilendirme

b. kriterleri ve değişkenleri tanımlama

c. varsayımlarda bulunma

-Problemi kolayca çözebilmek için varsayımları basitleştirme

-Sezgisel cevapların doğruluğunu güçlendirmek için varsayımları destekleme

-Problem bağlamında bilgiye dayalı olan varsayımlar

d. durumun modelini çizme

e. kullanmak üzere matematiksel kavramları araştırma

f. sezgisel cevaplarını ispatlayacak ve matematiksel ifade veya formülle sonuçlanacak bir planı yapılandırmayı hedefleme

3. bir çözüm yoluna karar verme

a. gerçek yaşam tabanlı sezgisel kararlar kurma

b. elverişli ve uygun çözüm yolunu seçme

c. genel bir çözüm yaklaşımına karar verme ve hemen uygulamaya geçme

d. grup üyelerinin çözümünden birini kullanmaya karar verme

Çalışma

1. Sezgisel kararlara dayalı bir planı harekete geçirme (matematiksel değil)

2. Matematiği kullanarak planı harekete geçirme

a. matematiksel olarak temsil etme

b. matematiksel olarak ilerlemek için stratejileri uygulama

-Bir düşünceyi ileri sürmek veya bir çözüme ulaşabilmek için özel durumları kullanma

- Problemi daha kolay bir şekilde çözmek için verilenleri yönlendirme
- Bilinmeyen değişkenler ve ilişkiler hakkında tahminde bulunma
- Bir çözüme ulaşabilmek için önemli değişkenleri elemek
- Diğer arkadaşları tarafından geliştirilmiş düşünceler üzerine çalışma
- Amacı inceleme
- Farklı yürütülen stratejileri kullanma

3. İfadeleri birleştirme

a. varsayımlar yaparak

b. mantıksal kanıtlarla

c. kıyaslanabilir şekildeki ifadeleri yazarak

Yorumlama ve Doğrulama

1. yorumlama yok veya doğrulama

2. yorumlama/yanlış yorumlama

3. doğrulama

a. ulaşılan çözümü gerçek yaşamda yorumlayarak doğrulama

b. çözümün doğruluğunu kontrol etmek için matematiksel gerçeklerden veya değişkenlerin özel değerlerinden yararlanma
c. amacı tatmin eden cevap olup olmadığını çapraz kontrol etme
d. modelin doğruluğunu kontrol etmek için otoriteye sorma

Şen Zeytun (2013) modelleme sürecindeki zihinsel eylemlere ilişkin çalışmasında modelleme sürecini olumsuz etkileyen etmenleri öğrencilerin modelleme problemlerine ilişkin deneyimlerinin olmayışına, matematikteki kavramlara ilişkin kavramsal anlamalarının zayıf olmasına, tek bir sonuca ulaşmaya odaklanmalarına, matematiksel dünya ile gerçek yaşam arasındaki ilişkiyi kuramamalarına, düzensiz ve sistematik olmayan problem çözme sürecini yaşatmalarına, zamanın yetersiz olmasına bağlamaktadır. Tüm bu etkenlere bakıldığında öğrencilerin hem bilişsel hem de üst bilişsel eylemlerde yaşadıkları güçlükler bu durumların oluşmasına zemin hazırlamaktadır.

Matematiksel Modelleme ve Üst Biliş İlişkine Yönelik Yapılan Araştırmalar

Problem çözme sürecindeki üst bilişsel eylemlerden bahsedilen en eski çalışmalardan biri Pólya'nın (1945) "How to Solve it?" kitabıdır. Her ne kadar üst biliş kavramı Flavell tarafından 1979'da tam anlamıyla literatüre kazandırılsa da Pólya'nın (1945) problem çözerken öğrencilerin uygulaması gereken strateji, yöntem ve teknikleri açıklarken problem çözme sürecinde ortaya çıkan üst bilişsel eylemlere de değindiği görülmektedir. Öncelikle Pólya'nın (1945; 1973) biliş ve üst biliş kavramlarının ve bu kavramlar arasındaki ayrımın farkında olmamasına rağmen üst bilme (meta-knowledge) kavramına değindiği görülmektedir. Stewart 1990'daki Pólya'nın önsözünde üst bilme hakkında şöyle demiştir:

> "Kısacası problem çözmeye çalışan öğrencinin saldırısında ne zaman ilerleme kaydettiğini ne zaman çıkmaz sokakta sıkışıp kaldığını sezme yeteneğini geliştirmesi gerekmektedir. Bunun anahtar sözcüğü ise üst bilmedir (Pólya, 1990; xvi)."

Pólya (1945) problem çözme sürecinde problem için saldırı planının tasarlanması gerektiğini ifade ederek, aslında üst bilişsel eylemlerden planlamaya vurgu yapmaktadır. Bununla birlikte, problemin ilk olarak net bir şekilde amacının ortaya koyulmasının gerekli olduğunu ifade etmektedir. Bu da üst bilişsel planlama eylemlerinden biridir. Pólya (1945) planın uygulanmasında ise uygulanacak her adımın kontrol edilmesinden bahsetmektedir. Burada da üst bilişsel eylemlerden izlemeye vurgu yapmaktadır. Problem çözme sürecinde her çözüm adımının doğruluğunun çözücü tarafından kanıtlanması gerektiğini vurgulamaktadır. Burada da üst bilişsel eylemlerden değerlendirmeye vurgu yapmaktadır. Son basamak olarak da çözümdeki düşünceler hakkında bir düşünceye varma ile tekrar değerlendirmeye vurgu yapmaktadır ve hatta üst biliş kavramının tanımından bahsetmektedir. Genel olarak, Pólya'nın (1945) öne sürdüğü teknikler bilişsel eylemlerin düzenlenmesini amaçladığından ve üst bilişsel eylemlerin de temel amacının bilişsel eylemleri düzenlemek olmasından dolayı tekniklerinin yapısında üst bilişsel eylemleri görmek mümkün olmaktadır. İleriki yıllarda yapılmış çalışmalarda üst biliş kavramına yönelik farkındalığın oluşmasında Pólya'nın (1945) çalışmasının oldukça önemli olduğu görülmektedir. Örneğin problem çözmede eski deneyimlerden yararlanma, eski ve yeni düşünceler arasında bağlantılar kurma üst bilişsel planlama eylemlerinden bazıları olarak karşımıza çıkmaktadır. Pólya (1945) öğrencilerin bu problem çözme evrelerinden ve tekniklerinden haberdar olmaları gerektiğini de ifade ederek süreç boyunca bu düşüncelerini problem çözmede uygulamalarını (yani izleme yapmalarını) önermektedir. Bu durum da üst bilişsel izleme eyleminin bir sonucu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Üst Biliş Kavramının Gelişimi

Kısaca düşünme hakkında düşünme olarak ifade edilebilecek (Blakey & Spence, 1990) üst biliş bireyin kendi bilişsel yapıları (strateji, bilgi ve beceriler gibi) hakkında sahip olduğu zihinsel aktiviteleridir. Üst biliş kavramı birçok bilim insanı tarafından ele alınmakta ve bu çalışmalar sonucunda üst bilişe yönelik çeşitli tanımlar yapılmaktadır. Uluslararası alan yazında Flavell önderliğinde, 70li yıllardan itibaren dikkat çeken üst biliş kavramı için Türkiye'deki bilim adamları yürütücü biliş, yansıtıcı biliş, biliş hakkında bilgi, biliş ötesi, bilişsel farkındalık, biliş üstü gibi farklı kelimeler kullanmaktadırlar. Bu durum üst bilişi tam olarak doğru diyebileceğimiz güvenilir bir tanıma ve özellikler listesine götürme ihtimalini oldukça güçleştirmektedir. Uluslararası alan yazında, alanında uzman isimlerin üst bilişi tanımlarken kullandıkları kavramların anlamlarında tam olarak birleşemedikleri görülmektedir. Bununla birlikte, Türkçe alan yazın tarandığında zaten sıkıntılı olan bu kavramın uygun bir şekilde kullanılmaması bizi kavramsal zorluklarla baş başa bırakmaktadır. Bu durumlar üst biliş kavramını ortaya koymada ve öğrenmede büyük sıkıntıları beraberinde getirmektedir.

70lerden bu yana, üst biliş kavramına yönelik yapılan araştırmalar arasındaki tutarlılıklar sınırlı bir düzeyde kalmakla birlikte, araştırmalar birbirlerinin tanımlarını kabul ederek, kendi tanımlarına da yer vermektedirler. Günümüzdeki en büyük sorun, basit durumlar için bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin ayrımı gösterebiliyorken; zorlu ve üst düzey düşünme eylemlerinin olduğu bir süreçteki bu ayrımın yapılamamasıdır. Bu durum benzer şekilde, matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin kabul edilebilir kuramsal temellerle birbirinden ayrılmasını da büyük güçlük taşımaktadır.

Üst biliş kavramı tanımlanırken genellikle, farklı anlamlarda veya aynı anlama gelecek şekillerde kullanılmış iki kavram görülmektedir. Bunlar; düzenleme ve kontrol etmedir. TDK'da (2013) bu iki kavramın tanımlarına bakıldığında kontrol etme, bir şeyin gerçeğe ve aslına uygunluğuna bakma, denetleme olarak ifade edilirken; düzenleme bir şeyi düzene koyma, organizasyon anlamına gelmektedir. Buradan kontrol etmenin bir sonucu olarak gerekirse düzenleme yapılabileceği anlamı çıkmaktadır. Yani, bu iki kelime aynı anlamda kullanılmamalıdır. Bu kelimelerin üst biliş ile bağlantılarına bakacak olursak üst biliş, bilişin kontrol altında tutulmasını sağlamaktadır (Flavell, 1979). Burada bilinçli bir kontrol söz konusudur. Bir olay karşısında sergilenen bilişsel aktivitelerin sonuçlarının, gerekçelerinin toplandığı geniş bir alan üst bilişin kaynak alanıdır. Burada istenilen durumu olumsuz etkileyen etmenler gerekirse düzenlenmektedir. Bu bizi üst bilişin önemli bileşenlerden biri olan üst bilişsel düzenleme kavramına götürmektedir (Flavell, 1979).

Hem ulusal alan yazında hem de uluslararası alan yazında üst biliş kavramı sıkça karşımıza çıkmaktadır. Ülgen (1997) üst biliş kavramını, bireyin kendi bilişsel süreçlerinin işleyişini kavraması, bu süreçleri kontrol altına alabilmesi ve daha nitelikli bir öğrenme için bu süreçleri yeniden düzenleyerek daha etkili kullanabilmesi olarak tanımlamaktadır. Livingston (1997) biraz daha ayrıntılı sayılabilecek şu tanımı yapmaktadır:

> Üst biliş kavramı bilişsel süreçlerin, bu süreçlerin taşıdığı özelliklerin, var olan yapısının ve olanaklarının diğer bir anlatımla bilişsel kaynakların bilinmesi, tüm bunların en etkili ve verimli şekilde nasıl kullanılabileceği konusundaki farkındalıktır.

Genel olarak konuşmak gerekirse alan yazına göre üst biliş; öğrenme durumlarının başarısı için olması gereken en önemli bileşenlerden birisidir. Stratejik olarak çalışma için bireye izin vermekte, zaman kazandırmakta ve problem çözme için farklı görüşleri dikkate alarak bunlar arasındaki en etkili olanı seçmeye yöneltmektedir (Pugalee, 2001). Bu doğrultuda, üst bilişsel bilgi ve becerileri artırmaya yönelik öğrenme ortamlarının oluşturulması ve öğrenenlerin zengin üst bilişsel yaşantılarının sağlanabileceği, karmaşık ve farklı düşünmeyi gerektiren gerçek yaşam problem durumlarıyla baş başa bırakılması gerekmektedir.

Üst Bilişin Zihinsel Sürece Yararları

Kuiper'e (2002) göre, üst biliş öğrenildiğinden itibaren yansıtıcı düşünmeyi desteklemekte, problem çözmeye yardımcı olmakta, sorumluluk kazandırmakta, hızlı karar vermek için kişisel güveni geliştirmektedir. Üst biliş; problem çözme sürecinde gerekli bilgi ve stratejilerin kullanılmasında (Pugalee, 2001); problemleri çözerken düşünme yollarının açıklanmasında (Ebdon, Coakley & Legnard, 2003); eleştirel düşünmenin gelişmesinde (Larkin, 2000) büyük önem taşımaktadır.

Hartman (1998), üst bilişsel farkındalık kavramından söz etmekte ve üst bilişin düşünme, öğrenme süreçleri ve ürünleri üzerinde kontrole ve öz düzenlemeye izin verdiğini ifade etmektedir. Öğrenciler kendi seviyelerinin farkında oldukları ve planlama, izleme ve düzenleme davranışlarının gelişebileceğini anlamaya başladıkları zaman onların akademik performanslarında ve problem çözme becerilerinde bir artış göstermektedir (Jacobson, 1998).

Matematik eğitiminde yapılan son çalışmalar, öğrenen ve problem çözücü olarak öğrencilerin üst bilişsel becerilerini geliştirmeye odaklanmaktadır (Pate, Wardlow & Johnson, 2004). Öğrencilerin üst bilişsel gelişimlerinin teknoloji gibi onların öğrenmelerinde büyük önem taşıdığı ve üst bilişin de etkili matematiksel düşünme ve problem çözmeyi sağlamak için önemli olduğu (Clarke, Stephens & Waywood, 1993; Garofalo & Lester, 1985; Wilson, 1999) teknolojinin de eğitime entegre olma aşamasında olduğu yıllarda sıkça ifade edilmektedir. Ayrıca matematik eğitimi ile ilgili uluslararası tartışmalarda matematik eğitiminin temel bileşenlerinden birinin üst biliş olduğu göze çarpmaktadır (Cohors Fresenborg & Kaune, 2001).

Üst biliş matematik derslerinde ve özellikle matematiksel problemlerini çözmede önemli bir rol oynamaktadır (Elliott, 1993). Gerekli olan ön bilgilere sahip olmalarına rağmen bazen öğrencilerin çoğu orta zorluktaki problemleri dahi çözmede başarısız olmakta (Nancarrow, 2004) ve daha önemlisi çözüm süreci boyunca da sık sık ne yaptıklarını bilmediklerini ifade etmektedirler (Cohors Fresenborg & Kaune, 2001). Eğer öğrenciler bir problemi çözmek için gerçekleştirdikleri her türlü eylemde neyin yanlış olduğunun farkında olamazlarsa, kendi başlarına başarmak için onlara kılavuzluk edebilecek herhangi bir hareketi gerçekleştirememektedirler (Schurter, 2002). Wilson'a (1999) göre, problem çözmede ortaya çıkabilecek zorlukların en önemli kaynağı, öğrencilerin kendi bilişsel süreçlerini aktif olarak izleme, yönetme ve değerlendirmede yetersiz olmalarıdır.

Çalışmalar incelendiğinde, öğretmenlerin üst bilişe göre iki farklı ve önemli role sahip olmaları gerektiği vurgulanmaktadır (Hartman & Stenberg, 1993). Öğretmenler öncelikle öğrencilerin üst bilişsel bilgi ve becerilerini geliştirecek her türlü uygulamayı dikkate almalıdır. Üst bilişin bir diğer rolü, öğretim programının her öğesine [hedef (kazanım), içerik, öğrenme-öğretme durumu ve değerlendirme] üst bilişi uygulamaktır. Schoenfeld (1985), geleneksel matematik eğitiminde gerçeklere dayanmayan bir matematiğe ve işlemsel bilgiye odaklanıldığından bu üst bilişsel becerilerin genellikle gelişmediğine dikkat çekmektedir. Ayrıca Schoenfeld (1985), öğrenme sürecinde öğrencilerin kendilerini değerlendirebilecekleri, başarılarını sorgulayabilecekleri, gerçek yaşam durumlarını içeren açık uçlu problemlerin kullanılması gerektiğini vurgulamaktadır.

Herhangi bir alanda deneyimli öğrenenlerin öğrenme yaklaşımlarının deneyimsiz olanlardan farklı olduğunu açıklayan Rivers'a (2001) göre, bilgiyi organize ederken daha fazla bilişsel ve üst bilişsel stratejileri kullanma, daha derin ve soyut bir kavramsal yapı ve şema ile çözüme ulaşmaya yönelme deneyimli ve üst bilişsel becerileri gelişmiş öğrenenlerin özellikleridir. Schraw & Dennison (1994) ve Shia, Howard & McGee (1998) üst bilişsel beceri seviyesi yüksek öğrencilerin, planlama, izleme, değerlendirme, bilgiyi yönetme, izleme ve hatalarla başa çıkmada çok iyi olduklarını vurgulamaktadır. Üst bilişin matematiksel problem çözmeyi önemli ölçüde etkilediği (Hacker, 1998; Desoete, 2001), öğrenenlerin başarılı matematiksel düşüncelerini daha iyi organize etmelerine ve geliştirmelerine olanak sağladığı (Lucangeli ve Cornoldi, 1997; Desoete, 2001) ifade edilmektedir. Senemoğlu'na (1997) göre, üst bilişsel becerilerin kazanılmasında gerçekleştirilen öğretimin etkisi, tek başına olgunlaşmanın etkisinden çok daha fazladır. Bu nedenle, üst bilişsel becerilerin gelişimi için sağlanacak öğrenme ortamları öğrencilerin zihinsel gelişimi için büyük önem taşımaktadır.

Hurme & Järvelä (2001) göre, matematiksel problem çözme, problemi anlama ile başlamaktadır ve bu süreçte bilinçli konsantrasyon ve yönlendirme gerektirmektedir. Öğrenci problemi yorumlayarak var olan kaynakları ile aynı çeşit problemlerle ilgili önceden var olan deneyimlerini karşılaştırmaktadır. Bu süreçte öğrencilerin üst bilişsel bilgi ve becerileri, onların kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya koymasında ve problemin zihinsel modelini oluşturmasında önemli olmaktadır. Senemoğlu (1997), öğrencilerin problem çözme sürecinin başlarında problemin amacının ve var olan imkanların incelemesinin üst bilişsel bir eylem olduğunu vurgulamaktadır.

Gartmann & Freiberg (1995), öğrencilerin üst bilişsel davranışlarının öğretmenler tarafından geliştirilebileceğini ve artırılabileceğini ifade etmektedir. Gartmann & Freiberg'a (1995) göre üst bilişsel süreç, düşünme süreçlerinin analiz edilebileceği bir süreçtir. Bunu sağlamanın yolları; öğrencilere açık uçlu ve gerçek yaşam durumlarını içeren problemleri çözmek için şans vermek, kendilerine özgü düşünme süreçlerini modellemelerini sağlamak, problemleri çözerken sahip oldukları düşünme süreçlerinin farkında olmalarına yardım etmektir. Bu düşünceler, üst bilişsel eylemlerin matematiksel modelleme sürecinde zengin bir zihinsel süreç ortaya koyduğu görüşünü desteklemektedir.

Biliş ve Üst Biliş

Lucangeli & Cornoldi (1997), bilişsel hesap yapmanın ve hesaplamanın niçin gerekli olduğunu bilmenin birbirlerinden ayrı fonksiyonlar olduğunu ifade ederek biliş ve üst biliş arasında ayrıma vurgu yapmaktadır. Çalışmaya göre, birisi bilişsel diğeri üst bilişsel davranışın örneğidir. Bunun yanında, bu davranışlar farklı fonksiyonları olmalarına rağmen bu iki kavram (biliş ve üst biliş) birbiriyle yakından bağlantılıdırlar. Bu doğrultuda, üst bilişsel davranışlar, matematiksel problem çözme sürecini izleme ve kontrol etme davranışlarını aktif hale getirerek bilişsel davranışları pozitif yönde desteklemektedirler (Kapa, 2001).

Bilişin işlevi, hafızadan faydalanarak problemin uygun çözümünü bulmak için öğrenene yardım etmesidir (Hong, McGee & Howard, 2001). Genel bir ifade ile biliş, yaptığımız ve bildiğimiz şeyle ilgilenmektedir (Garofalo & Lester, 1985; Schurter, 2001, Artzt & Armour, 1992). Biliş, dünyamızı öğrenmeyi ve anlamayı içeren, zihinsel faaliyetler anlamına gelmektedir (TDK, 2013). Biliş kavramı su süreçleri kapsamaktadır:

Algılama: Gerek iç gerekse dış dünyada edinilen bilgilerin yorumlanması, organize edilmesi ve yeniden bulunmasıdır.

Bellek: Algılanan bilginin bulunup getirilmesi ve depo edilmesidir.

Muhakeme: Bilgiyi belirli bir anlam çıkarma ve sonuca varma amacıyla kullanabilmedir.

Düşünme: Bilginin ve çözümlerin nitelikçe değerlendirilmesidir.

Kavrama: Bilginin iki ya da daha fazla kısımları arasındaki yeni ilişkileri tanıyabilmedir (Yavuzer, 1999; Şendurur ve Akgül-Barış, 2002).

Üst biliş ise, bilgiyi nasıl aldığımız, nasıl hatırladığımız, nasıl düşündüğümüz ve nasıl hareket ettiğimiz hakkındaki bilgilerimizi yani bildiğimiz şey hakkındaki bildiklerimizi tanımlamak için kullanılmaktadır (Gama, 2000a; 2000b). Üst biliş, genel olarak bakıldığında, birisinin kendi bilişsel sistemi (Brown, 1987; Panaoura, Philippou ve Christou, 2003; Tanner ve Jones, 1999), bilişsel süreçleri (Yurdakul, 2004; Zohar, 1999) düşünme ve öğrenme aktiviteleri, (Kramarski, Mevarech ve Aramı, 2002), neyi bilip, neyi bilmediği (Ülgen 2001; Yurdakul, 2004) ile ilgili sahip olduğu şeylerdir. Hollingworth & McLoughlin (2000, 2001) üst bilişi, öğrencilerin kendi bilişsel süreçleri, stratejileri ile ilgili bilgileri, bu bilişsel süreçleri izleme ve kontrol etme yetenekleri olarak ifade etmektedir. Goos, Galbraith & Renshaw (2000) üst bilişi, öğrencilerin kendi düşünme süreçleri ile ilgili bildikleri şeyleri ve yaptıkları matematiksel işlemleri izlemeleri ve düzenlemeleri olarak vurgulamaktadır. Üst biliş, bireyin kendi biliş yapısının ve öğrenmesinin, kendi biliş makinelerinin ve bu makinenin nasıl çalıştığının (Senemoğlu, 1997), bilişsel stratejileri planlamanın, uygulamanın ve izlemenin (Panaoura ve Philippou, 2005) farkındalığı olarak karşımıza çıkmaktadır.

Literatürdeki bu açıklamalara bakıldığında üst biliş kavramını tanımlarken, üst bilişin temel rolünde benzer açıklamaların olmasına karşın üst biliş kavramının açıklanmasında farklı kavramlardan yararlanıldığı ve bu kavramların da birbirleriyle karıştırılabilecek karmaşık ifadeler olduğu görülmektedir.

Üst Bilişsel Bilgi ve Beceriler

Üst biliş, bir matematiksel problemin çözümünde, çözüm adımlarını planlama, izleme ve değerlendirme gibi zihinsel süreçleri kapsamaktadır (Fortunato ve dğr., 1991; Pugalee, 2001; Panaoura ve Philippou, 2005). Üst bilişsel bilgi, kişinin bildikleri hakkındaki şeyler (üst bilişsel bilgi), bu doğrultuda yapabilecekleri ile ilgili şeyler (üst bilişsel beceriler) ve kendi bilişsel yetenekleri hakkında bildikleri şeyler (üst bilişsel deneyim) ile ilgili farkındalığı içermektedir (Biryukov, 2004). Burada Biryukov (2004), problem çözme sürecindeki Pólya'nın (1945), Schoenfeld'in

(1992), Blomhøj'un (1993) kastettikleri deneyim kavramıyla aynı şeyi kastetmektedir.

Kuiper (2002), üst bilişi bireyin bir görev öncesindeki, görev anındaki ve sonrasındaki bilişsel bilgi, strateji ve görevinin gerekleri ile ilgili kendisiyle iletişim kurma süreci olarak tanımlarken, Williamson (1996), bireyin bilişsel süreçlerini anlama ve kontrol etme yeteneği olarak görmektedir. Lin (2001) ise, üst bilişin bireyin kendi düşüncelerinin, varsayımlarının ve kendi etkinliklerinin sonuçlarını anlaması ve izlemesi yeteneğini kapsayan bir kavram olduğunu ileri sürmektedir. Garrett, Mazzocco & Baker (2006) ve Desoete, Roeyers & Huylebroeck (2006) üst bilişsel becerileri incelerlerken tahmin ve değerlendirmeyi dikkate aldıkları ve bu davranışları üst bilişin bir göstergesi olarak inceledikleri görülmektedir.

Flavell (1979) kendi modelinde üst biliş kavramını açıklarken, biliş ve üst bilişin, içeriklerinde ve fonksiyonlarında farklı olduğunu, fakat şekillerinde ve niteliklerinde benzer olduklarını ifade etmektedir. Bir başka deyişle, içerik ve fonksiyon kavramlarını kullanarak biliş ve üst bilişi ayırmaktadır. Bu farklılığa daha ayrıntılı bakılırsa,

a) İçerik olarak: Bilişin içeriği, hem gerçek dünya hem de zihinsel imajlar (yani nesneler, kişiler, olaylar, fiziksel fenomenler gibi) iken; üst bilişin içeriği bilgi, beceriler ve biliş hakkında bilgidir. Bu nedenle üst bilişsel düşünmeyi diğer çeşitlerinden ayırt etmenin bir yolu, onun kaynağını göz önüne almaktır (Gama, 2004).

b) Fonksiyon olarak: Bilişin fonksiyonu nitelikli bir problemi çözmek ve bilişsel girişimleri ve aktiviteleri iyi bir sonuca getirmektir. Üst bilişin fonksiyonu, nitelikli bir problemi çözerken veya bir işi yaparken kişinin kendi bilişsel adımlarını düzenlemesidir (Vos, 2001). Bir durumu anlamadığını fark etme, problem çözerken çevresindeki dikkatini dağıtan etkenleri ortadan kaldırarak konsantrasyonunu artırma, bir durumu anlamak için hafızayı bilinçli olarak kullanma ve eski bilgileri ortaya çıkarma bilişsel düzenleme davranışlarına birer örnektir (Hacker,1998; Gama, 2004).

Üst biliş kavramına farklı bir bakış açısı da üst bilişin yalnızca bilişsel eylemlerdeki değil; aynı zamanda duyuşsal eylemlerdeki farkındalığı ve kontrolü de kapsadığı düşüncesidir (Papaleontiou-Louca, 2003). Schoenfeld (1985) de üst biliş kavramı içerisinde inançlar ve sezgileri de ele alarak zihinsel davranışları üç kategoride dikkate almaktadır:

1. Bireyin düşünme süreçleri ile ilgili bilgisi (Kendi bilginizi tanımlamada ne kadar iyisiniz?)

2. Bireyin davranışlarını eylemlerini kontrol etmesi veya öz düzenlemesi (kişinin çalışma girişimlerini düzenlemesi)

- Problemi anlayıp anlamadığını değerlendirme
- Çözüm stratejisi planlama
- Çözüm sürecini izlemek ve kontrol etmek
- Cevabın mantıklı olup olmadığını değerlendirmek

3. İnançlar ve sezgiler

Schoenfeld'in (1985) problemi anlayıp anlamadığını değerlendirme eylemine bakacak olursak belli bir alanda öğrencinin çok iyi olmadığını bilmesi, kişinin bu alanda daha dikkatli ve kapsamlı çalışmalar yapmasına zemin hazırlamaktadır. Diğer taraftan, kişi izleyerek hatalarını fark ederse, ilgili alanın zor olduğunu veya onda çok iyi olmadığı sonucunu çıkarabilmektedir (Panaoura, Philippou & Christou, 2003).

Schraw & Graham (1997) üst bilişsel bilgiyi, bireyin kendi bilişi ya da genel olarak bilişle ilgili ne bildiği; üst bilişsel düzenlemeyi ise, bireyin kendi düşünme ya da öğrenmesini kontrol eden üst bilişsel etkinlikleri ve yaşantıları olarak açıklamaktadır. Bu doğrultuda, daha fazla üst bilişsel bilgi, daha iyi kontrolü sağlamakta ve üst bilişsel düzenlemeyi desteklemektedir. Ayrıca daha iyi üst bilişsel düzenleme ve öz kontrol ise, yeni üst bilişsel bilginin yapılandırılmasına yardımcı olmaktadır. Dahl'a (2004) göre, bireyin kendi bilişsel süreçleri hakkında sahip olduğu bu bilgi yaşla gelişmektedir. Bireyin bir işteki performansının artışı, o alanda sahip olduğu üst bilişsel bilgisinin *(ing.metaknowledge)* derecesi ile yakından ilişkilidir (Schoenfeld,1985; Dahl, 2004; Desoete, Roeyers & Buysse, 2001; Desoete, 2001). "Geometride iyiyim fakat Ahmet benden daha fazla İngilizce kelime bilir" ifadesi kişinin üst bilişsel bilgisinin bir örneğidir (Gama, 2004). Senemoğlu (1997), kişinin kendisine sorabileceği ve bu sayede kendi üst bilişsel bilgisini ortaya çıkarabileceği ve arttırabileceği soruları şöyle açıklamaktadır:

1) Bu konuyu öğrenmedeki amacım nedir? Nasıl bir ürüne ulaşmam beklenmektedir?

2) Bu konu hakkında ne biliyorum? (Kendi öğrenme düzeyini test etme.)

3) Bu konuyu öğrenmek için ne kadar zamana ihtiyaç duyarım?

4) Bu konuyu en etkili bir şekilde öğrenmek için nasıl bir plan yapmalıyım; Nasıl bir yol izlemeliyim?

4) Plandaki aksaklıkları gidermek için yeniden nasıl gözden geçirip düzeltmeliyim?

5) Hata yaptığım taktirde, hatamı nasıl bulmalıyım?

6) Bu işlemler sonucunda elde edeceğim ürün beklentime uygun mu? Uygun değilse planlamamı nasıl değiştirmeliyim?

Problem çözmede üst bilişsel bilgi, problem çözücülerin zihninde uygun çözümler olmadığı zaman gerekli olmaktadır ve öğrencilerin problemi çözmek için kullanabilecekleri genel stratejileri üst bilişsel bilgilerini geliştirerek daha kapsamlı ve etkili bir şekilde araştırabilecekleri vurgulanmaktadır (Hong, McGee & Howard, 2001). Gama (2000), nitelikli bir problem çözme aktivitesinin her aşamasında üst bilişsel bilginin uygulanabileceğini aşağıdaki gibi açıklamaktadır:

1. Öğrenciler belli bir problemi çözmeye başlamadan önce kendilerine aşağıdaki gibi sorular sorabilirler:

a) Bu problemde bana yardım edebilecek ön bilgiler nelerdir?

b) Bu problemi başarılı olarak yapabilmek için neleri biliyorum?

c) Ne yapmalıyım ve hangi sırayla yapmalıyım?

d) İşi ne kadar zamanda yapmalıyım?

Bu sorular öğrencileri problemi çözmeye hazırlamakta ve problemi çözmek için gerekli becerileri geliştirmelerine olanak sağlamaktadır.

2. Öğrencilerin bir hareket planını izlemesi, bilişsel aktivite boyunca onlara yardım eder.

a) Nasıl yapacağım?

b) Doğru yolda mıyım?

c) Nasıl uygulayacağım?

d) Hangi bilgiyi hatırlamak önemlidir?

e) Diğer bir yoldan yapabilir miyim?

f) Anlamazsam ne yapmaya ihtiyacım var?

3. Bilişsel aktiviteler tamamlandıktan sonra öğrenci kendi performansını, anlama derecesini, önceki biri ile karsılaştırabilir.

a) Farklı olarak yaptığım şey neydi?

b) Bu düşünme yöntemini diğer problemlere nasıl uygulayabilir miyim?

c) İşi yapma süreci boyunca anlamadığımda geriye dönmeye ihtiyaç duydum mu?

Panaoura, Philippou & Christou'ya (2003) göre; insanların kendi bilişsel yetenekleri (kötü bir hafızam var vb.), bilişsel stratejileri (matematiksel bir kavramın tanımını hatırlamak için onu tekrarlamalıyım vb.) ve iş ile ilgili (sınıflandırılmış kavramları hatırlamak daha kolaydır vb.) sahip oldukları bilgileri üst bilişsel eylemleri için önemli bir kaynaktır. Örneğin, bir öğrenci matematik sınavına nasıl çalışacağını planlarken bu bilgileri kullanabilmektedir. "Sözel problemlerde (iş değişkeni) zorlanıyorum (bireysel değişken), öyleyse ilk önce hesaplama problemlerini cevaplayacağım en sona sözel problemleri (strateji değişkeni) yapacağım." yaklaşımı üst bilişsel aktivitelere bir örnek teşkil etmektedir.

Çalışmalar incelendiğinde, bazı araştırmacıların (Nevin ve Cardelle Elewar, 2003; Brown, 1987; Panaoura, Philippou & Christou, 2003; Jacobs & Paris, 1987; Desoete, 2001; Schraw & Moshman, 1995; Schraw & Graham, 1997; Schraw, 1998; Daniels, 2002; Vovides, 2003) üst bilişsel bilgiyi tanıtıcı, işlemsel ve koşullu bilgi alt boyutlarında ele aldığı görülmektedir. Kısaca tanıtıcı bilgi; ne olduğunu bilme veya bir şeyi bilme, işlemsel bilgi, nasıl olduğunu/yapıldığını bilme ve koşullu bilgi de ne zaman ve niçin olduğunu/yapıldığını bilme olarak tanımlanabilir (Fang & Cox, 1999; Daniels, 2002).

Foshay ve Kirkley'e (2003) göre tanıtıcı bilgi, ne olduğunu bilmedir. Panaoura, Philippou & Christou'ya (2003) ve Panaoura'ya (2007) göre "ne bildiğini" ifade eden önermesel bilgidir. Örneğin, bir matematik problemini çözerken kişinin çözümde türev kullanmasının gerekli olduğunu düşünmesi ve türevle ilgili bildiklerini gözden geçirmesi ve yeterli olup olmadığını sorgulaması buna bir örnek olarak verilebilir.

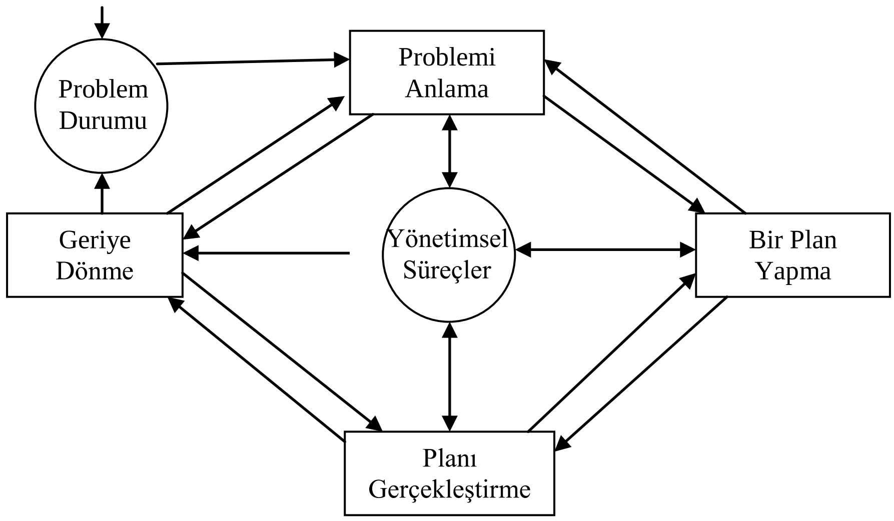
Hartman (2001) ve Adkins'e (1997) göre işlemsel bilgi, öğrenilen strateji veya bilgiyi söz konusu durumda nasıl uygulayacağını bilmeyle ilgili bilgidir. Panaoura, Philippou & Christou'ya (2003) göre işlemsel bilgi, "nasılını bilmeyi" ifade etmektedir. Schraw ve Graham (1997) işlemsel bilginin, nesnelerin ya da şeylerin nasıllığına ilişkin bilgiyi içerdiğini vurgulamaktadır. Desoete, Roeyers & Buysse (2001) ise, işlemsel bilginin, düşünme sürecinin farkında olarak hedeflere ulaşma yollarının bilgisi; becerilerinin nasıl çalıştığı ve nasıl uygulandığıyla ilgili bilgiler olduğu ifade etmektedir. Örneğin, bir türevin geometrik anlamını açıklarken, yapılacak çizimlerin her biri ve limit ile olan ilişkinin ortaya koyulması, yani nasıl yapılacağının bilinmesidir.

Koşullu bilgi, bir bilginin, becerinin veya stratejinin ne zaman kullanacağı, ne zaman kullanılamayacağı, niçin çalıştığı, hangi şartlar altında çalıştığı ve niçin diğerlerinden daha iyi çalıştığı konusunda (Pierce, 2003; Desoete, Roeyers & Buysse, 2001; Hartman, 2001b; English, 1996) kişide var olan bilgileri kapsamaktadır. Adkins (1997), koşullu bilgiyi bir stratejinin diğerine göre ne zaman ve niçin daha iyi ve daha uygun olduğunun farkındalığı olarak açıklamaktadır.

Schoenfeld 1985-1992 yılları arasında problem çözme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel aktivitelere yönelik düşünceleriyle günümüz çalışmalarının temelini derinden etkilemektedir. Çoğu araştırmadan farklı olarak kendisi o dönemde üst bilişin bir bileşeni olarak inançlar ve sezgileri ifade etmektedir. Bireye ait farklılıklar (intraindividual differences), kişinin kendisi hakkındaki inancıyla ilgili olmaktadır. Çözüm sürecinde yeterince kanıt ortaya koymadan kesinliği net olmayan düşüncelere karşı bireyin gönülden bağlı bulunması ve problem çözümünde bunun dikkate alması büyük önem taşımaktadır. Pólya (1945) inançların ve sezgilerin problem çözüm sürecinde önemli olduğunu ifade etse de üst bilişsel eylem ayrımını yapmadığı görülmektedir. Gerçek yaşam problemlerinin çözümünde varsayımların oluşturulmasında, bazı tam olarak bilinmeyen durumlara ilişkin yapılan tahminlerde, stratejilerin belirlenmesinde inançlara ve ön sezgilere göre bazı davranışların sergilendiği görülmektedir. Burada kişi üst bilişsel bilgilerindeki eksiklikten dolayı değil bilişsel bilgilerindeki eksikliklerden dolayı gerekçelendirmeleri yapamamaktadır. Ama gerekçelendiremediğinin farkında olarak süreci sürdürmektedir. Kendi bilişsel sürecinin farkındadır. İnançlar ve sezgiler insanların kendi ve diğer insanların bilişi ile ilgili sahip oldukları daha geniş fikirler ve kişisel teoriler olarak da karşımıza çıkmaktadır (Schoenfeld, 1992). Bunlar bazen ön yargılar olarak da görülmektedir. Treilibs, Burkhardt & Low (1980), Schoenfeld'in (1985) bahsettiği inançlar ve sezgilerin modelleme sürecinde üst bilişsel eylemlere örnek teşkil edeceği düşüncesinin temelinde yatan "sense of direction" fikrini ortaya atmaktadır. Buna göre, öğrenciler modelleme sürecinde problemde hangi aşamada nasıl ilerleyebilecekleri hakkında bilgilerinin yetmediği durumlarda tahmin veya hisleriyle hareket etmektedirler.

Öğrenciler bir çözüm stratejisi ortaya atarak bunu çözüm sürecinde uygulayana kadar genellikle problemi tam olarak anlamamaktadır. İleri ve geri gidişler ise dört basamakta (problemi anlama, plan yapma, planı gerçekleştirme, geriye bakma) gerçekleşmektedir (bkz. Şekil 33). Fernandez, Hadaway and Wilson (1994) doğrusal olmayan problem çözme süreci modelinde yönetimsel süreçleri tanımlamakta ve bu da Flavell (1979) ve Schoenfeld'in (1985) dediği gibi problem çözme sürecindeki üst bilişsel eylemlere karşılık gelmektedir. Sürece göre her basamak arasında saat yönünde ve tersinde hareketler olmakta sürecin her basamağında yönetimsel süreçler ortaya çıkmaktadır. Çalışmada, Pólya'nın (1945) modeli temel alınarak sürece daha kapsamlı bir açıklama yapılmaktadır. Stillman, Galbraith, Brown and Edwards (2007) gibi Fernandez, Hadaway and Wilson'ın (1994) çalışmasında da yönetimsel süreçler veya üst biliş, çözüm sürecinde basamaklar arasındaki zıplamaları tetiklemektedir. Süreç modellerinde ise bu durumu çift taraflı oklarla resmedilmektedir.

Şekil 33. Modelleme Sürecinin Yapısı (Fernandez, Hadaway and Wilson, 1994)



Brown (1987), problem çözme sürecinde asıl önemli olanın ve ilgilenilmesi gerekenin öğrencilerin bilişsel eylemlerinden ziyade onların kendi bilişleri hakkındaki bilgileri olduğunu vurgulamaktadır. Brown'a (1987) göre, üst biliş tahmin etme, kontrol etme, izleme, gerçekliği test etme, koordine etme gibi yürütücü beceriler olarak tanımlanmaktadır. Garofalo & Lester (1985) ise öğrencilerin üst bilişsel eylemlerinin açıklanamamasını üç temel nedene bağlamaktadır:

1. Gizli davranışları gözlemlemenin ve analiz etmenin oldukça zor olması,

2. Bireysel raporları geçerli bir veri olarak kabul eden araştırmacılara göre, sözel olarak ifade edilmiş bilgilerin dikkate alınmadığı durumlarda, bir görevi gerçekleştirirken bilgilerin sözel olarak ifade edilmesinin kişiden istenmemesi bilişsel süreci olumsuz etkilemektedir.

3. Üst biliş kavramının oldukça kötü ve farklı tanımlarıyla karşılaşılması.

Kramarski & Hirsch (2003), bilgisayarda cebir sistemi ile üst bilişsel becerinin matematiksel akıl yürütme üzerine etkilerini incelediği çalışmada, başarılı öğrencilerin hem teknolojinin sürece nasıl bir etki edeceğinin farkında olduklarını hem de süreç boyunca sergiledikleri davranışları ve düşünceleri değerlendirdiklerini vurgulamaktadır. Buna göre, teknoloji destekli ortam ve üst bilişsel eylemler matematiksel akıl yürütme için uygun fırsatlar ortaya çıkarmaktadır

Lester, Garofalo & Kroll (1989) problem çözme sürecinde üst bilişsel eylemleri planlama, seçme, tahmin etme ve performansı izleme olarak ifade ederken, bilişsel eylemleri yapma, okuma, çizme ve hesaplama olarak ele almaktadır. Artz & Armour Thomas (1992) problem çözme sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemleri açıklarken bilişsel süreçleri okuma, keşfetme, uygulama, doğrulama; üst bilişsel eylemleri ise anlama, analiz etme, keşfetme, planlama, uygulama ve doğrulama olarak açıklamaktadır. Görüldüğü gibi çalışmada keşfetme, uygulama, doğrulama basamakları hem üst bilişsel hem de bilişsel bir süreç olarak ele alınmaktadır.

Problem çözme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel süreçlere ilişkin yapılan diğer araştırmalar olarak Lesh & Zawojewski (2007) ve Magiera & Zawojewski'nin (2011) çalışmaları dikkat çekmektedir. Bu çalışmalar özellikle bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin ardışık olarak meydana gelmediklerini ifade etmekte ve bu eylemlerin paralel ve iç içe geçmiş bir süreci oluşturdukları vurgulamaktadır. Buna göre, biliş zaten üst bilişsel eylemlerin özünde varken, üst biliş bazı bilişsel eylemlerde ortaya çıkmaktadır. Zawojewski & Lesh (2003) ve Lesh & Doerr'e (2003) göre, model oluşturma etkinlikleri [MOE]nin küçük gruplarla yapılmasının interaktif faaliyetleri arttırmakta ve MOElerin üst bilişsel süreçler için uygun ortamları sağlayarak matematiksel modelleri hakkında düşünceler sergilemelerini, onu test etmelerini ve gerekirse varsayımlarını ve tahminlerini revize etmelerini sağlamaktadır. Goos, Galbraith, & Renshaw, 2002 ve Shahbari, Daher & Raslaan (2014) de modelleme sürecinde grup çalışmalarının üst bilişsel izleme ve düzenleme süreçlerini tetiklediğini ifade etmektedir.

Yimer & Ellerton (2006), öğretmen adaylarının rutin olmayan matematiksel problemlerin çözümünde kullandıkları bilişsel ve üst bilişsel davranışları meşgul olma, dönüştürme/formüle etme, uygulama, değerlendirme ve içselleştirme olarak beş kategoride toplamaktadır:

1) Meşgul Olma: Ön anlayış, bilgiyi analiz etme, problemi derinlemesine düşünme.

2) Dönüştürme/Formüle Etme: Keşfetme, tahmin etme, tahmini yansıtma, planı formüle etme, planın geçerliğini derinlemesine düşünme.

3) Uygulama: Planın doğasını keşfetme, varsayımlar doğrultusunda planı değerlendirme, planı uygulama, uygun eylemleri derinlemesine düşünme.

4) Değerlendirme: Problemi tekrar okuma, tutarlılığına ilişkin planı değerlendirme, sonuçların uygulanabilirliğini değerlendirme, çözümü kabul etme veya reddetme konusunda karar verme.

5) İçselleştirme: Çözüm sürecini derinlemesine düşünme, süreçteki kritik durumları tanımlama, çözüm sürecine diğer durumlara göre değerlendirme, çözümü matematiksel kesinliği hakkında derinlemesine düşünme.

Maaβ (2006), modelleme sürecindeki gerekli olan öğrenci yeterliklerini ortaya koyduğu çalışmasında üst bilişi modelleme süreci için gerekli bir değişken olarak ele almaktadır. Maaβ'ın (2006) modelleme sürecindeki üst bilişsel eylemleri açıklarken Sjuts'un (2003) yaklaşımını dikkate aldığı görülmektedir. Buna göre, üst biliş düşünme hakkında düşünme olup, kişinin kendi düşüncelerini yönetmesidir. Çalışmada üst biliş üç kısımda ele alınmaktadır: açıklayıcı üst biliş, işlemsel üst biliş ve güdüleyici üst biliş. Buna göre açıklayıcı üst biliş kişinin kendi düşüncesi, görevleri hakkındaki düşüncelere karar vermesi ve problemi çözmek için gerekli stratejik bilgileri hakkında tanılayıcı bilgileri içermektedir. İşlemsel üst biliş kendi eylemlerini izlemeyi içeren planlama, denetleme ve karar vermeyi içermektedir. Güdüleyici üst biliş, üst bilişin kullanımı için gerekli şartları ortaya çıkaran motivasyon ve iradeyi ifade etmektedir. Maaβ (2006), modelleme sürecinde ortaya çıkacak üst bilişsel eylemlerin modelleme yeterliklerinin gelişmesinde önemli bir faktör olduğunu ve üst bilişin problem çözme stratejilerinin ortaya çıkmasında gerekli olduğunu vurgulamaktadır.

Magiera & Zawojevski (2011), Wilson (2001) ve Wilson & Clarke'ın (2002, 2004) çalışmalarına dayanarak modelleme sürecindeki üst bilişsel davranışları incelemektedir. Buna göre, çalışmada üst bilişsel davranışlar farkındalık (awareness), değerlendirme (evaluation) ve düzenleme (regulation) olmak üzere üç kategoride ele alınmaktadır. Farkındalık çözüm süreciyle ilgili ne bilindiği, sürecin hangi aşamasında olunduğu ve çözümde ne yapmaya ihtiyaç duyulduğu hakkındaki davranışları içermektedir. Değerlendirme planlanan stratejileri, kurulan hedefleri ve seçilen problem çözme stratejileriyle ilgili matematiksel düşünceleri içermektedir. Düzenleme, çözüm sürecindeki düşüncelerin etkililiği ve sınırlığı, stratejilerin etkililiği, sonuçların değerlendirilmesi, çözüm sürecinin ve problemdeki zorluklarını değerlendirilmesini içermektedir. Magiera & Zawojevski (2011) modelleme sürecinde öğrencilerin üst bilişsel eylemlerinin bireysel düşünceleri/deneyimleri ve grup arkadaşlarının düşünceleri veya deneyimleri olmak üzere iki kaynaktan beslendiğini ifade etmektedir. Buna göre üst bilişsel eylemleri iki temel boyut (bireysel ve grupsal) altında toplam altı farklı kategoriyle açıklamaktadır (bkz. Tablo 1).

Tablo 1. Modelleme sürecindeki üst bilişsel davranışlar (Magiera & Zawojevski, 2011)

Sosyal Tabanlı Davranışlar	Kişisel Tabanlı Davranışlar
1. Farklı açılardan yorumlama	1. Kişisel tatmine ulaşma
2. Açıklamalarla meşgul olma	2. Kişisel gösterimleri kullanma
3. Matematiksel fikir birliğine varma	3. Deneyim temelli sayısal yargılara varma

Magiera & Zawojevski'nin (2011) modelleme sürecindeki üst bilişsel eylemleri açıklarken üst bilişin planlama, izleme, değerlendirme ve tahmin veya bir başka bakış ile farkındalık (awareness), değerlendirme (evaluation) ve düzenleme (regulation) boyutlarından hangisine ait olduğuna ilişkin bir açıklamaya gitmediği görülmektedir. Bunun yanında, modelleme sürecindeki üst bilişsel eylemleri açıklayan önemli çalışmalardan biri olarak karşımıza çıkmaktadır.

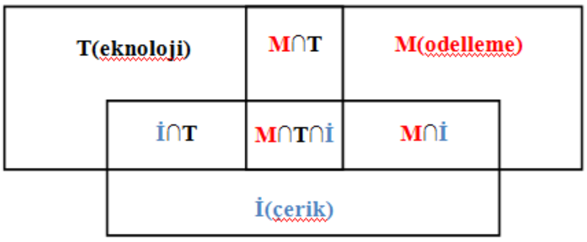
Matematiksel Modelleme ve Teknolojinin İlişkisine Yönelik Yapılan Çalışmalar

2000li yıllarda öğrenme sürecine bilgisayarlarında da entegre olmasıyla, teknolojinin matematiksel modelleme problemlerinde öğrencilerin matematiksel becerilerinin ve matematik bilgilerinin yapılandırılmasına etkisini ortaya koymaya yönelik çalışmaların arttığı görülmektedir. Matematikle ilişkili bilgisayar yazılımlarının ve teknolojik araçların matematik derslerinde öğrenme sürecinin bir parçası olması, öğrencilerin teknoloji çağının gereklerini yerine getirebilecek nitelikli bireyler olarak yetişmesinde büyük önem taşımaktadır (Lingefjärd, 2000). Tez çalışmasında teknoloji ile desteklenmiş matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel eylemler ele alındığından dolayı, tezin bu bölümünde matematiksel modelleme sürecine teknolojinin etkisine ilişkin önemli çalışmalara yer verilmektedir.

1980li yıllarda teknolojinin öğretim programlarında önemli bir yer bulmasıyla teknolojinin matematiksel modelleme sürecine ve hatta problem çözme sürecine olumlu bir katkı sağlayacağı düşüncesi ve derslerde etkili bir şekilde kullanılması gerekliliği tartışılmaya başlanmıştır (Schoenfeld, 1992; Blomhøj, 1993). Teknolojinin matematiksel modelleme sürecine entegrasyonuna yönelik önemli çalışmalardan biri Galbraith, Stillman, Brown & Edwards (2007) tarafından yapılan "Ortaokulda matematiksel modelleme yeterliliklerinin kolaylaştırılması" isimli çalışmadır. Bu çalışmada, ortaokulda öğrenim gören öğrencilerin matematiksel modelleme sürecinde verilen gerçek yaşam problemlerini Excel programı ve grafik hesap makineleri yardımıyla çözerkenki yaklaşımları incelenmektedir. Bu şekilde öğrencilerin modelleme sürecindeki bilişsel aktivitelerini ortaya çıkarılmakta ve öğrencilerin matematik, teknoloji ve modelleme becerileri arasındaki etkileşimlerinin nasıl olduğunu ortaya koyulmaktadır. Aynı zamanda 11 yaşına gelene kadar, öğrencilerin sınıf içi modelleme becerilerini ve modelleme sürecinin aşamaları arasında yaptıkları geçişler belirlenmeye çalışılarak süreci ayrıntılı bir haritası ortaya koyulmaya çalışılmaktadır. Galbraith, Stillman, Brown & Edwards' a (2007) göre, matematiksel modellemede teknoloji öğrencilerin farklı zihinsel aktivitelerinin ortaya çıkarılması gerekli bir araç olmaktadır (bkz. Şekil 34). Öğrenciler problem çözümü sırasında karşılaştıkları matematiksel ve teknolojik zorluklar karşısında başarılı olmuşlardır. Galbraith, Stillman, Brown & Edwards (2007), öğrencilerin karmaşık terimlerle ve işlemlerle matematiksel yapıyı kurmada ve modeli yorumlamada zorluklar yaşadıklarını ve yaşadıkları bazı zorlukların teknoloji sayesinde üstesinden geldiklerini ifade etmektedir. Buna göre, modelleme sürecinde teknoloji hem matematiksel içeriğe olumlu katkı sağlamakta hem de modelleme sürecinin yapısını daha zengin bir hale getirmektedir.

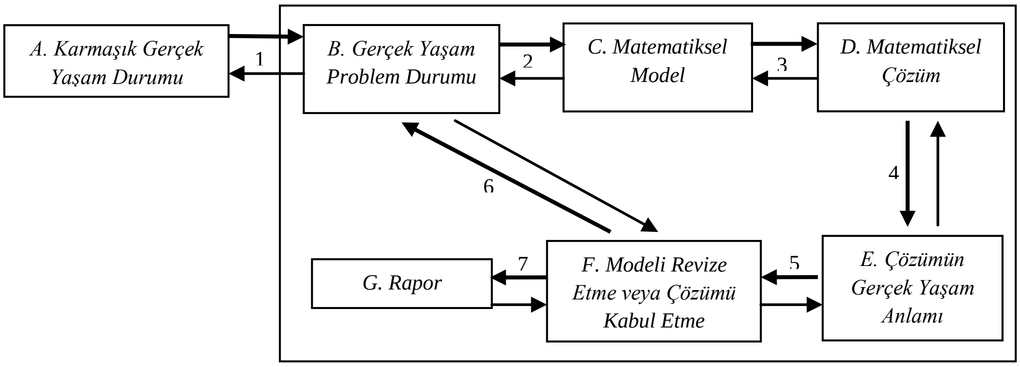
Şekil 34. Teknoloji ve Modelleme İlişkisi

(Galbraith, Stillman, Brown & Edwards, 2007)



Stillman, Galbraith, Brown & Edward'ın (2007) "Ortaöğretim sınıflarında matematiksel modelleme uygulamalarında başarı için bir çerçeve" isimli çalışmasında öğrencilerin modelleme etkinlikleri uygulamalarına dayanarak modelleme sürecindeki aşamalar arasındaki geçişlerden ayrıntılı olarak bahsetmektedir. Bu çalışma, önceki çalışmalardaki (Galbraith & Stillman, 2006, Galbraith, Stillman, Brown & Edwards, 2007) süreç modellerini daha ayrıntılı olarak açıklamaktadır (bkz. Şekil 35). Dokuzuncu sınıfta öğrenim gören 21 öğrenciden oluşan 10 birlikte çalışma grubuyla gerçekleştirilen çalışmada matematiksel modelleme problemi olarak "Bangee Jumping Problemi" kullanılmakta ve problemin çözümü için 100 dakika süre ayrılmaktadır. Araştırmacılar verilerin analizi sonucunda grupların modelleme sürecinden elde edilen süreç modelini aşağıdaki gibi açıklamaktadır:

Şekil 35. Modelleme Süreci (Stillman, Galbraith, Brown & Edward, 2007)



1- Anlama, yapılandırma, basitleştirme, içeriği yorumlama.

2- Varsayımda bulunma, formüle etme, matematikselleştirme.

3- Matematiksel çalışma yapma.

4- Matematiksel çıktıları yorumlama.

5- Birleştirme, eleştirme, doğrulama.

6- İletişim, çözümü savunma (eğer model tatmin ediciyse)

7- Modelleme sürecinin tekrar edilmesi (eğer model tatmin edici değilse)

Araştırmacıların modelleme sürecine ilişkin yukarıdaki iki çalışmasının temeli, Galbraith & Stillman'ın (2006) "Modelleme sürecinde geçişler sırasında öğrenci zorluklarını tanımlamak için bir çerçeve" isimli kapsamlı kuram oluşturma çalışmasına dayanmaktadır. Galbraith & Stillman (2006), 14-15 yaşındaki öğrencilerin modelleme sürecinde yaşadıkları zorlukları ele almakta ve modellemenin doğrusal değil, döngüsel bir süreci içerdiğini vurgulamaktadır. Modelleme sürecindeki bilişsel eylemlerin ortaya çıkarılmasına ilişkin oldukça ayrıntılı bir çalışma olan bu çalışmada, modelleme döngüsündeki basamaklarda öğrencilerin ne gibi zorluklarla karşılaştıkları açığa çıkarılmaktadır. Bu çalışma aynı zamanda öğrencilerin modelleme sürecindeki zihinsel aktivitelerini kapsamlı bir şekilde ortaya çıkarmaktadır.

Bu çalışmada, modelleme süreci temel bileşenleri ve temel basamakları doğrultusunda ele alınmakta ve öğrencilerin bilişsel aktiviteleriyle bu bileşenler arasındaki ilişkiler ayrıntılı olarak alt basamaklar yardımıyla ifade edilmektedir:

A. Karmaşık Gerçek Yaşam Durumundan
Gerçek Yaşam Problem Durumuna Geçiş

A1. Problem durumunu açıklama

A2. Basitleştirilmiş varsayımlarda bulunma

A3. Stratejik etkenleri saptama

A4. Stratejik etkenlerin doğru elemanlarını belirleme

B. Gerçek Yaşam Durumdan Matematiksel Modele Geçiş

B1. Cebirsel modelin içereceği bağımlı bağımsız değişkenleri belirleme

B2. Bağımsız değişkenleri birbirinden farklı şekilde tanımlama

B3. Elemanları matematiksel olarak kullanılabilir formüllerle temsil etme

B4. Bağlantılı varsayımlarda bulunma

B5. Hesaplamaya olanak sağlayan matematiksel tabloyu ve teknolojiyi seçme

B6. Formülü çoklu durumlara uygulayabilmek için uygun tekniği seçme

B7. Modelin grafiksel gösterimini seçmek için uygun teknolojiyi seçme

B8. Cebirsel denklemi doğrulamak için uygun teknolojiyi seçme

B9. Bir grafiği algılama, cebirsel bir denklemi doğrulamak için fonksiyon grafiklerinde kullanılabilir; fakat veri çizicilerinde kullanılamaz.

C. Matematiksel Modelden Matematiksel Çözüme Geçiş

C1. Uygun formülü uygulama

C2. Çok yönlü bir fonksiyon elde edebilmek için sembolik formülleri kullanarak cebirsel olarak formülerde basitleştirmeler yapma

C3. Çoklu durumlara göre fonksiyonun işlevselliğini otomatik olarak sağlamak için uygun teknolojiyi kullanma

C4. Hesaplamayı yapmak için matematiksel tabloları veya teknolojiyi kullanma

C5. Grafiksel gösterimi üretmek için teknolojiyi kullanma

C6. Matematiksel veya teknolojik notasyonları ve geçişleri doğru bir şekilde yapma.

C7. Teknolojiyi kullanarak cebirsel modeli doğrulama

C8. Çözümlerin yorumlanmasına olanak sağlayan ekstra sonuçlar elde etme

D. Matematiksel Çözümden Modelin Gerçek Yaşam Anlamına Geçiş

D1. Matematiksel sonuçları gerçek yaşamdaki karşılıklarıyla birlikte tanımlama

D2. Geçici ve kesin matematiksel sonuçları gerçek yaşam durumu açısından irdeleme (çözümdeki rutinlikten karmaşıklığa geçiş)

D3. Yorumları doğrulamak için tartışmaları bütünleştirme

D4. Yeni bir yorumu destekleyen sonuçları üretmek için önceki sınırlandırmaların yumuşatılması

D5. Yorumlayıcı bir soru yöneltmeden önce matematiği dahil etme ihtiyacının farkında olma

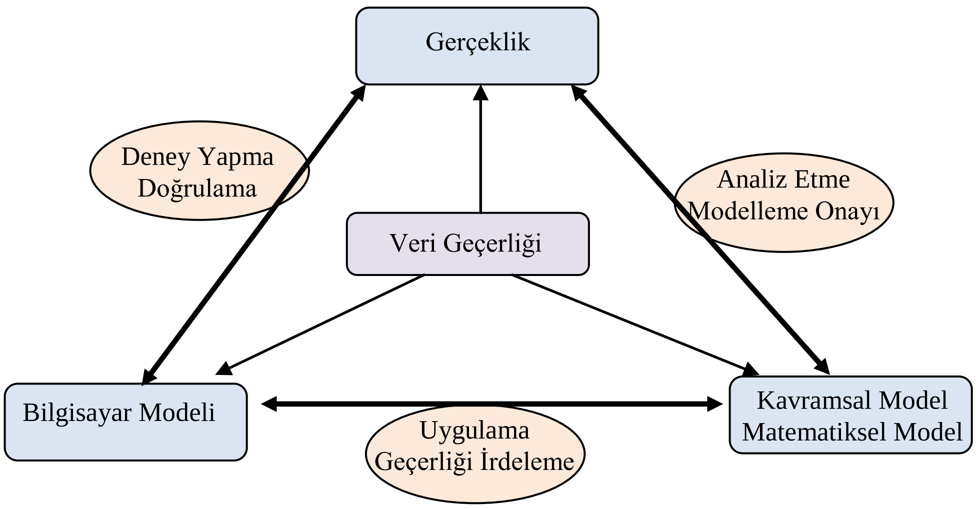
E. Modelin Gerçek Yaşam Anlamından Modelin Revize Edilmesi veya Çözümün Kabul Edilmesine Geçiş

E1. Beklenmedik sonuçlarla gerçek durumu uzlaştırma

E2. Matematiksel sonuçların olası gerçek dünya etkilerini dikkate alma
E3. Problemin matematiksel ve gerçek yaşam yönlerini uzlaştırma
E4. Geçerli bir çözüm için kabul edilebilir kısıtlamaların yumuşatılmasında bir sınırın olduğunun farkına varma
E5. Modelin ayrıntılı sonuçlarının gerçek dünya yeterliliğini dikkate alma

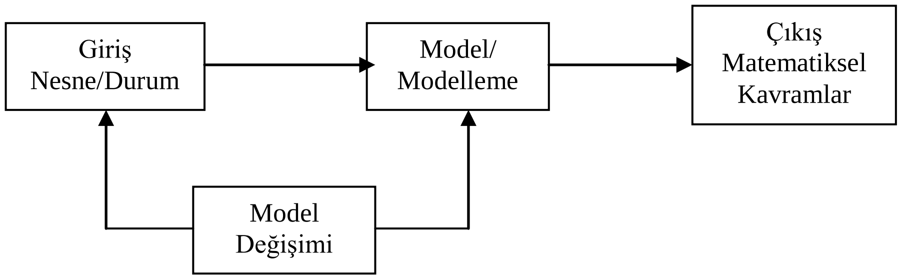
Sergent (2007), matematiksel modelleme sürecinde durumun zihinsel gösterimine süreç modelinde yer vermemekte ve modelleme sürecinde matematiksel modelden sonra bilgisayar modeline ulaşıldığı vurgulamaktadır (bkz. Şekil 36). Bu süreçte, matematiksel gösterimden teknolojik gösterime geçilerek modelin geçerliliği irdelenmektedir. Daha sonra, elde edilen bilgisayar modeli deneysel yollarla test edilmekte ve doğrulanmaktadır. Sergent (2007), süreç modelini açıklarken verification ve validation arasındaki farka dikkat çekmektedir. Süreçte önce geçerlilik sağlanmakta daha sonra da doğrulama gerçekleştirilmektedir.

Şekil 36. Modelleme Sürecinin Şematik Gösterimi (Sergent, 2007)



Abramovich (2007), sınıfta modelleme etkinlikleri uygulanırken dinamik bir geometri yazılımının sürece etkine yer vermektedir. Abramovich'e (2007) göre teknoloji destekli modelleme süreci, öğrencilerin matematiksel becerilerini keşfedebileceği ve geliştirebileceği bir ortamın sağlanmasında, matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilerin keşfedilmesinde ve öğretmenlerin "Nasıl daha iyi öğrenme ortamı yaratırım?" sorusuna farklı bir bakış ile yanıt bulmalarında önemli olmaktadır.

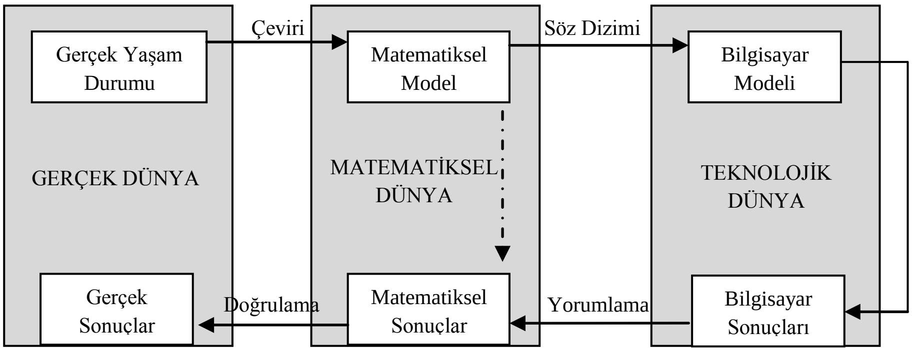
Şekil 37. Modellemede Modelin Değişimi Süreci (Abramovic, 2013)



Modeli değiştirmenin bir yolu, keşfedilen modelin uygun metotlarını tanımlama ve bir yeni model geliştirmek için nesnenin veya durumun yapısını değiştirmektir. Diğer yolu ise, ilk modelin yapısını değiştirme, sonra nesneyi veya durumu değiştirme, yeni sonuçları ortaya çıkarma ve uygulanabilir sonuçları kurmak için nesneyi veya durumu geliştirmektir. Bu ikinci yol daha üst düzey matematiksel düşünmenin ortaya çıkmasına olanak sağlamaktadır (bkz. Şekil 37).

Siller & Greefrath (2010), sınıflarda teknolojinin matematiksel modellemeye etkisini inceledikleri çalışmada modellemeyi Skovsmose'un (1994) modelleme sınıflandırmasındaki iki türden (Klasik ve Genişletilmiş modelleme) biri olan genişletilmiş modelleme çerçevesinde ele almakta ve modelleme sürecinin teknoloji ile destekli bir ortamdaki kapsamlı bir analizini gerçekleştirmektedir. Siller & Greefrath'e (2010) göre, matematik yazılımı kullanarak öğrencilerin matematiksel modelleme sürecinde teknolojiyi nasıl ve ne zaman kullandıklarını ortaya çıkarmakta ve modellemedeki süreç modelini aşağıdaki gibi açıklamaktadır (bkz. Şekil 38).

Şekil 38. Genişletilmiş Modelleme Döngüsü (Siller & Greefrath, 2010)



Siller & Greefrath (2010), Blum & Leiß' in (2007) teknoloji etkisi olmadan ele aldığı sürecin temel bileşenlerini dikkate almakta ve teknoloji destekli modelleme sürecinde gerçek dünya, matematiksel dünya ve teknoloji dünyası olarak üç temel geçiş durumunun bulunduğunu ifade etmektedir. Buna göre, bir matematiksel modeli geliştirmek için bireyin sahip olduğu matematik bilgisi önemli olmakta, teknolojinin sağladığı imkanlar da bireylerin matematiksel bilgisini pozitif anlamda etkilemektedir. Bu süreçte, teknoloji tabanlı araçlar öğrencilerin farklı stratejiler belirlemelerinde büyük bir rol üstlenmektedir (Siller & Greefrath, 2010). Araştırma sonucuna göre, farklı modelleme etkinlikleri ele alınıp daha fazla uygulama yapılarak teknolojinin modelleme sürecine olan etkisinin ayrıntılı bir şekilde incelenmesi ve daha yaratıcı bir öğrenme ortamının nasıl yaratılabileceği sorusuna cevap aranması gerektiği vurgulanmaktadır (Siller & Greefrath, 2010).

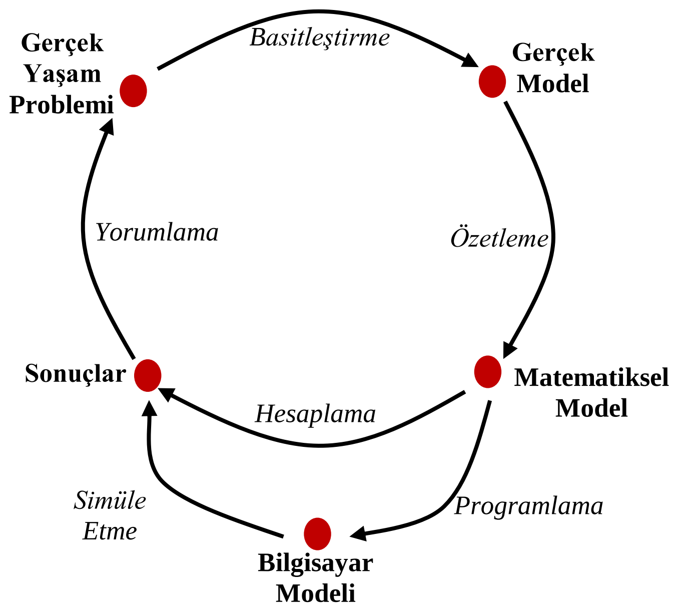
Lalinská & Majherová (2010), matematiksel modelleme problemi olarak eğik atış problemini ele alarak teknolojinin çözüm sürecindeki olası etkilerinden bahsetmektedir. Excel programı ve grafik hesap makinesi ile gerçekleştirilmiş çözüm süreci sonucunda teknolojik araçlar kurulacak matematiksel modellerin grafiksel gösterimlerini ortaya koymaktadır ve teknoloji modellerin yorumlanması için gerekli görsel olanakları barındırması bakımından süreçte önemli olmaktadır. Bu sayede teknoloji ile öğrenciler oluşturdukları matematiksel modeli görselleştirerek modelin gerçek yaşam durumuyla olan ilişkisini, modelin yapısını ve değişkenlerin modeldeki işleyişini daha iyi anlamaktadır. Ayrıca teknoloji, matematiksel modelleme sürecinde öğrencilerin yaratıcı çözüm stratejileri ortaya koymasını ve kurdukları modeli geliştirmeleri için uygun bir ortamı yaratmalarını sağlamaktadır.

Mousoulides, Chrysostomou, Pittalis & Christou (2010), matematiksel modelleme problemi olarak Mousoulides' un model oluşturma etkinliklerinin (Lesh & Doerr, 2003) temel prensiplerine uygun olarak tasarladığı "Water Shortage Problem" isimli problem kullanılarak Google Earth programının ve Excel Programının çözüm sürecine etkisini incelemektedir. Araştırmacılar bu süreçte grupların karmaşık ve zor probleme kabul edilebilir bir çözüm getirebildiklerini ve teknoloji destekli ortamın öğrencilerin keşfetme ve görselleştirme becerilerini geliştirdiğini ifade etmektedir. Öğrenciler bu süreçte problemi analiz etmek için görsel resimlerden uygun bir şekilde faydalanmakta ve bilgisayar yazılımı sayesinde karmaşık hesaplamaların kolaylıkla üstesinden gelmektedirler. Mousoulides, Chrysostomou, Pittalis & Christou (2010) okullarda matematiksel modelleme sürecinde teknoloji tabanlı bir ortamın öğrenciler için ilgi çekici ve faydalı olacağını, böyle bir sürecin öğrencilerin kavramsal anlayışlarına ve matematiksel gelişimlerine önemli katkı sağlayacağını vurgulamaktadır.

Ang (2010) "Teknoloji ile matematiksel modellemeyi öğretme ve öğrenme" isimli çalışmada teknolojinin derste modelleme etkinliklerinin uygulanma sürecinde nasıl bir rol oynadığını açıklamaktadır. Dört matematiksel modelleme etkinliği doğrultusunda farklı teknolojik araçlar (Logger Pro 3 yazılımı, Excel programı, Geometer's Sketchpad yazılımı, SARS yazılımı) kullanarak teknoloji destekli bir ortamın öğrenciler için matematikte çok zengin bir öğrenme ortamı sağladığını ve teknolojinin matematiksel modellemede önemli bir rol oynadığını ifade etmektedir. Gerçek yaşam durumlarının verileri gerçek veriler olduğundan dolayı, elde edilecek sonuçların karmaşıklığının teknolojik araçlar sayesinde en aza indirgendiğini vurgulanmaktadır. 2006' daki çalışmalarına paralel olarak (Ang, 2006a; 2006b) teknolojik araçlar sayesinde modelleme sürecinde öğrencilerin daha az matematik ile daha çok şey yapabilecekleri, problemin olası grafiksel çözümünü keşfederek gerçek yaşam durumuyla karşılaştırabilcekleri simülasyonlar hazırlayabileceklerini ifade edilmektedir. Ang (2010), teknoloji destekli bir matematiksel modelleme sürecinin göründüğünden çok daha karmaşık bir süreç olduğunu belirtmekte ve teknoloji destekli modelleme sürecine ilişkin daha çok araştırmanın yapılması gerektiğini vurgulamaktadır.

Maki & Thompson (2010), matematiksel modelleme sürecine bilgisayarın etkisini açıkladığı çalışmasının süreç modelinde bilgisayar modeline yer verdiği görülmektedir. Çalışmaya göre, bilgisayar matematikselleştirmede matematiksel modelin bilgisayar tarafından elde edilmesi aşamasında sürece dahil olmaktadır (bkz. Şekil 39). Maki & Thompson'ın (2010) süreç modeli basitleştirme, özetleme, hesaplama, programlama, simüle etme, yorumlama basamaklarından oluşmaktadır. Süreçte temel bileşenler ve temel basamaklar arasında ayrıma vurgu yapılmaktadır. Doğrulama eylemi, yorumlama basamağı içerisinde dikkate alınmakta ve matematiksel modeli oluşturma özetleme olarak ifade edilmektedir. Süreçte bilgisayar bir araç olarak kullanılmakta, matematiksel model elde edildikten sonra sonuçların elde edilmesinde etkili olmaktadır. Hıdıroğlu (2012), Galbraith & Stillman (2006) bu düşünceden farklı olarak teknoloji ve bilgisayarın sürecin her anında etkili olduğunu ifade etmektedir. Hıdıroğlu'na (2012) göre, bilgisayar modeli matematiksel modelin teknoloji tabanlı gösterimini içermektedir. Bazen öğrenciler matematiksel model olarak bilgisayar modelini dikkate almaktadır. Yani bilgisayar modeli süreçte matematiksel modelin farklı bir gösterimidir. Bunun yanında, bilgisayar sadece matematiksel modelin görsel bir resmine ulaşmayı sağlamakta, bunun yanında matematiksel modele ulaşılması için de önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. Ayrıca teknoloji, modelin doğrulanmasında farklı stratejilerin ortaya çıkmasına fırsat vermektedir.

Şekil 39. Matematiksel Modelleme Döngüsü (Maki & Thompson, 2010)

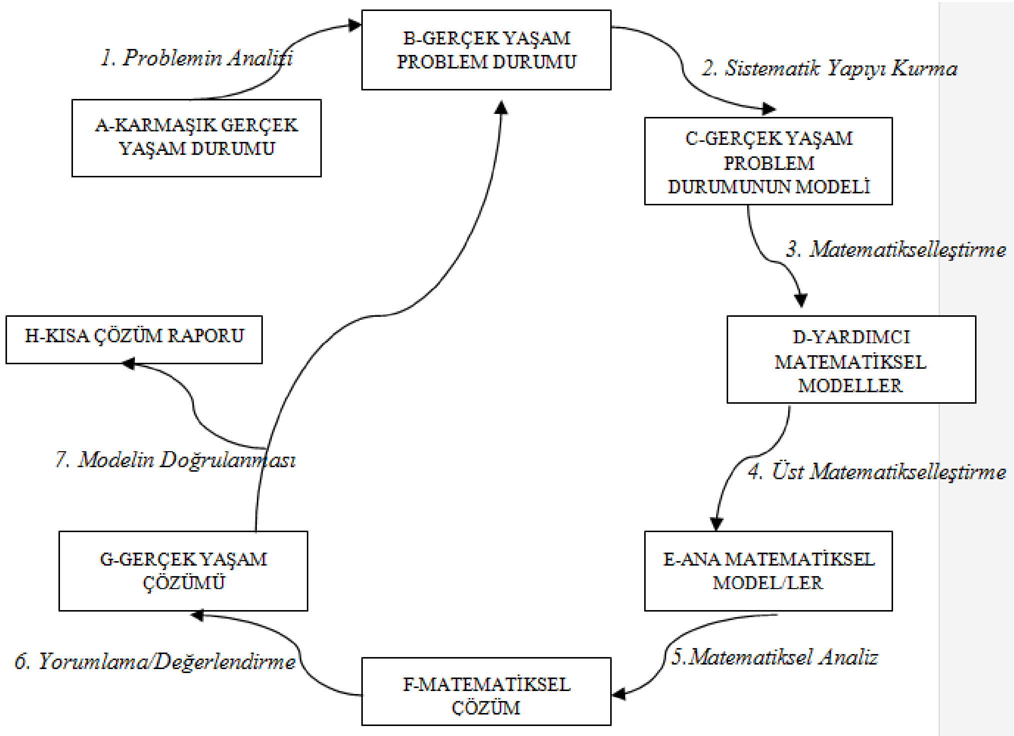


GeoGebra ile matematiksel modellemenin ilişkilendirildiği çalışmalardan (Hıdıroğlu, 2012; Lingefjärd, 2012; Hıdıroğlu & Bukova Güzel, 2013) biri de Lingefjärd'ın (2012) basket topunun potaya hareketinin GeoGebra yardımıyla matematiksel olarak modellenmesini açıklayan çalışmasıdır. Deneysel ortamda öğrencilerin tahminleriyle buldukları sonuçları test etmelerinin etkili olduğunu ifade eden Lingefjärd (2012), matematiksel modelleme probleminin çözüm sürecinde matematiksel güçlerinin üstesinden gelmede teknolojinin büyük katkı sağladığını vurgulamaktadır.

Hıdıroğlu (2012) tarafından kuram oluşturma yaklaşımı kapsamında geliştirilen matematiksel modelleme süreci sekiz temel bileşen, yedi temel basamak ve kırk yedi alt basamaktan oluşmaktadır (bkz. Şekil 40). Süreç, karmaşık gerçek yaşam durumu anlama ile başlamakta ve yaşam problemini oluşturabilmek için verilenler ve istenenler ile ilgili ön görüşler ile devam etmektedir. Özetle, önce problemin analizi yapılarak gerçek yaşam durumunun karmaşıklığı ortadan kaldırılmaktadır. Sürecin sonraki aşamalarında, gerçek yaşam durumunda istenilene ulaşmak için gerekli stratejik etkenler (değişken, sabit gibi), matematiksel kavramlar ve teknolojik araçlar düşünülmekte ve genel çözüm stratejisi ortaya atılmaktadır.

Böylece, varsayımlarda bulunularak sistematik yapı kurulmakta ve gerçek yaşam durumunun bir modeline ulaşılmaktadır. Çözüm, gerçek yaşam durumunu temsil eden model üzerinden ilerlerken, matematiksel ifadeler, bilgiler ve beceriler doğrultusunda veriler gruplandırılmaktadır.

Şekil 40. Matematiksel Modelleme Süreci (Hıdıroğlu, 2012)



Sürecin ilerleyen aşamalarında gerekli teknoloji ve matematikten yararlanılarak, matematikselleştirme gerçekleştirilmekte ve "Yardımcı Matematiksel Model (YMM)"ler elde edilmektedir. Oluşturulan YMM'lerden yola çıkılarak "Ana Matematiksel Model (AMM)" oluşturulmaktadır. Üst düzey matematikselleştirme ile ulaşılan AMM'ler analiz edilerek matematiksel çözümlere ulaşılmaktadır. Buradaki matematiksel analiz sürecinde matematiksel çözüm ve matematiksel sonuç olarak iki kavram ortaya çıkmaktadır. Matematiksel çözüm, AMM'den elde edilen ve istenilen duruma cevap veren matematiksel yapılardır. Matematiksel sonuçlar ise bazen matematiksel çözüme ulaşmada kullanılır bazen de gerçek yaşam durumunun farklı durumları için AMM'ye genel bir bakış sağlar. Matematiksel çözüm ve sonuçların gerçek yaşam durumunda anlamlı olabilmesi için gerçek yaşama uyarlanabilmesi gerekmektedir. Ancak bu biçimde matematiksel dünya ile gerçek yaşam arasındaki ilişkiler irdelenerek yorumlama/değerlendirme yapılabilir ve matematiksel çözümden gerçek yaşam çözümüne, matematiksel sonuçlardan da gerçek yaşam sonuçlarına ulaşılabilir.

Gerçek yaşam çözümünün elde edilmesi sonucunda, problemle ilgili elde edilen teorik ve deneysel veriler karşılaştırılmakta ve modelin geçerliliği hakkında karara varılmaktadır. Başka bir deyişle, sürecin bu basamağında, gerçek yaşam sonuçlarından yararlanarak modelin doğrulanması yapılmaktadır. Ayrıca burada sadece gerçek yaşam çözümü değil aynı zamanda gerçek yaşam sonuçları da dikkate alınarak modelin geçerliliği sorgulanmaktadır. Eğer modelin geçerliliği tatmin edici bir boyuttaysa ileriki bileşen kısa çözüm raporu olmaktadır. Eğer modelin sonuçlarının gerçekçi olmadığı düşünülüyorsa; problem tekrar gözden geçirilerek ve önceki basamaklara geri dönülerek modelin geçerliliği sağlanmaya çalışılmaktadır.

Bu çalışmada ortaya çıkarılan zengin zihinsel aktiviteler sayesinde, matematiksel modelleme sürecinin kapsamlı bir zihinsel süreç modeli sunulmaktadır ve bu da teknolojinin matematiksel düşünceye olan etkisinin bir göstergesi olarak düşünülmektedir. Ayrıca sürecin nasıl şekillendiğini ayrıntılı olarak inceleyen az sayıda araştırma yapıldığı göz önünde bulundurulduğunda karmaşık yapıya sahip matematiksel modelleme sürecinin daha ayrıntılı bir şekilde tanımlanmasının, matematiksel modelleme süreci ile ilgili bundan sonra yapılacak diğer çalışmalara daha farklı ve derin bakış açısı getireceği düşünülmektedir.

Çalışmada, teknoloji destekli ortamdaki modelleme sürecine uygun ortam yaratacağı ve süreci derinlemesine izleme imkânı sağlayacağı düşünülerek çözüm süreci birlikte çalışma gruplarıyla gerçekleştirilmiştir. Geometri, cebir ve analize hitap edebilen dinamik matematik yazılım programı GeoGebra matematiksel modelleme problemlerini çözüm sürecinde öğretmen adaylarınca kullanılmıştır. Matematiksel modelleme sürecinin GeoGebra ile iç içe olduğu ayrıntılı ilk araştırma niteliği taşıyan bu çalışmada GeoGebra destekli çözüm sürecinin yanında problemle birlikte video, animasyon ve fotoğraflar verilerek zengin bir zihinsel süreç ortamı yaratılmak istenmiştir.

BÖLÜM III

KURAMSAL ÇERÇEVE

Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerindeki bilişsel ve üst bilişsel aktivitelerin açıklanmasının amaçlandığı bu çalışma farklı kuramsal temeller dikkate alınarak yürütülmüştür. Bu bölümde, çalışmada dikkate alınan kuramsal düşünceler şu alt başlıklar altında açıklanmıştır:

- Matematiksel Modelleme Problemleri Tasarlanırken Dikkate Alınan Etkenler
- Modelleme Problemlerinin Türlerine İlişkin Dikkate Alınan Yaklaşım
- Matematiksel Modellemeye İlişkin Dikkate Alınan Bakış Açısı
- Üst Bilişin Sınıflandırılmasında Dikkate Alınan Yaklaşım
- Matematiksel Modellemede Teknoloji ve Grup Çalışması

Matematiksel Modelleme Problemleri Tasarlanırken Dikkate Alınan Etkenler

Öğretmen adaylarına verilmesi planlanan matematiksel modelleme problemleri tasarlanırken alan yazındaki matematiksel modelleme problemlerinin yapısı, özellikleri incelenmiş ve araştırmacılar tarafından problemlerde bulunması gereken özellikler tanımlanmıştır. Tasarlanacak matematiksel modelleme problemlerinin aşağıdaki özelliklere sahip olması amaçlanmıştır:

- Öğrencilerin matematikte veya fizikte sahip oldukları ön bilgileriyle gerçek yaşamda anlamlandırabilecekleri bir durumun olması (Berry, 2002; Blum, 2002; Borromeo Ferri, 2007; Maaβ, 2006),

- Öğrencilerin zihinsel aktivitelerini ortaya çıkarıcı (keşfetme, analiz etme, yorumlama, değerlendirme ve doğrulama gibi temel süreçler) ipuçlarını içerisinde barındıran açık uçlu problem olması (Blomhøj & Jensen, 2006; Schoenfeld, 1994; Maaβ, 2006; Borromeo Ferri, 2007, Blum & Leiß, 2007;

Carlson, Larson & Lesh, 2003; Lesh, Hoover, Hole, Kelly & Post, 2000; Moore, 2008; Yıldırım, Shuman & Besterfield Sacre, 2010),

- Zengin bir bilişsel süreci ortaya çıkarmak için gerekli veya gereksiz, fakat ilgili gerçek yaşam durumuyla bağlantılı bilgilerin ve verilerin problem durumunda birlikte bütüncül olarak var olması (Chamberlin, 2002; Lesh & Doerr, 2003 Moore, 2008; Yıldırım, Shuman and Besterfield Sacre, 2010),

- Gerçek yaşamdaki bir durumun hikayeleştirilerek sunulması (Chamberlin, 2002; Lesh & Doerr, 2003),

- Öğrencilerin önceki problem çözme ve gerçek yaşam deneyimlerinden yaralanabilecekleri ve bu sayede de gerektiğinde tahminde bulunabilecekleri, farklı varsayımlar oluşturma, doğrulama ve yorumlama gibi yaklaşımları sergileyebilecekleri bir problem olması (Lamberts, 2005; English, 2003; Lesh & Doerr, 2003; Peter Koop, 2004; Ärlebäck, 2010),

- Açık ve anlaşılır olması, yani herkes tarafından aynı şeyin anlaşıldığı bir problem olması (Schoenfeld, 1994; Berry & Hosuton, 1995),

- Günlük yaşamla veya farklı disiplinlerle alakalı olması (Blomhøj & Kjeldsen, 2006; Blum & Niss, 1989; English, 2009; Lingefjärd, 2006; English & Watters, 2004),

- İlgi çekici olması (Schoenfeld, 1994; Lesh & Doerr, 2003; Ärlebäck, 2010),

- Teknoloji kullanımını içerisinde barındıran (Galbraith, Stillman, Brown & Edwards, 2007; Lingefjärd, 2006; Ang, 2010) ve problem durumunun yanında animasyon, video, fotoğraf/resimlerin verilmesi (Akpınar, 1999; Baki, 2002),

- İçerisinde birden fazla değişkeni, parametreyi, sabiti, matematiksel kavramı ve matematiksel modeli barındırması (Berry & Houston, 1995, Schoenfeld, 1994),

- Öğrencilerin gerektiğinde kendilerinin oluşturabilecekleri verileri kullanmalarına olanak sağlaması (Peter Koop, 2006; Lesh & Doerr, 2003)

- Verileri tablo ve grafik yardımıyla görselleştirmelerini gerektirecek stratejileri içerisinde barındırması (Berry & Houston, 1995; D'Ambrosio, 1989; Galbraith, Stillman, Brown & Edwards, 2007),

- Farklı modellerin oluşturulmasına zemin hazırlayan, ön bilgilerle uyumlu, ama bilişsel olarak daha karmaşık bir süreci içerisinde barındırması (Schoenfeld, 1994; Berry & Houston, 1995)

- Öğrencilerin becerilerine uygun seviyede/zorlukta olması (Maaβ, 2006; Moore, 2008; Yıldırım, Shuman & Besterfield Sacre, 2010)

- Öğrencilerin teknoloji bilgisini, deneyimlerini, matematik bilgisini ve bunların aralarındaki ilişkiyi ortaya çıkarması (Barbosa, 2003; Baki, 2002; Ang, 2010).

Schoenfeld' in (1992; 1994) de ifade ettiği gibi, genel olarak problemler tasarlanırken, problemlerin kafa karıştırıcı veya çözümü açık seçik kolayca görülmeyen, matematiksel olarak cevabının verilmesinin gerektiği, şaşırtıcı, zor ve öğrencileri yaratıcı düşünmeye yönlendirici problemler olmalarına özen gösterilmiştir.

Matematiksel Modelleme Problemi Türlerine İlişkin Dikkate Alınan Yaklaşım

Matematiksel modelleme problemlerinin türlerine yönelik sınıflandırmalara ilişkin literatürde farklı araştırmalara (Berry & Houston, 1995; Blum & Niss, 1989; Treffers, 1987; Freudenthal,1991; Skovmose, 1994; Williams, 1989) rastlanmaktadır. Diğer sınıflandırmalardan farklı olarak sadece Berry & Houston (1995) ve Skovsmose' un (1994) sınıflandırmalarının modelleme problemlerindeki zorluk seviyelerine göre yapılmadığı dikkat çekmektedir. Ayrıca matematik eğitimi temelli çalışmalarıyla Berry & Houston (1995) matematiksel modelleme problemlerinin yapısına ve çözüm süreçlerindeki farklılıklara dikkat çekerek, matematiksel modellemeyi dörde ayırmaktadır. Tez çalışmasında, matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel aktiviteleri daha kapsamlı bir bakış ile ele alabilmek için, Berry & Houston'ın (1995) deneysel, teorik ve simülasyon modelleme problemlerine uygun özellikte matematiksel modelleme problemleri tasarlanmıştır. Araştırmada, Berry & Houston'ın (1995) boyutsal analiz modelleme problemlerine uygun bir modelleme problemi tasarlanmamıştır. Bunun temel sebebi, bir süre boyunca öğrencilere ilişkin gözlemler doğrultusunda, öğrencilerin boyutsal analiz problemleri ile ilgili temel becerilerinin düşük ve istenilen düzeyin çok altında olduğu görülmüştür ve bu tür problemleri çözerken çözüm sürecinde genellikle teorik modellemeye uygun hareket ettikleri gözlenmiştir. Bu doğrultuda, tez çalışmasında istenen amaca ulaşılamayacağı düşünüldüğünden boyutsal analiz modelleme problemi tasarlanmamıştır.

Tez çalışmasında *deneysel modelleme problemi tasarlanırken* yukarı açıklanan problemlerin genel özelliklerinin yanında, problemin yapısında ve çözüm sürecinde dikkate alınan diğer hususlar şu şekilde ifade edilmiştir:

- Problem durumunda gerçek yaşamda ele alınan bir olaya ilişkin deneysel verilerin öğrencilere hazır olarak verilmesi.
- Deneysel verilerde gerekli ve gereksiz verilere yer verilmesi ve öğrencinin hangi verilerin nasıl gerekli olduğuna ilişkin düşünmesinin sağlanması.
- Deneysel verilerle tek bir matematiksel modele değil birden fazla matematiksel modele ulaşılmasının istenmesi.
- Problemin ve problemdeki olası çözümlerin GeoGebra'nın mevcut yapısına ve özelliklerine uygun özellikler taşıması.
- GeoGebra yardımıyla matematiksel modellerin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini ayrı ayrı kullanmalarını ve çözümde *küçük durumlar için* simülasyon kullanmalarını gerektiren gerçek yaşam durumlarının olması.

Tez çalışmasında *teorik modelleme problemi tasarlanırken* yukarı açıklanan problemlerin genel özelliklerinin yanında, problemin yapısında ve çözüm sürecinde dikkate alınan diğer hususlar şu şekilde ifade edilmiştir:

- Değişkenler arasındaki ilişkinin eğilimle bulunmasının mümkün olmadığı gerçek yaşam durumlarının dikkate alınması.

- Genel stratejinin belirlenmesinde matematiksel kavramların gerçek yaşam ile bağlantısının önemli olduğu gerçek yaşam durumlarının ele alınması.

- Çözümün gerçekleşmesi için temel düzey fiziksel veya seviyeye uygun matematiksel teorilerinin çözüm sürecinde etkili olması.

- Çözüm stratejisi sonucunda çözüm için birden fazla matematiksel modele ihtiyaç duyma.

- GeoGebra yardımıyla matematiksel modellerin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini ayrı ayrı kullanmalarını ve çözümde *küçük durumlar için* simülasyon kullanmalarını gerektiren gerçek yaşam durumlarının ele alınması.

Tez çalışmasında *simülasyon modelleme problemi tasarlanırken* yukarı açıklanan problemlerin genel özelliklerinin yanında, problemin yapısında ve çözüm sürecinde dikkate alınan diğer hususlar şu şekilde ifade edilmiştir:

- Çözüm için sadece matematiksel veya fiziksel teorilerin yeterli olmadığı gerçek yaşam durumlarının ele alınması.

- Çözümde gerekli değişkenler arasındaki ilişkinin teorik modelleme stratejisiyle kolaylıkla bulunamaması.

- Problemin çözüm süreci boyunca ilgili gerçek yaşam durumunun tasarlanan bir prototipi, yeni bir tasarımı veya projesi ile durumun simüle edilerek çözüme ulaşılmasını gerektirme.

- Bir tasarım doğrultusunda söz konusu gerçek yaşam durumunu görselleştirecek ve simüle decek bir sunuma bilgisayar yardımıyla ulaşabilmesine gerektirme.

Araştırmada kullanılacak matematiksel modelleme problemlerinde Berry & Houston'ın (1995) sınıflandırmasının temel olarak alınma sebebi, bu sınıflandırmanın hem araştırmacılar tarafından sürece ilişkin daha genel ve kapsamlı bir fikir üretmesi açısından uygun bir ortam sağlaması hem de matematik eğitimindeki çalışmalar dikkate alındığında diğer sınıflandırmalara göre ön plana çıkmış olmasıdır. Literatür incelendiğinde, ortaya konan en son sınıflandırma Berry & Houston'ın (1995) sınıflandırması olması da diğer önemli sebeptir.

Matematiksel Modellemeye İlişkin Dikkate Alınan Bakış Açısı

Araştırma, tüm bileşenleri (araştırmanın amacı, kuramsal çerçevesi, yöntemi, bulguları, sonuçları ve önerileri) bakımından temelde Kaiser (2005), Kaiser & Sriraman (2006) ve Blomhøj'ın (2008) dikkate aldığı matematiksel modelleme perspektiflerinden bilişsel modelleme perspektifinin temel amaç ve hedeflerine hizmet etmektedir. Bilişsel modellemenin psikolojik hedefleri, modelleme sürecinde meydana gelen zihinsel süreçlerin analiz edilmesi ve bu zihinsel (bilişsel veya üst bilişsel) süreçlerin anlaşılması ve modelleri zihinsel resimler veya fiziksel resimler olarak kullanarak veya modellemeyi soyutlama, genelleme gibi zihinsel süreçler olarak ele alarak matematiksel düşünme süreçlerinin geliştirilmesidir (Kaiser, 2005; Kaiser & Sriraman, 2006; Blomhøj, 2008)

Bu doğrultuda, araştırmada teknoloji ile desteklenmiş ortamda (GeoGebra, animasyon, video ve fotoğraf) matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel aktiviteleri ortaya çıkarmak amacıyla öğrencilerin yaklaşım, strateji ve düşünme süreçlerine odaklanılmaktadır. Bu perspektifle matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan zihinsel süreçler, bunlar arasındaki ilişkiler ve farklılıklar kavramsallaştırılarak modelleme sürecini açıklamak amacıyla kapsamlı bir kuram ortaya konulmaktadır.

Üst Biliş Kavramına İlişkin Dikkate Alınan Yaklaşım

Üst biliş kavramına ilişkin alan yazın incelendiğinde, bu kavramı açıklayan ortak olarak kabul görmüş bir tanıma rastlanılmamaktadır (Maaβ, 2007). Üst biliş ile ilgili tanımlardaki ortak özellikler dikkat alındığında, üst biliş en genel anlamıyla şöyle ifade edilebilir: Üst biliş, birisinin kendi bilişsel sistemi (Brown, 1987; Panaoura, Philippou & Christou, 2003; Tanner & Jones, 1999), bilişsel süreçleri (Yurdakul, 2004; Zohar, 1999), düşünme ve öğrenme stratejileri (Kramarski, Mevarech & Aramı, 2002), neyi bilip, neyi bilmediği, ne zaman ve nasıl kullanması gerektiği ile ilgili sahip olduğu bilgi ve onların kontrolü veya düzenlenmesidir (Gama, 2004; Panaoura, Philippou & Christou, 2003; Ülgen 2001; Yurdakul, 2004).

Flavell'a (1979) göre, üst biliş hem üst bilişsel bilgi hem de üst bilişsel deneyimden (öz düzenleme) meydana gelmektedir. Diğer bir deyişle Flavell (1979), üst bilişin birinci boyutunu "birinin kendi bilişsel süreçleri, ürünleri ve onlarla ilgili her şeyi içeren bilgisi" olarak açıklarken; ikinci boyutunu ise, "bilişsel becerilerin aktif izlenmesi ve bu doğrultuda gerçekleştirilen aktivitelerin öz düzenlenmesi" olarak tanımlamaktadır (Desoete, 2001).

Wilson'a (1999; 2001) göre, üst biliş kavramı üst bilişsel farkındalık, üst bilişsel değerlendirme ve üst bilişsel düzenlemeden oluşmaktadır. Lucangeli & Cornoldi (1997) üst bilişi, üst bilişsel bilgi veya farkındalık (yani birinin zihninin nasıl çalıştığı ile ilgili sahip olduğu bilgi) ve iş üzerinde yönetici kontrol olarak ele almaktadır. İkinci bileşen için de planlama, izleme, değerlendirme ve tahmin alt bileşenlerini kabul etmektedir. Heirdsfield (2002) ve Heirdsfield & Cooper (2002) üst bilişi; üst bilişsel bilgi, stratejiler ve inanışlar olarak ele almaktadır.

Schoenfeld (1987), üst biliş üzerine yaptığı araştırmasında bu zihinsel davranışın üç boyuta indirgemektedir:

1. Bireyin düşünme süreçleri ile ilgili bilgisi (Kendi bilginizi tanımlamada ne kadar iyisiniz?)
2. Bireyin davranışlarını eylemlerini kontrol etmesi veya öz düzenlemesi (kişinin çalışma girişimlerini düzenlemesi)
    - Problemi anlayıp anlamadığını değerlendirme
    - Çözüm stratejisi planlama
    - Çözüm sürecini izlemek ve kontrol etmek
    - Cevabın mantıklı olup olmadığını değerlendirmek
3. İnançlar ve sezgiler

Biryukov (2004); üst biliş kavramını birinin bildiği (üst bilişsel bilgisi), yapabileceği (üst bilişsel becerileri) ve kendi bilişsel yetenekleri ile ilgili bildiği (üst bilişsel deneyimi) şeylerin farkındalığı içerdiğini vurgulamaktadır. Desoete, Roeyers ve Buysse (2001) de çalışmasında üst bilişte iki (bilgi ve beceri) veya üç (bilgi, beceri ve inanç) bileşen olup olmadığını araştırmak için en çok kullanılan "planlama, izleme, değerlendirme, tahmin, atfetme, tanıtıcı bilgi, işlemsel bilgi ve koşullu bilgi gibi" üst bilişsel parametreleri dikkate almaktadır.

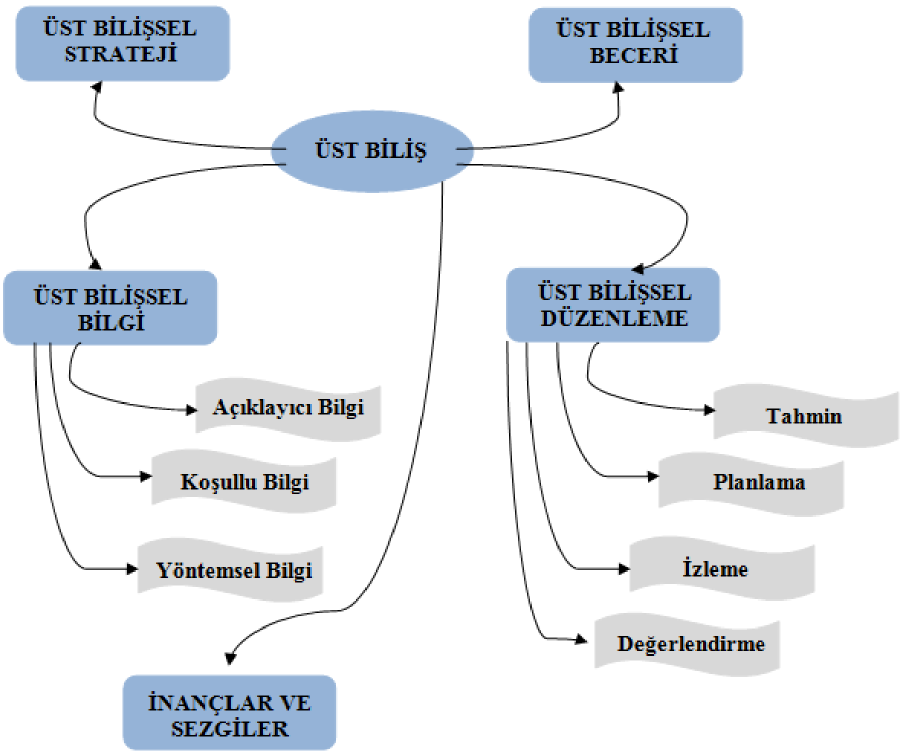
Schunk (2009) üst bilişin, iki farklı bilgi yapısını içerisinde barındırdığını ifade etmektedir. Bunlardan birisi bir kişinin, bir görevin hangi becerileri, taktikleri, kaynakları gerektirdiği bilgisi; diğeri ise, görevin başarıyla sonuçlanabilmesi için bu becerilerin, taktiklerin, kaynakların ne zaman ve nasıl kullanılacağı bilgisidir. Schunk (2009) bu düşüncesinin üst bilişsel bilgiyi (yöntemsel bilgi, açıklayıcı bilgi, koşullu bilgi olmak üzere üç kategoride ele alan (Brown, 1987; Schraw & Dennision, 1994; Schraw ve Moshman, 1995; Pintrich, 2002; Panaoura, Philippou & Christou, 2003; Gama, 2004) çalışmalardan farklı olmadığı görülmektedir. Schunk' un 2009 ilk bilgi türü açıklayıcı bilgiyle eştir. Diğer bilgi türü hem yöntemsel hem de koşullu bilgiyi ifade etmektedir.

Literatür incelendiğinde üst bilişe yönelik çok farklı sınıflandırmalar karşımıza çıkmaktadır. Bu sınıflandırmalar arasında farklılıkların iki temel sebepten kaynaklandığı görülmektedir. Bunlardan birisi, araştırmacıların aynı şeyi ifade ettikleri halde bunu farklı kelimelerle söylemeleridir. Türkiye'de dahi *metacognition* kavramının çevirisinde çok farklı ifadelere yer verildiği görülmektedir. Ancak, 2008'de ortak bir görüşle üst biliş olarak ifade edilmesi gerektiği vurgulanmıştır. Diğer ve en önemli sebep ise, farklı araştırmacıların üst biliş kavramından anladıkları şeyin birbirlerinden farklı olmasıdır. Üst biliş kavramının karmaşık doğası ve biliş ile olan iç içe geçmiş yapısı onun ortaya çıkarılmasını ve anlamlandırılmasını da oldukça zorlaştırmaktadır.

Yukarıda literatürde üst biliş kavramına yönelik benzer sınıflandırmalara gitmiş, bazı farklılıklar görülse de temel anlayış olarak birbirleriyle çelişmeyen çalışmalara kısaca yer verilmektedir. Yukarıdaki araştırmacıların üst biliş kavramına yönelik ortak görüşleri ve anlatmak istedikleri dikkate alınarak üst bilişe yönelik aşağıda ele alınacak kuramsal yapı meydana getirilmiştir.

Araştırmada teknoloji destekli ortamdaki matematiksel modelleme sürecine ilişkin üst bilişsel aktiviteler ortaya konulurken literatürdeki (Biryukov, 2004; Heirdsfield & Cooper, 2002; Desoete, Roeyers and Buysse, 2001; Biryukov, 2004; Lucangeli & Cornoldi, 1997; Flavell, 1979; Schoenfeld, 1987; Heirdsfield, 2002; Heirdsfield & Cooper, 2002; Panaoura, Philippou & Christou, 2003; Lomax, 2002; Schunk, 2009; Pintrich, 2002; Gama, 2004; Daniels, 2002; Vovides, 2003; Munby et al., 2003; Pierce, 2003; Desoete, Herbert and Ann, 2001; Wilson, 1999; 2001; Wilson & Clarke, 2002; 2004) çalışmalarındaki benzer bakış açıları dikkate alınarak, Şekil 41' deki kuramsal yapı araştırmacılar tarafından derlenmiş ve verilerin analizinde kullanılmak üzere hazırlanmıştır. Bu doğrultuda, üst biliş öncelikle üst bilişsel strateji, üst bilişsel beceri, üst bilişsel bilgi, üst bilişsel düzenleme ve inanışlar ve sezgiler olmak üzere beş temel parçada ele alınmaktadır. Üst bilişsel bilgi açıklayıcı, koşullu ve yöntemsel olarak üç kategoride toplanmaktadır. Üst bilişsel bilginin düzenlenmesi ya da kontrolü olarak tanımlanan üst bilişsel düzenleme ise dört alt boyuttan oluşmaktadır (Brown, 1987; Schraw & Moshman 1995; Jacobs & Paris, 1987; Schraw, 1994; Lucangeli & Cornoldi, 1997; Deseote, Roeyers and Buysee, 2001; Deseote & Roeyers, 2002). Bunlar: planlama, izleme, değerlendirme ve tahmindir.

Şekil 41. Üst biliş Kavramının Bileşenleri



Matematiksel Modellemede Teknoloji ve Grup Çalışması

Öğretimde kullanılacak fotofrafların/resimlerin, animasyonların ve videoların öğrencilere bilginin keşfi için uygun stratejiler geliştirmesini sağlayabileceği, öğrencilerin birbirleriyle etkileşim kurmasını ve tartışmalar yapmasını sağlayacak ortamları sunabileceği, değişkenler arasındaki ilişkilerin anlaşılmasını kolaylaştırarak modellemeyi sağlayabileceği, somut ve soyut ifadelerin ilişkilendirilmesine yardımcı olabileceği ifade edilmektedir (Akpınar, 1999). Bu doğrultuda, tez çalışmasında problem çözümünde kullanılması üzere video, animasyon ve fotoğraf/resimlerden yararlanılmıştır.

Baki (2002), bilgisayar donanımlı ortamlarda küçük gruplarla çok daha verimli ve işlevsel öğrenme ortamlarının oluşturulabileceğini, böyle bir ortamda öğrencilerin araştırma türünden karmaşık problemleri çözebileceğini, çözüm yolları geliştirebileceğini, analiz yapabileceğini, varsayımlarda bulunarak genellemeler yapabileceğini, bilgisayar yazılımlarını kullanarak matematiksel modelin veya ilişkilerin sayısal ve grafiksel olarak görüntülenmesi sağlayabileceğini ifade ederek, teknoloji, birlikte çalışma ve matematiksel modelleme arasındaki ilişkinin önemine vurgu yapmaktadır. Bu düşünceye paralel olarak, tez çalışmasında matematiksel modelleme problemlerinin çözümleri birlikte çalışma gruplarıyla gerçekleştirilmiştir.

2002 yılında geliştirilen açık kaynak kodlu bir dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra'nın, Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin yetenekleri ile Dinamik Geometri Sistemlerinin yeteneklerini birleştirerek geometri, cebir ve analiz arasında bir köprü görevi görmesi (Hohenwarter & Jones, 2007; Preiner, 2008), GeoGebra yazılımının çoklu gösterim yapısı (cebir, grafik ve tablo), kullanım kolaylığı, Türkçe olması gibi nedenlerden dolayı matematiksel modelleme sürecinde kullanılmasının uygun olduğu düşünülmüştür.

Matematiksel modelleme sürecinde zengin bir bilişsel ve üst bilişsel süreci sağlayacağı düşüncesiyle, tez çalışmasında teknoloji (video, animasyon, fotoğraf/resim), grup çalışması ve GeoGebra destekli bir modelleme problemi çözüm süreci dikkate alınmıştır.

BÖLÜM IV

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, katılımcıları, veri toplama araçları, veri toplama süreci ve veri analizi süreci ele alınan kuramsal yaklaşımlar bağlamında ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

Araştırmanın Modeli

Tez çalışmasında teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel aktivitelerin ortaya çıkarılması, açıklanması ve kavramsallaştırılması amaçlandığından nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Bu nedenle matematiksel modelleme sürecindeki zihinsel aktivitelerin ortaya çıkarılması ve kavramsallaştırılması gerektiğinden dolayı nicel veri toplama araçlarının (test, anket, nice gözlem formu gibi) araştırma boyunca yetersiz kalacağı düşünülmüştür. Araştırmada gerçek yaşam problem durumlarına ilişkin öğrencilerin teknoloji destekli ortamda vereceği yanıtların yanında, o çözüm sürecinde gerçekleştirecekleri çeşitli bilişsel ve üst bilişsel aktiviteler araştırmanın temel bulgularını oluşturacak temel veri parçalarıdır. Bu nedenle modelleme sürecini ayrıntılı bir şekilde ele almayı sağlayacak nitel araştırma yaklaşımını temel alan tekniklerden yararlanılmıştır. Bu doğrultuda çalışma; amacı, problem ve alt problemleri, modeli, veri toplama araçları, veri toplama aşamaları ve verilerin analizinde yararlanılan yaklaşım ve yöntemler açısından nitel araştırma çalışmasının özelliklerini tamamen sağlamaktadır.

Günümüzdeki nitel araştırma desenlerine baktığımızda Glaser (1978), toplanan verilerden yola çıkılarak bilinmeyen bir takım sonuçların ve bu sonuçların birbirleriyle olan ilişkilerinin açıklandığı araştırmaların nitel araştırma desenlerinden biri olarak kabul edilen kuram oluşturma çalışmaları olduğunu ifade etmektedir. Kuram oluşturma, katılımcıların bakış açıları veya düşünceleri içerisinde temellenmiş bir süreç, eylem ya da etkileşimle ilgili soyut ve genel bir modelin ortaya çıkarıldığı, çoklu veri toplama yöntemlerinin kullanılarak bilgi kategorilerinin ilişkilendirilmesini ve geliştirilmesini gerektiren araştırma yöntemidir (Charmaz, 2006; Corbin & Strauss, 2007). Yapılandırmacı paradigma çerçevesinde şekillenen kuram oluşturma araştırmasında (Creswell, 2013) bir durumda oluşan eylemlerin, hareketlerin veya betimlemelerin dayanağı ortaya çıkarılmakta ve farklı durumların birbiriyle bağlantılı olan modellerinin ilişkisi açıklanmaktadır (Charmaz, 2006). Bu tür çalışmalarda temel amaç, var olan kavramlara ve düşünceye özgün bir katkıda bulunabilmektir. Bu yaklaşım kuram oluşturma araştırması yapmak için kapsayıcı bir stratejidir (Punch, 2013). Çalışma da yapılandırmacı felsefeyle çerçevelenmiş nitel araştırma paradigmasıyla ela alınmış bir kuram oluşturma çalışmasıdır. Araştırmada kuram oluşturmanın tercih edilmesinin nedeni, matematiksel modelleme ile ilgili, sadece oluşan olayların (bilişsel ve üst bilişsel aktivite) değil aynı zamanda bu olayların özelliklerinin, aralarındaki ilişkilerin ve boyutlarının ele alınmak istenmesidir (Punch, 2013).

Glaser & Strauss (1967) kuram oluşturma yaklaşımında, ön alan yazın incelemesinin yapılmaması gerektiğini ve bunun analizi olumsuz etkileyeceğini ifade ederken, Strauss & Corbin (1990, 1998) ise yapılması gerektiğini vurgulamıştır. Charmaz (2000, 2006) ise bu konuda daha esnek davranmıştır. Charmaz’ a (2000, 2006) göre, araştırmacıların elindeki verilere dayanarak bir kuram geliştirirken, geçmiş ve gelecekteki ilişkilerden, insanlardan, farklı bakış açılarından ve araştırma uygulamalarından etkilenerek ve bunlardan yaralanarak istenen özgünlüğe ulaşılabilmektedir. Bu sayede yapılan araştırmaların dikkate alınması gerçekleştirilen araştırmanın güvenirliği ve geçerliğini de olumlu anlamda etkilemektedir. Kuram oluşturma yönteminin iki önemli özelliği kavramsallaştırmak ve açıklamaktır (Charmaz, 2006). Bu çalışmada Charmaz’ın kuram oluşturmadaki belirtilen düşünceleri dikkate alınarak, alan yazında gerçekleştirilen kuramsal çalışmalar ayrıntılı olarak incelenmiş ve kuramsal çerçeve de tez çalışmasının amacını ve etkililiğini en iyi ortaya çıkaracak şekilde yapılandırılmıştır.

Katılımcılar

Nitel araştırmalarda katılımcı seçimi planı ve araştırmanın parametreleri (ortam, aktör, olaylar ve süreç gibi) araştırmanın amacı ve problemleriyle uyumlu olmalıdır (Punch, 2013). Nitel araştırmalarda katılımcılar genel olarak baştan belirlense de, kuram oluşturma çalışmalarında süreç içerisinde de çeşitli sebeplerden (katılımcıların araştırmanın amacına uygun olmayışı, istenilen yeterliklere sahip olmayan kişilerden oluşması vb.) dolayı katılımcılar değişiklik (kuramsal örnekleme) yapılabilmektedir (Strauss & Corbin, 1998). Kuram oluşturma çalışmalarında kuramsal örnekleme olarak ifade edilen bu durum araştırma boyunca dikkate alınmıştır. Gerektiğinde de araştırma boyunca katılımcıların sayısında ve niteliğinde değişikliğe gidilmesi planlanmıştır.

Araştırma, bir devlet üniversitesinde matematik öğretmenliği lisans programında öğrenim görmekte olan 21 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın katılımcıları ilk olarak seçilirken, nitel araştırma paradigması çerçevesinde amaçlı örneklem yöntemlerinden bir olan ölçüt örneklem yöntemi kullanılmıştır. Bu doğrultuda, teknoloji destekli matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel aktivitelerin daha net ve ayrıntılı olarak ortaya çıkabileceği zengin ortamların sağlanabilmesi temel hedef olmuştur. Seçilecek katılımcıların hem matematiksel yeterliklerinin hem de teknolojik yazılımlara karşı becerilerinin iyi düzeyde olması, GeoGebra yazılımını bilmeleri, matematiksel modellemeye yönelik bilgilerinin olması ve matematiksel modelleme problemlerine ilişkin deneyime sahip olmaları çalışmada elde edilecek bulguların niteliği açısında önem taşımaktadır.

Charmaz (2006) ve Thornberg' in (2012) yaklaşımına paralel olarak, kuram oluşturma yaklaşımında ilk örneklem amaçlı örneklem yöntemiyle seçilmiş; kuramsal örnekleme ile de araştırma boyunca katılımcıların nasıl olacağıyla ilgili kararlar verilmiştir. Bu doğrultuda ilk örneklemde alana girmeden önce insanlar, olaylar, durumlar ve ortamlar için örnekleme ölçütü belirlenmiştir (Charmaz, 2006; Clarke 2005; Gerrish & Lacey, 2010). İlk örneklemin seçilmesinde dikkate alınan ölçüt en genel olarak öğrencilerin teknolojiyi kullanma ve matematiksel modelleme becerisine sahip olmaları olmuştur. Kuramsal örnekleme yeni kategori çıkmayana yani kategoriler doygunluğa ulaşana dek dikkate alınmıştır (Charmaz, 2006; Corbin & Strauss, 2007; Punch, 2013). Bu bağlamda tez çalışmasına ilk örneklem ile başlanmış olunup, çalışmanın ilerleyen kısımlarında kuramsal örnekleme ele alınmıştır. Katılımcılara ilişkin demografik özellikler Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Katılımcıların Özellikleri

Gruplar	Kod İsmi	Yaş	Cinsiyet	Lise Ortalaması	2014 Matematik		2014 Geometri	
					D	Y	D	Y
G_1	Defne	18	Bayan	82.69	53	11	32	6
	Demet	21	Bayan	80	66- Yabancı Uyruklu			
	Selen	18	Bayan	86.13	55	12	14	12
G_2	Ela	18	Bayan	84.39	51	22	17	15
	Masal	19	Bayan	82	51	8	29	9
	Mete	19	Bay	91.4	65	7	28	4
G_3	Kumsal	18	Bayan	90.48	54	4	20	5
	Sena	18	Bayan	91	55	4	29	3
	Seray	18	Bayan	90.14	55	8	24	5
G_4	Ayla	18	Bayan	80.45	54	14	25	5
	Dila	18	Bayan	83	61	6	30	0
	Celal	18	Bay	81.91	62	7	31	3
G_5	Canan	18	Bayan	91.66	61	14	12	6
	Bengi	18	Bayan	87	48	6	20	4
	Bülent	18	Bay	68.82	73	5	28	9
G_6	Burcu	19	Bayan	75	58	8	35	2
	Simge	18	Bayan	78.62	55	11	18	7
	Yavuz	19	Bay	77.98	51	8	26	7
G_7	Ezgin	18	Bayan	87	57	12	29	5
	Yılmaz	18	Bay	80.1	62	8	20	9
	Seda	19	Bayan	85.21	56	8	21	5

Örnekleme dahil edilmek istenen birinci sınıf öğretmen adaylarına doktora tez çalışmasında nelerin yapılacağı, çalışmanın katılımcılara ne gibi katkılarının olacağı gibi açıklamaları içeren "Katılımcı Bilgilendirme Kriterleri" (bkz. Ek 1) çalışma öncesinde verilmiş ve çalışmaya ilişkin bilgi edinmeleri sağlanmıştır. Çalışma kriterlerini kabul eden öğretmen adaylarından "Doktora Tez Çalışmasında Gönüllü Katılımcı Olduğunu Belirtir Dilekçe" (bkz. Ek 2) alınmıştır. Tez çalışmasında öğretmen adaylarının gerçek isimleri gizli tutularak, kendilerine ilişkin bilgiler verilirken ve veriler analiz edilirken kod isimler kullanılmıştır.

Veri Toplama Araçları

Nitel araştırma paradigması, yaklaşımı itibariyle birden fazla veri toplama yöntemini gerektirmekte ve bu nedenle nitel araştırmalarda zengin veri çeşitliliğine ulaşılmaya çalışılmaktadır (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013; Yıldırım ve Şimşek, 2011). Nitel araştırmalarda en yaygın olarak kullanılan üç tür veri kaynağı bulunmaktadır. Bunlar; görüşme, gözlem ve yazılı dokümanlardır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu bağlamda, araştırmanın geçerlik ve güvenirliğini artırmak amacıyla "çeşitleme" yapılmış ve üç veri toplama yönteminden de yararlanılmıştır. Araştırmanın verileri; araştırmacılar tarafından tasarlanan matematiksel modelleme problemlerinin çözüm sürecini içeren video çözümlemeleri, GeoGebra yanıt dosyaları, yazılı yanıt kağıtları ve uygulama süresince alınan hatırlatıcı notlar ve gözlem notlarından oluşmaktadır. Çalışmanın veri toplama araçlarına ilişkin bilgiler aşağıda ayrıntılı olarak verilmektedir.

Görüşme

DeMarrais (2004) görüşmeyi görüşmeci ve katılımcının birlikte yer aldığı, araştırma yapılan alana yönelik hazırlanan sorulara odaklanan bir iletişim süreci olarak tanımlamaktadır. Görüşmenin temel amacı; çalışılan bir alana yönelik özel bilgiler toplamaktır ve araştırmacı bu süreçte katılımcının aklında veya zihninde var olan şeyleri ortaya çıkarmak istemektedir (Patton, 2002).

Görüşmenin türlerine ilişkin birçok sınıflandırma (Karasar, 2005; Patton, 1980; Minichello, vd., 1990; Fiedlig, 1996; Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013; Creswell, 2013; Fontana ve Frey, 1994; Piaget, 1982) karşımıza çıkmaktadır. Araştırmada yapılan görüşme ise, literatürdeki iki görüşme türünün özellikleri dikkate alınarak gerçekleştirilmiştir.

Bunlardan ilki, Patton (1980) ve Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel 'in (2013) sınıflandırmasında kendisine yer bulan standartlaştırılmış açık uçlu görüşmedir. Standartlaştırılmış açık uçlu görüşme, temel soruların tam olarak sırasının ve tarzının önceden belirlendiği, tam anlamıyla açık uçlu soruları içeren bir görüşme stratejisidir. Bu süreçte, görüşme yapılan tüm kişilere aynı sıra ile aynı temel sorular yöneltilmektedir. Temel görüşme sorularının belli ve açık uçlu olmasından dolayı sürecin devamında katılımcıların davranışlarında ve yaklaşımlarında çeşitlikler ortaya çıkmaktadır. Bu da zengin bir veri toplama sürecini sağlamaktadır (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013; Punch, 2005).

Bunun yanı sıra, araştırmada yapılan görüşmede özellikleri dikkate alınan bir diğer görüşme türü ise klinik mülakattır. Klinik mülakat, ilk kez Piaget (1982) tarafından psikolojik araştırmalar için kullanılmıştır. Piaget, öğrencilerin düşüncelerindeki zenginliği keşfetmek, onun temel aktivitelerini yakalamak ve bilişsel becerilerini değerlendirmek için esnek soru sorma metodu olan klinik mülakatı geliştirmiştir. Goldin (1998), klinik mülakatların problem çözme yöntemi ile öğrencilerin matematiksel davranışlarını gözlemleme ve gözlemlerden öğrencilerin matematiksel anlamalarını, bilgi yapılarını, bilişsel süreçlerini ve bu süreçte meydana gelen duyuşsal değişiklikleri hakkında sonuçlar çıkarma olarak iki farklı amaçla gerçekleştirilebileceğinden bahsetmektedir.

Matematik eğitiminde klinik mülakatların amacı, öğrencilerin stratejilerini, bilgi yapılarını veya bilişsel becerilerini karakterize ederek, problem çözme süreci içerisindeki davranışlarını araştırmaktır (Karataş ve Güven, 2004). Özellikle eğitim açısından oldukça karmaşık bir süreç olarak tanımlanan problem çözme süreçlerini ve öğrencilerin bu süreç içerisindeki davranışlarını ayrıntılı inceleme ve araştırma klinik mülakatla mümkün olmaktadır. Klinik mülakat ile bireylerin fikir ve anlamalardaki zihinsel süreçler hakkında veriler toplanabilmekte ve analiz edilebilmektedir. Ayrıca, bireyin düşüncesinde saklı bulunan yapılar ve yöntemler ortaya çıkarılabilmektir (Clement, 2002). Bu doğrultuda, öğrencilerin teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm sürecinde ortaya çıkan bilişsel ve üst bilişsel aktivitelerini derinlemesine açıklamak ve onların bu süreçteki zihinsel süreçlerini kavramsallaştırmak için klinik mülakat yöntemi etkili bir teknik olarak görülmüştür. Çünkü matematiksel modelleme süreci gibi karmaşık bilişsel ve üst bilişsel aktiviteleri ortaya çıkaran problem çözme sürecinin araştırılmasında klinik mülakatın kullanılması zengin veri toplama açısından önemlidir. Aynı zamanda özel bir süreçte derinlemesine bilgiler elde edilmek istenildiğinden, irdelenen sürecin bütün boyutlarının açığa çıkarıbileceği düşünülmektedir (Çepni, 2007).

Araştırma kapsamında, öğrencilerin teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecinde bilişsel ve üst bilişsel yapılarının ortaya koyulması için onlarla matematiksel modelleme problemlerini içeren ve standartlaştırılmış açık uçlu görüşme ve klinik mülakatın özellikleri dikkate alınarak tasarlanmış görüşmeler (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013 ve Piaget, 1982) gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte, öğrencilerden sesli düşünmeleri (thinkaloud) ve gerçekleştirdikleri yaklaşım ve stratejileri nedenleriyle ayrıntılı olarak açıklamaları istenmiştir. Süreç içerisinde nadir durumlarda öğrencilerin sıkıntı yaşadıkları veya spesifik düşüncelerini gerekçelendirmedikleri vb. durumlarda araştırmacı görüşmeci tarafından "Neden bu yolu izlediniz?, "Bunu yapmadaki amacınız neydi?" vb. şekilde öğrencilerin düşüncelerini açmaya yönelik kısa ve açık uçlu sorular yöneltilmiştir. Görüşme verilerinin toplanması süreci, kuramsal doygunluğa erişilinceye kadar devam etmiştir (Adler & Adler, 1994; Charmaz, 2006). Görüşme sorularını şekillendiren matematiksel modelleme problemlerinin tasarım sürecine yönelik açıklamalar aşağıda verilmektedir.

Matematiksel Modelleme Problemlerinin Tasarlanması

Öğrencilere verilen matematiksel modelleme problemleri tasarlanırken literatürdeki matematiksel modelleme problemlerinin yapısı, özellikleri ve öğrencilerin matematik ve teknoloji ön bilgileri dikkate alınmıştır. Matematiksel modelleme problemleri, Berry & Houston'ın (1995) sınıflandırmasındaki deneysel, teorik ve simülasyon modelleme türlerinin özellikleri ve matematiksel modelleme problemlerinde bulunması gereken özellikler dikkate alınarak tasarlanmıştır (bkz. Kuramsal Çerçeve). Genel olarak, tasarlanan matematiksel modelleme problemlerinin; açık, anlaşılır, açık uçlu problemler olmasına, ilgi çekici ve günlük yaşamla ilişkili olmasına, gerçek ve zengin verilerden oluşmasına, içerisinde birden fazla değişkeni, parametreyi, sabiti ve matematiksel kavramı barındırmasına, öğrencilerin kendilerinin veri oluşturmasını gerektirmesine ve öğrencilerin teknoloji bilgisini, deneyimlerini ve matematik bilgisini ilişkilendirerek kullanmasına olanak sağlamasına dikkat edilmiştir.

Problemler tasarlandıktan sonra problemlere ve problemlerin farklı çözümlerine ilişkin uzman görüşleri alınmıştır. Bu doğrultuda, problemler katılımcılara uygulanmadan önce matematiksel modelleme problemleri ve olası farklı çözümleri matematik eğitimi alanında doktora yapan lisansüstü öğrencilerine gösterilmiştir. Problemdeki anlaşılmayan noktalar ve problemlerin çözüm sürecindeki problemden kaynaklı olduğu düşünülen olumsuz durumlar uzmanlardan gelen dönütler doğrultusunda araştırmacı tarafından düzeltilmiştir. Her bir problem için ortaya çıkabilecek farklı çözüm yolları bu süreçte dikkate alınmıştır. Problemlerin farklı çözüm yollarının öğrenciler tarafından bulunmasının mümkün olup olmadığı ve çalışmadaki istenilen amaçlara uygun olup olmadıkları tartışılmıştır. Son olarak, problemler için pilot uygulama gerçekleştirilmiş ve olası aksaklıklar en aza indirilmiştir.

Gözlem

Gözlem, nitel araştırmalarda araştırmacının bir olayın veya sürecin gerçekleştiği ortamlarda, bireylerin etkinliklerini ve davranışlarını inceleyerek, onlara ilişkin alan notları almasıdır (Creswell, 2013). Araştırmacı bir ortamda veya bir süreçte ortaya çıkan davranışlara ilişkin ayrıntılı, kapsamlı ve zamana yayılmış bir resim elde etmek istiyorsa, onun nitel gözlem yöntemini kullanması en uygun yoldur (Bailey, 1982). Bir nitel araştırmada görüşmenin yanında, gözlemin de olmasıyla, araştırmacı geçerliği ve güvenirliği arttırma yolunda bir hamle yapmış olmakta ve bu süreçte görüşme ile daha çok sözle ifade edilen yönlere odaklanırken; gözlemle ise sözle ifade edilmeyen yönlere odaklanmaktadır (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013; Punch, 2013; Yıldırım ve Şimşek 2011).

Gözlemin türlerine ilişkin birçok sınıflandırma (Karasar, 2005; Fraenkel ve Wallen, 2006; Aiken, 1997; Bailey, 1982; Punch, 2013; Creswell, 2013) karşımıza çıkmaktadır. Araştırmada gerçekleştirilen gözlem ise, Aiken (1997) ve Punch'ın (2013) sınıflandırmasında kendisine yer bulan yapılandırılmamış gözlemdir. Yapılandırılmamış gözlem, öncesinde yapılandırılmamış, gözlem sırasında araştırmacının deneyimleri ve gözlem becerisiyle şekillenen ve bu açıdan veri toplama ve kayıt etmede araştırmacıya özgürlük sağlayan gözlem türleridir (Karasar, 2005; Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013).

Tez çalışmasında öğrencilerin teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel yapılarının ortaya çıkarılması için, görüşme esnasında araştırmacı tarafından yapılandırılmamış gözlem gerçekleştirilmiştir. Bu doğrultuda da gözlem notları tutulmuştur. Bu süreçte, ortaya çıkan ve araştırmacıya göre önem taşıyan özel ve ilginç durumlar ele alınmış ve elde edilen gözlem notları, görüşme videosundan elde edilen video çözümlerindeki yaklaşımları ve düşünceleri desteklemek amacıyla kullanılmıştır. Gözlem verilerinin toplanması, kuramsal doygunluğa erişilinceye kadar devam etmiştir (Adler & Adler, 1994; Charmaz, 2006).

Doküman

Doküman, araştırılması hedeflenen her türlü olay ve olgu hakkında bilgi sağlayan yazılı veya kayıtlı (fotoğraf, video, film vb.) materyallerdir (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013; Yıldırım ve Şimşek 2011; Merriam 2013). Nitel araştırmalardaki durum çalışmalarında ve kuram oluşturma çalışmalarında dokümanların gözlem ve görüşmeden elde edilen verilerle birlikte kullanılması uygun bir yaklaşımdır (Punch, 2013).

Doküman türlerine ilişkin birçok sınıflandırma (Bogdan & Biklen, 2007; Scott,1990; MacDonald & Tipton, 1996; Finnegan, 1996; Merriam, 2012) karşımıza çıkmaktadır. Bu araştırmada elde edilen dokümanlar ise, Merriam'in (2012) sınıflandırmasındaki araştırma sırasında üretilen dokümanlara girmektedir. Bunun yan sıra, modelleme sürecindeki çözümleri içeren yazılı yanıt kağıtları şahsi dokümanlar; bilgisayar ortamında kaydettikleri GeoGebra çözüm dosyaları ise görsel dokümanlar sınıfına girmektedir (Merriem, 2013). Araştırma sırasında üretilen dokümanlar, araştırmanın amacı doğrultusunda daha önce elde edilemeyen fakat araştırma başladıktan sonra araştırmacı veya katılımcı tarafından ortaya konulan yazılı veya kayıtlı materyallerdir (Merriem, 2013).

Araştırma kapsamında, öğrencilerin teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecinde bilişsel ve üst bilişsel yapılarının ortaya çıkarılması için görüşme esnasında katılımcılar tarafından problemlerin çözümünü içeren yazılı yanıt kağıtları ve GeoGebra çözüm dosyaları oluşturulmuştur. Bu doğrultuda elde edilen dokümanlar nitel veri olarak değerlendirilmiştir. Bu süreçte, dokümanlarda ortaya çıkan ve araştırmacıya göre önem taşıyan özel ve ilginç durumlar görüşme ve gözlemden elde edilen verilerdeki yaklaşımları ve düşünceleri desteklemek amacıyla kullanılmıştır. Dokümanların toplanması, diğer veriler gibi kuramsal doygunluğa erişilinceye kadar devam etmiştir (Adler & Adler, 1994; Charmaz, 2006).

Veri Toplama Süreci

Nitel araştırmalar için insanın sosyal davranışı, gerçek bağlamdan bağımsız değildir (Punch, 2013). Bu doğrultuda çalışmanın veri toplama sürecinde aşağıdaki süreçler izlenmiştir:

1) Matematiksel modelleme problemlerinde olması gereken önemli ölçütlerin belirlenmesi.

2) Ölçütler dikkate alınarak matematiksel modelleme problemlerinin tasarlanması.

3) Veri toplama araçlarının son haline getirilmesi.

4) Veri toplama araçlarına yönelik uzman görüşlerinin alınması.

5) Gerekli düzenlemelerin yapılması.

6) Veri toplama araçlarına yönelik pilot çalışmanın yapılması.

6) Gerekli düzenlemelerin yapılması.

7) Çalışmanın amacı ve kapsamı ile ilgili katılımcılara ayrıntılı bilgi verilmesi.

8) Katılımcılarla GeoGebra'nın kullanımına ve matematiksel modelleme problemlerinin yapısına ve çözüm sürecine yönelik çeşitli uygulamaların gerçekleştirilmesi (Bu sayede, matematik derslerinde çok fazla kullanılmayan matematiksel modelleme ve teknolojideki öğrenci becerilerinin geliştirilerek ve farkındalıkları sağlanarak zengin veri kaynağına ulaşılabilmesi sağlanmıştır. Bu doğrultuda uygulama öncesinde, öğrencilerin oluşturdukları gruplarla yaklaşık 25 matematiksel modelleme problemine ilişkin çözümler gerçekleştirilmiş ve sonrasında çözümlerini nasıl daha iyileştirebileceklerine ilişkin tartışma ortamları yaratılmıştır.).

9) Uygulama süreci için grup çözümlerinin gerçekleştirileceği sınıf ortamının ayarlanması (GeoGebra ve ScreenHunter programlarının yüklü olduğu bir bilgisayar, sadece araştırmacı ve katılımcının bulunduğu sessiz ortam, kamera, A4 kağıt, kalem vb.).

10) Her bir matematiksel modelleme probleminin daha önce belirlenen zamanlarda ve gruplara ayrı ayrı uygulanması.

11) Nitel verilerde kuramsal doygunluğa ulaşılıncaya kadar veri toplama sürecinin araştırmacı tarafından sürdürülmesi. [Charmaz (2006), veri toplama sürecinin, kategoriler (veya temalar) doygunluğa ulaştığında ve yeni verilerin toplanmasıyla ilgili yeni bakış veya özellikler ortaya çıkmadığında durdurulmasını önermiştir. Bu doğrultuda araştırmacılar doygunluğa ulaşıldığını düşünerek veri toplama sürecini durdurmuştur.]

12) Elde edilen video kayıtlarının, gözlem notlarıyla ve dokümanlarla birleştirilerek birebir olarak yazıya aktarılması (Video kayıtlarının araştırmacı gözlem notlarıyla birlikte birebir yazıya dökülmesiyle verilerin tekrar tekrar incelenmesini zorunlu kılan kuram oluşturma veri analizinin gerçekleşmesi ve kuramın şekillenmesi için uygun ortamın sağlanması amaçlanmıştır. Yazıya aktarma karmaşık bir sürecin ayrıntılı olarak ele alan ve süreçteki her anı dikkate alan araştırmalarda merkezi ve kaçınılmaz bir role sahiptir (Edwards, 1993) ve genel olarak ayrıntılı analizi içeren nitel araştırmalarda veri toplamanın en önemli aşamalarında biri (Wetherell ve ark, 2001) olarak karşımıza çıkmaktadır.

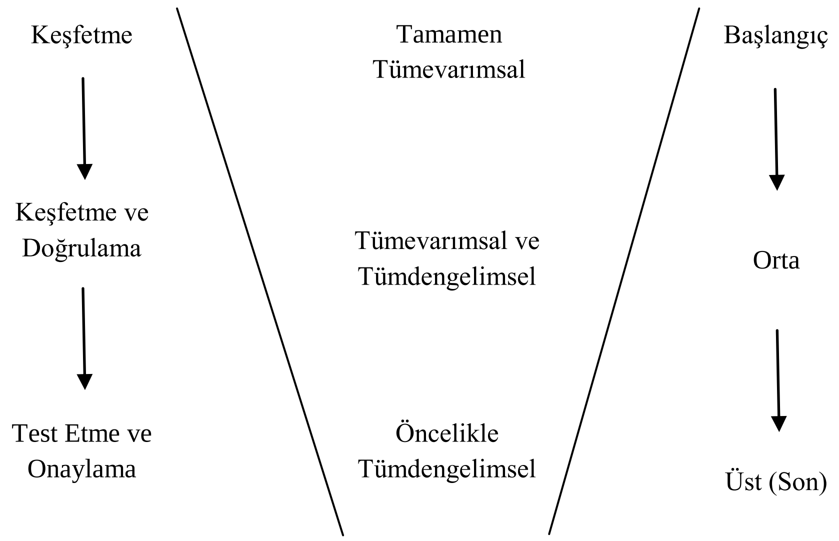
Verilerin Analizi

Kuram oluşturma araştırmaları, kuram oluşturma veri analiz süreci dikkate alınarak yürütülmektedir (Creswell, 2013). Glaser & Strauss (1967), kuram oluşturma veri analizi sürecinde temel olarak yapılması gerekenin sürekli karşılaştırmalı analiz (bkz. Şekil 42) tekniğine bağlı kalınarak, kategorileri geliştirmek için verilerin aşama aşama betimsel düzeyden daha üst kuramsal kategorilere doğru soyutlanması ve açıklanması olduğunu vurgulamaktadır. Araştırmacı kuram oluşturma veri analizi sürecinde elindeki verileri olduğu haliyle gerçek kabul ederek (kuramsal duyarlık), süreci tam olarak açıklayabilecek bir kuramı ortaya koyma (kuramsal olgunluk/doygunluk) çabası içerisindedir (Punch, 2013). Sürekli karşılaştırmalı analiz ve soru sorma teknikleri veri analiz sürecinde, kodlamaların oluşturulmasında ve ilişkilerin belirlenmesinde büyük önem taşımaktadır (Strauss & Corbin, 1998).

Şekil 42. Sürekli karşılaştırmalı Analiz (Jones & Alony, 2011)

Kuram oluşturma yaklaşımı elde edilen verilerden genel bir kurama ulaşmayı hedeflemektedir (Creswell, 2013). Merriam (2012), kuram oluşturulurken başlangıçta tamamen eldeki verilere dayanarak tümevarımsal bir yaklaşımın izlenmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Merriam (2012), kuram şekillenmeye başladıktan sonra ise kuramın kendi içerisinde tutarlığının sağlanması ve kuramın test edilebilmesi için, tümevarımsal yaklaşımla birlikte tümdengelimsel yaklaşımın da süreç içerisinde sürekli olarak dikkate alınmasının gerektiğini ifade etmektedir (bkz. Şekil 43).

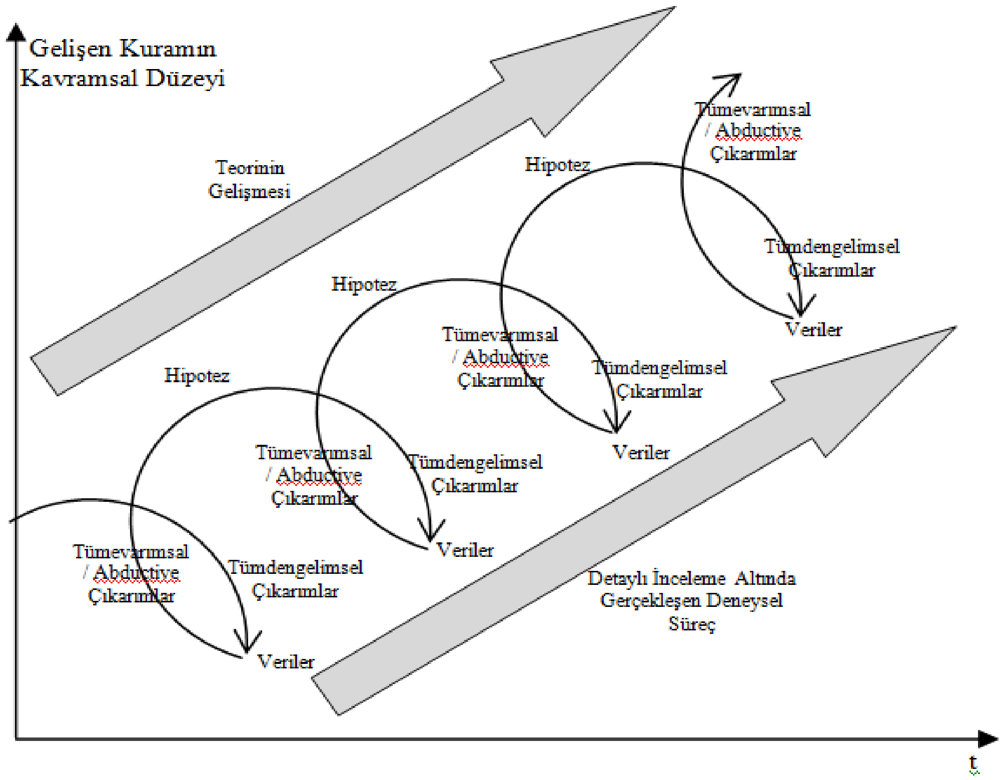
Şekil 43. Veri Analizi Yaklaşımı (Merriam, 2012)



Kuram oluşturma sürecinde tümevarımsal ve tümdengelimsel yaklaşım arasındaki ilişkinin yanında süreç boyunca ortaya koyulan keşfedici kategorilerin oluşmasına zemin hazırlayan *geriçıkarım (abductive)* kavramı da dikkate alınmaktadır (Athens, 2010; Strübing, 2007; Fram, 2013; Charmaz, 2006; O'Connor, Netting & Thomas, 2008; Wilson & Chaddha, 2010). Strübing'e (2007) göre, elde edilen verilerden bir kuramı ortaya çıkarmak için tümevarımsal ve tümdengelimsel yaklaşımlar yeterli değildir. Bu süreçte bunların yanında geri çıkarımların da olması gerekmektedir. İlk kez 1867'de Peirce tarafından ortaya koyulan geriçıkarım kavramı, bilimsel araştırmanın ilk safhasıdır ve olgunun veya olayın neden ortaya çıktığını açıklamaya yönelik bir ön hipotezin ortaya atılmasını gerektirmektedir. Peirce (1867) kuram oluşturma sürecinde tümdengelimin ve tümevarımın eldeki verilerden kesin mantıksal sonuçlara varmayı sağladığını; bir kuramı ortaya atmak için ise yaratıcılık boyutunun ancak geriçıkarım ile karşılanabileceğini ifade etmektedir. Verilerin ortaya koyulmasında Peirce'nın (1867) kuram geliştirmede bilginin oluşumuna bakışı dikkate alınmaktadır (bkz. Şekil 44). Strübing (2007) de, kuramın kavramsal gelişimi sırasında sürekli olarak tümevarımsal, tümdengelimsel ve geriçıkarım yaklaşımlarının uygulanmasının gerektiğini vurgulamaktadır. Verilerden hipotezler oluşturulurken tümevarımsal ve geriçıkarım geçekleştirilmeli;

hipotezler test edilirken ise oluşturulan hipotezlerin farklı verilerdeki işlevselliği (tümdengelimsel yaklaşım) dikkate alınmalıdır. Bu süreç dolaylı olarak sürekli karşılaştırmalı analizi içerisinde barındırmaktadır. Charmaz'a (2006) göre, kuram oluşturma sürecinde gerçekleştirilen geriçıkarım verilerden elde edilen ve kategorilerin oluşmasına zemin hazırlayan ön hipotezleri oluştururken; veri analizinde araştırmacıda mantıksal keşif ve mantıksal doğrulama arasındaki bağlantıyı da açığa çıkarmaktadır. Bu sayede araştırmacı kuramı oluştururken hem hipotezler arasındaki tutarlılığı dikkate almakta hem de yeni yaratıcı hipotezleri sağlam ve tutarlı bir şekilde kurama entegre edebilmektedir.

Şekil 44. Kuram Geliştirmede Bilginin Oluşumuna Kısa Bir Bakış (Strübing, 2007)



Kuram Oluşturma Kodlama Süreci

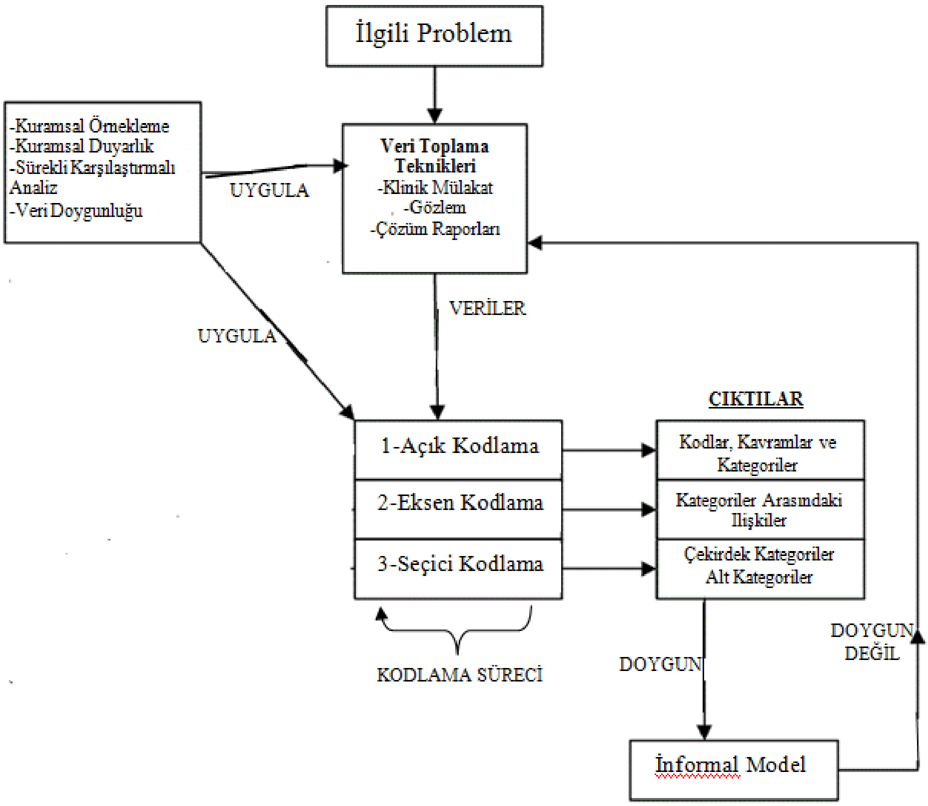
Guest, MacQueen & Namey'e (2012) göre, nitel araştırmada kodlama sürecinde en önemli faktör, kodların özelliklerinin ve birbirinden farklarının ayrıntılı olarak verilmesi ve kodlar arasında tutarlığın maksimum hale getirilmesidir. Kuram oluşturma veri analizi sürecini şekillendiren kodlama sürecinin aşamaları, araştırmalarda (Glaser & Strauss, 1967; Corbin & Strauss, 2007; Strauss & Corbin, 1990; 1998; Jones & Alony, 2011; Charmaz, 2006) ufak farklılıklardan dolayı değişik şekillerde ifade edilse de, araştırmaların temel anlayışlarında benzerliklerin olduğu görülmektedir. Genel olarak üç aşamadan oluşan kodlama sürecini Glaser & Strauss (1967) sabit, kuramsal ve merkezi (asli) kodlama; Strauss & Corbin (1990; 1998), açık, eksensel ve seçici kodlama; Glaser (1992) açık (open) kodlama, seçici (selective) kodlama, sınıflandırma (sorting) ve raporlama (writing up); Jones & Alony (2011) açık, seçici ve kuramsal kodlama; Charmaz (1983; 2006) ise ön (initial), odak (focus) ve teorik (theoritical) kodlama olarak ifade etmektedir. Tez çalışmasında, Corbin & Strauss (2007) ve Strauss & Corbin' in (1990; 1998) yaklaşımları dikkate alınarak, *açık kodlama* (bilgi kategorilerinin üretilmesi), *eksensel (birleştirici)* (bu kategorilerden birinin seçilmesi ve kuramsal bir model içinde yerinin belirlenmesi) ve *seçici kodlama* (bu kategorilerin bağlantılarından hareketle bir hikâyenin ortaya çıkarılması) ile teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecinin kavramsallaştırılması sağlanmıştır (bkz. Tablo 3).

Tablo 3. Kuram Oluşturma Kodlama Sürecinin Aşamaları
(Corbin & Strauss, 2007)

Açık kodlama	Verinin parçalara ayrılması, incelenmesi, karşılaştırılması, kavramsallaştırılması ve kategorize edilmesi sürecidir. Açık kodlama verinin yakından bir incelenmesi yoluyla olguların kategorize edilmesi ve isimlendirilmesini içeren analizin bir parçasıdır.
Eksensel (Birleştirici) kodlama	Açık kodlamada parçalanan verinin ve bazı kategorileri tanımlamaya izin veren verinin tekrar yeni yollarla, kategoriler ve alt kategoriler arasında bağlantılar yapılarak bir araya getirilmesidir. Eksensel kodlamada temel olarak bir kategoriyi içinde bulunduğu şartlara, içinde bulunduğu bağlama göre tanımlamaya odaklanılır.
Seçici kodlama	Çekirdek kategorinin (core category) belirlenerek diğer kategorilerin sistematik olarak onunla ilişkilendirildiği, bu ilişkilerin doğrulandığı ve daha fazla düzeltme ve geliştirme gereken kategorilerin doldurulması sürecidir.

Kuram oluşturma veri analizinde, ihtiyaç olduğu ön görülen bir duruma veya olaya yönelik bir açıklama getirmek için bir model ortaya koyulmaya çalışılmakta ve bu doğrultuda yüksek soyutluluk düzeyindeki merkezi kategoriler ve bu kategoriyi şekillendiren alt kategoriler ortaya çıkarılmaktadır (Punch, 2013). Kategoriler, kavramlardan daha soyut ve geneldir. Bu süreçte kavramlar incelenerek, kavramların birbirleriyle olan ilişkileri ortaya çıkarılmakta ve bu ilişkiler daha üst düzey kategoriler ile açıklanmaktadır (Creswell, 2013; bkz. Şekil 45). Kategori oluşturma, tipik olarak kodların geliştirilmesi sürecinde ya da sonrasında belli kodların belli şartlar altında gruplanması olarak da ifade edilebilmektedir (Fraenkel & Wallen, 2010). Kategoriler bu süreçte kavramsal güce sahiptir ve kuramı şekillendiren parçalardır; çünkü diğer kavramları ve alt kategorileri bir araya getirme gücüne sahiptir (Strauss & Corbin, 1990; Corbin & Strauss, 2007).

Şekil 45. Kuram Oluşturma Veri Analiz Süreci (Halaweh, 2012)



Bogdan & Biklen (1998), kodlama kategorilerini geliştirirken belli başlı kod türlerinden bahsetmektedir. Bu kod türleri sırasıyla; bağlam kodları, durum kodları, süreç kodları, aktivite kodları, olay kodları, strateji kodları, yöntem kodlarıdır. Durum kodları, katılımcıların belirli ortamlarda ya da konularda nasıl davrandığına ilişkin verileri içermektedir. Süreç kodları, ard arda gelen olayları ve bunlardaki değişimi zaman içinde ya da bir türden diğerine nasıl değiştiğini anlatan kelime ya da kelime gruplarıdır. Strateji kodları ise, insanların çeşitli işleri başarırken kullandıkları taktik, yöntem, teknik, manevra ve hileleri işaret etmektedir (Bogdan ve Biklen, 1998). Araştırmada gerçekleştirilen veri analizi sonucunda ortaya konulan kodlar ise bu üç kod türünden (*süreç kodları, durum kodları ve strateji kodları*) meydana gelmektedir.

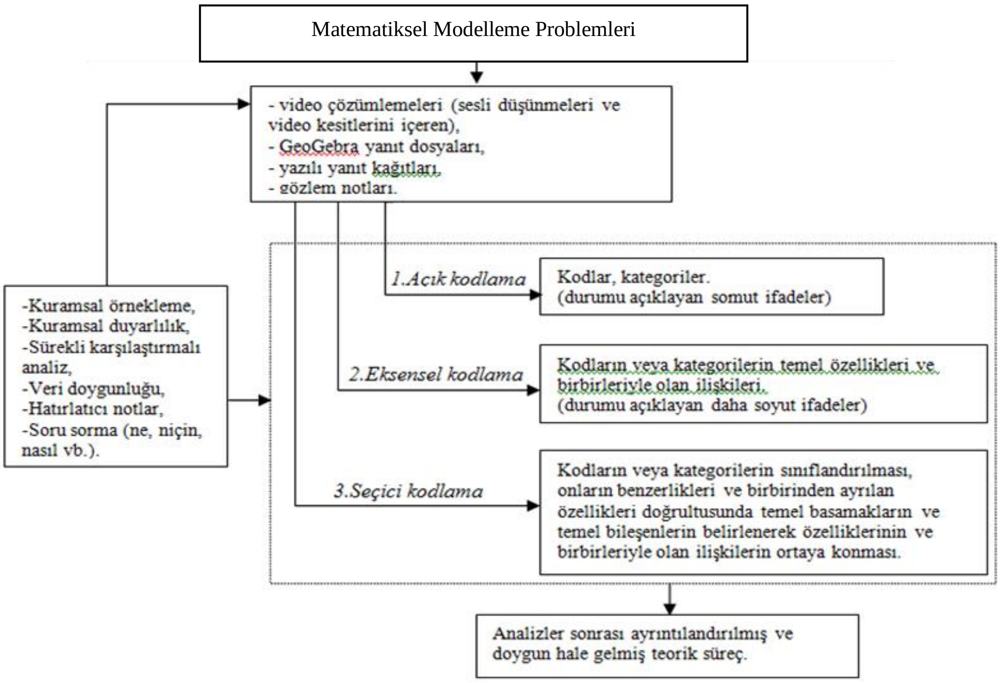
Kodlama sürecinde etiketleme işleminde farklı yollar izlenebilmektedir. Bunlar; satır satır kodlama yapmak, cümleler ya da paragraflar üzerinden kodlama yapmak ve eldeki görüşme ya da gözlem dokümanının tümü üzerinden değerlendirme yaparak kodlama yapmaktır (Strauss & Corbin, 1990). Gençoğlu (2012), Patton (2002) ve Charmaz (2006) satır satır kodlamanın araştırmacıya konuya daha yakından bakabilme ve ilk bakışta fark edilemeyecek olgu, durum ya da bağlantıları görebilme imkanı verdiğini söylemektedir. Bu doğrultuda, araştırmanın veri analiz boyunca genel anlamda "*satır satır kodlama*" tekniği dikkate alınmıştır. Bununla birlikte araştırmacılar gerektiğinde kelime kelime kodlama ve durumdan duruma kodlama tekniklerinden de yararlanılmıştır. Bu farklı teknikler daha ayrıntılı veri analizine olanka sağlamış ve satır satır kodlamadaki farklılıkların neden kaynaklandığına ilişkin araştırmacılara yol göstermiştir.

Araştırmada Veri Analizi Sürecinin İşleyişi

Çalışmada veri analizi boyunca açık, eksensel ve seçici kodlamalar iç içe bir veri analiz sürecinin parçalarını oluşturmuşlardır. Analizin başlarında, iki araştırmacı birbirinden bağımsız olarak verileri satır satır kodlamış ve bu açık kodlama sonunda bilişsel eylemlere ilişkin 152 koddan ve üst bilişsel eylemlere ilişkin ise 53 koddan oluşan ilk belge oluşturmuştur. Veriler arasında sürekli karşılaştırma yapılarak ve "ne-neden-nasıl" soruları sorularak bilişsel ve üst bilişsel kodlar belirlenmiş, arasındaki ilişkiler ve farklılıklar ortaya konmuştur. "Süreci ayırt edici kılan özellikler nelerdir?", "Neden önemlidir?", "Nasıl ve neden ortaya çıkmıştır?", "Etkileri nedir?" "Bilişsel ve üst bilişsel aktiviteler birebirlerini nasıl etkilemektedir? gibi sorular süreç boyunca sorularak, kavramlar, kategoriler, onların özellikleri ve ilişkileri açıklanmaya ve ilişkilendirilmeye çalışılmıştır. Kodlama süreci, açık kodları birbirine bağlamak ve belirlenen kategorileri ve kategoriler arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmak için gerçekleştirilen eksensel kodlamayla devam etmiştir. Sonra daha üst soyutlama düzeyindeki merkezi kategorilerin (core categories) belirlenmesi amacıyla yapılan seçici kodlama ile veri analizine devam edilmiştir.

Araştırmacıların birlikte yaptıkları görüşmeler ve tartışmalar çerçevesinde kodlar karşılaştırılmış ve farklı kodların temelindeki benzerlikler ve farklılıklar ortaya konuşulmuştur. Gerektiğinde aynı durumu açıklayan fakat farklı isimlendirilmiş kodlar ortak belirlenmiş bir kod altında toplanmıştır. Kodun temel özelliklerini daha iyi vurgulama adına gerektiğinde kod isimleri değiştirilmiş ya da yeni kodlar eklenmiştir. Aynı amaca hizmet eden kodlar alt başlıklar altında toplanmış ve adlandırılmıştır. Söz konusu çalışma için matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel yapılar ve üst bilişsel yapılar üzerine iki farklı model (kuram) ortaya çıkmıştır. Matematiksel modelleme sürecini şekillendiren bilişsel ve üst bilişsel yapıların sunuş sırası, birinin diğerinden daha önce gerçekleştiğini göstermezken, bir matematiksel modelleme sürecinde her yapıya ilişkin her yaklaşımın sergilenmesi gerektiği anlamına da gelmemektedir. Genel anlamda çalışmanın veri analiz sürecinde izlenen yol Şekil 46'da verilmiştir.

Şekil 46. Kuram Oluşturma Veri Analiz Süreci



Kuram oluşturma veri analizinde kategorilerin ve alt kategorilerin güvenirliği için kodlayıcılar arası güvenirlik çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu doğrultuda, farklı araştırmacılar tarafından geliştirilen kodların ve bağımsız olarak türetilen sonuçların karşılaştırılması ile çapraz kontrolü yapılmıştır (Creswell, 2013). Öncelikle, araştırmacılar tarafından gerçekleştirilen kodlar incelenmiştir.

Araştırmacıların görüş birlikleri ve ayrılıklarının sayısı belirlenerek, kodlayıcı güvenirliği formülü (Miles ve Huberman, 1994) kullanılmış ve güvenirlik bilişsel kodlarda % 81; üst bilişsel kodlarda sırasıyla %83, %85 ve %81 %83 olarak hesaplanmıştır. Kodlayıcılar arası güvenirlik hesaplaması [Görüş Birliği/ (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı)] X 100 formülüyle yapılmıştır. Miles ve Huberman (1994), iyi bir nitel güvenirlik için kodlamanın güvenirliğinin en az % 80 uyum düzeyinde olması gerektiğini vurgulamaktadır. Çalışmada kodlayıcılar arası güvenirliğin zor bir analiz sürecini içermesine rağmen iyi bir seviyede çıktığı görülmüştür.

Matematiksel Modelleme Sürecinde Kodların ve Kategorilerin Şekillenmesi

Bu bölümde araştırmada geliştirilen matematiksel modelleme sürecinin kuram oluşturma veri analizi çalışması "problemi okuma" alt basamağının ele alınış biçimi açısından örneklendirilmiştir. Problemlerin çözümünde bilişsel yapıları ortaya çıkarırken grupların problemi okuması araştırmacılar tarafından açık kodlama sürecinde "problemi okuma", ve "problemi birebir sesli olarak ifade etme" gibi şekillerde ifade edilmiştir. Bu sürecin devamında, araştırmacılar tarafından bu kodun "problemi okuma" olarak ifade edilmesine karar verilmiştir. Eksensel kodlamaya geçildiğinde ise, "problemi okuma" kodunun bir kategori olarak süreç içerisinde belirdiği ortaya çıkmıştır. Bu doğrultuda, bu kategorinin özellikleri, nasıl ve neden ortaya çıktığı ve diğer kategorilerden farkı yansıtılmaya çalışılmıştır. Seçici kodlama sürecinde ise, "problemi okuma" gibi birbirleriyle benzer özellikler (ortaya çıkış nedeni vb.) taşıyan kategoriler bir arada toplanarak merkezi kategorileri oluşturmuşlardır. Çalışmada problemi okuma kategorisinin "problemin analizi" merkezi kategorisi altında şekillendiği görülmüştür. Sonrasında da merkezi kategorilerin (örn. problemin analizi) özellikleri, ortaya çıkış nedeni, nasıl ilerlediği ve merkezi kategorilerin birbirlerinden ayrıldığı noktalar tam olarak ortaya koyulmuş ve kuramın son şekli verilmeye çalışılmıştır. Bu süreç, hem bilişsel hem de üst bilişsel yapılar için ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir. Örneğin "problemi okuma" kategorisi, karmaşık gerçek yaşam durumundaki karmaşıklığı ortadan kaldırmak için "problemin analizi" merkezi kategorisi altında gerçekleşen bilişsel bir aktivitedir.

Üst bilişsel düzenleme davranışları olarak ele alınan planlama-izleme-değerlendirme ve tahmin aktiviteleri genel olarak birbirleriyle iç içe geçmiş süreci içerisinde barındırmaktadır. Bununla birlikte matematiksel modelleme sürecindeki temel basamaklar gibi temel eylemlerin ortaya çıkışları dikkate alınarak en üst kategoriler belirlenmeye çalışılmıştır. Bu süreçteki karşılaşılan en büyük zorluklarda birisi budur. Bunun için analiz sürecinde "üst bilişsel aktivitelerden hangisi diğer üst bilişsel aktivitelerin oluşmasına sebep oluyor?" ve "hangi üst bilişsel temel eylemler matematiksel modelleme sürecini şekillendirmektedir?" sorularına yanıt aranmaya çalışılarak kodlar ve kategoriler belirlenmeye çalışılmıştır.

Bulgular sunulurken bilişsel ve üst bilişsel yapıların ortaya koyulmasında, gerekli yerlerde öğrencilerin görüşme verilerinden, yazılı yanıt kağıtlarından, Geogebra çözüm dosyalarından ve araştırmacıların gözlem notlarından alıntılar yapılmış ve bu alıntıların ekleme yapılmadan olduğu gibi verilmesine özellikle dikkat edilerek araştırmanın güvenirliği arttırılmaya çalışılmıştır. Araştırma konusu hakkında genel bilgiye sahip uzman bazı kişilerden, yapılan araştırmada elde edilen bulguları ve bulguların sunumunu çeşitli boyutlarıyla incelemesinin istenmesiyle iç geçerlik arttırılmaya çalışılmıştır.

Araştırmanın Güvenirliği

Lincoln & Guba (1985) ve Merriam'in (2012) düşüncelerine paralel olarak verilerden elde edilen sonuçların literatürdeki diğer çalışmaların sonuçları ile aynı olmasının yanında, toplanan veriler ile sonuçların tutarlı olmasına özen gösterilmiştir. Yani tez çalışması elde verilerden ortaya çıkmış bir kuram açıklanmıştır. Patton'un (2002) ifade ettiği gibi, araştırmanın veri analizi sonucunda elde edilen bulgular sunulurken modelleme sürecini açıklayan temel kavramlar verilerle ayrıntılı bir şekilde desteklenerek açıklanmıştır. Nitel araştırmalarda güvenirlik için veri toplamada çeşitleme, eş değerlendirme ve denetleme stratejilerinin ele alınması önerisi (Merriam, 2012) dikkate alınmıştır. Bu doğrultuda araştırmada verilerin nasıl toplandığı, kategorilerin nasıl oluşturulduğu ve araştırma boyunca kararların nasıl alındığı ayrıntılı bir şekilde ifade edilmiştir. Çalışmada veri toplama sürecine, kod-kategorilere ve kategorilerin ortaya çıkış sebebiyle özelliklerine ilişkin detaylı bilgi verilmiştir (Charmaz, 2005).

Im & Chee (2006) ve Miles & Huberman'ın (1994) ifade ettiği gibi verilerin nesnelliğinin sağlanabilmesi için böylelikle dört araştırmacı verilerden elde edilen bulguların anlamlılığına ilişkin görüş birliğine varmışlardır. Kodlama sürecinde kodlayıcılar arası güvenirlik dikkate alınmıştır. Kuram oluşturma çalışmalarında, araştırmacılar kuramsal doygunluğun; geçerliği ve güvenirliğinin sağlaması amaçlamaktadırlar (Clarke, 2005).

Araştırmacının Rolü

Araştırmacı, araştırma boyunca araştırmaya temel olmuş temel kavramlara ilişkin kuramsal bir çerçeveyi dikkate alarak hareket etmiş ve yaptıklarını kuramsal açıklamalarla desteklemeye özen göstermiştir. Tez çalışmasını gerçekleştirmek için öğretmen adaylarını çalışma ile ilgili ayrıntılı olarak bilgilendirmiş, onların iznini almış ve onlarla yaklaşık ders içi 30 saat, ders dışıyla birlikte yaklaşık 50 saat süren matematiksel modelleme ve teknoloji destekli öğrenme ortamlarında uygulamalar gerçekleştirmiştir. Gerekli iznin alınmasıyla ve ön uygulamaların tamamlanmasıyla uygulamada matematiksel modelleme probleminin çözümleri öğrencilerin oluşturdukları gruplarla ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir. Araştırmacılardan biri sürekli olarak çözümlerde bulunarak gözlem notları ve hatırlatıcı notlar almıştır. Araştırmacılar veri analiz sürecinde kuram oluşturma veri analiz tekniklerine uyarak etkili bir analiz sürecinin gerçekleştirilmesini amaçlamıştır.

Willig'in (2001) ifade ettiği gibi, kuram oluşturma çalışmasında araştırmacı öğrencilerin sesli düşünmelerini istemiştir. Çözüm sürecinin öncesinde ve sonrasında araştırmacı tarafında öğretmen adayları ile informal görüşmeler gerçekleştirilmiş ve araştırmacıların vardığı taslak sonuçları araştırmasına katılan bireylerle paylaşarak onların görüşlerini de dikkate almıştır. Öğrencilerin çözümleri esnasında gözlem notları mümkün olduğu kadar ayrıntılı bir şekilde yazılmıştır. Gözlemci araştırmacı, Corbin & Strauss'un (2008) ifade ettiği gibi gözlem notlarından ayrı olarak her bir problem çözümü sonrasında yarım saat hatırlatıcı notlar almış ve öğrencilerin zihinsel eylemlerindeki ayrıntıların unutulmasının veya gözden kaçmasının önüne geçmeye çalışmıştır. Kurma oluşturma veri analizinin yapısına uygun olarak veri toplama ve veri analizi süreci aynı anda sürdürülmüştür.

BÖLÜM V

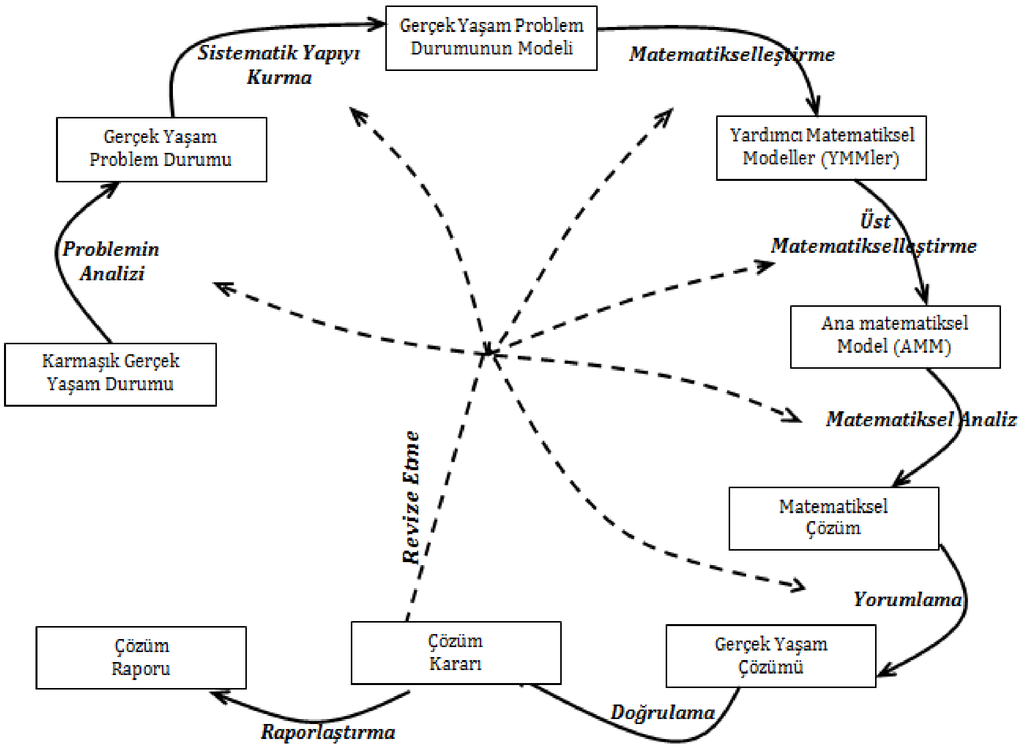
BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde kuramsal çerçeveye bağlı olarak matematiksel modelleme problemi çözme süreçlerindeki bilişsel ve üst bilişsel eylemlere dayalı olarak ortaya çıkan temel bileşenler, temel ve alt basamaklar, özellikleri, çözüm süreçlerinde temel ve alt basamakların dağılımı ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Matematiksel Modelleme Sürecinde Biliş Temelli Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler

Kuram oluşturma veri çözümlemesi sonucunda, matematiksel modelleme sürecine ilişkin dokuz temel bileşen, bu temel bileşenler arasındaki geçişi sağlayan dokuz temel basamak arasındaki ilişkiyi veren süreç modeli Şekil 47'de gösterilmiştir.

Şekil 47. Matematiksel Modelleme Sürecinin Genel Yapısı



Matematiksel Modelleme Sürecinin Temel Bileşenleri

1. Karmaşık Gerçek Yaşam Durumu
2. Gerçek Yaşam Problem Durumu
3. Gerçek Yaşam Problem Durumunun Modeli
4. Yardımcı Matematiksel Model/ler
5. Ana matematiksel Model
6. Matematiksel Çözüm
7. Gerçek Yaşam Çözümü
8. Çözüm Kararı
9. Çözüm Raporu

Matematiksel Modelleme Sürecinin Temel Basamakları

A. Problemin Analizi

B. Sistematik Yapıyı Kurma

C. Matematikselleştirme

D. Üst matematikselleştirme

E. Matematiksel Analiz

F. Yorumlama

G. Doğrulama

H. Revize Etme

J. Raporlaştırma

Matematiksel Modelleme Sürecinin Alt Basamakları

"Problemin Analizi" temel basamağındaki alt basamaklar

A_1. Problemi okuma

A_2. Problemi basit ifadelerle açıklama/sadeleştirme

A_3. Problemdeki stratejik etkenleri düşünme

A_4. Problemdeki verileri inceleme, içeriği yorumlama

A_5. Basit varsayımlar yapma

“Sistematik Yapıyı Kurma” temel basamağındaki alt basamaklar

B_1. Genel çözüm stratejisini tasarlama

B_2. Çözüm için gerekli/gereksiz stratejik etkenleri/bilgileri ayıklama

B_3. Stratejik etkenleri gruplandırma

B_4. Üst düzey varsayımlarda bulunma

B_5. Deneyimlerden yararlanma

B_6. Teknolojik ile matematiksel gösterim arasındaki geçişi gerçekleştirme

“Matematikselleştirme” temel basamağındaki alt basamaklar

C_1. YMMlerin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini bulma

C_2. Bağımlı-bağımsız değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirleme

C_3. Stratejik etkenleri matematiksel sembollerle ifade etme

C_4. Stratejik etkenleri yorumlama, YMM’lere ilişkin ön tahminlerde bulunma

C_5. Teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma

C_6. Problemde verileri bulunmayan stratejik etkenlere yönelik sayısal tahminlerden ve ölçümlerden yararlanma

C_7. Üst düzey matematiksel ve teknolojik bilgiden yararlanma

C_8. Teknolojik ve matematiksel gösterim arasında geçiş yapma

“Üst Matematikselleştirme” temel basamağındaki alt basamaklar

D_1. YMMlerin cebirsel gösterimlerinden yararlanma

D_2. Bağımlı-Bağımsız değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirleme

D_3.Teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma

D_4. Gerekli YMMleri belirleme

D_5. YMMlerin grafiksel gösterimlerinden yararlanma

D_6. YMMlerin yorumlanmasına olanak sağlayan teknolojik sistemi kurma

D_7. AMM için gerekli verileri YMMlerden elde etme

D_8. Stratejik etkenleri yorumlama ve AMMye ilişkin ön tahminlerde bulunma

D_9. Üst düzey matematiksel ve teknolojik bilgilerden yararlanma

D_{10}. AMMnin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini bulma

D_{11}. Teknolojik ve matematiksel gösterim arasındaki geçiş yapma

“Matematiksel Analiz” temel basamağındaki alt basamaklar

E_1. Y/AMMlerin grafiksel veya cebirsel gösterimlerinden yararlanma

E_2. Teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma

E_3. Matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşmak için hesaplama yapma

E_4. Matematiksel çözümü ve sonuçları veren teknolojik sistemi kurma

E_5. Y/AMMlerin kritik noktalarına ilişkin matematiksel sonuçlar elde etme

E_6. Matematiksel ve teknolojik bilgilerden yararlanma

E_7. Teknolojik ile matematiksel gösterim arasındaki geçiş yapma

“Yorumlama” temel basamağındaki alt basamaklar

F_1. Matematiksel çözümün gerçek yaşam karşılığını belirleme

F_2. Gerçek yaşam durumu ile zihinsel modeli arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarma

F_3. AMMnin kritik noktalarının gerçek yaşam karşılıklarını belirleme

F_4. Gerçek yaşam çözümü ve sonuçlarının problem durumu açısından incelenmesi

F_5. Varsayımları gerçek yaşam çözümü ve sonuçları doğrultusunda irdeleme

“Doğrulama” temel basamağındaki alt basamaklar

G_1. Gerçek yaşam sonuçlarındaki beklenmeyen durumların irdelenmesi

G_2. Gerçek yaşam sonuçlarını deneyimlere dayalı tahminlerle veya ölçümlerle karşılaştırma

G_3. Gerçek yaşam sonuçlarını problem verileri ile karşılaştırma

G_4. Gerçek yaşam sonuçlarını video ve resimlerdeki durumlarla karşılaştırma

G_5. Gerçek yaşam çözümünün/sonuçlarının yeterliğine ilişkin karara varma

G_6. İşlemleri, düşünceleri ve basamakları kontrol etme

“Revize Etme” temel basamağındaki alt basamaklar

H_1. Çözümdeki hata/yanlışın kaynağını belirleme

H_2. İşlemleri ve Düşünceleri tekrar gözden geçirme

H_3. Alternatif çözüm stratejileri belirleme

H_4. Üst düzey varsayımlarda değişiklik yapma

“Raporlaştırma” temel basamağındaki alt basamaklar

J_1. Raporda yazılması gereken önemli düşünceleri vurgulama

J_2. Çözümü ayrıntılı matematiksel ifadelerle destekleme

J_3. Raporda yazılması gerekenleri sıralama

Araştırmanın bu bölümünde matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan dokuz temel bileşen, dokuz temel basamak, bu temel basamakları şekillendiren elli beş alt basamak ve modelleme sürecindeki bu önemli parçaların temel özellikleri ve birbirleri arasındaki ilişki aşağıda ayrıntılı bir şekilde açıklanmaktadır.

1. Karmaşık Gerçek Yaşam Durumu

A. PROBLEMİN ANALİZİ

2. Gerçek Yaşam Problem Durumu

A_1. Problemi okuma

A_2. Problemi basit ifadelerle açıklama/sadeleştirme

A_3. Problemdeki stratejik etkenleri düşünme

A_4. Problemdeki verileri inceleme, içeriği yorumlama

A_5. Basit varsayımlar yapma

Karmaşık gerçek yaşam durumundan gerçek yaşam problem durumunu ortaya çıkarmak için gerçekleştirilen problemin analizi basamağında, problem ifadesi anlamlandırma adına sadeleştirilmiştir. Bu doğrultuda problemde gerçek yaşamdaki durumun ne olduğu, istenenlerin neler olduğu, nelerin gerektiği ve nelere sahip olunduğuyla ilgili ön düşünceler ortaya çıkmıştır. Sahip olunanlar ayrıntılı olarak incelenerek gerçek yaşam bağlamında yorumlanmıştır. Bu ön düşünceler öğrencilerin problemdeki karmaşıklığı ortadan kaldırdıktan sonra daha sağlıklı düşüncelerin ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır. Problem durumuna öğrencilerin ısındığı bu basamakta verilenler karmaşık gerçek yaşam durumuna ilişkin ön (ilk) görüşler dikkate alınarak analiz edilmiştir. Problemin analizi temel basamağı beş alt basamakta toplanmaktadır.

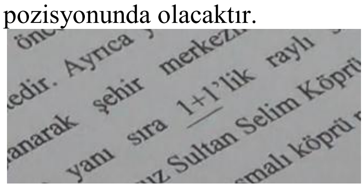
A_1. Problemi Okuma

Problemi okuma genelde öğrencilerin modelleme sürecinde sergiledikleri ilk yaklaşım olarak karşımıza çıkmıştır. Problem, gruptaki bir öğrenci tarafından arkadaşlarına var olan probleme hiçbir yorum, ek düşünce getirilmeden ve yaratıcılık sergilenmeden sadece sesli olarak okunmuştur. Öğrenciler problem çözüm süreçlerinde sık sık problemi tekrar okuyarak yaptıklarını tekrar gözden geçirme ve yapılanları/yapılacakları ortaya koyma ihtiyacı duymuştur. Dolayısıyla problemi okuma eyleminin modelleme sürecinin başında gerçekleşmesi gerekmemiştir.

G_7'nin Köprü Problemi çözümünde, Ezgin modelleme sürecinin başında problem ifadesini hiçbir yorum ve ekstra bir düşünme ortaya koymadan sesli bir şekilde arkadaşlarına okumuştur. Problem ifadesi tam olarak okunduktan sonra problemin çözümüyle ilgili düşünceler ortaya çıkmaya başlamıştır.

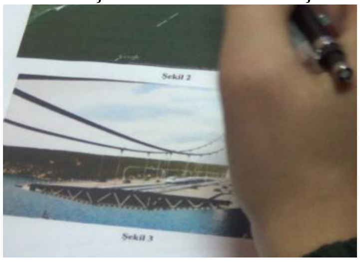
Ezgin: Günümüzde her ay 20.000 yeni aracın trafiğe katıldığı İstanbul'da kayıtlı olan yaklaşık 3 milyon araç bulunmaktadır. İstanbul Boğazı üzerinde bulunan 2 köprü ise özellikle günün belirli saatlerinde yaşanan aşırı yoğunluk nedeniyle tam anlamıyla işlevini yerine getirememektedir. Bu nedenlerden dolayı Boğaz'a üçüncü bir köprünün yapılması 2000'li yıllardan itibaren sıkça dile getirilmeye başlanmıştır. Bu doğrultuda yetkililerce helikopterle köprünün yapılması planlanan yerin ve üzerinden geçen yolun güzergâhını belirlemek için keşif gezileri yapılmış ve Şekil 1'de görülen bölgeye köprünün yapılmasını kararlaştırılmıştır.
Yapılan köprü ile birlikte özellikle önceki 2 köprüde meydana gelen trafik probleminin önüne geçilmesi düşünülmektedir. Ayrıca yük taşıyan kamyon, tır vb. büyük araçların yeni yolu kullanması sağlanarak şehir merkezindeki sıkışıklık önlenmeye çalışılacaktır. Köprüde taşıt yollarının yanı sıra 1+1'lik *(Altını çizdi.)* raylı sistemin de yapılması planlanmaktadır (bkz. 3. foto). Şöyle bir şeymiş *(Animasyon olan çıktıyı gösteriyor.)*.
Bu sayede Yavuz Sultan Selim Köprüsü İstanbul'da hem taşıt ulaşımının hem de raylı ulaşımın alternatifi olan bir asmalı köprü pozisyonunda olacaktır.

Kağıt Alıntısı



Ezgin: Yapılacak köprünün genişliği ve uzunluğunu veren matematiksel modeller oluşturunuz. Bu şekilde köprünün olası genişliği ve uzunluğu hakkında en iyi tahmininizi nedenleriyle birlikte açıklayınız.
Evet. Düşünceleriniz neler? Şimdi hem raylı geçit hem de taşıt.

Kağıt Alıntısı



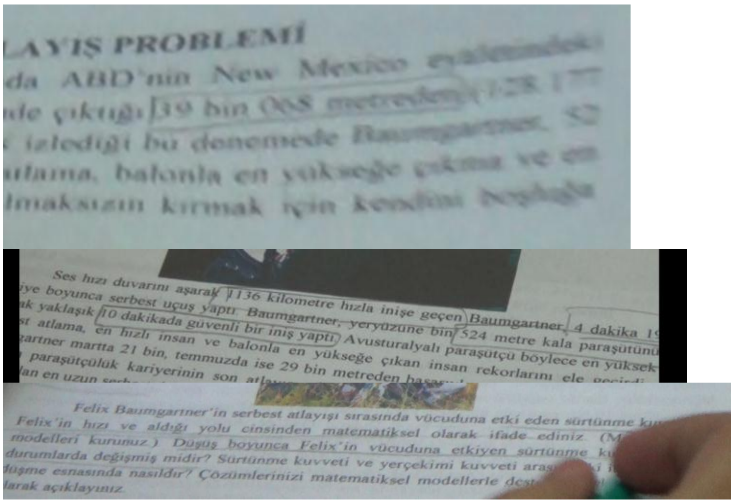
A_2. Problemi Basit İfadelerle Açıklama/Sadeleştirme

Problem ifadesinde anlatılmak istenen karmaşık gerçek yaşam durumu, grubun problem durumunu net olarak algılaması için sadeleştirilmiştir. Burada öğrenci problemi kendi cümleleriyle arkadaşlarına açıklamıştır. Bu süreçte öğrencilerin problem ifadesinden ne anladığının ortaya çıktığı ve problem durumuna ilişkin kişisel anlayışların ve algıların gruptakilerle paylaşılarak geliştirildiği görülmüştür.

G_1'in Düşme Problemi Çözümünde, Demet serbest düşmeyi gerçekleştiren astronotun beklenen yerden farklı bir yere düştüğünü ve bu sırada balon ile nereden havalanıp gökyüzünde atlayışın başından sonuna kadar nasıl bir şekilde hareket ettiğini üç boyutlu olarak arkadaşlarına kendi cümleleriyle anlatmıştır. Aynı zamanda Demet problemde sürtünme kuvvetini Felix'in hızı ve aldığı yolu cinsinden bir fonksiyon gibi yazmaları gerektiğini ifade ederek de çözümde matematiksel model oluşturmaları gerektiğini vurgulamıştır.

Demet: Araba uzaklığı aynen. Adam böyle kalkıyor. Böyle tepeden düşüyor (Ekranı yeryüzü olarak düşünüp üç boyutlu açıklama yapıyor.) muhtemelen böyle bir hareket yapıyor. Şimdi ben burada bazı yerleri işaretledim. Adam 39 bin metreden atlıyor. Belli bir yerden sonra 1136 km/s hızla inişe geçiyor. 4 dakika 19 saniye serbest düşme yapıyormuş. 1524 metre kala paraşütünü açarak toplamda 10 dakikada iniş yapıyor. Şimdi sürtünme kuvvetini Felix'in hızı ve aldığı yolu cinsinden yani bir fonksiyon gibi yazmamızı istiyor bizden bunu. Sürtünme kuvvetini hız ve yol cinsinden ifade etmemizi istiyor.

Kağıt Alıntısı



Defne: Doğru.
Selen: İlk atlarken hızı ne peki? Sıfırdan başlıyor dimi?
Demet: Hmm. Evet ya bu maksimum hızı. Şimdi bir paraşüt açılana kadar bir de paraşüt açıldıkta sonra iki farklı sürtünme kuvveti var.
Defne: Evet.
Demet: Sürtünme kuvveti değişkendir. Ama burada bir de serbest atlayış esnasında dediği herhalde paraşütsüz olarak inişi kastediyor. Bizden paraşütsüz kısmın sürtünme kuvveti isteniyor.

A_3. Problemdeki Stratejik Etkenleri Düşünme

Çözüm için gerekli olabilecek etkenler ifade edilmiştir. Bu aşamada stratejik etkenler ayrıntılı olarak açıklanmamış, gerçek yaşam durumu anlaşılmaya çalışılarak problem için önemli olduğu düşünülen stratejik etkenler yüzeysel olarak yorumlanmıştır. Kısaca bu süreçte, problemi analiz etmek için çözümde uygulamaya geçmeden önce stratejik etkenlere ilişkin plansız ön düşüncelerle karşılaşılmıştır.

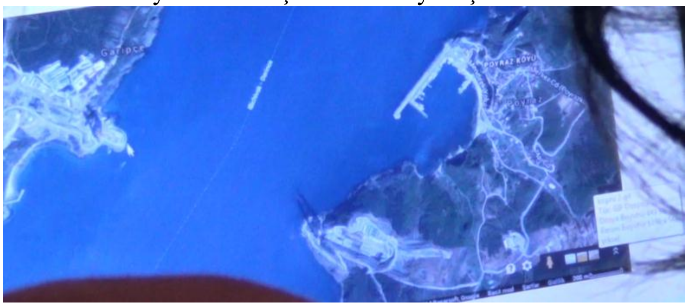
G_1'in Köprü Problemi çözümünde öğrencilerin ilk aşamada köprünün yapılmasının planlandığı yeri haritadan bakarak düşündükleri, fotoğraflardan hareketle de köprü ayaklarının belirledikleri görülmüştür. Yani öğrenciler problemde verilenleri ilk incelediklerinde problemdeki stratejik etkenleri (köprünün tam konumu, köprünün ayakları ve konumu, köprünün yapısı (tren rayı ve trafik şeridi vb.) düşünmüşlerdir. Çözümün başlarında yeni yapılanan öğrenci düşünceleri sürecin devamında bazen değişmiş bazen de gelişmiştir.

Defne: Köprü buraya yapılacak sanırım. Eliyle çizgiyi gösteriyor.

1. Foto

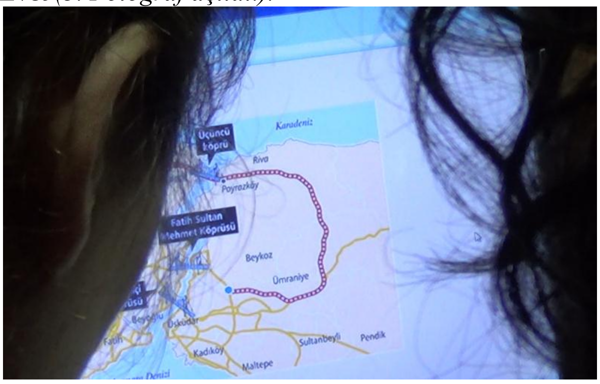
Demet: Hıhı.
Defne: Daha da yakınlaşsana *(2. Fotoğrafı inceliyorlar. Demet daha da yakınlaşıyor resme.).*
Demet: Hah. Burada ayakları var işte. Belli oluyor. Şuralarda.

2. Foto



Selen: Evet *(3. Fotoğraf açıldı.).*

3. Foto



Demet: Hah. Bak yol buradan burayaymış. Köprü de şu kısım oluyor.
Defne: Evet *(4. animasyon resim açıldı.).*

4. Foto

Selen: Bak burada rayları var gidiş-geliş.
Demet: Evet.

A_4. Problemdeki Verileri İnceleme, İçeriği Yorumlama

Belirlenen stratejik etkenlere bağlı olarak problemdeki veriler ayrıntılı olarak incelenmiştir. Gruptakiler kendi günlük yaşam deneyimlerinden, ön tahminlerinden yararlanarak birbirlerine gerçek yaşam problem durumunu açıklamış ve problem durumu ile ilgili çeşitli yorumlar yapmıştır. Problemle birlikte verilmiş video, animasyon ve fotoğraflar ayrıntılı olarak izlenerek karmaşık gerçek yaşam durumuna ilişkin istenenler doğrultusunda sahip olunanlar ortaya çıkarılmış ve bu konuda kişisel düşünceler yapılmıştır. Bu yorumların da, grup içerisinde ele alınarak grup yorumu halini aldığı görülmüştür.

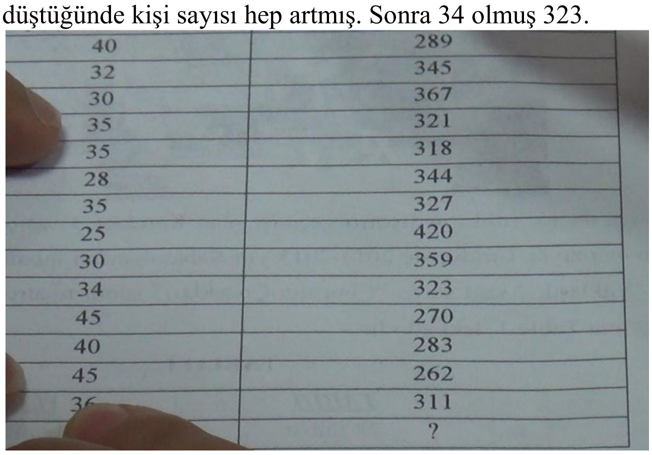
G_5'in Tiyatro Problemi çözümünde Bülent problemle birlikte bilet fiyatı ve biletli sayısını veren tabloyu ayrıntılı olarak tek tek incelemiş ve tabloya göre bazı çıkarımlarda (illerin önemli olduğu, fiyat düştüğünde kişi sayısının artması vb.) bulunmuştur. Bengi de tablodaki en düşük ve en yüksek değerleri incelemiştir.

Bülent: Tablolara bakalım *(Tabloları inceliyorlar.)*. Burada 45'e 270'miş *(Ankara'yı kastediyor.)*.

Bengi: Burada da 45 ama 262 kişi gelmiş *(Bursa'yı kastediyor.)*.

Bülent: Sonra düştüğünde. 40 olduğunda 283 kişi olmuş *(Eskişehir'i kastediyor.)*. 36 olmuş 311. 35 olmuş mesela 321. Birim fiyatı düştüğünde kişi sayısı hep artmış. Sonra 34 olmuş 323.

Kağıt Alıntısı



40	289
32	345
30	367
35	321
35	318
28	344
35	327
25	420
30	359
34	323
45	270
40	283
45	262
36	311
	?

Bengi: En düşüğü zaten 28. 28'de de 344 kişi gelmiş. Daha düşük var mı?

Bülent: 32'de 345 kişi var. Nerede diyordu? İstanbul'da mı?

Canan: İstanbul'da diyordu. Biz bunları ilk önce sıralı ikili olarak yazacağız bir kere.

Bülent: Ama şöyle. Şunu da düşünmek lazım. Şimdi burada 34 TL 323 kişi. Burada 35 TL. Burada 28 TL. Burada 32 TL. Ama burada daha çok kişi gelmiş. Yani iller de önemli burada.

Canan: İyi de illeri GeoGebra'ya aktaramayız. Nasıl aktaracağız? Bence ilin fazla bir etkisi yok ya. Burası İzmir diye daha çok kişi gelmiş değil.

Bülent: Ama mantık olarak.
Bengi: Ama İstanbul çok daha kalabalık bir şehir ya. Oraya daha fazla insan gelmesi lazım yani.
Bülent: 32 TL fiyat. Burada 28 TL. Burası ucuz ama daha az kişi geliyor. Çünkü Mersin küçük bir şehir olduğu için daha az kişi geliyor.
Bengi: Ama öyle bakarsan İzmir 40 TL Mersin 28 TL ama Mersin'e daha fazla kişi gitmiş.

A_5. Basit Varsayımlar Yapma

Problemi analizi yapılırken, kişisel düşüncelere bakıldığında çok fazla düşünülmeden ve sorgulanmadan ortaya koyulan basit ve kısmen genel varsayım göze çarpmıştır. Bu varsayımlar, çözümün ileriki aşamalarında günlük yaşam deneyimleriyle ve uygun teknolojik fırsatlarla desteklenmiş üst düzey varsayımların kurulmasına zemin hazırlamıştır. Bu basit varsayımlar çözüm sürecinin başlarında fazla sorgulanmadan ortaya çıktığı için problemde istenene ulaşmak için yanlış veya eksik düşünceleri de içermiştir. Üst düzey varsayımlarda (Sistematik Yapıyı Kurma basamağında ortaya çıkan) bu basit varsayımlardan yararlanılmış ve bunlar daha etkili bir şekilde düzeltilerek çözümde kullanılmıştır.

G_1'in Tiyatro Problemi Çözümünde Defne, hem problem ifadesindeki bir cümleden hareketle hem de tablodaki verileri inceledikten sonra bilet fiyatının düşmesinin daha fazla kişinin gelmesini sağladığı basit varsayımında bulunmuştur. Bununla birlikte ise Demet'in basit varsayımının ise fiyatı daha az olan yerden daha fazla kazanç elde edildiği olmuştur. Selen de ilk aşamada bu düşünceyi desteklemiştir. Sürecin devamında ise hem Demet'in hem Selen'in bu basit varsayımlarının değiştiği görülmüştür. Çünkü ileriki aşamada öğrenciler bilet fiyatındaki azalmanın gelen kişi sayısını arttırdığı halde kazancı belli bir yerden sonra oldukça düşürdüğünü fark etmişlerdir ve söz konusu bu basit varsayımlarını değiştirmişlerdir.

Demet: Bir şey okuyorum da. Bilet fiyatlarının bazı illerde biraz arttırılmasına rağmen bilet fiyatı daha az olan yerlere göre daha az kazanç elde etmişlerdir.
Defne: Yani bilet fiyatı düşükken daha fazla kişi gelmiş diyebiliriz o zaman.
Demet: Evet.
Defne: Tabloda da mesela İzmir'de 40 diyor. Aydın'da ise 32. Mesela daha gelişmiş daha büyük yerlerde fiyat fazla.
Demet: 25 TL'lik yere 420 kişi gelmiş bak *(Verileri inceleyip*

	karşılaştırıyorlar.). Mesela burada da biraz ters olmuş.
Selen:	Aynen.
Defne	25 ucuz diye daha çok kişi gelmiş.
Demet:	Fiyatı daha az olan yerden daha fazla kazanç elde etmiş. Çünkü bilet fiyatındaki değişiklik gelen sayısını da etkilemiş. Bence en yüksek ve en düşüğü bulalım mı önce? En yüksek fiyatlar 45 mi?
Selen:	Evet 45

2. Gerçek Yaşam Problem Durumu

B. SİSTEMATİK YAPIYI KURMA

3. Gerçek Yaşam Problem Durumunun Modeli

B_1. Genel çözüm stratejisini tasarlama

B_2. Çözüm için gerekli/gereksiz stratejik etkenleri/bilgileri ayıklama

B_3. Stratejik etkenleri gruplandırma

B_4. Üst düzey varsayımlarda bulunma

B_5. Deneyimlerden yararlanma

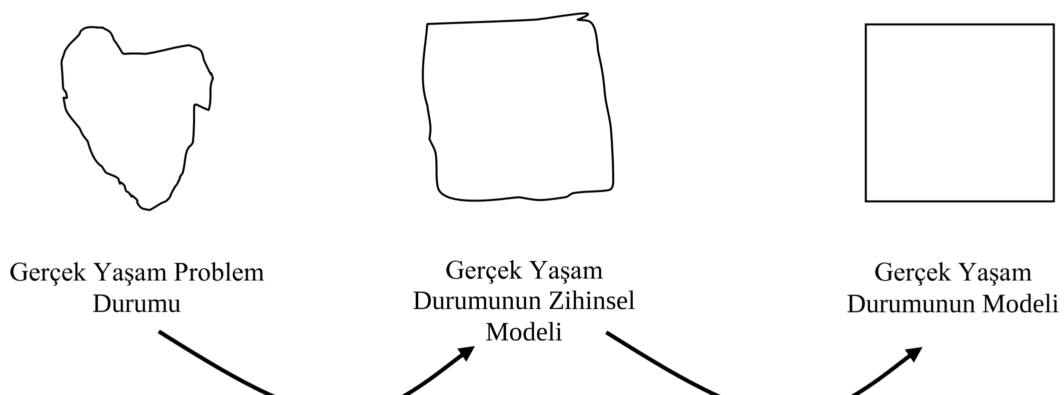
B_6. Teknolojik ile matematiksel gösterim arasındaki geçişi gerçekleştirme

Modelleme sürecinde gerçek yaşam problem durumundaki karmaşıklığı ortadan kaldıran öğrenciler sürecin devamında gerçek yaşam problem durumunun zihinsel bir modelini oluşturmaya çalışmıştır. Bu basamağı gösteren en önemli işaretler zihinsel modelin çözüme yansıtılması (gerçek yaşam problem durumunun modeli), genel çözüm planının tasarlanması, stratejik etkenlerin net bir şekilde açıklanması, üst düzey varsayımların ortaya koyulması, gerekli teknolojik araçların, matematiksel kavramların ve işlemlerin konuşulmaya başlanması ve bunlarla ilgili sağlıklı düşüncelerle karşılaşılmasıdır. Bu basamakta artık öğrenciler düşüncelerini gerekçelendirerek açıklamaya çalışmış ve gerçek yaşam durumu ile matematik arasında bağlantı kurmaya başlamıştır. Problem durumunun matematiksel bir çözümü için problemin matematiksel iskeleti genel çözüm stratejisi kapsamında sistematik hale getirilmiş ve devamındaki çözüm ise bu sistematik yapı üzerinden sürdürülmüştür.

Söz konusu sistematik yapının iki farklı şekilde kurulmuştur. Bunlardan ilki öğrencilerin düşüncelerini ve zihinsel imgelerini kağıda aktarmalarıdır. Bir diğeri ise öğrencilerin teknoloji yardımıyla düşünceleri ve zihinsel imgeleri bir matematiksel yazılımın üzerinde göstermeleridir. Gerçek yaşam durumu, gerçek yaşam problem durumunu temsil eden zihinsel model ve onu yansıtan durum modeli arasındaki farklılık ne kadar az ise probleme o derecede gerçekçi bir yanıt verilebilmiştir. Fakat öğrenciler sistematik yapıyı kurma basamağında üst düzey varsayımlar ortaya koyarak zihinsel modellerini yansıtan durum modellerinde bazı kısıtlamalara gitmişler ve üstesinden gelebilecekleri bir genel çözüm stratejisini dikkate almışlardır.

Gerçek yaşamdaki problem durumları oldukça karmaşıktır ve birçok değişkeni ve etkeni içerisinde barındırmaktadır. Bununla birlikte ise öğrenciler bu gerçek yaşam problem durumda istenilene ulaşmak için öncelikle bu durumu zihinlerinde canlandırmışlardır. Zihinsel olarak canlandırdıkları zihinsel model ise birebir gerçek yaşam durumunu yansıtmamıştır. Ama gerçek yaşamdaki duruma olabildiğince yakın bir zihinsel modeli dikkate almışlardır. Bu durumu öğrencilerin söz konusu gerçek yaşam durumuyla ilgili deneyimlerinin de etkilediği görülmüştür (bkz. Şekil 48).

Şekil 48. Zihinsel Model ve Durum Modeli Arasındaki İlişki



Zihinsel modelin öğrencilerin bilgi, beceri ve düşünceleri doğrultusunda dönüştürülmüş ve problem çözülebilir hale getirilmiştir. Yani kullanılacak gerçek yaşam problem durumunun modeline ulaşılmıştır. Bu gerçek yaşam problem durumunun modelinin zihinsel modelden elde edildiği düşünüldüğünde arasındaki farklılığın üst düzey varsayımların yapısından kaynaklandığı görülmüştür. Zihinsel modelde sonuca ulaşabilmek için yapılan kısıtlamalar ne kadar fazla ise bu iki model (zihinsel model ve gerçek yaşam problem durumunun modeli) arasındaki fark da fazla olmuştur. Bu fark da modelleme sürecinin sonlarına doğru bulunan gerçek yaşam sonuçlarının gerçek yaşamdaki gerçek değerleri ne kadar yansıttığını belirleyen en temel faktörlerin başında gelmiştir.

Ayrıca Sistematik Yapıyı Kurma'da çözüm için gerekli stratejik etkenler değişken, sabit ve parametre ayrımı yapılmadan düşünülmüş ve bu doğrultuda ileri aşamada oluşturulacak YMM (yardımcı matematiksel model) ve AMMlerin (ana matematiksel model) yapısı tasarlanmıştır. Bu temel basamağı diğerlerinden farklı kılan husus, genel anlamda Pólya'nın (1957) ifade ettiği gibi modelleme sürecindeki saldırı planının tasarlanmasıdır.

Sistematik yapıyı kurma temel basamağı altı alt basamakta toplanmıştır. Veriler incelendiğinde bu alt basamakların birbirleriyle sıkı bir bağ içerisinde oldukları ve sürekli olarak birbirlerini etkiledikleri gözlemlenmiştir. Bu basamaktan sonra artık çözüm sürecindeki temel dünya matematiksel dünyadır, gerçek yaşam yardımcı dünya konumundadır. Ancak modelleme sürecinin başından sonuna kadar bu iki dünya arasında geçişler sık sık yaşanmıştır.

B_1.Genel Çözüm Stratejisini Tasarlama

Çözüm için gerekli teknolojik, matematiksel ve matematik dışı kavramların ortaya çıkarıldığı ve bunlara ilişkin ön bilgiler doğrultusunda izlenecek genel çözüm yolunun belirlendiği aşamadır. En temeldeki amaç anlamlandırılan gerçek yaşam problem durumunu var olan imkanlarla en iyi şekilde çözmeye olanak sağlayacak matematiksel bir yapının tasarlanmasıdır. Bu doğrultuda da gerçek yaşam problem durumunun modeli en son haline getirilmiştir. Bu aşamada çözüm için kullanılacak teknolojik/matematiksel kavramlar ve işlemler ortaya konulmuştur. Gerçek yaşam deneyimleri ve bilgileri doğrultusunda da çözüm için uygun yöntem ve teknikler belirlenmiştir. Problemlerin çözüm süreçleri incelendiğinde de bu sürecin uzun bir zamana yayıldığı görülmüştür.

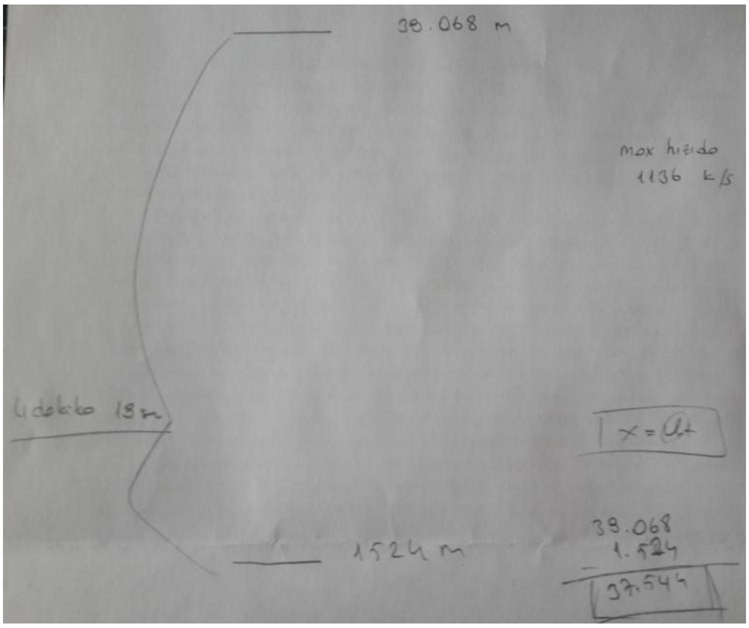
Bu süreçte problemle birlikte verilen animasyon, video ve fotoğrafların, teknolojik imkanların, gerçek yaşam deneyimlerinin ve yapılan tahminlerin genel çözüm stratejilerinin belirlediği görülmüştür. Sistematik yapıyı kurarken kişiler zaman zaman farklı genel çözüm yolları ortaya atmış ve bu düşünceler grup içerisinde tartışılmıştır. Bireyler tarafından farklı stratejiler ortaya atılmış ve her bir birey gruba karşı fikrini açıklamıştır.

Modelleme sürecindeki işlemsel veya mantıksal hataların kontrol edilmesi bu basamaktan itibaren başlamıştır. Çözümlerde GeoGebra öğrencilerin genel çözüm stratejileri için bazen uygun ve önemli bir araç olmuştur. Çünkü genel stratejiyi şekillendiren teknoloji problem çözüm sürecinin teknoloji destekli bir matematiksel çözüme oradan da gerçek yaşam çözümüne ulaşmasında aktif bir rol üstlenmiştir.

G_1'in Düşme Problemi çözümünde öğrenciler gerçek yaşam problem durumuna ilişkin oluşturdukları zihinsel modellerini kağıda yansıtmaya çalışmışlardır. Zihinsel modellerinden kağıda yansıttıkları gerçek yaşam problem durumu modellerinin tüm hareketi değil sadece serbest düşmedeki hareketi kapsadığı ve gerekli görülen stratejik etkenlerin modelin üzerinde ifade edilmeye çalışıldığı görülmüştür.

Defne: Biz bir yolu bulalım. Şu kadar *(39068 metre)* yükseklikten 1524 metreye şunu çıkaralım.
Demet: Tamam *(Demet çıkartıyor.).*
Defne: Şeklini çizelim. Al bak boş kağıt.
Demet: Tamam. Buradan atladığını varsayalım. Burası 39068 metreden 1524 metreye kadar toplamda. 4 dakika 19 saniye. Maksimum hızını da şuraya yazıyorum. 1136 km/s.

Kağıt Alıntısı



Defne: Bundan sonra da düşüyor adam.

G_6'nın Düşme Problemi çözümünde öğrencilerin genel çözüm stratejilerini tasarlarken GeoGebra'nın çözüm için kullanmalarına gerek olmadığını düşünmüşlerdir. Ayrıca çözümde ivmeden ile sürtünme kuvveti arasında bir ilişkiyi bulabileceklerini ve düşme esnasında sürtünme kuvvetinin ters yönde bir ivme yarattığını dikkate almışlardır. G_6 çözümde sürtünme katsayısı formüllerinden ilerleyemedikleri için üst düzey varsayımlarını genel çözüm stratejisinde ilerleyebilecekleri şekilde düzenledikleri görülmüştür. Ayrıca videodaki verilere göre G_6 gerçek yaşam durumunun modelini 4 ana kısma ayırmışlardır. İlk kısmı hızlanan (0-45 saniye arası) ikinci kısım sabit hızlı (45-60 saniye arası), üçüncü kısım (60-259 saniye) son bölüm ise paraşütlü ve dikkate almadıkları bölüm olmuştur. Bu zihinsel modelleri de onların oluşturacakları yardımcı matematiksel modelleri şekillendirmiştir. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

> (…Burcu GeoGebra'yı nasıl kullanabileceklerini bilmediklerini ifade etti. GeoGebra kullanmama kararı aldılar. Fizik'teki formülleri incelediler… Sürtünme kuvveti formülleri ile yer çekimi ivmesi arasındaki ilişkiyi verebilecek formülleri belirleyemediler… Yavuz sürtünme kuvvetini ters ivme şeklinde düşünebileceklerini ifade etti ve öğrenciler bu düşünce üzerinden çözümlerini sürdürme kararı aldılar. Gözlem notu: G_6 Düşme Problemi)

B_2. Çözüm İçin Gerekli/Gereksiz Stratejik Etkenleri/Bilgileri Ayıklama

Öğrenciler kuracakları sistematik yapının daha sağlam olması için problemin çözümü için gerekli/gereksiz stratejik etkenleri ayıklamıştır. Bu alt basamakta var olan çözüm için gerekli olduğu düşünülen stratejik etkenler değişken, sabit ve parametre ayrımı yapılmadan çok gerekli olmadığı düşünülen veya dikkate alınmadığında eksikliği fazla hissedilmeyen diğer etkenlerden ayıklanmıştır. İlk basamakta karşımıza çıkan stratejik etkenleri düşünme alt basamağından farklı olarak bu basamakta stratejik etkenlere ilişkin daha sistematik, mantıklı, kapsamlı ve neden-sonuç ilişkisine dayalı düşünceler ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte öğrenciler bu aşamada problem ifadesindeki bilgilerden hangilerinin daha çok gerekli olduğu, hangilerinin çözümde çok da fazla gerekmediği hakkında düşünceler sergilemiştir.

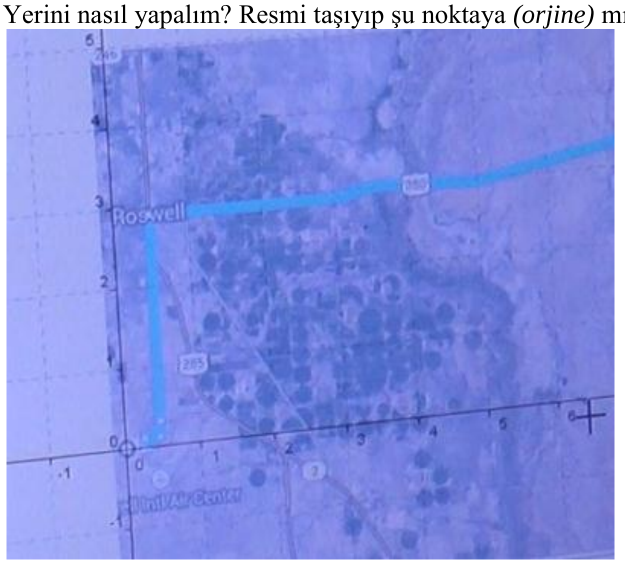
G_1'in Düşme Problemi çözümünde Defne çözüm için Genel Çözüm Stratejisini tasarlamaya yönelik bir düşünce olarak gerekli olduğunu düşündüğü GeoGebra'yı çözümde kullanabileceğini ifade etmiş ve çözümde kullanmak üzere daha önce inceledikleri 2. Fotoğrafı GeoGebra'da atabileceklerini vurgulamıştır. Demet de aynı fotoğrafının kullanımının daha mantıklı olduğunu çünkü diğerinden daha büyük olduğunu ifade etmiştir. Aynı zamanda öğrenciler çözümde serbest düşmedeki hareketin paraşütle düşmeyi kapsamadığını düşünerek paraşütü açtıktan sonraki verilerin ve hareketlerin çözüm için gereksiz olduğunu düşünmüşlerdir.

Defne: GeoGebra'yı bir açalım. Bir tane resim vardı ya şurada. Onu ekleyeceğim.

Demet: Tamam. İkinci olan daha büyüktü ya. Onu alalım *(Fotoğrafı şeffaflaştırdı ve analitik düzleme oturtuyor.).*

Defne: Yerini nasıl yapalım? Resmi taşıyıp şu noktaya *(orjine)* mı getireyim?

Video Alıntısı



.
.
.

Defne: Adama atlarken sadece adamın alanı kadar bir yere sürtünme etki ediyor. Ama paraşütte daha fazla.
Demet: Tamam da. Burada serbest atlayıştaki hareketi sorduğundan dolayı o kısmı *(Paraşüt açıkken ki)* almayacağız.
Defne: Paraşütle ilgilenmeyeceğiz. Evet.
Demet: Paraşütle atladığı yere kadarki kısımdan. Yani 1524 metre kalaya kadarki kısmıyla ilgileneceğiz.
Defne: Hıhı.
Demet: Orada da aldığı yol ve hız. Yani aslında videolarda belli yerlerde hızını ve yüksekliğini veriyordu.

B_3. Stratejik Etkenleri Gruplandırma

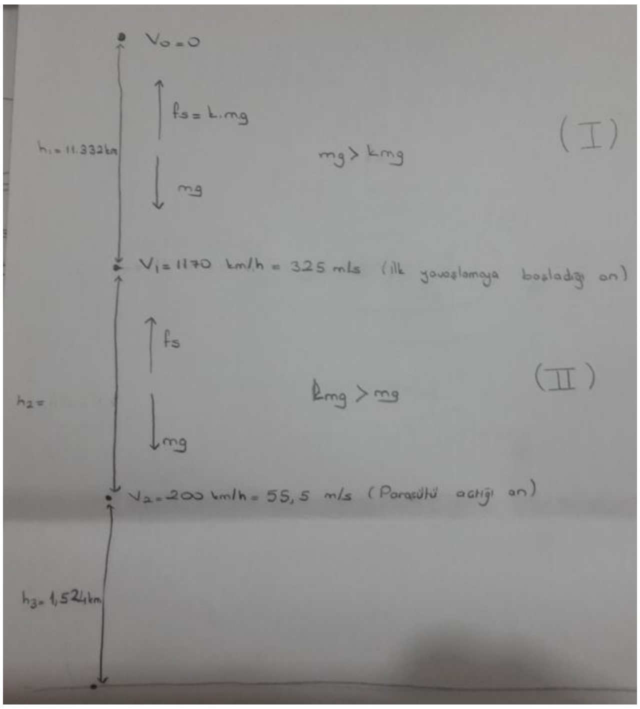
Gerçek yaşam problem durumunun modelinin elde edilmesi için çözüm için gerekli olduğu düşünülen veriler değişkenler, sabitler ve parametreler ve gerçek yaşam durumu dikkate alınarak kendi arasında gruplandırılmıştır. Bu durum oluşturulacak Y/AMMlerin şekillenmesi için uygun ortam hazırlamıştır.

G_2'nin Tiyatro Problemi çözümünde gerekli yardımcı matematiksel modelleri belirlemeden önce stratejik etkenleri kendi aralarında gruplandırdıkları ve çözüme ulaşmak için öncelikle fiyat ile karı karşılaştırdıkları görülmüştür. Buradan hareketle ileriki aşamada matematikselleştirme yapılarak bu gruplanan stratejik etkenlerden oluşan yardımcı matematiksel modeller netleşmiştir. Ama öğrencilerin 2. Temel basamakta stratejik etkenleri gruplandırmalarının temel nedeni, çözüm için genel çözüm stratejini tasarlayarak gerekli sistematik yapıyı kurmak ve gerçek yaşama durumun modeline ulaşmaktır. Bu aşamada etkili gerçekleştirilmiş gruplandırmalar ileriki aşamada sürecin daha etkili ilerlemesine olanak sağlamıştır.

Ela: Fiyat ve kar şeklinde yazarız.
Masal: Evet. Karşılaştıralım o ikisini
Mete: Onu mu alacağız? Dikkatli düşünelim bak. Fiyat ile karı yapacağız önce. Sonra da denklemi bulacağız o zaman. Bu denklemde elde etmemiz gereken de bizim bu y *(kar)* olacak. İstediğimiz karı bulacağız. Oradan bilet fiyatını bulacağız. Bilet fiyatını da bu denklemde yazıp gelen kişi sayısını tahmini olarak bulacağız. Dimi?
Ela: Aynen

G_2'nin Düşme Problemi çözümünde, gerçek yaşam problem durumunun modeli oluşturulurken stratejik etkenler üç ana grupta dikkate alınmıştır. Yani üç ayrı kısımda üç ayrı ivme, hız ve yükseklik değişkeni dikkate alınarak çözüm süreci sürdürülmüştür. Stratejik etkenlerdeki bu gruplandırma, Matematikselleştirme'de değişken, sabit ve parametrelerin matematiksel gösterimlerini de etkilemiştir.

Örneğin G_2, oluşturdukları durum modeline göre ilk kısımdaki yükseklik değişkeni için Matematikselleştirme'de h_1 ifadesini kullanmıştır.

Mete:	Evet. Yavaşlamaya başladığı şeyleri yazalım. V_0 eşittir sıfır yazalım. Km bölü saat.
Ela:	Yüksekliklerini yazalım.
Mete:	Evet. Buradan çizgi çekelim.
Masal:	Tamam. h_1 ne kadar?
Mete:	11 nokta 332 km.
Kağıt Alıntısı	
Masal:	Hızı neydi?
Mete:	1170.

B_4. Üst Düzey Varsayımlarda Bulunma

Gerçek yaşam durumuna uygun bir matematiksel yapı oluşturmak için, verilen video, animasyon, fotoğraflar ve gerçek yaşam deneyimleri doğrultusunda problem durumuna ilişkin varsayımlar yapılmıştır. Ardından varsayımlar arasında karşılaştırmalar yapılarak, önceden belirlenmiş basit varsayımlardaki yanlışlıklar veya eksiklikler giderilmiştir. Uzlaşılan varsayımlar doğrultusunda çözüm için gerçek yaşam durumunun modeli yapılandırılmıştır. Süreçte üst düzey varsayımlar iki türdür. İlki, ideal bir matematiksel sistemin kurulmasına olanak sağlayan temel varsayımlardır. Bunlar genel çözüm stratejisini şekillendirmiştir. Diğeri ise, modelleme sürecinin sonlarına doğru var olan modelin geliştirilmesi ve yorumlanması için ortaya atılan varsayımlardır ve gerçek yaşam durumundaki daha özel durumları veya farklı çözüm stratejilerini etkilemiştir.

G_4'ün Köprü Problemi çözümünde öğrenciler köprünün uzunluğunu bulurlarken, fotoğraftaki köprünün ayaklarının gölgesinden hareketle köprünün ayaklarını belirleme yoluna gitmişlerdir. G_4 çözümde bu üst düzey varsayımıyla hareket ederek gerçek yaşam çözümlerini elde etmiştir.

Celal: Bakın zaten resimde köprünün direğinin hafif bir gölgesi var farkındaysanız. Tam şu siyah kısım. Bak şöyle.

Video Alıntısı

Ayla: Hıhı.

Dila: Nereye? Buraya mı koyacağız?

Video Alıntısı

Celal: Evet. Şu uç kısım alt kısımlarını dikkate alarak belirleyebiliriz.

G_4'ün Köprü Problemi çözümünde öğrenciler köprünün genişliğini bulurlarken, çözüm için seçtikleri fotoğraftan çok tatmin olmadıklarını ve belli bir açıyla çekildiğinden dolayı da çözümün biraz farklı çıkabileceğini ifade etmişlerdir. Fakat daha iyi bir video alıntısı ve fotoğraf olmadığını düşündüklerinden dolayı çözüm için daha iyi ve yaklaşık bir değere bu fotoğraf ile ulaşabileceklerini düşünmüşlerdir. Dila da çözüm için fotoğraftaki düze siyah çizgiyi dikkate alırlarsa sonuçlarının hatalı olmayacağını ifade ederek üst düzey varsayımının gerekçesini bu yönde ifade etmiştir.

Dila: Şu fotoğraf keşke düz çekilseymiş.

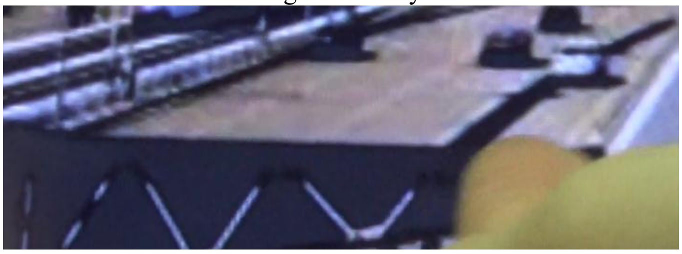
Ayla: Evet. Öyle çok daha rahat olurdu. Belli bir açıyla çekildiği için. Biraz değişik çıkacak sonuç sanki mantıken *(Fotoğrafı inceliyorlar).*

.

.

Dila: Ayla yazarken ayrıntılı yaz. Ölçeği kullandık resimdeki diye *(Ayla bu sırada temize geçiyor.).* Bu arada aslında var ya bir şu resimde artık şu uzunluğu biliyoruz *(Sağdan giden 4 şeritlik yolu kastediyor.).* Şurayı da *(trenin genişliği)* şuna göre *(4 şeritlik yol)* oranlayarak bulabiliriz. Çünkü burası düz bir çizgi gibi zaten ya. Sonucumuz hatalı olmaz buradan alırsak. Noktaları gene belirleyelim isterseniz biz.

Video Alıntısı



G_2'nin Düşme Problemi çözümünde öğrenciler yer çekimi ivmesini incelerlerken, yer çekimi ivmesinin nasıl değişeceği ile ilgili varsayımlarda bulunmuşlardır. Bu doğrultuda hem gerçek yaşam deneyimlerinden yararlandıkları hem de videodaki verileri dikkate aldıkları görülmüştür. Örneğin, Ela yer çekimi ivmesinin düşme boyunca sürekli olarak değiştiğini ve ancak ortalama bir değerden bahsedebileceklerini ifade etmiştir. Mete de yer çekimi için yaklaşık bir değer (9,8 m/s^2) ortaya atmıştır. Ela da bunun üzerine yeryüzünden çekirdeğe doğru yer çekimin azaldığını, yeryüzünden yukarı doğru da azaldığını ifade etmiştir. G_2'nin çözümünde Ela'nın söylediklerini ve Mete'nin yer çekimi ivmesi için 9,8'lik yaklaşık değerini dikkate aldığı ve ortalama bir yer çekimi ivmesi bulacağını düşündüğü görülmüştür.

Mete: Evet. g'yi 9.8 mi alalım?
Masal: Olur.
Mete: Ama değişiyor ya.
Ela: Bence değişiyor. Ortalama bir şey düşünebiliriz belki. 9,8 ortalama mı olur?
Mete: Merkezinde 10'muydu?
Ela: Yeryüzünde yaklaşık olarak 9,8 oluyordu sanırım.
Mete: Bu şeyden kaynaklanıyor normalde. Çekirdekten kaynaklanıyor.
Ela: Aslında yeryüzünde en fazla çekirdeğe gittikçe azalıyordu.
Masal: Uzaklıkla ivme doğru orantılı mı?
Ela: Yeryüzünden çekirdeğe kadar azalıyor yeryüzünden yukarı doğru da azalıyor.
Masal: En yüksek o zaman yeryüzünde mi oluyor?
Ela: Ben öyle biliyorum.

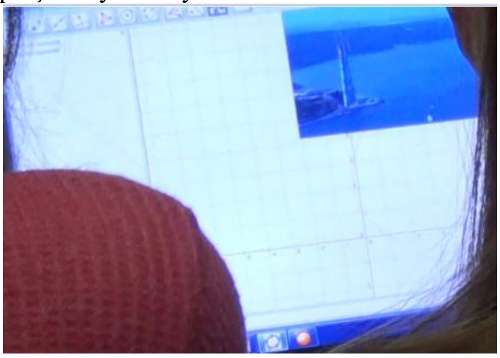
B_5. Deneyimlerden Yararlanma

Modelleme sürecinde gerçek yaşam durumunun bir modelini tasarlarken ve genel çözüm stratejisini planlarken öğrencilerin eski yaşantılarını ve önceki problem çözme deneyimlerini yeni problem durumu ile ilişkilendirmeye çalıştıkları görülmüştür. Problem önceden çözülen problemlerle karşılaştırılmış, var olan benzerlikler ve farklılıklar ortaya çıkarılarak genel çözüm stratejisi üretilmeye çalışılmıştır. Aynı zamanda da deneyimler doğrultusunda ortaya çıkan düşüncelerden problem çözme sürecinde yararlanılmıştır.

G_3'ün Köprü Problemi çözümünde, Sena genel çözüm stratejisini belirlerken daha önce çözmüş oldukları ve bu problemle benzer yapıda olduğunu düşündüğü Uzaklık Problemi'ndeki çözüm yollarını izleyebilecekleri ifade etmiş ve çözümde problem çözme deneyimlerinden yararlanmaya çalışmıştır.

Seray: Tamam. Şimdi ne yapıyorduk? Resim ekleden. Dosya neredeydi? Masaüstüne kaydetmiştim. Hah şu *(Aldıkları kesiti GeoGebra'ya eklediler.).* Hah şimdi biz bunun uzunluğunu bulacağız. Bunu doğru parçaları yardımıyla GeoGebra'da bulabiliriz. Uzunluğunu yani.

Video Alıntısı



Sena: Evet. Daha önce de yapmıştık ya. Uzaklık Problemi'nde de. Onun gibi çözebiliriz.

G_5'in Köprü Problemi çözümünde öğrenciler zihinsel modellerini GeoGebra'ya aktardıktan sonra eklemeyi düşündükleri fotoğrafı GeoGebra'da sabitlemeye çalışmışlardır. Bengi de Canan'ın Köşe 4'ü girip girmeyeceklerini sorması üzerine önceki problemde Köşe 4'ü yazmadıklarını ve yazdıklarında fotoğrafın şeklini (oranını) bozulduğunu ifade etmiştir. Yani Bengi deneyimleri doğrultusunda gerçek yaşam problem durumunun modellerinin doğru bir şekilde GeoGebra'ya aktarılmasını sağlamıştır.

Canan: Köşe 4'ü yazıyor muyduk?
Bülent: Sağ üst o da.
Canan: Evet. Alıyor muyduk?
Bülent: Kaç desek orayı?
Bengi: Onu önceki problemde yazmamıştık. Resmin şeklini bozuyordu.
Canan: Tamam. Yapmıyorduk onu. Şimdi de yapmayız o zaman.

B_6. Teknolojik ve Matematiksel Gösterim Arasında Geçiş Yapma

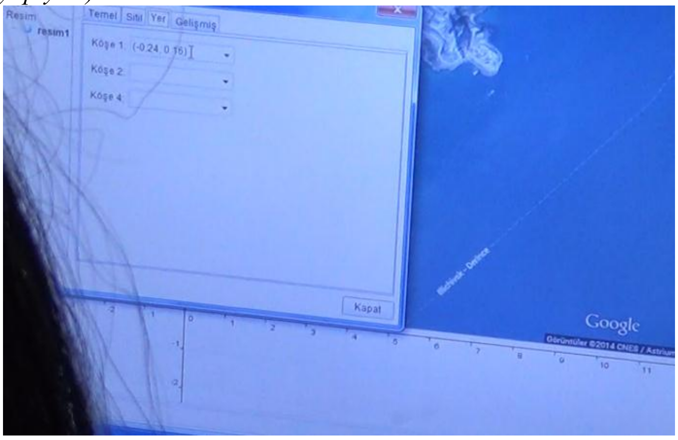
Öğrencilerin genel çözüm stratejisine bağlı olarak kullanmayı planladığı uygun teknolojik yapı gerçek yaşam durumunun zihinsel modeli yardımıyla bilgisayar ortamında oluşturulmuştur. Bilgisayar ortamında oluşturulmuş gerçek yaşam problem durumu modelinin bilgisayar yazılımına aktarılmasında çözüm için düşünülen matematiksel düşüncelerin (kavramlara, stratejilere ilişkin) etkili olduğu görülmüştür. Bu ise teknoloji tabanlı gösterim ile matematiksel gösterim arasında bağlantı kurmayı gerektirmiştir.

G_3'ün Köprü Problemi çözümünde öğrenciler GeoGebra'da çözümü nasıl ilerletebileceklere yönelik yaklaşımlarını açıklamışlardır. Bu aşamada onların matematiksel düşünceleri ve teknolojik düşünceleri arasındaki geçişler onların genel çözüm stratejilerini şekillendirmesinde etkili olmuştur. Örneğin, Ela'nın fotoğrafı GeoGebra'ya ekleyip iki nokta arasındaki uzaklığı kullanmayı düşünmesi, Mete'nin resmi belli bir oranda sabitlerlerken gerçek değer ve haritadaki değerin oranının (ölçeğin) kolay hesaplanabilecek bir değer olacak şekilde köşe noktalarını belirleyebileceklerini ifade etmesi onların Sistematik Yapıyı Kurma'da matematiksel gösterimlerle teknolojik gösterimler arasında geçişler yaptıklarını göstermiştir.

Mete: Tamam. Çizsek ya biz. Mesela GeoGebra'nın tabanına ekleyelim bu resmi.
Ela: Oradan iki nokta arasındaki uzaklığı buluruz.
Mete: Evet. Şuradan şuraya iki tane nokta belirleyerek ikinin arasındaki uzaklığı alsak?
Masal: Tamam.
Mete: Bunu şeye alalım o zaman. GeoGebra'ya *(Masal GeoGebra dosyasını açtı.).*
Ela: Resim ekle sağ tarafta sağ kutuda.
Masal: Hangisi bu mu?
Ela: Orada bir yerdeydi *(Fotoğrafı GeoGebra'ya yerleştirmeye çalışıyorlar.).*

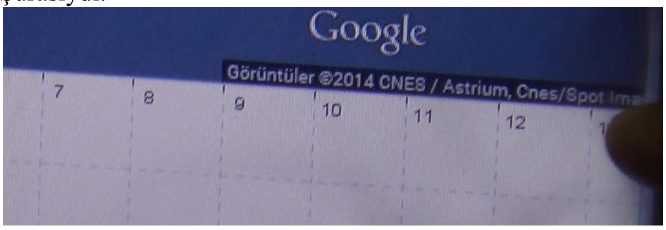
Mete: Hangi resimdi?
Masal: 2. resim. Şuradan taşıyalım biraz orijine doğru.
Mete: Şimdi koordinatlarını belirleyelim bence.
Ela: Sabitlememiz gerekiyor resmi.
Mete: Evet. Şeyden yapıyorduk onu. Sağı tıklasana bir.
Ela: Sağı tıklayıp özelliklerden yapıyorduk *(Masal o sırada söyleneni yapıyor.).*

Video Alıntısı



Mete: Şimdi oraya (Köşe 1'e) sıfıra sıfırı koyalım *(Masal yazıyor.).*
Ela: Köşe 2 neresiydi?
Mete: Şurasıydı.

Video Alıntısı



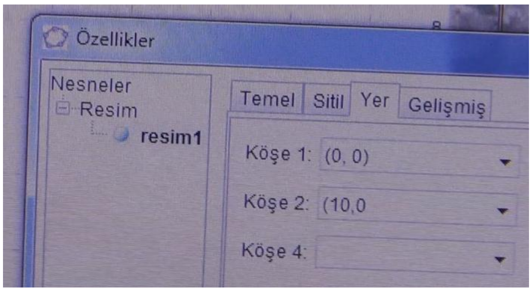
Ela: Hah doğru.
Masal Kaça yapalım?
Mete: 20 olsun 200'dü galiba ölçek orantılı olsun. Yani katı gibi olsun.
Masal: Köşe 4'ü de yapalım
Ela: Köşe 4'e gerek yok. Yaparsak resmin oranını bozarız.

G_2'nin Düşme Problemi çözümünde Masal resmi sabitlerken analitik düzleme köşe noktalarını sıralı ikili olarak girmeye çalışmıştır ve Köşe 2'yi (10,0) şeklinde girmesi gerekirken (0,10) şeklinde girmiştir. Bu durum onların matematiksel gösterim ve teknolojik gösterim arasında geçiş yaparken sorun yaşamasına sebep olmuştur. Fakat Ela bu durumu hemen fark ederek yapılan hatayı düzeltmiştir.

Masal: GeoGebra'yı açıyorum *(Fotoğrafı GeoGebra'ya ekliyorlar.).*
Ela: 2'yi koyalım. 2 daha iyi.
Masal: Evet *(Ekledi. Köşe noktaları belirlenip sabitleniyor.).*
Ela: Virgül koymadın sanırım. Ondan hata verdi *(Masal tekrar köşeleri giriyor.).* Köşe 2'yi de gir. Sabitlemez yoksa.
Masal: Ne alayım? 10 mu alayım?
Ela: 10 olsun *(Masal (0,10) şeklinde yanlış giriyor ilk başta).*
Masal: Köşe 2 hangisiydi ama?
Ela: Sağ alt. Yanlış yazdın.

Masal: Hah o zaman.

Video Alıntısı



3. Gerçek Yaşam Problem Durumunun Modeli

C. MATEMATİKSELLEŞTİRME

4. Yardımcı Matematiksel Modeller

C_1. YMMlerin Cebirsel veya Grafiksel Gösterimlerini Bulma

C_2. Bağımlı-bağımsız değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirleme

C_3. Stratejik etkenleri matematiksel sembollerle ifade etme

C_4. Stratejik etkenleri yorumlama, YMM'lere ilişkin ön tahminlerde bulunma

C_5. Teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma

C_6. Problemde verileri bulunmayan stratejik etkenlere yönelik sayısal tahminlerden ve ölçümlerden yararlanma

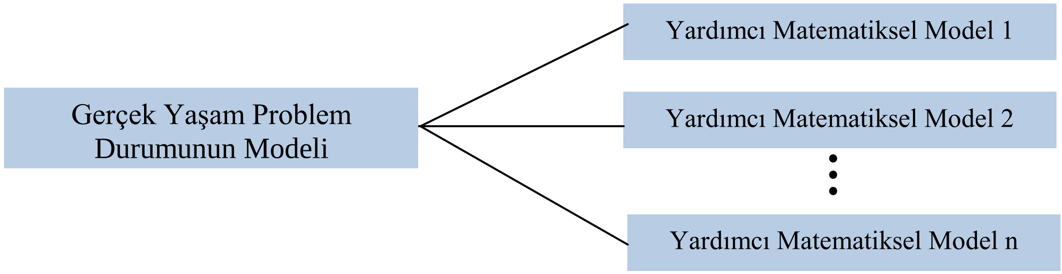
C_7. Üst düzey matematiksel ve teknolojik bilgiden yararlanma

C_8. Teknolojik ve matematiksel gösterim arasında geçiş yapma

Modelleme sürecinde gerçek yaşam problem durumunun modelini ortaya çıkaran öğrenciler sürecin devamında ana matematiksel modele ulaşmak için yardımcı matematiksel modeller oluşturmuşlardır. Bu basamak öğrencilerin matematiksel bilgiye ulaşma ve matematiksel bilgiyi bağımsız elde etme, matematiksel kavramları ilişkilendirme gibi üst düzey matematiksel becerilerine en çok ihtiyaç duydukları ve en çok zorlandıkları (diğeri Üst Matematikselleştirme) temel basamaklardan birisidir.

Matematikselleştirme'de öğrenciler, problem durumunun matematiksel bir çözümü için gerekli değişkenler arasındaki ilişkileri birden fazla matematiksel modelle ifade etmişlerdir. Bu matematiksel modeller problemin çözümü için yeterli olmasa da problemin ideal bir çözümü için gerekli matematiksel yapılar olmuşlardır.

Şekil 49. Matematikselleştirme'deki Temel Bileşenler Arasındaki İlişkiye Bakış



Modelleme sürecinde bu yardımcı matematiksel modeller karmaşık matematiksel modelleme sürecinin temel bileşenleri olarak karşımıza çıkmışlardır. Her matematiksel modelleme problemi için yardımcı matematiksel modeller oluşturmak gerekmese de (varsayımların yapısına ve problem durumunun az karmaşık oluşuna göre değişir.), günlük yaşam problemlerinin karmaşıklığı ve ideal modellerle gerçek sonuçlara ulaşma yaklaşımı öğrencileri yardımcı matematiksel modelleri oluşturmaya yöneltmişlerdir. Matematikselleştirme'de ortaya çıkan 8 alt basamak ve özellikleri incelendiğinde temel amaç, gerçek yaşam problem durumunun modelinden hareketle çözüm için gerekli YMMleri ortaya çıkarmaktır. Yani bu basamakta zihinsel modeller yardımıyla kurulan gerçek yaşam problem durumunun modeli yerini yardımcı matematiksel modellere [YMM] bırakmıştır.

C_1. YMM'lerin Cebirsel veya Grafiksel Gösterimlerini Bulma

Bu alt basamakta, öğrencilerin YMMlerin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini çözümde kullanmak üzere bulmaya çalıştıkları ve gerekirse de bu aşamada uygun teknolojiden yararlandıkları görülmüştür. YMMlerin idealliği, AMMnin idealliği için büyük önem taşıdığından dolayı YMMlerin oluşumunda en ideal stratejinin seçilmesi önemli olmuştur. Bu doğrultuda, öğrencilerin gerekirse ve yapabilirlerse sürece teknolojiyi de katmaya çalıştıkları, YMMlerin cebirsel ifadesini bulsalar da grafiksel gösterimlerini de buldukları (tam tersi de dahil), teknolojiden (GeoGebra yazılımı, video, animasyon ve fotoğraflar) yararlandıkları görülmüştür. Öğrenciler teknolojik ve matematiksel bilgilerinin de yardımıyla bu alt basamakta teknolojiyi ve matematiği ilişkilendirerek YMMleri ortaya çıkaracak en iyi çözüm yöntemini ortaya çıkarmışlardır.

G_4'ün Köprü Problemi çözümünde öğrenciler GeoGebra'ya ekledikleri fotoğraf yardımıyla köprünün uzunluğunu bulmaya çalışmışlardır. Köprünün ayaklarının hizasında C ve D noktalarını belirleyerek köprünün üzerinden geçen doğrunun hem matematiksel hem de grafiksel gösterimlerine GeoGebra'da ulaştıkları görülmüştür.

Celal: O zaman iki nokta koyacağız ilk önce *(C ve D noktaları belirlendi).* Doğruyu çizelim ilk önce köprünün üzerindeki.

GeoGebra Alıntısı

bağımlı nesneler
c: 4.94x + 8.44y = 116.81

Ayla: Doğru buymuş. Uzaklık nasıl?

Celal: Uzaklık 9,78 çıktı.

GeoGebra Alıntısı

Serbest nesneler
A = (28.15, 0.09)
B = (29.53, 0.1)
C = (8.27, 9)
D = (16.72, 4.06)
bağımlı nesneler
a = 1.39
b = 9.78
c: 4.94x + 8.44y = 116.81

G_3'ün Tiyatro Problemi çözümünde öğrenciler fiyat ve kar arasındaki ilişkiyi (ana matematiksel model) bulurlarken öncelikle ilk yardımcı matematiksel modeli bilet fiyatı (x) ve biletli sayısı (y) arasındaki ilişkiyi GeoGebra'daki en iyi yaklaştırma doğrusu yardımıyla belirledikleri görülmüştür. Daha sonra karın genel formülünü z kar, x bilet fiyatı, y biletli sayısı, gider sabit ve 5000 TL olarak şekilde düşünmüşler ve matematiksel olarak z=x.y – 5000 şeklinde yazmışlardır. Yani G_3 çözümde 1. yardımcı matematiksel modellerinin grafiksel ve cebirsel gösterimine, diğer yardımcı matematiksel modellerinin ise cebirsel gösterimine ulaşmışlardır. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

> (…Tablo 1'deki verileri kullanarak bilet fiyatı x biletli sayısı y olacak şekilde verilerini GeoGebra'ya girdiler… Seray noktaların doğru boyunca ilerlediğini söyledi… Sena en iyi yaklaştırma doğrusunu kullanmayı teklif etti. Bilet fiyatı ve biletli sayısını arasındaki ilişkiyi veren 1. yardımcı matematiksel modelin grafiksel ve cebirsel ifadesini GeoGebra'dan buldular… Kar = Gelir – Gider yaklaşımıyla 2. yardımcı matematiksel modellerini oluşturdular. z=xy-5000 şeklinde matematiksel olarak ifade ettiler… Gözlem notu: G_3 Tiyatro Problemi)

C_2. Bağımlı-Bağımsız Değişkenleri, Sabitleri ve Parametreleri Belirleme

Bu alt basamakta öğrenciler çözümün başlarında gruplandırdıkları gerekli olduğunu düşündükleri verileri ve tasarladıkları genel çözüm stratejisi yardımıyla, oluşturacakları YMMler için gerekli bağımlı-bağımsız değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirlemişlerdir. Bu doğrultuda gerekli YMMlerin içerecekleri değişkenlerin, sabitlerin ve parametrelerin şekillendiği ve YMMlerin oluşturulması için de çözümde uygulamaya geçildiği görülmüştür.

G_2'nin Düşme Problemi çözümünde, öğrenciler çözüm için önemli olduğunu düşündükleri değişkenleri matematiksel sembollerle de ifade ederek belirlemeye çalıştıkları görülmüştür. Aynı zamanda gerekli olduğunu düşündükleri Fizik formüllerinin de onlara YMMleri oluştururken gerekecek değişken, sabit ve parametreler hakkında bilgi verdiği görülmüştür. Aynı zamanda öğrencilerin bu aşamada hangi stratejik etkenlerin değişken hangilerinin sabit olduğunu açıklamaya başladığı görülmüştür.

Ela: Değişkenleri alalım bir. Elimizde değişken olarak neler var?
Mete: Şimdi aşağıya doğru bir ivme g var değil mi? F *(sürtünme kuvvetini*

	kastediyor.) de yukarıya doğru bir etki yapıyor. k olsun o da *(sürtünme kuvvetinin ivmeye olan negatif etkisine k diyor.).*
Masal:	Hıhı.
Mete:	Buradan bir şey çıkar mı? Sürtünme neydi ya? kmg miydi?
Masal:	Evet. kmg.
Ela:	Adamın ağırlığı da önemli değil mi? Sürtünmeyi mi düşüneceğiz?
Mete:	k sabit burada. Yok işte. O değişiyor aslında. Bize onu *(sürtünme kuvveti)* soruyor anladın mı? Buraları atmosfer ya. Yukarı çıktıkça hava azalıyor
Masal:	Evet.
Mete:	Hava azalınca sürtünme azalıyor. Buraya doğru *(hızlandığı kısım)* g var ve hızlanıyor. k.m.g eşittir m.a yazarsak? Nasıl fikir sizce?
Ela:	kmg'yi ma'ya mı eşitledik?

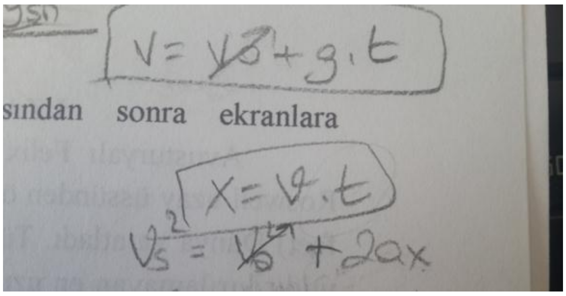
C_3. Stratejik Etkenleri Matematiksel Sembollerle İfade Etme

Öğrenciler YMMleri oluşturacak değişken, sabit ve parametre gibi stratejik etkenleri uygun matematiksel sembollerle ifade etmişlerdir. Bu alt basamakta öğrencilerin matematiksel sembolleri yerinde kullanmaması (farklı değişken, sabit ve parametrelere aynı matematiksel sembollerin verilmesi) çözüm sürecinin daha da karmaşık bir yapıya dönüşmesine neden olmuştur. Çözümün anlaşılırlığını sağlamak ve YMM için gerekli stratejik etkenlerin arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmek için matematiksel semboller büyük önem taşımıştır. Bu alt basamak Matematikselleştirme temel basamağının ortaya çıktığını gösteren en belirgin bilişsel eylemlerden birisi olmuştur.

G_1'in Düşme Problemi çözümünde, öğrenciler formüllerden hareket değişkenlerin matematiksel gösterimlerini dikkate alarak yorumlarını yaptıklarını görülmüştür. Özellikle formüllerde V_{ilk} ve V_{son} arasındaki ayrımın dikkate alındığı ve onların farklı hızları tanımladığı öğrenciler tarafından önemsendiği görülmüştür.

Demet:	x eşittir V çarpı t.
Selen:	İvme formülü neydi? V_{son} ve V_{ilk}'li bir şey vardı formüllerde.
Defne:	Evet. Şey neydi ya o? Bir formül vardı ya. 2ax'li bir şey vardı. Şöyle miydi? Şöyle olabilir V_{son}'un karesi eşittir V_0'ın karesi artı 2ax oluyor. Tamam. İlk hızımız zaten sıfır. Biz son hız olarak 1160 mı kullanacağız şimdi?

Kağıt Alıntısı



C_4. Stratejik Etkenleri Yorumlama, YMM’lere İlişkin Ön Tahminlerde Bulunma

Öğrenciler YMMlere ulaşmaya çalışırken YMM için gerekli değişkenlere, sabitlere ve parametrelere ilişkin verilerini ayrıntılı olarak incelemişler, bilgileriyle ve günlük yaşam deneyimleriyle bunları yorumlamışlardır. Deneyimler ve eldeki veriler, ele alınan stratejik etkenler arasındaki ilişkileri yorumlamada ve YMMler ile ilgili ön tahminler yapmada kullanılmıştır.

G_3’ün Tiyatro Problemi çözümünde, öğrenciler 1. yardımcı matematiksel modele ulaştıktan sonra 2. yardımcı matematiksel modele ulaşmadan önce söz konusu YMMyi oluşturacak önemli değişkenler, sabitler ve parametreler hakkında yorumlarda bulunmuşlardır. Örneğin Seray verilerden hareketle en iyi kar için bilet fiyatının 25 TL’den daha büyük olmasının daha uygun olacağını ve aynı bilet fiyatının olduğu illerde ise biletli sayısında çok fazla bir farklılık olmadığını ifade etmiştir.

Kumsal: Tümü için mesela x çarpı y eksi 5000 mi olur?
Seray: Evet. Bunla bunun çarpımından 5000 çıkarırsak bizim maliyet *(kar demek istiyor.)* fonksiyonumuz olur. Pardon kazancımız olur.
Kumsal: Hayır buradan.
Seray: Tamam işte.
Sena: Ne olur peki?
Kumsal: İşte xy eksi 5000.
Seray: Hıhı. Mesela biri için bakalım. İzmir için mesela. 40 çarpı 289. Şimdi İzmir mesela 11560 çıktı. Bunun 5000’ini çıkarırsak yaklaşık 6 bin küsur yapıyor. 6560 kazancımız var bizim. Aydın için de bulalım. Yaklaşık Aydın için de diyelim. 32 çarpı 345. Öbürü kaçtı ilki *(İzmir)*?
Kumsal: 6560’dı o.
Seray: Bu da 6040’mış *(Seray kağıda not alıyor bunları.)*. Bak burada mesela bilet fiyatını düşürünce kişi sayısı artmış. Mesela daha da düşürelim. Mesela 25 çarpı 420.
Kumsal: 5500.

Seray: Burada da bilet fiyatını çok fazla düşürdüğü için kişi sayısı artmış. Ama olmamış. Demek ki 25 TL'den büyük bir değer belirlememiz lazım.
Sena: Mesela en büyük ne var orada? 45 mi var?
Seray: Evet. Bir de 45'i deneyelim. 45 çarpı 262.
Kumsal: Evet o. Ankara.
Seray: Mesela 40 lira diyenlere baktığımızda. Buna *(Eskişehir)* 283 kişi gelmiş. Buna *(İzmir)* ise 289 kişi gelmiş. Çok fazla kişi oynamıyor arasında aynı fiyatlarda.
Sena: Evet.
Kumsal: Bak. Şunda *(Bursa)* daha yüksek çıktı. 6790 çıktı. En yüksek bunda *(Ankara)* çıkacak ama.

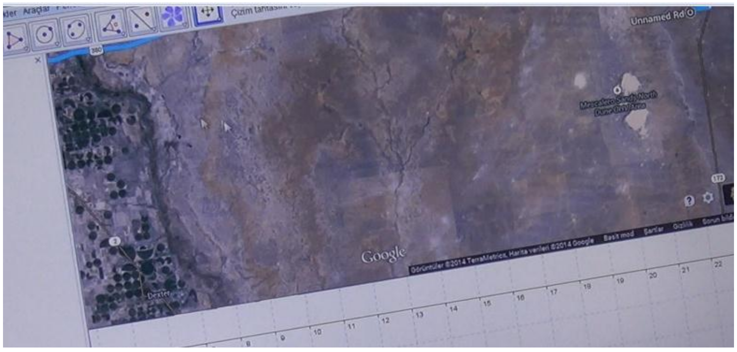
C_5. Teknolojinin Görsel Olanaklarından Yararlanma

YMMlerin oluşturulmasında öğrenciler teknolojinin sağladığı görsellikten ve avantajlardan yararlanmışlardır. Bu doğrultuda YMMlerin kritik noktaları ve YMMler arasındaki farklılıkların daha net bir şekilde görülebilmesi için GeoGebra'da renklendirme, isimlendirme, o an için gereksiz noktaları gizleme, kalınlaştırma ve yakınlaşıp uzaklaşma vb. fonksiyonlar kullanılmıştır. Teknoloji bu anlamda hem işlemsel hem de bilişsel yükü hafifletici bir rol oynamıştır.

G_6'nın Düşme Problemi çözümünde, öğrenciler seçtikleri fotoğrafı GeoGebra ekranına attıktan sonra küçültme, uzaklaştırma yaparak teknolojinin imkanlarından yararlanarak fotoğrafı daha ayrıntılı inceleme imkanı bulmuşlardır. Burcu *"resmi küçültmemiz lazım"* diyerek fotoğrafın her bir kısmını aynı anda görebilmeyi istemiştir. Aynı zamanda Burcu sağ alt köşe için koordinatları girerken GeoGebra'dan yararlanmışlardır ve Geogebra'da fotoğrafı sabitleyerek yakınlaşma ve uzaklaşma yaptıklarında fotoğraftaki oranın değişmesini ve çizimlerinin kaymasını engellemişlerdir.

Yavuz: Şunu GeoGebra'ya koysak mı ki bir? Bu soru kolay olacak da.
Burcu: Evet. İkinci resimdi herhalde *(GeoGebra'ya fotoğraf ekleniyor.)*.

Video Alıntısı



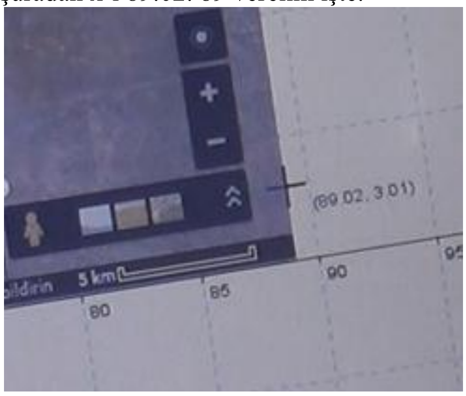
Yavuz: Ekranı küçült istersen. Biraz uzaklaştır.

Burcu: Resim sabitlenmedi daha *(Köşe 1'i girdi sadece.).* Resmi küçültmemiz lazım biraz daha. Köşeleri aslında şey ayarlayabilsek güzel olacak ama Köşe 1 sıfıra sıfır dedik.

Yavuz: Köşe 2'yi de ekleyelim

Burcu: Kaç desek mantıklı Köşe 2'ye? Rakamlar daha güzel çıkar. Bak şuradan x'i 89.02. 89 verelim işte.

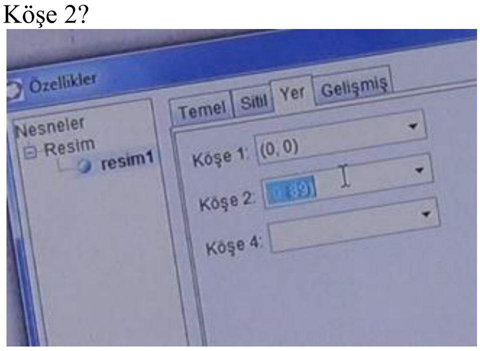
Video Alıntısı



Yavuz: Tamam de.

Burcu: Sıfıra 89 mu? 89'a sıfır mı? Sıfıra 89 girdim *(Hatalı girdi.).* Nereye kaçtı bu resim? Ne oldu böyle? Köşe 2'yi mi yanlış girdim? Neresiydi Köşe 2?

Video Alıntısı



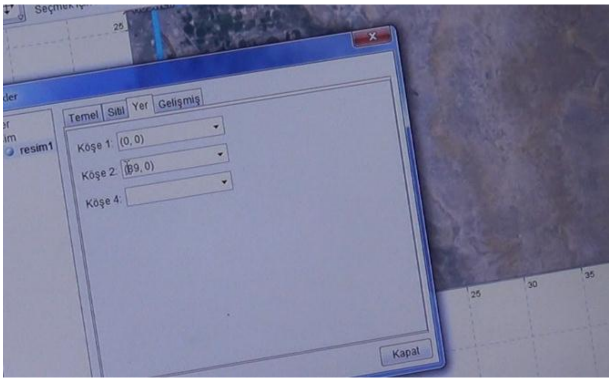
Yavuz: Sağ alt.

Burcu: Doğru değil mi işte? Köşe 4 müydü yoksa?

Yavuz: 89'a 0 olacak.

Burcu: Haaa. Doğru ya. 89'a 0. Hah oldu. Oldu bu sefer sabitledik. Nesneyi sabitle de yaptım.

Video Alıntısı



C_6. Problemde Verileri Bulunmayan Stratejik Etkenlere Yönelik Sayısal Tahmin ve Ölçümlerden Yararlanma

Modelleme problemlerinde problem ifadesinde, çözüm için gerekli her stratejik etkene ilişkin gerçek yaşam verileri bulunmayabilmektedir. Öğrenciler de YMMlerde kullanacağı ve önemli olduğunu düşündükleri fakat problemde verilerine ulaşamadıkları stratejik etkenlere ilişkin verileri kendilerinin oluşturmuştur. Bu anlamda öğrencilerin mevcut ortamdaki fırsatları kullanmaya çalıştıkları (A4 kağıdından yararlanma, kalem kullanma, karış uzunluğundan yararlanma, interneti kullanma gibi) ve günlük yaşamdaki deneyimlerini kıstas alarak yaklaşık sayısal tahminlerde bulundukları görülmüştür.

G_4'ün Köprü Problemi çözümünde öncelikle şerit genişliği ile ilgili olarak karayolu için 3 metre otoyollar için de 3,5 metre tahmininde bulunmuştur. Daha sonra internetten otoyollar için 3,75 metre yazdığını ifade etmiştir ama öğrenciler çözümde tahminleri olan 3,5 metreyi kullanmışlardır. Gene internetten G_4 problem ifadesinde ulaşamadıkları emniyet şeridi genişliğine internetten bakmışlar ve ilk başta bu genişliği 2,75 metre olarak almışlardır. Celal de önce bu değerin tahminiyle karşılaştırmış ve mantıklı olduğunu ifade etmiştir. Ama sonrasında G_4 çözümlerde de kolaylık sağlaması açısından fotoğraf ve videolara da bakarak çözümde emniyet şeridi genişliğini 3 metre olarak almıştır.

Celal: Karayolları 3 metre. Otoyollar 3,5 metre.
Dila: Genişliği mi? Yanlış olmasın da.
Celal Evet.
Dila: Otoban mı peki? Heh otoyol tamam.

Celal: Bir site otoyollarda şerit genişliği asgari 3.75 metre diyor *(Telefondan baktı.)*.
Dila: Aferin. Tamam. 3,5 alalım işte.
Ayla: Evet.
Celal: 3,5 alalım.
Ayla: Tamam. 8 ile çarpacağız.
Dila: Şeye de baksan? Emniyet şeridi genelde ne kadar?
Celal: Tamam. Emniyet şeridi genişliği.
Dila: Raporu da bir yerden yazmamız lazım bizim.
Ayla: Evet. Yazalım.
Dila: Kaçıncı şekildi bu kullandığımız ilkinde?
Ayla: Şekil 2.
Dila: O zaman ayrıntılı yazalım. Şekil 2'yi GeoGebra'ya attık diye.
Ayla: Tamam.
Dila: Sen bulabildin emniyet genişliğini?
Celal: Emniyet alanı yazıyor. Trafiğe açık alanlarda emniyet şeridi en az 2,75 metredir diyor.
Dila: 2,75 alalım.
Celal: Evet. En az 2,75 diyor.
Ayla: En az 2,75?
Celal: Evet. Çünkü emniyet şeridinden de gerektiğinde otomobil geçmesi lazım ya.

.
.
.

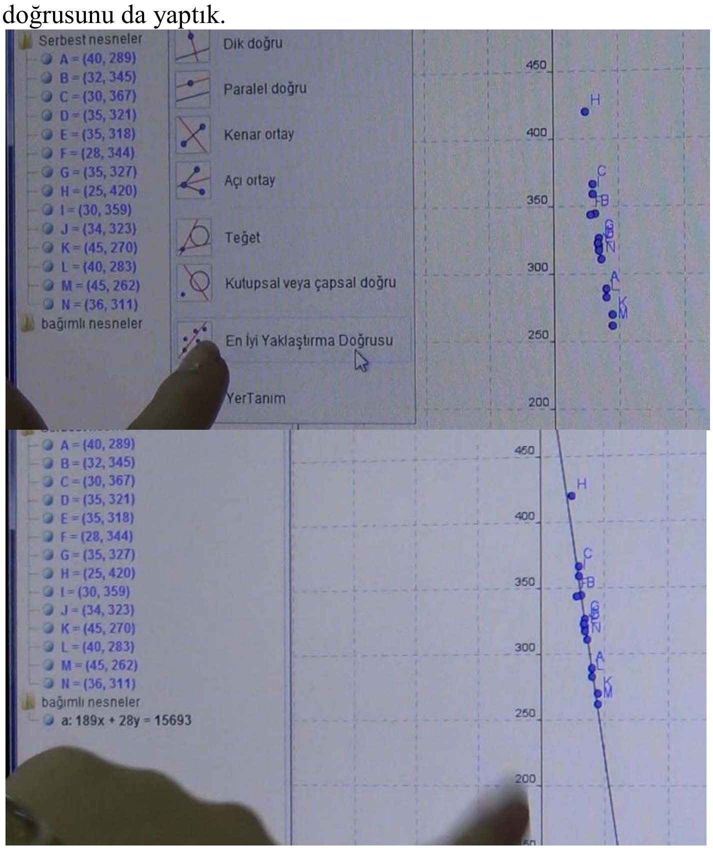
Celal: Tamam. Oran bir araba genişliği 3 metreydi.
Ayla: 3'müydü 3,75 miydi?
Celal: 3,5.
Dila: Maksimum 3,75'di
Celal: Minimum 3,5 metre.
Dila: Ne yapalım? 3,5 almayalım mı? Tamam. Neyse biz önce şu noktadan şu noktaya. 4 çarpı 3,5'dan 14 metre gelecek. Sonra 14 artı 2.75 diyeceğiz. Çünkü şurada emniyet şeridi de var.
Video Alıntısı

Celal: Orayı 3 metre alalım. Çünkü en az 2,75. Ya da 3 alalım direk.
Dila: Tamam. 3 alalım. 17 olacak yani şu arası. Tamam. İki nokta arasındaki uzaklıktan şurasını bulduktan sonra tren raylarını da oradan belirleyelim. Vakit kaybetmeyelim.

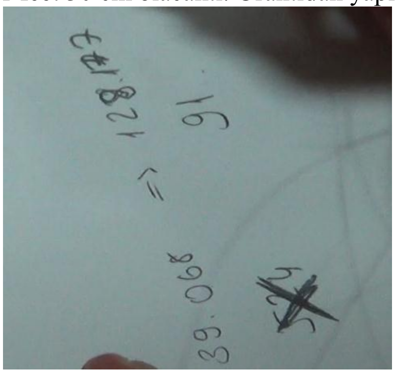
C_7. Üst Düzey Matematiksel ve Teknolojik Bilgilerden Yararlanma

Öğrenciler gerekli matematiksel ve teknolojik bilgilerini hem çözüm yöntemlerini belirlerken hem de YMMler için uygun matematiksel ifadeleri bulurken kullanmışlardır. Öğrenciler çözümde gerekli üst düzey bilgiye, matematiksel ve teknolojik becerilere sahip olmadığında istenilen düzeyde çözümü ilerletememişlerdir. Gerekli matematiksel bilgiler de modelleme probleminin zorluğunu ortaya çıkaran göstergelerden biri olmuştur. Bunun yanında teknolojik bilgiler de matematiksel bilgilerdeki eksiklikleri veya zorlukları ortadan kaldırıcı bir rol oynamıştır.

G_3'ün Köprü Problem çözümünde, öğrenciler bilet fiyatı x, biletli sayısı y olacak şekilde Tablo 1'deki verileri sıralı ikili olarak GeoGebra'ya girmişlerdir. Sonrasında Seray bu noktalardan geçen en iyi yaklaştırma doğrusunu kullanmayı teklif etmiş; bilet fiyatı ve biletli sayısı arasındaki ilişkiyi ortaya çıkaracak teknolojik bilgiden yararlanmıştır. Kumsal da noktaların zaten doğru boyunca hareket ettiğini ifade ederek matematiksel olarak çözümü doğru yaptıklarını ifade etmiştir.

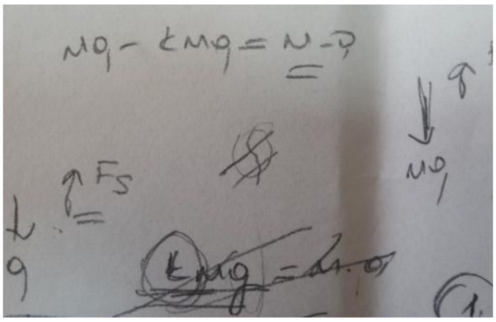
Kumsal	Kare içine alıyorduk dimi bunları *(Seray en iyi yaklaştırma doğrusunda yapmaya çalışıyor.)*?
Seray	Hıhı. Şimdi biz noktalarımızı belirledik. Sonra en iyi yakınlaştırma doğrusunu da yaptık.
Video Alıntısı	
Kumsal	Noktalar da doğrusal zaten. Hani eğrisel değil. Doğru oldu bence de.
Seray	Doğrusala yakın noktalar. Evet. Bir denklem elde ettik o zaman bu denkleme göre.

G_2 Düşme Problemi çözümünde, öğrenciler çözüm için gerekli YMMlerdeki stratejik etkenlere ilişkin verileri videolardan hareketle bulmuşlardır. Ama düşme verilerini elde ederken öğrencilerin hız verilerini mil/s'den km/s'ye, alınan yol verilerini ise feet’den km’ye çevirmeleri gerekmiştir. Bunun için de öğrencilerin matematiksel bilgilerinden yararlandıkları görülmüştür. Bu dönüşümü dikkate almadıklarında ise öğrenciler Matematiksel Analiz’de matematiksel çözüm ve sonuçlara ulaşmada sorun yaşamışlardır.

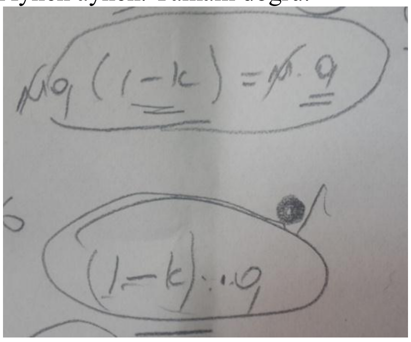
Masal	835 oldu.
Mete	Yüksekliği bulmamız lazım. Biraz geri sar bak.
Masal	Geri mi alayım?
Mete	46 oldu bak bir yerde.
Ela	47 oldu.
Masal	47 oldu.
Ela	47’de yüksekliğe bakmadınız. O anda durdursanız ya bir.
Mete	Yaklaşık 91000 feet. Bilgisayardan ya da telefondan bunların km ve km/s karşılıklarını bulalım. 844 mil kaça geliyor mesela.
Video Alıntısı	
Ela	Bu hızı da mil cinsinden mi?
Mete	Evet. Yükseklik de feet cinsinden.
Ela	Tamam. O zaman da biz bunları metreye mi çevireceğiz?
Mete	Evet. Şimdi 524 burası.
Masal	Orası 1524 olacak metre.
Mete	Tamam 1524.
Ela	Burada metre değil feet olarak vermiş.
Masal	1 feet 30 cm olacaktı. Orantıdan yapıyoruz.
Kağıt Alıntısı	
Ela	Tamam.

G_2’nin Düşme Problemi çözümünde, Mete düşme anında astronot hızlanırken ağırlığın sürtünme kuvvetinden daha büyük olacağını ifade etmiştir. Bunun da m.a’ya eşit olacağını vurgulamıştır. Buradan da a’yı yani düşmede hızlanırkenki ivmeyi (1-k)g olarak ifade etmişlerdir. Mete burada Fizik ve Matematik bilgilerini kullanarak yardımcı matematiksel modele ulaşmıştır.

Mete: Bu gelmez mi?
Masal: Evet.
Mete: Şimdi. Kesin emin miyiz bundan *(kmg'yi kastediyor.)*?
Masal: Evet canım. Öyle ya.
Mete: Yok ya. Gelmez ki oradan *(Düşündüğü şey ona mantıklı gelmedi o anda.).* Ya nasıl buluyorduk sürtünme kuvvetini onu hatırlayalım. Bu ne biliyor musun? Burada yanlış yaptık biz. Burada *(hızlanırken)* mg daha büyük yani m çarpı g eksi k m g eşitleyeceğiz m çarpı a. Anladın mı?
Kağıt Alıntısı



Masal: Aynen aynen. Tamam doğru.
Kağıt Alıntısı



Mete: Şimdi. Buradan mg parantezine alsak. Eşittir m çarpı a. Bu adam burada tamam mı? Bu ivmeyle hızlanıyor. (1-k) çarpı g ivmesiyle hızlanıyor bu adam. Değil mi?
Masal: Evet.

C_8. Teknolojik ve Matematiksel Gösterim Arasında Geçiş Yapma

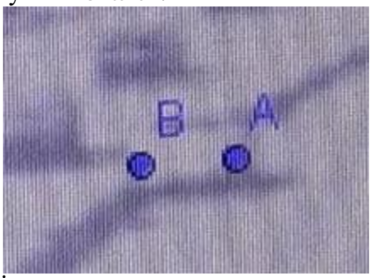
Matematiksel ve teknolojik gösterimler arasındaki ilişkiyi ve geçişi sağlayan öğrenciler çözümde teknolojiden etkili bir şekilde faydalanmışlardır. Matematik ve teknolojik gösterimleri ilişkilendiremeyen veya bu süreçte hatalı işlemler yapan öğrencilerin de Matematikselleştirme'de ve ileriki aşamalarda teknoloji ile desteklenmiş çözümlerinde zorluklar yaşamışlardır. Bu durumda matematiksel ve teknolojik sonuçlarda uyumsuzluklar ortaya çıkmıştır.

G_6'nın Köprü Problemi çözümünde, Yavuz seçtikleri fotoğrafın çekim açısından dolayı arabanın genişliğini verecek noktaları tekrar belirlemek istemiştir.

Yani Yavuz fotoğrafın derinliğinden dolayı GeoGebra'daki ilk belirledikleri noktaların matematiksel çözüme ulaşmada sorun çıkarabileceğini düşünmüştür.

Burcu: İyi mi noktalar?

Video Alıntısı



Yavuz : İyi gibi. Biraz daha yukarı al B'yi.

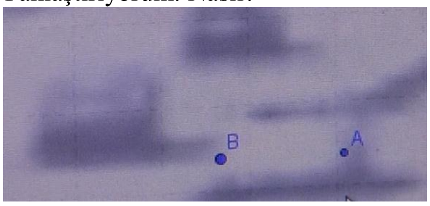
Burcu: Tamam.

Yavuz: Resmi iyice yaklaştırsak mı? Uzaktan alırsak hatalı olacak verdiğimiz noktalar *(Burcu B'yi tekrar belirliyor.).*

Video Alıntısı

Burcu: Yaklaştırıyorum. Nasıl?

Video Alıntısı



Yavuz: Biraz sol yap. Biraz da şunu sağa al tamam *(Noktaları net belirlemeye çalışıyorlar.).*

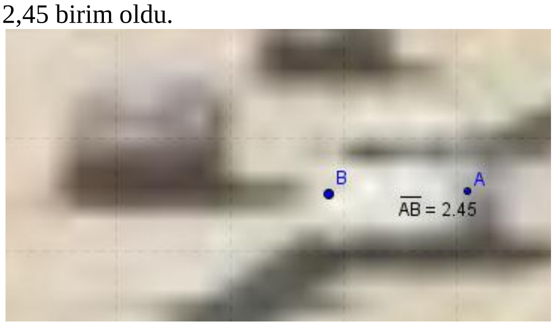
Burcu: Çok doğaçlama oldu. Yeter bence.

Yavuz: Bence de ya. Zaten yaklaşık bir değer bulamayacak mıyız?

Burcu: Ne oldu? 2,45 birim.

Yavuz: 2,45 birim oldu.

Video Alıntısı



4. Yardımcı Matematiksel Modeller

D. ÜST MATEMATİKSELLEŞTİRME

5. Ana Matematiksel Model

D_1. YMMlerin cebirsel gösterimlerinden yararlanma

D_2. Bağımlı-Bağımsız değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirleme

D_3. Teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma

D_4. Gerekli YMMleri belirleme

D_5. YMMlerin grafiksel gösterimlerinden yararlanma

D_6. YMMlerin yorumlanmasına olanak sağlayan teknolojik sistemi kurma

D_7. AMM için gerekli verileri YMMlerden elde etme

D_8. Stratejik etkenleri yorumlama ve AMMye ilişkin ön tahminlerde bulunma

D_9. Üst düzey matematiksel ve teknolojik bilgilerden yararlanma

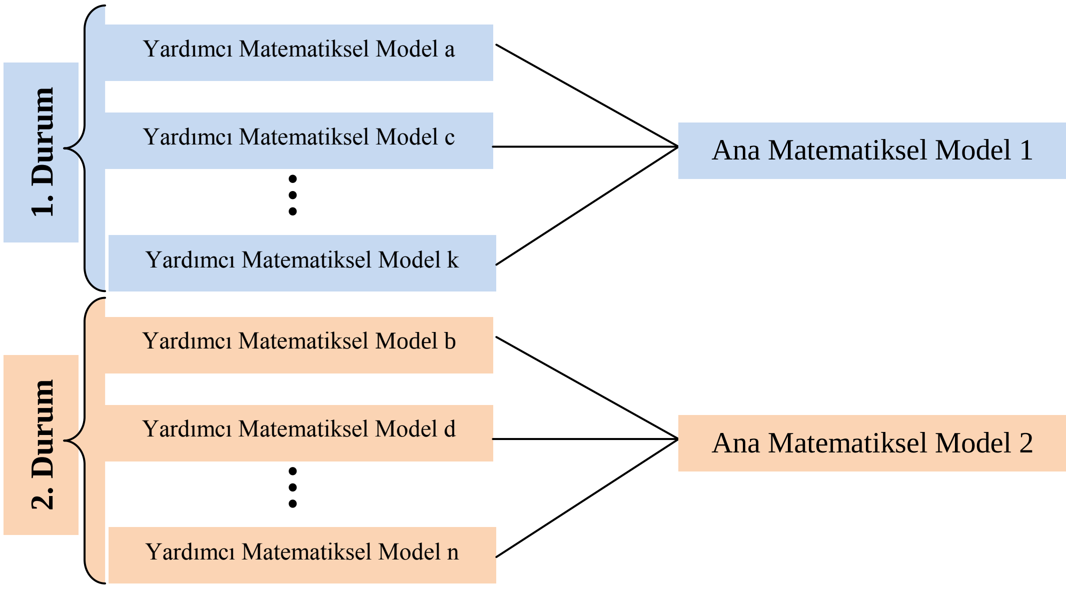
D_{10}. AMMnin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini bulma

D_{11}. Teknolojik ve matematiksel gösterim arasındaki geçiş yapma

Üst Matematikselleştirme'de temel amaç elde edilen YMMlerden yararlanarak gerekli AMMnin oluşturulmasıdır. Matematikselleştirme'de gerçek yaşam problem durumunun modeli doğrultusunda gruplandırılan değişkenler, sabitler veya parametreler arasındaki ilişki ortaya çıkarılarak YMMler elde edilmiştir. Üst matematikselleştirmede ise, bu YMMlerden yararlanılarak AMM ortaya çıkarılmıştır. YMMlerdeki ortak değişkenlerin dikkate alınması, YMMlerin cebirsel veya grafiksel gösterimlerinden yararlanılması, birçok değişken, sabit ve parametreyi içeren YMMlerden uygun AMMnin elde edilmesi gibi durumlar bu süreci matematikselleştirme basamağına göre daha zor hale getiren faktörlerden bazıları olmuştur. YMMlerin sayıca fazlalılığı, daha gerçekçi bir AMMye ulaşmak için önemli bir faktör olduğu kadar süreci de oldukça zorlaştıran bir durum olmuştur. Bu bağlamda, AMMyi bulmak için YMMler arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak, YMMleri oluşturmaktan daha karmaşık bir süreci içermiştir. Bu nedenle de söz konusu temel basamak için Üst Matematikselleştirme ifadesi kullanılmıştır.

Sistematik Yapıyı Kurma'da belirlenen üst düzey varsayımların Üst Matematikselleştirme'de AMMlerin sayısını ve yapısını etkilediği görülmüştür (bkz. Şekil 50). Bu doğrultuda öğrenciler çözümlerinde üst düzey varsayımlarında değişikliğe giderek aynı anda farklı AMMlere de ulaşmışlardır. Matematikselleştirme gibi bu temel basamak da öğrencilerin üst matematiksel becerilerine en çok ihtiyaç duydukları süreçlerden biri olmuştur.

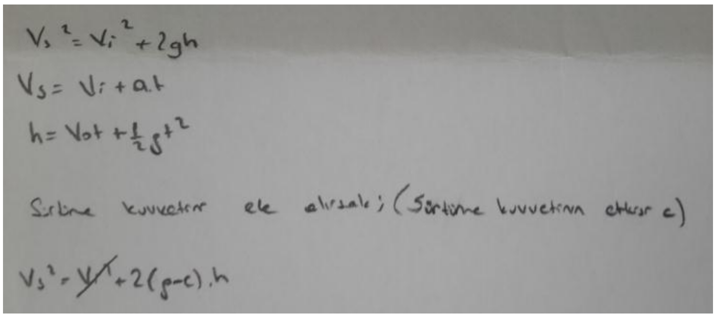
Şekil 50. Yardımcı Matematiksel Modeller ve Ana Matematiksel Model Arasındaki İlişki



D_1. AMMnin Cebirsel veya Grafiksel Gösterimlerini Bulma

Bu alt basamakta, öğrencilerin AMMnin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini çözümde kullanmak üzere bulmaya çalıştıkları ve gerekirse de bu aşamada uygun teknolojiden yararlandıkları görülmüştür. Matematikselleştirme basamağında ulaşılan YMMlerin AMMye ulaşmada nasıl kullanılması gerektiği hakkında düşünceler sergilenmiş; bu doğrultuda AMMnin grafiksel ve cebirsel gösterimlerine ulaşılmıştır. AMMnin idealliği, ulaşılacak matematiksel sonuçların idealliği için büyük önem taşıdığından dolayı AMMnin oluşumunda en ideal stratejinin seçilmesi ve YMMlerin uygun şekilde organize edilmesi önemli olmuştur. Bu doğrultuda, öğrencilerin gerekirse ve yapabilirlerse sürece teknolojiyi de katmaya çalıştıkları, AMMnin cebirsel ifadesini bulsalar da grafiksel gösterimlerini de bulmaya çalıştıkları (tam tersi de dahil), teknolojiden (GeoGebra yazılımı, video, animasyon ve fotoğraflar) nasıl yararlanmaları gerektiğini düşündükleri görülmüştür. Öğrenciler teknolojik ve matematiksel bilgilerinin de yardımıyla bu alt basamakta teknolojiyi ve matematiği ilişkilendirerek YMMleri ortaya çıkaracak en iyi yöntemi ortaya çıkarmışlardır.

G_6'nın Düşme Problemi çözümünde, öğrenciler Felix'in vücuduna etki eden sürtünme kuvvetini Felix'in hızı ve aldığı yolu cinsinden ifade ederlerken ortaya koydukları YMMlerin cebirsel ifadelerinden yararlanmışlardır. Bu doğrultuda ivmeyi g-c olarak ifade etmişler ve AMMnin cebirsel ifadesini $V_s^2= V_i^2+2(g-c)h$ şeklinde bulmuşlardır.

Yavuz:	O zaman biz ne dedik? Sürtünme ivmeyi azaltan ters yönde bir ivme yaratıyor değil mi?
Burcu:	Evet.
Yavuz:	Ona değer verelim formülde o zaman. g yerine.
Burcu:	Yazamıyoruz. Çünkü g eksi bir şey olmalı burada.
Yavuz:	c diyelim mesela. a eksi c gibi olmaz mı? Sürtünme ivmeyi etkiliyor. Hem burada hız da var. Direk bu formülden o zaman yazabiliriz. Yol da var burada.
Burcu:	İlk hız yok burada.
Yavuz:	Evet. Ama hız cinsinden yaz demiş. Ya hız olması yeterli.
Burcu:	Yol da var.
Yavuz:	V_{son} kare eşittir 2gh değil miydi? g eksi c çarpı h diyeceğiz burada.
Burcu:	Hımm. Evet. Öyle olur değil mi?
Yavuz:	Aynen ama çok basit oldu bu ya. Gözüme çok basit geldi. Biliyor musunuz?
Kağıt Alıntısı	
Burcu:	Basit oldu bence de. Az önce şunu da kullandık gerçi.

G_4'ün Tiyatro Problemi çözümünde öğrenciler öncelikle Tablo 1' den kullanarak ve GeoGebra'daki en iyi yaklaştırma doğrusu yardımıyla birinci YMMlerini yani bilet fiyatı (x) ve biletli sayısı (y) arasındaki ilişkiyi y=-0,13x+78,73 olarak bulmuşlardır. İkinci YMMlerini ise sadece matematiksel bilgilerini kullanarak Kar=Gelir-Gider yaklaşımıyla z=x.y-5000 şeklinde cebirsel olarak ifade etmişlerdir. Daha sonra grup AMMyle ulaşabilmek için iki denklemdeki ortak y leri dikkate alarak z' yi (karı) x (bilet fiyatı) cinsinden yazmışlardır. Bu şekilde AMMlerinin cebirsel ifadesini $z = -0{,}13^2 + 78{,}73x - 5000$ olarak ifade etmişlerdir. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

> (…Dila YMMleri bulduklarını ama AMMyi bulmaları gerektiğini ifade ediyor. AMMnin x^2'li bir ifade ve bir parabol olacağını söyledi… Dila GeoGebra'daki 1. YMMlerinin cebirsel ifadesini y eşittir cinsinden yazmalarını istedi. Celal GeoGebra'da cebirsel ifadeyi Dila'nın istediği hale dönüştürdü. Dila kağıda iki YMMninde cebirsel ifadesini yazdı ve ortak çözüm yaptı. AMMyi bir fonksiyon gibi ifade etti… Gözlem Notu: G_4 Tiyatro Problemi).

D_2. Bağımlı-Bağımsız Değişkenleri, Sabitleri ve Parametreleri Belirleme

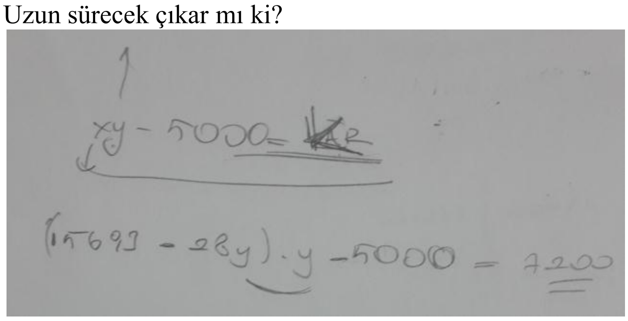
Öğrenciler YMMlerden AMMyi bulmaya çalışırlarken AMMnin yapısının hangi değişken, sabit ve parametrelerden oluşacağı hakkında düşünceler sergilemişlerdir. Ayrıca Üst Matematikselleştirme'de öğrencilerin problemde istenene nasıl ulaşacakları ile ilgili kararları AMMnin yapısını değiştirmiştir.

G_2'nin Tiyatro Problemi çözümünde, öğrenciler buldukları iki YMMnin cebirsel ifadelerinden hareketle ortak çözüm gerçekleştirdikleri bu doğrultuda kar ve bilet fiyatı değişkenleri arasında kar bağımlı değişken bilet fiyatı da bağımsız değişken olacak şekilde AMMnin cebirsel ifadesine ulaştıkları görülmüştür.

Ela: Bak. Şu kar fonksiyonunu kullanalım. GeoGebra'da bulduğumuz hatalı. Şu x çarpı y eksi 5000'i kullanalım.

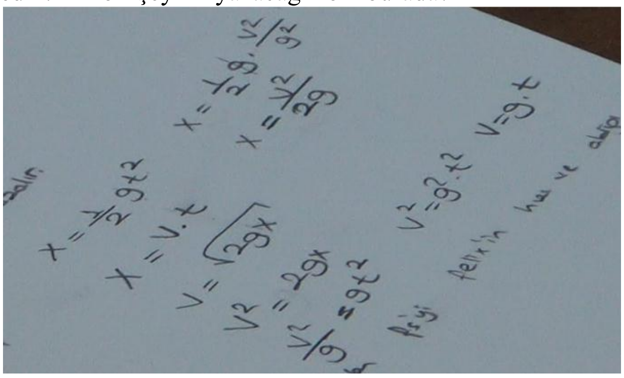
Mete: Tamam ya. Şunu çiz bence. Bu hatalı. Şuradakine göre bakalım. Bak şimdi. x çarpı y eksi 5000 ya. Burada *(ilk denklem)* x'i çekip burada yerine yazacağız. Değil mi? Bu değil mi? Bunun kaç olmasını istiyoruz? 7200 *(Burada ilk denklemden x'i çekerken hata yapıyor.).* Buradan bildiğiniz denklem çözümü yapıp asıl denklemi bulacağız. Çözüm için bu sonucu önce bulmamız gerekmiyor mu? Aslında çok karışık bir denklem olacak buradan sanki. Oradan nasıl çözeceğiz ki? Uzun sürecek çıkar mı ki?

Kağıt Alıntısı



G_7'nin Düşme Problemi çözümünde öğrencilerin AMMnin cebirsel ifadesine ulaşmaya çalışırken Felix'e etki eden sürtünme kuvvetini Felix'in hızı ve aldığı yolu cinsinden ifade etmeye çalıştıkları ve bunun için de gerekli YMMler doğrultusunda AMM için gerekli değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirlemeye çalıştıkları görülmüştür.

Ezgin: x'i bulup bunlara mı eşitlesek acaba? V eşittir g çarpı t çıkıyor buradan *(Denklemlerle ilgili işlemler yapıyor.).* V kare bölü 2g oldu.
Yılmaz: Bunu da hatırlıyorum ben ya.
Ezgin: Bu neydi? Biliyor musun? h maksimum neydi?
Yılmaz: Zamansız hız formülüydü bu?
Ezgin: gx işte.
Yılmaz: Bu istediğimiz oluyor mu? Biz bunu nerede kullanıyoruz? Hah şöyle yapacağız ya. Sürtünme kuvveti diyeceğiz. V çarpı x çarpı a gibi bir şey diyip a'yı mı bulacağız matematiksel olarak? Bu mu yani. Hani diyor ya sürtünme kuvvetini Felix'in hızı ve aldığı yol cinsinden ifade edin. k'lı bir şey mi yazacağız biz burada?
Kağıt Alıntısı



Ezgin: k sabit.
Yılmaz: F sürtünme daha.
Ezgin: O da k m g.
Yılmaz: k sürtünme sabiti değil mi?
Ezgin: Evet. x aldığı yol oluyor burada. O zaman biz burada x'leri mi eşitlesek acaba? Ya da g eşittir Fs bölü k m olur.
Yılmaz: Evet olabilir.
Ezgin: Hah işte oldu. Hız ve aldığı yol. x burada aldığı yolu değil mi?
Yılmaz: Evet.
Ezgin: Aldığı yol cinsinden.
Yılmaz: Ama bak buradaki x'ler karışıyor x deme o zaman bir yerde biri aldığı yol biri yüzey alanı hareketi ikiye böleceğiz biliyor musun?
Ezgin: Paraşütle atlarken serbest düşmüyor mu?
Yılmaz: Hayır.
Ezgin: Düşüyor.
Yılmaz: Nasıl düşüyor?
Ezgin: Paraşüt ile nasıl iniyor peki?
Yılmaz: Serbest düşmüyor o zaman. Hem bize sadece serbest atlayışı soruyor. Paraşütü açana kadar. Sürtünme kuvveti yukarı doğru etki yapıyor. İvmeyi azaltır.
Ezgin: Sürtünme kuvveti formülleri için ne yazmıştık biz?
Seda: Kmg.
Yılmaz: Evet.
Ezgi Yollu bir formülü var mı acaba?

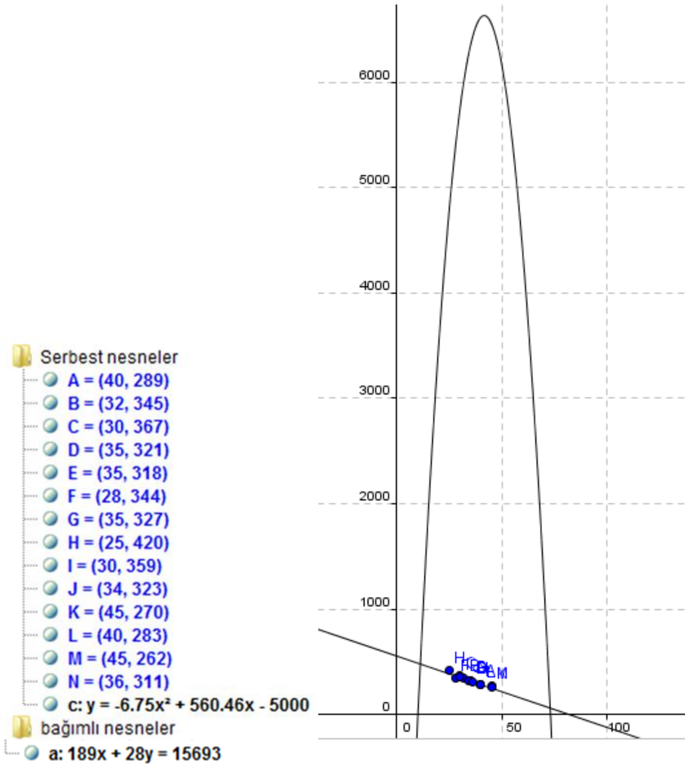
D_3. Teknolojinin Görsel Olanaklarından Yararlanma

Öğrencilerin AMMyi oluştururken, stratejik etkenler arasındaki ilişkiyi, YMMlerin önemli noktalarını, birbirlerinden farklılıklarını daha rahat gözlemleyebilmek ve çözümü kolaylaştırmak için, söz konusu bilgisayar yazılımında renklendirme, kalınlaştırma, yakınlaşıp uzaklaşma ve YMMleri aynı düzlemde ifade etme vb. fonksiyonlarını kullanmışlardır.

G_1'in Tiyatro Problemi çözümünde, öğrenciler 1.YMMyi GeoGebra yardımıyla bulduktan sonra 2. YMM'nin cebirsel ifadesi ile 1. YMM'nin GeoGebra'daki cebirsel ifadesi arasındaki ilişkiyi ortaya çıkararak AMM'nin cebirsel ifadesine ulaşılmışlardır. Daha sonra ise, AMMye ait bu cebirsel ifadeyi GeoGebra'da Giriş menüsüne yazarak AMMnin grafiksel gösterimine ulaşmışlardır. Bu şekilde hem AMMyi (kar ve bilet fiyatı arasındaki ilişkiyi veren matematiksel model) hem de 1. YMMyi (bilet fiyatı ve biletli sayısı arasındaki ilişkiyi veren matematiksel model) GeoGebra'da aynı analitik düzelme üzerine alarak inceledikleri görülmüştür.

Selen: Kontrol edelim bir. Yazdığımız ile aynı oldu mu *(Cebir penceresiyle kağıtta yazanı karşılaştırıyorlar.)*?
Demet: Tamam. Oldu.
Defne: Tamam. Biraz küçülteyim. Tepe noktasını da görelim.

GeoGebra
Alıntısı



D_4. Gerekli YMMleri Belirleme

AMM için gerekli olan YMMler matematikselleştirmede her ne kadar düşünülerek bulunmuş olsa da plan dışı durumlardan veya beklenildiği gibi olmayan çıktılardan dolayı Üst Matematikselleştirme'de oluşturulacak AMMnin yapısı (stratejik etkenler, grafiksel gösterim veya cebirsel gösterim vb.) değişmiştir. Bu doğrultuda da bulunan YMMler arasından AMMye ulaşma stratejisinde hangilerinin öncelikli olacağının ortaya çıkarıldığı görülmüştür.

G_3'ün Tiyatro Problemi çözümünde, Sena ve Seray bilet fiyatı veya biletli sayısı ile kar arasındaki ilişkiyi verecek AMMyi bulmak için hangi YMMleri ve nasıl kullanabileceklerini belirlemeye çalıştıkları görülmüştür.

Sena: Elimizde model var ya bir de. Onu da kullanabiliriz. Bir bu var 189 x'li olan.
Seray: Hıhı.
Sena: Bir de şu var xy eksi 5000 var.
Seray: Oradan ortak çözüm yapabilir miyiz?
Sena: Bizden kazancın en çok olması isteniyor.

D_5. YMMlerin Grafiksel Gösterimlerinden Yararlanma

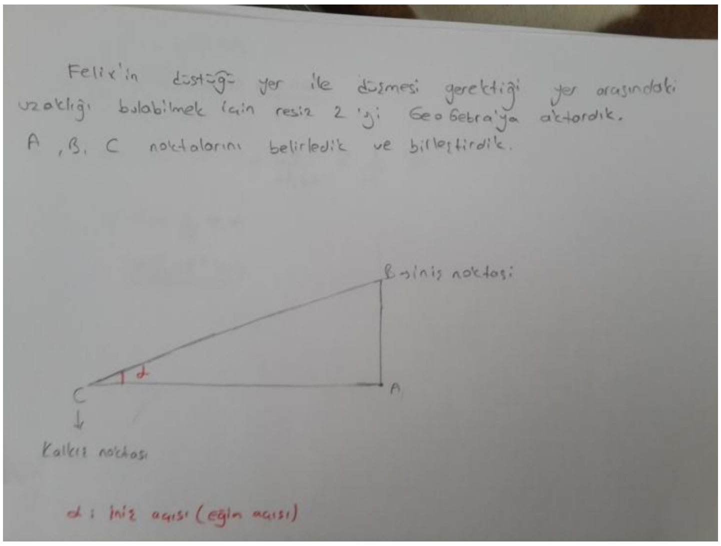
Öğrencilerin Üst Matematikselleştirme'de iki farklı şekilde grafiksel gösterimden yararlanma yoluna gittikleri görülmüştür. İlk olarak özellikle karmaşık cebirsel yapıya sahip YMMlerden AMMye ulaşmanın zor ve karmaşık bir süreci ortaya çıkarmasından dolayı bu yolu seçmişlerdir. İkinci olarak da, AMMnin grafiksel gösteriminin AMMyi daha rahat bir şekilde analiz etmeyi sağlayacağını düşünmüşlerdir. GeoGebra'nın yapısı ve özellikleri de AMMyi ortaya çıkarmak için grafiksel gösterimlerin seçilmesinde önemli bir etken olmuştur. Çünkü cebirsel olarak karmaşık bir matematiksel ifadenin, teknolojik bir yazılım olmaması durumunda hem cebirsel hem de grafiksel gösteriminden yararlanmak olanaksız hale gelmiştir.

G_5'in Düşme Problemi çözümünde, öğrencilerin oluşturdukları zihinsel modeli GeoGebra'ya yansıttıkları ve zihinsel modellerinden hareketle elde ettikleri YMMlerin grafiksel gösterimlerinden AMMye ulaşmada yararlandıkları görülmüştür.

Canan: Tamam. Uzaklığı nasıl bulacağız şimdi?
Bülent: Hangi nokta? Hangisi?
Canan: Burası B. Sağ. Burası da C. Sol. C'den B'ye dümdüz çıkacağız.
Bülent: Doğru çizeceğiz. B'nin x'iyle aynı nokta belirleyeceğiz.
Bengi: B'nin x'i ile C'in de y'si aynı olacak.
Bülent: Tamam bu C değil mi?
Canan: 13,16'ya 2,84 olacak işte o nokta. Şurayı direk tıklasan noktayı girelim. Doğru yapıyoruz değil mi? Bakalım bir daha. Evet doğru *(Giriş bölümünden noktayı giriyorlar.).*
GeoGebra Alıntısı

Bülent: Tamam. Şimdi buradan da noktalardan doğruları çizelim *(İniş açısını 3 boyutlu olarak hatalı düşünüyorlar.).* 21,46'a 1,54 yapıyor mesafe.

Kağıt Alıntısı



Bengi: Tamam.

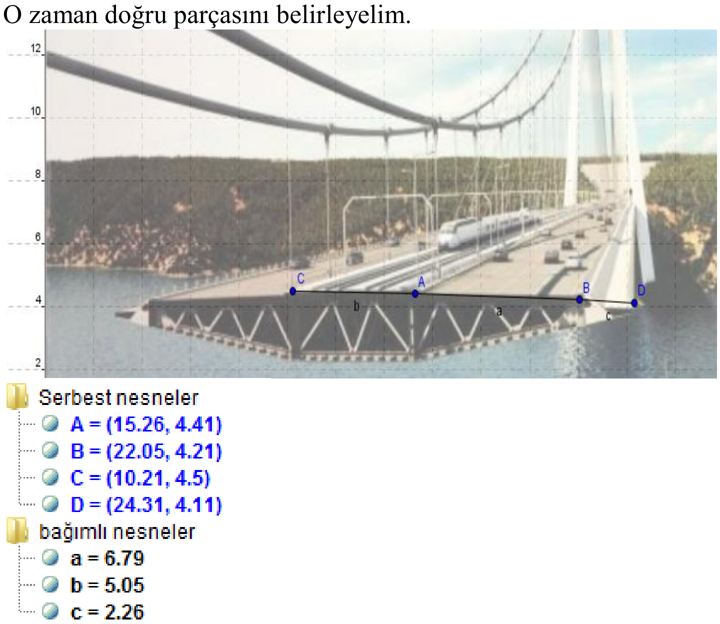
D_6. YMMlerin Yorumlanmasına Olanak Sağlayan Teknolojik Sistemi Kurma

Öğrencilerin bu basamakta teknolojinin de yardımıyla, YMMlerin yorumlanmasına olanak sağlayan bir simülasyonu oluşturdukları görülmüştür. Bu sayede, öğrenciler tarafından hem YMMlerin yapısı kavranılmış hem de AMMyi oluşturabilmek için YMMlerin nasıl kullanılabileceği hakkında düşünceler sergilenmiştir. YMMler ve YMMleri oluşturan stratejik etkenler arasındaki ilişkiler faklı durumlar için ayrıntılı olarak incelenebilmiştir. Bu yaptıklarının matematiksel analiz aşamasındaki davranışları da tetiklediği görülmüştür.

G_3'ün Köprü Problemi çözümünde, öğrencilerin matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşmak için YMMler yardımıyla AMMyi teknolojik ortamda yapılandırdığı ve YMMlerin yorumlanması için uygun ortamı yarattığı görülmüştür. Bu doğrultuda GeoGebra'ya eklenen fotoğraf üzerinde köprünün genişliğini veren YMMler gruplandırılmış ve AMMye ulaşabilmek üzere ilişkilendirilmiştir. Bu geliştirdikleri teknolojik sistemi öğrenciler çözümün devamında da kullanmışlardır.

Seray:	Evet. Tamam. Burası da 6,79'muş. Orantı yapalım şimdi tekrardan. Normalde 3,75 ve 4'ü çarptığımızda 15 metreydi değil mi? 15'e 6,79' muş.
Kumsal:	Evet.
Seray:	O zaman.
Sena:	Trenin genişliğine de bakalım. Oradan buluruz.
Seray:	Evet. Onu da bulacağız.

Kumsal: Aynen trenden nokta belirleyelim
Seray: Şimdi sol ucunu şuradan başlatalım.
Sena: Şurası beyazın ucu. Burası bak.
Seray: Hah. Değil mi? Evet. Şurası. Diğeri de.
Kumsal: A.
Sena: A'yı seçeriz.
Seray: O zaman doğru parçasını belirleyelim.
GeoGebra Alıntısı



Kumsal: Tamam oldu.
Seray: Rayımızın genişliği de 5,05 çıktı tren komple.
Sena: Evet.
Seray: O zaman 6,79'a bu denk geliyorsa 5,05'e ne karşılık geldiğini bulacağız?

D7- AMM İçin Gerekli Verileri YMMlerden Elde Etme

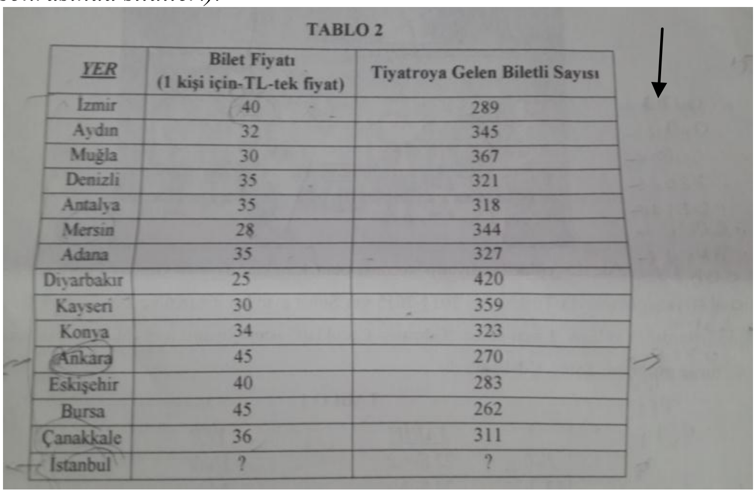
Öğrencilerin AMMyi oluşturmada zorluk yaşadıkları durumlarda farklı bir yöntem olarak AMM için gerekli olan değişkenlere, sabitlere ve parametrelere ait verileri bazı durumlarda YMMlerden yararlanarak oluşturmuşlardır. Yani GeoGebra'nın geometri ve cebir penceresi yardımıyla YMMdeki verilerin daha kolay bir şekilde elde edilebilmesi, AMMye ulaşmak için Üst Matematikselleştirme'de farklı stratejilerin oluşmasına zemin hazırlamıştır. Veriler YMMlerin belli değerleri için deneysel veriler şeklinde toplanmış ve verilerin eğilimleri dikkate alınarak AMMye ulaşılmaya çalışılmıştır.

G_2'nin Tiyatro problemi çözümünde, öğrenciler Tablo 1'den yararlanarak her bir ile ait karın değerini bulmuşlardır ve bu verileri de kullanarak bilet fiyatı ve kar arasındaki matematiksel ilişkiyi GeoGebra yardımıyla bulmaya çalışmışlardır. Bunun için en iyi yakınlaştırma doğrusunda yaralanmışlardır. Fakat kar ve bilet fiyatı arasındaki ilişkinin doğrusal olmamasından dolayı bu stratejilerini çözüm sürecinde değiştirmişlerdir.

Ela: Aynen.

Mete: Tamam. O zaman yaz. 40’a 6560. 32’ye 6040. 30’a 5800. 35’e 6035. 35’e 6130. 28’e 4632. 35’e 6445. 25’e 5500. 30’a 5770. 34’e 5982. 45’e 7150 *(Kağıtta tablonun yanına kar değerlerini yazmışlardı; sonrasında sildiler.).*

Kağıt Alıntısı



TABLO 2

YER	Bilet Fiyatı (1 kişi için-TL-tek fiyat)	Tiyatroya Gelen Biletli Sayısı
İzmir	40	289
Aydın	32	345
Muğla	30	367
Denizli	35	321
Antalya	35	318
Mersin	28	344
Adana	35	327
Diyarbakır	25	420
Kayseri	30	359
Konya	34	323
Ankara	45	270
Eskişehir	40	283
Bursa	45	262
Çanakkale	36	311
İstanbul	?	?

Masal: Evet.

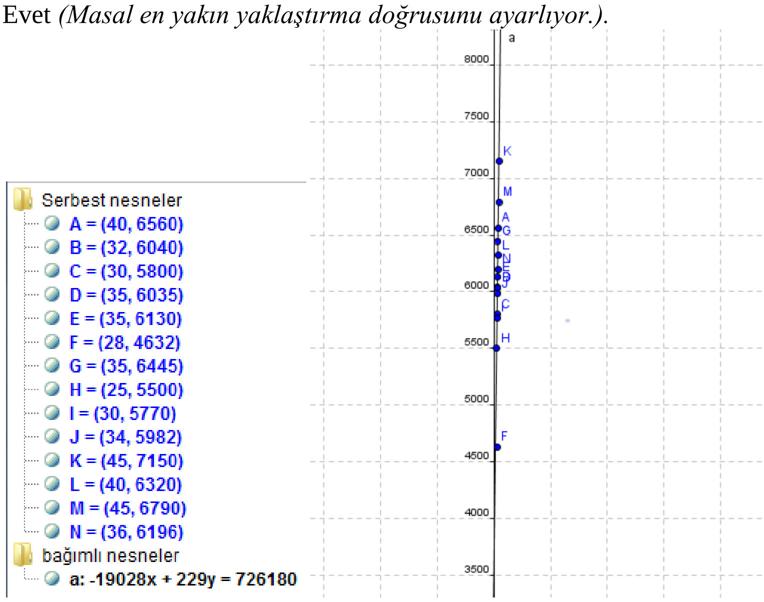
Mete: 40’a 6320, 45’e 6790, 36’ya 6196.

Ela: Bunda da mı aynı şeyi yapacağız?

Mete: Hıhı.

Masal: Evet *(Masal en yakın yaklaştırma doğrusunu ayarlıyor.).*

GeoGebra Alıntısı



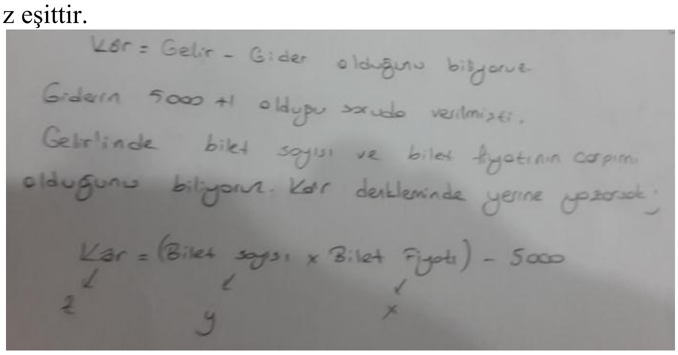
D_8. Stratejik Etkenleri Yorumlama ve AMMye İlişkin Ön Tahminlerde Bulunma

AMM için belirlenen değişken, sabit ve parametreler doğrultusunda, öğrenciler günlük yaşam deneyimlerinden, problemdeki gerçek verilerden, videolar ve resimlerden elde edilen verileri karşılaştırılarak ayrıntılı olarak incelemişlerdir. Bu doğrultuda da, oluşturulacak AMM ve AMMnin stratejik etkenleri hakkında ön tahminlerde bulunulmuştur. Burada yapılan tahminlerin ve çıkarımların ileriki basamaklarını tetikleyici bir rolü olmuştur.

G_1'in Tiyatro Problemi çözümünde öğrenciler AMMye ulaşmaya çalışırken elde ettikleri YMMleri nasıl kullanacakları hakkında yorumlarda bulunmuşlardır. Defne kar (z) x cinsinden yazdıklarında AMMin x kareli bir ifadeden meydana geleceğini vurgulamıştır. Yani Defne AMM oluşturulmadan önce yapısının bir parabol olacağı ile ilgili düşüncesini arkadaşlarıyla paylaşmıştır.

Demet: z eşittir.

Kağıt Alıntısı



Defne: Ne diyordu? Bir daha bakalım soruya. Maksimum olabilmesi için bilet fiyatı ne kadar belirlenmeli?

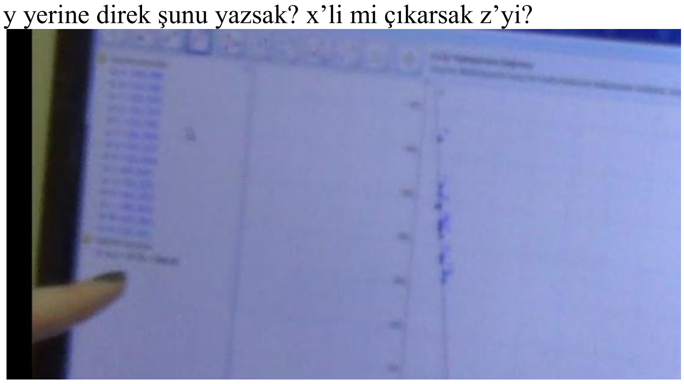
Demet: Maksimum isteniyor bizden.

Defne: Tamam onu yazalım

Demet: Maksimum z'yi bulacağız.

Defne: y yerine direk şunu yazsak? x'li mi çıkarsak z'yi?

Video Alıntısı



Demet: Olabilir.

Defne: x kareli bir denklem olacak elimizde o zaman.

Demet: Tamam. Öyle yapalım.

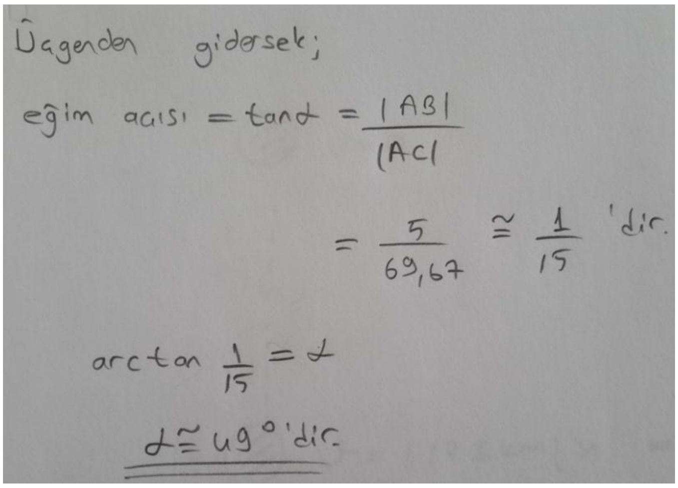
D_9. Üst Düzey Matematiksel ve Teknolojik Bilgilerden Yararlanma

Öğrenciler için modelleme sürecinde sahip oldukları teknoloji bilgisi, matematik bilgisi olmadan bir anlam taşımamıştır. Bu süreçte Y/AMMler arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmak için üst düzey matematiksel ve teknolojik bilgiler çok önemli olmuştur. Öğrenciler gerekli matematiksel ve teknolojik bilgilerini AMM için uygun cebirsel veya grafiksel ifadeleri bulurken uygun şekilde kullanmışlardır. Öğrenciler çözümde gerekli olacak üst düzey bilgiye, matematiksel ve teknolojik becerilere sahip olmadığında istenilen düzeyde çözümü ilerletememişlerdir. Gerekli matematiksel bilgiler de modelleme probleminin zorluğunu ortaya çıkaran göstergelerden biri olmuştur. Teknolojik bilgiler de matematiksel bilgilerdeki bazı eksiklikleri veya hataları gidermede öğrencilere yardımcı olmuştur.

G_5'in Köprü Problemi çözümünde, öğrencilerin iniş açısı ve planlanan noktadan uzaklık arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ederken tanjant ve arctanjant'tan yararlandıkları ve trigonometri bilgilerini AMMye ulaşmada kullandıkları görülmüştür.

Canan:	Tamam. Yaklaşık 70 km diyelim ona. Şimdi sürtünmeye gelelim o zaman.
Bengi:	Ama açıyı bulmadık. Bizden onu da istiyordu?
Canan:	Hah açıyı da bulalım.
Bengi:	O da tanjant olacak. Şekil nasıl oluyor? İniş açısı nasıl olacak?
Bülent:	Şimdi buradan atlıyor *(Sağ)*. Buraya mı iniyor *(Sol)*?
Bengi:	Hayır. Tam tersi.
Bülent:	Hımm.
Canan:	Şimdi biz dik üçgen çizdik ya. Onun arasındaki açı mı olacak?

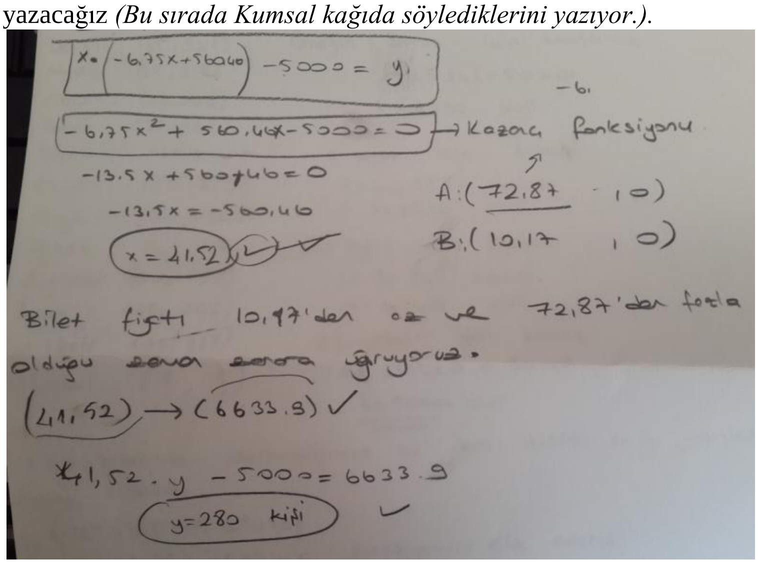
Kağıt Alıntısı



G$_3$'ün Tiyatro Problemi çözümünde, öğrenciler buldukları YMMlerin cebirsel ifadelerinden kar ve bilet ifyatı arasındaki ilişkinin cebirsel ifadesine ulaşmışlardır. Öğrenciler karın maksimum değerinin istendiğini dikkate alarak y=f(x) olacak şekilde elde ettikleri cebirsel ifadenin x'e göre türevini alarak $f'(x)$'i elde etmişlerdir. Bu doğrultuda öğrenciler gerekli matematiksel çözümü bulmak için kullanacakları matematiksel modeli türev yardımıyla elde etmişlerdir.

Kumsal: Tamam. y yerine de burada. Şu x, şu y ya. y yerine burada şunu yazacağız *(Bu sırada Kumsal kağıda söylediklerini yazıyor.).*

Kağıt Alıntısı



Serap: Aslında burada fiyat fazla olunca karımız daha fazla oluyor gibi. Şuraya *(tabloya)* baktığımız zaman.

Sena: Hıhı.

Serap: Mesela biraz önce de demiştim ya. Bu 30 *(Muğla)* bu 30'a *(Kayseri)* bakalım. 359'a *(Kayseri)* 367 *(Muğla).* Hani çok az değer oynuyor. O yüzden en çok burada biletin fiyatı önemli. Mesela biz ne yaptık şimdi? 45'e baktık. 40'a baktık. 32'ye baktık. 30'a ve 25'e baktık. Her değerden birine baktık. Hepsinden fiyat kazancımız daha doğrusu gittikçe artıyor bilet fiyatı artınca. O yüzden bilet fiyatının çok fazla

	olması gerekiyor.
Kumsal:	Şimdi 560,46'yı 13.5 a böl
Sena:	41.5.
Kumsal:	Tamam. Ben şimdi burada şey yaptım bakın. x çarpı y eksi 5000 vardı. y yerine de şuradaki değeri yazdım. Buradan da türevi aldım. x'i 41.5 olarak buldum. 41,5'da bilet fiyatıydı.

D_{10}. YMMlerin Cebirsel Gösterimlerinden Yararlanma

AMMyi bulmak için stratejiye bağlı olarak YMMlerin cebirsel ya da geometrik yapılarından yararlanılabilir. Öğrenciler zaman zaman AMMyi bulmak için grafiksel gösterimlerden yararlanmak yerine cebirsel gösterimlerden yararlanma yoluna gitmişlerdir. Bu doğrultuda da öğrenciler YMMler arasındaki benzer değişkenlerden yararlanmışlardır.

G_1'in Düşme Problemi çözümünde, öğrenciler Fizik formüllerinden ve bilgilerinden hareketle Felix'e etki eden sürtünme kuvvetini Felix'in hızı ve aldığı yolu cinsinden yazmaya çalışmışlardır. Öncelikle sürtünme kuvvetinin ivmeye ters yönde etkisine k demişlerdir. Buradan yer çekimi ivmesi olan g'den Felix'in düşme anındaki ivmesini g-k olarak ifade etmişlerdir. Felix'in aldığı yol x ve hızı da V olmak üzere Felix'e etki eden sürtünme kuvvetinin ivmeye ters yönde etkisini (k) Felix'in aldığı yol ve hızı cinsinden aşağıdaki gibi matematiksel olarak ifade etmişlerdir:

$$V_s^2 = V_i^2 - 2ax \ \ (V_i = 0)$$

$$x = V.\frac{V}{a}$$

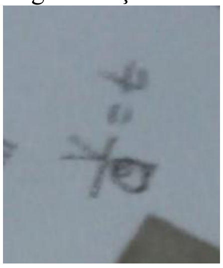
$$x = V.\frac{V}{(g-k)}$$

$$g - k = \frac{V^2}{x}$$

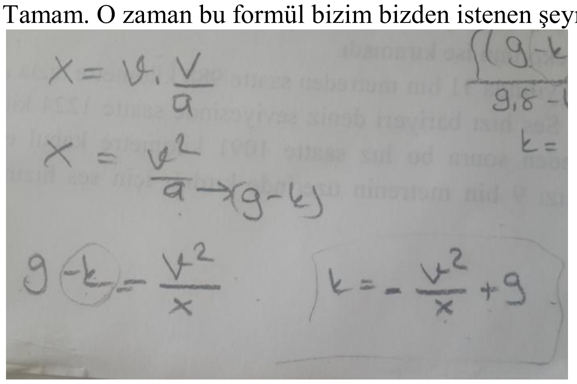
$$k = -\frac{V^2}{x} + g$$

Selen:	t'yi ivmeyle yazalım bir.
Defne:	t'yi ivmeyle?
Demet:	g çarpı t kareli bir formül vardı ya.
Defne:	Evet vardı. Vardı. Ama h'a bağlı olur.
Demet:	Evet.

Selen: Tamam işte. İlk hızı biliyoruz. Zamanı biliyoruz.
Defne: Evet.
Selen: g'yi de biliyoruz.
Defne: Evet.
Selen: Buradan t'yi çeksek. Böyle oluyor. O zaman V çarpı V bölü a yazarız. O da V kare bölü a olur. Burada a neydi? a ivme ama cismin ivmesi. O da g eksi k şuna tekabül etmiyor mu?
Kağıt Alıntısı

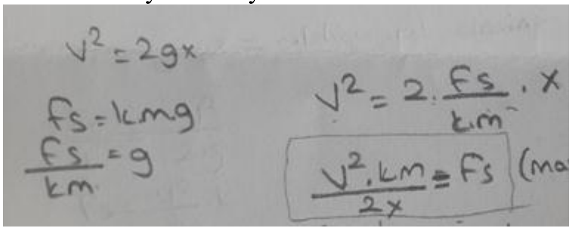


Demet: Evet.
Defne: O zaman buraya şunu yazacağız.
Selen: Evet.
Defne: Tamam. İşte burası da g eksi k diyeceğiz.
Selen: k'yı çekelim buradan.
Defne: Şöyle mi?
Selen: Evet.
Defne: Biz k'ya bağlı bir şey mi bulacağız? Sürtünmeyle ilgili olan şey k burada.
Selen: Hıhı.
Defne: Tamam. O zaman bu formül bizim bizden istenen şeymiş.
Kağıt Alıntısı



G₇'nin Düşme Problemi çözümünde de, öğrenciler ${V_s}^2 = {V_i}^2 - 2ax$ $(V_i = 0)$ ve $F_s = kmg$ yardımcı matematiksel modellerden yararlanarak Felix'e etki eden sürtünme kuvvetini $F_s = \frac{V^2km}{2x}$ olarak bulmuşlardır.

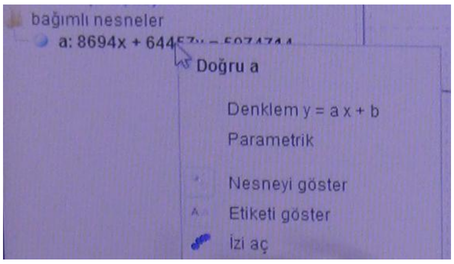
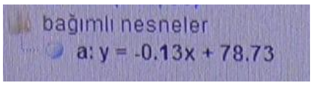
Ezgin: Hızı ve aldığı yolu cinsinden.
Yılmaz: F eşittir k çarpı x. x'i biliyoruz biz. 75. F eşittir k çarpı 75 diyip bıraksak olmaz mı?
Ezgin: Ne yapacağız biliyor musun? Buradaki k'yı çekip buraya yazalım olmaz mı?
Yılmaz: Hayır. O limit hız.
Ezgin: Evet.
Yılmaz: x 75. f eşittir k çarpı 75 diyip bırakacak mıyız? Limit hızdan çıkmaz.
Ezgin: Limit hız değil f eşittir k çarpı x'i diyorum.
Yılmaz: x ne orada?

Ezgin:	Yüzey alanı.
Yılmaz:	x aldığı yol değil midir?
Seda:	Onu s olarak değiştirsek ya?
Yılmaz:	Yer çekimi var. Ona ters bir kuvvet var. Sürtünme ters bir ivme yaratıyor
Ezgin:	Eksi g mi diyeceğiz?
Yılmaz:	g olmaz.
Ezgin:	kmg'den g'yi çekip g yerine Fs bölü mg yazıp burada da bunu yazsak? En azından x ya da hız yönünden bulabiliriz biz bunu.
Kağıt Alıntısı	
Yılmaz:	Olur mantıklı. Bu formül bana yanlış gibi geliyor ama.
Ezgin:	Hayır doğru. Bunu biliyorum. Bunu da. Bunların hepsini biliyorum.
Yılmaz:	O zaman nasıl yapacağız biliyor musun bak?
Ezgin:	Hayır bak. Bulduk nasıl yapacağımızı.
Yılmaz:	Hayır hayır. Buradan g'yi çekip hem x gelecek hem de v gelecek formülü bulabiliriz.
Ezgin:	Bir v'den bir de x'den
Yılmaz:	Ama ikisinden de gelmeli.
Ezgin:	Tamam.
Yılmaz:	V kare eşittir 2 g x.
Ezgin:	V kare eşittir 2 çarpı Fs bölü km çarpı x. Hepsini bu tarafa atacağım şimdi.
Yılmaz:	Bak yanlış yaptın burada.
Ezgin:	Neresi yanlış ya?
Seda:	Yok doğru yaptı.
Ezgin:	Bence de doğru.
Yılmaz:	Tamam g'nin yerine yazmıyoruz mu? Hah orada yazdın sen. Tamam doğru.
Ezgin:	Sürtünme kuvvetini Felix'in hızı ve aldığı yolu cinsinden yazmış olduk.

D_{11}. Teknolojik ve Matematiksel Gösterim Arasındaki Geçiş Yapma

Matematiksel ve teknolojik gösterimler arasındaki ilişkiyi ve geçişi sağlayan öğrencilerin çözümde teknolojiden etkili bir şekilde faydalanmışlardır. Matematik ve teknolojik gösterimleri ilişkilendiremeyen veya bu süreçte hatalı işlemler yapan öğrencilerin de matematikselleştirmede ve ileriki aşamalarda teknoloji ile desteklenmiş çözümlerinde zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Bu durumda matematiksel ve teknolojik sonuçlarda uyumsuzluklar ortaya çıkmıştır.

G_4'ün Tiyatro Problemi çözümünde, öğrenciler teknolojik yöntemle grafiksel gösterimine ulaştıkları 1. YMM ile cebirsel olarak ulaştıkları 2. YMMlerini ilişkilendirerek AMMye ulaşmaya çalışmışlardır. Bu aşamada Dila GeoGEbra'da buldukları grafiksel ifadenin cebir ekranındaki cebirsel ifadesini y eşittir cinsinden yazmayı teklif etmiş ve oradan bulacakları cebirsel ifade ile 2. YMMlerini ilişkilendirebileceklerini vurgulamıştır.

Dila:	Geogebra'da bulmuştuk bir denklem de. Onu da kullanalım.
Celal:	Bu doğrunun x ve y'si.
Ayla:	Aynı şey ise.
Dila:	İşte burada x cinsinden alsak şu doğruyu. Buraya *(kar fonksiyonuna)* yazdığımız zaman yine x'li bir denklem bulacağız sonuçta. Sonuçta matematiksel modellerimizi de oluşturmuş da olduk. O zaman da karın matematiksel modellemesini yapmış oluruz. Sonuçta sadece bir bilinmeyenli.
Celal:	Hıhı.
Dila:	Ama bu kadar mı bizden istediği? Bunları yazsak yetecek mi? Burada doğruda y'yi yalnız bırakırsak bir fonksiyon da diyebiliriz sonuçta.
Celal:	Evet. y'yi GeoGebra'da yalnız bırakabiliyoruz?
Dila:	Yapsak ya.
Celal:	Tamam.
Video Alıntısı	 
Dila:	Tamam oldu işte.
Celal:	Bu daha sadece.
Ayla:	Aynen.
Dila:	Burada biz bunu fonksiyon olarak da ifade edebiliriz. x bizim biletli sayımızdı ya. y'miz de biletin fiyatı.

5. Ana Matematiksel Model

E. MATEMATİKSEL ANALİZ

6. Matematiksel Çözüm

E_1. Y/AMMlerin grafiksel veya cebirsel gösterimlerinden yararlanma

E_2. Teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma

E_3. Matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşmak için hesaplama yapma

E_4. Matematiksel çözümü ve sonuçları veren teknolojik sistemi kurma

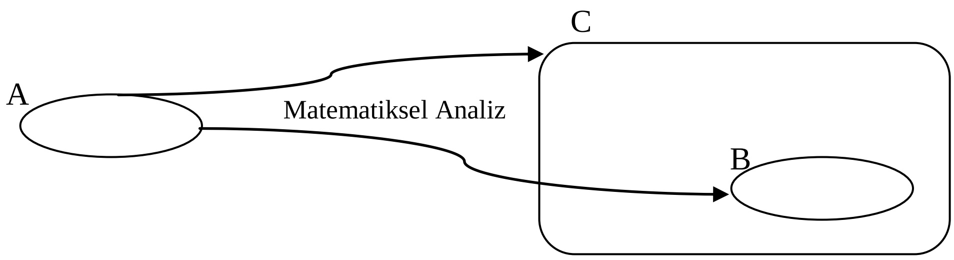
E_5. Y/AMMlerin kritik noktalarına ilişkin matematiksel sonuçlar elde etme

E_6. Matematiksel ve teknolojik bilgilerden yararlanma

E_7. Teknolojik ile matematiksel gösterim arasındaki geçiş yapma

Bu temel basamakta öğrenciler Üst Matematikselleştirme sonucunda oluşturdukları AMM yardımıyla problemde istenen duruma karşılık gelen matematiksel çözümlere ve gerçek yaşam durumuyla ilgili bazı matematiksel sonuçlara ulaşmışlardır. Matematiksel modelleme problemlerinde öğrencilerin temel amacının, gerçek yaşam durumuna en uygun çözümü bulmak olduğu düşünüldüğünde bunun için öğrencilerin matematiksel çözümlere ihtiyaç duydukları görülmüştür. Bu temel basamakta öğrenciler matematiksel modellerini ayrıntılı olarak incelemişler, matematiksel ve gerekirse teknolojik bilgilerinden yararlanmışlar ve matematiksel analizler gerçekleştirmişlerdir. Bu sürecin bitişini gösteren işaret ise matematiksel çözümdür. Fakat öğrenciler matematiksel analiz gerçekleştirirken matematiksel sonuçlara da ulaşmışlardır (bkz. Şekil 51).

Şekil 51. Matematiksel Analiz Temel Basamağındaki Ortaya Çıkan Bileşenler



A: Ana Matematiksel Model (Temel Bileşen)

B: Matematik Çözüm (Temel Bileşen)

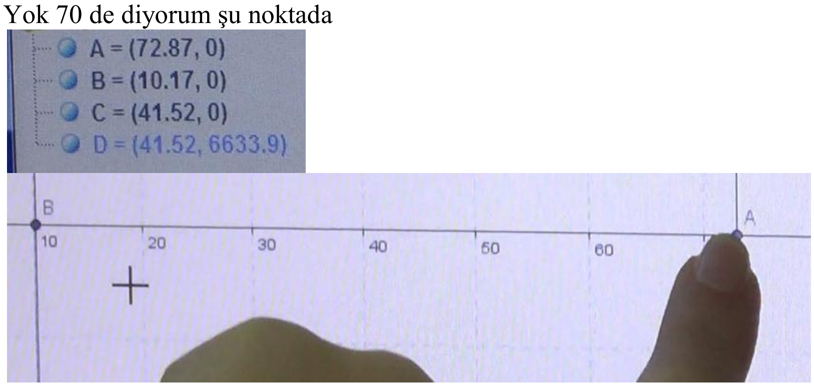
C: Matematiksel Sonuçlar (Yardımcı Bileşen)

A → B: Matematiksel Analiz (Temel Basamak)

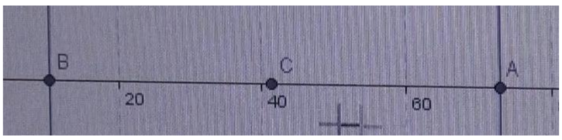
Matematiksel çözüm, AMMden elde edilen ve problem durumuna direkt olarak cevap veren matematiksel ifadeler (sayısal değerler veya direkt açıklamalar) olarak karşımıza çıkmıştır. AMM gerçek yaşam probleminin her durumuna ilişkin açıklama getirebildiğinden öğrencilerin Matematiksel Analiz'de matematiksel çözümle birlikte matematiksel sonuçlara da ulaştıkları gözlemlenmiştir. Matematiksel sonuçlar ise, öğrencilere bazen matematiksel çözüme ulaşmada yardımcı olmuş; bazen de onlara gerçek yaşam problem probleminin farklı durumları için AMMye genel bir bakış sağlamıştır.

G$_3$'ün Tiyatro Problemi çözümünde, öğrenciler GeoGebra yardımıyla ulaştıkları AMMnin grafiksel gösterimini analiz ederlerken çözümde maksimum kar için bilet fiyatını 41.52 TL (matematiksel çözüm) bulmuşlardır. Öğrencilerin ayrıca AMMnin grafiğinin (72.87,0) ve (10.17,0) noktalarında x eksenini kestiğini ifade etmişlerdir. Burada buldukları bu değerler onların Yorumlama ve Doğrulama temel basamaklarındaki yaklaşımlarını da zenginleştiren AMMden elde edilmiş matematiksel sonuçlardır.

Serap: Bizim kazanç fonksiyonumuz şimdi bu dimi?
Kumsal: Evet. şimdi şey mi oluyor acaba. Bizim burada y dediğimiz şey kazançtı. 10 kişi geldiğinde nötrlüyor. Hiç kazanç olmuyor. Gelir gidere eşit oluyor.
Serap: 70 kişiden fazlası beni zarara soruyor. Zarar ya da kar değil daha doğrusu
Kumsal: Hayır zarar olur.
Serap: Yok 70 de diyorum şu noktada
Video Alıntısı



Kumsal: He öyle canım orada nötr
Serap: Gelir ve gider eşit oluyor.
Kumsal: Evet
Sena: GeoGebra'dan da bulabiliriz bu iki nokta arasının ortasını
Serap: Bu iki nokta mı
Sena: Evet
Serap: Bir dakika nasıl uluyorduk onu(aranıyor.)heh şu orta nokta
Sena: Evet
Video Alıntısı



Matematiksel Analiz sırasında, öğrenciler teknolojik ve matematiksel bilgilerden de yararlanmışlardır. Gerçek yaşam durumunun ve dolayısıyla AMMnin karmaşık yapıda olması, öğrencilerin matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşmasında süreci zorlaştırmıştır. Bu süreçte teknoloji karmaşık işlemleri kolaylaştırmış, kavramsal ve yaratıcı düşüncelere daha fazla yoğunlaşmayı sağlayarak matematiksel sonuçlarda ulaşmada önemli katkı sağlamıştır. Matematiksel Analiz temel basamağı yedi alt basamakta toplanmıştır.

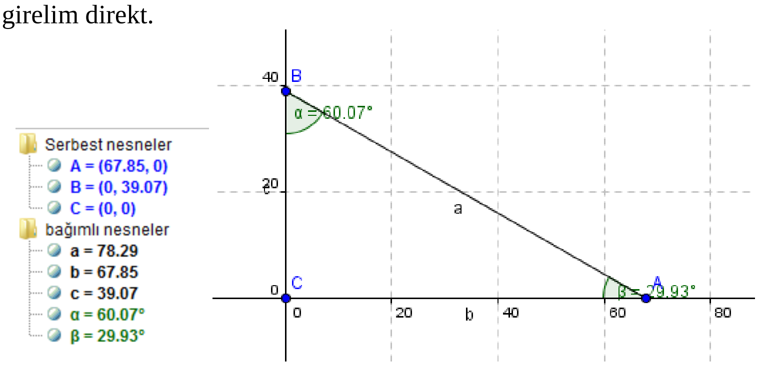
E_1. Y/AMMlerin Grafiksel veya Cebirsel Gösterimlerinden Yararlanma

Bu alt basamakta öğrenciler tarafından ya matematiksel modellerin cebirsel yapısı düşünülerek çözümlerde cebirsel çözüm ya da matematiksel modellerin grafiksel yapısı düşünülerek çözümlerde geometrik çözüm ele alınmıştır. Cebirsel çözümde, matematiksel modellerin cebirsel ifadeleri kullanılmış; geometrik çözümde ise, matematiksel modellerin grafiklerinden yararlanılmış ve grafiklerin aralarındaki ilişkilerin ve farklılıkların daha rahat görülebilmesi amaçlanmıştır. Bu alt basamakta Y/AMMlerin grafikleri, kesişim noktaları, doğrular arasındaki açı ve iki farklı YMMde x'ler aynı iken y'ler arasındaki ilişki gibi ayrıntılı durumlar öğrenciler tarafından ele alınmıştır.

G_6'nın Düşme Problemi çözümünde, öğrenciler AMMnin grafiksel gösteriminden hareketle problemde istenen durumu yansıtacak teknolojik sistemi oluşturmuşlar ve istenen eğim açısını $39{,}068^0$ (matematiksel çözüm) olarak bulmuşlardır.

Burcu: Başka bir dosya açayım. Bunu kaydedeyim. Unutmayalım. Noktaları girelim direkt.

GeoGebra Alıntısı



Yavuz: Tamamdır sıfır nokta sıfırdan yazalım 39.068 oluyor

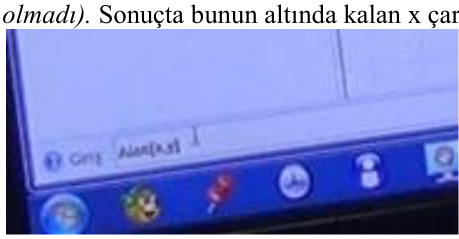
E_2. Teknolojinin Görsel Olanaklarından Yararlanma

Öğrenciler AMMden matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşırken, çözüm sürecinde renklendirme, verileri aynı ekrana atma, kalınlaştırma vb. teknolojik yardıma başvurmuşlardır. Bu alt basamak, kullanım amaçları farklılaşmak ile birlikte, Matematikselleştirme, Üst Matematikselleştirme ve Matematiksel Analiz temel basamaklarında karşımıza çıkmıştır. Öğrencilerin teknoloji destekli gerçekleştirdikleri çözümlerde Matematiksel Analiz basamağındaki yaklaşımlarında teknolojinin görsel olanaklarının sağladığı avantajlar büyük rol oynamıştır. Çünkü teknolojinin görsel bir resmini sunması ve cebir-geometri arasındaki ilişkinin rahatlıkla gözlemlenmesini sağlaması tam bir matematiksel analizin yapılabilmesine olanak sağlamıştır.

G_6'nın Tiyatro Problemi çözümünde, GeoGebra'nın onlara sağladığı görsel imkanlar öğrencilerin matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşmalarını sağlayacak teknolojik sistemi kurmalarında onlara önemli bir kolaylık sağlamakla birlikte karmaşık birçok nokta, doğru veya eğriden oluşan bu teknolojik sistemi verimli bir şekilde kullanmalarına da fırsat vermiştir. Bununla birlikte öğrencilerin teknolojik sistemi kurarlarken teknolojik ve matematiksel gösterim arasında geçişler yaptıkları (x.y'nin kazancın altında kalan alanı vermesi düşüncesini teknolojide yansıtma düşüncesi gibi), kullandıkları matematiksel ve teknolojik bilgileri (doğru üzerinde değişken nokta seçme ve o noktadan geçen ve x eksenine dik yeni bir doğru bulma gibi) kullandıkları ve teknolojinin görsel olanaklarından yaralandıkları (noktalara yaklaşma, değişken noktayı doğru üzerinde gezdirme ve cebir ekranında bu değişimi takip etme gibi) görülmüştür.

Burcu: Dur bir dakika bak. İlkini bir daha açalım bir. Biz bunun altında kalan alandan buluruz aslında *(İlk girişim başarısız oluyor. Deniyor ama olmadı).* Sonuçta bunun altında kalan x çarpı y oluyor ya.

Video Alıntısı



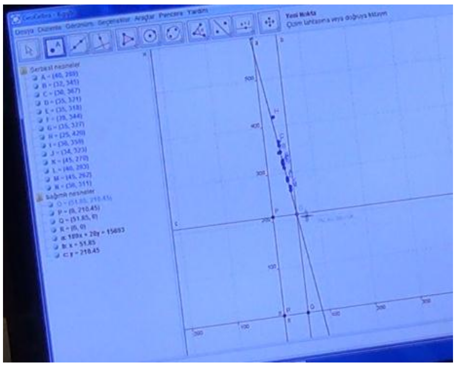
Yavuz: Hmm. Evet çok mantıklı. Onu yapabiliriz. Doğru üzerinde nokta seç bak. İn aşağıya şimdi. x eksenini görelim. Bir dik inelim buna.

Burcu: Alan grafiğinden yapayım dedim ben.

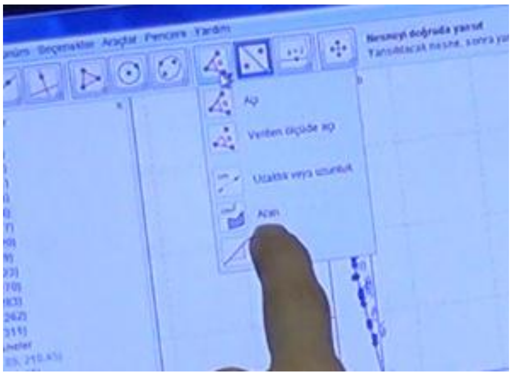
Yavuz: Tamam işte bak. Dik doğrular çizelim. Bir alayım mı?

Burcu: Tamam.

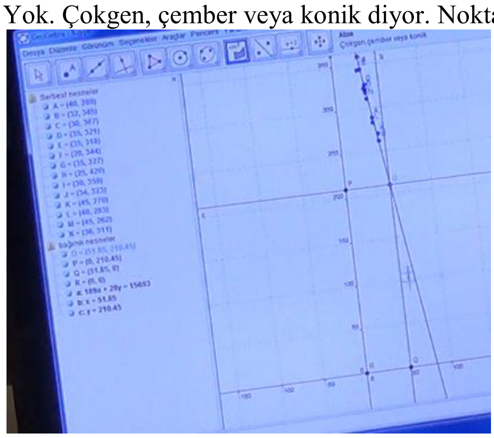
Video Alıntısı



Yavuz: Şimdi alan neredeydi burada?
Burcu: Şuradaydı bak
Yavuz: Hah tamam. Verdi mi?
Video Alıntısı

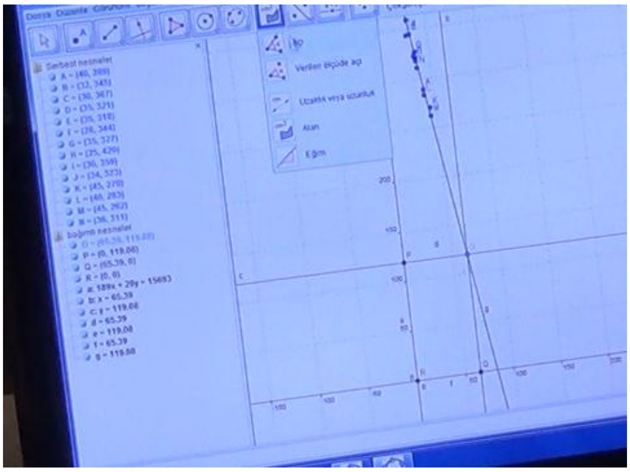


Burcu: Yok. Çokgen, çember veya konik diyor. Noktaları seçince olmadı.
Video Alıntısı



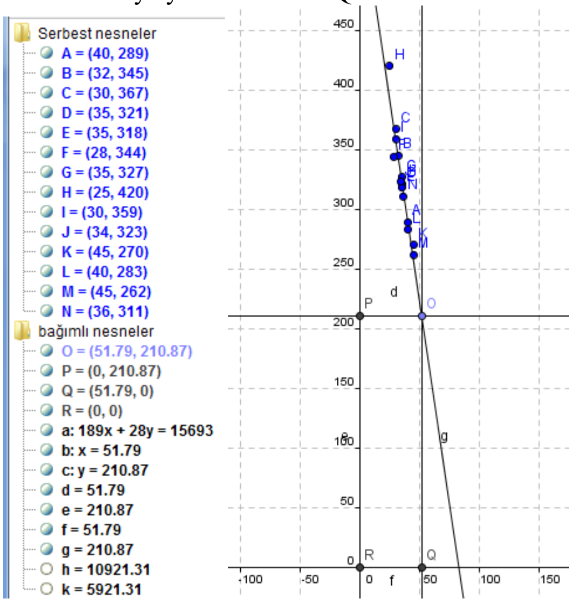
Yavuz: Allah Allah. Niye olmadı ki? Hah bir de şöyle yapalım *(Doğru parçalarıyla dörtgeni belirliyor.).* Doğru parçalarını görmediğinden herhalde böyle yapıyor.
Burcu: Hmm olabilir.
Yavuz: Tamam.
Burcu: Şimdi alan diyelim tekrar.

Video Alıntısı



Yavuz: Olmadı gene dimi? Alanı bulmadı.
Burcu: Noktaları seçince olmuyor. Şu alttaki nasıl yazılıyor? Oradan yapalım.
Yavuz: Tamam. Oraya yaz bak. P O R Q noktaları. Hah oldu bak.

GeoGebra Alıntısı



Yavuz: h bize geliri veriyor *(Cebir ekranında h'ı inceliyorlar.)*.

G_5'in Tiyatro Problemi çözümünde öğrenciler öncelikle Tablo 1'deki tüm verilerden yararlanarak bir YMM bir de Tablo 1'deki sadece İzmir ve Ankara verilerinden yararlanarak bir YMM daha oluşturdular ve bu iki doğruya GeoGebra'daki en iyi yaklaştırma doğrusu ile aynı düzlem üzerinde tanımladılar. Buradan buldukları gerçek yaşam sonuçlarını karşılaştırarak iki farklı şekilde ulaştıkları gerçek yaşam sonuçlarına teknolojinin görsel olanağı sayesinde kolaylıkla ulaştıkları ve matematiksel modellerini ayrıntılı olarak analiz edebildikleri görülmüştür. Bu sırada doğruların üzerindeki değişimi gözlemelerini sağlayan noktayı renklendirmişlerdir. Cebir ekranında değişimi incelemişler ve gerektiğinde grafiğe oldukça yakınlaşmışlardır. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

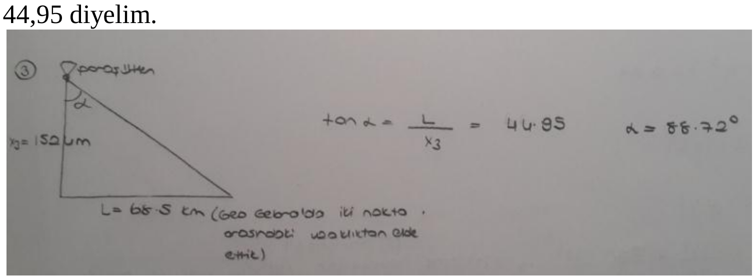
(…Bülent Tablo 1'deki verilerden sadece İzmir ve Ankara'yı yazmalarını istedi. Oradan da ayrı bir matematiksel model bulmalarını önerdi… Ankara ve İzmir'in verilerinden hareketle en iyi yaklaştırma doğrusunu buldular… İki doğrunun üzerinde değişken nokta aldılar ve inceliyorlar… Cebirsel ekrandan noktaların hareketindeki değişimi karşılaştırdılar… Değişken nokta diğerleriyle karıştığı için renklendirdiler. Gözlem Notu: G_5 Tiyatro Problemi)

E_3. Matematiksel Çözüme ve Sonuçlara Ulaşmak İçin Hesaplama Yapma

Y/AMMlerin karmaşık yapısı nedeniyle, problem durumuna ilişkin matematiksel çözümü ve sonuçları bulmada hesap makinesi veya GeoGebra öğrencilere büyük kolaylık sağlamıştır. Teknoloji, Matematiksel Analiz'de öğrencilerin matematiksel işlemlerle çok fazla zaman harcanmasını önlemiş; bilişsel yükü azaltarak öğrencilerin çözümde daha ayrıntılı matematiksel sonuçlara kısa sürede ulaşmasını sağlamıştır. Bir başka deyişle, teknoloji yoğun işlemlerle zihnin yorulmasını önleyerek, daha kapsamlı kavramsal sürecin gerçekleşmesine olanak sağlamıştır.

G_4'ün Düşme Problemi çözümünde öğrenciler Felix'in inişteki eğim açısını bulurlarken internetteki arctan değer bulma programından yararlanmışlar ve teknolojinin yardımıyla matematiksel çözüme ulaşmışlardır.

Celal: 68500'ü 1524'e böleceğiz. Bu da 44.94 oldu. Tanjantı mı alacağız?
Dila: Yok o açı değil ki. Arctan yapmalıyız.
Celal: Bu uzunluk.
Dila: O nedenle biz tan x diyip onu yazacağız ilk olarak. Arctan'dan bakacağız. İnternetten girsene Ayla?
Ayla: Neyi?
Dila: Şey arctanı bulmak için program vardı orada.
Celal: Tan α eşittir kaç çıktı sonuç?
Ayla: 44 nokta bir şeyler. 94.
Celal: 44,95 diyelim.
Kağıt Alıntısı



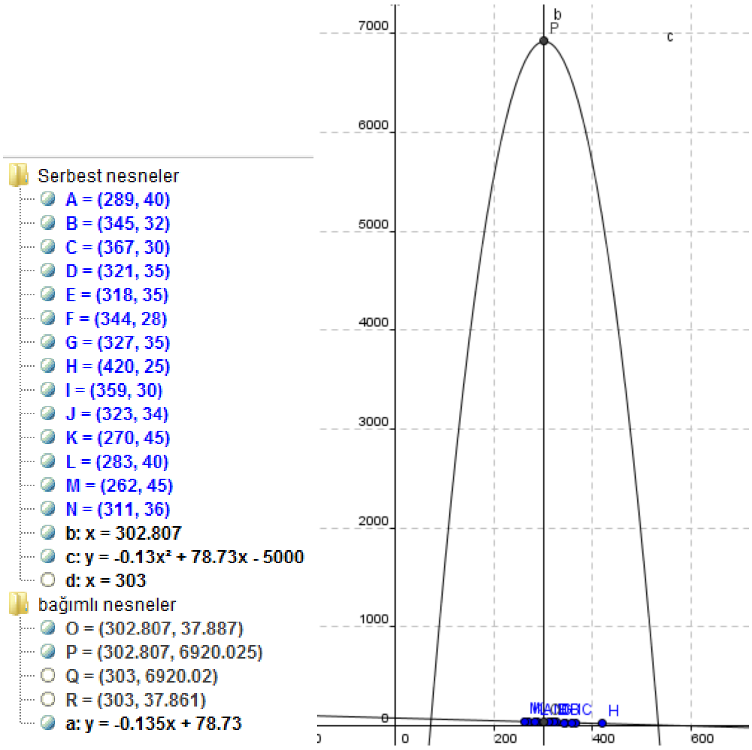
Dila: Yalnız bu nasıl olacak ki böyle? Bu kadar büyük açı mı olur?
Celal: Tan α maksimum kaç olabiliyordu? Tam tersini mi yapacağız o zaman?
Ayla: 88^0 oldu.
Celal: 88^0 çıktı.

E_4. Matematiksel Çözümü ve Sonuçları Veren Teknolojik Sistemi Kurma

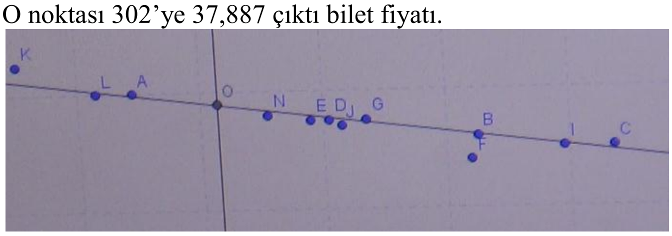
Modelleme sürecinde matematiksel çözüme ulaşmaya çalışan öğrencilerin teknolojinin de yardımıyla gerçek yaşam durumunun modelinden ve Y/AMMlerin grafiksel gösterimlerinden yararlanarak, söz konusu durumun farklı yönleri gösteren teknoloji sistemler (animasyon vb.) oluşturmuşlardır. Bu oluşturdukları simülasyon onların ileriki temel basamaklardaki (Yorumlama ve Doğrulama) yaklaşımlarını da desteklemiştir. Bu sayede, Y/AMMleri oluşturan stratejik etkenler arasındaki ilişkilerin farklı durumlar için ayrıntılı bir şekilde incelenmesine olanak sağlanmış ve matematiksel çözümün yanında birçok matematiksel sonucun da elde edilmesi kolaylaşmıştır.

G_4'ün Tiyatro Problemi çözümünde öğrenciler hem 1. YMMlerini (bilet fiyatı ve biletli sayısı arasındaki ilişkiyi veren matematiksel model) hem de AMMlerini (kar ve bilet fiyatı arasındaki ilişkiyi veren matematiksel model) aynı GeoGebra ekranına aktarmışlardır. İki matematiksel modelde xler aynı (bilet fiyatı) fakat yler farklıdır (AMMde kar, 1. YMMde ise biletli sayısı). Öğrenciler de AMM üzerinde değişen bir P noktası belirlemişler ve bu noktadan geçen ve x eksenine dik olan bir b doğrusunu tanımlamışlardır. Sonrasında ise bu b doğrusu ve 1. YMM arasındaki kesişim noktasını (O noktası) belirlemişlerdir. Bu sayede P noktasını değiştirdikçe hem biletli sayısını veren değeri hem de karın değerini cebir ekranından görme imkanını sağlamışlardır. Bu teknolojik sistem onların hem matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşmalarını hem de zengin bir matematiksel analiz süreci gerçekleştirmelerini sağlamıştır.

Celal: Tamam. Şekle bir bakalım. Bak dik doğru ile doğrunun kesişimine bakalım.



Dila: Tamam bakalım.
Celal: O noktası 302’ye 37,887 çıktı bilet fiyatı.



Dila: Hımm. Anladım.
Celal: Fiyatı bu kadar çıktı işte.
Dila: O bulduğumuz doğru ile bunu kesiştirdik. Evet. Zaten mantıken x’imiz buydu ya. xler aynıydı yani. Çok mantıklı. Aslında x yerine bunu *(302,81)* yazmış olduk.
Celal: Evet. Sonucu da verdi bize zaten.

E_5. Y/AMMlerin Kritik Noktalarına İlişkin Matematiksel Sonuçlar Elde Etme

Gerçek yaşam probleminin matematiksel analizinin ürünleri matematiksel çözüm ve matematiksel sonuçlardır. Matematiksel çözüm, doğrudan problemde istenilen durumu açıklayan matematiksel ifadelerdir. Matematiksel sonuçlar ise doğrudan problemin cevabını içermeyen ama problemin yorumlanmasına, değerlendirilmesine, doğrulanmasına ve geliştirilmesine olanak sağlayan matematiksel çözümün içerdiği durumdan daha kapsamlı durumlara yanıt veren matematiksel ifadeler olarak ortaya çıkmıştır. Bu alt basamakta, öğrenciler tanım kümesi, tanımsız olduğu noktalar, değer kümesi, grafiğin türü, artığı azaldığı noktalar, dönüm noktaları gibi

Y/AMMlerin kritik noktalarını belirlemişler ve ileriki temel basamaklar olan Yorumlama ve Doğrulama’da kullanacakları matematiksel sonuçlara ulaşmışlardır.

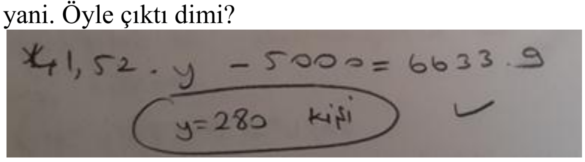
G_3’ün Tiyatro Problemi çözümünde, öğrencilerin problem ifadesine onlardan maksimum kar için belirlenmesi gereken bilet fiyatı sorulduğu halde öğrencilerin bunun yanında belirlenen bilet fiyatında (yaklaşık 41) kaç kişinin tiyatroya geleceği ile ilgili sayısal değere (matematiksel sonuç) de ulaştıkları görülmüştür. Daha sonrasında öğrencilerin Yorumlama ve Doğrulama basamağında bu gelen kişi sayısı üzerinden yorumlamalarda bulundukları ve bu matematiksel sonucu çözümün ileriki aşamalarında kullandıkları görülmüştür.

Serap: Evet. Tamam. Şeyi *(gelen sayısı)* de bulacak mıyız? Onu da şeyden bulabiliriz. Şu bize kazancı veriyordu ya. x çarpı y eksi 5000. x yerine bunu yazacağız ve y’yi çekeceğiz buradan.

Sena: Hıhı.

Serap: Şu işlemi yapsana *(Kağıda denklemi yazıyor.)*. 280,1 çıktı. 280 kişi yani. Öyle çıktı dimi?

Kağıt Alıntısı



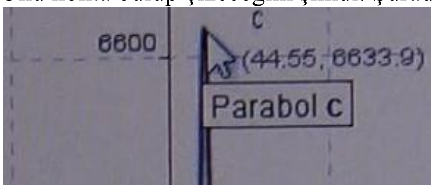
Sena: Evet.

E_6. Matematiksel ve Teknolojik Bilgilerden Yararlanma

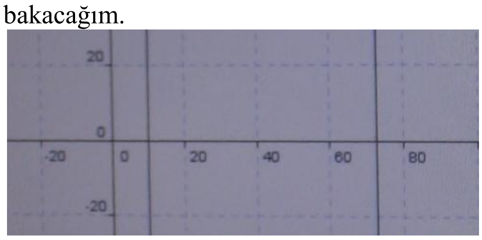
Matematiksel Analiz yapılırken kullanılan yöntem ve tekniklerin öğrencilerin sahip oldukları matematiksel ve teknolojik bilgileriyle şekillendiği görülmüştür. Teknolojik yöntemlerle matematiksel yöntemler birbirlerini karşılıklı olarak etkilemişler ve matematiksel yöntemler bu süreçte teknolojik yöntemlerle desteklenmişlerdir. Ayrıca öğrenciler Matematiksel Analiz’de, Matematikselleştirme veya Üst Matematikselleştirme basamağındaki kadar üst düzey bilgilere ihtiyaç duymamışlardır. Bunun nedeni ise, Y/AMMlerin oluşturulmasının daha karmaşık bir süreci içermesinden dolayı üst düzey bilgi ve beceri gerektirmesi; Matematiksel Analiz’in ise zaten var olan Y/AMMlerin ayrıntılı analizini içermesidir. Ama bunun yanında yaratıcılık, matematiksel ve teknolojik bilgilerin maksimum verimle ilişkilendirilmesi bu alt süreçte önemli olmuştur.

G_3'ün Tiyatro Problemi çözümünde öğrencilerden Serap maksimum kar için buldukların AMMnin grafiğinin tepe noktası bulmaları gerektiğini ve bunu da $\frac{-b}{2a}$'dan bulabileceklerini ifade ederek matematiksel bilgisini kullanmıştır. Buna karşılık ise Kumsal AMMnin x eksenini kestiği noktalardan hareketle parabolün tepe noktasının apsisin bulunabileceğini matematiksel bilgisini ortaya koymuştur. Daha sonra ise parabolün x eksenini kestiği O ve A noktalarının orta noktası teknolojik bilgiler (kesişim bulma, orta nokta bulma gibi) kullanılarak ortaya çıkarılmıştır.

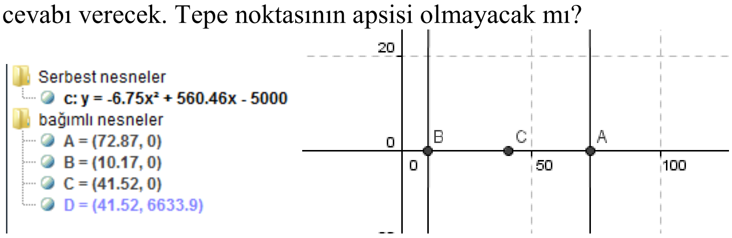
Sena: Onu bulsak ya.
Serap: Onu nokta bulup çizeceğim şimdi. Şuradan bir nokta belirleyelim.
Video Alıntısı



Sena: Tam tepe noktası olur mu acaba?
Serap: Tepe noktasını bulalım parabolün. Eksi b bölü 2a'dan.
Kumsal: Hmm. Evet. Oradan da yapabiliriz.
Serap: Öyle yapalım bence.
Sena: Grafikten de yapabiliriz.
Kumsal: Bunun x'ini biliyor muyuz? Apsisini de bilmiyoruz ki. Bir dakika tam kestiği noktalara baksak ya. Biraz büyütsene. Kestiği eksenlere bakacağım.
Video Alıntısı



Serap: Onları tam nasıl belirleyelim.
Kumsal: Kesiştirelim direk çıksın nasıl yapıyorduk? Ben şey diye düşündüm. Bu iki noktayı bulsak. Tam orta noktalarını alsak. Zaten apsisi bize cevabı verecek. Tepe noktasının apsisi olmayacak mı?
GeoGebra Alıntısı



E_7. Teknolojik İle Matematiksel Gösterim Arasındaki Geçiş Yapma

Öğrencilerin Matematiksel Analiz'de matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşırlarken teknoloji ile veya teknoloji olmadan ulaştıkları Y/AMMlerinin teknolojik ve matematiksel gösterimlerini dikkate aldıkları ve birbirlerine dönüştürdüklerin görülmüştür. Örneğin GeoGebra'da her türlü değişken ancak x ve y ile ifade edilebilmiştir. Bu da kağıt üzerinde z olarak ifade edilen değişkenin ister istemez GeoGebra'da farklı şekilde yapılandırılmasını gerektirmiştir. Bu doğrultuda matematiksel ifadeler ile teknolojik gösterim arasındaki geçiş matematiksel çözüm ve sonuçlar için önemli olmuştur. Kısaca teknoloji destekli ortamda matematiksel çözüm ve sonuçlara ulaşılırken değişkenlerin yazım biçimine dikkat edilmiştir.

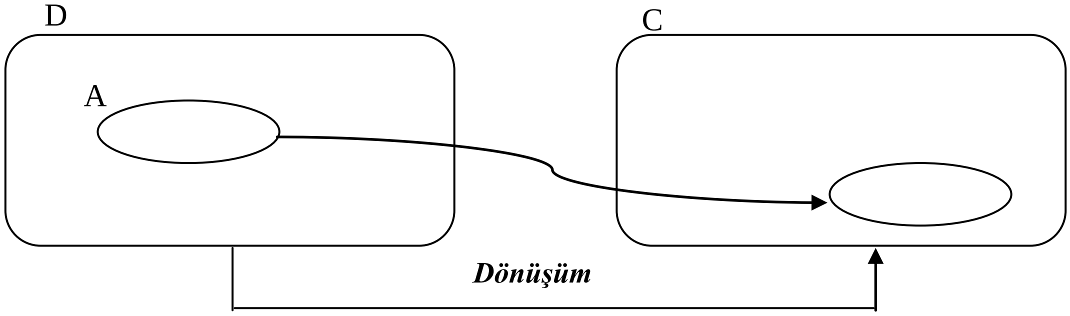
G_6'nın Düşme Problemi çözümünde öğrenciler teknolojik bilgilerini kullanarak buldukları matematiksel çözüm ve sonuçların cebir ekranındaki teknolojik gösteriminde yuvarlamayı 1 hane olarak ayarlamışlardır. Bu onların çözümleri daha da basitleştirmelerine olanak sağlamıştır. Burada Burcu yuvarlamayı 1 hane yapmalarını istemiş ve matematiksel gösterimlerde sayısal değerlerin virgülden sonra 1 hane olarak yazılmasını teknolojik gösterimlerine de yansıtmıştır. Bazı gruplar GeoGebra'da buldukları bu değerleri kendileri elle yuvarlamışlardır. Bu durum da bu grupların matematiksel gösterimlerle teknolojik gösterimler arasında geçişler yaptıklarını göstermiştir.

Yavuz: Ne kadarmış?
Burcu: 5,59. Yuvarlamayı 1 hane yapalım bir dakika.
Video Alıntısı

Yavuz: Tamam oldu.
Burcu: Hah böyle daha hoş oldu.

Öğrenciler çözümlerde GeoGebra'dan yararlandıkları zaman GeoGebra yardımıyla elde ettikleri teknolojik çözümü matematiksel çözüm olarak ele almışlardır. Bu aşamada öğrencilerin teknoloji ve matematiksel gösterim arasında geçiş yapmışlardır (bkz. Şekil 52).

Şekil 52. Matematiksel Analiz'de Teknolojik ve Matematiksel Gösterimlerin Yapısı



A: Teknolojik Çözüm (Yardımcı Bileşen)

B: Matematik Çözüm (Temel Bileşen)

C: Matematiksel Sonuçlar (Yardımcı Bileşen)

D: Teknolojik Sonuçlar (Yardımcı Bileşen)

6. Matematiksel Çözüm

F. YORUMLAMA

7. Gerçek Yaşam Çözümü

F_1. Matematiksel çözümün gerçek yaşam karşılığını belirleme

F_2. Gerçek yaşam durumu ile zihinsel modeli arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarma

F_3. AMMnin kritik noktalarının gerçek yaşam karşılıklarını belirleme

F_4. Gerçek yaşam çözümü ve sonuçlarının problem durumu açısından incelenmesi

F_5. Varsayımları gerçek yaşam çözümü ve sonuçları doğrultusunda irdeleme

Matematiksel modelleme problemlerinin çözüm sürecinde, Matematiksel Analiz sonunda elde edilen matematiksel çözümler öğrenciler için yeterli olmamıştır. Öğrencilerin bunun yanı sıra, matematiksel çözümden gerçek yaşam çözümüne ulaşmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu basamakta aynı zamanda, matematiksel sonuçlar da gerçek yaşam durumu dikkate alınarak tekrar sorgulanmış ve bu şekilde gerçek yaşam sonuçlarına ulaşılmıştır. Sistematik Yapıyı Kurma temel basamağında gerçek yaşam temelli çözüm sürecinden matematiksel dünya temelli çözüm sürecine geçilmişken, bu temel basamakta matematiksel dünya temelli çözüm sürecinden gerçek yaşam temelli çözüm sürecine geçilmiştir. Yorumlama temel basamağı beş alt basamakta toplanmıştır.

AMM kurulduktan sonra bu modelden elde edilen matematiksel çözümlerin ve matematiksel sonuçların gerçek yaşam durumu için ne anlam ifade ettiklerinin irdelenmesi oldukça önemli olmuştur. Gerçek yaşam durumu dikkate alınarak matematiksel modellerin değişik durumlardaki hareketinin, eğiliminin görülmesi uygun çözümün ele alınması ve kritik noktaların belirlenmesi ancak bunların ilgili gerçek yaşam durumunu ne ölçüde ve nasıl açıkladığıyla Yorumlama temel basamağında bir anlam kazanmıştır.

F_1. Matematiksel Çözümün Gerçek Yaşam Karşılığını Belirleme

Öğrencilerin ölçeklendirme gibi farklı yöntemlerle matematiksel çözümlerinin gerçek yaşam durumundaki karşılıklarını belirledikleri görülmüştür. Ölçeklemenin 1:1 olduğu durumlarda matematiksel çözüm ile gerçek yaşam çözümü aynı olmuştur. Öğrenciler zaman zaman gerçek yaşam çözümü ile matematiksel çözüm arasındaki farkı hissedememişler ve sonrasında çözümün doğruluğunu incelerken bu durumun farkına vararak hatalarını düzeltmişlerdir.

G_2'nin Düşme Problemi çözümünde, öğrenciler varsayımları doğrultusunda üç farklı bölge (hızlandığı, yavaşladığı ve paraşüt ile indiği kısım) için ayrı ayrı üç YMM tanımlamış (burada AMM üç YMMden oluşan bir denklem sistemidir.) ve bu bölgelerdeki sürtünmelerin ivmesel etkisini YMMlerden yararlanarak gerçek yaşam durumu doğrultusunda yorumlamışlardır. Bu doğrultuda hızlandığı kısımdaki ivme 6,77 m/s^2 olarak hesaplanmıştır. Gerçek yaşam durumunda yer çekimi ivmesinin de yaklaşık 9,5 m/s^2 olarak kabul edilmesiyle sürtünmenin ivmeyi azaltıcı etkisinin yaklaşık -2,8 m/s^2 olduğu bulunmuştur.

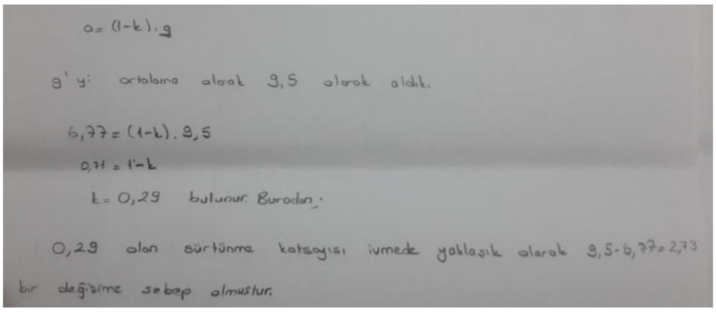
Mete:	Hah doğru. Tamam. 1170 çarpı 10. Yanına bir sıfır koy. 11700 olacak. Bölü 36.
Ela:	11700 bölü 36. 325.
Mete:	Yani neymiş? Bir saniyede 325 metre gidiyormuş ortalama olarak. Bu hızı.
Masal:	Evet.

Mete: Şimdi bir de bunu 48'e böleceğiz. Bu hız ya.
Masal: Evet.
Mete: Bir tane kağıt versene ya boş olanlardan.
Ela: 6,77.
Masal: İvmesini yaz sen.
Mete: Metre bölü saniye kare.
Masal: Hıhı.
Mete: Bu hızlandığı kısımdaki ivmesiymiş.

.
.
.

Mete: Doğru ya. 6,77 oldu.
Ela: g'yi nereden bulduğumuzu yazalım.
Mete: g'yi ortalama aldık diyelim. Bu aralıkta etki eden ortalama sürtünme kuvveti.

Kağıt Alıntısı



a= (1-k).g

g'yi ortalama olarak 9,5 olarak aldık.

6,77= (1-k). 9,5

0,71 = 1-k

k= 0,29 bulunur. Buradan;

0,29 olan sürtünme katsayısı ivmede yaklaşık olarak 9,5-6,77=2,73 bir değişime sebep olmuştur.

Masal: Değişmiş midir diyor sadece.
Mete: Hah değişmiştir. İvme dış etken olmasaydı 9,5 olacaktı ama 6,7 olmuş. 2,8 azalmış.

F_2. Gerçek Yaşam Durumu İle Zihinsel Modeli Arasındaki İlişkiyi Ortaya Çıkarma

Matematiksel dünya temelli çözüm sürecinden gerçek yaşam temelli çözüm sürecine geçildiğini gösteren alt basamaktır. Öğrenciler varsayım, durumun modeli ve gerçekteki hali arasındaki ilişkiyi, ölçeklendirme vb. etkenlerle ilişkilendirmişlerdir. Bu alt basamak öğrencilerin buldukları matematiksel çözüm ve sonuçlarla gerçek yaşam çözümü ve sonuçları arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmasını içermiştir.

G_5'in Köprü Problemi çözümünde öğrenciler köprünün uzunluğunun gerçek değerini bulmaya çalışırlarken öncelikle GeoGebra kullandıkları fotoğrafın ölçeğini belirlemişler. Matematiksel çözümlerinin (8,06 birim) matematiksel bilgileri (orantı) ve hesap makinesi yardımıyla gerçek yaşam çözümüne (1752 metre) ulaşmışlardır. Bunun için de öğrenciler fotoğrafın sağ alt tarafında bulunan ölçeğinden hareketle bir oranlamaya gitmişlerdir.

Bengi: Tamam.

GeoGebra Alıntısı

Bülent: Boyutu kaçmış? 8,06.

Canan: Evet.

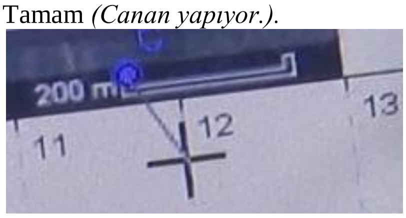
Bülent: Burada da bakınca 200 metre 1 birim gibi oluyor *(Ölçmeden göz kararı tahmin ediyor.)*.

GeoGebra Alıntısı

Canan: Evet. Ama garanti olsun. Oradan da doğru parçası yapalım olmaz mı?

Bengi: Evet. Tam bu iki nokta arasında da bulacağız. Sonra oranlayacağız.

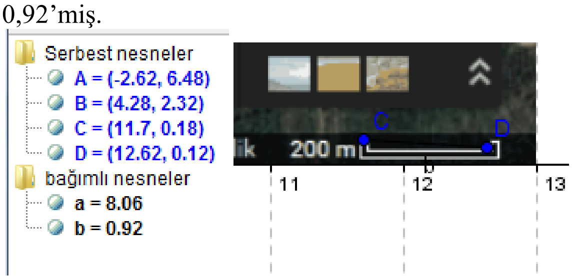
Bülent: Tamam *(Canan yapıyor.)*.



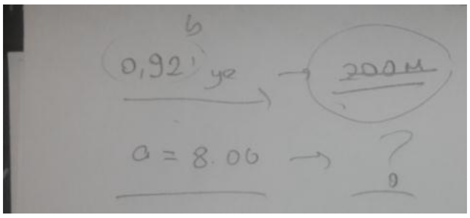
Bengi: Tamam çıktı. Kaç oldu?

Bülent: 0,92'miş.

GeoGebra Alıntısı



Canan: 0,92 birim 200 metreye denk geliyormuş.

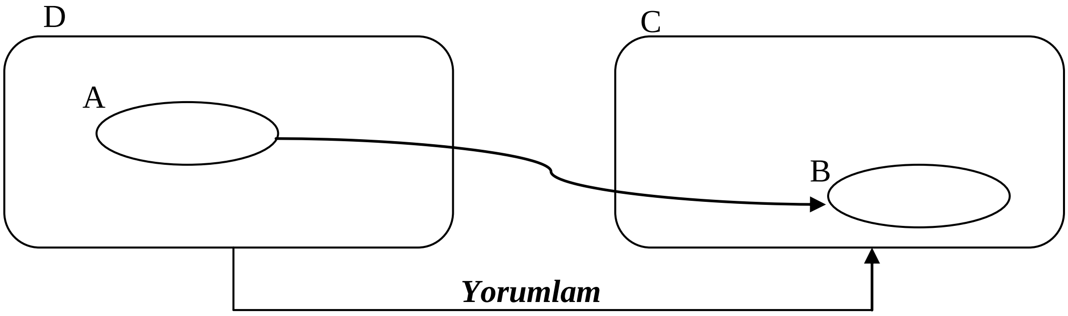


Bülent: 0,92'di değil mi?
Canan: Evet *(Hesap makinesinden yapıyorlar.).*
Bülent: 1752 metre.

F_3. AMMnin Kritik Noktalarının Gerçek Yaşam Karşılıklarını Belirleme

Bu alt basamakta, AMMnin kritik noktalarını temsil eden matematiksel sonuçlardan gerçek yaşam sonuçlarına ulaşılmıştır. Öğrenciler Matematiksel Analiz sürecinde elde ettikleri tanımlı olduğu noktalar, maksimum ve minimum değerleri, fonksiyonun sınırları, tanımsız olduğu değerler gibi kritik noktaların gerçek yaşam karşılıklarını belirlemişlerdir. Bu sayede, gerçek yaşam durumuna yönelik yapılacak çıkarımlar, Yorumlama ve Doğrulama temel basamağındaki yaklaşımlar için uygun ortamlar sağlamıştır (bkz. Şekil 53).

Şekil 53. Matematiksel Modelleme Sürecindeki Yorumlama Temel Basamağında Karşılaşılan Temel ve Yardımcı Bileşenler



A: Matematiksel Çözüm (Temel Bileşen)

B: Gerçek Yaşam Çözümü (Temel Bileşen)

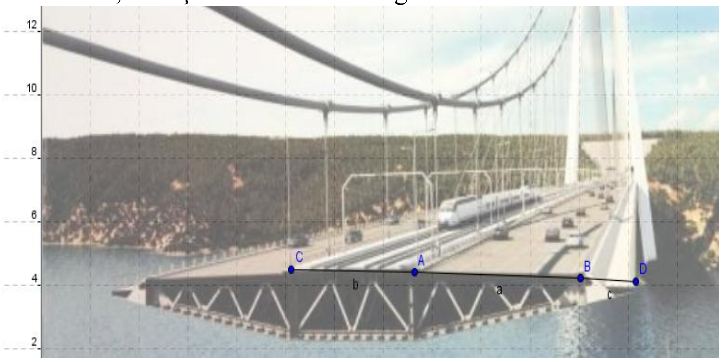
C: Gerçek Yaşam Çözümü (Yardımcı Bileşen)

D: Matematiksel Sonuçlar (Yardımcı Bileşen)

G_3'ün Köprü Problemi çözümünde öğrencilerin köprünün genişliğini bulurlarken trenin geçtiği bölümün, gidiş-gelişin (4 şerit + 4 şerit) ve kenarlarda kalan ekstra boşlukların gerçek yaşam değerlerine ulaştıkları ve bu gerçek yaşam sonuçlarını matematiksel çözümlerine ulaşmada kullandıkları *[30 metre (geliş-gidiş karayolundaki 8 şerit) + 11,15 metre (trenin geçtiği bölümü) + 9,98 (kenardaki boşluklar) = 51,13 (köprünün genişliği]* görülmüştür.

Serap: Evet. Buradan da 2,26 olmalı. O taraf zaten net görünmüyor ama 2,26' dan 2 tane olmalı. Yani o zaman onu da çarparsak 4,52 birim oluyor. O zaman aynı orantıyı bunun için de yapacağız. 6,79 15 metre ise 4,52 kaç olacak ona bakacağız.

GeoGebra Alıntısı



Kumsal: Evet *(Bu sıra Kumsal kağıda geçiyor yapılanları.).*

Sena 15 çarpı 4,52 bölü 6,79 *(Sena hesap makinesinden hesaplıyor.).* Evet. 9,98 buldum. Onu da yazalım.

Kumsal: Tamam.

Serap: Evet. Şimdi bizim 30 metremiz *(geliş gidiş karayolu 8 şerit)* vardı. 11,15 *(trenin geçtiği bölümün genişliği)* daha geldi. Bir de 9,98 *(kenardaki boşluklar).* 41,15'e 9,98 ekleyelim kaç olacak. 51,13. Yani yaklaşık 51 buçuk diyebiliriz. 51,50 metre genişlik.

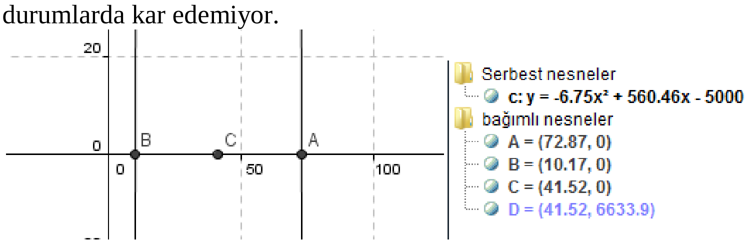
F_4. Gerçek Yaşam Çözümü ve Sonuçlarının Problem Durumu Açısından İncelenmesi

Bu alt basamakta öğrencilerin gerçek yaşam çözümü/sonuçları problem durumu açısından ayrıntılı olarak incelemişler ve AMMnin açıklayabildiği durumlarla ilgili yorumlarda bulunmuşlardır. Bu alt basamakta, modelin işleyişinin gerçek yaşam durumuna yansımalarının ayrıntılı olarak incelendiği ve modelleme probleminin farklı durumlarına yönelik düşüncelerin sergilendiği görülmüştür. Bu süreç modelin işleyişinin gerçek yaşam durumuna yansımalarının ayrıntılı incelenmesini içermiştir.

G_3'ün Tiyatro Problemi çözümünde öğrenciler buldukları matematiksel çözümlerin ve sonuçların gerçek yaşam durumlarında ne anlama geldiğini yorumlamışlardır. Bu doğrultuda Kumsal AMMyi yorumlayarak elde ettikleri matematiksel sonuçları (AMMnin x eksenini kestiği noktaları) gerçek yaşam durumunda dikkate almış ve gerçek yaşam sonuçlarını elde ederek gerçek yaşamda yorumlamıştır. Bu doğrultuda Kumsal İstanbul'da düzenlenecek gösteride bilet fiyatının 72.87 TL'ye eşit - ondan büyük veya 10.17 TL'ye eşit - ondan küçük olduğu durumlarda turne ekibinin kar edemeyeceğini ifade etmiştir. Serap da turne ekibinin bilet fiyatını 10.17 ile 72.87 arasında belirlediğinde kar edeceğini söylemiştir. Serap ayrıca 0-10 lira aralığında ve 72'den fazla iken turne ekibinin zarar edeceğini ve en çok karın da parabolün tepe noktasında olacağını yorumlamıştır.

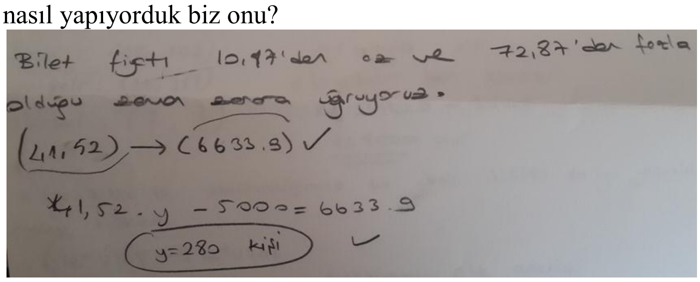
Kumsal: Bilet fiyatının 72 veya A *(72.87,0)* ve B *(10.17,0)* olduğu ve daha aşağıda *(10.17 den küçük ve 72.87'den büyük demek istiyor.)* olduğu durumlarda kar edemiyor.

GeoGebra Alıntısı



Serap: Evet. Şu A ile B'yi yazsana. Noktaları. Yani kar ettiği noktalar şu iki aralık. Ama en çok kar ettiği nokta tepe noktamız. 0-10 lira arasında ve 72'den fazla olduğunda ise zarar ve tam bunlarda ise nötr. Kazancı da bulduk zaten biz. Şimdi bu noktada tam kazanç ne kadar onu bulacağız nasıl yapıyorduk biz onu?

Kağıt Alıntısı



F_5. Varsayımları Gerçek Yaşam Çözümü ve Sonuçları Doğrultusunda İrdeleme

Bu alt basamakta, çözüm sürecinin başında ve devamında yapılan temel varsayımların gerçek yaşam çözümüne/sonuçlarına olan etkileri düşünülmüştür. Öğrenciler varsayımların değiştirilmesi sonucunda olası alternatif durumlardaki ve düşüncelerdeki değişiklikler üzerine açıklamalar yapmışlardır. Aynı zamanda öğrenciler bu basamakta buldukları gerçek yaşam çözümlerinin ve sonuçlarının nedenini açıklamaya çalışmışlardır.

G_1'in Düşme Problemi çözümünde öğrencilerin gerçek yaşam çözümüne ulaştıktan sonra Felix'in yaklaşık 70 km uzağa düşmesinin sebebi olarak bazı varsayımlarda bulunmuşlardır. Bu doğrultuda Demet düşme anında havanın oldukça rüzgarlı olduğunu varsayımında bulunmuş ve Selen de rüzgarın Felix'in çok fazla sürüklediği yorumunu yapmıştır. Ayrıca Selen problemin başında Felix'in atladığı yüksekliğin planlanan noktadan sapmanın miktarından daha büyük olduğu varsayımının doğru olmadığını çözüme ulaştıktan sonra anladığı görmüştür.

Demet:	Buradan da havanın rüzgarlı olduğunu anlayabiliriz. Rüzgar kuvvetinin de olduğunu görebiliriz diyeyim mi? Ya da rüzgar kuvvetinin de etki ettiğini görebiliriz
Defne:	Hıhı.
Selen	Düştüğü yüksekliği daha az.
Defne	Aynen.
Selen	Rüzgar baya sürüklemiş onu. Bana bakınca şu uzaklık daha az gibi gelmişti ilk. Ama öyle değilmiş.

7.Gerçek Yaşam Çözümü

G. DOĞRULAMA

8. Çözüm Kararı

G_1. Gerçek yaşam sonuçlarındaki beklenmeyen durumların irdelenmesi

G_2. Gerçek yaşam sonuçlarını deneyimlere dayalı tahminlerle veya ölçümlerle karşılaştırma

G_3. Gerçek yaşam sonuçlarını problem verileri ile karşılaştırma

G_4. Gerçek yaşam sonuçlarını video ve resimlerdeki durumlarla karşılaştırma

G_5. Gerçek yaşam çözümünün/sonuçlarının yeterliğine ilişkin karara varma

G_6. İşlemleri, düşünceleri ve basamakları kontrol etme

Öğrenciler bu basamakta ulaştıkları gerçek yaşam çözümlerinin ve sonuçlarının gerçek yaşamı ne kadar karşıladığı ile ilgili yaklaşımlarda bulunmuşlardır. Yani Doğrulama'da öğrenciler AMMden elde ettikleri gerçek yaşam çözümü ve sonuçları doğrultusunda çözümlerinin gerçek yaşam için idealliğini irdelemişlerdir. Öğrenciler bu basamakta gerçek yaşam çözümleri ve sonuçları ile gerçek yaşama ilişkin tahminlerini ve yaptıkları ölçümleri karşılaştırmışlar ve çözümünde idealliğini sorgulamak için video, animasyon, fotoğraf ve problemdeki verilerden yararlanmışlardır. Teorik ve deneysel olarak elde edilen gerçek yaşam problemindeki stratejik etkenlere ilişkin gerçek veriler birbirleriyle karşılaştırılmış ve çözümün geçerliliği hakkında bir karara varılmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin matematiksel çözümden gerçek yaşam çözümünü ortaya çıkarırken beş alt basamağın ortaya çıkmıştır.

G_1. Gerçek Yaşam Sonuçlarındaki Beklenmeyen Durumların İrdelenmesi

Öğrenciler tarafından gerçek yaşam sonuçları belirlendikten sonra, gerçek yaşam durumlarına karşı hangi durumlarda AMMnin yetersiz kaldığını ve bu durumun çözüm için önemli bir sorun yaratıp yaratmadığını ayrıntılı olarak incelenmişlerdir. Bu tür durumlar, çözümde ortaya atılan üst düzey varsayımların modelin yeterliliğine etkisinin incelenmesine ve olası varsayım değişikliğinin getirilerinin düşünülmesine ortam yaratmıştır.

G_5'in Düşme Problemi çözümünde düşmenin ilk 1 dakikasındaki Felix'in ivmesini 4 m/s^2 olarak bulmuşlardır. Bülent ise buldukları bu değerin doğru olmadığını ve bir yerde hata yapmış olabileceklerini ifade etmiştir. Bengi ise çözümde ivmenin 4 m/s^2 çıkmasının beklenmeyen bir durum olmadığını ve çözümde bir hatanın olmadığını ifade etmiştir. Grup bu doğrultuda çözümlerine kaldıkları yerden devam etmişlerdir.

Bülent: Bir de 0'dan 63'e kadar bakalım. 4 çıktı. Niye öyle çıktı ya? Hata mı yaptık? 60'ı alsak ne olur peki?

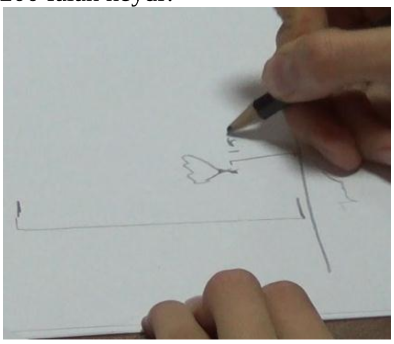
Video Alıntısı

Bengi: Neden hata olsun ki?

Bülent: Şimdi 1012'yi metre bölü saniyeye çevirdik. Ondan sonra 63 saniyeye böldük. 4 nokta küsurmuş ivmesi.

Bengi: Tamam işte. Sonra azaldığından dolayı da ivmesi 4'e düştü. Çok normal. Bu arada ivme ne kadar? Ona bakalım. Azalan arada.

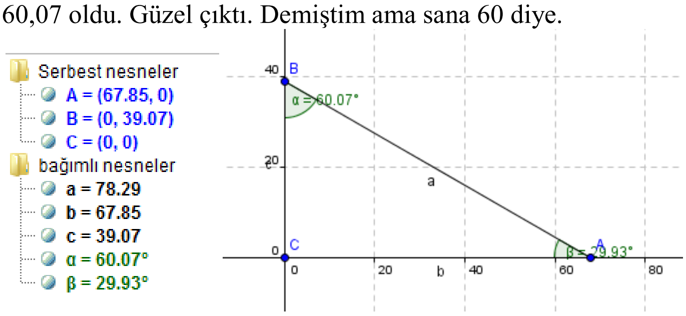
G_6'nın Düşme Problemi çözümünde de öğrenciler hızlandığı kısımdaki Felix'in ivmesini km/saat^2 cinsinden yaptıklarından dolayı 24 bulmuşlardır. Normalde yer çekimi ivmesinin 9,8 olması da onların çözümde hata yaptıklarını düşünmelerine yol açmıştır. Bu doğrultuda bu beklenmedik duruma karşı çözümlerini tekrar gözden geçirmişler ve hatalarını düzeltmişlerdir.

Burcu:	Yer çekimi de değişir burada.
Yavuz:	Tamam da çok değişmez ya. Sonuçta yer çekiminin olmadığı yer yok.
Burcu:	Evet. Ama değişiyor. Çünkü Dünya'da Ekvator ve kutuplar arasında dahi yerçekimi değişiyorsa sıfır virgül bilmem kaç kadar burada da hayli hayli değişir.
Yavuz:	Ona da girersek ama çıkamayız ki bu işin işinden.
Burcu:	Önce 10 demeyiz de. Mesela 9,8 deriz. Ona göre bakarız.
Yavuz:	Aynen 9,8 ilk hızı sıfır yükseklik ne kadardı? Yazmıştık onu. Bir şekli oluşturalım
	. . .
Yılmaz:	Şuradan belki yaklaşık olarak buluruz ya a'yı. Yanlış çıkıyor buradan ya *(Gülüyorlar.)*?
Burcu:	Niye bulamadık ya? İvme 24 gibi bir şey çıktı. Böyle olmaması lazım.
Yılmaz:	a dedik. 45 saniye dedik. Hızına ne demiştik biz? Hız değil de ivme mi geldi?
Burcu:	Bir dakika. Ben yeni temiz bir sayfa açıyorum ya. Şimdi burası yer. Burada paraşütü açıyor. 1524'de açtı paraşüt *(Tekrar çizim yapıyor.)*. 200 falan neydi?
Video Alıntısı	

G_2. Gerçek Yaşam Sonuçlarını Deneyimlere Dayalı Tahminlerle veya Ölçümlerle Karşılaştırma

Öğrenciler gerçek yaşam çözümü ve sonuçlarını irdelemek ve çözümün geçerliliğini kontrol etmek için Y/AMMden elde ettikleri gerçek yaşam sonuçları ile gerçek yaşam deneyimlerine dayalı tahminler ve ölçümlerle elde ettikleri sayısal değerleri karşılaştırmışlar ve bu sayısal değerlerle ilgili yorumlamalarda bulunmuşlardır. Bu süreçte öğrenciler çeşitli yöntemler kullanarak tahminler ve ölçümler yapmışlardır.

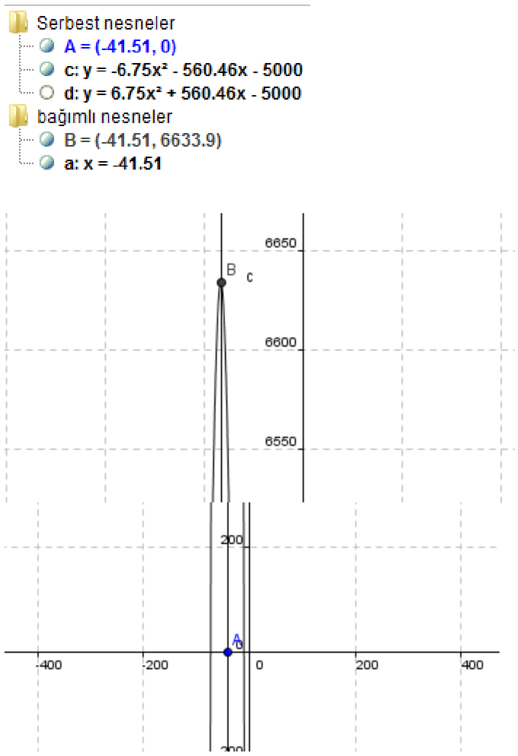
G_6'nın Düşme Problemi çözümünde öğrenciler Felix'in iniş açısını bulmaya çalışırlarken Yılmaz gerçek yaşam çözümünü bildikleri bir tan değerinden hareketle (tan 30^0 = 1/2) iniş açısının yaklaşık olarak 60^0 çıkacağını tahmin etmiştir ve bunu Burcu da onaylaşmıştır. Öğrenciler daha sonra GeoGebra'da ilgili üçgenin yardımıyla iniş açısının tam olarak değerini $29{,}93^0$ bulmuşlardır ve önceki tahminleriyle ile buldukları gerçek yaşam çözümünün aynı çıkmasından dolayı çözümü doğru yaptıklarını düşünmüşlerdir.

Burcu:	Ortalama olacaksa en tepeden. Bunlar hesap edememiş rüzgarı. Yoksa arada 70 km fark var. Az değil.
Yavuz:	1 bölü 2 mi oldu o zaman? 30^0 falan olacak derecesi.
Burcu:	Evet. 30^0 olur o zaman. Burada tan hesabı var mı? arctan'dan nasıl bulacağız bunu?
Yılmaz:	GeoGebra'da yok mu bu?
Burcu:	3 nokta girelim. Direk açıyı bulalım.
Yılmaz:	Yani.
Burcu:	Başka bir dosya açayım. Bunu kaydedeyim. Unutmayalım. Noktaları girelim direk.
Yavuz:	Tamamdır. sıfır nokta sıfırdan yazalım. 39,068 oluyor.
Burcu:	Evet. 67,85.
Yavuz:	67,85'e 0 şurası.
Burcu:	Ne oluyor? Sıfır virgül 39.068.
Yavuz:	Yuvarladı bunu.
Burcu:	Tamam.
Yavuz:	Şimdi bu ikisini birleştirelim.
Burcu:	Bunları da birleştirdim. Şimdi de açı.
Yavuz:	60,07 oldu. Güzel çıktı. Demiştim ama sana 60 diye.
GeoGebra Alıntısı	

G_3. Gerçek Yaşam Sonuçlarını Problem Verileri İle Karşılaştırma

Öğrenciler çözümlerinin doğruluğunu incelerken, problem ifadesindeki gerçek verilerle buldukları gerçek yaşam sonuçlarını karşılaştırmışlardır. Bu doğrultuda öğrencilerin önemli stratejik etkenlere ilişkin verilmiş verilerdeki ortalama değerlerle buldukları sonuçların doğru olup olamayacağı ile ilgili karara varmaya çalışmışlardır.

G_2'nin Tiyatro Problemi çözümünde öncelikle buldukları AMMyi GeoGebra'ya yanlış giren öğrenciler doğru grafiğin y eksenine göre simetriğini elde etmişlerdir. İlk başlarda bu grafiğin yanlış olduğunu düşünseler de x'in negatif değerini pozitif düşünerek hareket etmişlerdir. Yani x'in (bilet fiyatı) maksimum değeri -41.51 iken bilet fiyatının 41,51 TL olduğunu vurgulamışlardır. Ayrıca grafikten İstanbul'daki maksimum karın 6633 TL çıktığını ve bunun da Ankara'daki kardan düşük olduğunu ifade etmişler ve bu nedenle işlemlerinde hata yaptıklarını düşünerek tekrar çözümlerini kontrol etmişlerdir. Fakat G_2 çözümlerindeki hatanın nedenini ortaya çıkaramamışlardır. Bu buldukları gerçek yaşam çözümü üzerinden çözümlerini bitirmişlerdir.

Masal:	Tamam.
GeoGebra Alıntısı	
Mete:	Dik çizelim şimdi de. Tamam bak. Şimdi de aynı şey çıktı ama negatifi. Biz doğru yaptık devam edelim.
Ela:	6633 karı oluyor. Burada gördüğümüz.
Mete:	Maksimumu Ankara'daki kardan daha düşük çıkıyor.
Ela:	Burada İstanbul'da edilebilecek en iyi kar mı demek istiyor? Yoksa diğerlerini de mi hesaba katacağız?
Masal:	İstanbul'daki bence.
Ela:	O zaman bu olabilir. 7000'i geçmek zorunda değil kar.
Mete:	Ya ne alaka ki neye göre belirleyecek İstanbul'daki karı. Nüfusa göre mi? O zaman burada birçok değişken işin içine girebilir. İstanbul'un nüfusu girer. İstanbul'daki üniversite mezunu bile girer işin içine.
Ela:	Öyle de ona bakarsan Aydın ile Ankara arasında da fark yok çok.

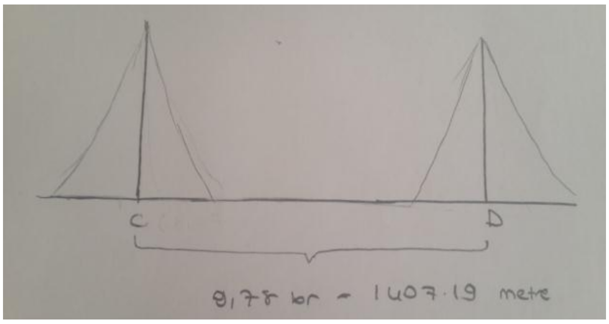
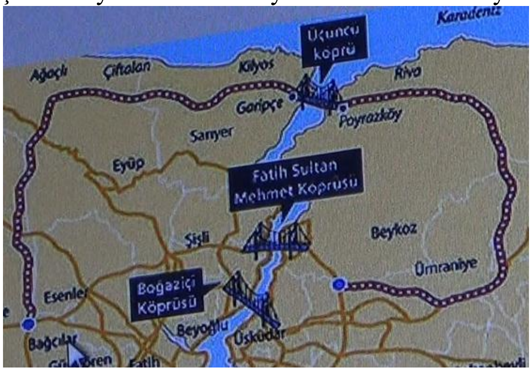
Mete:	Biri 32 diğeri 45 çok fark var. Fiyatları da kişi sayısı da değişik elde edilen kar da değişik.
Ela:	Ama çok bir sayı farklılığı yok orada.
Mete:	Biz en başta hata yapmışız belki de düşünürken.

G_4. Gerçek Yaşam Sonuçlarını Video ve Fotoğraflardaki Durumlarla Karşılaştırma

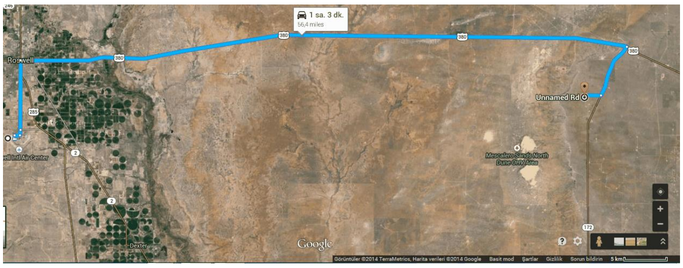
Teknoloji Doğrulama temel basamağında da etkili olmuş öğrenciler problemle birlikte verilmiş ve gerçek yaşam durumunun o andaki görsel bir resmini sunan animasyon, video ve fotoğraflardan yararlanarak buldukları gerçek yaşam sonuçlarını değerlendirmişlerdir. Bu sayede, modelin ve elde edilen gerçek yaşam sonuçlarının geçerliliği uygun teknoloji sayesinde daha ayrıntılı ve sağlıklı bir şekilde kontrol edilmiştir. Bu alt basamakta, öğrenciler söz konusu durumu en iyi görselleştiren video veya animasyon kesitlerini ve fotoğrafları kullanmışlardır ve buldukları sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

G_4'ün Köprü Problemi çözümünde öğrenciler köprünün uzunluğunu 1407 metre olarak bulmuşlar ve Dila fotoğrafları tekrar açmalarını istemiştir. Açtıkları fotoğrafta üçüncü köprünün üzerinde olduğu otobanın 115 km olduğunda oranlama yaparak Celal köprünün uzunluğunun 1,5 km olmayacağını ifade etmiştir. Dila da aynı şekilde bunu doğrulamıştır. Daha sonrasında ise Celal "*Bunları böyle düz vermiş ama bunların bağlantı yolları da olabilir. Bence bu resmin oranları yanlış da olabilir. Çünkü köprü şekli haritayla orantısız. Yanlış kıyaslama yaparız. Bence bizimki doğru yani.*" diyerek çözümlerinin doğru olduğu ve bu fotoğrafla kıyaslamanın doğru olamayacağını vurgulamıştır ve Dila da hemen bu düşünceyi onaylamıştır. Çözümlerini bu gerçek yaşam sonucunu değiştirmeden sonlandırmışlardır.

Dila:	1407 metre çıktı. 1 kilometreden fazla mıymış?
Celal:	1 buçuk km kadar çıktı.

Kağıt Alıntısı	
Dila:	Bir resmi açsana ya.
Celal:	Hangi resmi?
Dila:	Şu vardı ya. Burada ne diyordu? Kırmızı olan yer 115 km.
3. Foto	
Celal:	Evet. 115 km. Şu kadarı 1 ise tamamı 115 yapmıyor.
Dila:	Evet. Yapmaz oranlayınca.
Ayla:	Çıkar mı 11'e o kadar kat yapsak?
Celal:	Çıkmaz gibi. Ama şöyle bir şey de var. Bunları böyle düz vermiş ama bunların bağlantı yolları da olabilir. Bence bu resmin oranları yanlış da olabilir. Çünkü köprü şekli haritayla orantısız. Yanlış kıyaslama yaparız. Bence bizimki doğru yani.
Dila:	Doğru ya. Bununla kıyaslamayalım.

G_1'in Düşme Problemi çözümünde Defne buldukları gerçek yaşam çözümünün (yaklaşık olarak iki uç arasındaki kuş uçuşu uzaklığı 70 km olarak buldular.) doğruluğunu buldukları sayısal değer ile fotoğraftaki mavi yolun uzunluğunu (yaklaşık 90 km) kıyaslayarak ifade etmiştir ve çözümlerini bu gerçek yaşam çözümüyle sonlandırmışlardır.

Demet	Burada 60 mil 1 saat sürer mi ki?
2. Foto	
Defne:	Evet.
Selen:	O mil ama.
Demet:	56,4 mil.

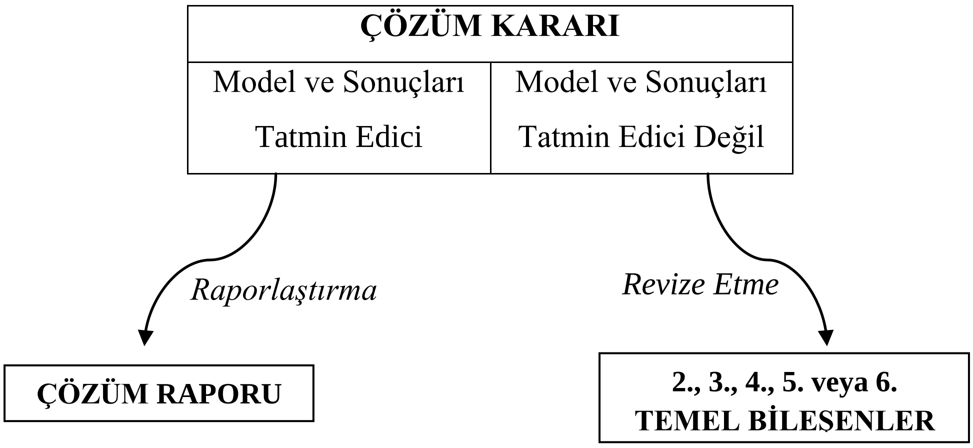
Selen:	90 km falan.
Defne:	Bizim bulduğumuz da normal zaten bak. Adam ama hızlı gidiyormuş baya. Biz 90 km'yi 1 buçuk saatte gidiyoruz (Gülüyorlar.). Başka bir şey söyleyemeyiz herhalde ya.
Selen	Evet.
Demet	Tamamdır bitti.

G_5. Gerçek Yaşam Çözümü ve Sonuçlarının Yeterliliğine İlişkin Karara Varma

Günlük yaşam problem durumu için AMMnin yeterliliğine ilişkin karara varma aşamasıdır. Doğrulama'daki diğer beş alt basamak (G1, G2, G3, G4 ve G6), modellerin ve sonuçlarının birçok durumuna yönelik karşılaştırmaları içermiş ve grup içi tartışmaları içeren uzlaşma ve karara varma sürecini içerisinde barındırmıştır. Bir başka deyişle, bu alt basamak diğer beş alt basamağın bir sonucu olarak karşımıza çıkmıştır.

Öğrenciler AMMnin ve ondan elde edilmiş gerçek yaşam çözümü ve sonuçlarının, gerçek yaşam durumu için tatmin edici bir açıklama sağladığını düşündüklerinde son olarak çözümü ayrıntılı olarak açıklamak ve çözüm boyunca yapılanları çözüm raporuna dökmek istemiştir. Bu doğrultusunda Raporlaştırma temel basamağına geçtikleri görülmüştür. Öğrenciler çözümlerinden hoşnut olmadıklarında ise çözümlerini tekrar gerçekleştirmişler ve çözümdeki hatalarını bulup düzeltmeye çalışmışlardır. Yani tatmin edici olmadığına karar verdikten sonra Revize Etme temel basamağına geçmişler ve oradan çözüm sürecinin içerisine tekrar entegre olmuşlardır (bkz. Şekil 54).

Şekil 54. Doğrulama'dan Sonraki Temel Bileşenler ve Basamaklar

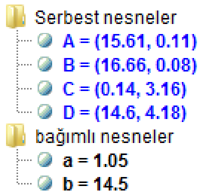


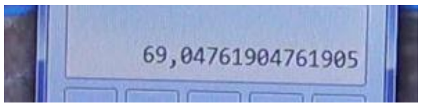
G_7'nin Düşme Problemi çözümünde planlanan nokta ile Felix'in indiği nokta arasındaki mesafeyi öncelikle kağıt yardımıyla 67,5 km olarak bulmuşlardır. Daha sonra ise GeoGebra yardımıyla çözümlerini 69 km olarak buldukları görülmüştür. Yılmaz 67,5'u silip yerine 69 yazmalarını söylemiş; Ezgin ise ikisini de rapora yazmak istemiştir. Çözümlerinin doğru olduğu kararına vararak iki farklı yerden çözümü raporlarından göstermişlerdir.

Ezgin: Orada değil ama soldaki noktamız bizim *(Yılmaz soldaki noktayı orijinden seçti).*

Yılmaz: Pardon ya. Tamam. Tamam *(Noktaları belirlediler.).* 14,5 çıktı. Şunu da hesaplayalım şimdi (Hesap makinesinden yapıyor.). 14,5 çarpı 5 bölü 1.05. 69 çıktı. Biz kaç bulmuştuk onu?

GeoGebra Alıntısı

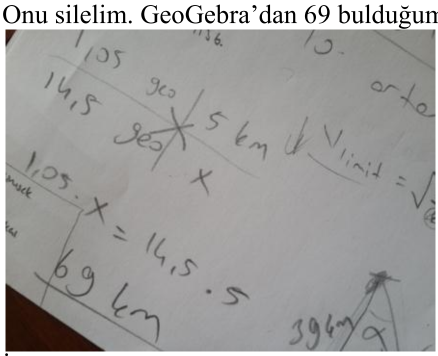




Ezgin: 67,5.

Yılmaz: Onu silelim. GeoGebra'dan 69 bulduğumuzu yazalım.

Kağıt Alıntısı



Ezgin: İkisini de yazalım buraya.

G_6. İşlemleri, Düşünceleri ve Basamakları Kontrol Etme

Modelleme sürecinin içerisinde öğrenciler çoğu zaman o anki işlemlerini tekrar tekrar kontrol etmişler ve düşünceleri üzerine tekrar düşünmüşlerdir. Bu eylem Doğrulama basamağında daha sık görülse de Doğrulama'daki alt basamaklara göre diğer temel basamakların içerisinde en fazla kendisine yer bulan zihinsel eylem olmuştur.

G_3'ün Tiyatro Problemi çözümünde öğrenciler problemi yorumlarlarken aynı zamanda yaptıklarını da kontrol etmişler ve arkadaşlarına yaptıklarını sıralı bir şekilde ifade ederek eksik bir şeyin olup olmadığı hakkında onlardan bir onay sözü beklemişlerdir. Bu şekilde çözümdeki düşüncelerinin doğruluğu hakkında bir karar verdikleri görülmüştür.

Sena: Hıhı.
Serap: Mesela biraz önce de demiştim ya. Bu 30 *(Muğla).* Bu 30'a *(Kayseri)* bakalım. 359 *(Kayseri).* 367 *(Muğla).* Hani çok az değer oynuyor. O yüzden en çok burada biletin fiyatı önemli. Mesela biz ne yaptık şimdi? 45'e baktık. 40'a baktık. 32'ye baktık. 30'a ve 25'e baktık. Her değerden birine baktık. Hepsinden fiyat kazancımız daha doğrusu gittikçe artıyor bilet fiyatı artınca. O yüzden bilet fiyatının çok fazla olması gerekiyor.
Kumsal: Şimdi 560,46'yı 13,5'a böl.

.
.
.

Kumsal: Yani evet.
Serap: Ya şimdi biz başta ne yaptık verilerimizi girdik. En yakın yakınlaştırma doğrusunda bir denklem elde ettik. Sonra bir tane kazanç denklemimiz vardı. Buradaki iki denklemi ortak çözerek x'i bulduk. Daha sonra kazancı başka yerde çizip kazancı bulduk. Buradan da kişi sayısını bulduk. Bence yaptıklarımız doğru gibi.
Sena: Bu yaptıklarımızı kaydedelim.

8. Çözüm Kararı (Olumsuz Karar)

H. REVİZE ETME

Gerçek Yaşam Problem Durumu/ Gerçek Yaşam Problem Durumunun Modeli/ Yardımcı Matematiksel Modeller/ Ana Matematiksel Model/ Matematiksel Çözüm

H_1. Çözümdeki hatanın/yanlışın kaynağını belirleme

H_2. İşlemleri ve düşünceleri tekrar gözden geçirme

H_3. Alternatif çözüm stratejileri belirleme

H_4. Üst düzey varsayımlarda değişiklik yapma

Öğrenciler matematiksel modellerinin ve onlardan elde ettikleri gerçek yaşam çözümü/sonuçlarının gerçekçi açıklamalar getirmediğinde çözümlerinde bir yanlışlığın veya hatanın olduğunu düşünmüşlerdir. Bu doğrultuda çözümlerindeki hatayı/yanlışı bularak çözümlerini revize etmek amacıyla gerçek yaşam problem durumundan itibaren çözüm sürecine tekrar dönüş yapmışlardır. Öğrenciler çözümlerinde sorun olduğunu veya olabileceğini düşündükleri kısmı incelemişlerdir. İşlem hatalarının olmadığını anladıklarında veya bu hatayı bulamadıklarında ise üç farklı yolu seçmişlerdir: alternatif çözüm stratejileri ortaya koyma, üst düzey varsayımlarında değişikliğe gitme ve çözümü olduğu gibi kabul etme. Çözüm süreci öğrencilerin üstesinden gelebilecekleri en ideal çözüme olanak sağlayan çözüm ortaya çıkarılana kadar devam etmiştir.

Bu temel basamak matematiksel modelleme sürecinin doğrusal bir süreç olmadığının en belirgin göstergesi olmuştur. Fakat süreç içerisinde aslında öğrenciler sürekli olarak temel basamaklar arasında geçişler de gerçekleştirmiştir. Bu durumun oluşmasında üst bilişsel eylemlerin etkisi olmuş ve modelleme sürecinin döngüsel/karmaşık yapısını etkilemiştir.

H_1. Çözümdeki Hatanın/Yanlışın Kaynağını Belirleme

Öğrenciler çözümlerine ilişkin tatmin edici bir karara varamadıklarında çözümlerini revize etmek üzere tekrar gözden geçirmişlerdir. Bazen öğrenciler çözümdeki hata/yanlışlarının nerede olacağına ilişkin tahminlerde bulunmuşlar bazen de yanlış olabileceğini düşündükleri yerleri arkadaşlarıyla paylaşmışlardır. Grup arkadaşlarının da bu doğrultuda o aşamaya odaklandıkları görülmüştür. Bu tahminler veya hata/yanlışın olabileceği yere yönelik düşünceler zaman zaman doğru olmakla birlikte eğer çözümdeki hata bulunamadıysa diğer aşamalarının da ayrıntılı olarak kontrol edilmesini gerektirmiştir.

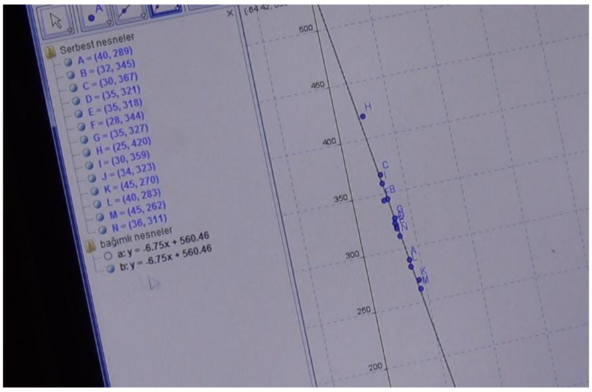
G_1'in Tiyatro Problemi çözümünde öğrenciler buldukları AMMden elde ettikleri gerçek yaşam çözümü ve sonuçlarının (bilet fiyatı) negatif değerler içerdiğini ve yaptıklarında bir hata/yanlış olduğunu düşünmüşlerdir. GeoGebra'ya girilen ifadede hata olabileceğini düşünerek tekrar girmişler ama sorunu düzeltmemişlerdir. Mete bu sefer tablodaki verileri tekrar kontrol etmeyi önermiş ve GeoGebra'ya tablodaki verilerden girilmeyen olup olmadığı incelenmiştir. Verilerde de eksik olmadığı görüldükten sonra Mete kağıttaki denklemden çözümde ilerlemeyi teklif etmiş GeoGebra'nın grafiğinde hata olabileceğini vurgulamıştır. Bununda yanında Mete en iyi yaklaştırma doğrusunu kullanırken GeoGebra'daki her noktayı almadıklarını düşünmüştür. Fakat oradan da gene aynı şeyi bulunca grup hatalarını bulamamışlardır. Söz konusu grafik üzerinde x=-41,52 değerini pozitife çevirmişler ve bilet fiyatının maksimum 41.52 TL olacağını ifade etmişlerdir. Grubun burada hatası x'in işaretini yanlış girmelerinden bu nedenle de grafiğin y eksenine paralel çıkmasından kaynaklanmıştır. Onların bu düşünceleri de hatalarını ortadan kaldırmıştır.

Mete: Nasıl çıktı o öyle?
Masal: Negatifte mi çıktı?
Ela: Parabol çıktı da.
Masal: Şimdi tepe noktası ve şey *(kar)* arasında bir şey mi bulacağız?
Mete: Niye öyle çıktı o ya? Şimdi bu denklem sadeleşince *(1. denklem GeoGebra'da y eşittir cinsinden yazılınca onu kastediyor.).*
Ela: x'i negatif çıktı bak.
Mete: Evet denklemde hata var. Baştan yazalım *(GeoGebra'ya tekrardan giriyorlar denklemi.).* Şimdi nasıl oldu? Pozitif mi oldu? İyice küçültsene.
Masal: Tamam.
Mete: Bir yerde bir hata var. Şu sanki normalde olması gerekenin y eksenine göre simetriği oldu. Verilere tekrar baksak mı bir ya?
Masal: Tamam *(Mete verileri okuyor. Masal GeoGebra'dan takip ediyor.).*

.
.
.

Mete: Kağıttaki denklemi kullanalım. GeoGebra'daki düzgün değil sanki *(Aslında kendileri yanlış yazdılar fark edemediler.).*
Masal: Türevini mi alalım?
Mete: Ya aslında ya denklemi yanlış bulduk. Ya da denklem doğrudur ama grafiğinde bir sorun var.
Masal: Niye onu *(kağıttaki denklem)* alıyoruz ki? Bu da (GeoGebra'daki grafik) kullanılabilir.
Mete: Acaba doğruyu belirlerken noktaların hepsini seçmeden en iyi yaklaştırma doğrusu mu yaptık? Bir dakika *(Tekrar yaptı ve aynı olduğunu doğruladı.).*

Video Alıntısı



H_2. İşlemleri ve Düşünceleri Tekrar Gözden Geçirme

Öğrenciler çözümden tatmin olmadıklarında ve nerede hata olabileceğine ilişkin bir tahminleri olmadığında direkt olarak süreçte sergiledikleri tüm düşünceleri ve işlemleri baştan sona doğru gözden geçirdikleri ve grup içerinde sorguladıkları görülmüştür. Eğer varsa işlemsel hatalar ve düşüncelerdeki eksiklikler öğrenciler tarafından düzeltilmiş ve bu durum onların çözümlerinden tatmin olana kadar devam etmiştir.

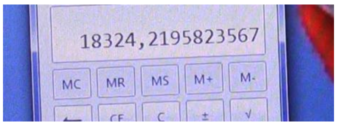
G_1'in Düşme Problemi çözümünde öğrenciler Felix'in ivmesine ulaşırken hızı km/saat^2 yolu ise km cinsinden yazarak ivmeyi bulmaya çalışmışlardır. Bu durumda da ivme bekledikleri değerden büyük (18,32) gelmiştir. Bu doğrultuda öğrenciler çözümlerindeki hatayı aramışlar ve sayısal değerleri aynı birimden yazmadıkları düşüncesiyle işlemlerini tekrardan gözden geçirmişlerdir.

Demet: 1173 km/s *(Defne hesap makinesinden yapıyor.).* Bunu böleceğiz 37. 18,32 çıktı. Büyük geldi baya. Arada çok fazla bir fark var.

Video Alıntısı

Selen: İşlem hatası olabilir mi?
Defne: Ama bir 200'ün karesini almak var. Bir de bin yüz küsurun.
Demet: Birinde kilometre. Biri de metre ya. Ondan problem oluyor.
Defne 200 km değil mi o da? 1173 de kilometre.
Selen: Hangi formülü kullandık?
Defne: Hah bak. Burada 37 bin metre oluyor.
Selen: 37 virgül değil miydi o?
Defne: Değil ya komple aldım. Tekrar bakıyorum. Bu sefer başka bir şey çıktı. O zaman onu da böyle yapmamız gerekiyor. 532 geldi. Km olarak aldık ya.

Video Alıntısı



Selen: Bu ivme çok çıkmadı mı ya? Saniye falan mı alsak biz?

G_5'in Düşme Problemi çözümünde de çözümün yanlış olduğunu düşünen öğrenciler ivmeyi m/s^2 cinsinden bulmak üzere işlemlerini tekrardan gerçekleştirmişlerdir.

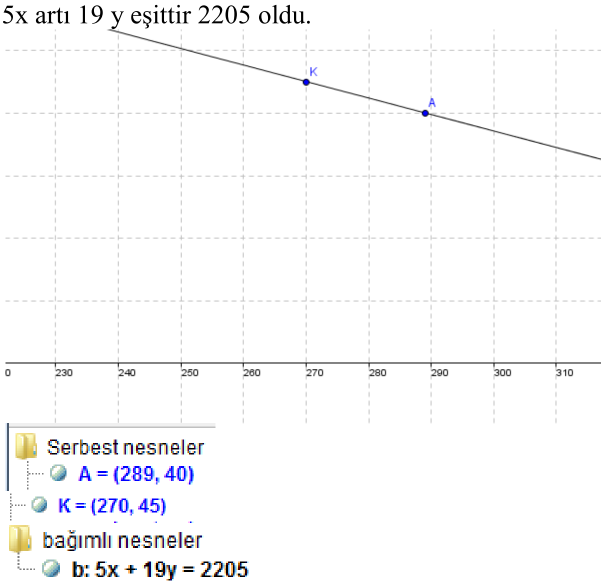
Canan: Hıhı. Hızı da biliyoruz zaten.
Bülent: 1173 oluyor. 45 saniye için 1173 eşittir a çarpı t mi oluyor?
Canan Evet. 1173 çarpı 80 mi olacak?
Bülent: Çok fazla oldu. Saat cinsinden yaptık. Tam tersini mi yapsak? İvme metre bölü saniye kare ya?
Bengi: O zaman tekrardan yapalım.
Bülent: 1173 km ya. Bunu çevirelim. Metrede ne kadar gider bulup 45'e böleriz onu. Ama o da çok şey olacak.
Canan: Ama saate çevirmek lazım iki işlem olacak.
Bengi: Evet.
Bülent: Hmm yapalım onu.

H_3. Alternatif Çözüm Stratejileri Belirleme

Öğrenciler düşüncelerde ve işlemlerde hata bulamadıklarında ise sergiledikleri yaklaşımlarından biri genel çözüm stratejilerini değiştirme olmuştur. Bunun için de AMMyi farklı şekillerde bulma yoluna götürecek matematiksel veya teknolojik bilgileri ortaya çıkarmışlardır. Bu durum yeni ve farklı bir çözüm sürecini ortaya çıkarmış ve öğrencilerin iki farklı strateji arasındaki farkı incelemesine ve karşılaştırmasına da fırsat vermiştir.

G_5'in Tiyatro Problemi çözümünde tablodaki tüm verileri kullanarak gerçekleştirdikleri çözüm sonrasında ulaştıkları gerçek yaşam çözümü yani İstanbul'daki maksimum kar için bilet fiyatı Ankara'daki bilet fiyatından fazla olmaması ve karın da bekledikleri kadar yüksek çıkmaması onları çözümlerini revize etmeye yöneltmiştir. Bu doğrultuda alternatif bir çözüm stratejisi olarak Bülent tablodaki tüm verileri kullanmanın etkili olamayacağını ifade etmiştir. İstanbul'un çok büyük bir şehir olduğu ve tabloda bu şehre en yakın İzmir ve Ankara'nın olduğu varsayımıyla çözümlerini bu iki veri üzerinden tekrar gerçekleştirmişler ve yeni bir AMM üzerinden yeni bir gerçek yaşam çözümüne ulaşmışlardır.

Bülent: Aslında bakınca Ankara daha büyük değil. Ama Ankara'da daha pahalı bilet. O da ilginç. Acaba biz İzmir, Ankara ve İstanbul'u mu dikkate alıp yapsak?
Bengi: Şimdi yeni bir doğru mu çizelim diyorsun?
Bülent: Evet. Bunu kaydettiysek bir doğru daha alalım. Bakalım oradan ne gelecek. Onlar hangi noktalar GeoGebra'da bulalım. 270'e 45.
Bengi: K noktası mı oluyor?
Bülent: Evet. Diğeri peki? İzmir *(GeoGebra'dan yerine bakıyor.)*.
Bengi: A noktası.
Bülent: Başka var mı öyle İzmir, Ankara?
Bengi: Bursa olabilir mi?
Bülent: İkisinden geçen yaklaşık doğruyu çizelim. Tamam. Yeni bir doğru çıktı ne oldu 5 x.
Canan: 5x artı 19 y eşittir 2205 oldu.
GeoGebra Alıntısı



G_6'nın Düşme Problemi çözümünde Felix'e etki eden sürtünme kuvvetini Felix'in aldığı yolu ve hızı cinsinden yazmaya çalışırlarken hız-zaman-ivme-yol ve F_s formüllerinden ulaşamayacaklarını düşününce Yavuz bu ilişkiyi enerjinin korunumu çözüm stratejisini kullanarak yapabileceklerini ifade etmiştir. Fakat daha sonra öğrenciler bu alternatif çözüm stratejisiyle çözümün üstesinden gelemeyeceklerini düşünerek farklı yaklaşımlara yönelmişlerdir.

Burcu: Az önce bulduğumuz şeyi bir de başka formülden de yapsak olur mu buradan da yapıp tutuyor mu bakalım. Şu ana kadar sürtünme kuvvetinin ivmeye negatif bir etkisini olduğunu söyleyip buna göre denklemi değiştirdik.
Yavuz Evet.
Burcu Bu mudur istenen? O kadar değer bulduk. Bunları GeoGebra'da acaba nasıl yapabiliriz?
Yavuz Formülü bilmiyoruz ama c de içimize sinmedi herhalde fazla.
Burcu Evet. Sanki daha farklı bir çözümü vardır gibi geliyor. Tamam. Bir

daha bakalım. Yani sürtünme kuvveti de sürekli olarak artıyor işte.

Yavuz Enerji korunumundan yapsak?

Burcu Enerjiyi hiç karıştırma. Aslında oradan da belki yapılabilirdi.

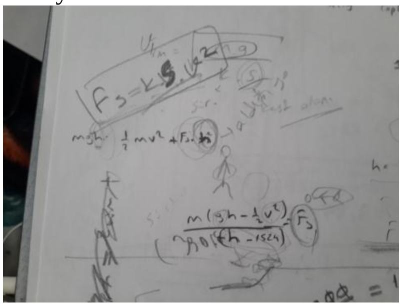
Yavuz Potansiyel enerji ve kinetik enerji birbirlerini dengelemeyecek mi?

Burcu Sürtünme kuvvetinin harcadığı enerjiden de yapılabilir.

Yavuz Değil mi? Evet mgh eşittir 1bölü2 mvkare'den. Oradan çıkmaz mı?

Burcu Deneyelim mi bir?

Kağıt Alıntısı



H_4. Üst Düzey Varsayımlarda Değişiklik Yapma

Öğrenciler düşüncelerde ve işlemlerde hata veya yanlış bulamadıklarında bazen üst düzey varsayımlarda değişikliğe gitmişlerdir. Bu doğrultuda üst düzey varsayımlarını değiştirmişler ve matematiksel modellerini daha da basitleştirme çabası içerisine girmişlerdir. Üst düzey varsayımlardaki bu değişiklikler yeni bir çözümü ortaya çıkarmış ve öğrencilerin iki varsayım arasındaki farkı daha ayrıntılı bir şekilde incelemesine ve karşılaştırmasına fırsat vermiştir..

G_4'ün Düşme Problemi çözümünde öğrenciler Felix'in eğim ve iniş açısını bulmaya çalışırlarken iki farklı varsayım doğrultusunda iki farklı çözüme ulaşmışlardır. Öncelikli olarak öğrenciler Felix'in paraşütü açtıktan sonra sapmaya başladığını düşünmüşler ve bu varsayım doğrultusunda bir gerçek yaşam çözümüne ($88,72^0$) ulaşmışlardır. Bir de bu gerçek yaşam çözümünün doğruluğundan emin olmadıkları için de Felix'in serbest düşmeye başladığı anı dikkate alarak farklı bir eğim ve iniş açısına ($60,29^0$) ulaşmışlardır. Yani G_4 iki farklı üst düzey varsayımları doğrultusunda iki farklı gerçek yaşam çözümüne ulaşmışlardır.

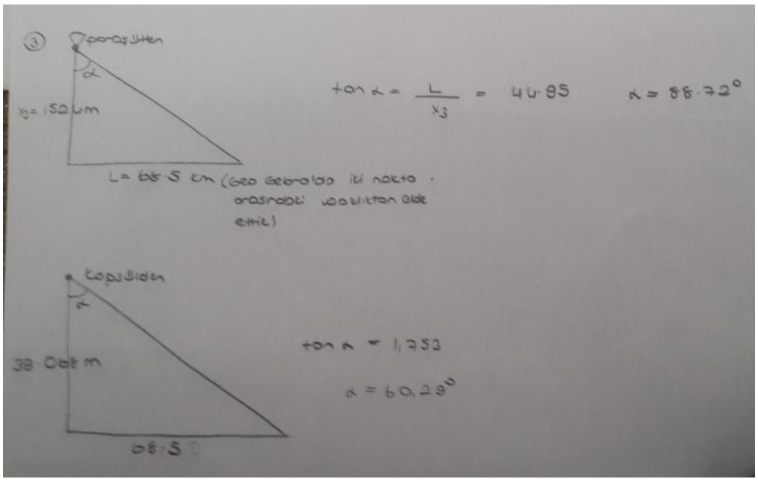
Dila: Evet. Şimdi eğim açısını bulalım problemin. Tekrar yazalım.

Ayla: Paraşütten almak doğru oldu mu?

Dila: En başından alsak ya da iki türlü bakalım mı?

Ayla: Aynen iki türlü yapalım daha mantıklı. İlk paraşütten atladıktan sonrası için.

Kağıt Alıntısı



Dila: 1524 metre. L eşittir 68,5. GeoGebra'daydı. Bir daha baksak ya *(Tekrar açıp bakıyorlar.).*

Ayla: Tamam ekledim.

Dila: Alfa diyebilirsin.

Ayla: Bu arada bize eğim açısını ve planlanan yerden uzaklık arasındaki ilişkiyi sormuş. Bunun için de direk bu ifade var.

Dila: Ama onu dört olarak yazarız. Sonra?

Ayla: Tamam.

Dila: Tamam. Bir de bunu paraşütten değil de en baştan alacağız. Tamamı 39068 metre. Şurası zaten gene 68,5.

Ayla: Hesaplamadık değil mi biz bunu?

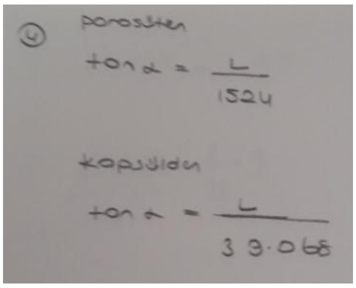
Dila: Yok daha hesaplamadık. Kaç derece olduğuna şimdi bakarız.

Ayla: Km'ye çevirmedik bak bunu. 68500 yazacağız. 3 sıfır ekledim. 1,753.

Dila: $60,29^0$ çıktı.

Ayla: Tamam.

Kağıt Alıntısı



Dila: Hem paraşütten hem de kapsülden iki farklı matematiksel modelimizi de yazmış olduk. Bitti artık hepsini de yazdık değil mi?

8. Çözüm Kararı (Olumlu Karar)

J. RAPORLAŞTIRMA

10. Çözüm Raporu

J_1. Raporda yazılması gereken önemli düşünceleri vurgulama

J_2. Çözümü ayrıntılı matematiksel ifadelerle destekleme

J_3. Raporda yazılması gerekenleri sıralama

Öğrenciler AMMden elde ettikleri gerçek yaşam çözümü/sonuçlarının gerçek yaşam durumu için geçerli ve tatmin edici bir çözüm sağladığını düşündüklerinde geçtikleri temel basamak Raporlaştırma olmuştur. Bu doğrultuda öğrenciler, Raporlaştırma'da çözüm boyunca sergiledikleri düşünceleri ve topladıkları verileri çözüm raporunda ayrıntılı bir şekilde açıklamışlardır. Bu süreçte öğrenciler düşündükleri her şeyi rapora aktarmamışlar ve önemli düşüncelerini, matematiksel modellerini, çözümü matematiksel ifadelerde desteklemeyi çözüm raporunda ön plana almışlardır. Bu süreçte aynı zamanda öğrenciler problemin çözümü için olmazsa olmaz olan matematiksel kavramları ve bunların nasıl kullanıldığını, teknolojinin çözümde nasıl ve niçin bir araç olarak kullanıldığını yazmışlardır. Çözüm raporundaki bilgilerin de gerçek yaşam durumunu açıklamada yeterli ve açıklayıcı olduğu düşündüklerinde öğrenciler çözümlerine son vermişlerdir.

J_1. Raporda Yazılması Gereken Önemli Düşünceleri Vurgulama

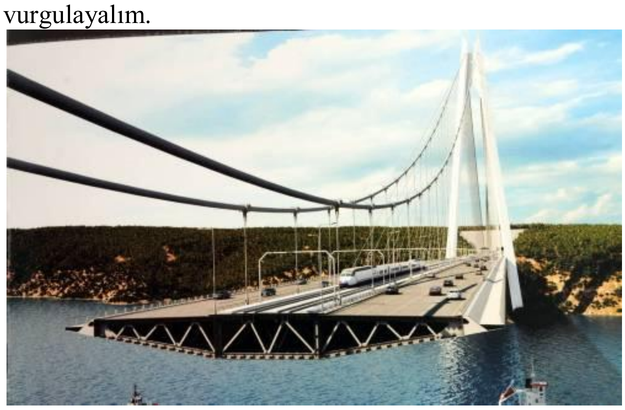
Öğrenciler çözüm raporuna geçtikten sonra her düşünceyi rapora yazmalarının gerek olmadığını ifade etmiş ve bu doğrultuda çözüm raporunda bulunması gereken önemli düşünceleri ortaya koymuşlardır. Bu durum çözümün sonlarına doğru öğrencilerin çözüm sürecindeki düşüncelerini değerlendirdiklerini ve çözümde önemli ve daha az önemli düşüncelerini ayırdıklarını göstermiştir.

G_4'ün Köprü Problemi çözümünde Dila çözüm raporuna her şeyi yazmalarının gerek olmadığını ifade etmiş ve bu görüşüne Celal de destek vermiştir. Dila ölçeği raporda belirtmeleri gerektiğini çünkü önemli olduğunu, Celal de köprünün uzunluğunu bulurken aslında köprünün ayakları arasındaki mesafeyi dikkate aldıklarını ve şerit genişliğini nasıl aldıklarını ve ölçeği ona göre belirlediklerini yazmalarını gerektiğini vurgulamıştır. Ayrıca Dila 4 araba şeridi ve emniyet şeridini nasıl aldıklarını ve noktaları belirlerken de resim 4'deki direklerden ve siyah hizadan yaralandıkları ifade etmiştir.

Dila: Tamam. Yazalım GeoGebra'daki bazı verileri. Ama bir dakika bir şey soracağım. A ve B'yi bulurken her noktayı kağıda yazmamıza gerek

yok değil mi?
Celal: Yok yok. Zaten dosyada belli ne olduğu.
Dila: Ölçeği belirtelim. Çünkü o önemli. Tamam. Bu şekilde yazalım o zaman.
Celal: Köprü uzunluğunda aslında ayakları arasındaki mesafeyi bulmuş olduk.
Dila: Diğerinde de resim 4'ü kullandığımızı GeoGebra'da onu söyleyelim.
Celal: Şerit genişliğini nasıl aldığımızı yazalım. Kaç kabul ettik. Onu bulmazsak ölçek olmazdı.
Dila: Evet. Bir dakika. Biz emniyet şeritlerini katmış mıydık?
Celal: Kattık. Zaten A ve B noktaları arasındaki mesafede emniyet şeridi de var bizim.
Dila: Bir dakika. Dört tane dedik araba şeridi sonra ona emniyet şeridini mi ekledik?
Ayla: Evet. 4 araba şeridi artı emniyet şeridi olacak.
Celal: Evet. Yani 17 metre. 3.5 tan 14 metre şey var.
Dila: He 17 dedik. Bunu ayrıntılı yazalım
Celal: Şimdi genişlik için k dedik o zaman emniyet şeridi için de l demiş olduk
Dila: Aynen *(Kağıda ayrıntılı çözümü yazıyorlar.).*
Celal: Resim 4 de şerit genişliği bizim ölçeklememizi sağladı onu da vurgulayalım.

4. Foto



Dila: Evet. Noktaları belirlerken de direklerden yararlandık. Siyah çizgiyi hiza aldık.

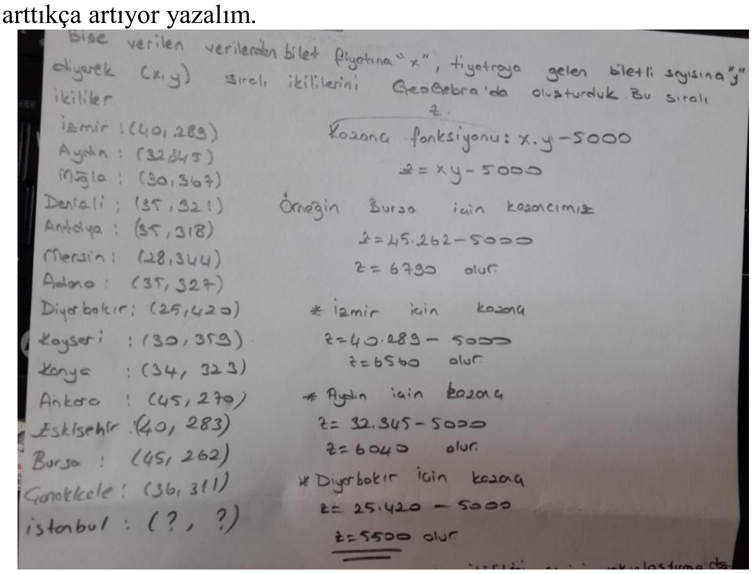
J_2. Çözümü Ayrıntılı Matematiksel İfadelerle Destekleme

Öğrencilerin matematiksel modelleme sürecinin yapısını bilmeleri ve problemin başlarında çok sözel ifade kullandıkları halde yetersiz matematiksel ifade kullanmaları onları ayrıntılı çözüm raporunu oluşturmaya iten unsurlardan bir diğeri olmuştur. Bu nedenle öğrenciler rapor yazarken raporlarında sözelden daha çok matematiksel ifadelere yoğunlaşmışlar ve matematiksel modellerini ayrıntılı olarak açıklama ihtiyacı duymuşlardır.

G_3'ün Tiyatro Problemi çözümünde öğrencilerin çözüm raporunun hazırlarken oluşturdukları matematiksel modelleri doğru ve açıklayıcı olacak şekilde matematiksel ifadelerle oluşturdukları görülmüştür. Bu aşamada öğrencilerin çözümlerinde önemli olan her bir değişken, sabit ve parametre için farklı ve matematiksel açıdan doğru (sabit için k, değişken için x, parametre için de a gibi) gösterimleri kullanamaya çalışmışlardır.

Kumsal: Bu ne oldu? x oldu. Bu tamam. Sıralı ikili oldu bunlar.
Serap: Verilerden bilet fiyatı x tiyatroya gelen biletli sayısı y olacak şekilde sıralı ikililer GeoGebra'da oluşturuldu diyelim. Denklemleri yazalım değişkenlere dikkat ederek.
Kumsal: Tamam. Kazanca z diyelim. Hepsini değişken olarak ifade edelim.
Serap: Hıhı. Şimdi 45 için yapmıştık ya. Bursa için kazancımız... Bilet fiyatı arttıkça artıyor yazalım.

Kağıt Alıntısı



Bise verilen verilerden bilet fiyatına "x", tiyatroya gelen biletli sayısına "y" diyerek (x,y) sıralı ikililerini GeoGebra'da oluşturduk. Bu sıralı ikililer

İzmir : (40,289)
Aydın : (32,345)
Muğla : (30,367)
Denizli ; (35,321)
Antalya : (35,318)
Mersin : (28,344)
Adana : (35,327)
Diyarbakır : (25,420)
Kayseri : (30,359)
Konya : (34, 323)
Ankara : (45, 270)
Eskisehir : (40, 283)
Bursa : (45, 262)
Gölcük(?) : (36, 311)
istanbul : (?, ?)

z.
Kazanç fonksiyonu: x.y − 5000
z = xy − 5000

Örneğin Bursa için kazancımız
z = 45.262 − 5000
z = 6790 olur

* İzmir için kazanç
z = 40.289 − 5000
z = 6560 olur

* Aydın için kazanç
z = 32.345 − 5000
z = 6040 olur

* Diyarbakır için kazanç
z = 25.420 − 5000
z = 5500 olur

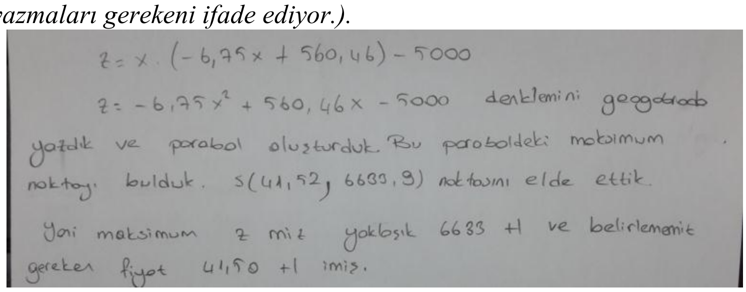
J_3. Raporda Yazılması Gerekenleri Sıralama

Öğrenciler çözüm raporlarını yazarlarken raporda yazmayı düşündüklerini belli bir sıra içerisinde vermeye çalışmışlardır. Bunun için bazen problemi tekrar okuyarak problem ifadesinde istenen sırayı dikkate almışlar bazen de matematiksel mantığı dikkate alarak oluşturdukları kendi çözüm sıralarını takip etmişlerdir. Bununla birlikte öğrenciler çözüm boyunca tam bir çözüm raporunu oluşturamamış ve sadece çözüm boyunca kullanacakları matematiksel modelleri veya sonuçlarını ilk olarak raporlarına yansıtmışlardır. Bunda da herhangi bir sıralama ihtiyacı taşımadan gerçekleştirmişlerdir. Öğrencilerin tamamının raporlaştırma süreci içerisinde bulundukları ve çözümlerini ayrıntılı olarak çözüm raporunda açıklamaya gereksinim duydukları görülmüştür.

G_1'in Tiyatro Problemi çözümünde, Demet teorik olarak buldukları gerçek yaşam çözümü ve sonuçlarının yanında yorumlamaları da son kısma tam bir sayısal değer vermeden yapmalarını söylemiştir. Yani Demet gerçek yaşam durumu için önemli gördüğü teorik çözümden farklı olan düşünceleri (İstanbul'da en büyük tiyatro salonunu bulmak ve bilete minimum fiyat vermek gibi) buldukları gerçek yaşam çözümünden sonra raporlarında yazma ihtiyacı hissetmiştir.

Demet: Evet. Bir yerden yazalım. Parabolde maksimum z'yi bulduk *(Raporda yazmaları gerekeni ifade ediyor.).*

Kağıt Alıntısı

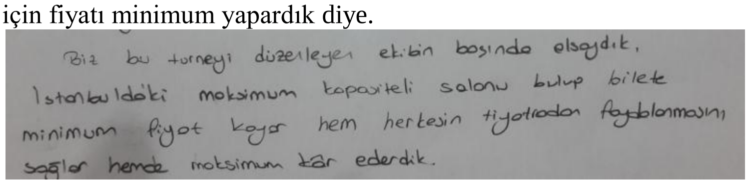

$z = x \cdot (-6{,}75x + 560{,}46) - 5000$
$z = -6{,}75x^2 + 560{,}46x - 5000$ denklemini geogebrada yazdık ve parabol oluşturduk. Bu paraboldeki maksimum noktayı bulduk. S(41,52, 6633,9) noktasını elde ettik. Yani maksimum z miz yaklaşık 6633 TL ve belirlememiz gereken fiyat 41,50 TL imiş.

Selen: Bu verilere bakıldığında 6633 TL. Maksimum kar için 41,5 lira *(bilet fiyatı)* olacak.

Defne: Evet.

Demet: Kendi görüşümüzü de yazalım bunun yanında. Şey diyelim tam değer yazmadan düşüncemizi yazalım. Biz olsaydık nasıl yapardık diye. İstanbul'daki maksimum kapasiteli yeri bulurduk ve herkesin gelmesi için fiyatı minimum yapardık diye.

Kağıt Alıntısı


Biz bu turneyi düzenleyen ekibin başında olsaydık, İstanbuldaki maksimum kapasiteli salonu bulup bilete minimum fiyat koyar hem herkesin tiyatrodan faydalanmasını sağlar hemde maksimum kâr ederdik.

G_2'nin Düşme Problemi çözümünde öğrencilerin çözüm raporuna yazacakları belli bir sıraya göre vermeye çalıştıkları görülmüştür. Bu doğrultuda Ela öncelikli olarak Mete'nin de vurguladığı gibi raporda çözümdeki gerçek yaşam durumu modelleri olan şekli çizmeleri gerektiğini ifade etmiştir.

Masal: Ne yazalım?
Mete: Şekli mi çizelim?
Ela: İlk neyi bulduk biz şimdi? Bence de şekli çizelim ilk.
Masal: Tamam *(Masal temize geçiyor şekli.).*

G_2'nin Düşme Problemi çözümüne ilişkin gözlem notu şöyledir:

(…Problemde istenenlere ulaştılar. Ela çözüm için rapor yazmaları gerektiğini ve problemi çok dağınık çözdüklerini ifade etti. Mete raporda ilk şekli çizme düşüncesini ortaya attı. Ela da bu görüşü destekledi… Problem ifadesinde onlardan istenilenlerin sırasını dikkate alarak düşüncelerini rapora yansıttılar… Gözlem Notu: G_4, Düşme Problemi)

Matematiksel Modelleme Sürecindeki Üst Bilişsel Eylemler

Üst bilişsel düzenleme davranışları olan planlama, izleme, değerlendirme ve tahmin eylemleri matematiksel modelleme sürecinde genel olarak bilişsel aktivitelerle iç içe geçmiş karmaşık bir süreci meydana getirmişlerdir. Matematiksel modelleme sürecindeki üst bilişsel yapılar planlama boyutunda altı, izleme boyutunda dört, değerlendirme boyutunda yedi ve tahmin boyutunda beş kategoride şekillenmiştir.

Matematiksel Modelleme Sürecindeki "Planlama Yapıları"

Matematiksel modelleme sürecinde planlama eylemleri genel olarak çözüm sürecinde sergilenmesi planlanan stratejik anlamda önemli düşüncelerin ortaya çıkarılması amacıyla gerçekleştirilmiştir. Bu doğrultuda problem için gerekli olduğuna inanılan düşünceler ifade edilerek en iyi yolun seçilmesine ve düşüncelerin uygulanış sırasının belirlenmesine dikkat edilmiştir.

Matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan üst bilişsel planlama eylemleri modelleme sürecinin her anında süreçteki farkındalığı ortaya çıkarıcı, süreci kontrol edici, düzenleyici ve yönlendirici bir rol oynamıştır ve modelleme sürecinde altı temel kategori altında şekillenmiştir (bkz. Tablo 4).

Tablo 4. Matematiksel Modelleme Sürecindeki Planlama Yapıları

	Kategoriler	Yanıt Aranan Temel Sorular
Planlama Yapıları	**1a.** Amaç, imkân ve ihtiyaçların analizini yapma	Problemde ne isteniyor?, Probleme cevap verebilmek için nelere ihtiyaç var ve sahip olunanlar neler?.
	1b. Temel büyük düşünceyi tasarlama	Problem için gerekli çözüm stratejisi nasıl olmalı?, Çözümde hangi temel kavramlar önemli?, Varsayımlar neler ve hangi değişken, sabit ve parametreler çözümde kullanılmalı?, Sahip olunanlar nasıl kullanabilir?
	1c. Çoklu düşünce yapılarını birleştirme ve ayrıştırma	Çözüm için gerekli çoklu düşünceler bir arada nasıl kullanabilir?, Problem için eski deneyimleri içeren çoklu düşüncelerden hangisi/leri gereklidir?, Eski ve yeni düşünceler birlikte nasıl kullanılabilir?, Eski durum ve yeni durum hangi düşünceleri ortadan kaldırıyor?.
	1d. Matematiksel ve teknolojik düşünceleri uzlaştırma	Matematiksel düşünceler ve teknolojik düşünceler birbirlerini destekliyor mu?, Matematiksel düşünceler eksikse çözümde ilerlemek için teknolojik düşünceler nasıl değiştirilmeli?, Teknolojik düşünceler eksikse çözümde ilerlemek için matematiksel düşünceler nasıl değiştirilmeli?.

	1e. Matematiksel ve gerçek yaşam düşüncelerini uzlaştırma	Matematiksel düşünceler ve gerçek yaşama ilişkin düşüncelerim birbirlerini destekliyor mu?, Matematiksel düşünceler eksikse ve çözümde ilerlemek için gerçek yaşam düşünceleri nasıl değiştirilmeli?, Gerçek yaşama ilişkin düşünceler eksikse çözümde ilerlemek için matematiksel düşünceler nasıl değiştirilmeli?.
	1f. Grup içi görev paylaşımı sağlama	Grup üyeleri çözümde en yararlı hangi görev pozisyonunda olabilir?, Teknolojiyi yönlendirecek veya raporu düzenleyecek kişiler kimler olmalı?.

1a. Amaç, İmkan ve İhtiyaçların Analizini Yapma

Bu süreçte en genel anlamda problemin çözümü için gerekli olacak veya olmayacak düşüncelerin neler olduğunun kapsamlı bir analizi gerçekleştirilmiştir. Problemde neyin istenildiği net olarak ortaya konmuş ve problemin amacı açık bir biçimde ifade edilmiştir. Çözümde verilenler ayrıntılı bir şekilde incelenerek kapsamlı bir ihtiyaç analizi yapılmıştır. Problem ifadesinde ve problemle birlikte verilen video, animasyon ve fotoğraflarda problem için gerekli veri/bilgilerin neler olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda çözüm için yeterli her şeye sahip olunup olunmadığı hakkında düşünceler ortaya konulmuştur. Bunlarla birlikte problemde önemli olacağı düşünüldüğü halde problemde bahsedilmemiş önemli düşünceler ortaya çıkarılmıştır. Tüm bunlar yapılarak problem daha basit bir hale getirilmiş ve anlamlandırılmıştır. Bu süreçte problem ifadesi gerekirse tekrar tekrar okunmuş; video, animasyon ve fotoğraflar ard arda ve ayrıntılı olarak incelenmiştir. Gerekli bilgiler ve veriler not alınmış veya bunların altı çizilmiştir. Çözüm için gereksiz durumlar/bilgiler/veriler analiz sürecinde ayıklanmış ve çıkarılmıştır.

Çözüm sürecinde G_1 ilk olarak problemin amacını net olarak ortaya koymaya çalışmış; ne yapması gerektiğini ve nelere sahip olduğunu zihinlerinde netleştirme ihtiyacı duymuştur. G_1 bu doğrultuda, Köprü Problemi'ni, problemle birlikte verilen videoları, animasyonları ve fotoğrafları ayrıntılı olarak inceleyerek; problemi anlamlandırmaya ve problemi çözmek için var olan imkânları ve gerekli ihtiyaçları ortaya çıkarmaya çalışmıştır.

Demet: Yapılacak köprünün genişliği ve uzunluğunu veren matematiksel modeller oluşturunuz. Bu şekilde köprünün olası genişliği ve uzunluğu hakkında en iyi tahmininizi nedenleriyle birlikte açıklayınız. Problemle birlikte iki video ve dört fotoğraf dosyası da verilmiştir (Demet problem ifadesini okurken Defne de resimleri açtı ve Selen'le ikisi resimleri inceliyorlar.).

Defne: Devamı var mı problemin?

Demet: Bu kadar.

Selen: Hıhı

Defne: Buradaki köprü 1, köprü 2, köprü 3 ve köprü 4 fotoğraf. Diğerleri de videolar sanırım.

Demet: Evet, bakalım o zaman (Köprü 1'in olduğu dosyayı tekrar inceliyorlar.).

Defne: Köprü buraya yapılacak sanırım (Eliyle resimdeki beyaz çizgiyi gösteriyor).

1. Foto


Demet: Hıhı.

Defne: Daha da yakınlaşsana (Birlikte 2. fotoğrafı inceliyorlar ve ikinci fotoğrafı yakınlaştırarak ayrıntılara bakıyorlar).

Demet: Hah burada ayakları var işte. Belli oluyor şuralarda. Hah bak! Yol buradan burayaymış. Köprü de şu kısım oluyor (Resimdeki gölgelerden hareketle köprünün ayaklarının yerini belirliyorlar.).

Video Alıntısı


Defne: Evet (Köprü ile ilgili 4. fotoğraf açıldı.).

4. Foto


Selen: Bak burada rayları var. Gidiş geliş şeklinde (Fotoğraftaki tren raylarını gösteriyor).

G_7 üyeleri, Tiyatro Problemi'nde net olarak ne istendiğini ortaya çıkarmak için arkadaşlarına problem ifadesinde önemli gördükleri yerleri tekrar tekrar okumuşlardır. İstanbul'da maksimum kazanç elde edilebilmesi için tek bir bilet fiyatının istendiği, belirlenecek bilet fiyatının mantıklı gerekçelerinin ortaya koyulması gerektiği ifade edilmiştir. Ayrıca verilen tablolardaki veriler incelenerek bilet fiyatının belirlenmesinde nelerin etkili olacağı hakkında düşünceler sergilenmiştir. Ezgin tiyatro salonunun çözümde etkili olduğunu düşünerek arkadaşlarına problemde tekrar ilgili yeri okumuştur. Fakat Yılmaz çözüm için salonların kapasitelerin önemli olmadığını ve bilet satış sayısına göre uygun salonun hazırlandığının problemde vurgulandığını söylemiştir.

Yılmaz:	O zaman biz bunu. Direk bunu yapalım. Ama problemde ne diyor bak? Tek bir fiyat istiyor. En fazla kazancı belirleyebilmeleri için bilet fiyatını kaç olarak belirlemeleri gerekiyor diyor.
Ezgin:	Hmm (Problem tekrardan okunuyor.).
Yılmaz:	Burada bir tane fiyat söyleyeceğiz. Ona göre de kazancı yazacağız.
Ezgin:	Hmm anladım. Hangisini yazarız peki?
Yılmaz:	Bilmiyorum. Ama burada bir fiyat verip onu gerekçelendirmeliyiz. Bunları gene yazacağız; ama sonra birini seçip yorumlamalıyız ve nedenini açıklamalıyız.
Ezgin:	Evet. 40 diyelim herkesin cebine uygun herkes gelsin bu şekilde.
Yılmaz:	35 tl olduğunda 347 kişi geliyormuş. Gelen kişilerin ortalamasını almamız gerekir mi? Ne işimize yarar ki bu? Biz 50 alsak ne oluyor?
Ezgin:	50 alsak ne oluyor? Hmmm 250 kişi oluyor.
Seda:	12150 yapar (Yanlış çarptı 12500 olacak.).
Yılmaz:	50 tl aldığımızda tam 243 oluyor. 243 kişi gelmez mi ama ya?
Ezgin:	Bak burada ne diyor. Burada değil. Hah bu. (Problem ifadesinde önemli olduğu düşünülen kısmı tekrardan okuyor.). Turne ekibi, ilgili illerdeki konaklama, yemek vb. ihtiyaçlara göre gider durumlarını dengelemek için her ildeki tiyatro bileti fiyatlarında değişikliğe gidilmiştir. Her ilde önceden satılan bilet fiyatı belirlenerek bilet sayısına göre olabildiğince büyük bir tiyatro salonu hazırlanmıştır. Fakat turne ekibi fark etmiştir ki bilet fiyatlarını bazı illerde biraz arttırmalarına rağmen bilet fiyatı daha az olan yerlerden daha az kazanç elde etmişlerdir. Çünkü bilet fiyatındaki değişikler gelen izleyici sayısını etkilemiştir. Kişi sayısı gittikçe artıyordu. Ama burada gittikçe ilki 420 iken burada ikinci 360 kişi burada diyor (problemi okuyorlar.) Her ilde önceden satılan bilet fiyatı belirlenerek bilet sayısına göre olabildiğince büyük bir tiyatro salonu hazırlanmıştır.
Yılmaz:	Ya takılma ona işte. Bilet fiyatına göre bir satış oluyor ve ona göre de salon hazırlanıyor. O zaman biz bu en küçük bilet fiyatından başlayarak yorumlayalım. Sonra 50' ye kadar yazalım. Sonra da 28' i yazalım.
Ezgin:	28' e gerek yok ya. Genelleyeceğiz biz.

G_4'ün çözümünde ise, Celal problem ifadesini birebir sesli bir şekilde arkadaşlarına okumuştur. Devamında G_4 problemle birlikte verilmiş fotoğrafları ayrıntılı olarak inceleyerek problemi anlamlandırmaya ve basitleştirmeye çalışmıştır. Celal fotoğrafları incelerken ölçek olduğunu fark etmiş ve bu fotoğrafları kullanabileceklerini ifade etmiştir. Fakat G_4 verilerin hepsini izlemeye devam etmişlerdir. Video ve animasyonları da açarak oradaki kullanabilecekleri verileri ve bilgileri incelemişlerdir. Örneğin, Dila serbest düşme hareketinin atlayıştan paraşütün açılma anına kadar olduğunu düşünerek, 1. videoda paraşütün açıldığı anı incelemiştir. Ayrıca düşüş anındaki videoların bazı yerlerinde herhangi bir verinin olmadığı kısımlar da vardır. G_4 bu kısımları ileri sarmıştır. İhtiyaç duydukları yerleri tam olarak izlemiştir. Celal bununla birlikte videoda belli saniyelerdeki hız ve yüksekliğe ilişkin verilmiş bilgileri de incelemiştir ve çözümde kullanmak üzere karalamalar yapmıştır.

Celal: (Problem ifadesi aynen baştan sona sesli olarak okunuyor.).
Uzaydan dünya'ya atlayış problemi Avusturyalı Felix Baumgartner, 2012 yılında ABD'nin New Mexico eyaletindeki Roswell uzay üssünden özel bir kapsül ve tulum içinde çıktığı 39 bin 068 metreden Dünya'ya atladı. Tüm dünyanın nefesini tutarak izlediği bu denemede Baumgartner, 52 yıldır kırılamayan en uzun serbest düşüş, en yüksek atlama, balonla en yükseğe çıkma ve en hızlı insan rekorlarını hiçbir hava aracı korunması olmaksızın kırmak için kendini boşluğa bıraktı ve bunlardan üçünü gerçekleştirdi.

…

Bununla birlikte Felix'in iniş için planlanan noktaya düşmediği görülmektedir. Kalkış ve iniş noktaları şekilde gösterilen noktalardır (Planlanan nokta kırmızı ile işaretlenmiştir.) Felix'in yeryüzüne inişte izlediği eğim açısı hakkında ne söyleyebilirsiniz. İniş açısı ve planlanan noktadan uzaklık arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz. Ayrıntılı olarak düşüncelerinizi yorumlayınız.

Dila: Verileri izleyelim o zaman şimdi.

Celal: Şunları izleyelim. Buradaki.

Ayla: Tamam.

Dila: (Fotoğrafları inceliyorlar.) Nereden yükselmiş? Soldaki noktadan mı?

Celal: Kalktığı yer sol taraf. İndiği yer şurası (Sağdaki kırmızı noktayı gösteriyor.).

1. Foto

Dila: Şimdi bu fotoğraftaki mavi işaret ne?

Celal: O yol kara yoluyla hareketi. Mesafe 56.4 mil.

Dila: Hmm. İşimize yaramayacak mı?

Celal: Şöyle düşmesi gerekir. Ortalama olarak bir şey bulcağız.

Dila: Soldaki o zaman yükseldiği yer mi?

Celal: Evet.

Dila: Dümdüz yükseliyor. Normalde dümdüz düşmesini mi bekliyorlarmış?

Celal: Yani. Yakın bir yere inmelerini isterler sonuçta. Şurayı (sol taraf) tahmin ederlerken buraya (sağ taraf) düşmüş yani. Ölçek de var zaten ya. Bunu direk GeoGebra'ya koyarak uzunluğunu hesaplayabiliriz. Daha önceden de benzer problemler çözmüştük.

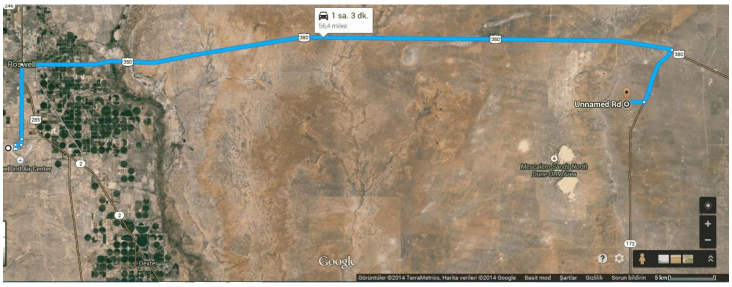
Ayla: Evet.

Celal: Diğerlerine de bakalım.

Dila: Aynen. Diğerlerine de bak.

Celal: Bu fotoğraf daha yakın hali. Bunu kullanırız diğerine göre daha iyi.

2. Foto



Dila: Niye iki fotoğraf verilmiş ki?

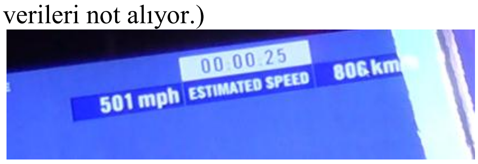
Celal: Bilmiyorum. Tamam. Buralarda ne varmış (Videoları kastediyor. 1. video izleniyor.).

Dila: Bak burada açtı paraşütü.

Ayla: Hıhı (Paraşüt açıldıktan sonra 1. video hızlıca ilerletildi ve 2. videoya geçildi. 2. videonun başları da yavaş yavaş ilerletiliyor. Tam olarak izlenmiyor. İhtiyaç duyulan yerlere bakılıyor.)

Celal: Bakın hızı bu kadar mil bu kadar km imiş. Burada gösteriyor. (Celal verileri not alıyor.)

Video Alıntısı



G_4'de Düşme Problemi çözümünde Celal, videolarda verilmiş belli saniyelerdeki hız ve yüksekliğe ilişkin verileri not almış ve problemin çözümünde bunların gerekli olduğunu ifade etmiştir. Celal'in bu düşüncesini ortaya koyması grubun diğer üyelerinin de bu anlamda farkındalık kazanmasını sağlamıştır. Diğer üyeler videoları izlerken verileri daha ayrıntılı izleyerek notlar almışlardır. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

> (…Celal ilk videodaki verileri ayrıntılı olarak kağıda saniye hız ve yükseklik sırasıyla tablolaştırıyor. Problem çözümünde bu verileri kullanabileceklerini ifade ediyor… Dila ve Ayla de notlar almaya başladı. Dila özellikle paraşütün açıldığı andaki verileri inceliyor. Gözlem notu: G_4 Düşme Problemi)

1b. Temel Büyük Düşünceyi Tasarlama

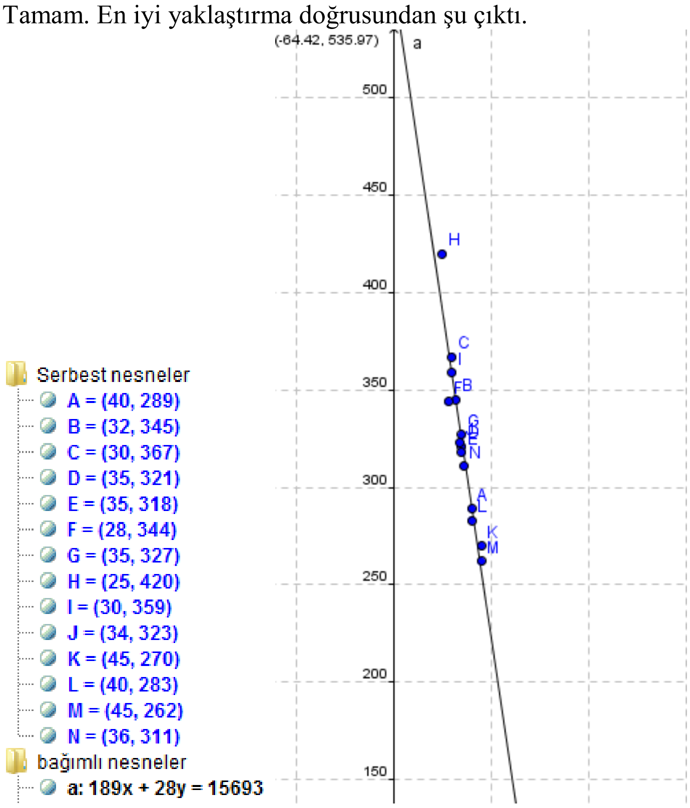
Çözüm için gerekli olan genel çözüm stratejisi ve matematiksel /teknolojik/ gerçek yaşam teknik ve yöntemleri ortaya çıkarılmıştır. Amaca ulaşabilmek için gerekli matematiksel kavramlar ve matematiksel düşünceler ortaya konulmuştur. Bu basamağın ortaya çıktığını gösteren başlıca işaretlerden birisi temel varsayımların belirlenerek çözüm için gerekli zihinsel modelin ortaya çıkarılmasıdır. Bu süreçte çözüm için tasarlanacak yardımcı matematiksel modeller(YMM)'in ve ana matematiksel model(AMM)'in genel yapısı şekillenmiştir. Stratejik etkenlerden hangilerinin değişken, hangilerinin sabit, hangilerinin parametre olarak ele alınacağı belirlenmiştir. Ortaya çıkan çoklu düşünceler ve farklı stratejiler dikkatlice düşünülerek en etkili stratejinin hangisi olduğu düşünülmüştür. Temel büyük düşüncenin tasarlanma sürecinde gene çözüm stratejisinde teknolojinin kullanılıp kullanılamayacağı ve kullanılırsa da nasıl kullanılacağı hakkında düşünceler üretilmiştir.

Modelleme sürecindeki en çok karşılaşılan planlama eylemi "temel büyük düşünce"nin ortaya koyulması olmuştur. Bu süreçte öğrenciler gerekli matematiksel kavramları, stratejileri, araçları (teknoloji vb.) ve çözümdeki stratejik etkenleri (temel varsayımlar, değişken, sabit, parametre vb.) ayrıntılı olarak düşünmüşlerdir. Örneğin, G_1 videoları ve fotoğrafları detaylı olarak inceleyerek onlara en iyi çözümü vereceğini düşündükleri kesiti GeoGebra'ya taşımıştır. GeoGebra'ya ekledikleri kesiti analitik düzleme uygun bir şekilde yerleştirmeye çalışarak da süreçte daha uygun matematiksel modeller elde etmeyi planlamıştır.

Selen:	Şimdi bizden köprünün uzunluğunu ve genişliği isteniyor.
Demet:	Şimdi şurada işimize yarayacak bir şu resim var ama (Demet resim 4'ü gösteriyor.). Bunu kesmemiz gerekebilir mi?
Selen:	Bunu kullanamayız uzunluk için. (Resim 4 yandan çekilmiş olduğundan dolayı kullanmak istemiyor.)
Demet:	Şurada videodan aslında düz olduğu bir yeri kesip yapabiliriz. Şu videoda vardı. (Demet 1. videoyu tekrar açtı ve izliyorlar.)
Selen:	2.15 civarında bir yerdeydi. (Videodaki istedikleri kesitin yerini söylüyor. Demet de videoyu oraya doğru ilerletti.)
Demet:	Hah burası olur mu? (Demet videoyu durdurdu.) Bunu kullanabiliriz herhalde. Daha yakın yoktu dimi?
Video Alıntısı	
Selen:	Evet.
Demet:	Şimdi kesit alalım o zaman.

G_2, Tiyatro Problemi çözüm sürecinde çözüm için tablodakilerin verilerin hepsini kullanmayı düşünmüştür. Öncelikle bilet fiyatı ve biletli sayısı arasındaki matematiksel ilişkiyi ortaya çıkarmayı hedefleyen grup, söz konusu matematiksel ifadeyi GeoGebra'dan yararlanarak bulmuştur. Bu doğrultuda G_2, GeoGebra' ya tablodaki verileri; bilet fiyatı x ekseninde, biletli sayısı ise y ekseninde olacak şekilde Giriş bölmesine yerleştirmiş ve noktaları analitik düzlemde matematiksel olarak ifade etmiştir. G_2, analitik düzeleme girilen noktaların bir doğru boyunca hareket ettiğini gözlemleyerek, bilet fiyatı ve biletli sayısı arasında matematiksel modeli bulabilmek için GeoGebra'daki en iyi yaklaştırma doğrusu işlevini kullanmıştır.

Ela: Tamam. 320 var. GeoGebra'dan bu verileri daha iyi görebiliriz. Hepsini yazalım buraya sıralı ikili olarak.
Masal: Tamam.
Ela: 40'a 289.
Mete: Bunları yazacak mıyız GeoGebra'ya?
Ela: Hıhı.
Mete: Tamam.
Masal: Tamam. Noktaları belirleyelim diyoruz. 40'a 289 gibi hepsini yazalım.
Mete: Hıhı.
Masal: Sonra noktaların hareketine göre devam edelim.
Mete: Hıhı.
Masal: Ne kadar orantı olduğunu bulmak için?
Ela: Doğrudan hareket ederiz sanırım noktalar doğru boyunca.
Mete: Hah. Şimdi buradan bir denklem buluruz. Buradan da kişi sayısını buluruz. Ama karı nasıl yapacağız? O fiyatı nasıl belirleyeceğiz?
Ela: Ona sonra bakarız.
Mete: Tamam. (Tüm noktaları sıralı ikili olarak giriyorlar.).
Masal: Tamam. En iyi yaklaştırma doğrusundan şu çıktı.
GeoGebra Alıntısı

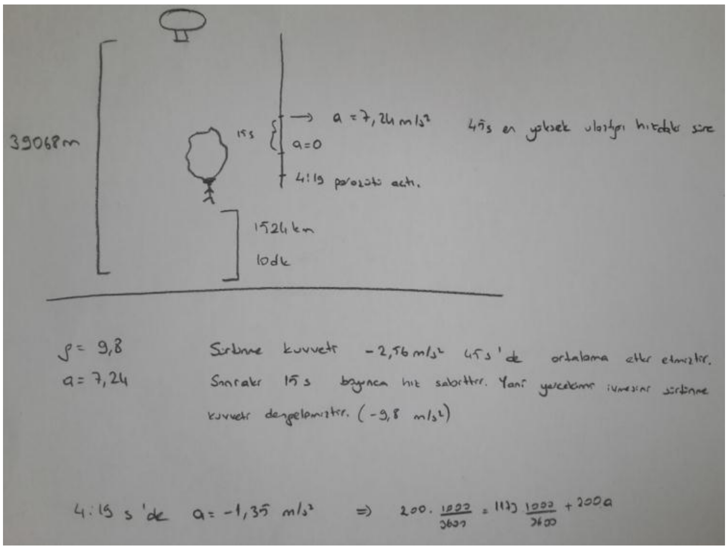


Mete Tamam (Mete denklemi kağıda yazdı.).
Masal Şimdi ne yaparız? (GeoGebra'dakileri doğruyu ve noktaları inceliyorlar.).

G_6 Düşme Problemi çözümünde problemin zihinsel bir modelini raporlarına yansıtmıştır. G_6 problem ifadesi, video, animasyon ve fotoğraflarda yaptıkları incelemeler sonucunda atlayıştaki hareketin dört kısımdan oluştuğunu vurgulamıştır. G_6'ya göre atlayışı gerçekleştiren Baumgartner, ilk 45 saniyede hızlanmış ve en yüksek hıza ulaşmış; 45-60 saniyeleri arasında sabit hızlı bir hareket sürdürmüş; 45-249 saniye arasında yavaşlayan hareket yapmış ve 259-600 saniye de paraşütle atlayışını sonlandırmıştır. Bu doğrultuda Burcu çözümlerinde paraşütün açılma anına kadar olan 3 farklı durumu 3 farklı matematiksel modelle ilişkilendirebileceklerini ifade etmiştir. Bu doğrultuda GeoGebra'ya verileri girmeyi düşünmüşler fakat sonra bunun iyi bir genel çözüm stratejisi olmayacağını düşünerek fizik formüllerinden hareketle matematiksel modelleri oluşturmaya çalışmışlardır. Ayrıca grubun yaptıkları incelemeler sonucunda üç farklı bölgede ivmelerin de değişken olduğu kanısına vardığı görülmüştür. Bu da onları o aralıklarda ivmede, ortalama bir değer bulmaya yöneltmiştir.

Burcu: Bunu tek bir denklem olarak mı düşünmek lazım. Üç ayrı grafik gibi mi? Üçünü ayrı ayrı düşünelim. Bir hızlanıyor. Sonra sabit kalıyor. Sonra da yavaşlıyor. GeoGebra'yı açalım (Noktalardan grafik bulmaya çalışıyor.). Çok fazla nokta gerekiyor; ama bizim elimizde o kadar yok. Acaba videolardan alıp da mı yapsak? Ama çok uzun sürecek oradan da sanki.

Kağıt Alıntısı



Yavuz: Kaçtan atlıyor bu? 39068'den dimi?

Burcu: Hıhı.

Yavuz: Girsek mi verileri GeoGebra'ya?

Burcu: İvme-zaman grafiği mi yapsak diye düşündüm ama çok zor olacak buradan. 45 saniye de 7.24 olduğuna baktık. Sabit olduğunu da orada bilmiyoruz da ortalama dersek. Oradan 15 saniye 0 sonra da -1.35 oluyor.

Yavuz: Sürtünme kuvvetinin denklemi neydi ya?

Burcu: Sürtünmeyi yapmamız gerektiğinden hepsini 9.8'den çıkarsak. Birinde -2.6 diğerinde 9.8 oluyor (Sürtünmenin ivmeye olan etkisini kastediyor.).

1c. Çoklu Düşünce Yapılarını Birleştirme ve Ayrıştırma

Sahip olunan düşünceler ve problemin çözümü için gerekli olduğuna inanılan düşünceler arasındaki etkileşimin olduğu süreçtir. Bu doğrultuda eski deneyimlerle söz konusu problemin çözümü ilişkilendirilmiştir. Gerektiğinde eski problem çözme deneyimleri de bu süreçte kullanılmıştır. Benzer olduğu düşünülen eski problemlerde sergilenen yaklaşımların, söz konusu problem için ne kadar uygun olduğu dikkate alınmıştır. Çözümde kullanılabilecek düşünceler gruplandırılmış ve birlikte nasıl organize edilebileceği ile ilgili plan yapılmıştır. Bu süreçte eski düşüncelerin yeni düşüncelerle çakışabileceği, yeni düşünceleri şekillendirebileceği, yeni düşüncelerin eski düşünceleri değiştirebileceği veya yeniden yapılandırılabileceği düşünülmüştür.

G_7, Köprü Problemi'nde problem ifadesi, video, animasyon ve fotoğraflardan hareketle, oluşturduğu farklı düşünceleri bir arada ele almış ve yapılması planlanan köprünün İstanbul'daki ihtiyacı karşılayabilmesi için kaç şerit olması gerektiğini ortaya koymuştur. Yani G_7 problem durumunun fiziksel bir modelini ortaya koymadan önce çoklu düşüncelerden faydalanarak etkili bir zihinsel model ortaya koymaya çalışmıştır. Bu süreçte Yılmaz çoklu düşüncelerini birleştirip, gereksiz düşüncelerini ayrıştırırken matematiksel işlemlerden yararlanmıştır.

Ezgin: Bu köprülerin birbirine göre konumları.

Video Alıntısı

Yılmaz: Hah. Bu köprü biraz uzakta olduğundan buradan daha fazla insanın geçmesi beklenir. O yüzden diğerlerine göre biraz daha geniş olacak bence. Evet. 1+1 raylı sistemi varmış (Animasyon resme bakıyorlar.). Bu da herhalde bir geliş bir de gidiş.

Video Alıntısı

Ezgin: Hıhı. Bir geliş bir gidişten bahsediyor. Yani şurada iki trenlik bir yol olacak o zaman. Nasıl yapacağız şimdi?

Yılmaz: 3 milyon araç var. Bunların yüzde 87'si karayolundan geçiyormuş. Yüzde 13ü demiryolu olur mu? Yoksa başka bir şey olabilir mi? Neyse burasını geç çok önemli değil.

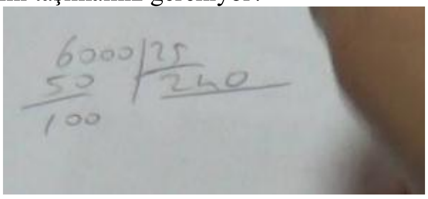
Ezgin: Bence demiryolu da varsa karayolu azalmaz mı biraz?

Yılmaz: Şu değerler neydi? Günde 600 bin için ne diyordu?

Ezgin: Köprüden araç geçiyor o kadar. Hatta kapasitesinin 2.5 katıydı.

Yılmaz: O zaman 600 bölü 2.5 yaparız. 240 yapar. 240 bin yerine 600 bin araç geçiyor. Yani 360 bin araç fazlalık var. 360 bin aracı üçüncü köprüye mi taşımamız gerekiyor?

Kağıt Alıntısı



Ezgin: Bizde iki köprü var

Yılmaz: Bu 600 bin iki köprünün toplamı değil mi?

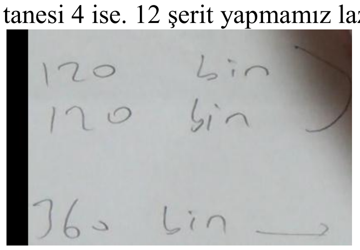
Ezgin: Hıhı öyledir herhalde.

Yılmaz: İki köprüden 240 bin ise bir tanesinden demek ki 120 bin araç geçmesi gerekiyormuş normalde. Diğerinden de 120 bin.

Ezgin: Hıhı.

Yılmaz: Toplam işte 240 bin yani. Geriye 360 bin var. 3 tane köprü gerekiyor mantıken aslında yada bunlar 4 şeritse bunun 12 şerit olması lazım tahminen. Yani yeni köprüyü 12 şeritlik yaparız olay biter. Burada hata var mı? Bak. 120 bin ikisi de. 2+2 4 şerit. 360 bine 3 köprü lazım bir tanesi 4 ise. 12 şerit yapmamız lazım o nedenle.

Kağıt Alıntısı



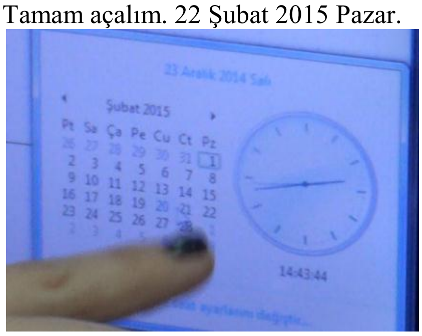
G_1'de Köprü Problemi çözümünde, daha önce çözdükleri Salıncak Problemi'nde yaşadıkları eski deneyimlerinin etkisinde kalmış ve çözümlerinin daha uygun olabilmesi için Salıncak Problemi'nde yaptıkları gibi videodaki en iyi açıyla yakaladıkları kesiti almaya çalışmıştır. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

> (…Öğrenciler video ve resimleri bir defa inceleme yerine tekrar tekrar izleyerek tartışıyorlar… Demet çözümde ilk olarak Resim 2'den yararlanmayı düşünse de Defne Salıncak Problemi'nde kesit aldıklarını ifade etti ve burada da uygun açıyla kesit alabileceklerini söyledi… Demet, Defne'nin videodan kesit almaya ilişkin görüşünü çabuk benimseyerek bu yönde düşüncelerini belirtti. Gözlem notu: G_1 Köprü Problemi)

G_5 Tiyatro Problemi'nde tabloları incelemiş ve tarihleri de dikkate alarak şehirlerdeki kişi sayısını etkileyebilecek dış faktörleri ortaya koymuştur. Bu şekilde hafta sonları tiyatroya daha fazla insanın gidebileceği, bilet sayısındaki azalmanın gelen kişi sayısını olumlu etkileyeceği, ama çok azalırsa da gelirin düşeceği gibi çözümde kullanılabilecek veya temel varsayım olarak ele alınabilecek çoklu düşünceleri ortaya çıkmıştır. G_5 çözümde hangi faktörlerin kişi sayısını ne kadar etkilediği ile ilgili düşünceler de sergilemiştir. Bu etkenlerin kişi sayısında yapmış olduğu değişiklikler (çoklu düşünceler) ilişkilendirilmiştir. Bu çoklu düşünceler İstanbul'daki olası kazanç durumu hakkındaki yapılan temel büyük düşünceyi, ön tahminleri ve çözüm için yapılabilecekleri desteklemiştir.

Bengi: Tamam açalım. 22 Şubat 2015 Pazar.

Video Alıntısı



Bülent: Pazara geliyor.

Bengi: İzmir'de pazarmış.

Bülent: Evet 24 şubat Salı.

Canan: Perşembe.

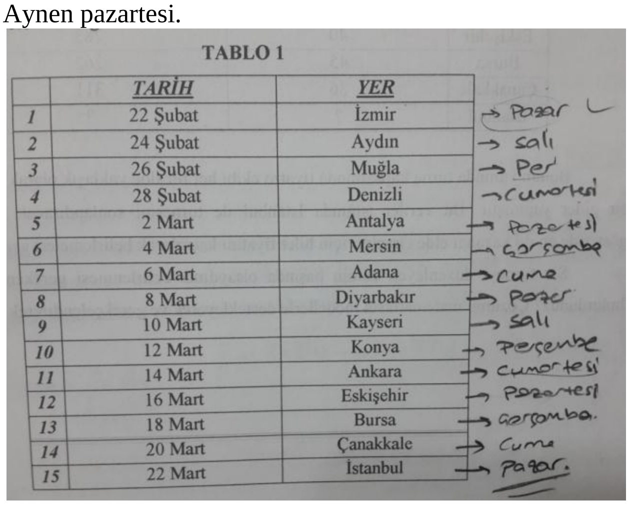
Bülent: Evet, ikişer ikişer atlayacaksın.

Canan: Martın ikisine baksana bu kadar uğraşmayalım.

Bengi: Pazartesi.

Bülent: Aynen pazartesi.

Kağıt Alıntısı



TABLO 1

	TARİH	YER	
1	22 Şubat	İzmir	→ Pazar
2	24 Şubat	Aydın	→ salı
3	26 Şubat	Muğla	→ Per
4	28 Şubat	Denizli	→ cumartesi
5	2 Mart	Antalya	→ pazartesi
6	4 Mart	Mersin	→ çarşamba
7	6 Mart	Adana	→ cuma
8	8 Mart	Diyarbakır	→ Pazar
9	10 Mart	Kayseri	→ salı
10	12 Mart	Konya	→ perşembe
11	14 Mart	Ankara	→ cumartesi
12	16 Mart	Eskişehir	→ Pazartesi
13	18 Mart	Bursa	→ çarşamba.
14	20 Mart	Çanakkale	→ Cuma
15	22 Mart	İstanbul	→ Pazar.

Bülent: Bak mesela Diyarbakır'da da pazara geldiği için kişi sayısı fazla olabilir. Yani bir de bilet de uygun pazara denk gelmiş. Hem Bursa ne zamana denk geliyor? Çarşambaya denk geliyor. Hafta içi bilet fiyatı da çok yüksek.

Bengi: Evet. İstanbul da pazara denk geliyor. Hem kültür seviyesi çok yüksek bir şehir hem de kalabalık bir şehir.

Bülent: Aynen.

Canan: Evet. Kişi sayısı maksimum orada olacaktır herhalde.

Bülent: Kişi sayısı maksimum orada olacak mıdır bilmiyorum ama bilet fiyatının fazla olması normal olur.

Bengi: En azından geliri en fazla olacağı kesin bence.

Bülent: Tabi ki. En fazla bence de orada olacak.

G_1 Düşme Problemi çözümünde, videoda Boumgartner'ın paraşütü açtığı andaki hızı olan 125-127 mil/saat'i çözümde kullanabilmek için km/saat'e çevirmiş ve yaklaşık 200 km/saat olarak bulmuştur. Sonra yer yüzündeki yer çekimi ivmesinin yaklaşık 9.8 m/s^2 olduğu düşüncesiyle, formüllerde hem hızı metre/saniye hem de süreyi saniye cinsinden yazma yoluna gitmiştir. Bu doğrultuda 200 km/saat i metre/saniye cinsinden yazmış ve 55 metre/saniye olarak bulmuştur. Burada G_1, fiziksel birimler ve dönüşümlerine, yeryüzündeki yer çekimi kuvvetinin birim cinsinden değerine ve videolarda atlayış anındaki verilere ilişkin elde ettikleri düşünceleri organize ederek çözümde kullanmak üzere birleştirmiştir.

Selen: Saatteki hızı 200 km/saat.

Defne: Tamam.

Selen: Saniyede kaç olur mu baksak?

Defne: Tamam. Saniyeye çevirdiğimiz zaman. Benim kafam durdu iyice çok fazla rakam ile uğraştık. Çok fazla şey var.

Demet: Şöyle yapmayacak mıyız? 200'ü 60a böleceğiz. Sonra bir daha 60'a böleceğiz.

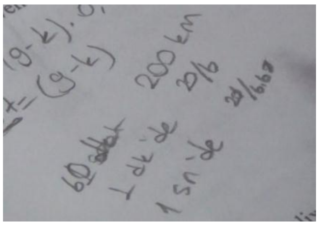
Defne: Şimdi 1 saat 200 km ise 1 dakikada ne kadar olur?

Demet: 60 ile çarpacağız.

Defne: 60'a böleceğiz. 20 bölü 6 tamam 1 saniyede.

Demet: Gene 60a böleceksin.

Kağıt Alıntısı



Defne: Tamam ne çıktı? 2 bölü 36. 1 bölü 18.

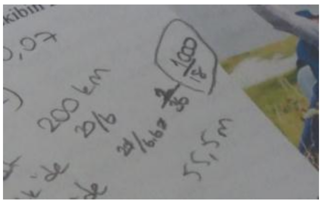
Selen: O da kilometre ya. Metreye çevirelim.

Defne: 1000 bölü 18.

Demet: 1000 bölü 18, 55. 5'miş.

Defne: 55.5 metre bölü saniye oldu.

Kağıt Alıntısı



Demet: Ne oldu bu yani 1 saniyede 55.5 metre gitmiş ortalama olarak. Bu hız değil miydi?

Selen: Aynen hızı oldu.

Defne: Metre bölü saniye oldu artık. Tamam işte. Burada bunu kullanacağız. Artık t de 259 saniyeydi. Ne oldu şimdi sonuç? Tamam, biz g'yi biliyoruz 9.8 metre bölü saniye kare diye de.

1d. Matematiksel ve Teknolojik Düşünceleri Uzlaştırma

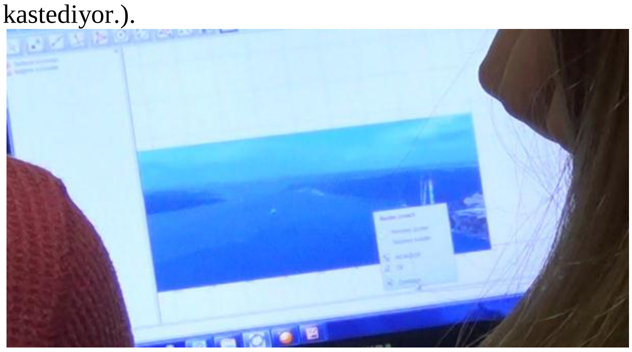
Çözüm için gerekli matematiksel ve teknolojik düşünceler uzlaştırılmış, hem matematiksel hem de teknolojik düşüncelerin bir arada nasıl organize edilebileceği düşünülmüştür. Matematiksel düşüncelerdeki eksikliklerin, teknolojik düşünceyle teknolojik düşüncelerdeki eksiklerin, matematiksel bilgiyle üstesinden gelinip gelinemeyeceği düşünülmüştür. Bu basamak; çoklu düşüncelerdeki eksikliklerin var olduğu durumlarda, daha iyi ve daha az bilişsel yük içeren çözüm süreçlerinin oluşturulmasını sağlamıştır.

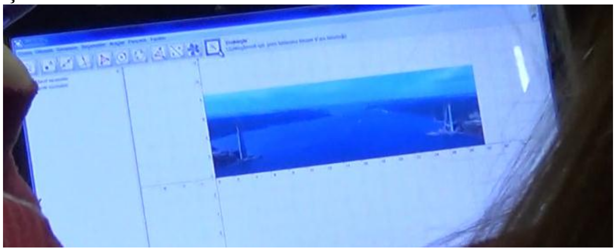
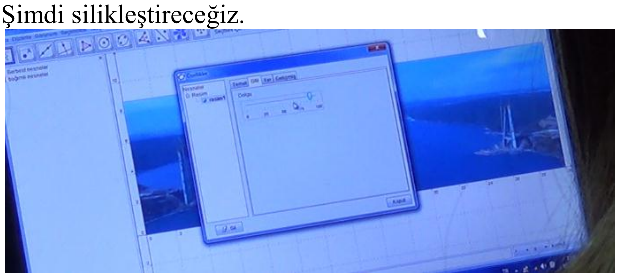
Öğrencilerin planlama eylemlerinden biri; stratejilerini, varsayımlarını, düşüncelerini teknoloji, matematik ve gerçek yaşama ilişkin bilgi, beceri ve stratejileri doğrultusunda yönlendirmeleridir. Öğrenciler süreçte kimi zaman matematiksel düşüncelerle teknolojik düşünceler arasında uzlaşı sağlamaya çalışmışlar; kimi zaman da matematiksel düşünceleri ile gerçek yaşamdaki düşünceleri arasında uyum aramışlardır. Örneğin, G_1 belirlediği video kesitini GeoGebra'da analitik düzleme yerleştirmiş; resmi sabitleyip şeffaflaştırarak daha iyi bir çözüm sağlamaya çalışmıştır. Bu doğrultuda grup kesitin yapısından dolayı köşe noktalarını belirleyerek resmi sabitlememiş; bunun yerine köprü x ekseninde olacak şekilde kesiti yerleştirmeye karar vermiştir. Böylece matematiksel düşüncelerini en iyi yansıtabilecek teknolojik stratejiyi seçmiştir. Bir başka deyişle matematiksel düşünceleri ile teknolojik düşünceleri arasında bir uzlaşı sağlamaya çalışmıştır.

Selen: Ortalamayalım mı? (y ekseninin resmi iki eş parçaya bölmesini kastediyor.)

Demet:	Ortalıyorum (Köprünün hizası x eksenine gelecek şekilde resmi yerleştiriyorlar).
Video Alıntısı	
Selen:	Şey yapsak ya biraz şeffaf. Bir de resmi sabitleyelim.
Demet:	Tamam. (Demet tam bilemedi sabitlemeyi).
Selen:	Yer belirliyorduk ya.
Demet:	Tamam, hah şuradan yapıyorduk (Demet sağı tıkladı ve yaptıklarını hatırladı.).
Selen:	Ya biz taşıyarak yapabiliriz bence bunu. Sabitleyemeyiz bunun köşelerini bilmiyoruz. Zor olacak sabitlemek.
Demet:	Evet, haklısın. Bence de böyle kalsın.

G_3 Köprü Problemi çözümünde öncelikle problem durumuna ilişkin oluşturdukları zihinsel modellerini GeoGebra'ya aktarmıştır. G_3 GeoGebra'da uzaklaşma-yakınlaşma eyleminin rahatlıkla gerçekleşebilmesi ve video kesitinin kayması için GeoGebra'daki kesiti analitik düzleme sabitlemiştir. Bu sayede kesitin oranı çözüm boyunca değişmemiştir. Ayrıca G_3 çözüm esnasında yapacakları çizimlerin daha iyi bir şekilde görülebilmesi için sabitlenen video kesitini silikleştirmiştir. Bu da G_3'ün yaptıkları çizimlerin daha ayrıntılı ve sağlıklı olarak görebilmesine ve gerekli noktaları daha doğru yerlere yerleştirmesine olanak sağlamıştır.

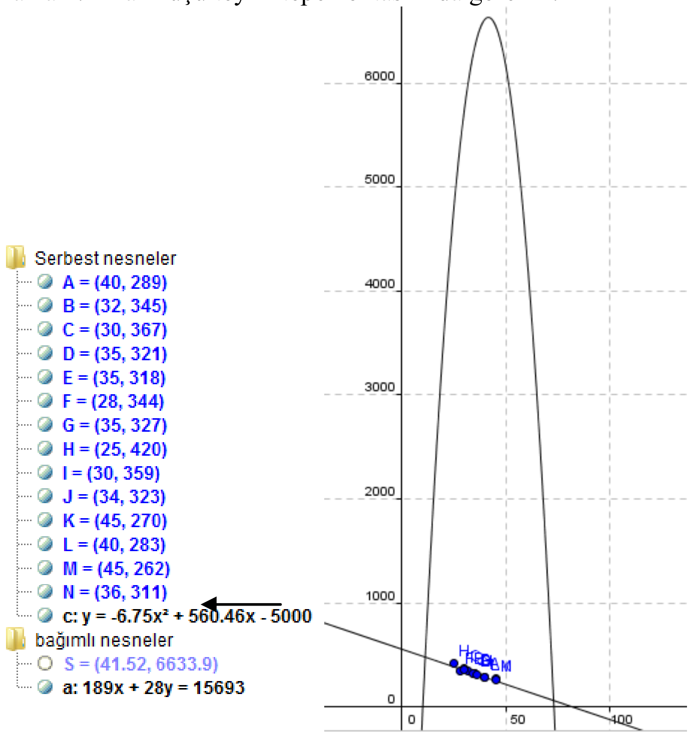
Sena:	Önce sabitleyelim resmi de sonra yapalım.
Seray:	Sıfırdan sıfıra. Ay kaydırdım şekli.
Sena:	Aşağıda kaldı şekil.
Seray:	Hah geldi. Ne yapıyorduk (Seray resmi GeoGebra'da sağ tıkladı ve özellikleri açarak resmi sabitliyor.)? Bunu sıfıra sıfır alıyorduk (Köşe 1'i kastediyor.).
Video Alıntısı	
Kumsal:	Hıhı.
Seray:	Tamam. Hah oldu. Köşe 1 sol alttı.
Kumsal:	Köşe 2 neresiydi?
Seray:	Köşe 2' yi mesela 30 alıyorduk biz.

Sena:	30’a 0 falan yazıyorduk
Seray:	Evet (Seray Köşe 2’yi yazıyor.). Hah tamam. Şimdi bir de şu görüntüyü tam ortalayalım.
Kumsal:	Evet. Biraz da yaklaştır şimdi
Seray:	Yaklaştırıyorum.
Kumsal:	Bunu biraz da silikleştirmemiz lazım yazdıklarımızın daha iyi görünmesi için.
Video Alıntısı	
Seray:	Şekil böyle iyi. Yoksa biraz daha büyüteyim mi?
Kumsal:	Biraz daha yaklaştırabilirsin.
Seray:	Şöyle oldu.
Kumsal:	Tamam.
Sena:	Hıhı.
Seray:	Şimdi silikleştireceğiz.
Video Alıntısı	
Kumsal:	Hıhı.
Seray:	Bu iyi mi (Yüzde 50 yaptı)?
Kumsal:	Biraz daha yükselt (Çok silik olduğunu kastediyor.).
Seray:	Bu iyi mi (Yüzde 75 yaptı.)?
Kumsal:	Hıhı.

G_1 Tiyatro Problemi çözümde elde ettikleri matematiksel modelin grafiğinden hareketle matematiksel çözüme ulaşmaya çalışırken, grafiğin tepe noktasına olabildiğince yaklaşma yolunu seçmiş ve tepe noktasına en yakın seçilecek noktadan hareketle maksimum karı bulmaya çalışmıştır. Bununla birlikte G_1, çözümde GeoGebra’nın geometri penceresinde şekillerin ve noktaların üst üste geldiğini görmüş ve daha sağlıklı işlemler gerçekleştirebilmek için o an için gereksiz olan bazı noktaları analitik düzlemde gizlemiştir (Örneğin S noktası analitik düzlemde gizlenmiştir.)

Defne: Tamam. Biraz küçülteyim tepe noktasını da görelim.

GeoGebra Alıntısı



Demet: Tamam. Maksimum y o noktaya iyice yaklaşsana.

Defne: Tamam belirleyeceğim.

Demet: Kaç oldu 6633 mü?

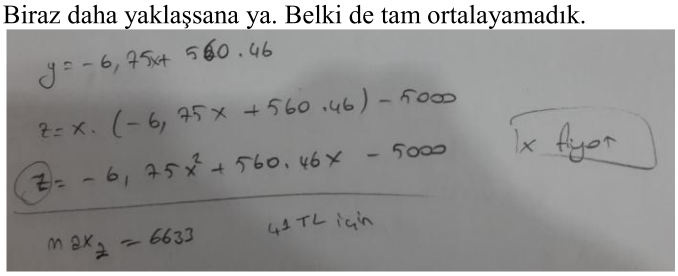
Defne: Evet. 6634.

Demet: x' imiz de bilet sayısıydı. O da 41 küsur. 41 lira yaparsak yani maksimum gelir oluyormuş o zaman.

Selen: Evet.

Demet: Biraz daha yaklaşsana ya. Belki de tam ortalayamadık.

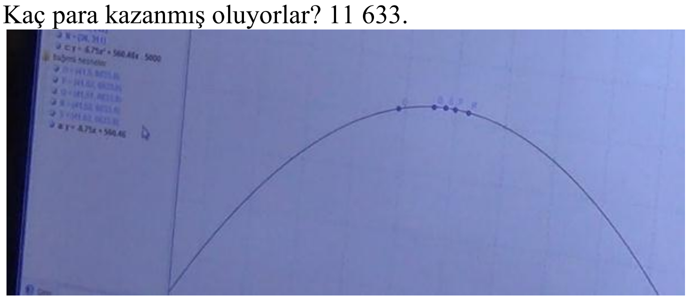
Kağıt Alıntısı



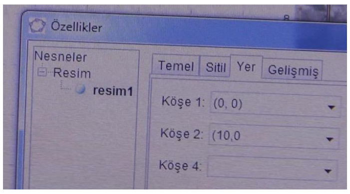
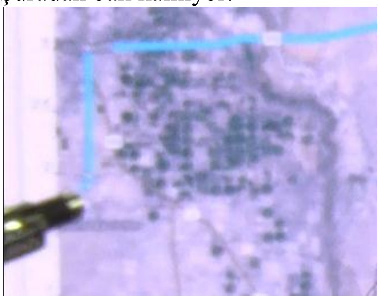
Defne: Tamam.

Demet: Bak biraz daha ortalamak lazımmış. 6633. Bir de 41 işte gene değişmedi fazla gene de (Üzerinden birden fazla nokta seçip baktılar). Kaç para kazanmış oluyorlar? 11 633.

Video Alıntısı



G_2 Düşme Problemi'nde eğim açısını hesaplarken ölçekli olarak verilmiş fotoğrafı kullanmıştır. Diğer gruplarında da yaptığı gibi GeoGebra'da resmi sabitleme yoluna gitmiştir. Resmi sabitledikten sonra da GeoGebra'da fotoğrafa çok fazla yaklaşılarak atlayışı gerçekleştiren Boumgartner'ın atladığı ve düştüğü yerler işaretlenmiştir.

Masal:	Ne alayım? 10 mu alayım?
Ela:	10 olsun (Masal (0,10) şeklinde yanlış giriyor ilk başta Köşe 2'yi)
Masal:	Köşe 2 hangisiydi ama?
Ela:	Sağ alt. Yanlış yazdın.
Masal:	Hmm o zaman.
Video Alıntısı	
Ela:	4.' üyü de yazıyorduk dimi (Köşe 4'ü kastediyor.)?
Mete:	Gerek yok. O zaman oranı bozarız.
Ela:	Tamam. Ekranı tam ortalasana.
Masal:	Tamam. Şimdi nereden kalkıyor?
Mete:	Şuradan bak kalkıyor.
Video Alıntısı	
Masal:	Tamam. Şurası tam dimi?
Ela:	Gittikçe yakınlaş oraya. Tam koy noktayı.
Mete:	Evet. Güzel tam orası.

Gruplar genel olarak Düşme ve Köprü problemlerinde verilen fotoğrafları ve video kesitlerini kullanarak GeoGebra'dan süreç boyunca yaralanmışlardır. Bu süreçte gruplardan bazılarının, seçtikleri herhangi bir fotoğrafı veya video kesitini sol altı (Köşe 1) orijinde olacak şekilde GeoGebra'ya yerleştirdikleri görülmüştür. Bazı gruplar ise analitik düzleme yerleştirirken işlem kolaylığı sağlayacak şekilde fotoğrafı ve video kesitini konumlandırmıştır.

1e. Matematiksel ve Gerçek Yaşam Düşüncelerini Uzlaştırma

Çözüm için gerekli matematiksel ve gerçek yaşam düşünceleri uzlaştırılmış, hem matematiksel hem de gerçek yaşam düşüncelerinin bir arada nasıl organize edilebileceği düşünülmüştür. Matematiksel düşüncelerdeki eksikliklerin gerçek yaşam düşünceleriyle veya gerçek yaşam düşüncelerindeki eksiklerin matematiksel düşüncelerle üstesinden gelinip gelinemeyeceği düşünülmüştür. Bu basamak çoklu düşüncelerdeki eksikliklerin var olduğu durumlarda, daha iyi ve daha az bilişsel yük içeren çözüm süreçlerinin oluşturulmasını sağlamıştır.

Planlama eylemleri modelleme sürecinin başında ve ortalarında ortaya çıktığı gibi, sonlarında da meydana gelmiştir. Örneğin, G_1'in elde ettiği gerçek yaşam çözümü olan 84.6 metre grup üyelerinden Selen'e gerçek yaşam karşılığında fazla bir değer olarak gelmiş ve onu tatmin etmemiştir. Demet ve Defne de bu görüşü desteklemişler ve bu doğrultuda stratejilerini, temel büyük düşüncelerini ve gerçek yaşam durumuna ilişkin oluşturdukları zihinsel ve matematiksel modellerini tekrar gözden geçirmişlerdir. Gerçek yaşam durumuna ilişkin oluşturdukları zihinsel modellerinde değişikliğe gitmişler ve çözüm planlarını bu yönde tekrar oluşturmuşlardır. Böylece yeni köprünün genişliğine ilişkin gerçek yaşam çözümünü 72.9 metre olarak bulmuşlardır. Bu değer, grup üyelerine daha mantıklı gelmiştir. Görüldüğü gibi grup üyelerinin gerçek yaşam ve matematik arasındaki düşüncelerini uzlaştırma çabası onların birçok farklı üst bilişsel eylemi gerçekleştirmesine olanak sağlamıştır. Bu süreç en açık biçimde hem çözümlerinin doğruluğunu değerlendirdiklerini hem de zihinsel modellerinde ve temel büyük düşüncelerinin yapısında değişikliğe gittiklerini göstermiştir. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

> (…Öğrenciler köprünün genişliğini 84.6 metre olarak buldu. Selen bu değeri bulununca video kesitini daha ayrıntılı incelemek istedi. Çizimde sorun olabileceğini ve bunun sonucu etkileyebileceğini belirtti. Tekrar videoyu incelediler. Demet Selen'i destekledi ve çizimi tekrar yapmaları gerektiğini ifade etti. Hemen ardından Defne de bu görüşü destekledi. Gözlem notu: G_1, Köprü Problemi)

G_5 Tiyatro Problemi çözümünde bilet fiyatını etkileyen çoklu düşünceleri ortaya çıkarırken günlük yaşamdaki bilgilerinden yararlanma yoluna gitmiştir. Bu durum illerin nüfusunun bilet fiyatı ve gelen sayısını etkileyen önemli bir faktör olduğunu düşünmelerini sağlamıştır. Bu doğrultuda grup illerin nüfuslarını yaklaşık olarak tahmin ederek, bilet fiyatı sabit tutulduğunda nüfusun, gelen sayısını ne kadar etkileyebileceği hakkında genel bir düşünce ortaya koymaya çalışmıştır.

Bülent: Aslında nüfusları nasıl oluyor? Şu üçünün yazabiliriz nüfuslarını. Hatta

İzmir'le kıyaslarsak daha iyi olur bence. 40'a 40 fiyatlar aynı yani birbirlerine. Nüfus da çok önemli şimdi yani. İstanbul' un nüfusu ne kadar (İnternetten bakıyor Bengi.)? İzmir'in 3-4 katı ya tahminen. 13 milyon vardır.

Bengi: 14 milyon küsur 2013 de.

Bülent: 15 milyon yani.

Bengi: Aynen 15 milyon

Bülent: O da 5 milyon falandır

Bengi: 4 milyon küsur o da 5 milyon yaklaşık. Uv 3 katı nerdeyse

Bülent: Ankara'ya da mı baksak?

Bengi: Tamam

Bülent: 7 milyon falan sanırım

Bengi: Dur dur 6 milyon

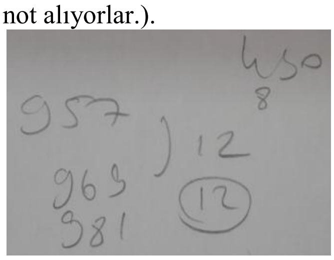
Bülent: Tamam. yazalım bunları ve kişi sayısını ne kadar arttırabiliriz onu düşünelim. Bence 40 lira çok uygun bir fiyat hafta sonu için İstanbul da 450 ye de yaklaşır yani

G_3 Düşme Problemi'ni çözerken, Kumsal serbest düşmenin paraşütle düşüşü kapsamadığını arkadaşlarıyla paylaşmıştır. G_3 bu doğrultuda hem temel büyük düşüncelerini şekillendiren zihinsel modellerinde bu düşünceyi dikkate almıştır hem de bu düşünce ışığında paraşütü açtıktan sonraki matematiksel işlemleri görmezden gelmiştir. Yani serbest düşmenin paraşütle düşüşü kapsamadığı düşüncesi problem için gerekli olmayan durumları açığa çıkarmıştır.

Seray: Serbest düşme nasıl oluyordu?

Kumsal: Paraşütü açana kadar oluyordu. Paraşütü ne zaman açtığına da bakmalıyız (Kumsal ve Seray videoyu arada durdurarak verileri kağıda not alıyorlar.).

Kağıt Alıntısı



G_2'nin Düşme Problemi çözümünde Ela, yerçekimi ivmesinin Dünya'nın farklı konumlarındaki değişimi hakkındaki gerçek yaşam düşüncesini arkadaşlarıyla paylaşmıştır. Bu doğrultuda da G_2 matematiksel düşüncelerdeki eksiklerini gerçek yaşam düşünceleriyle karşılamış ve bu düşünce G_2'nin sürtünme kuvvetinin Boumgartner'ın ivmesini ne kadar etkilediği ile ilgili daha etkili matematiksel sonuçlara ulaşmasına olanak sağlamıştır.

Mete: Merkezinde 10 muydu?

Ela: Yeryüzünde yaklaşık olarak 9.8 oluyordu sanırım.

Mete:	Bu şeyden kaynaklanıyor normalde. Çekirdekten kaynaklanıyor.
Ela:	Aslında yeryüzünde en fazla. Çekirdeğe gittikçe azalıyordu.
Masal:	Uzaklıkla ivme doğru orantılı mı?
Ela:	Yeryüzünden çekirdeğe kadar azalıyor. Yeryüzünden yukarı doğru da azalıyor.
Masal:	En yüksek o zaman yeryüzünde mi oluyor?
Ela:	Evet. Ben öyle biliyorum.

.
.
.

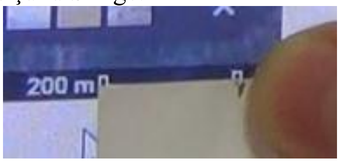
Mete:	Burası yüzey ya. Buradan aşağıya indikçe azalıyor. Yukarıya çıktıkça da azalıyor. Yer çekiminin değişimi gibi bir şey yazabilirsin.
Kağıt Alıntısı	
Masal:	Evet.

1f. Grup İçi Görev Paylaşımı Sağlama

Grup üyelerinin çözüm sürecinde hangi pozisyonda daha etkili olacakları dikkate alınmıştır. Grup üyeleri daha önceki deneyimleri doğrultusunda grup içerisinde kendilerine bir rol biçmiştir. Çözüm sürecinde bazı öğrencilerin GeoGebra ile ilgili sorumlulukları üstlendiği, bazılarının yazman olduğu ve gerekli düşünceleri/bilgileri kağıda düzenli olarak not aldığı, bazılarının ise süreçte gerçekleştirilen matematiksel işlemleri yaptığı görülmüştür. Bu süreçte farklı pozisyondaki öğrencilerin hepsi, düşüncelerini arkadaşlarıyla paylaşmıştır. Çözüm sürecinde bazen problem için gerekli üst düzey matematiksel, gerçek yaşam veya teknolojik bilgilere ve hasta olma, ses kısılması, yorulma, kafa karışması gibi bazı özel durumlara bağlı olarak grup içerisinde görev değişimi gerçekleştirilmiştir. Örneğin, G_5'in Köprü Problemi çözüm sürecinde Bengi *"A ve B noktaları arasında uzaklığı ölçek yardımıyla şu şekilde diyip açıklayayım."* diyerek rapor yazma görevini üstüne almıştır. G_7'nin Köprü Problemi'nde Seda *"Bir yerden temize geçiyorum ben."* diyerek yazma görevini üstlenmiştir. Ayrıca G_6'nın Köprü Problemi çözümünde de Burcu raporda yazılması düşünülen şeyleri Simge'e söylemiş ve Simge de süreçte raporu son haline getiren kişi olmuştur.

Simge:	Evet.

Burcu: Bu kadarlık mesafe 200 metreymiş. Bir kağıt var mı onu kullanabiliriz. Ölçeklendirelim. Tamam, çizsene şunu Simge.



G_4'ün Tiyatro Problemi çözüm sürecinin başlarında Dila Celal'den bilgisayarın karşısına oturmasını istemiştir. Bu durum GeoGebra kullanılarak yapılacak bir çözüm sürecinde Dila'nın GeoGebra ile Celal'in ilgilenmesinin çözümde daha iyi olacağını düşünmesinden kaynaklanmıştır. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

(…G_4 Tiyatro Problemi çözümüne başlamadan önce Canan oturma düzeninde Celal'in ortaya yani bilgisayarın tam karşısına geçmesini istedi. Celal de buna uyarak ortaya oturdu… Celal çözüm boyunca bilgisayarın karşısında oturdu. Gözlem notu: G_4, Tiyatro Problemi)

Matematiksel Modelleme Sürecindeki "İzleme Yapıları"

Matematiksel modelleme sürecindeki üst bilişsel izleme eylemlerinin genel olarak süreçte sergilenen her bir davranışın arkasında yatan sebeplerin sorgulandığı, önceki ve sonraki düşünceler arasındaki tutarlık veya tutarsızlıkların sürekli olarak takip edildiği bir aktif izleme sürecini ortaya çıkardığı görülmüştür.

Matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan üst bilişsel izleme eylemleri modelleme sürecinin her anında süreçteki farkındalığı ortaya çıkarıcı, süreci kontrol edici, düzenleyici ve aktif izleyici bir rol oynamıştır ve modelleme sürecinde dört temel kategori altında şekillenmiştir (bkz. Tablo 5).

Tablo 5. Matematiksel Modelleme Sürecindeki İzleme Yapıları

	Kategoriler	Yanıt Aranan Temel Sorular
İzleme Yapıları	**2a.** Anlık soru sorma ve soru/sorunlara yönelik anlık düşünceler üretme	Birden ortaya çıkan sorulara yönelik anlık düşünceler neler?, Çözümde yapılanları eleştirecek anlık düşünceler neler?, Zihinde çözümün o anındaki eylemiyle ilgili sorun var mı? Zorluklar ortaya çıktığında ortadan kaldırıcı önlemler neler?
	2b. Planı takip etme	Düşünsel planda yapılanlar veya yapılmayanlar neler?, Çözümde plana göre neler yapılacak?, Çözüm plandaki sıraya göre gerçekleşiyor mu?

	2c. Plan dışı durumları ortaya koyma	Plandaki sıraya uymayan düşünceler veya eylemler var mı?, Plandaki düşüncelerle çelişen bir durum oluştu mu?
	2d. Modelleme sürecine uygun ilerleme	Modelleme sürecindeki basamaklara uygun bir çözüm süreci gerçekleştiriliyor mu? Gerekli matematiksel modellere ulaşıldı mı? Gerçek yaşam ve matematik arasındaki geçiş sağlanıyor mu?

2a. Anlık Soru Sorma ve Soru/Sorunlara Yönelik Anlık Düşünceler Üretme

Çözüm süreci boyunca öğrenciler arkadaşlarının düşüncelerini takip etmişlerdir. Süreçte ortaya konan düşüncelere anlık tepkiler (soru sorma, onaylama, reddetme, aksi örnek verme, çelişkiyi ortaya koyma gibi) verilmiş ve o anki düşünceye ilişkin anlık eleştiriler sergilenmiştir. Süreç boyunca grup çalışmasından kaynaklı olarak bu üst bilişsel eylem sürekli olarak ortaya çıkmıştır. Bu sayede öğrenciler süreci aktif olarak izlemişler ve her düşünceyi aktif olarak dinlemişlerdir. Aynı zamanda düşüncelerdeki hatalara yönelik üst düzey bir farkındalığın oluşması sağlanmıştır. Bununla birlikte sergilenen bu eylemler anlık olmasından dolayı bazen mantıksız olmuş veya sonradan kişinin yadırgayacağı düşünceleri de ortaya çıkarmıştır. Kişinin o anki anlık sesli düşünmeleri, tepki verilen düşünceye ilişkin, kişinin anlık algısını ortaya koymuştur.

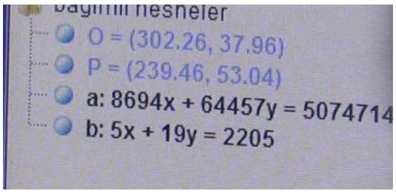
G_7 Köprü Problemi çözümünde, köprünün genişliğini bulurken genişliği üç eşit parçaya bölmüştür. Ezgin bu durumu ifade ederken; Seda ve Yılmaz, Ezgin'nin düşüncesini tam olarak anlayamadıkları için o an Ezgin'ye kısa ve net sorular yöneltmişler ve durumu anlamlandırmaya çalışmışlardır. Bununla birlikte ifadelerden de anlaşılacağı üzere, aslında Seda ve Yılmaz'un Ezgin'nin düşüncesinde anlamadığı noktalar farklıdır. Hatta Seda'in sorusuna Yılmaz cevap vermiştir fakat Yılmaz cevabının hemen ardından Ezgin'nin düşüncesindeki anlamadığı kısmı, anlık soru olarak gruba sormuştur ve Ezgin de bu durumu açıklamıştır.

Ezgin:	Yani 3 eşit parçaya bölmüş olduk şuan.
Yılmaz:	Evet mantıklı oldu aslına bakarsak resimde. Çünkü aralarında çok fark yok.
Ezgin:	Evet. Bence de iyi oldu.
Seda:	15 metre mi olacak?
Yılmaz:	Yok, şurası 4 şerit. 12 metre burada demir yolu. 12 metre 12 metre olacak.
Ezgin:	Ama böyle olunca eski şeyle eşit oldu ama demir yolu ekledik rahatlattık trafiği

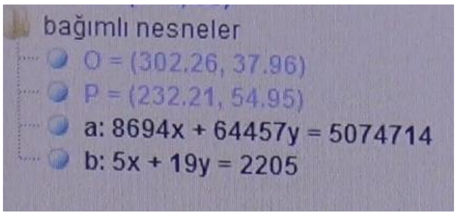
Yılmaz: Şimdi bizim kaç şeridimiz oldu.
Ezgin: 8 karayolu 2 de demiryolu oldu.

G_5 Tiyatro Problemi çözümünde, farklı bilet fiyatı verilerini deneyerek hem biletli sayısının hem de karın yaklaşık ne kadar olacağını hesaplamayı denedikleri görülmüştür. Bu süreçte de GeoGebra'dan yararlanan G_5'de herkes aktif olarak yapılanları takip etmiş ve anlık görüşlerini grupla paylaşmışlardır. Canan'nun yapılanları aktif olarak izlerken yanlışı anında fark etmesi, verilen değerler belirlenirken herkesin nedeniyle birlikte görüşlerini anında aktarması bunlardan bazıları olmuştur.

Bülent: Arttıralım mı? Tamam. 50 alalım bir de.
Canan: Belki bir yerden sonra bu da azalmaya başlayacak.
Bülent: 250 kişi.
Bengi: 12500 gene arttı.
Canan: 52 al.
Bülent: 53 alsak?
Video Alıntısı



Canan: 239.
Bülent: 53 çarpı 239 yanlış oldu.
Canan: Yanlış çarptın.
Bengi: 53 çarpı?
Bülent: 239.
Canan: 12600.
Bülent: 12677 oldu. Gene arttı. 55 alalım da son olarak bakalım nasıl olacak.
Video Alıntısı



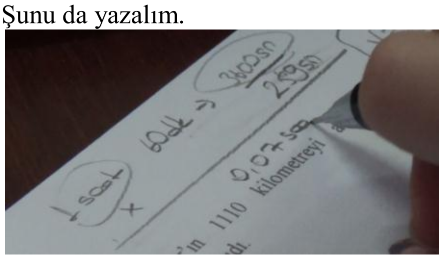
Canan: Kaç oldu?
Bülent: 232 çarpı 55. 12760.
Bengi: Daha da büyüdü. Bu nereye kadar gidecek böyle (Gülüyorlar)? Bence 60 alsana bir de.
Bülent: 60. Bak 213 yaptı.
Bengi: Bence düşecek bu sefer 13000 oldu.
Bülent: 65 yapalım mı?
Bengi: Kaç aldın?
Bülent: 80 aldın. Bak bakalım kaç olacak? 134.
Bengi: Düştü. O kadar da değil bak.
Bülent: Kaç oldu?
Bengi: 10000 oldu düştü. Şimdi 70 alsana bir.
Canan: 65 al bence. Oralarda düşecek sanki.
Bülent: 70 bir alalım bence.

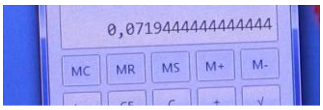
Bengi: Tamam.
Bülent: 70 çarpı 174 geliyor.
Bengi: 12180.
Canan: 65 yap.
Bülent: 65 195 diyebiliriz.
Bengi: 12675 oldu.
Bülent: 65'den de az o zaman.
Bengi: Evet.
Bülent: En yüksek bulduğumuz ne vardı bizim şimdi?
Bengi: 13000. 60'dayken.

G_1 Düşme Problemi çözümünde, formüllerindeki değerleri kullanabilmeleri için birimlerini aynı cinsten yazmaya çalışmıştır. Bu süreçte de sürekli olarak grup üyelerinin birimler arasındaki geçişlerle ilgili görüşlerini sergiledikleri ve o anda anlamadıkları noktaları vurguladıkları görülmüştür. Defne süreçte kafasının karıştığı bir yerde anlık sorularla, grup arkadaşlarının düşüncesini öğrenmeye çalışmıştır. Selen ise durumu açıklayarak Defne'nin de çözüm sürecini anlamasını sağlamıştır.

Demet: k' yı bulacağız şimdi?
Defne: Kaç saniye diyeceğiz? Bu km/s mi?
Selen: Evet.
Defne: Bunu saate mi çevireceğiz o zaman?
Demet: 4 dakika 19 saniyeyi çevireceğiz. Neyi çevirelim? Hızı mı diğerini mi?
Defne: Bunu (zamanı) çevirelim. Daha basit.
Demet: Tamam.
Defne: Bir saat 60 dakika. 1 dakika 60 saniye. 240 artı 19'dan 259 saniye yapmaz mı?
Demet: Aynen.
Defne: Ama biz şimdi saniyeye çevirmedik mi?
Selen: Bak kafan karıştı. Bunu saate çevirelim. 1 saat 3600 saniye değil mi?
Defne: Evet. 259 bölü 3600 oldu o zaman (Hesap makinesinden yapıldı.). Şunu da yazalım.

Video Alıntısı





2b. Planı Takip Etme

Önceden planlanmış temel büyük düşünce doğrultusunda ilerleyen çözüm basamaklarının, çözümün ileriki aşamalarında uygulanıp uygulanmadığı sürekli olarak öğrenciler tarafından takip edilmiştir. Düşünülen plan ve uygulanan çözüm arasındaki farklılıkların neden kaynaklandığı, çözüm basamaklarının uygulanış sırasında bir değişiklik olup olmadığı süreç boyunca anlık tepkilerle incelenmiştir. Zaman zaman öğrencilerin yaptıklarını tekrar sesli olarak ifade ettikleri, bazen de yapacaklarını süreç içerisinde zaman zaman arkadaşlarına anlattıkları görülmüştür. Süreçteki üst bilişsel eylemlerden en çok karşılaşılanı, büyük temel düşüncedeki eylemlerin uygulanış sırasının, şeklinin ve düşüncelerdeki düzenin öğrenciler tarafından sürekli olarak izlenmesi olmuştur.

G_1'in Köprü Problemi çözümünde, Defne plan doğrultusunda yaptıklarını sözel olarak ifade etmiş ve Demet de yapılacakları söylemiştir. Çözüm sürecinde grup üyeleri daimi olarak, süreçte belirledikleri plana göre yapmaları gerekenleri kontrol ettikleri ve plana göre de yaptıklarını sözel olarak anlık düşüncelerle ortaya koydukları görülmüştür.

Demet: Şimdi 4.43'ün ne kadar geleceğine bakacağız.
Defne: Heh. Şimdi ne yapıyoruz?
Demet: Bir dakika. Bak şurası 1.2 oldu. Burası da 4.43 oldu (Defne hesap makinesinden yapıyor.). 1.2.
Defne: 1.2. Tamam.
.
.
.
Defne: Tamam. Şimdi ne kaldı?
Demet: Uzunluğu bulduk.
Defne: Uzunluğu bu bulduk. Genişliği de bu bulduk. Başka bir şey ne istiyordu bizden? Matematiksel modeller doğrultusunda genişlik ve uzunluk. (Defne problemi bir daha okuyor.) Her şeyi bulmuş olduk.
.
.
.
Defne: x yaklaşık olarak 1885 metre olur. (Defne yazıyor eksik kısımları.)
Demet: Şimdi genişliği yazalım.
Defne: Kaç bulmuştuk?
Demet: Bir dakika bakıyorum. Orantıladık aslında biz orayı.
Defne: Köprünün ayaklarından genişliğini bulmuş olduk.
Selen: Evet.

G_4 Tiyatro Problemi çözümünde, Dila çözümün devamında ne yapmaları gerektiğini düşünerek önceden planladıkları çözüm sürecine göre uygulama sırasındaki eylemin ne olduğunu arkadaşlarına sormuştur. Ayrıca plan doğrultusunda yapılanlar ve yapılmayanlarla ilgili düşünceler sergilenerek planın uygulanmasında bir eksiklik olup olmadığı o an sürekli olarak izlenmiştir.

Dila:	Tamam. Ne yapalım? Şimdi biz ne yapıyoruz? Bizde farklı çıkmıştı onlara bakıyorduk. Bir de buradan yapalım o zaman (Kar fonksiyonundan yapmaya çalışıyor.).
Celal:	11920 bölü 303.

.
.
.

Dila:	Tamam. Onu yazalım o zaman. Artık ne yapacağız. Ne dedik en son bitti mi?
Ayla:	Bilet fiyatı.
Dila:	39.33. Yani sonuçta bu da en iyi yaklaştırma doğrusu ya.
Celal:	Yaklaştırma doğrusunun grafiğinde de 37.825 çıkıyor.
Dila:	Onu zaten biliyoruz ya.
Celal:	Tamam.

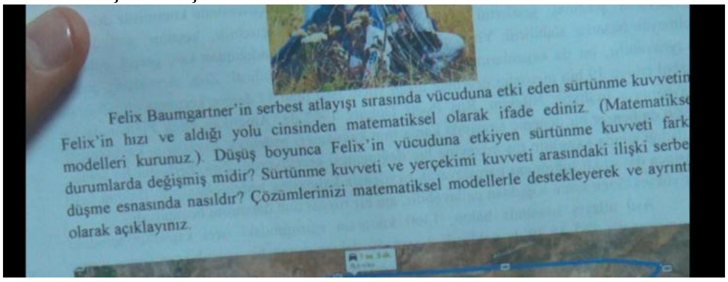
G_2'nin Düşme Problemi çözümünde, aşağıdaki ifadelerde G_2'dekilerin sürekli olarak çözümü izledikleri anlık sorular sordukları ve plana göre yaptıklarını ve yapılması gerekenleri arkadaşlarına ifade ettikleri görülmüştür. Aşağıdaki ifadede izleme eylemlerinden hem 2a hem de 2b üst bilişsel eylemlerinin sergilendiği görülmüştür. Planı takip etme anlamında, Mete çözüm sırasında planları doğrultusunda yapmaları gerekeni ifade etmiştir. Sürecin devamında ise Mete problemde istenenleri tekrar ifade etmiş ve plan doğrultusunda sürtünme kuvveti ve yer çekimi kuvveti arasındaki ilişkiyi ortaya koyduklarını söylemiştir. Burada da görüldüğü gibi planın takip edilmesi süreci aynı zamanda problemin tekrar okunmasını ve problemdeki amacın tekrardan ortaya koyulmasını gerektirmiştir. Buradan da üst bilişsel eylemlerin birbirlerini tetikledikleri görülmüştür.

Mete:	Şimdi de t'yi bulacağız.
Ela:	Ne kadar sürede paraşütü açtığına bakmalıyız.
Mete:	Açın. Şeyi açın. Bu videoda onu gösteriyordu sanki.
Ela:	48 saniyeden açana kadara bakacağız.
Masal:	Evet (Video açıldı ve inceleniyor.).
Mete:	İlerlet. İlerlet. İlerlet. Hala düşüyor. İlerlet.
Ela:	Açtı.
Masal:	Hah açtı.
Mete:	16 mıydı?
Ela:	16.
Masal:	16'ydı sanırım.
Mete:	4 nokta 16.
Masal:	Aynen. Tam 4 nokta16 oldu.
Mete:	Şey 48'di. Öncesi kaç saniye yapar? 4 kere 6 24. 256 saniye yaptı. 48 çıkardığın zaman 208 mi?
Masal:	Evet.
Mete:	208 saniye yavaşlamış. 269,4 bölü 208 bize şeyi verecek. İvmeyi.
Masal:	Ortalama ivmesini.
Mete:	Evet.
Ela:	Tamam bakalım (Hesap makinesinden yapıyor.) 1,295
Mete:	Bu sefer de k eksi 1'den k eşittir 2.295 mi yapar?

Masal: Evet.

Mete: Bu da şey 2 kısımda etki eden k. O zaman bize 2. kısımda şeyi soruyor ya yer çekimi kuvveti ile (Tekrar okuyor.) sürtünme arasındaki ilişkiyi. Aslında ilişki bu işte.

Video Alıntısı



2c. Plan Dışı Durumları Ortaya Koyma

Çözüm için tasarlanan temel büyük düşünce bazı yönleriyle eksik kalmış ve öğrenciler bu eksikliği gidermek için temel büyük düşüncenin dışında bazı düşüncelere ve eylemlere yönelmişlerdir. "Plan dışı durumları ortaya koyma" üst bilişsel izleme eylemi, sürecin devamında planın değerlendirilmesini ve gerekirse planın gözden geçirilmesini gerektiren bir süreci yaratmıştır. Plan dışı durumların ortaya koyulduğu anlarda gruplarda ya temel büyük düşüncede değişiklik yapma kararı alınmış ya da söz konusu düşüncenin temel büyük düşünceyi değiştirmek için yeterli olmadığı düşünülmüştür.

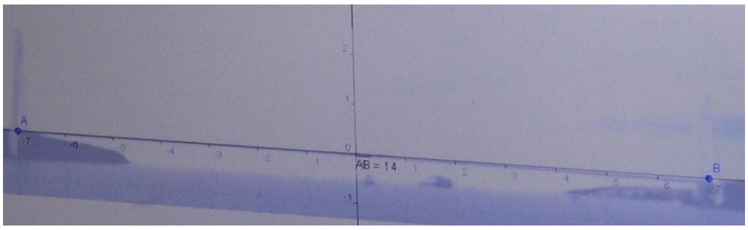
G_1 köprü problemi çözümünde Selen ilk aşamada köprünün uzunluğunu bulurken GeoGebra'dan doğrudan yaralanacaklarını ifade etmiştir. Sonrasında ise Defne geometrideki doğrudan bulamayacaklarını, doğru parçasından bulabileceklerini vurgulamıştır. Plan dışı durumların aktif izleme sürecinde ortaya çıkarılması, hem hatanın fark edilmesini hem de ileriki aşamalarda fark edildiğinde zamandan kazanmalarını ve bilişsel yükten kurtulmalarını sağlamıştır.

Selen: Evet. Uzunluğu 14 gelecek (GeoGebra'da uzunluk hesaplatmadan tahminen söylüyor.) Bu iki noktadan geçen doğruya bakacaktık dimi? Buradan mıydı (GeoGebra'da doğru çizmenin yerini arıyor.)?

Defne: Yok değil, doğrudan değildi.

Selen: Haklısın ya. Uzaklıktan yapacaktık dimi?

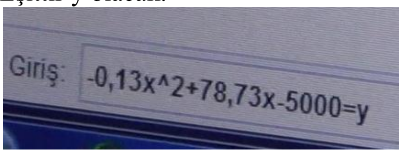
Video Alıntısı



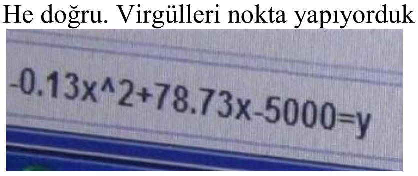
Demet: Evet.
Selen: Tamam.
Demet: GeoGebra bize orayı 14 olarak verdi (Demet bir yerden kağıda ufak ufak notlar alıyor.).
Selen: Sonra genişlik.
Demet: Genişliği yaparız sonra dimi?
Defne: Evet.

G_4, Tiyatro Problemi'nde buldukları matematiksel modellerin grafiksel gösterimlerine ulaşmak için GeoGebra'dan yaralanmıştır. Fakat Celal matematiksel modelleri GeoGebra'daki "Giriş" bölmesine girdiği halde GeoGebra matematiksel modeli tanımamıştır. Celal hemen sonrasında matematiksel modellerindeki virgüllerin yerine noktalar girmeleri gerektiğini fark etmiş ve plan dışı oluşan duruma yönelik anlık tepkisini ortaya koymuştur.

Dila: Eşittir y olacak.
Video Alıntısı



Celal: Olmadı
Dila: Karesini algılamadı galiba?
Celal: Virgülleri nokta yapalım ondan.
Dila: He doğru. Virgülleri nokta yapıyorduk yazarken.
Video Alıntısı



G_5'in Düşme Problemi çözümünde, Bengi iki nokta arasındaki uzaklığın gerçek değerini yaklaşık 70 km olarak buldukları halde, problemde istenildiği gibi açıyı daha bulmadıklarını ifade etmiştir. Burada da G_5, başta planladıkları gibi açı bulmaları gerekirken henüz herhangi bir açı değerine ulaşmamıştır ve çözümü açıyı bulmadan sürdürecekken bu plan dışı durumu fark eden Bengi olmuştur. G_5 bu doğrultuda çözüm sürecinde açıyı bulmaya kaldıkları yerden devam etmiştir.

Canan: Tamam. Yaklaşık 70 km diyelim ona. Şimdi sürtünmeye gelelim o zaman.

Bengi: Ama açıyı bulmadık bizden onu da istiyordu?
Canan: Hıı. Açıyı da bulalım.
Bengi: O da tanjant olacak şekil nasıl oluyor iniş açısı nasıl olacak.
Bülent: Şimdi buradan atlıyor (sağ) buraya mı iniyor (sol)
Bengi: Hayır tam tersi.
Bülent: Hımm
Canan: Şimdi biz dik üçgen çizdik ya onun arasındaki açı mı olacak?
Bülent: Hıhı tamam bir taraf 1.54 bu 5 km bu 69.8 km.
Canan: Biri 24 diğer 25 çıktı
Bülent: Normal aynı olması diğer uzunluk 1 ya.
Bengi: Burasına biz 1.54 dedik o da 5 km zaten onu karıştırmayalım

2d. Modelleme Sürecine Uygun İlerleme

Çözüm sürecinde öğrencilerin bazen matematiksel modelleme sürecindeki temel bileşenleri veya temel basamakları dikkate aldığı görülmüştür. Öğrenciler bu süreçte matematiksel modeller oluşturacaklarının bilincinde olmuşlardır. Stratejik etkenleri ortaya koyarak ve varsayımlarını belirleyerek çözüm için geçerli bir zihinsel model oluşturma yoluna gitmişlerdir. Bunun yanında matematik ile gerçek yaşam arasındaki ilişki sürekli olarak dikkate alınmış ve matematiksel olarak elde edilen sayısal değerlerin gerçek yaşam çözümleri düşünülmüştür.

G_4'ün Köprü Problemi çözümünde, Dila matematiksel modeller yardımıyla çözüme ulaşmaları gerektiğini arkadaşlarına ifade etmiştir. Çözümlerinin matematiksel modelleme sürecinin genel yapısına uygun ilerleyip ilerlemediğine ilişkin sergiledikleri bu yaklaşım, grubun modelleme problemi çözme deneyimlerine bağlı olarak kazandıkları farkındalıktan kaynaklanmıştır.

Dila: Şimdi bizim matematiksel modeller bulmamız gerekiyordu çözümde.
Celal: Hıhı. İşte bu yaptıklarımız hep matematiksel modellerle oldu.
Ayla: Bir denklem bulmuş olduk mu biz?
Celal: Tabi yolu böldük mesela. Her aralık bir değişken gibi düşündük.

G_7'nin Tiyatro Problemi çözümünde ise, Ezgin çözümü matematiksel ifadelere dikkate ederek gerçekleştirdikleri halde, yazdıkları raporda matematiksel modellerini düzgün bir şekilde ifade etmediklerini vurgulamıştır. Bu durum grubun yazılı rapor hazırlanması sürecinde de sergilenilen eylemleri sık sık izlediğini ve modelleme sürecine uygun bir şekilde, matematiksel modeller yardımıyla çözümlerini gerçekleştirmeleri gerektiğinin farkındalığında olduğunu göstermiştir.

Ezgin : Bizim bunu matematiksel olarak ifade etmemiz gerekiyor. Bak asıl onu öncelikle yapmalıyız. Matematiksel olarak ifade etmeden bunları yapmamız bile saçma. Her şeyi matematiksel ifadeye göre yaptığımız halde raporda onu düzgünce ifade etmiyoruz.
Yılmaz: Tamam. Onu da yazarız hemen şimdi.
Ezgin: Çünkü o bizim matematiksel modelimiz oluyor (Düşünüyorlar.).

G_6'nın Düşme Problemi çözümünde, Yavuz videoları hemen izlemeye kalkışan Simge'i uyarmış ve öncelikle problem ifadesini okumaları gerektiğini ifade etmiştir. Problemi okuma modelleme sürecinin ilk eylemi olmakla birlikte tüm problem çözme süreçleri için de sürecin başladığını gösteren temel eylemdir. Bu durumun farkında olan Yavuz ise duruma anlık tepkisini aşağıdaki gibi vermiştir. Ayrıca çözüm sürecinin ortalarında da Burcu çözümlerinde matematiksel modeller ortaya koymaları gerektiğini grup arkadaşlarına ifade etmiştir.

Simge: Videolar burada. Açalım mı?
Yavuz: Önce bir okusaydık ya. Problem ifadesini okumalıyız öncesinde.
Burcu: Tamam okuyalım.

.
.
.

Yavuz: Yer çekimi sürtünme kuvveti. Felix in hızı ve aldığı yol.
Burcu: Evet. İşte böyle bir denklem bulmamız lazım bizim. Ama bu doğru olmayacak bir eğri olacak. Fazla değişken de var.

Çözüm boyunca G_6 matematiksel semboller kullanmış ve gerçek yaşam ile matematiği ilişkilendirerek matematiksel çözümden gerçek yaşam çözümüne geçmeleri gerektiğinin farkında olmuştur. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

(…G_6, Boumgartner'ın düşmesi planlanan yer ile düştüğü yer arasındaki uzaklığı GeoGebra yardımıyla 76 birim buldu. İlk başta bu sonucun yeterli olduğunu düşündü; fakat hemen sonra bu değerin km değil birim olduğunu anladı ve ölçek yardımıyla gerçek değeri 67.86 km olarak ifade etti… Gözlem notu: G_6, Düşme Problemi)

Matematiksel Modelleme Sürecindeki "Değerlendirme Yapıları"

Matematiksel modelleme sürecinde üst bilişsel değerlendirme eylemleri genel olarak süreç boyunca dikkate alınan veya alınmayan düşüncelerin problem durumunu açıklamadaki etkisinin sorgulanmasını sağlamıştır. Bununla birlikte modelleme süreci boyunca birçok düşünceye ilişkin alınan kararlarda üst bilişsel değerlendirme eylemlerinin etkisi söz konusu olmuştur.

Matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan üst bilişsel değerlendirme eylemleri modelleme sürecinin her anında süreçteki farkındalığı ortaya çıkarıcı, süreci kontrol edici, düzenleyici, yargılayıcı ve sorgulayıcı bir rol oynamıştır ve modelleme sürecinde yedi temel kategori altında şekillenmiştir (bkz. Tablo 6).

Tablo 6. Matematiksel Modelleme Sürecindeki Değerlendirme Yapıları

	Kategoriler	Yanıt Aranan Temel Sorular
Değerlendirme Yapıları	**3a.** Farklı düşünceleri değerlendirme	Sergilenen farklı düşüncelerin çözüme etkisi nasıl?, Hangi düşünce çözümde kullanılmalı?, Farklı düşüncelerin çözüme etkisi nasıl olur?
	3b. Planı ve planın sonuçlarını sorgulama	Uygulanan veya süreçte revize edilmiş planın etkileri nasıl?, Plan çözümde istenen sonuçlara ulaşmada yeterli oldu mu?, Ekstra hangi sonuçlara da ulaşıldı? Çözümde ilk ortaya konan temel büyük düşüncede çözüm boyunca hangi değişiklikler neden gerçekleşti?
	3c. Düşüncelere ilişkin kişisel/grupsal tatmin sağlama	Çözümde ortaya çıkan düşüncelerin, planın ve ulaşılan sonuçların doğruluğuna ve uygulanabilirliğine ilişkin kararlar nelerdir? Bunlar kendi aralarında tutarlılar mı?
	3d. Farklı şekillerde ulaşılan sonuçları karşılaştırma	Farklı şekillerde ulaşılan sonuçlar birbirleriyle uyuşuyor mu?, Uyuşmama sebepleri neler? Beklenmeyen durumlar için çözüm arasında nasıl bir uzlaşı sağlanabilir?
	3e. İşlem hatalarını tarama	Ulaşılan sonuçlarda herhangi bir işlem hatası var mı?, Çözümün her basamağında yapılan işlemler kontrol ediliyor mu?
	3f. Alternatif çözüm yolu üretme	Daha uygun, farklı, basit modele ulaşılabilir mi? Teknolojiyi kullanmadan / kullanarak çözüm nasıl ilerletilebilir?
	3g. Yazılı raporu revize etme	Çözüm raporu yeterince açıklayıcı mı? Ekstra yazılması gerekenler neler? Rapor ile düşünceler arasında bir anlaşmazlık/uyuşmazlık var mı?

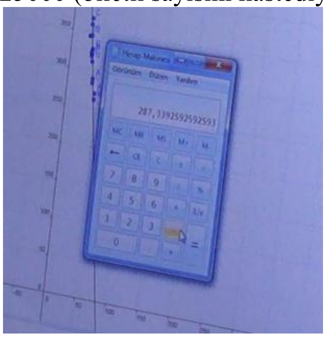
3a. Farklı Düşünceleri Değerlendirme

Bu aşamada çözüm boyunca dikkate alınan önemli düşüncelerin veya ortaya koyulan fakat etkisi süreçte çok fazla önemsenmeyen düşüncelerin çözümdeki etkisi sorgulanmıştır. Bu doğrultuda hangi düşüncelerin çözümde olmazsa olmaz olduğu ve planda dikkate alınmayan düşüncelerin neler olduğu düşünülmüştür. Modelleme süreci boyunca ortaya koyulan farklı düşüncelerin değerlendirildiği ve öğrencilerin çözümün yolunda gittiğini düşündükleri zamanda dahi düşüncelerinin etkilerini değerlendirdiği görülmüştür. Bu da onların düşüncelerindeki bazı hataları görmelerini veya çözüm için daha iyi düşüncelerin varlığını fark etmelerini sağlamıştır.

G_4'ün Köprü Problemi çözümünün sonlarına doğru çözümde kullandıkları önemli düşüncelerini ifade etikleri ve bu düşüncelerini değerlendirdikleri görülmüştür. Bu doğrultuda Celal köprünün uzunluğunu bulurken aslında köprünün ayaklarının uzunluğunu dikkate aldıklarını ifade etmiştir. Bunun yanında Dila GeoGebra'daki her noktayı sıralı ikili olarak raporda ifade etmelerinin gerekli olmadığını ve köprünün genişliğini kullanırken 4. fotoğraftan yararlandıklarını vurgulamıştır. Celal fotoğrafı nasıl ölçeklendirdiklerinin önemli olduğunu ve çözümde emniyet şeridinin de dikkate alındığını söylerken, Dila da çizimleri GeoGebra'da yaparken fotoğraftaki direklerden yararlandıklarını ve siyah çizgiyi hiza aldıklarını (Çözümün öncesinde Dila direklerden ve siyah çizgiden yararlanarak perspektiften kaynaklanacak hatayı en aza indireceklerini söylemişti.) ifade etmiştir.

Dila:	Köprünün uzunluğu direklerden mi başlıyor?
Ayla:	Öyle dedik.
Dila:	Tamam yazalım GeoGebra'daki bazı verileri. Ama bir dakika bir şey soracağım. A ve B'yi bulurken her noktayı kağıda yazmamıza gerek yok dimi?
Celal:	Yok yok. Zaten dosyada belli ne olduğu.
Dila:	Ölçeği belirtelim. Çünkü o önemli. Tamam bu şekilde yazalım o zaman.
Celal:	Köprü uzunluğunda aslında ayakları arasındaki mesafeyi bulmuş olduk.
Dila:	Diğerinde de Resim 4'ü kullandığımızı GeoGebra'da. Onu söyleyelim.
Celal:	Şerit genişliğini nasıl aldığımızı yazalım. Kaç kabul ettik. Onu bulmasak ölçek olmazdı.
Dila:	Evet. Bir dakika. Biz emniyet şeritlerini katmış mıydık?
Celal:	Kattık zaten. A ve B noktaları arasındaki mesafede emniyet şeridi de var bizim.
Dila:	Bir dakika. Dört tane dedik araba şeridi. Sonra ona emniyet şeridini mi ekledik?
Ayla:	Evet. 4 araba şeridi artı emniyet şeridi olacak.
Celal:	Evet. Yani 17 metre. 3.5'tan 14 metre şey var.
Dila:	He 17 dedik. Bunu ayrıntılı yazalım.
Celal:	Şimdi genişlik için k dedik. O zaman emniyet şeridi için de l demiş olduk.
Dila:	Aynen (Kağıda ayrıntılı çözümü yazıyorlar.).
Celal:	Resim 4'de şerit genişliği bizim ölçeklememizi sağladı. Onu da vurgulayalım.
Dila:	Evet. Noktaları belirlerken de direklerden yararlandık. Siyah çizgiyi hiza aldık.
Celal:	Evet (Ayla kağıda notlar alıyor) genişlik 57.69 metre bulduk. Başka bir şeye gerek var mı?

G_1 Tiyatro Problemi çözümünde Demet bilet fiyatını yüksek (287 TL) tutsalar da İstanbul'da en büyük tiyatroyu (yaklaşık 2500 kişilik) doldurabileceğini iddia etmiş ve bu düşüncesi doğrultusunda kazancın ne kadar olduğu Defne tarafından hesaplanmıştır. Kazanç oldukça büyük (717500 TL) çıkmış ve Defne ve Selen de Demet'ın bu düşüncesinin çözüm için gerçekçi olmadığını vurgulamıştır.

Demet: 25000 (biletli sayısını kastediyor.) diyeceğim. Yaklaşık bir deneyelim.
Video Alıntısı

Defne: 287 lira çıktı.
Selen: Bilet fiyatı dimi bu kadar çıktı?
Demet: Evet. 2600 kişilik yer olduğunda bu fiyata geliyorlarmış.
Selen: Hayatta kimse gelmez bu tiyatroya (Gülüşmeler oluyor.). Toplam ne kadar oluyor burada peki kazanç?
Demet: Yapalım. 287 çarpı 2500. Aslında mantıken bu oluyor ama matematiksel olarak baktığımızda ise böyle olmuyor.
Defne: 717500.
Demet: Demek ben olsaymışım başlarında paraya para demeyecektik.
Defne: Kimse gelmezdi 287 liraya.
Selen: Aynen.

G_3 Düşme Problemi'nde çözümün sonlarına doğru düşüncelerini ve ortaya koydukları matematiksel modelleri tekrardan yorumlamış ve çözümde kullandıkları stratejik etkenlere ilişkin yorumlamalar gerçekleştirmiştir. Bu doğrultuda ivme değiştikçe sürtünme kuvvetinin de değiştiği, m (kütle), g (yer çekimi ivmesi) ve h'ın (yükseklik) atlayış esnasında nasıl değiştiği, yüzey alanı arttıkça k'nın (sürtünme kat sayısı) da değiştiği gibi farklı düşünceler sergilenmiş ve çözüm raporunda hangilerine yer verileceği düşünülerek grup üyeleri tarafından değerlendirilmiştir.

Seray: Maksimum olduğunda şeydi. Kaçtı ivme?
Kumsal: İvmesi değiştiği için sürtünme kuvveti de değişiyor.
Seray: 2.6'ydı bir yerde. Bir yerde de daha farklı. Yani değişiyor. Bunun için başka bir şey diyecek miyiz? Başka noktalar için de bakmamıza gerek var mı?
Kumsal: Değişir.
Seray: Değiştiğini söyleriz tamam. Serbest düşme esnasında sürtünme kuvveti ve yerçekimi kuvveti arasındaki ilişki nasıldır?

Kumsal: Hmmm.
Seray: Sürtünme kuvveti ve yer çekimi kuvveti arasındaki ilişki. Şimdi sürtünme kuvveti yer çekimi kuvvetini azaltıyor. Ya aslında biz onu g eksi k'lı şekilde ifade etmiştik.
Kumsal: Hıı evet. g eksi k değişiyor. k, m, g (F sürtünme formülü) ne oluyor?
Seray: Değişmiyor k.
Kumsal: Yüzey alanı arttıkça k değişiyor.
Seray: Evet.
Sena: Yüzey alanı değişmiyor ki.
Kumsal: Bazen yan geliyor ya.
Sena: Ha anladım.
Seray: O zaman şey de değişecek. k değişir. mg sabit oluyor yani. k da yüzey alanına göre değişiyor. Şey diyeceğiz o zaman. Adamın hava ile temas ettiği kısım önemli deriz.
Kumsal: Aynen.
Seray: Ben burada GeoGebra'yı nerede kullandığımızı anlamadım.
Kumsal: Kullanmadık zaten hiç gerek yoktu şimdiye kadar

G_2 Düşme Problemi çözümünde stratejik etkenler hakkında düşünceler belirtirken söz konusu düşüncelerle ilgili diğer arkadaşları da farklı düşünceler ortaya koymuştur. Örneğin paraşütü açtığı andaki yüksekliği başta önemseseler de (1524 metre) Mete serbest düşmede onun çok önemli olmadığını vurgulamıştır. Masal da bunu onaylar bir şekilde davranmış ama gene de raporda ilgili bilgiyi vermiştir.

Mete: 2. nokta 524 metre (Paraşütten aşağı kısmı kastediyor ama yanlış okudu aslında 1524 olacak). Hee biz 200'ü neden dönüştürmedik ki? Gerçi farkını alıp dönüştürdüm ben. h'yi niye bulmadık bu arada biz?
Masal: Bulduk ya onu. Bulmadık mı?
Mete: Bulmadık. Biz diğer formülden yaptık ya. Boş ver ya yapmayalım.
Masal: Yazalım ya.
Mete: Tamam hadi. 39 bin 68 eksi 11 bin 332 eksi 524 eşittir (1524 olacak.).
Masal: Bunun tamamı ne kadardı? Yanlış çıktı sayılar karıştı burada. Niye böyle çıktı ki?
Ela: Bir dakika şu neydi? Bunlar metre ki kilometre değil.
Mete: Doğru. Nokta koy aralarına.
Masal: 524 değil 1524'müş.
Mete: 1524 müymüş he. Ama ona gerek yok ya o kadar uğraşma burada bence.
Masal: Tamam olsun. Yazayım gene doğru olsun (raporda).

3b. Planı ve Planın Sonuçlarını Sorgulama

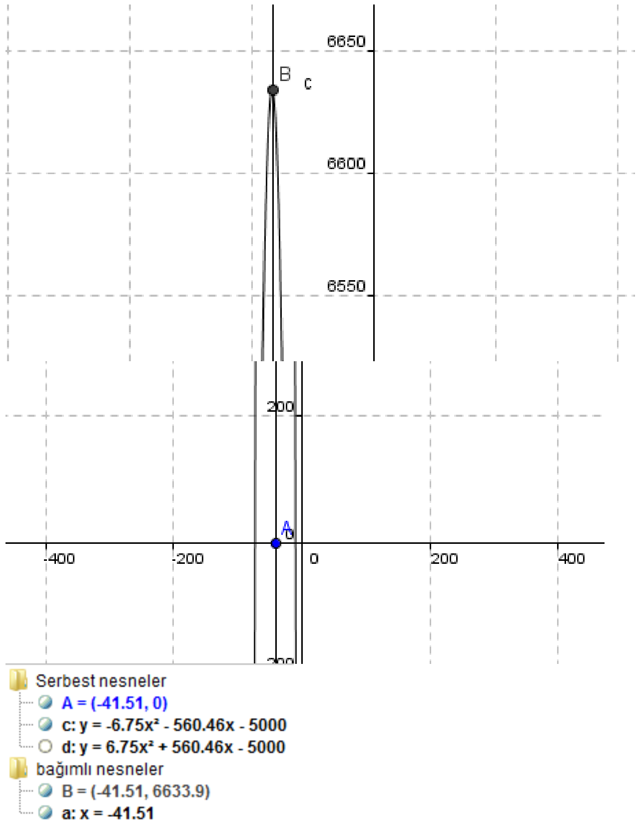
Öğrenciler çözüm sürecinde sürekli olarak planları doğrultusunda yapmaları gereken eylemlerin ve bu eylemlerden elde edilen sonuçların anlamlarını sorgulamışladır. Yani, temel büyük düşünceyi oluşturan ve bunu uygulayan öğrenciler planlarının ve çıktılarının (matematiksel çözüm/sonuçları ve gerçek yaşam çözümü/sonuçları) ne anlama geldiğini ve neleri açıklandığını incelemişlerdir. Bu doğrultuda planın amaca uygun olup olmadığı, ekstra hangi sonuçlara ulaşıldığı konusunda açıklamalar getirilmiştir. Ayrıca bu süreçte plandan ortaya çıkan beklenmeyen durumların belirlendiği görülmüştür.

G_2 tiyatro problemi çözümünde buldukları ana matematiksel modelinin (kar ve bilet fiyatı arasındaki ilişkiyi veren) grafiksel gösterimine GeoGebra yardımıyla ulaşmıştır. G2 grafik üzerinde hareketli bir nokta belirlemiş ve o noktayı gezdirerek belli değerleri (gerçek yaşam sonuçlarını) incelemiş ve karşılaştırmıştır. Grafiksel gösterim G_2'nin cebirsel ifadeyi hatalı yazdıklarını ve matematiksel modelin normalden farklı olarak y eksenine paralel olduğunu anlamasını sağlamıştır. Ayrıca grafiği incelediklerinde karın 7000'i geçmediği görülmüş ve gerçek yaşam çözümünün Ankara'daki kardan daha az olduğu yorumlanmıştır.

Mete: Mesela x = 42 yapalım. Gerçi bu pozitif değer x = - 41.52 olacak şekilde y'si sıfır diyelim.

Masal: Tamam.

GeoGebra Alıntısı



Mete: Dik çizelim şimdi de. Tamam bak şimdi de aynı şey çıktı. Ama negatifi. Biz doğru yaptık devam edelim.

Ela: 6633 karı oluyor burada gördüğümüz.

Mete: Maksimumu Ankara'daki kardan daha düşük çıkıyor.

Ela:	Burada İstanbul'da edilebilecek en iyi kar mı demek istiyor? Yoksa diğerlerini de mi hesaba katacağız?
Masal:	İstanbul'daki bence.
Ela:	O zaman bu olabilir. 7000'i geçmek zorunda değil kar.
Mete:	Ya ne alaka ki? Neye göre belirleyecek İstanbul'daki karı. Nüfusa göre mi? O zaman burada birçok değişken işin içine girebilir. İstanbul'un nüfusu girer. İstanbul'daki üniversite mezunu bile girer işin içine.
Ela:	Öyle de. Ona bakarsan Aydın ile Ankara arasında da fark yok çok.
Mete:	Biri 32. Diğeri 45. Çok fark var. Fiyatları da kişi sayısı da değişik. Elde edilen kar da değişik.
Ela:	Ama çok bir sayı farklılığı yok orada.

G_1 Köprü Problemi çözümünde öncelikle temel büyük düşüncelerini oluşturmuş ve bu doğrultuda çözümde köprünün uzunluğunu bulmak için videolardan seçtikleri bir kesiti GeoGebra'da kullanma yoluna gitmiştir. Daha sonrasında ise Demet video kesitinden bir oran bulmaları gerektiğini fakat video kesitinde oran yapabilecekleri bir gerçek yaşam değerinin olmadığını düşünmüştür. Bu doğrultuda plan dışı durumu arkadaşlarıyla paylaşarak bu yönde düşünceler geliştirmişlerdir. Demet daha önceki seçmeyi düşündükleri fotoğrafı seçmelerinin çözüm için daha iyi bir seçenek olacağını vurgulamıştır. Bunun devamında ise Selen köprünün ayağının yüksekliğinin yaklaşık 350 metre olacağının videoda belirtildiğini ifade etmesi üzerine çözüme eski plandan devam edilmiştir. Bu durum ile ilgili gözlem notu şöyledir:

> (… Demet video kesitlerinden hareketle bir ölçek bulamayacaklarını düşündü. Grup arkadaşları da ona ilk başta hak verdiler… Demet ilk düşündükleri ölçekli fotoğrafı kullanmayı teklif ediyor… Selen videoya göre köprünün ayağının 350 metre olduğunu söyledi. Planı değiştirmediler ve ölçeği 350 metreyi kıstas aldılar. Gözlem notu: G_1, Köprü Problemi)

3c. Düşüncelere İlişkin Kişisel/Grupsal Tatmin Sağlama

Problem durumuna, çözüme, temel büyük düşünceye ve sonuçlarına ilişkin genel yargıları ve inançları içeren değerlendirme eylemidir. Bu aşamada düşüncelerin çözüm için uygun ve yeterli olduğu, elde edilen sonuçların problemin amacına uygun ve etkili bir şekilde hizmet ettiğine ilişkin karar verilmiştir. Genel olarak modelleme sürecinin bir başka deyişle çözüm sürecinin bittiğini gösteren üst bilişsel eylemdir.

Değerlendirme eylemleri süreçte genel olarak planlama ve izlemeyi takip eden eylemlerin arkasından ve iç içe geçmiş bir şekilde meydana gelmiştir. Bununla birlikte, üst bilişsel değerlendirme eylemleri, sürecin başlarında da ortaya çıkmıştır. Çözüm sürecinin başlarında verilerin yeterli olduğuna ilişkin karara varma davranışı değerlendirme eylemlerinden biridir ve değerlendire boyutunda düşünceleri ilişkin kişisel/grupsal tatmin sağlama üst bilişsel eylemi altında dikkate alınır. Ayrıca G_1' de Demet ve Defne sürekli olarak süreç içerisinde problem durumunu okuduktan sonra problemi tam olarak anlamadıklarını fark ederek metni tekrar okumuşlardır. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

> (…Defne ve Selen videoları incelerken, Demet bu sırada problem ifadesini tekrar fısıldayarak okudu… Selen çözümde köprünün genişliğine ilişkin verilerin eksik olabileceğini belirtti. Demet çözümü kendi tahminleriyle oluşturmaları gerektiğinden ve bu şekilde çözüme ulaşabileceklerinden bahsetti. Gözlem notu: G_1, Köprü Problemi)

G_4 Köprü Problemi çözümünde köprünün genişliğini 57.69 metre olarak bulmuştur. Grup üyeleri de söz konusu gerçek yaşam çözümünün ve yazılı raporun çözüm için yeterli olduğunu ve problem istenenleri bulduklarını düşünerek çözümü sonlandırma kararı almıştır.

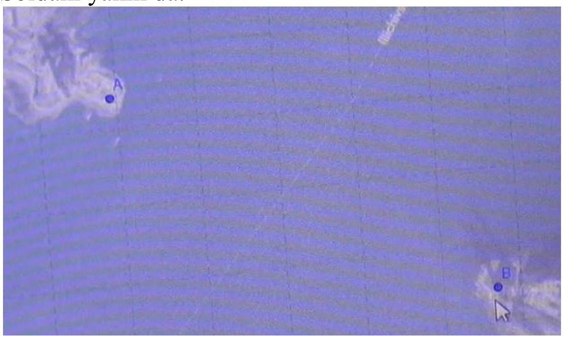
Celal:	Evet (Ayla kağıda notlar alıyor). Genişlik 57.69 metre bulduk. Başka bir şeye gerek var mı?
Ayla:	Tamam. Bitti artık.
Celal:	Uzunluk ve genişliği bulduk zaten.
Ayla:	Başka bir şey sormuyor zaten.
Dila:	Tamam, o zaman.

Matematiksel modelleme sürecinde grupların ortaya koyduğu düşüncelerin grup üyelerinin kendi içerisinde kabul görmesi sürecin sağlıklı ilerlemesi için önemli bir koşul olmuştur. Bu durumlarda genel olarak aktif izleme eyleme gerçekleştiren grup üyeleri, plan dışı durumları ortaya koyduktan sonra söz konusu aksi düşünceye ilişkin grup içinde ve kendi zihinsel şablonlarında bir fikir birliği sağlama ihtiyacı hissetmişlerdir. Aynı zamanda farklı düşüncelerin değerlendirilmesi aşamasında bazı durumlarda düşünceler arasında bir seçim yapmak bir karar vermek gerekmiştir. Bu durum çözümün daha sağlıklı bir şekilde işlemesi ve bireyin değil grubun ortak çözümünün gerçekleştirilebilmesi açısından önemli olmuştur.

G_7 Köprü Problemi çözümünde temel büyük düşünce doğrultusunda geliştirdikleri zihinsel modellerini GeoGebra ekranına yansıtırken, Yavuz Burcu'nın GeoGebra'da belirlemiş olduğu A noktasının (köprünün ayaklarından birinin olduğu yer diğeri de B noktası) yerini beğenmemiştir. Çünkü fotoğraftaki gölgelerin yapılmakta olan köprünün ayakları olduğunu düşünerek A noktasının denize çok yakın olduğunu ve biraz daha içeriden belirlenmesi gerektiğini, B noktasının ise ideal bir nokta olduğunu düşünmüştür. Ama bunu o an gruptaki arkadaşlarına gerekçelendirmediği görülmüştür. Burcu da noktanın yerinin iyi olduğunu söyleyince A noktasının yerinde bir oynamaya gidilmemiştir. Bu durum düşüncelerin yanlış veya doğru olmasından ziyade grup içerisinde kabul görmesi gerektiğini göstermiştir. Bu durumu Yavuz eğer açıklamış olsaydı ise farklı üst bilişsel eylemlerin ortaya çıkmasına olanak sağlamış olacaktı.

Yavuz: Soldaki yakın da.

Video Alıntısı



Burcu: Buralar iyi değil mi?
Yavuz: İyi ya.
Burcu: Yeterli bence ya.

G_4 Tiyatro Problemi çözümünde GeoGebra'dan ve elden yaptıkları çözümlerinin birbirleriyle uyuşmaması (biri yaklaşık 37 diğer ise 39 çıktı) ve bu uyuşmazlığın nedenini bulamamaları onların çözümlerinden tatmin olmamalarına neden olmuştur. Buna rağmen Dila GeoGebra'dan gelen gerçek yaşam çözümünde bir hata olduğunu düşünmüştür. Arkadaşları da bu düşüncesini kabul etmişler ve elden yaptıklarını çözümü dikkate alarak çözümlerini sonlandırmışlardır.

Dila: Hıhı. Oldu galiba.
Ayla: Gerçek cevap neydi çok merak ediyorum.
Dila: Farklı çıkması hiç tatmin edici değil yani. Ama bir şey bulamadık. Bence 39.33 daha mantıklı bir sonuç. GeoGebra'da sorun oluyor yuvarlamalar. Ama bu kadar yeter.
Celal: Tamam. Dosyaları da kaydettim.

Matematiksel modelleme sürecinde öğrencilerin problemin zorluğuna, problemi çözebileceklerine, bu süreçte işine yarayacağını düşündüğü matematiksel kavramları bilip bilmediğine vd. ilişkin inançları ve algıları onların çözümdeki düşüncelere ilişkin kişisel tatmin sağlama çabasını göstermiştir. Örneğin G_7 Düşme Problemi çözümünde Ezgin problemin zorluğuna dikkat çekmiş ve diğer grupların da bu problemi çözerken zorlandıklarını ifade etmiştir. Yılmaz da çözümün sonunda problemin 2 saat sürmesinin normal olduğunu çünkü problemin çok zor ve çok fazla şey istediğini vurguladığı görülmüştür.

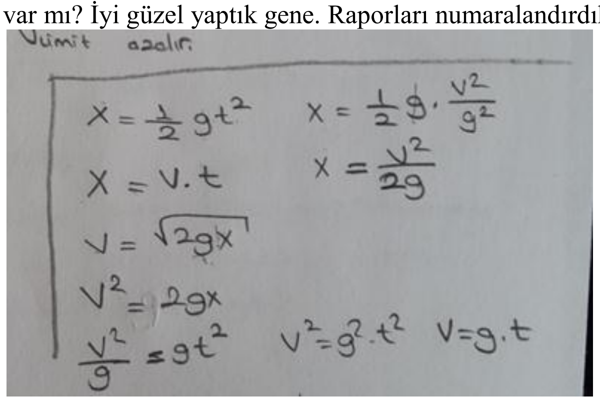
Ezgin: Bu problemi çözerken zorlanmayan olmamıştır. (Yılmaz ölçek noktalarını belirliyor.)

.
.
.

Ezgin: Aslında Felix'in videosunu televizyondan izleseydik dikkatli olarak oradaki yorumları dinleseydik ve aklımızda kalsaydı kesin bize faydası olurdu diye düşünüyorum ben. Ama soru baya zordu bir sürü şey yaptık. Şurası metre değildi dimi? 37.5 olan.

Yılmaz: km şurası. Serbest düşmeydi. Şurası paraşüt. Bize serbest düşmeden bahsettiği için burasını aldık. Tamam mıdır? Formülleri şöyle bir kutu içine alayım karışmasın. Buraya V'yi biliyoruz diye yazmamıza gerek var mı? İyi güzel yaptık gene. Raporları numaralandırdık mı?

Kağıt Alıntısı



Ezgin Evet numaralandırdım.

Yılmaz Neyse belli zaten. Hep açıklama yaptık. Kaçta başladık biz?

Ezgin 11'i 10 geçe.

Yılmaz 2 saati geçmiş ama normal çok zordu soru. Çok fazla şey istiyordu.

Benzer şekilde G_3 Düşme Problemi çözümünde de Kumsal "*Çok zormuş ya. Öğretmene diyelim o kadar zor soru olmasın.*" diyerek problem hakkında görüşlerini sergilemiştir. G_6'nın Düşme Problemi'nde Burcu, Yavuz'un çözüm yolu olarak enerji korunumundan gidelim önerisine karşı *"Buradan gitmeyelim ya ben buradan pek bilmiyorum. Gideceksen sen git de ben bilmiyorum. Yardımcı olamam hiç sana"* şeklinde tepki vermiştir.

3d. Farklı Şekillerde Ulaşılan Sonuçları Karşılaştırma

Çözüm sürecinde farklı strateji veya yöntemlerle ulaşılan farklı sonuçların birbirleriyle uyuşup uyuşmadığı ve çözümde hangisinin kullanılmasının daha etkili olacağı incelenmiştir. Bu farklılığın neden kaynaklandığıyla ilgili düşünceler sergilenmiştir. Grupların bazen sadece bir yoldan ulaştıkları sonuçları verdikleri bazen de ikisi arasında bir seçim yapamayıp iki farklı yolu da çözümlerinde dikkate aldıkları görülmüştür.

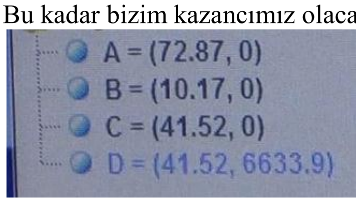
G_6 Köprü Problemi'nde ilk başta köprü uzunluğunu kağıt ile ölçerek yaklaşık olarak 850 metre bulmuştur. Daha sonra da belirlediği bir fotoğrafı GeoGebra'ya atarak ölçek yardımıyla köprü uzunluğunun teorik bir gerçek yaşam çözümüne ulaşmıştır. Daha sonra kağıttan bulunan değer (850) ile teorik olarak bulunanın (1150) farklı olduğu görülmüştür. Kağıt yardımıyla bulduğu çözümün daha güvenilmez olduğunu düşünerek de teorik çözümünü dikkate almıştır. Daha sonra kağıt ile tekrardan ölçüm yapmış ve ilk başta kağıt ile hatalı ölçüm yaptıklarını fark etmiştir. Bu durumu açıklaya gözlem notu şöyledir:

> (…Burcu ilk olarak A4 kağıdını ölçeğe göre birimlendirdi. Kağıdın uzun kenarını 200'er bölmelere ayırdı ve katladı. Burcu kağıdı kullanarak köprü uzunluğunun kaç tane 200 metre yaptığına baktı. Yaklaşık 850 metre olduğunu söyledi…. Köprü teorik olarak 1182 metre çıktı. Yavuz daha önce 850 bulduklarını ve bu sonuç ile aynı olmadığını söyledi. Kağıt ile tekrar hesapladılar ve 1100 buldular. GeoGebra'dan buldukları çözümü doğru kabul ettiler. Gözlem notu: G_6, Köprü Problemi)

G_3 Tiyatro Problemi'nde de iki farklı yerden çözüme ulaştığı halde Sena ilk çözüm (6700 TL kar) ile son çözümün (6633 TL kar) birbirleriyle uyuşmadığını ifade etmiştir. Bu doğrultuda Sena ilk çözümü tekrar kontrol etmeyi teklif etmiştir.

Seray: Neyse tamam. O zaman 41 liradan sattığına bakarız. Bu kadarmış. Bu kadar bizim kazancımız olacak.

GeoGebra Alıntısı

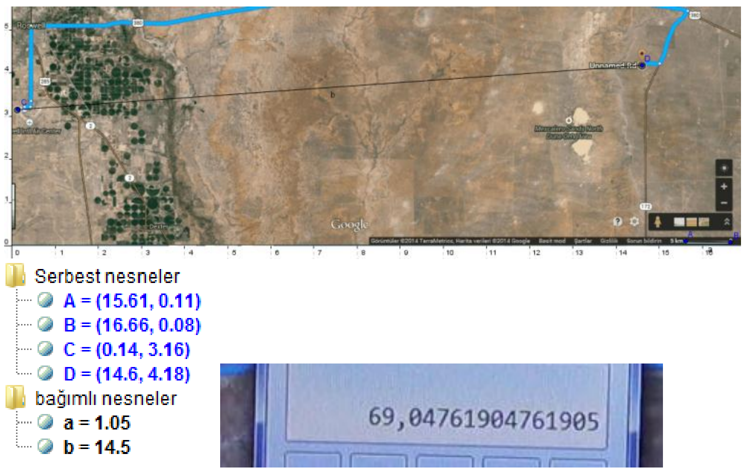


Sena: Orada bizim 6700 gibi bir şey çıkmıştı. O niye öyle çıktı?
Seray: Şu mu?
Sena: Evet işte o.
Seray: 6700 çıktı.
Sena: Ona bir daha bakalım.

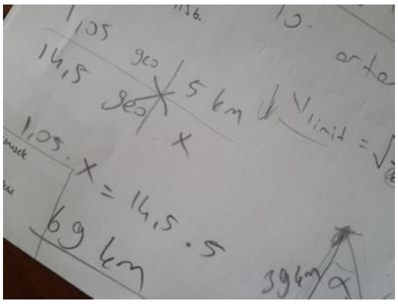
G_5 Tiyatro Problemi çözümünde iki farklı yaklaşım ile iki farklı sonuca ulaşmış ve bu sonuçlarını karşılaştırarak hangisinin daha uygun olduğuyla ilgili düşünceler; sergilemiştir. Düşüncelerinden biri tüm verileri dikkate alarak çözüme ulaşmak diğeri ise gelişmişlik ve kalabalıklık olarak İstanbul'a en yakın iller olarak Ankara ve İzmir'deki verileri kullanmak olmuştur. Bu doğrultuda G_5 iki farklı gerçek yaşam çözümüne ulaşmış ve sonra da tüm verileri kullanmanın daha mantıklı olacağını sonucuna ulaşmıştır.

> Tüm verileri kullanarak bir sonuca (yaklaşık 40) ulaşıldı…. Bülent cevabı beğenmedi ve tüm veriyi kullanmadan İzmir ve Ankara'yı kullanmayı teklif etti…. İki farklı yaklaşımda ayrı sonuçlar bulundu…. Tüm verilerin kullanıldığı çözüm seçildi.

G_7 Düşme Problemi'nde Boumgartner'ın düşmesi planlanan ve düştüğü yer arasındaki uzaklığı yaklaşık olarak 67.5 km bulmuştur. Daha sonra ise söz konusu mesafe teorik çözüm ile 69 km olarak bulunmuştur. Yılmaz ise çözümde GeoGebra'dan buldukları çözümü kullanmayı teklif etmiştir.

Yılmaz:	Pardon ya. Tamam. Tamam (Noktaları belirlediler). 14.5 çıktı. Şunu da hesaplayalım şimdi (Hesap makinesinden yapıyor.). 14.5 çarpı 5 bölü 1,05. 69 çıktı. Biz kaç bulmuştuk onu?
GeoGebra Alıntısı	
Ezgin:	67.5.
Yılmaz:	Onu silelim GeoGebra dan 69 bulduğumuzu yazalım.

Kağıt Alıntısı



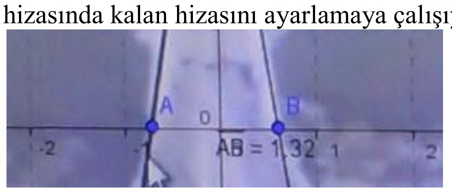
3e. İşlem Hatalarını Tarama

Gruplar çözümde farklı zamanlarda (anlık durumlarda değil) yaptıkları matematiksel işlemleri tekrar tekrar yapmışlar ve işlem hatalarının olup olmadığını incelemişlerdir. Bazen gerçek yaşama ilişkin çözümde ilginç sonuçlara ulaşılması gerekse tesadüfen incelenen işlemler yapılan hataların ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır. Bununla birlikte gruplar düzeni bozan durumlarda işlem hatalarının olabileceğini düşünmüş ve işlemlerini tekrar kontrol etme ihtiyacı hissetmişlerdir.

G_1 ilk olarak köprünün genişliğini 88,6 metre olarak bulmuşlardır. Fakat Selen çözümde bir sorun olduğunu düşünerek, sorun olduğunu düşündüğü kısmı Defne ve Demet'e göstermiştir. Devamında hep birlikte planda sorun olduğu düşüncesine varmışlar ve çözümde değişikliğe gitmişlerdir. Bu doğrultuda, noktalar tekrar belirlenmiş ve bu sefer çözüm 72.9 metre olarak düzeltilmiştir. Grubun bu değişiklik işlemsel bir hatadan kaynaklanmamıştır. Fakat çözüm sürecinde grup içinde oluşan çözüme ilişkin tatminsiz ortamlar öğrencilerin işlemlerini kontrol etme ihtiyacını ortaya çıkarmıştır.

Demet: Biraz daha mı yukarı çeksek onları ne dersiniz (Köprünün yol hizasında kalan hizasını ayarlamaya çalışıyorlar.)?

Video Alıntısı



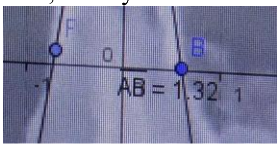
Defne: Yani kabaca denk getirmeye çalıştık tam oturmasa da.

Selen: A noktası biraz daha mı yukarı da olmalıydı?

Defne: Biraz da resmin yamukluğundan kaynaklanıyor. B'ye sıfır koyduğumuzda aslında B'nin biraz daha yukarıda kalması mantıklı geliyor.

Demet: O zaman biz de A'yı oradan işaretleyelim sonuçta. Gene bir şey değişmez ki gene iki nokta arasındaki uzaklık.

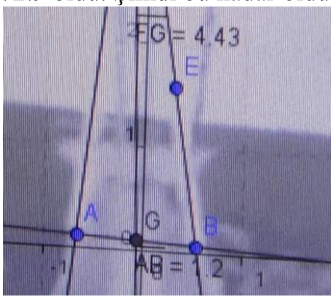
Selen: Zaten kesişimi y eksenini verecek.
Defne: A'yı yukarı mı alayım ne diyorsunuz?
Demet: Evet, biraz yukarı alalım. Tamam orası.
Video Alıntısı



Selen: Sanki böyle daha iyi oldu
Demet: Evet
Selen: Peki B'yi ne yapacağız? İyi mi onun yeri?
Defne: İyi de aslında tam da denk geliyor B noktası.
Demet: Biraz önü gibi sanki. Onu da biraz yukarıda alalım.
Defne: Tamam. Aslında biraz açıdan kaynaklanıyor. Tam oturtamadık.

.
.
.

Defne: 72.9 oldu. Şimdi bu kadar oldu bakın.
Video Alıntısı



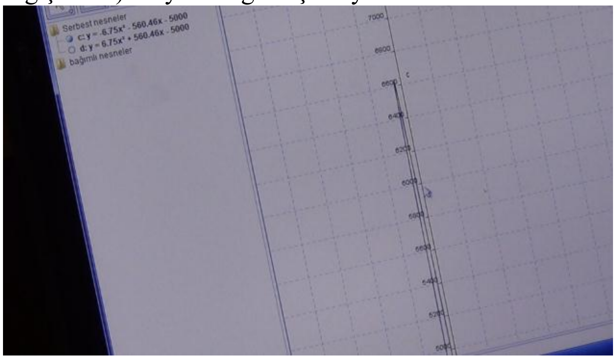
Selen: 72.9' muş.

G_2 Tiyatro Problemi'nde buldukları matematiksel modelin GeoGebra yardımıyla grafiksel gösterimine ulaşmıştır. G_2 grafiksel gösterimi incelerken matematiksel modellerinde sorun olduğunu fark etmiş ve verileri tekrardan kontrol etmiştir. Mete normal olması gerekenin y eksenine göre simetriğine ulaştıklarını ifade etse de bu dediği fazla dikkate alınmamıştır. Sorunun sadece bilet sayısının eksili gelmesi olduğu fark edildiğinden bir değişikliğe gitmemiş bu matematiksel model üzerinden gerçek yaşam sonuçlarına ulaşmıştır.

Mete: Niye öyle çıktı o ya? Şimdi bu denklem sadeleşince (1. denklem GeoGebra'da "y eşittir" cinsinden yazılınca.)
Ela: x'i negatif çıktı bak.
Mete: Evet denklemde hata var. Baştan yazalım. (GeoGebra'ya tekrardan giriyorlar denklemi) Şimdi nasıl oldu pozitif mi oldu? İyice küçültsene.
Masal: Tamam.
Mete: Bir yerde bir hata var. Şu sanki normalde olması gerekenin y eksenine göre simetriği oldu. Verilere tekrar baksak mı bir ya?
Masal: Tamam (Mete verileri okuyor. Masal GeoGebra'dan takip ediyor.)
Mete: Tamam. Sorun yok. Verileri doğru girmişiz.
Masal: Evet.
Mete: İlk doğru bu y yerine bunu yazıyoruz burada (İlk denklemde x'li terimin işareti artı olmalıydı o nedenle parabol y eksenin simetrik başka bir parabole dönüştü. Ama y değerleri aynı olduğundan sonuçlar

değişmedi.). Niye x negatif çıktı ya burada?

Video Alıntısı

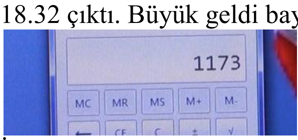


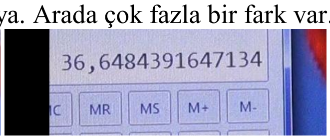
Ela: Bilmiyorum. Ama bu gerçekçi gibi oldu. Baksana değerler yakın çıkıyor.

G_1 Düşme Problemi'nde belirledikleri bir formülden yararlanarak (V (hız) ve x'i (yol) bildiklerinden) ivmeyi bulmaya çalışmıştır. İlk başta genel olarak kullanılan ivme biriminin metre bölü saniye kare olduğunu düşünmeğinden hız ve yolu kilometre ve saat cinsinden formülde kullanmıştır. Bu durumda ise ivmenin (Dünya'da yaklaşık yer çekimi ivmesi 9.8 olduğunu biliyor ama biriminin m/s^2 olduğunu düşünmedi) oldukça büyük bir değer çıkması G_1'e garip gelmiştir. Daha sonra da gruptakiler Selen'ın tavsiyesini dinlenmişler ve saniye cinsinden ivmeyi bularak çözümlerini sürdürmüşlerdir.

Demet: 1173 km/s (Defne hesap makinesinden yapıyor). Bunu böleceğiz. 37. 18.32 çıktı. Büyük geldi baya. Arada çok fazla bir fark var.

Video Alıntısı





Selen: İşlem hatası olabilir mi?

Defne: Ama bir 200'ün karesini almak var. Bir de bin yüz küsurun.

Demet: Birinde kilometre biri de metre ya ondan problem oluyor.

Defne: 200 km değil mi o da? 1173 de kilometre?

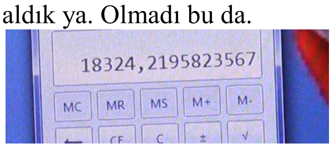
Selen: Hangi formülü kullandık?

Defne: He bak burada 37 bin metre oluyor.

Selen: 37 virgül değil miydi o?

Defne: Değil ya komple aldım. Tekrar bakıyorum. Bu sefer başka bir şey çıktı. O zaman onu da böyle yapmamız gerekiyor. 532 geldi. Km olarak aldık ya. Olmadı bu da.

Video Alıntısı



Selen: Bu ivme çok çıkmadı mı ya? Saniye metre falan mı alsak biz?

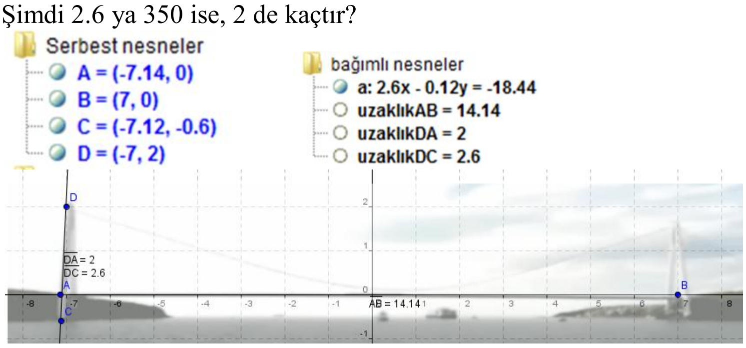
3f. Alternatif Çözüm Yolu Üretme

Gruplar çözüm sürecin ortaya attıkları farklı düşünceleri farklı şekillerde organize ederek veya daha önceki varsayımlarını değiştirerek var olan çözümlerini iyileştirme veya daha farklı bir boyutta açıklama çabası içerisinde olmuşlardır. Bu şekilde çözüme farklı yollardan veya açılardan ulaşmaya çalışmışlardır. Bu sayede söz konusu gerçek yaşam durumunu daha uygun, basit veya etkili bir modelle açılayabilmişlerdir. Bunun yanında ise kendi ilk çözümlerinin etkililiği ile ilgili bir kanıya varabilmek için alternatif çözüm yollarından ulaştıkları sonuçları kullanmışlardır.

Örneğin G_1 köprünün genişliğini GeoGebra'nın da yardımıyla 88.6 metre olarak bulmuştur. Fakat gruptakilerin gerçek yaşam çözümünden tatmin olmamaları onların farklı stratejileri de dikkate almalarına neden olmuştur. Bu doğrultuda alternatif bir strateji ile ilk çözüm yolu ile buldukları iki farklı gerçek yaşam çözümü arasından tatmin edici buldukları sonucu seçmişler ve çözümde onu kullanmışlardır.

Demet: Şimdi 2.6 ya 350 ise, 2 de kaçtır?

GeoGebra Alıntısı



Defne: Heh.

.
.
.

Selen: 88.6

Defne: Evet.

Demet: Evet. Yani bu da gerçekte köprünün genişliğiymiş.

.
.
.

Defne: Tamam. Doğru çıktı herhalde.

Demet: Bitti diye düşünüyorum. Bence mantıklı bir sonuç. Vardır o kadar normal.

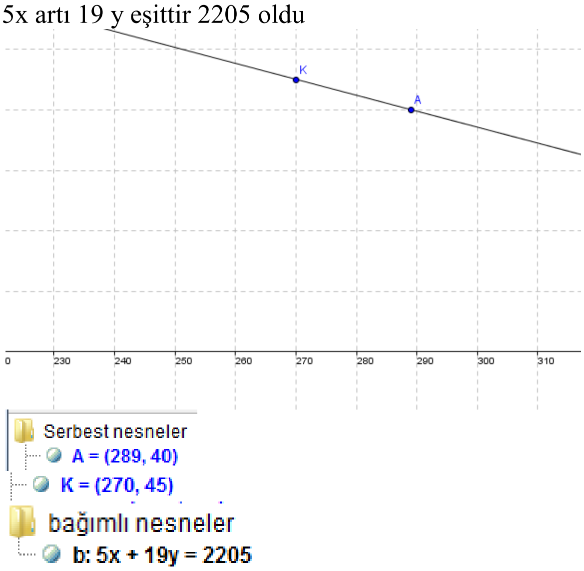
Selen: Diğer resme bir daha baksak ya. Burada alt kısımları tam yol hizasında oldu mu acaba?

Video Alıntısı

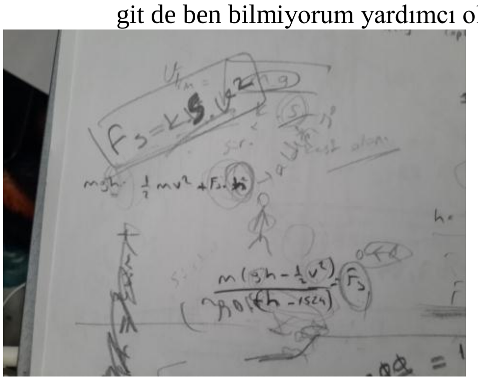
G_5 Tiyatro Problemi'nde de benzer şekilde Bülent tüm verilere göre bir matematiksel model bulmanın yeterli bir sonuç vermeyeceğini ifade etmiş ve İstanbul'a hem nüfusça hem de kültürel anlamda daha yakın olan Ankara ve İzmir'in verilerini kullanmalarının çözümde daha iyi olacağını vurgulamıştır. Bu doğrultuda G_5 bu alternatif yolu da dikkate alarak gerçekleştirmiştir. Bülent burada ilk olarak plan ve planın sonuçlarını sorgulamış ve tatmin edici bir çözüme ulaşmadıkları kararına varmıştır. Sonrasında ise farklı ve alternatif bir çözüm arayışına girmiştir. Düşüncelerini de gruptakilerle paylaşarak farklı düşüncelerin değerlendirilmesi için uygun bir ortam yaratılmıştır. İki farklı şekilde gerçekleştirilen iki farklı gerçek yaşam sonuçları da karşılaştırılarak farklı şekillerde ulaşılan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Görüldüğü gibi Bülent'in davranışları birbirlerini tetikleyen üst bilişsel eylemlerin ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Bülent: Evet. Bunu kaydettiysek bir doğru daha alalım. Bakalım oradan ne gelecek. Onlar hangi noktalar GeoGebra'da bulalım. 270'e 45.
Bengi: K noktası mı oluyor?
Bülent: Evet. Diğeri peki? İzmir (Problemden değerine bakıyor.).
Bengi: A noktası.
Bülent: Başka var mı öyle İzmir, Ankara gibi?
Bengi: Bursa olabilir mi?
Bülent: İkisinden geçen yaklaşık doğruyu çizelim. Tamam. yeni bir doğru çıktı ne oldu? 5x…
Canan: 5x artı 19 y eşittir 2205 oldu

GeoGebra Alıntısı



G_6'nın Düşme Problemi'nde de Burcu sürtünme kuvveti ile yer çekimi kuvveti arasındaki ilişkiyi farklı formüllerden yararlanarak farklı şekillerde ifade etmeyi düşünmüştür. Bu düşünceyi dikkate alan Yavuz da enerji korunumu yasalarından hareket edebileceklerini söylemiştir. Fakat G_6 çözüme bu yoldan ilerleyemeyeceklerini düşünerek bu alternatif yoldan vazgeçmiştir.

Burcu:	Az önce bulduğumuz şeyi bir de başka formülden de yapsak olur mu? Buradan da yapıp tutuyor mu bakalım. Şu ana kadar sürtünme kuvvetinin ivmeye negatif bir etkisini olduğunu söyleyip buna göre denklemi değiştirdik.
Yavuz:	Evet.
Burcu:	Bu mudur istenen? O kadar değer bulduk. Bunları GeoGebra'da acaba nasıl yapabiliriz?
Yavuz:	Formülü bilmiyoruz ama bu da içimize sinmedi herhalde fazla.
Burcu:	Evet. Sanki daha farklı bir çözümü vardır gibi geliyor. Tamam. Bir daha bakalım. Yani sürtünme kuvveti de sürekli olarak artıyor işte.
Yavuz:	Enerji korunumundan yapsak?
Burcu:	Enerjiyi hiç karıştırma. Aslında oradan da belki yapılabilirdi.
Yavuz:	Potansiyel enerji ve kinetik enerji birbirlerini dengelemeyecek mi?
Burcu:	Sürtünme kuvvetinin harcadığı enerjiden de yapılabilir.
Yavuz:	Dimi? Evet m g h eşittir 1 bölü 2 m.v^2 'den. Oradan çıkmaz mı?
Burcu:	Deneyelim mi bir?
Yavuz:	İvme-hız ilişkisi var.
Burcu:	Buradan gitmeyelim ya. Ben buradan pek bilmiyorum. Gideceksen sen git de ben bilmiyorum yardımcı olamam hiç sana.
Kağıt Alıntısı	

3g. Yazılı Raporu Revize Etme

Çözümlerinin başlarında ve ortalarında gruplar tam ve düzenli bir çözüm raporu yazmada sorun yaşamışlardır. Bunun yanında ise düşüncelerini, buldukları çözümleri ve sonuçları genellikle karalama dedikleri kağıtlara yazmışlardır. Gruplar belli bir çözüme ulaştıklarını veya ulaşabileceklerini düşündükleri andan itibaren yazılı çözüm raporunu dikkate aldıkları görülmüştür. Bu doğrultuda yazılı raporda nelerin yazılması gerektiği ve hangi düşüncelerin yazılmasının çok önemli olmadığını düşünülmüştür. Bununla birlikte gruplar hem zihinsel modellerini hem de matematiksel modellerini daha ayrıntılı olarak yazılı rapora aktarmışlar ve yazılı raporda çözümün hangi sırada verileceğini dikkate almışlardır.

G_2 Köprü Problemi çözümünde belli bir çözüme ulaştıkları andan itibaren yaptıklarını temize geçmek istemiştir. Bu doğrultuda Ela yazılı raporda öncelikle köprünün uzunluğunu bulurken fotoğrafı seçme nedenlerinden (ölçekli olması) bahsetmeleri gerektiğini ifade etmiştir. Sonrasında GeoGebra yarımıyla iki nokta arasındaki uzunluktan yararlandıklarını söylemiştir. G_2'ün yazılı raporu belli bir çözüme ulaştığını ve hatta bu çözümün mantıklı olduğunu düşündüğü zaman dikkate almıştır. Aynı zamanda raporda yazılması gerekli olan önemli düşünceleri tekrardan ortaya çıkarmaya ve çözümü tekrardan zihinlerinde yapılandırmaya çalışmıştır. Bu doğrultuda zihinsel modelinden GeoGebra'ya aktardıkları gerçek yaşam durumunun modelini yazılı raporu aktarmıştır.

Yazılı raporun yazılması hem aktif izlemeyi sağladığı gibi hem de düşüncelerin tekrardan değerlendirilmesi için uygun ortam yaratmıştır. Çünkü öğrenciler bu şekilde daha önce yaptıklarını ortaya koymuş ve düşünceleri tekrardan zihinsel süreçlerinden geçirmiştir. Bu da onların gerçek yaşam durumuyla ilgili ilk başta düşünmedikleri yeni düşüncelerin ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır. Örneğin Mete köprünün kaç yılında yapılmaya başlandığını merak ederek gruba bazı sorular yöneltmiştir.

Masal:	Rapor yazalım biz buna. Bunu da kaydedelim.
Mete:	Bunu kaydedelim de açık kalsın.
Masal:	Tamam.
Ela:	Öncelikle başa şunu yazalım. Fotoğrafı seçerken ölçek olanı seçtik uzunluğu bulmak istediğimizde.
Masal:	Tamam yazıyorum. 2. Resim kullanarak diyorum.
Ela:	GeoGebra'nın yardımıyla iki noktası arasındaki uzaklıktan bulduk diye yazsak mı acaba rapora.
Mete:	Yazalım.
Ela:	Ne zaman başlamış ki bu köprü yapılmaya?
Mete:	1 buçuk yıl önceymiş.
Ela:	1 buçuk yılda sadece ayaklarını mı yapmışlar (Gülüşmeler oluyor.)?
Mete:	Hayır, asıl yol 115 km. Sadece köprüyle uğraşmıyorlar yaparken.
Ela:	Heee tamam. Aslında en zor o ayak kısmı dimi köprünün? En uzun köprü Çin'de miydi? 45 km mi neydi dimi? He hoca sormuştu o soruyu

bize.

Mete: Evet. Problemlerde vardı.

Ela: Bir de videolar bizim fazla işimize yaramadı gerek olmadı. Onları neden verdi ki hoca?

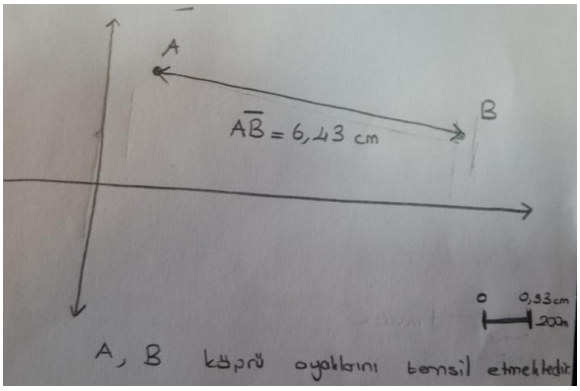
Masal: Resimler daha iyiydi çözüm için bence. Şekli çiziyorum şimdi.

Mete: Şekilde ölçeği de çizelim.

Ela: Ayrıca biz bunu koordinat ekseninde göstersek daha iyi olmaz mı ya? GeoGebra'dan kağıda geçelim.

Masal: Tamam.

Kağıt Alıntısı



G5 Tiyatro Problemi çözümünde buldukları gerçek yaşam çözümü doğrultusunda İstanbul'da tiyatroya gidenlerin dezavantajlarını ve avantajlarını yazmayı düşünmüştür. Canan kültür seviyesinden bahsetmeye gerek olmadığını söylemiş ve G5 bilet fiyatıyla gelen kişi sayısını da teorik çözümüne ve tahminine dayanarak değiştirdiğini yazılı raporda belirtmiştir.

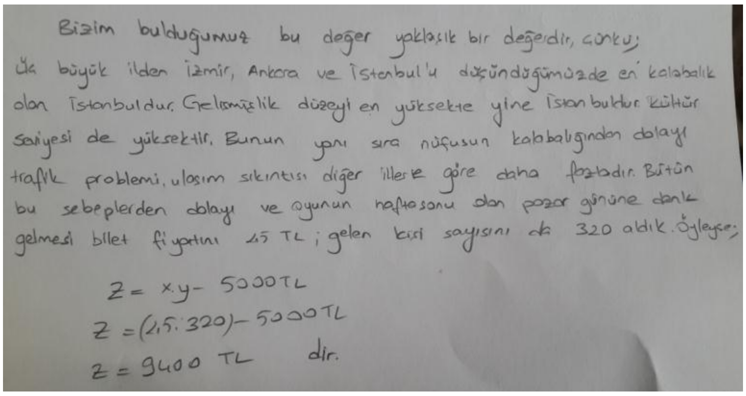
Bülent: Önce avantajları yazalım sonra da dez avantajlarını yazarız

Canan: Tamam öyle yapalım. Bunu yazmaya gerek yoktu da kalsın (kültür seviyesi yüksektir.)

Bülent: Olsun ya kalsın

Canan: Bilet fiyatını ve gelen kişi sayısını değiştirdiğimizi yazacağız

Kağıt Alıntısı



Bizim bulduğumuz bu değer yaklaşık bir değerdir, çünkü;
Üç büyük ilden İzmir, Ankara ve İstanbul'u düşündüğümüzde en kalabalık
olan İstanbuldur. Gelişmişlik düzeyi en yüksekte yine İstanbuldur. Kültür
seviyesi de yüksektir. Bunun yanı sıra nüfusun kalabalığından dolayı
trafik problemi, ulaşım sıkıntısı diğer illere göre daha fazladır. Bütün
bu sebeplerden dolayı ve oyunun haftasonu olan pazar gününe denk
gelmesi bilet fiyatını 45 TL; gelen kişi sayısını da 320 aldık. Öyleyse;

Z = x.y − 5000TL
Z = (45.320) − 5000TL
Z = 9400 TL dir.

G1 Düşme Problemi'ni çözerken Demet *"Ayrıntılı her şeyi yazmaya gerek yok dimi raporda? Kısa kısa anlaşılıyor zaten."* ifadesini kullanmıştır. Grup üyeleri de onun bu düşüncesini onaylamıştır. Bu da çözüm sürecinde G_1'in yazılı rapor hazırlanırken her düşüncesini rapora aktarmadığını göstermiştir.

4. Matematiksel Modelleme Sürecindeki "Tahmin Yapıları"

Matematiksel modelleme sürecinde üst bilişsel tahmin eylemleri genel anlamda üst bilişsel planlama, izleme ve değerlendirme eylemlerini destekleyici bir rol almıştır. Ayrıca modelleme süreci boyunca düşüncelerdeki tutarlığın belirlenmesinde ve mantıksal çıkarımların sEzginsel ve bilgiye dayalı tahminlerle desteklenmesinde üst bilişsel tahmin eylemlerinin düzenleyici olmuştur.

Matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan üst bilişsel tahmin eylemleri modelleme sürecinin her anında süreçteki farkındalığı ortaya çıkarıcı, süreci kontrol edici, düzenleyici ve çıkarsayıcı bir rol oynamıştır ve modelleme sürecinde beş temel kategori altında şekillenmiştir (bkz. Tablo 7).

Tablo 7. Matematiksel Modelleme Sürecindeki Tahmin Yapıları

	Kategoriler	Yanıt Aranan Temel Sorular
Tahmin Yapıları	**4a.** Temel büyük düşüncenin ilerleyişine ve stratejik etkenlere yönelik tahminlerde bulunma. (karar öncesi)	Temel büyük düşüncenin uygulanmasında yaşanabilecek olay veya sorunlara ilişkin tahminler neler?, Stratejik etkenler plana bağlı kalınırsa nasıl bulunur ve yaklaşık olarak nasıl bir şey bulmak bekleniyor?
	4b. Sonuçları uzlaştırmak için tahmin yapma	Teorik olarak elde edilen sonuçlar ve düşünceler tahminlerle uyuşuyor mu?, Bu farklılık neden kaynaklanıyor?, Tahminler teorik sonuçları sorgulamada ne kadar etkili?
	4c. Kararların etkilerini önceden tahmin etme (kararı uygularken)	Süreçte alınan kararların olası etkilerine ilişkin ön tahminler neler?, Planı zamanı geldiğinde değiştirmek için tahminlere bağlı yedek kararlar alınmalı mı? Çözümde işlemsel kolaylık sağlamada yuvarlama ve yaklaşık değer alma sonucu ne kadar etkileyebilir?
	4d. Ulaşılamayan stratejik etkenler için tahminlerden yararlanma	Planda önemli bir yeri olan etkenlere ilişkin yeterli bilgi yoksa bu etkenler nasıl kullanılabilir?, Çözüm sürecinde etkenlerin bazı değerlerini kullanmak için tahminlerden yararlanılmalı mı? Ulaşılamayan stratejik etkenler için en iyi tahminde nasıl bulunabilirim?
	4e. Farklı durumlardaki sonuçlara veya aynı durumdaki farklı düşüncelere ilişkin tahminlerde bulunma	Plana bağlı elde edilen sonuçlar farklı durumlarda nasıl değişir?, Aynı duruma ilişkin farklı düşünceler sonuçları nasıl etkiler?, Bu düşüncelere ilişkin tahminlerde bulunarak bir karara varılabilir mi?

4a. Temel Büyük Düşüncenin İlerleyişine ve Stratejik Etkenlere Yönelik Tahminlerde Bulunma (Karar Öncesi)

Planı oluşturmadan önce veya temel büyük düşüncesinin tasarlanması sırasında dikkate alınması gereken düşüncelerin çözümün ileriki aşamalarında hangi sorunları yaratabileceği ve hangi sonuçları (matematiksel modelin doğru değil eğri oluşu, hangi şartlarda bir sonuca ulaşılacağı gibi) ortaya çıkaracağı ile ilgili tahminler yapılmıştır. Ayrıca çözümde düşünülen planların hangi matematiksel yöntemleri gerektirdiği (bu soru kesin türevden çıkacak gibi) ve süreçte kaç farklı matematiksel modele ihtiyaç duyulabileceği tahminen ifade edilmiştir.

G_1'in Köprü Problemi çözümünde, öğrenciler çözümde alacakları fotoğrafların veya video kesitlerinin hangisinin çözümde daha etkili olacağı konusunda bazı ön tahminlerde bulunmuşlardır. Bu doğrultuda G_1' de Demet, çözümde fotoğrafın çekim açısını dikkate almaları gerektiğini ve buna dikkat etmezlerse sonuca tam olarak ulaşamayacaklarını ifade etmiştir. İleriye yönelik yaptığı bu tahmin G_1'in temel büyük düşüncesini tasarlamasında etkili olmuştur.

Defne:	Evet, alsak öyle olurdu.
Selen:	Evet
Demet:	(Ayrı bir yerde durdurdu.) Mesela burada burayla (köprünün yüksekliği) ve burayı (köprünün genişliği) oranlayabiliriz. Burada nokta olarak burayı (sol ayak ve yol hizası kesişimi) da alabiliriz. Burayı (sağ ayak ve yol hizası kesişimi) da alabiliriz. Ama resimde perspektifi iyi almamız lazım. Bu bizim sonucumuzu etkileyebilir.
Video Alıntısı	
Defne:	Evet. Yakınlaşalım mı biraz daha resme?
Demet:	Al bakalım videoyu biraz ileri. Belki bir şeyler (daha iyisi) vardır. Bunlar biraz kötü olacak sanki. Daha iyisini seçebiliriz.

G_5, Tiyatro Problemi'nde verileri inceledikten sonra ve İstanbul'un diğer şehirlerden oldukça kalabalık ve kültürel anlamda daha gelişmiş bir şehir olduğu düşüncesiyle problemde bulmaları beklenen İstanbul'daki bilet fiyatı ve biletli sayısı hakkında verilerden de yardım alarak yaklaşık değerler aldıkları ve bu stratejik etkenlere yönelik ön tahminlerde bulundukları görülmüştür.

Bülent:	O zaman İstanbul'da bilet sayısı ne kadar olacak acaba? İstanbul'da daha pahalı olur gibi geliyor mantıklı düşünürsek.
Bengi:	Daha pahalı olur ama gelecek insan sayısı da çok az olmaz. İstanbul çok kalabalık bir şehir yine de.
Bülent:	Yani. 300 falan gelir yani. 45 olsa yaklaşık fiyat 300 gelir.
Bengi:	Bence de 300. Bu fiyat da yaklaşık.
Bülent:	Sizce en pahalı İstanbul mu olur sizce? Bence öyle olur.
Bengi:	Bence de.
Canan:	Bence de.
Bengi:	En büyük orası.
Bülent:	Şehirleri kıyaslarsak en gelişmiş en büyük.

G_7'nin düşme problemi çözümünde ise Ezgin çözüm sürecinin başlarında sürtünme kuvveti ve yer çekimi kuvveti arasındaki ilişkin limit hızdan çıkacağı ön tahminin bulunmuştur. Çözümün ileriki aşamalarında Ezgin'nin yaptığı ön tahmini temel büyük düşüncede dikkate alınmamıştır.

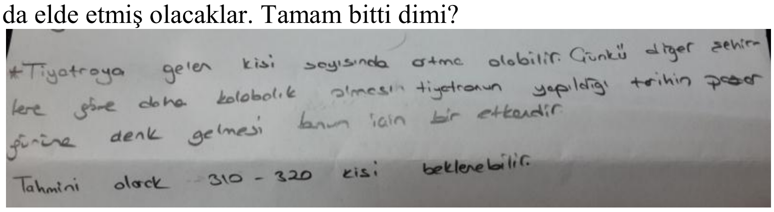
Yılmaz:	Ya şey var mı? Ya limit hızın formülü var mı? Orada etkileyen yüzey alanının etkisi vardı?
Ezgin:	Seda biliyor musun diyordun sen?
Yılmaz:	Limit hızdan gelecek bak bu ya görürsünüz.

4b. Sonuçları Uzlaştırmak İçin Tahmin Yapma

Çözüm sırasında bazen teorik olarak elde edilen sonuçların söz konusu sonuçlara ilişkin yapılan tahminlerle uyuşup uyuşmadığının kontrol edilmesi amacıyla tahminlerden yararlanıldığı görülmüştür. Öğrenciler istenen değerlere zaman zaman tahmin yoluyla yaklaşmasına rağmen olabildiğince fazla teorik sonuçlara odaklanmışlar ve yaptıkları tahminleri de genelde teorik sonuçları desteklemek amacıyla kullanmışlardır. Bu aşamadan sonra da yapılan tahminlerin teorik sonuçlarla uzlaşmadığı durumlar düşünülerek hangisinin daha gerçekçi bir değer olduğuna ilişkin bir kanıya varılması gerekmiştir.

G_3'ün Tiyatro Problemi'nde, teorik olarak yaklaşık 280 kişinin tiyatroya geleceğini bulunmuştur. Fakat veriler incelendiğinde bu değerin İstanbul'daki karın

Ankara'dan daha az olmasına neden olduğu görülmüştür. G_3 bu doğrultuda İstanbul'un daha büyük şehir olduğu ve hafta sonu Pazar günü İstanbul'daki tiyatroya gidileceği düşüncesiyle teorik olarak bulduklarından (280 kişi) daha fazla insanın tiyatroya geleceğini düşünmüştür. Bu nedenle de çözümün başlarında yaptıkları ilk tahmini olan 350 kişi ve teorik olarak bulduğu 280 kişi arasında ortak bir kişi sayısı belirlemek istemiştir. İlk başta biletli sayısını biraz arttırıp 300 kişi demiştir. Sonrasında ise 310-320 kişi olarak biraz daha kişi sayısını arttırmış ve çözümü tamamlamıştır.

Seray:	Bak bakalım tarihine ne olacak? 2015'de valla. Bir de pazara geliyormuş. Pazarmış gerçekten. Mesela İzmir'de 22 şubat Pazar. İzmir'de de zaten yakın bulduk ya. Yani bunu başka yoldan yapamayız ki. Biraz daha ekleyebiliriz belki üstüne. Kişi sayısında artma olabilir.
Kumsal:	Evet.
Seray:	Yazalım onu da. Daha fazla olabilir ve daha kalabalık olması ve tarihin Pazar gününe denk gelmesi bunun için etkendir.
Sena:	Ne kadar etkiler ki?
Seray:	Evet. Ne kadar deriz? 300 falan olur herhalde en fazla.
Kumsal:	Bence biraz daha arttıralım. 280'den fazla diyelim.
Seray:	Ama biz kafamıza göre vermedik ki 280'i. Başka bir değer bulamazsın buradan.
Kumsal:	Evet. Ama İstanbul'dan bahsediyoruz.
Seray:	Hata yapmadık sonuçta.
Sena:	Bence Pazar olmasından dolayı 300 yazalım yani.
Seray:	Ben de diyorum ki artabileceğini söyleyelim ama sayı vermesek daha iyi. Zaten demişiz 280. Tekrar bir sayı vermeye gerek yok sanki.
Kumsal:	Ben 320 olur diyorum.
Seray:	310-320 diyebiliriz. Bu da zaten onların daha da kar etmelerini sağlar. Fiyat pahalı ve kişi sayısı da fazla olacak. Yani her türlü en iyi kazancı da elde etmiş olacaklar. Tamam bitti dimi?
Kağıt Alıntısı	

*Tiyatroya gelen kisi sayısında artma olabilir. Çünkü diğer şehir-lere göre daha kalabalık olması tiyatronun yapıldığı tarihin pazar gününe denk gelmesi bunun için bir etkendir.
Tahmini olarak 310 - 320 kişi beklenebilir.

Düşme Problemi çözümünde G_2, arctan 1.764'ün değerini ilk başta bulamamıştır. Bu yüzden de bildikleri değerlerden hareketle (arctan 1 $=45^0$, arctan $1.73=60^0$) yaklaşık ne kadar olabileceği ile ilgili tahminlerde bulunmuştur. Sonrasında ise arctan 1.764'ün değeri 60.451^0 olarak ifade edilmiştir. Mete de önceki tahminiyle ortaya çıkan sonucu karşılaştırdığı görülmüştür.

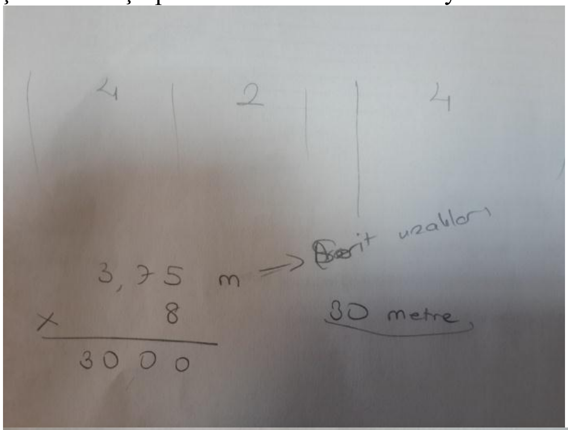
Mete:	1.764
Ela:	Yok bulamadım hala kaç olduğunu?
Mete:	Bu kaçtı ki ya? 45 derece birdi. Bu birden büyük olacak da ne kadar büyük?
Ela:	60 derece 1.73’ müş
Mete:	60-70 arası bir şey o zaman hatta 60 a yakın.
Masal:	Evet.
Ela:	Bunu hesaplamanın bir yöntemi var mı?
Masal:	Tanjant tablosundan bulabiliriz belki.
Ela:	Tam değer olmaz ama.
Masal:	En yakın olanını alırız ya.
Ela:	Kaçtı? 60. 451 derece oldu.
Mete:	Çok az etkisi varmış bak.

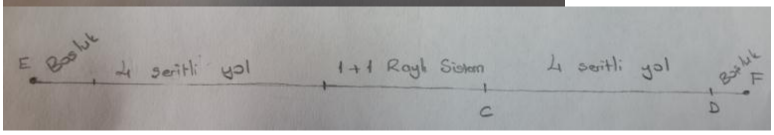
4c. Yaklaşık Değer Alma ve Alınan Kararların Etkilerini Önceden Tahmin Etme (Kararı Uygularken)

Çözümde işlemsel kolaylık sağlamak ve bilişsel yüklerini hafifletmek için öğrenciler, problemin amacına ulaşmalarında sorun yaratmayacak şekilde buldukları teorik sonuçların yaklaşık bir değerini alma veya yuvarlama yoluna gitmişlerdir. Öğrenciler bu doğrultuda matematiksel işlemlerin kolaylaşmasını sağlayacak teorik sonuçlara yönelik yaklaşık değerleri belirlemişlerdir. Ayrıca bu yaklaşık değerlerin problemde bulunması istenen asıl sonuçları olumsuz etkileyip etkilemeyeceği ile ilgili tahminlerde bulunmuşlardır. Bu sayede işlemsel güçlüklerin önüne geçilmeye çalışılmıştır. Zaman zaman ise teknolojinin sağladığı işlemsel desteğin öğrencilerin bu aşamadaki davranışlarını arka plana koyduğu görülmüştür.

G_2 Köprü Problemi çözümünde internetten edindikleri bilgi doğrultusunda otoyollardaki bir şeridin genişliğini 3.75 metre olarak bulmuştur. Fakat Mete daha sonra işlemlerin daha kolay çıkacağı düşüncesiyle bir şeridin genişliğini 4 metre almalarını ifade etmiştir. Grup üyeleri Mete bu isteğini dikkate almamışlar ve hesap makinesinden işlemleri yapabileceklerini söylemişlerdir. Çözümün devamında da, problem durumunda istenen köprünün olası genişliği G_2 tarafından 49.22 metre olarak bulunmuştur. Ela ise daha net bir değer olarak 50 metre olarak ifade etmiş ve buldukları asıl değeri 50’ye yuvarlamıştır. Grup üyelerinden bu duruma olumsuz bir tepki gelmemiştir.

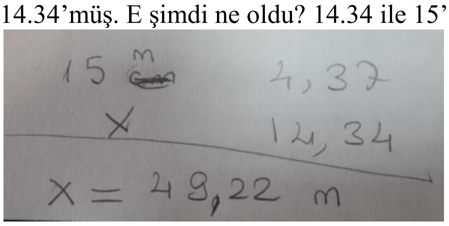
Mete: Şey diyor. Otoyolda şerit genişliği ortalama 3.75'dir (İnternetten okuyor.).
Ela: Şerit sadece bir aracın geçtiği kısım mı?
Masal: Evet.
Mete: Biz 4 alalım. 8'le çarpalım.
Masal: Şimdi 3.75 çarpı 8. 30 oldu. Bir de tren rayları var.
Kağıt Alıntısı





.
.
.

Masal 14.34'müş. E şimdi ne oldu? 14.34 ile 15'i çarp (Mete çarpıyor.).
Kağıt Alıntısı



Mete 215,1.
Masal Şeye böle şimdi 4.37'yi buna böl.
Mete 49.22 metre.
Masal Yaklaşık olarak bu kadarmış.
Ela 50 metre çıktı.
Mete Tamam.

G_6, Tiyatro Problemi çözümünde ise İstanbul'da en iyi kar için bilet fiyatını 41 lira 52 kuruş olarak bulmuştur. Yavuz da bu sonucun gerçek yaşam için uygun bir fiyat olmadığını düşünerek 52 kuruşu almalarının gerek olmadığını grup arkadaşlarına sormuştur. Burcu ise bu soruya cevap olarak 41.52 lira olarak belirlemeleri gerektiğini ifade etmiştir ve yaklaşık bir değer almaya sıcak bakmamıştır.

Burcu: Bence elimizdeki verileri ona göre kullandık sonuçta. Bu kazanç için bilet fiyatı diyordu dimi? O da 41.52 olmalı. Gelen kişi de 280 olmalıdır diyelim.
Yavuz: 52 kuruş diyecek miyiz?

Burcu: Diyelim. Kuruşuna kadar alırız biz (Gülüşmeler oluyor.). Gayet iyi oldu. Tek sıkıntı Ankara. 12000 çıktı. Ama İstanbul'da Ankara'yı göremedik hiç. Daha fazla olabilir mi sayı? Gerçi olabilir.

G_5 Düşme Problemi çözümünde videoları inceleyip sahip olunan verileri belirlerken videoyu belli bir saniyede durdurmuş ve o andaki Boumgartner'ın verilerini kağıda not almıştır. Bengi videoda 90954 feet olan değeri kağıda da not alırken yaklaşık olarak 91000 feet olarak yazmalarını teklif etmiştir. Bu durum grup tarafından kabul görmüş ve işlemler 91000 feet üzerinden gerçekleştirilmiştir.

Canan: Biraz daha geri almalısın (Geri aldı.).
Bülent: 843 mü en hızlı bu videoda yükseklik?
Video Alıntısı

Bengi: 91000 alalım onu da yaklaşık olarak.
Canan: Tamam. Kapatalım mı videoyu? Yeterli mi?

4d. Ulaşılamayan Stratejik Etkenler İçin Tahminlerden Yararlanma

Öğrenciler matematiksel modelleme gibi açık uçlu problemleri çözerken problemle ilgili olduğunu düşündükleri her stratejik etkene ilişkin problem ifadesinde yeterince bilgiye sahip olamayabilmektedir. Bu nedenle de zaman zaman problem ifadesinde ulaşılamayan bu stratejik etkenlere ilişkin kendi tahminlerinden ve tahmini olarak gerçekleştirdikleri ölçümlerinden yararlanmışlardır. Bu süreçte ulaşılamayan bu stratejik etkene nasıl ulaşabileceklerini ve en iyi tahmini değerleri nasıl bulabileceklerini düşünmüşlerdir. Bu aşamada yaptıkları tahminlerin diğer tahminlerine göre sonucu daha fazla etkileyici bir rolü olmuştur. Çünkü sürecin en başında söz konusu stratejik etkenlere ilişkin yaptıkları tahminlerdeki hata oranının fazla olması ulaşacakları gerçek yaşam çözümünün çok değişik çıkmasına neden olmuştur. Öğrencilerin de gerçek yaşam çözümünün beklendiği gibi çıkmaması durumunda sürecin başında gerçekleştirdikleri bu tahminleri de tekrardan kontrol ettikleri görülmüştür.

G_6'nın Köprü Problemi çözümünde, bir aracın genişliği ile ilgili bir veri bulamamış ve tahminiyle bu veriye ulaşmaya çalışmıştır. Bunun için ise plaka boyunu öncelikle Burcu iki eliyle bir aralık olarak göstermiş ve bu aralık da A4 kağıdının boyundan yararlanarak yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Daha sonra tahmin ile bulunmuş plakanın gerçek uzunluğu, video kesiti ve GeoGebra yardımıyla elde edilmiş plaka boyu/arabanın genişliği oranı kullanılarak bir arabanın yaklaşık olarak gerçek genişliğine ulaşılmıştır.

Yavuz:	Gerçi onu fotoğraftan değil de başka bir yerden boyunu çıkartsak. Videodan durdurduğumuz yerlerden. Ağacın boyunu falan da kullanabiliriz hani belki.
Burcu:	Tamam bir dakika (Burcu videoyu tekrardan açtı.). nerdeydi?
Yavuz:	Tam bilmiyorum da buralarda bir yerdeydi. Şimdi gösterecek.
Burcu:	Evet. Tam zamanında durdurdum. Bir plaka yaklaşık bu kadar bir kere (Eliyle gösteriyor.).
Video Alıntısı	
Yavuz:	A4 kağıda göre nasıl peki?

Tahmin eylemleri öğrencilerin planlama, izleme ve değerlendirme eylemleri arasındaki düzeni sağlamak için önemli bir rol oynamıştır. Çünkü grup üyeleri planlama, izleme ve değerlendirme eylemlerinde bulunurken tahmin eylemlerinden doğrudan veya dolaylı olarak yararlanmışlardır. Özellikle matematiksel modelleme probleminin yapısının tahmine uygun bir ortam sağlaması öğrencilerin çözüm sürecinde araba genişliğini, raylar arası genişliği, şerit genişliğini tahmin etme gibi çeşitli eylemler sergilemelerine olanak sağlamıştır. Bu durumu açıklayan gözlem notu şöyledir:

> (…Demet şeritlerin tüm yollarda standart olacağını ve bu nedenle köprünün genişliğini bulmak için şeritleri kullanabileceklerini söyledi. Bu şekilde yaklaşık bir sonuca ulaşabileceklerini ifade etti… Demet şeritlerin yanında trenler arası mesafe ve rayların genişliğini de tahmin edebileceklerini söyledi. Defne, Demet'i destekleyerek aynı zamanda tahmin ederken kenarlardaki boşlukları da dikkate almaları gerektiğini vurguladı. Gözlem notu: G_1, Köprü Problemi)

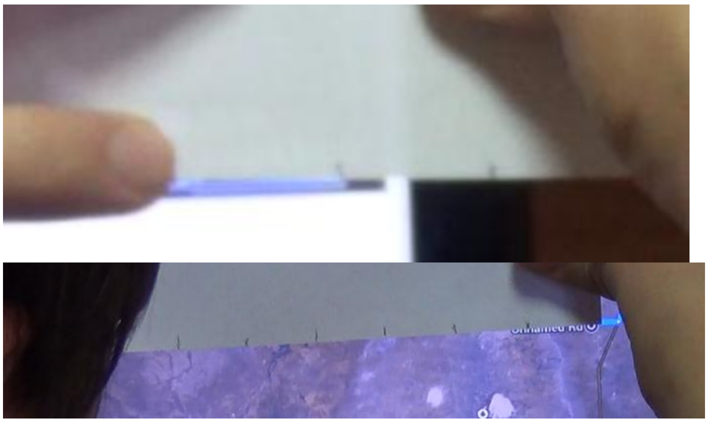
G_6 Düşme Problemi çözümünde, problemin çözümü için gerekli olduğunu düşündüğü yer çekimi ivmesi hakkında problem ifadesinde herhangi bir veriye ulaşamamıştır. Bu nedenle gerçek yaşam deneyimlerinden veya eski bilgilerinden hareketle yer çekimi ivmesinin sayısal değeri hakkında tahminde bulunmuş ve bu tahmini problem çözümünde kullanmıştır. G_6 gibi diğer gruplar da problem ifadesinde verilerine ulaşamadıkları stratejik etkenlerle ilgili tahminlerinden yaralanmışlar ve bu tahminlerden çözümlerinde yararlanmışlardır.

Burcu: Evet ama değişiyor. Çünkü Dünya'da Ekvator ve Kutuplar arasında dahi yer çekimi değişiyorsa sıfır virgül bilmem ne kaç kadar. Burada da hayli hayli değişir.
Yavuz: Ona da girersek ama çıkamayız ki bu işin işinden.
Burcu: Önce 10 diyemeyiz de. Mesela 9.8 deriz. Ona göre bakarız.
Yavuz: Aynen 9.8. İlk hızı sıfır. Yükseklik ne kadardı? Yazmıştık onu. Bir şekli oluşturalım.

G_7'nin Köprü Problemi çözümünde ise problemde istenen gerçek yaşam sonucuna A4 kağıdının yardımıyla ulaşmıştır. Bunun için problemle birlikte verilen fotoğrafın ölçeği uzunluğunda A4 kağıdını bölmelendirmiştir. Bu bölmelendirdiği kağıdı ise Yavuz fotoğraftaki iki nokta arasındaki gerçek uzaklığı bulmak amacıyla kullanmıştır. G_7, tahmin ve yaklaşık ölçümlerle ise iki nokta arasındaki gerçek uzunluğu 67.5 km olarak bulmuştur.

Yılmaz: Evet. Arasındaki mesafe için burasının bulunması lazım. Direk buradan çizeceğiz. Peki buradan neden bir çizgi var mavi çizgi niye var?
Video Alıntısı


Ezgin: O yol uzunluğu sanırım
Yılmaz: Hmm tamam. Şunu da bir bulalım olmazsa (Fotoğraftaki ölçeğin gerçek uzunluğuna bakıyor. Bunun için A4 ün uzun kenarını kullanıyor. Ölçekte kağıdın uzun tarafını birimlendiriyor ve söz konusu uzunlukta o birimden kaç tane var bakıyor.) . Zaten tam bir A4 uzun boyu kadar ya bu kağıdın uzunluğu. 5 -10-15-20-25 30 şurası dedik. Bir 30 daha var. 60. Bir de ufak bir yer kaldı. 60 artı şurası. 65. Bir de 5'in yarısı var 67.5 km falan buranın yaklaşık uzunluğu.
Video Alıntısı

Ezgin: Evet.

4e. Farklı Durumlardaki Sonuçlara veya Aynı Durumdaki Farklı Düşüncelere İlişkin Tahminlerde Bulunma

Öğrenciler temel büyük düşünceleri doğrultusunda yaptıkları çözümlerin sonrasında, temel varsayımlarındaki değişikliklerin çözümlerinde ne gibi sonuçlara yol açabileceği ile ilgili tahminlerde bulundukları görülmüştür. Bununla birlikte aynı varsayımlar doğrultusunda da gerçekleştirecekleri farklı çözüm stratejilerinin çözümlerini nasıl etkileyebileceği ile ilgili yorumlar yapmışlardır. Bu aşamada gerçekleştirdikleri yaklaşımların çözümlerinden ulaştıkları matematiksel modellerini nasıl geliştirebilecekleri ile ilgili ipuçları taşıdığı görülmüştür.

G_1'in Köprü Problemi çözümünde Demet, temel büyük düşünceyi tasarlarken kullandıkları video kesitinin ölçeğinin olmamasının sürecin ilerisinde çözüme ulaşmada sıkıntılara yol açtığını fark etmiş ve ölçekli olan fotoğrafın kullanılmasının çözümdeki etkisine ilişkin bazı sEzginsel tahminlerde bulunmuştur. G_1 çözümün ileriki aşamasında gerçek yaşam çözümüne ulaşmada sıkıntı yaşayınca Demet ölçekli olarak verilmiş fotoğrafı belli bir açıdan çekilmiş dahi olsa kullanmalarının daha iyi olabileceğini ve o zaman derinliği de dikkate alarak çizimlerini gerçekleştirebileceklerini ifade etmiştir.

Demet: Buradan yaklaşık bir sonuca aslında varabiliriz. Bir de geliş-gidiş raylı sistem var. Burada da aslında bütün ölçüler standart olduğu için bulabiliriz.

Defne: Burası da dahil midir? (Defne köprünün kenarlarındaki boşlukları kastediyor.)

Demet: Biz şuan ne yaptık? GeoGebra üzerinden sadece şeyi bulduk uzunluğu.

.
.
.

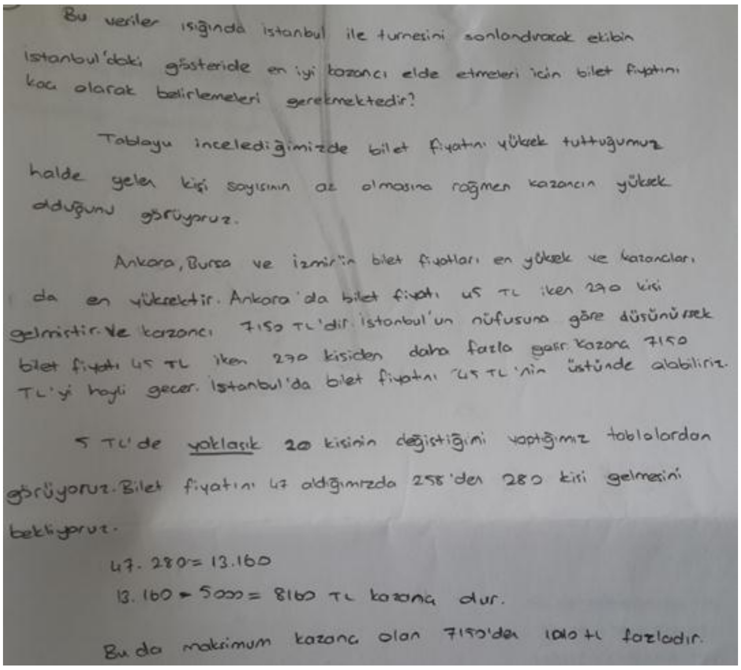
Demet: Burada şey yok dimi ölçek? (Tekrardan uzunluk olan GeoGebra dosyasını açtılar.)
Defne: Yok.
Demet: Aslında bir resim vardı kenarında ölçek olan. Hah işte şunu (resim 2'yi kastediyor.) kullanabilirdik. Belki de daha iyi olacaktı (2. resmi açtı ve arkadaşlarına gösteriyor.).

Demet'in arkadaşları bu düşüncesini hemen onaylamıştır. Fakat Selen videolarda köprünün ayağının yüksekliğinin 350 metre olarak verildiğini ifade etmiş ve buradan hareketle de video kesitinin ölçeğini de bulabileceklerini vurgulamıştır. G_1 Selen'in de bu düşüncesine onay vermiş; tekrar çözümde başa dönüp süreci uzatmamak için Selen'in düşüncesini çözümde uygulamıştır.

G_7 Tiyatro Problemi'nde çözümlerini gerçekleştirdikten sonra, İstanbul'daki tiyatroda tiyatro severlerin karşılaşabileceği sorunları daha da genişletmiştir. Yani grubun üyelerinin çözümün başında dikkate aldıkları varsayımların yanında İstanbul'daki zor durumları da düşündükleri görülmüştür. Bu durum da aslında onların bu varsayımları dikkate alarak daha farklı bir gerçek yaşam sonucuna gidebileceklerini göstermiştir.

Yılmaz: Tamam. İstanbul daha fazladır ama.
Ezgin: Yani ama İstanbul'da trafik problemi de var. Yol parası da. Belki insanlar uzak diye de gitmeyebilir tiyatroya.
Seda: Evet.
Yılmaz: Poyrazköy mesela. O zaman orta bir yerde merkezde Beylikdüzü'nde düşünelim.
Ezgin: O zaman ne yapıyoruz?
Seda: Ankara'da bilet fiyatını yazdım ve İstanbul nüfusuna göre daha fazla gelir dedim ve gelir zaten Ankara'yı geçer. Daha fazla da arttırabiliriz dedim. Konuştuğumuz gibi.
Ezgin: Tamam.
Yılmaz: 8160 oluyor böyle alınca. 7150'den 1010 tl daha fazla.

Kağıt Alıntısı


Bu veriler ışığında İstanbul ile turnesini sonlandıracak ekibin İstanbul'daki gösteride en iyi kazancı elde etmeleri için bilet fiyatını kaç olarak belirlemeleri gerekmektedir?

Tabloyu incelediğimizde bilet fiyatını yüksek tuttuğumuz halde gelen kişi sayısının az olmasına rağmen kazancın yüksek olduğunu görüyoruz.

Ankara, Bursa ve İzmir'in bilet fiyatları en yüksek ve kazançları da en yüksektir. Ankara'da bilet fiyatı 45 TL iken 270 kişi gelmiştir. Ve kazancı 7150 TL'dir. İstanbul'un nüfusuna göre düşünürsek bilet fiyatı 45 TL iken 270 kişiden daha fazla gelir. Kazancı 7150 TL'yi hayli geçer. İstanbul'da bilet fiyatını 45 TL'nin üstünde alabiliriz.

5 TL'de yaklaşık 20 kişinin değiştiğini yaptığımız tablolardan görüyoruz. Bilet fiyatını 47 aldığımızda 258'den 280 kişi gelmesini bekliyoruz.

47. 280 = 13.160

13. 160 - 5000 = 8160 TL kazanç olur.

Bu da maksimum kazanç olan 7150'den 1010 TL fazladır.

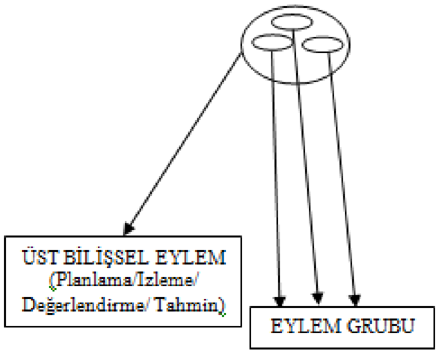
Ezgin: Büyük şehirde ulaşım zor olduğundan adam 50 TL verecekken bir de 20 TL yol parası bile verebilir yani. İzmir'de de aynı yani. Diyelim ki Konak'ta. Ama Buca'daki insanın ulaşması zor olur. Bunlar dezavantaj büyük şehirlerde.

G_7 Düşme Problemi çözümünü tamamlama aşamasındayken Ezgin *"Aslında Felix'in videosunu televizyondan izleseydik dikkatli olarak, oradaki yorumları dinleseydik ve aklımızda kalsaydı kesin bize faydası olurdu diye düşünüyorum ben."* diyerek Düşme Problemi'ne ilişkin daha fazla eski deneyime sahip olmaları durumunda daha iyi bir çözüm gerçekleştirebileceklerini ifade etmiştir.

Ayrıca G_5'in Düşme Problemi çözümünün başlarında temel varsayım olarak sürtünmenin var olduğu ve hızı yavaşlattığı kabul edilmiştir. Eski deneyimlerde genellikle sürtünmenin etkisi ihmal edildiğinden dolayı Bengi Bülent'e *"Sürtünme almıyorduk biz o zaman. Sürtünme olmasa nasıl inerdi?"* sorusunu yöneltmiştir. Bülent de bu soruya *"yer çekimi kadar"* cevabını vermiştir. Burada Bengi'nun çözümlerinde temel varsayımlarının değişmesi durumunda düşüncelerde nasıl farklılıkların olabileceğini sorguladığı görülmüştür.

Yukarıda da görüldüğü gibi matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan üst biliş kavramları; üst bilişsel eylemler, üst bilişsel yapılar ve üst bilişsel eylem grupları olmuştur. Üst bilişsel eylemler, üst bilişsel düşüncelerle ortaya çıkan temel davranışları temsil etmiştir. Üst bilişsel yapılar, üst bilişsel eylemlerin birlikte bir bütün olarak meydana getirdikleri zihinsel yapılar olmuştur. Üst bilişsel eylem grupları ise, üst bilişsel düşüncelerde ortaya çıkan temel davranışları şekillendiren yardımcı eylemlerin oluşturduğu zihinsel yapılar olarak karşımıza çıkmıştır. Eylem grupları modelleme sürecinde üst bilişsel eylemlerin genel özelliklerini açıklamada araştırmacılara yol gösterirken üst bilişsel eylemlerin nasıl ortaya çıktığı ve nasıl sonlandırıldığı hakkında da bilgi vermiştir (bkz Şekil 55).

Şekil 55. Üst Bilişsel Eylem ve Eylem Gruplarının Yapısı



Üst Bilişsel Eylem: Köprünün uzunluğunu bulurken en iyi video kesitini veya fotoğrafı GeoGebra'ya ekleyerek çözümde ilerlemeyi düşünme. (Üst bilişsel Planlama Eylemi)

Üst Bilişsel Eylem Grubu:
1- En iyi fotoğrafı veya video kesitini seçmeyi düşünme
2- GeoGebra ile problemi ilişkilendirmeyi düşünme
3- Seçilecek fotoğraf veya video kesitini GeoGebra'ya eklemeyi düşünme

Araştırmada planlama, izleme, değerlendirme ve tahmin boyutlarındaki üst bilişsel eylemler birçok farklı yapıda eylem grubunun iç içe geçtiği zihinsel oluşumlar olarak ortaya çıkmışlardır. Örneğin, modelleme sürecinde herhangi bir üst bilişsel planlama eyleminin kendi içerisinde birçok eylem grubundan meydana geldiği görülmüştür. Üst bilişsel planlama eylemleri temelinde planlama amacı gütmüşlerdir; fakat söz konusu üst bilişsel planlama eyleminin gerçekleşmesi için gerekli olan eylem grupları temel amaca bağlı olsalar da farklı öznel amaçlardan dolayı da ortaya çıkmışlardır. Örneğin, öğrenciler köprünün uzunluğunu bulurken en iyi video kesitini veya fotoğrafı GeoGebra'ya ekleyerek çözümde ilerlemeyi düşünmüşlerdir. Grubun bu davranışı üst bilişsel bir eylemdir. Öğrenciler burada planlama yapmak amacıyla çoklu düşüncelerini birleştirmeye çalışmışlar ve bu düşüncelerini diğer düşüncelerinden ayırarak çözümde kullanmak istemişlerdir. Bir başka deyişle onların çoklu düşünme yapılarını birleştirme/ayrıştırma davranışı ortaya çıkmıştır. Bu durum üst bilişsel yapıya bir örnek teşkil etmiştir. Öğrenciler söz konusu üst bilişsel eylemi gerçekleştirirlerken en iyi fotoğrafı veya video kesitini seçme eylemini, GeoGebra ile problemi ilişkilendirme eylemini ve seçilecek fotoğraf veya video kesitini GeoGebra'ya ekleme eylemini gerçekleştirmeyi düşünmüşlerdir. Öğrencilerin köprünün uzunluğunu bulurken en iyi video kesitini veya fotoğrafı GeoGebra'ya ekleyerek çözümde ilerlemeyi düşünmelerinde yukarıda sözü edilen üç yardımcı üst bilişsel davranışın etkisi olmuştur. Bu yardımcı üst bilişsel eylemlerin oluşturduğu zihinsel yapılar ise üst bilişsel eylem grupları olarak karşımıza çıkmıştır.

Teknoloji Destekli Ortamda Matematiksel Modellemedeki Bilişsel ve Üst Bilişsel Eylemlerinin Dağılımı

Araştırmanın üçüncü alt probleminin amacı, üst bilişsel eylemlerin teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki temel basamaklarda nasıl dağılım gösterdiğini incelemektir. Yedi çalışma grubunun üç matematiksel modelleme problemine (Köprü, Düşme, Tiyatro Problemleri) ayırdıkları süreler ve problemlerin çözümü için gruplar tarafından harcanan ortalama süre Tablo 8' de verilmiştir.

Tablo 8. Matematiksel Modelleme Problemlerinin Çözümü İçin Ayrılan Süreler

Gruplar	Köprü Problemi	Tiyatro Problemi	Düşme Problemi
G_1	53	55	93
G_2	55	68	112
G_3	58	65	91
G_4	68	69	117
G_5	72	85	110
G_6	80	42	118
G_7	58	108	105
Ortalama Süre	$444/7 \approx$ 64 dk	$492/7 \approx$ 71dk	$746/7 \approx$ 107dk

Grupların teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerine ilişkin sahip oldukları deneyimler, matematiksel ve teknolojik bilgilerinin yeterliliği göz önüne alındığında öğrenme ortamlarında uygulanacak matematiksel modelleme problemlerinin çözümü için grupların minimum 42 dakika ayırdıkları ve ortalama olarak da 80 dakikaya ihtiyaç duydukları görülmüştür. Fizik gibi disiplinlerarası bilgilerini kullanmalarını gerektiren Düşme Problemi'nde ise ortalama olarak gruplar 110 dakika zamana ihtiyaç duymuşlardır. Bu durum Düşme Problemi'nde öğrencilerin daha çok zaman harcadıklarını göstermiştir. Benzer şekilde grupların çözüm sürecinde karşılaşılan zihinsel geçişlerinin yaklaşık olarak sayısı Tablo 9'da verilmiştir.

Tablo 9. Matematiksel Modelleme Problemlerindeki Zihinsel Geçişlerin Sayısı

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	Ortalama
Düşme Problemi	370	420	260	520	310	390	350	374
Tiyatro Problemi	170	220	230	180	310	100	220	204
Köprü Problemi	240	150	230	230	290	330	270	248
Ortalama	260	263	240	310	303	273	280	275

Bilişsel ve üst bilişsel süreçler iç içe geçmiş modelleme sürecinin parçaları olmuşlardır. Bu nedenle yakın zamanda gerçekleşen bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin gerçekleşme önceliğinden ve sonralığından bahsetmek çok zordur. Fakat grafiklerde bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin dağılımını ortaya koyabilmek için kodlama sürecindeki eylemlerin sırası dikkate alınarak grafikler hazırlanmıştır. Grafikler özellikle basamaklar arasındaki geçişlerdeki farklılıkları ortaya koymada ve üst bilişsel eylemlerin süreçte nasıl bir dağılım gösterdiğini açıklamada büyük önem taşımışlardır.

Bu yaklaşım ile kodlama sonunda grupların matematiksel modelleme problemlerinde ortalama olarak 275 zihinsel geçiş gerçekleşmiştir. Aynı zamanda en az süreye Simülasyon Modelleme örneği olan Köprü Problemi'nde ihtiyaç duydukları halde en az zihinsel geçişin (ortalama 204 defa) Deneysel Modelleme örneği olan Tiyatro Problemi'nde olduğu görülmüştür. Aynı zamanda teorik modelleme olan Düşme Problemi'nde en fazla zihinsel geçiş (ortalama 374 defa) gerçekleşmiş ve bu problemde gruplar oldukça zorluk çekmişlerdir. Kodlamalar yapılırken araştırmacıya daha az karmaşık yapıdaki süreçlerin katkısı olduğu gibi, bu grafikteki gibi daha karmaşık yapıdaki bir sürecin varlığı da alt basamakların ve temel basamakların aralarındaki ilişkiyi daha net olarak ortaya koymada etkili olduğu söylenebilir.

Matematiksel Modelleme Problemlerinin Çözüm Sürecinde Üst Bilişsel Eylemlerin Dağılımı

Grupların problemleri çözerken her temel basamakta üst bilişsel eylemlerde bulundukları ve bilişsel eylemlerini düzenlerken üst bilişsel eylemlerin büyük önem taşıdığı görülmüştür. Bir başka deyişle temel basamaklar arasındaki düzensiz geçişler üst bilişsel eylemlerin de yardımıyla gerçekleşmiştir. Düşme Problemi (Teorik), Tiyatro Problemi (Deneysel) ve Köprü Problemi (Simülasyon) gruplar için zengin bir üst bilişsel süreci açığa çıkarmıştır (bkz. Tablo 10).

Tablo 10. Matematiksel Modelleme Problemlerindeki Üst Bilişsel Eylemlerin Sayısı

		G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	Ortalama
Düşme Problemi	Planlama	82	69	49	84	58	69	62	68
	İzleme	37	46	23	52	26	37	35	37
	Değerlendirme	30	45	22	48	25	39	26	34
	Tahmin	3	11	3	11	6	8	7	7
	Toplam	152	171	97	195	115	153	130	
Tiyatro Problemi	Planlama	29	31	32	27	44	18	43	32
	İzleme	13	21	22	16	24	6	30	19
	Değerlendirme	19	30	43	19	47	13	21	27
	Tahmin	6	8	13	2	13	3	5	7
	Toplam	67	90	110	64	128	40	99	
Köprü Problemi	Planlama	40	30	47	32	45	57	44	42
	İzleme	32	17	26	18	23	21	17	22
	Değerlendirme	32	18	23	25	38	32	27	28
	Tahmin	9	6	12	12	21	16	17	13
	Toplam	113	71	108	87	127	126	105	

Grupların çözümleri incelendiğinde en fazla üst bilişsel eylemin Düşme Problemi'nde (146) ortaya çıktığı görülmüştür. Tabloya bakıldığında problemlerde en fazla üst bilişsel planlama eylemleriyle (38) karşılaşılmıştır. En az ise üst bilişsel tahmin eylemiyle (9) karşılaşılmıştır. Köprü Problemi'nde diğer problemlere göre ise daha fazla üst bilişsel tahmin eylemi (13) ortaya çıkmıştır. Bu durumun oluşmasında Köprü Problemi'nin tahminlere daha fazla müsait olması ve öğrencilerin günlük yaşam durumlarına daha yakın stratejik etkenleri içermesi önemli olmuştur. En az üst bilişsel eylem G_6'nın Tiyatro Problemi'nde (40) ortaya çıkmıştır.

Gruplar karşılaştırıldığında ise G_4 Düşme Problemi'nde 195 kez, G_5 Tiyatro Problemi'nde 128 kez ve Köprü Problemi'nde de 127 kez olmak üzere en fazla üst bilişsel eylemlerde bulunan gruplar olmuşlardır. Üst bilişsel eylemlerdeki yoğunluğun, problemin zorluğundan, içerdiği stratejik etken sayısından ve istenilenlerin sayısından etkilendiği görülmüştür. Grupların modelleme sürecinde karşılaştıkları güçlükler ne kadar fazla ise süreçte o kadar çok üst bilişsel eylemlerle karşılaştıkları görülmüştür. Yani üst bilişsel eylemler sürecin başarılı geçtiğinden ziyade süreçteki zihinsel zorlukların ve yoğunluğun fazla olduğunu göstermiştir.

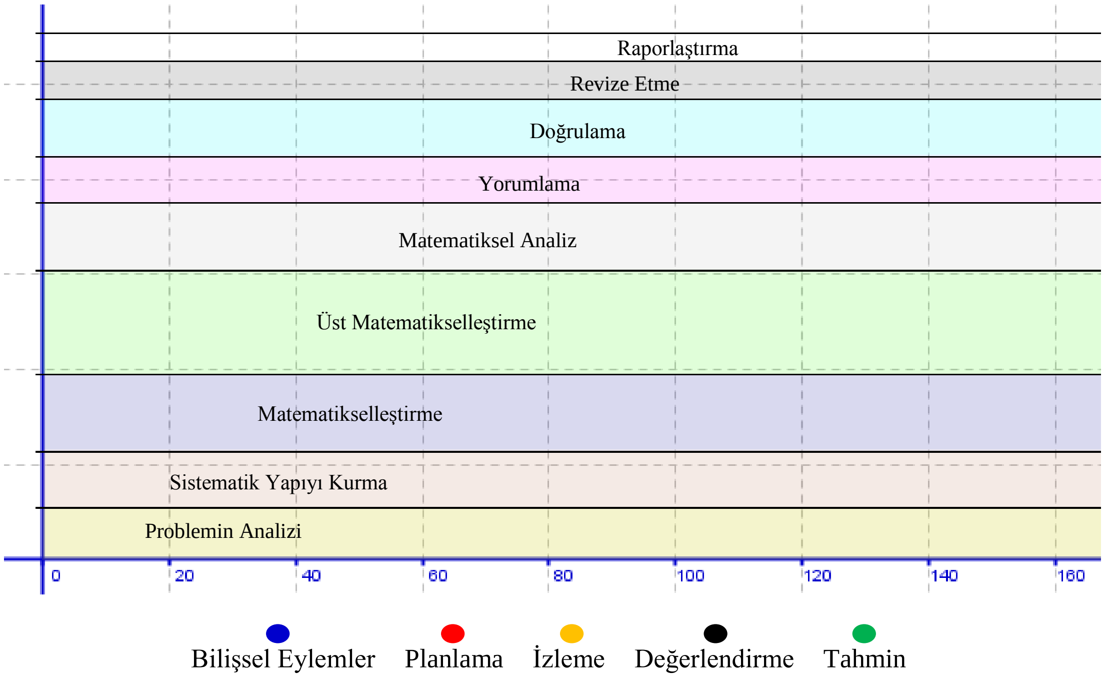
Bu alt probleme ait bulgular sunulurken 1. ve 2. alt problemler doğrultusunda ulaşılan üst bilişsel eylemlerin matematiksel modelleme sürecindeki temel ve alt basamakları dikkate alınarak grafik üzerindeki dağılımı incelenmiştir. Bu grafiklerde matematiksel modelleme sürecine ilişkin temel ve alt basamaklar y ekseninde; çözüm sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin oluşma sırası da x ekseni üzerinde tanımlanmıştır. Bu doğrultuda yedi çalışma grubunun gerçekleştirdiği toplamda yirmi bir modelleme problemi çözme süreci için yirmi bir grafik oluşturulmuş ve sürecin yapısı açıklanmıştır. Grafiklerle birlikte, modelleme sürecindeki eylemlerin işleyişi hakkında farklı bir bakış ve yorum sunulmuştur.

Grupların Çözüm Süreçlerinde Üst Bilişsel Eylemlerle Birlikte Temel ve Alt Basamakların Dağılımları

Araştırmada üç matematiksel modelleme probleminin çözüm süreçleri dikkate alınarak temel ve alt basamaklar doğrultusunda bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin dağılımları grafiklerle gösterilmiştir. Bulgular sunulurken “Süreçte nasıl bir zihinsel işleyiş söz konusudur?”, “Süreçte hangi temel basamaklarda yoğunluk görülmüştür?” ve “Bilişsel ve üst bilişsel eylemler süreçte nasıl bir dağılım göstermiştir?” sorularına ilişkin açıklamalar getirilmiştir.

Verilen grafiklerde x ekseni grupların problem çözüm sürecindeki eylem geçişlerinin sayısını, y eksenindeki kısımlar ise dokuz temel basamak ve bu temel basamaklara bağlı olarak oluşturulan alt basamakları temsil etmiştir (bkz. Şekil 56). Ayrıca grafikte bilişsel süreçler mavi, üst bilişsel planlama kırmızı, üst bilişsel izleme eylemleri sarı, üst bilişsel değerlendirme eylemleri siyah ve üst bilişsel tahmin eylemleri yeşil renkle gösterilmiştir. Örneğin, 58 dakikalık problem çözüm sürecinin başından sonuna kadar gerçekleşen eylemlerin sayısı x ekseninde, dokuz basamak ve elli beş alt basamaktan oluşan bilişsel eylemler y ekseninde Gösterilmiştir. Bilişsel eylemler de mavi renkteki noktalarla verilerek bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasındaki geçişler grafikte gösterilmiştir. Üst bilişsel eylemler grafikte ifade edilirken söz konusu üst bilişsel eylem hangi bilişsel eylemin ardından ortaya çıkmışsa (kodlanmışsa) onunla aynı hizada ve üst bilişsel eylemin türü dikkate alınarak renklendirilmiştir. Grafiklerdeki mavi noktalar bilişsel eylemleri gösterirken, kırmızı noktalar planlama, sarı noktalar izleme, siyah noktalar değerlendirme ve yeşil noktalar tahmin eylemlerini temsil edecek şekilde gösterilmiştir. Noktaların sıklığı çözüm sürecinin uzunluğundan ziyade sürecin zengin yapısını açıklamıştır.

Şekil 56. Matematiksel Modelleme Sürecindeki Bilişsel ve Üst Bilişsel Geçişleri Gösteren Grafiğin Yapısı



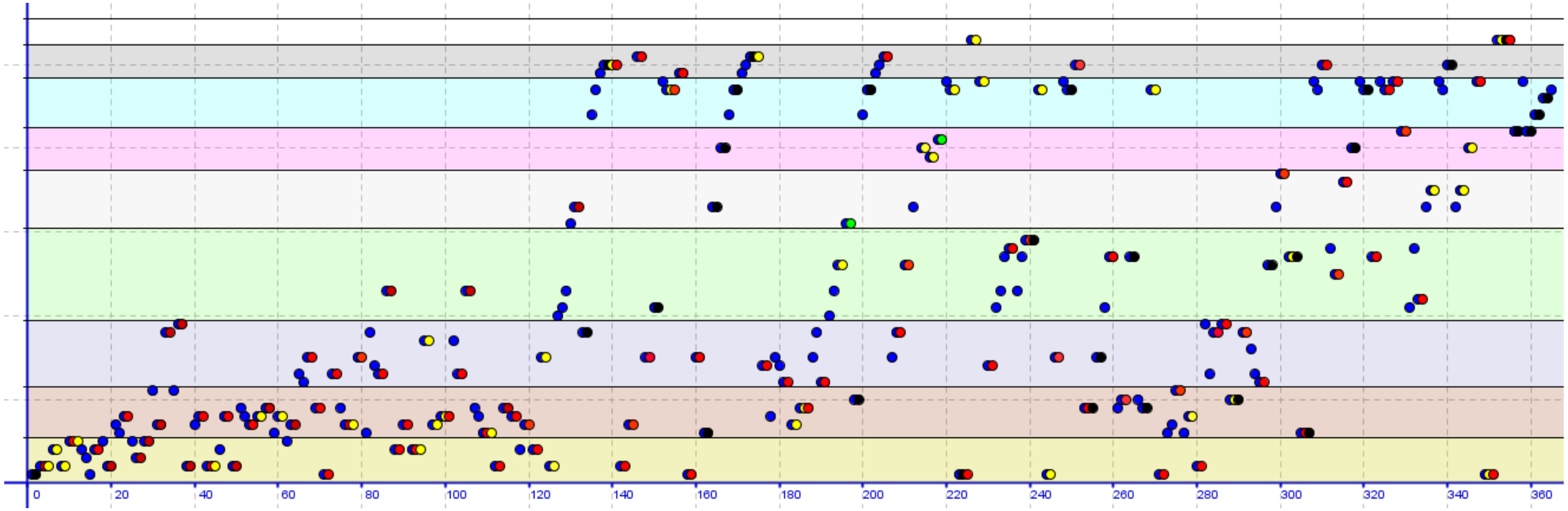
Çözüm süreçlerinde her temel basamağa zihinsel geçişler olmuş ve üst bilişsel eylemlerden her biri süreç içerisinde farklı temel basamaklarda ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin çözümlerine bakıldığında bilişsel ve üst bilişsel süreçler modelleme sürecinin birbiriyle iç içe geçmiş parçaları olmuşlardır. Bu nedenle süreçte yakın zamanda gerçekleşen bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin gerçekleşme önceliğinden ve sonralığından bahsetmek çok zor olmuştur. Fakat grafiklerde bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin dağılımlarını ortaya koyabilmek için kodlama sürecindeki eylemlerin sırası dikkate alınmıştır. Bunun yapılma sebebi yakın eylemlerin önceliğini sonralığını açıklamaktan çok genel olarak süreçteki bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin nasıl şekillendiğini açıklamak olmuştur.

Düşme Problemi Çözümündeki Bilişsel ve Üst Bilişsel Süreçler Arasındaki Geçişler

Grupların matematiksel modelleme sürecinde en fazla zihinsel geçiş gerçekleştirdiği problem Düşme Problemi olmuştur. Gruplar Düşme Problemi çözümünde ortalama olarak 112 dakika süre harcamışlardır. Bunun yanında ortalama olarak 374 kez zihinsel (bilişsel ve üst bilişsel) geçişler gerçekleştirdikleri görülmüştür. Bu problemin çözümünde en fazla geçiş G_4'ün çözüm sürecinde (520 defa) yaşanmıştır. Zihinsel geçişlerin çok sık olmasında grupların bu problemde çok fazla güçlük yaşamaları ve bu güçlüklerin üstesinden gelmek için farklı düşünceler ve eylemlere yönelmiş olmaları etkili olmuştur. Süreç boyunca çok fazla zihinsel geçişin olması söz konusu grubun problemi iyi sonuçlandırdığı ya da gerçek yaşam durumunu açıklayıcı bir çözüm getirdiği anlamına gelmemiştir. Örneğin bu problemde en az zihinsel geçiş gerçekleştiren G_3 (260 kez) bazı gruplardan daha etkili çözüm ve sonuçlara ulaşmışlardır. Zihinsel geçişlerin çok olmasındaki etkenlerden biri ise revize etme olmuştur. Nitelikli bir çözüm gerçekleştiremeyen ve bunun farkına varan gruplar çözümlerini tekrar gerçekleştirmeye çalışmıştır. Bu durum da zihinsel geçişlerin sayısında bir artışa sebep olmuştur. Aynı zamanda problemin yapısının zengin bir zihinsel geçişe fırsat sağladığı görülmüştür.

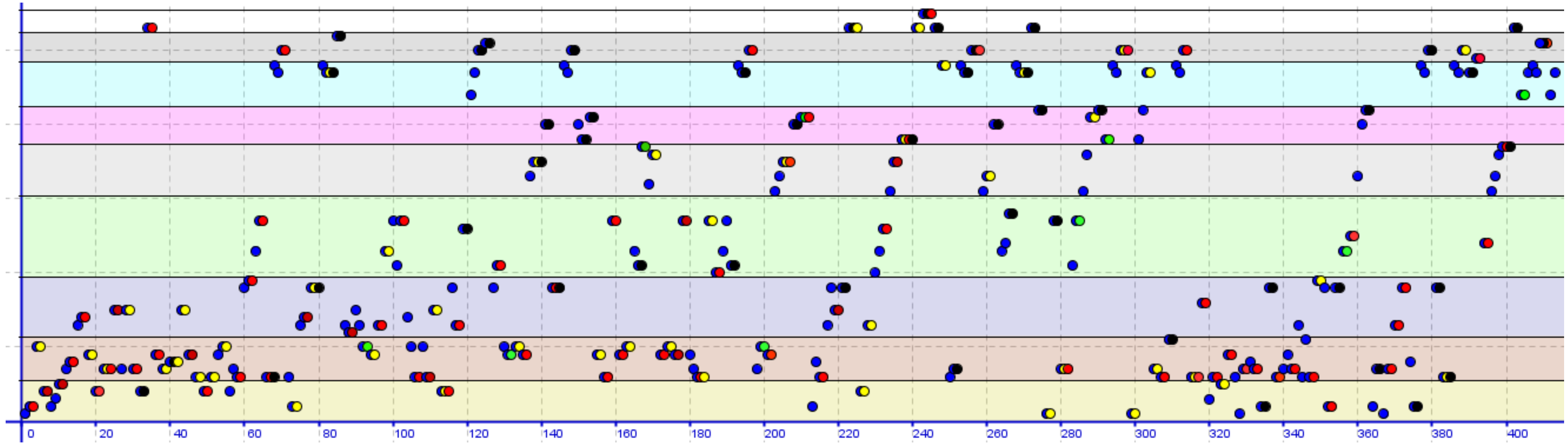
Düşme Problemi'nde ortaya çıkan üst bilişsel eylemlere bakıldığında genel olarak her temel basamakta ortaya çıktıkları görülmüştür. Bu üst bilişsel eylemler, hem alt basamaklar arasındaki geçişlerde hem de temel basamaklardaki geçişlerde ortaya çıkmışlardır. Temel basamaklar arasındaki düzensiz geçişlerde yine üst bilişsel eylemlerin önemli bir faktör olduğu görülmüştür. Örneğin, üst bilişsel eylemler; problemdeki çözümün hatalı olduğunu düşünme, daha çözüm ve sonuçlara ulaşmadan matematiksel modelin doğruluğunu inceleme, gerektiğinde sürecin her hangi bir anında genel çözüm stratejisi hakkında düşünceler üretme gibi davranışları tetiklemiştir.

Şekil 57. G_1'in Düşme Problemi Çözüm Süreci



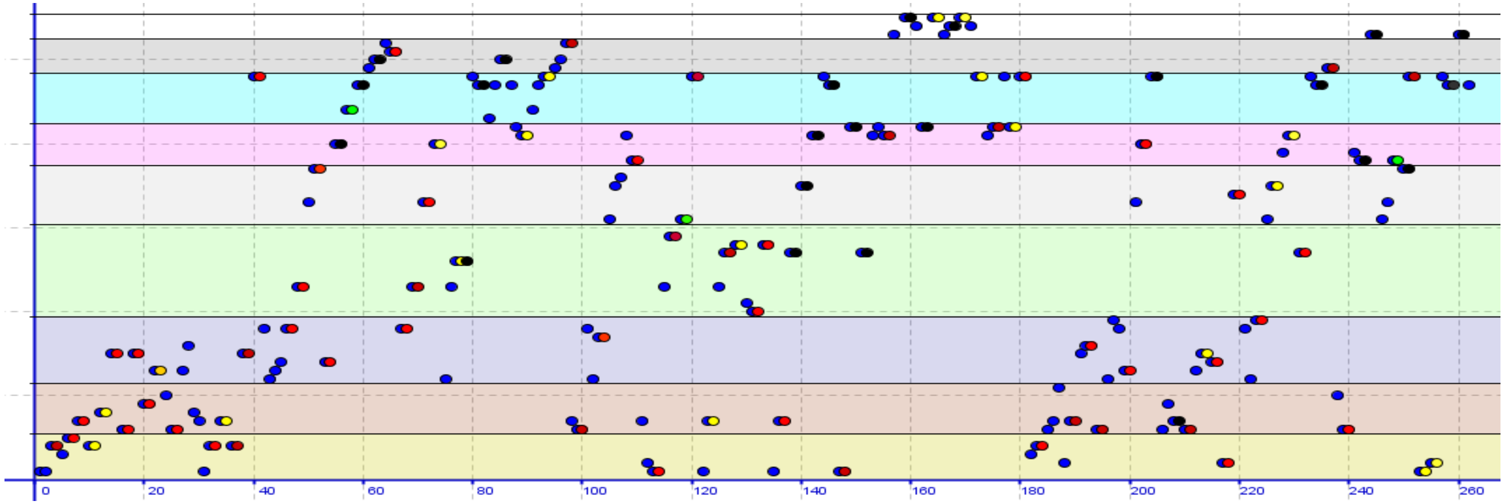
G_1'in Düşme Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 360 geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 57). İlk 120 zihinsel geçiş genel anlamda Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (140, 170, 200, 300 gibi) olduğu görülmüştür. Bu durumun oluşmasında hem istenenlerin teker teker bulunması ve doğruluğunun ayrı ayrı incelenmesi hem de yapılan hatalarının ortaya çıkarılarak tekrar tekrar bulunan sonucun doğrulanmaya çalışılması etkili olmuştur. Yaklaşık olarak 25-30 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 82 planlama, 37 izleme, 30 değerlendirme ve 3 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 58. G_2'nin Düşme Problemi Çözüm Süreci



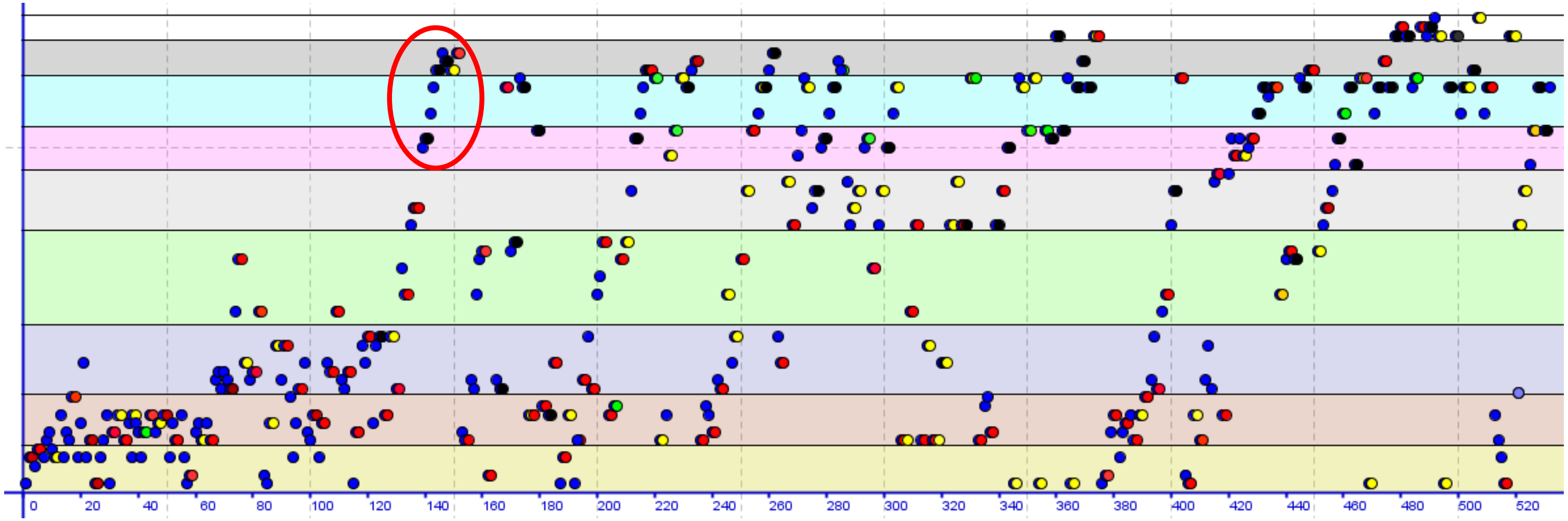
G_2'nin Düşme Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 380 geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 58). İlk 60 zihinsel geçiş genel olarak Problemin Analizi ve Sistematik Yapıyı Kurma basamaklarında olmuştur. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de süreçte her temel basamakta eş düzeyde bulunulmuştur. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (80, 120, 260, 370 gibi) olduğu görülmüştür. Yaklaşık olarak 35-40 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 69 planlama, 46 izleme, 45 değerlendirme ve 11 tahmin üst bilişsel eylemi gerçekleşmiştir.

Şekil 59. G_3'ün Düşme Problemi Çözüm Süreci



G_3'ün Düşme Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 270 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 59). İlk 40 zihinsel geçiş genel olarak Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de diğer gruplara göre daha az bu temel basamakta kalınmıştır. Çözüm son basamağa kadar gitse de tamamlanmamış, sürekli olarak geri dönüşler gerçekleşmiştir. Doğrulama basamağından itibaren sürece geri dönüşler (60, 80, 140, 180, 240 gibi) olmuştur. Yaklaşık olarak 15-20 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 49 planlama, 23 izleme, 22 değerlendirme ve 3 tahmin üst bilişsel eylemi gerçekleşmiştir.

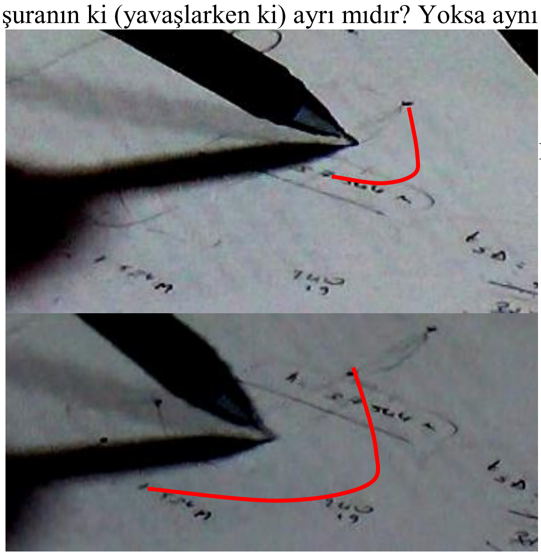
Şekil 60. G_4'ün Düşme Problemi Çözüm Süreci



G_4'ün Düşme Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 520 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 60). Ayrıca G_1'in çözümü en fazla zihinsel sürecin gerçekleştiği çözümdür. İlk 120 zihinsel geçiş genel olarak Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de süreçte her temel basamakta eş düzeylerde bulunulmuştur. Çözüm son basamağa kadar gitse de tamamlanmamış sürekli olarak geri dönüşler gerçekleşmiştir. Yani doğrulma basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (140, 180, 240, 260, 380, 500 gibi) olduğu görülmüştür. Yaklaşık olarak 40-45 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 84 planlama, 52 izleme, 48 değerlendirme ve 11 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

G_4 Düşme Problemi çözümünde Şekil 60’daki kırmızı renkteki sınırlı bölgede matematiksel modelleme sürecinin yorumlama, doğrulama ve revize etme basamaklarında bulunmuştur. G_4 öncelikle serbest düşme esnasında atlayıcının ilk 50 saniyede hızlandığını ve paraşütü açmadan önceki 209 saniye boyunca da hızının azaldığını düşünmüştür. G_4 atlayışı Felix’in hızlandığı, yavaşladığı ve paraşütle indiği bölümler olmak üzere üç farklı aşamada ele almış ve Felix’in hızlandığı bölümdeki ivmeyi 1,12 m/s^2 olarak bulmuştur. Bu matematiksel sonuç aynı zamanda gerçek yaşam değerlerini içerdiğinden gerçek yaşam sonucudur. Celal buldukları değerin hızlanan kısım için oldukça az olduğunu ifade etmiştir. Arkadaşları da bu görüşü destekler biçimde hatanın nedenine yönelik düşünceler sergilemişlerdir. Celal hatayı düzeltmek ve çözümü revize etmek için hatanın yerini bulmaya çalışmış ve atlayıcının yavaşlarken ve hızlanırken ki ivmesinin aynı olup olmadığını arkadaşlarına sormuştur. G_4 hatanın yeri ile ilgili farklı düşünceler sergilemiştir. Son olarak Dila çözümde yapılan hatanın işlemsel olduğunu ve zaman olarak 50 saniye alınması gerekirken tüm serbest düşme süresi olan 259 saniyenin çözümde kullanıldığını ifade etmiştir.

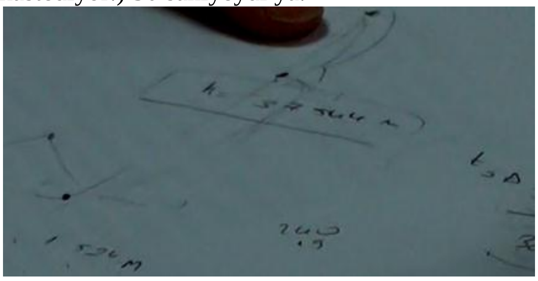
Ayla — 1,11 çıktı.
Celal — 1,12 hatta.
Ayla — Evet.
Dila — Ama burada çok az çıkmadı mı?
Celal — Acaba kilometreye çevirip de mi yapsaydık? Gerçi yer çekimi ivmesi metre bölü saniye kareydi 50 saniyede nasıl bu kadar az çıktı ki? Yoksa şuranın ki (hızlanırken ki) ivme ile şuranın ki (yavaşlarken ki) ayrı mıdır? Yoksa aynı mıdır?
Kağıt Alıntısı



Hızlandığı Bölüm

Yavaşladığı Bölüm

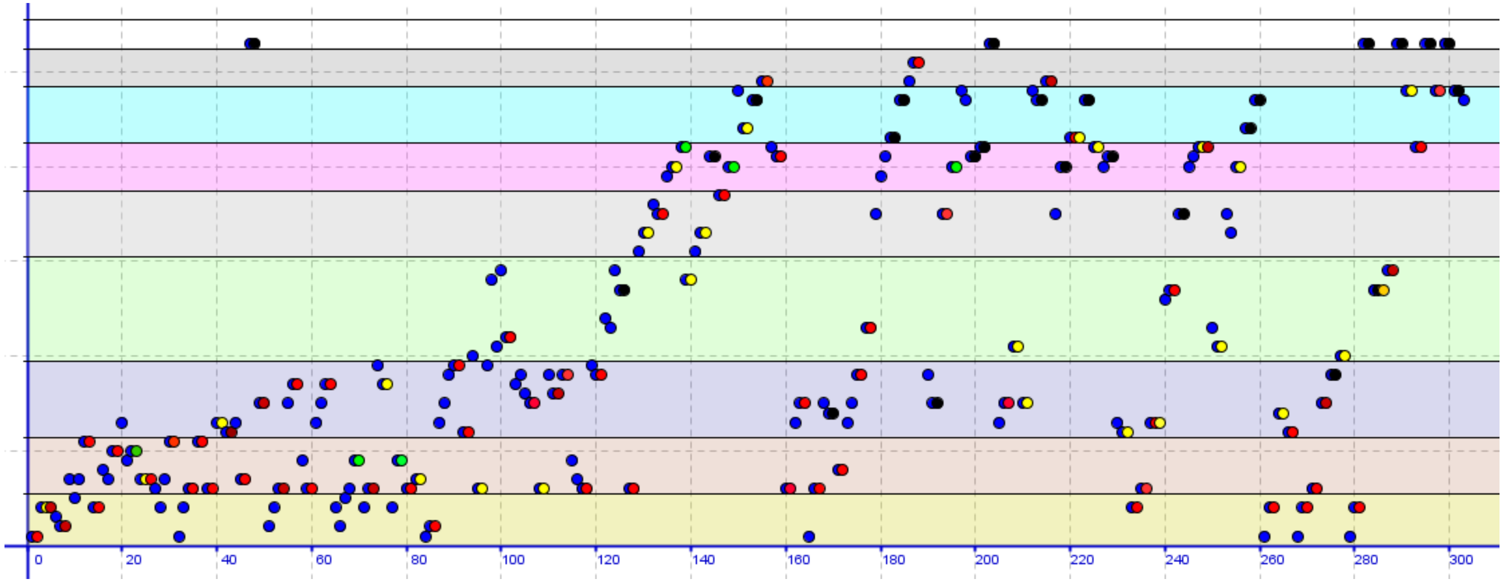
Dila — Serbest düşmedekini diyorsun değil mi? O zaman yer çekimini nasıl bulacağız ki?
Ayla — Sonuçta bu eğer boşlukta atılıyorsa burada sürtünme olmaz.
Celal — Ya aslında yok demeyelim de. Çok az desek belki daha doğru olur.
Dila — O zaman biz şuraya kadar hesaplamamız lazım.

Celal	İvme olmazsa da yere inemez.
Dila	Tabi. Aa ama biz burada tamamını aldık. Serbest düşmedeki tüm mesafeyi aldık. Yanlış yaptık.
Celal	Evet ya şuradakini bulmamız lazım (En yüksek hıza ulaşana kadar alınan yolu kastediyor.) 50 saniyeydi ya.
Kağıt Alıntısı	

G$_4$'ün çözümüyle ilgili araştırmacı gözlem notu ise şöyledir:

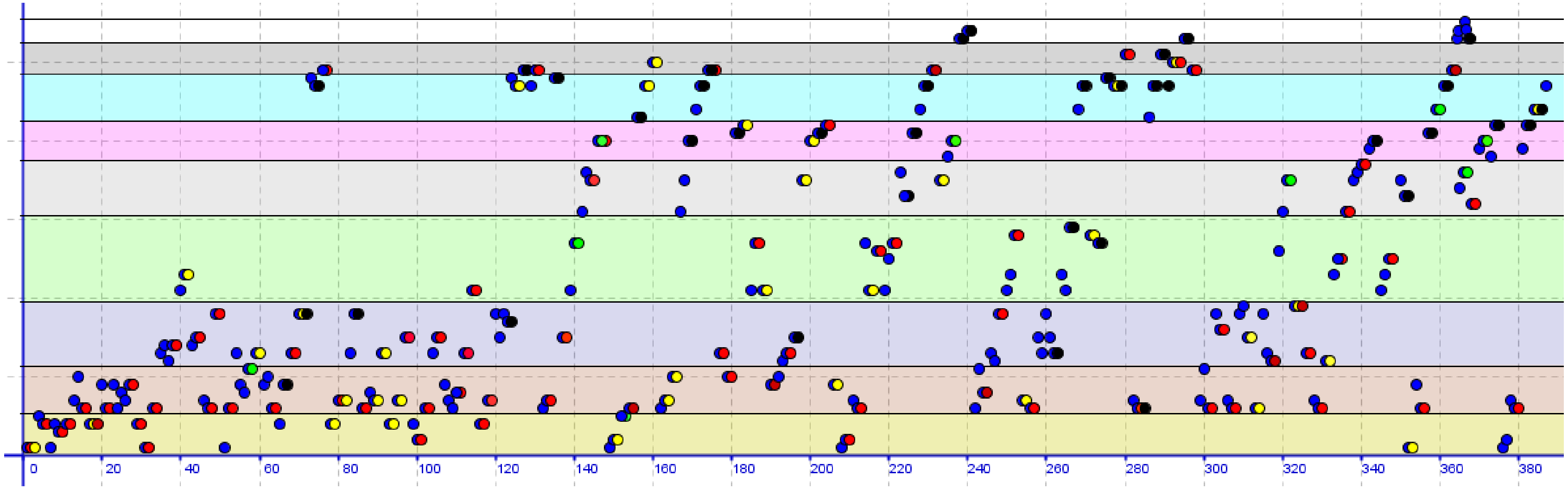
…Celal atlayıcının hızlandığı kısımdaki ivmesini az bulduğunu ifade etti. Bunun üzerine grup elemanları hatanın varlığını hissettiler. Hatanın nerede olabileceğine ilişkin görüş bildirdiler. Bu esnada Dila hatanın süreyi yanlış almalarından kaynaklandığını söyledi. Bunu üzerine çözümü tekrardan yaparak hatalarını düzelttiler… Gözlem Notu: G$_4$ Düşme Problemi)

Şekil 61. G_5'in Düşme Problemi Çözüm Süreci



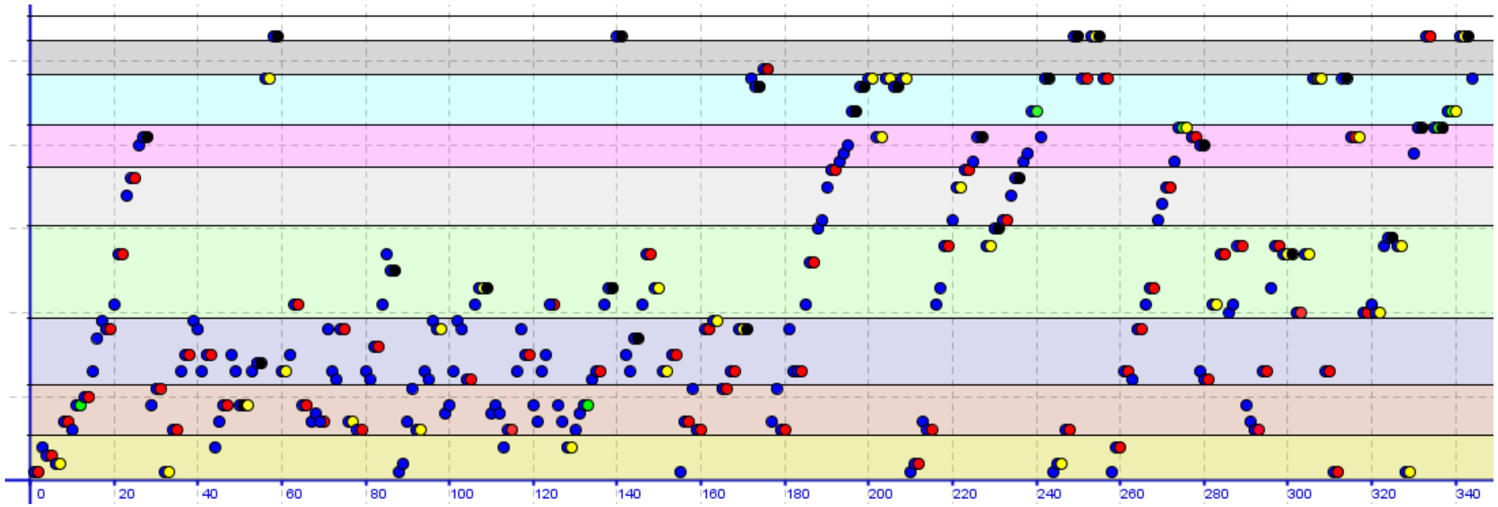
G_5'in Düşme Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 300 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 61). İlk 120 zihinsel geçiş genel olarak Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında olmuştur. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de süreçte her temel basamakta eş düzeylerde bulunulmuştur. İlk zihinsel geçişler sürecin ilk basamaklarında son zihinsel geçişler ise sürecin son basamaklarında olmuştur. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşler (100, 160,180, 200, 220, 260 gibi) gerçekleşmiştir. Yaklaşık olarak 25-30 kez temel basamaklar arasında geri dönüş olmuştur. Çözüm sürecinde 58 planlama, 26 izleme, 25 değerlendirme ve 6 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 62. G_6'nın Düşme Problemi Çözüm Süreci



G_6'nın Düşme Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 380 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 62). İlk 120 zihinsel geçiş genel olarak Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de süreçte her temel basamakta eş düzeylerde bulunulmuştur. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşler (120, 160, 200, 280, 360 gibi) olmuştur. Yaklaşık olarak 35-40 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 69 planlama, 37 izleme, 39 değerlendirme ve 8 tahmin üst bilişsel eylemi gerçekleşmiştir.

Şekil 63. G_7'nin Düşme Problemi Çözüm Süreci



G_7'nin Düşme Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 340 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 63). İlk 170 zihinsel geçiş genel olarak Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de süreçte her temel basamakta bulunulmuştur. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (30, 60, 140, 200, 240 gibi) olduğu görülmüştür. Yaklaşık olarak 25-30 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 62 planlama, 35 izleme, 26 değerlendirme ve 7 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

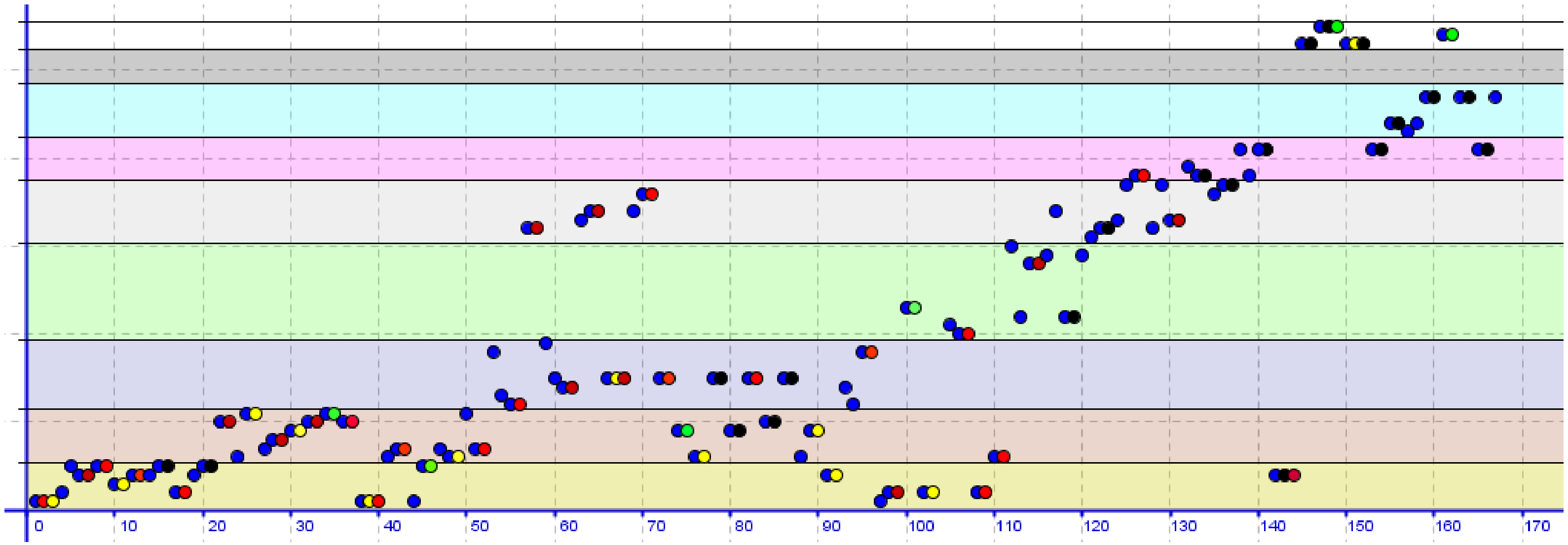
Tiyatro Problemi Çözümündeki Bilişsel ve Üst Bilişsel Süreçler Arasındaki Geçişler

Grupların en az zihinsel geçiş (ortalama 204 kez) gerçekleştirdikleri problem Tiyatro Problemi olmuştur. Gruplar Tiyatro Problemi çözümünde ortalama olarak Köprü Problemi'nden daha fazla (76 dakika) süre harcadıkları halde zihinsel geçişlerin sayısı Köprü Problemi'nden daha az olmuştur. Bu problemin çözümünde en fazla zihinsel geçiş (bilişsel ve üst bilişsel) ise G_5'in çözüm sürecinde (310 defa) yaşanmıştır. Zihinsel geçişlerin diğerlerine göre daha seyrek olmasında grupların bu problemde daha az güçlük yaşamaları etkili olmuştur.

Çözüm sürecinde en az zihinsel geçişin (100 kez) gerçekleştiği çözüm ise G_6'nın Tiyatro Problemi çözümüdür. G_1'in çözümü ise ikinci en az zihinsel geçişin (100 kez) yaşandığı çözüm olmuştur. Bu durum süreç boyunca çok az zihinsel geçişin olmasının, grubun çok kötü olduğu ya da gerçek yaşam durumunu açıklayıcı bir çözüm getirmediği anlamına gelmediğini göstermiştir. G_1 ideal bir çözüme ortalama performansa göre daha kolay bir şekilde ulaşmıştır.

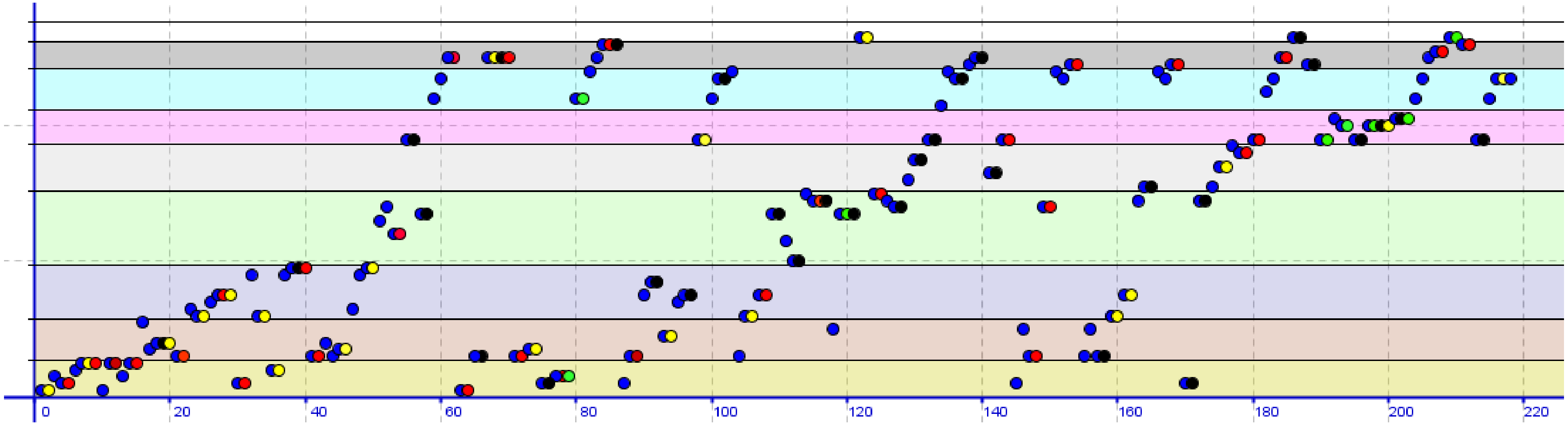
Tiyatro Problemi'nde üst bilişsel eylemler genel olarak her temel basamakta ortaya çıkmıştır. Düşme Problemi'ne nazaran üst bilişsel tahmin eylemlerine daha fazla rastlanılsa da; planlama, izleme ve değerlendirme üst bilişsel eylemlerine daha az rastlanılmıştır. Üst bilişsel eylemler hem alt basamaklar arasındaki geçişlerde hem de temel basamaklardaki geçişlerde ortaya çıkmışlardır. Temel basamaklar arasındaki düzensiz geçişlerde yine üst bilişsel eylemlerin önemli bir faktör olduğu görülmüştür.

Şekil 64. G_1'in Tiyatro Problemi Çözüm Süreci



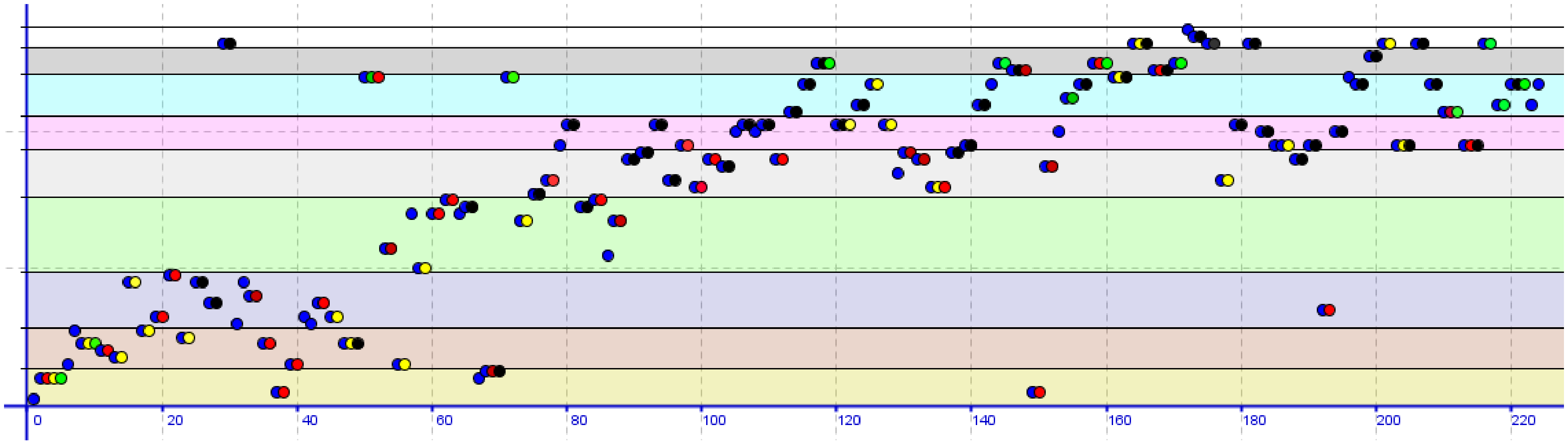
G_1'in Tiyatro Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 170 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 64). İlk 50 zihinsel geçiş Problemin Analizi ve Sistematik Yapıyı Kurma basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de 110'dan sonra bu basamağa bir daha geçilmemiştir. Bu durum, grubun çözümü sistematik yapıyı kurma basamağına dönmeye gerek duymayacakları bir çözüm gerçekleştirdiğini göstermiştir. Doğrulama basamağından itibaren sürece geri dönüşlerin (60, 150, 160 gibi) olduğu görülmüştür. Yaklaşık olarak 15-20 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 29 planlama, 13 izleme, 19 değerlendirme ve 6 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 65. G_2'nin Tiyatro Problemi Çözüm Süreci



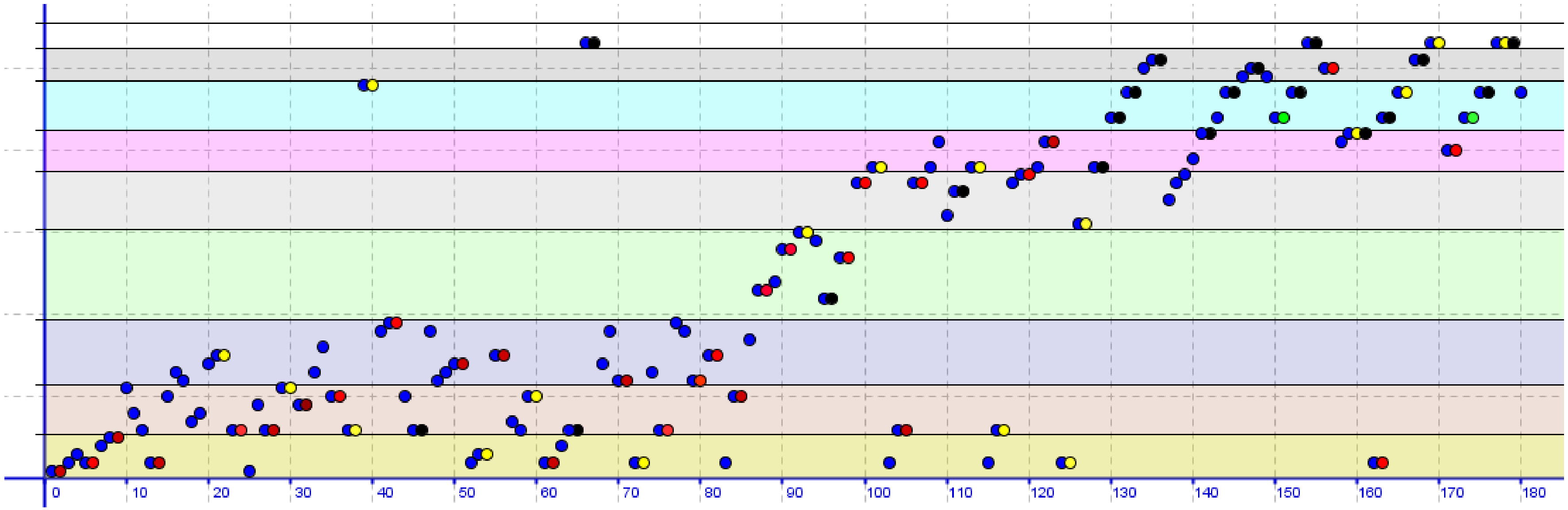
G_2'nin Tiyatro Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 220 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 65). İlk 50 zihinsel geçiş genel olarak Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında olmuştur. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de 160'dan sonra bu basamağa bir daha geçilmemiştir. Bu durum, grubun çözümde Sistematik Yapıyı Kurma basamağına dönmeye gerek duymayacakları bir çözüm gerçekleştirdiğini göstermiştir. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşler (60, 80, 130, 180 gibi) olmuştur. Yaklaşık olarak 20-25 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 31 planlama, 21 izleme, 30 değerlendirme ve 8 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 66. G_3'ün Tiyatro Problemi Çözüm Süreci



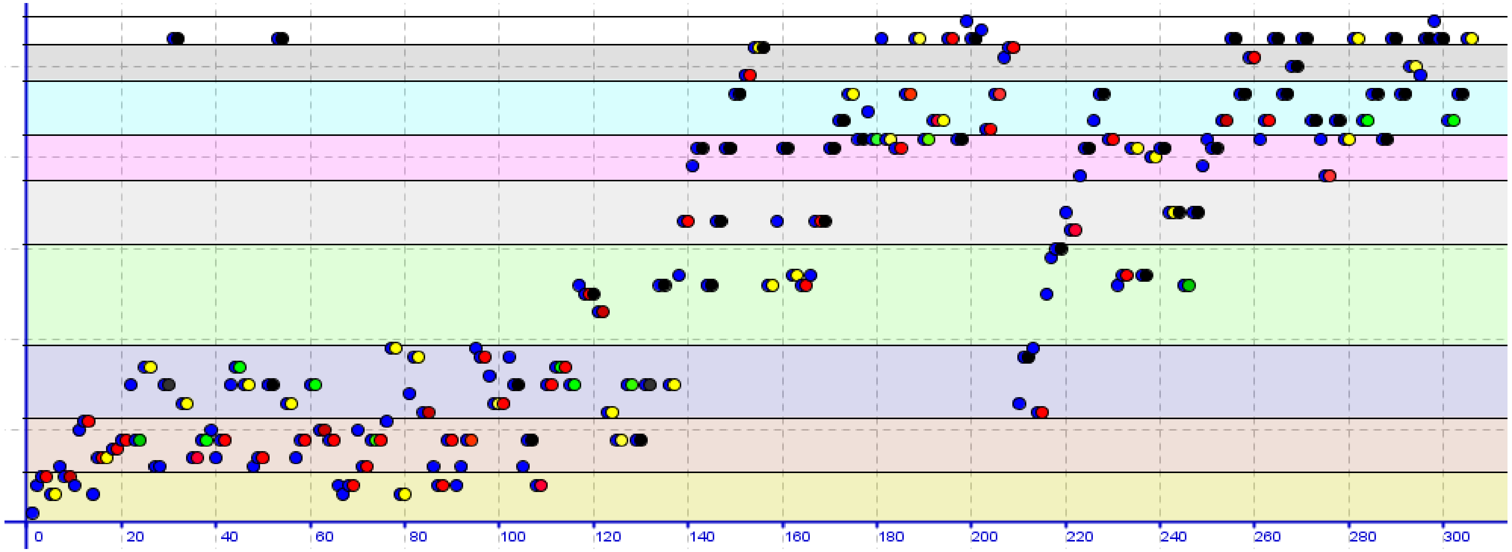
G_3'ün Tiyatro Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 230 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 66). İlk 55 zihinsel geçiş Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de 70'dan sonra bu basamağa bir daha geçilmemiştir. Aynı zamanda G_3 80'den sonra Matematikselleştirme basamağına ve daha önceki basamaklara geri dönmemiştir. Bu durumun oluşmasında grubun YMM'lere çabuk bir şekilde ulaşmaları etkili olmuştur. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (120, 150, 170 gibi) matematiksel analiz ve yorumlama basamaklarına olduğu görülmüştür. Yaklaşık olarak 20-25 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 32 planlama, 22 izleme, 43 değerlendirme ve 13 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 67. G_4'ün Tiyatro Problemi Çözüm Süreci



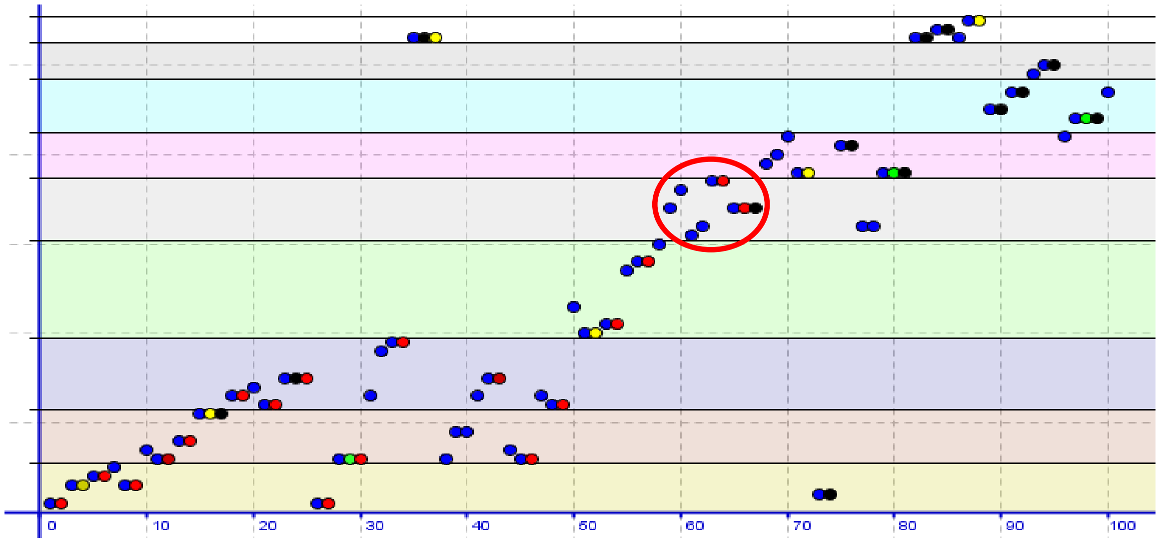
G_4'ün Tiyatro Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 180 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 6). İlk 85 zihinsel geçiş Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 90'dan sonra Sistematik Yapıyı Kurma'ya iki kez ve kısa süreli olarak geçilmiştir. Aynı zamanda G_4 100'den sonra Üst Matematikselleştirme basamağına geri dönmemiştir. Bu durumun oluşmasında grubun AMM'ye kolayca ulaşmaları ve ilk seferde uygun bir modele ulaşabilmeleri etkili olmuştur. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (130, 150, 170 gibi) olduğu görülmüştür. Yaklaşık olarak 20-25 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 27 planlama, 16 izleme, 19 değerlendirme ve 2 tahmin üst bilişsel eylemi gerçekleşmiştir. Üst bilişsel tahmin eylemleri Doğrulama basamağında ortaya çıkmıştır.

Şekil 68. G_5'in Tiyatro Problemi Çözüm Süreci



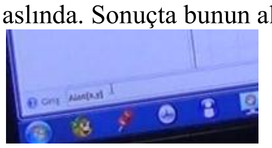
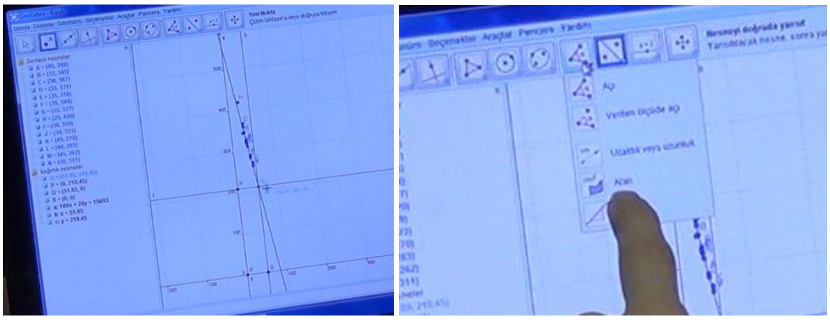
G_5'in Tiyatro Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 310 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 68). İlk 110 zihinsel geçiş genel olarak Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 140'dan sonra Sistematik Yapıyı Kurma' ya geçilmemiştir. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (150, 180, 200, 220 gibi) olduğu görülmüştür. Yaklaşık olarak 25-30 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 44 planlama, 24 izleme, 47 değerlendirme ve 13 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 69. G_6'nın Tiyatro Problemi Çözüm Süreci



G_6'nın Tiyatro Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 100 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 69). İlk 50 zihinsel geçiş Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında olmuştur. Çözüm sürecinde 50. zihinsel geçişten sonra Üst Matematikselleştirme ve daha sonraki basamaklarda bulunulmuştur. Doğrulama basamağından itibaren sürece geri dönüş nerdeyse hiç olmamıştır (sadece son kısım 95). Geri dönüşlerin nerdeyse hiç olmadığı süreçte yaklaşık olarak 5-10 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 18 planlama, 6 izleme, 13 değerlendirme ve 3 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

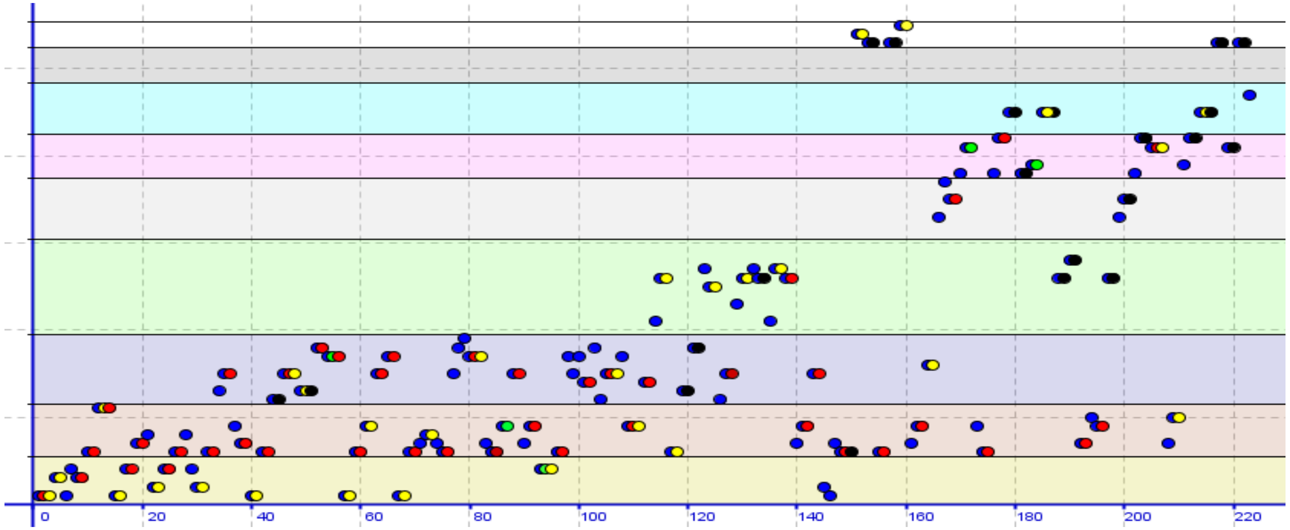
G_6 Tiyatro Problemi çözümünde Şekil 69’da kırmızı renkli sınırlı bölgede matematiksel analiz basamağında bulunmuştur. G_6 biletli sayısı ve bilet fiyatı arasındaki ilişkiyi veren yardımcı matematiksel modelin GeoGebra’da grafiksel gösteriminden yararlanmıştır. Ayrıca G_6 kazancın x.y-5000 (TL cinsinden gider) olduğu düşüncesiyle grafiğin altında kalan alandan (x.y/2) yararlanmıştır. Bu doğrultuda G_6 biletli sayısı ve bilet fiyatı arasındaki ilişkiyi veren doğru üzerinde değişken nokta alarak noktanın değişimiyle altında kalan alanın değişimini GeoGebra’da analiz etmiştir. Yani G_6, YMMnin grafiksel gösterimi ve YMM ile AMM arasındaki ilişkiden yararlanarak bir simülasyon oluşturmuştur. G_6 en az sayıda zihinsel geçişte bulunsa da seçtikleri strateji etkili bir şekilde sonuçlara ve çözüme ulaşmalarını sağlamıştır. Bir başka deyişle, G_6 daha az zihinsel engelle karşılaşmıştır. Veriler gerçek değerleri içerdiğinden matematiksel sonuçlar elde edilmiş ve Şekil 69’daki sınırlı bölgenin sonrasında bu değerler gerçek yaşam sonuçları olarak yorumlanmıştır.

Burcu	Dur bir dakika bak. İlkini bir daha açalım bir. Biz bunun altında kalan alandan buluruz aslında. Sonuçta bunun altında kalan x çarpı y oluyor ya.
Video Alıntısı	 (Giriş bölmesine Alan[x,y] ifadesi yazıldı)
Yavuz	Hmm. Evet çok mantıklı onu yapabiliriz. Doğru üzerinde nokta seç bak. İn aşağıya şimdi x eksenini görelim. Bir dik inelim buna.
Burcu	Alan grafiğinden yapayım dedim ben.
Yavuz	Tamam işte bak. Dik doğrular çizelim. Bir alayım mı?
Burcu	Tamam.
Yavuz	Şimdi alan neredeydi burada?
Burcu	Şuradaydı. Bak.
Yavuz	Hıhı. Tamam. Verdi mi?
Video Alıntısı	

G_2’nin çözümüyle ilgili araştırmacı gözlem notu şöyledir:

> …YMMnin GeoGebra’da grafiksel gösterimine ulaştılar… Burcu, GeoGebra’daki matematiksel modelin altında kalan alanı hesaplayarak elde edilen karın maksimum olduğu ve nasıl değiştiği ile ilgili verilere ulaşabileceklerini ifade etti. Yavuz da bu düşünceyi destekledi ve GeoGebra bilgileri yardımıyla simülasyonu oluşturdular. Farklı değerleri inceleyerek farklı matematiksel sonuçlara ve çözüme ulaştılar…. Gözlem Notu: G_2 Tiyatro Problemi)

Şekil 70. G_7'nin Tiyatro Problemi Çözüm Süreci



G_7'nin Tiyatro Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 220 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 70). İlk 110 zihinsel geçiş, Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Temel basamaklar arasında sürekli geçişler görülmüş, ancak genel çözüm stratejisini, varsayımları düzenlemek ve yardımcı matematiksel modelleri oluşturmak amacıyla en çok Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçiş yapılmıştır. Doğrulama basamağına üç kez geçilmiş (180-190-210) İstanbul için buldukları kazancın Ankara'dan daha az olmasının çözümde hata olduğunu düşündürmesi, tablodaki verilerle buldukları çözümü uzlaştıramamaları ve çözümde istenilenlerin yapılıp yapılmadığını kontrol etmek istemeleri sürece geri dönmelerine neden olmuştur. Geri dönüşlerin çok sık olduğu süreçte yaklaşık olarak 20-25 kez basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 43 planlama, 30 izleme, 21 değerlendirme ve 5 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

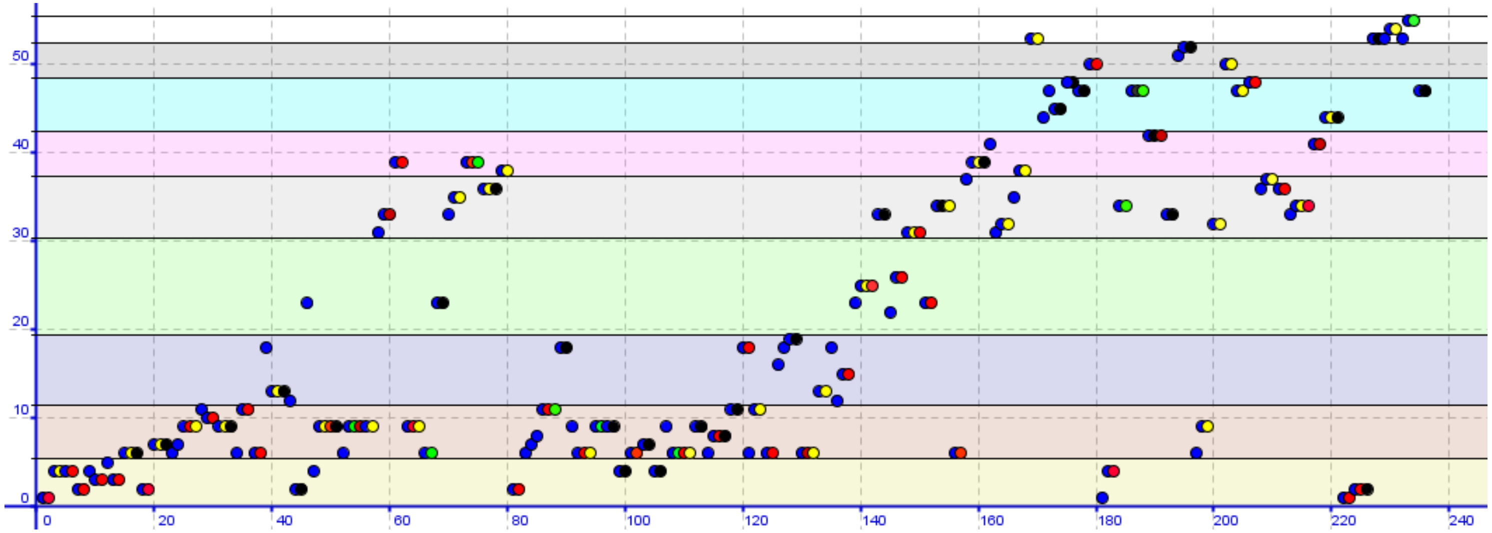
Köprü Problemi Çözümündeki Bilişsel ve Üst Bilişsel Süreçler Arasındaki Geçişler

Köprü Problemi'nde gruplar ortalama 248 zihinsel geçiş gerçekleştirmişlerdir. Aynı zamanda gruplar Köprü Problemi çözümünde ortalama olarak Tiyatro Problemi'nden daha az süreye (57 dakika) ihtiyaç duydukları halde zihinsel geçişlerin sayısı Köprü Problemi'nde daha fazla olmuştur. Bu problemin çözümünde en fazla zihinsel geçiş (bilişsel ve üst bilişsel) ise G_5'in çözüm sürecinde (310 defa) yaşanmıştır. Zihinsel geçişlerin diğerlerine göre daha seyrek olmasında grupların bu problemde daha az güçlük yaşamaları etkili olmuştur.

Çözüm sürecinde Köprü Problemi'nde en az zihinsel geçişin (150 kez) gerçekleştiği çözüm G_2'nin çözümüdür. G_2 süreç boyunca çok az zihinsel geçiş gerçekleştirmesine rağmen çözümünde ortalamanın üstünde bir başarı sergilemiştir.

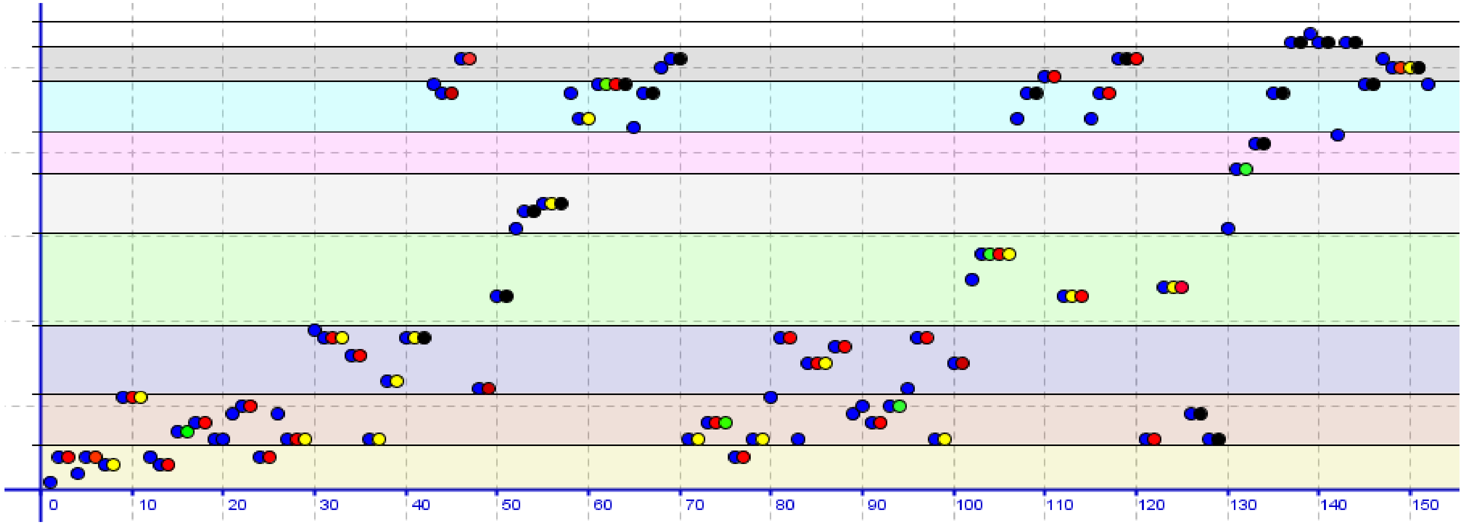
Köprü Problemi'nde ortaya çıkan üst bilişsel eylemlere bakıldığında genel olarak her temel basamakta ortaya çıkmışlardır. Bununla birlikte hem alt basamaklar arasındaki geçişlerde hem de temel basamaklardaki geçişlerde fark edilmişlerdir.. Temel basamaklar arasındaki çok düzensiz geçişlerde yine üst bilişsel eylemlerin önemli bir faktör olduğu görülmüştür.

Şekil 71. G_1'in Köprü Problemi Çözüm Süreci



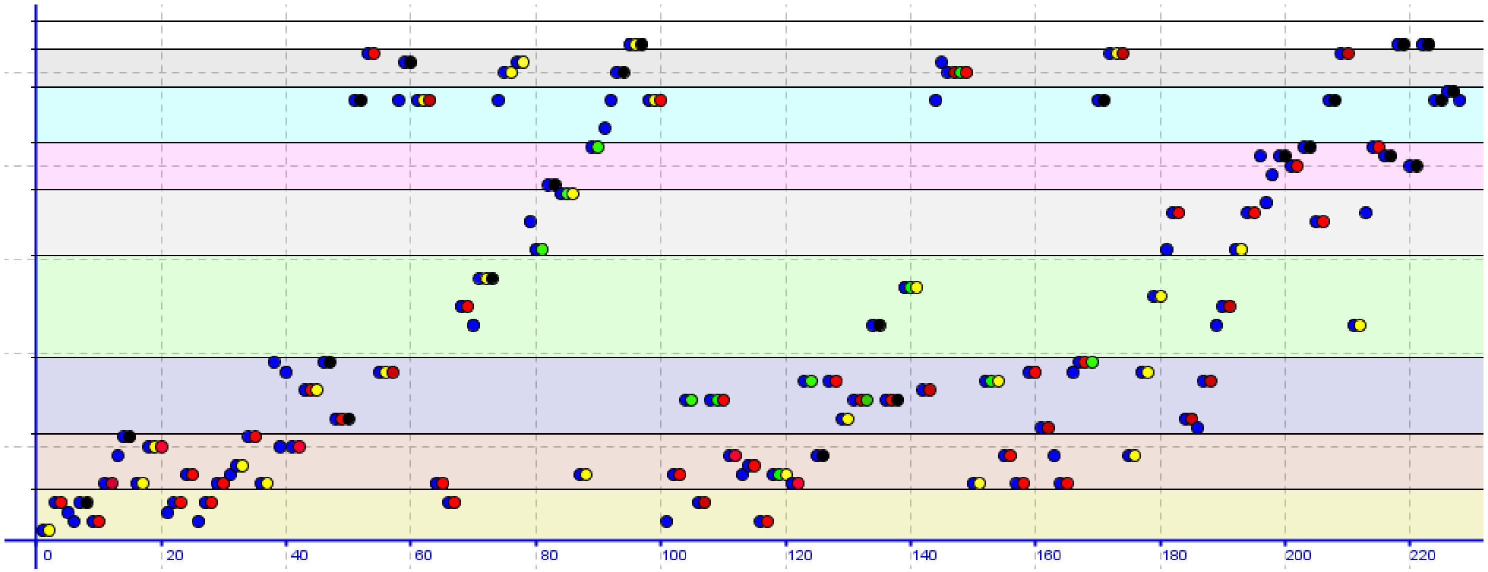
G_1'in Köprü Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 240 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 71). İlk 55 zihinsel geçiş genellikle Problemin Analizi ve Sistematik Yapıyı Kurma basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de 140'dan sonra bu basamağa geçiş oldukça seyrek (155 ve 195) olmuştur. G_1 60-70 arasında hızlı bir şekilde yorumlama basamağına geçmiştir. Bu durumun oluşmasında G_1'in YMM'lere çabuk bir şekilde ulaşması ve onlardan gerçek yaşam sonuçları (gerçek yaşam çözümü değil) elde etmesi etkili olmuştur. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (170, 180, 210 gibi) olduğu görülmüştür. Yaklaşık olarak 20-25 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 40 planlama, 32 izleme, 32 değerlendirme ve 9 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 72. G_2'nin Köprü Problemi Çözüm Süreci



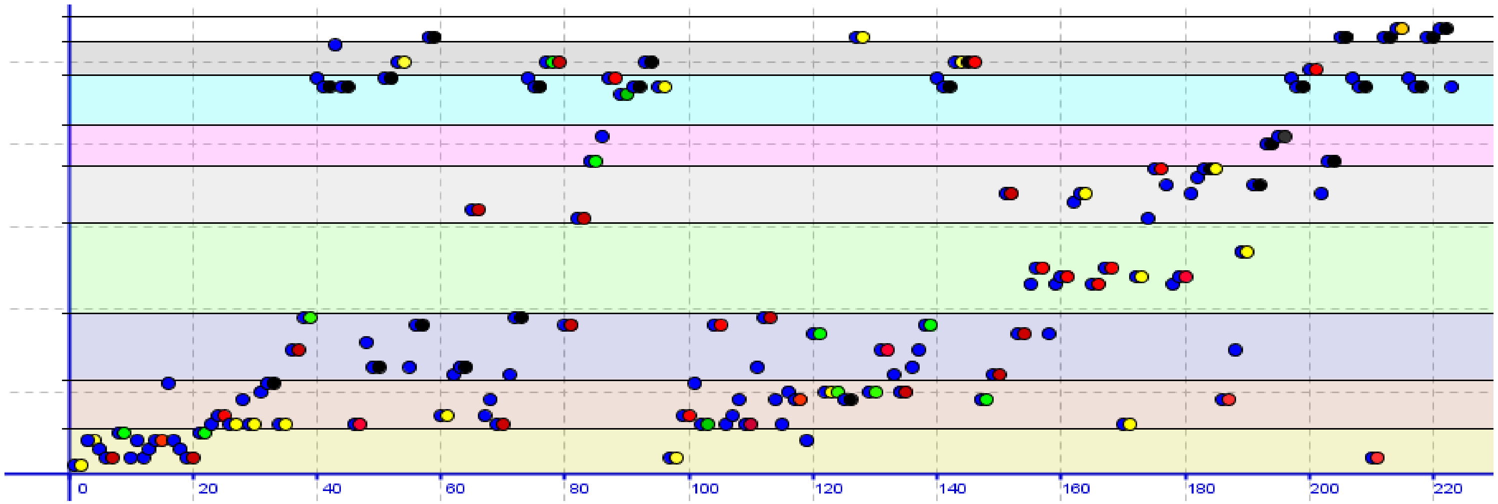
G_2'nin Köprü Problemi' ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 155 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 72). Köprü Problemi'nde en az geçişin gerçekleştiği çözümdür. İlk 45 zihinsel geçiş genel olarak Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilmiş ve G_2 bu basamağa geri dönüşler gerçekleştirmiştir. Grup; 45'de ve 60'da hızlı bir şekilde doğrulama basamağına geçmiştir. Bu durumun oluşmasında G_2'nin YMM'lere çabuk bir şekilde ulaşması ve onların doğruluğunu incelemesi etkili olmuştur. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (45, 60, 110, 120 gibi) olmuştur. Yaklaşık olarak 10-15 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 30 planlama, 17 izleme, 18 değerlendirme ve 6 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 73. G_3'ün Köprü Problemi Çözüm Süreci



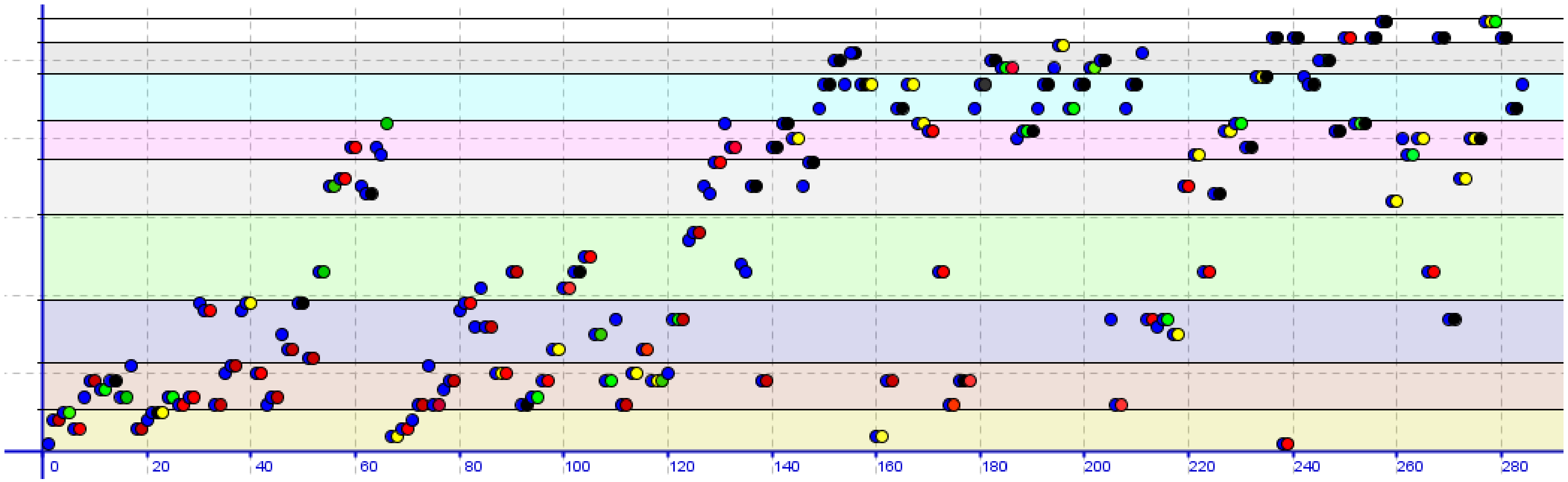
G_3'ün Köprü Problemi'ne ilişin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 230 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 73). İlk 60 zihinsel geçiş genellikle Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Dikkatli bakıldığında 100'den sonra süreç tekrar başa dönerek ilerlemiştir. Bu durumun oluşmasında öğrencilerin yaptıkları çözümü tekrardan ele alması etkili olmuştur. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (60, 100, 170, 200 gibi) olduğu görülmüştür. Yaklaşık olarak 15-20 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 47 planlama, 26 izleme, 23 değerlendirme ve 12 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 74. G_4'ün Köprü Problemi Çözüm Süreci



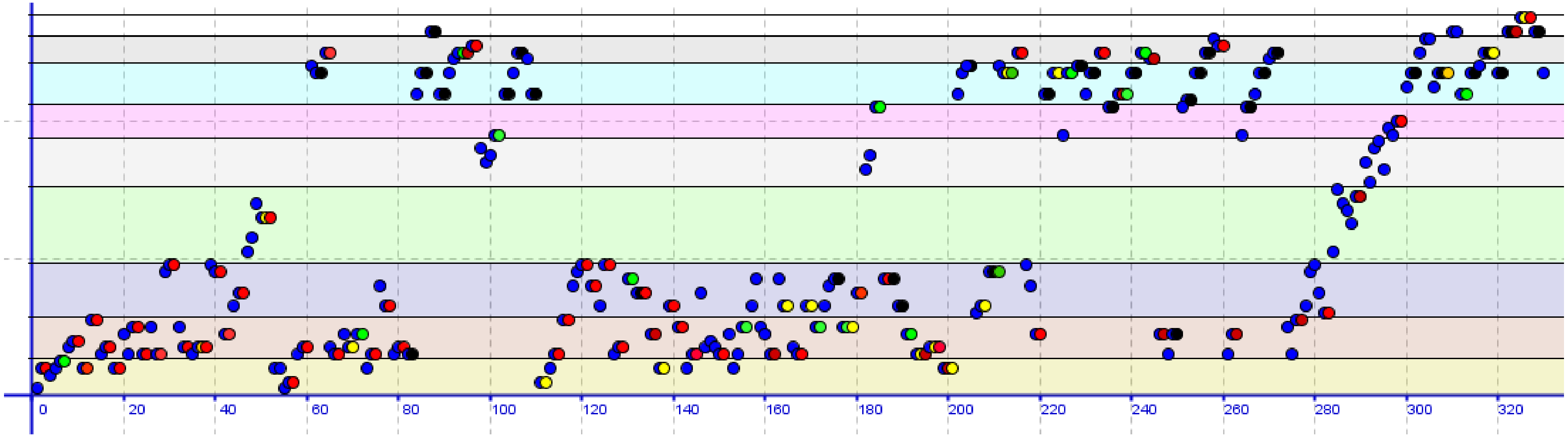
G_4'ün Köprü Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 220 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 74). İlk 40 zihinsel geçiş Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geri dönüşler gerçekleşmiştir. G_4 40, 70, 90 140'da doğrulama basamağına geçmiştir. Bu durumun oluşmasında G_4'ün YMM'lere çabuk bir şekilde ulaşmaları ve onların doğruluğunu incelemesi etkili olmuştur. G_4 AMM'ye 155-190 arasında ulaşmıştır. Doğrulama basamağından itibaren sık sık sürece geri dönüşlerin (45, 60, 110, 120 gibi) olduğu görülmüştür. Yaklaşık olarak 20-25 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 32 planlama, 18 izleme, 25 değerlendirme ve 12 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 75. G_5'in Köprü Problemi Çözüm Süreci



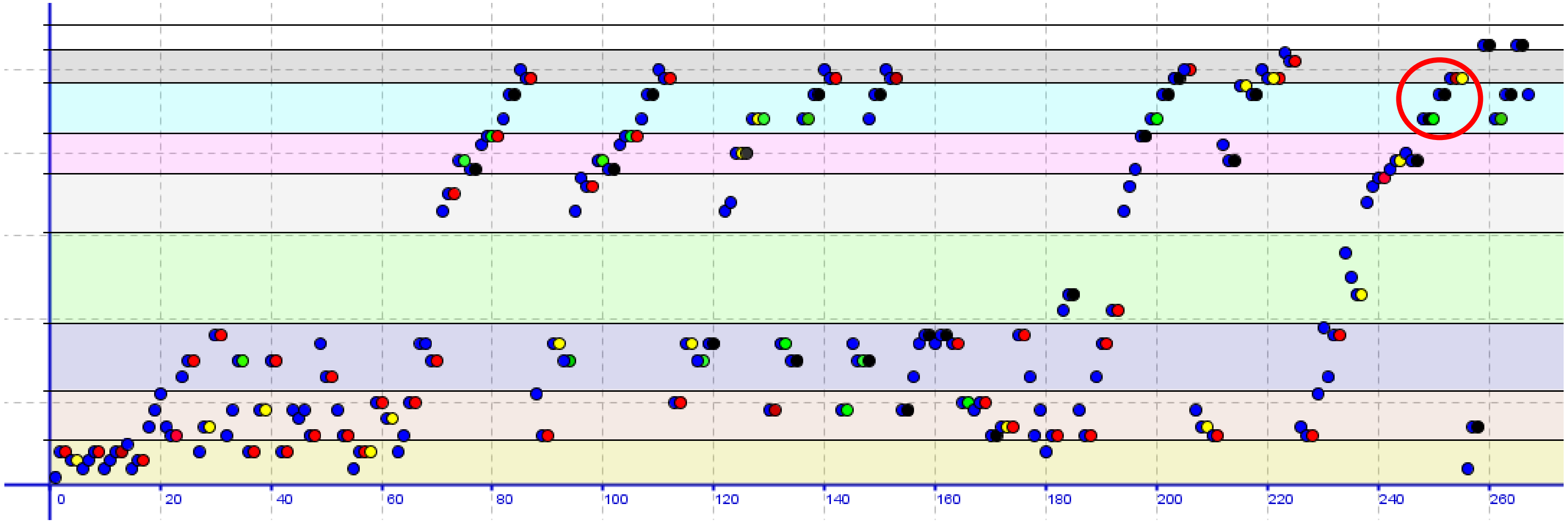
G_5'in Köprü Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 290 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 75). İlk 50 zihinsel geçiş Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilse de bu basamağa geri dönüş 120'den sonra seyrekleşmiştir. G_5 150'den sonra genellikle yorumlama, doğrulama ve revize etme basamaklarında bulunmuştur. Doğrulama basamağına 150'den sonra geçiş başlamış ve yoğun olarak bu basamakta bulunulmuştur. Yaklaşık olarak 20-25 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 45 planlama, 23 izleme, 38 değerlendirme ve 21 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır. En fazla tahmin eylemi bu çözümde ortaya çıkmıştır. Bunun nedenini Köprü Problemi'nin günlük yaşam daha yakın yapısı ve G_5'in tahminlerinden süreçte sık sık yararlanmaya çalışmasıdır.

Şekil 76. G_6'nın Köprü Problemi Çözüm Süreci



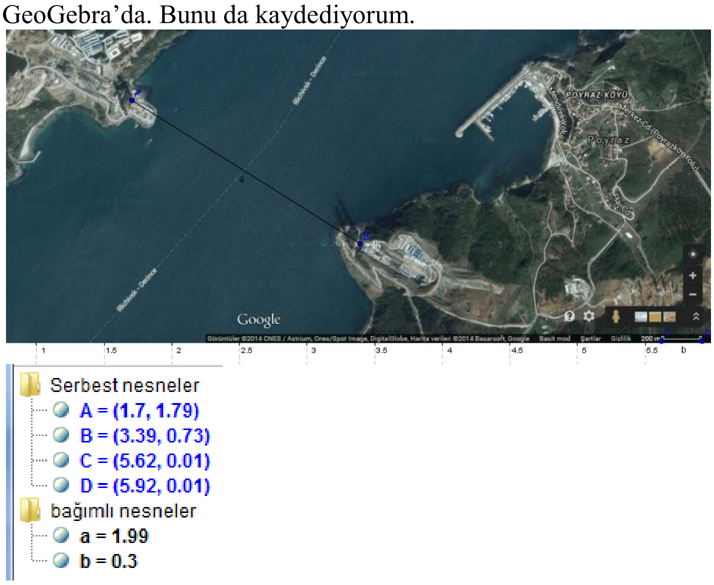
G_6'nın Köprü Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 330 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 76). İlk 45 zihinsel geçiş ve 110-180 arasındaki geçişler genellikle Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilmiştir. G_6 150'den sonra genellikle yorumlama, doğrulama ve revize etme basamaklarında bulunmuştur. Bu durumun oluşmasında grubun istedikleri matematiksel çözüme ve sonuçlara kısa sürede ulaşmaları ve sonrasında da bu üç basamakta farklı yaklaşımlar sergilemeleri olmuştur. Doğrulama basamağına 200-260 ve 300-330'da geçiş olmuş ve yoğun olarak bu basamakta bulunulmuştur. Her temel basamakta geçişler olmuş ve üst bilişsel eylemlerden her biri süreç içerisinde farklı temel basamaklarda ortaya çıkmıştır. Yaklaşık olarak 30-35 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 57 planlama, 21 izleme, 32 değerlendirme ve 16 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Şekil 77. G_7'nin Köprü Problemi Çözüm Süreci



G_7'nin Köprü Problemi'ne ilişkin çözüm sürecinde bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasında yaklaşık 270 kez geçiş gerçekleşmiştir (bkz. Şekil 77). İlk 70 zihinsel geçiş Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma ve Matematikselleştirme basamaklarında gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde sık sık Sistematik Yapıyı Kurma basamağına geçilmiş ve bu basamakta çok fazla bulunulmuştur. Bu durumun oluşmasında grubun çözüm stratejilerini ve üst düzey varsayımlarını tam oturtamamaları ve bunu ileriki basamakta fark ederek geri dönüp stratejide ve varsayımlarında değişiklik yapmaları neden olmuştur. G_7 80, 100, 130, 200, 220 ve 260'larda genellikle yorumlama, doğrulama ve revize etme basamaklarında bulunmuştur. Yaklaşık olarak 25-30 kez temel basamaklar arasında geri dönüş gerçekleşmiştir. Çözüm sürecinde 44 planlama, 17 izleme, 27 değerlendirme ve 17 tahmin üst bilişsel eylemiyle karşılaşılmıştır.

Köprü Problemi çözümünde G_7 Şekil 77'de kırmızı renkteki sınırlı bölgede doğrulama ve revize etme basamaklarında bulunmuştur. Bu sırada G_7 GeoGebra yardımıyla köprü uzunluğu için modellerinden ulaştıkları 1360 metre değerini daha önceden tahminlerinden yararlanarak buldukları 1500 metre değeriyle karşılaştırmıştır. G_7 1500 metreyi ölçekli fotoğraf ve bir A4 kağıdının genişliğinden hareketle yaklaşık olarak bulmuştur. Yılmaz fotoğraftaki köprünün ayaklarının gölgesini ifade ederek çözümde bunlarla ilgili başka ne yapılabileceğini arkadaşlarına sormuştur. Çözümün devamında ise tekrar problemi okudukları, yaptıklarını gözden geçirerek düşüncelerini değerlendirdikleri ve çözüm raporunu yazarak çözümlerini tamamladıkları görülmüştür.

Yılmaz	Çarpı 200 mü diyeceğiz? 1360 metre çıktı. Tamam işte. Nerdeyse aynı.
Ezgin	Girdisiyle çıktısıyla 1500 gayet iyi bence.
Yılmaz	Şunlarda gölgeleri bak. Başka ne yapılabilir ki burada? Uzunluğu bulduk GeoGebra'da. Bunu da kaydediyorum.
GeoGebra Alıntısı	

G_7'nin Köprü Problemi çözüm sürecinde gözlem notu şöyledir:

> …G_3 köprünün uzunluğunu GeoGebra'dan ve modellerinden yararlanarak 1360 metre buldu. İlk başlarda hızlı bir şekilde kağıt katlayarak ve tahmin yardımıyla uzunluğun yaklaşık 1500 metre olduğu ifade etiler. Teorik ve deneysel değerleri karşılaştırdılar ve çözümün doğru olduğu kanısına vardılar. Ardından Yılmaz fotoğraftaki gölgeleri ifade ederek çözümde farklı ne yapabileceklerini arkadaşlarına sordu... Gözlem Notu: G_7 Köprü Problemi)

BÖLÜM VI

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Eğitim programlarının temel amaçlarından biri gerçek yaşam problemlerini çözebilen, düşüncelerini düzenleyebilen ve farklı durumlarda kullanabilen insanlar yetiştirmektir. Bu amaç özelde ise öğrenme ortamlarında bilişsel ve üst bilişsel eylemleri destekleyen zengin öğrenme ortamlarının tasarlanmasını gerektirmektedir. Doktora çalışması günümüz şartlarında öğretimde kullanılabilecek araçların ve yöntemlerin nasıl etkili organize edilebileceğine ve hangi becerilerin geliştirilebileceğine yönelik olup teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel yapıların açıklandığı alandaki önemli çalışmalardan biri olarak görülebilir.

Araştırma kapsamında kullanılan üç matematiksel modelleme problemi (Tiyatro, Köprü, Düşme Problemi) modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel yapıların ortaya çıkarılması açısından oldukça zengin bir veri sağlamıştır. Kuram oluşturma veri analizi doğrultusunda matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan bilişsel ve üst bilişsel eylemler temel bileşenler, temel basamaklar ve temel basamakları şekillendiren alt basamaklar yardımıyla açıklanmıştır.

Modelleme sürecini açıklayan genel süreç modelinde bilişsel eylemler dokuz temel basamak ve dokuz temel bileşen altında şekillenmiştir. Modelleme sürecindeki temel basamaklar Problemin Analizi, Sistematik Yapıyı Kurma, Matematikselleştirme, Üst Matematikselleştirme, Matematiksel Analiz, Yorumlama, Doğrulama, Revize Etme ve Raporlaştırma olarak belirlenmiştir. Problemin Analizi beş, Sistematik Yapıyı Kurma altı, Matematikselleştirme sekiz, Üst Matematikselleştirme on bir, Matematiksel Analiz yedi, Yorumlama beş, Doğrulama altı, Revize Etme dört ve Raporlaştırma ise üç alt eylem altında şekillenmiş ve modelleme süreci toplamda elli beş alt basamak altında açıklanmıştır. Modelleme sürecinin temel bileşenleri karmaşık gerçek yaşam durumu, gerçek yaşam problem durumu, gerçek yaşam problem durumunun modeli, yardımcı matematiksel modeller, ana matematiksel model, matematiksel çözüm, gerçek yaşam çözümü, çözüm kararı ve çözüm raporu olarak belirlenmiştir. Uluslararası alan yazındaki süreç analizi çalışmalarına bakıldığında Borromeo Ferri (2006) ve Blum & Leiβ'in (2007) süreci sekiz bileşen ve yedi basamak ile açıklanmaktadır. Galbraith & Stillman'ın (2006) altı temel bileşeni ve beş temel basamağı ele alarak otuz bir alt basamak ile ve Hıdıroğlu'nun (2012) sekiz bileşen ve yedi basamağı ele alarak kırk yedi alt basamak ile modelleme sürecini açıkladığı görülmektedir. Bu yönüyle doktora tez çalışmasının alan yazına süreci açıklayan zengin bir bakış açısı sağlayacağı düşünülmektedir.

Doktora tez çalışmasında ortaya konulan süreç modelinin temel yapısı dikkate alındığında birçok araştırmadan önemli farklılıkların bulunduğu görülmektedir. Bunun yanında Galbraith & Stillman (2006), Stillman, Galbraith, Brown & Edward (2007) ve Hıdıroğlu'nun (2012) modelleme sürecine ilişkin oluşturdukları süreç modelleriyle benzerlikler de göze çarpmaktadır. Hıdıroğlu'nun (2012) süreç modeline göre bu çalışmada sürece ilişkin daha ayrıntılı bir açıklama getirilmiş ve üst bilişsel yapılar da ortaya koyulmuştur. Ayrıca Hıdıroğlu'nun (2012) süreç modeli geliştirilerek süreç sonunda iki temel basamak (revize etme, raporlaştırma) ve 1 temel bileşen (çözüm kararı) daha ortaya çıkarılmıştır. Çalışmada ortaya konulan süreç modelinin diğer çalışmalara göre alt basamaklara ilişkin daha ayrıntılı açıklamalar getirilmiş ve süreçteki üst bilişsel yapılara ilişkin de kategorilere ulaşılmıştır. Galbraith & Stillman (2006) ve Stillman, Galbraith, Brown & Edward'ın (2007) çalışmalarından farklı olarak bu çalışmada süreç modeline gerçek yaşam durumunun modeli, yardımcı matematiksel model bileşenleri eklenmiştir.

Lesh, Surber & Zawojewski (1983), Müller & Wittmann (1984), Schoenfeld (1985) ve Blum ve Niss (1989), Pólya'nın (1945) ortaya koyduğu problem çözme evrelerinin doğrusal olmadığını karmaşık ve çok döngülü bir süreci ortaya çıkardığını vurgulamaktadır.

Pedley (2005) matematiksel modelleme sürecindeki döngüsel yapının çözüm sürecindeki gerekli modelleme eylemlerinin keşfedilmesinde ve sürecin özünün ortaya çıkarılmasında büyük önem taşıdığını vurgulamaktadır.

Sürecin ilk aşamasında karmaşık gerçek yaşam durumundan gerçek yaşam problem durumuna geçiş gerçekleşerek problem gerçek yaşam bağlamında anlamlandırılmış ve gerçek yaşam durumundaki karmaşıklık ortadan kaldırılmıştır. Müller & Wittmann (1984), Berry & Davies (1996) ve Stillman, Galbraith, Brown & Edward'ın (2007) ifade ettiği gibi gerçek yaşam durumu matematiksel modelleme sürecinin ilk temel bileşeni olmuştur. Stillman, Galbraith, Brown & Edward'a (2007) paralel olarak sürecin ikinci temel bileşeni gerçek yaşam problem durumu olarak ortaya çıkmıştır.

Analiz bir durumu, olayı veya sistemi onu oluşturan alt dizgelere ayırarak, bunlar arasındaki işlevsel ilişkileri araştırarak inceleme, bu yolla durumu, olayı veya sistemi tanımaya çalışma yöntemidir (TDK, 2014). Problemin ilk aşamasında karmaşık gerçek yaşam durumu anlamlandırılırken problem ifadesini ayrıntılı olarak analiz edilmiştir. Bu doğrultuda modelleme sürecinin ilk temel basamağı Problemin Analizi olarak belirlenmiştir. Problemin Analizi temel basamağında sergilenen zihinsel eylemler problemi okuma, problemi basit ifadelerle açıklama veya sadeleştirme, problemdeki stratejik etkenleri düşünme, problemdeki verileri inceleme, içeriği yorumlama ve basit varsayımlar yapma olmuştur. Schoenfeld (1985) benzer şekilde çözüm sürecinin başlarında problem ifadesi okunduktan sonra tutarlı düşüncelerle yapıyı oluşturabilmek için problemin analiz edildiğini vurgulamaktadır. Aynı zamanda Fischer & Malle (1985) bu süreci "durumun analizi", Voskoglou (2006) ise "Problemin Analizi" olarak ifade etmektedir. Araştırmaya göre bu basamakta tam olarak gerçekleştirilemeyen analiz süreçte sık sık geri dönüşlere sebep olmuştur. Modelleme problemlerindeki gerçek yaşam durumunun karmaşık yapısı ilk başta ayrıntılı bir analiz gerçekleştirilmesini zorunlu kılmıştır. Bu süreç daha hızlı ve yüzeysel geçildiğinde ise ileriki basamaklardaki düşüncelerdeki derinliğinin azaldığı görülmüştür. Bu durumu da fark ederek bu durumdan rahatsız olan öğrenciler (Bu üst bilişin varlığının bir kanıtıdır.) ise sık sık geri dönüşlere başvurmuşlardır.

Çoğu çalışmada (Ärlebäck & Bergsten, 2010; Blum & Leiβ, 2007; Garofolo & Lester, 1985; Hıdıroğlu, 2012; Schoenfeld, 1985; Şen Zeytun, 2013) sürecin ilk eylemi olarak alınan Pólya'nın (1957) problem çözme aşamalarından ilki olan problemi okuma bu çalışmada Problemin Analizi temel basamağının ilk alt basamağı olmuştur.

Problemi basit ifadelerle açıklama veya sadeleştirme alt basamağı, Problemin Analizi basamağında ortaya çıkan bir diğer zihinsel eylemdir. Çalışmaya paralel olarak Abrams (2001), Blum (1985), Biccard & Wessels, (2011), Tatsis (2010), Fischer & Malle (1985), PISA (2000) raporu, Borromeo Ferri (2006), Lesh & Doerr (2003) ve Blum & Niss (1991) modelleme sürecinde öncelikle gerçek durumun basitleştirildiğini vurgulamaktadır. Bu zihinsel eylem karmaşık durumu anlamlandırarak problem durumunu zihinde ortaya çıkarmaya yönelik ortaya çıkmıştır.

Problemdeki stratejik etkenleri düşünme alt basamağı Problemin Analizi'nde problem ile ilgili alt durumları oluşturma aşamasında çözümde önemli olduğu düşünülen etkenlere ilişkin ilk ve çok derin olmayan düşünceleri içermiştir. Bu aşamada sergilenen düşünceler çalışma grubunun problem durumuna ilişkin farkındalıklarının sağlanmasında önemli olmuştur. Problemdeki verileri inceleme, içeriği yorumlama alt basamağı ise problem ifadesinin ayrıntılı okunarak verilenlerin ortaya koyulmasını ve günlük yaşam durumuna göre yorumlanmasını içermiştir. Bu alt basamak öğrencilerin amacı ve imkanları tam olarak belirlemelerinde, stratejik etkenlerin düşünmelerinde ve problemi tam olarak anlamalarında gerekli olmuştur. Galbraith & Stillman (2006) paralele olarak bu durumu problem durumunu açıklama ve stratejik etkenleri saptama olarak ifade etmektedir. Blum (1985) ise destekleyici bir görüş olarak modelleme sürecinde ilk eylemlerden biri olarak ayrıntıları ortaya koyma ifadesini kullanmaktadır.

Problemin Analizi'nde ortaya çıkmış bir diğer zihinsel eylem basit varsayımlar yapmadır. Problem analiz edilirken öğrenciler gerçek yaşam durumuna ilişkin bazen mantıksal temeli olmayan ve onların ilk anlayışlarını ortaya koyan bazı varsayımlarda bulunmuşlardır. Bu zihinsel eylemlerin hemen hepsinde öğrenciler gerekçe belirtmeden veya sağlam gerekçeler sunmadan varsayımlar kurmuşlardır. Bu varsayımlar ilk aşamada oldukça sığdır. Sistematik yapıyı kurma basamağında daha üst düzey ve gerçek yaşam durumundaki nitelikli varsayımların ortaya koyulması için temel görüşleri içlerinde barındırmışlardır. Benzer şekilde Galbraith & Stillman (2006) ve Stillman, Galbraith, Brown & Edward (2007) modelleme sürecinde karmaşık gerçek yaşam durumunda gerçek yaşam problem durumuna geçilirken öğrencilerin basit yapılı varsayımlarda bulunduklarını ifade etmektedir.

Sürecin ikinci aşamasında gerçek yaşam problem durumundan gerçek yaşam problem durumunun modeline geçiş gerçekleşerek problem için gerekli zihinsel modellerin yardımıyla çözüm için sistematik bir yapı ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Modelleme sürecinde bu aşamada zihinsel modeller ortaya koyulmuş ve bu doğrultuda çözüm için gerekli olacak bir modelin kurulması amaçlanmıştır. Gerçek yaşam durumun modeli bileşeni için Tatsis (2010) gerçekçi model ifadesini kullanmakta birçok araştırmacı (Maull & Berry, 2001; Blum, 1996; Kaiser-Meß; Schwarz, Wissmach and Kaiser, 2008) da bileşen olarak bu ifadeyi modelleme sürecinde dikkate almaktadır.

Sistem kavramı aynı işlevleri gerçekleştirmek için birbirleriyle ilgili bağlantılı düşüncelerin ve yol/yöntemin oluşturduğu birlik veya grup olarak ifade edilmektedir (TDK, 2014). Yapı kavramı ise bir bütünü (durum/olay/sistemi) oluşturan parçaların düzenlenilmiş halidir (TDK, 2014). Modelleme sürecinin ikinci aşamasında gerçek yaşam problemine bir çözüm verebilmek için çözümün temelleri atılmıştır. Bu basamak hem gerçek yaşamdan matematiğe geçişte bir köprü vazifesi görmüş hem de çözümün ilerleyeceği bir model (yapı) onu oluşturan önemli etkenlerle birlikte bu süreçte tasarlanmıştır. Bunlar dikkate alınarak modelleme sürecinin ikinci temel basamağı Sistematik Yapıyı Kurma olarak belirlenmiştir. Sistematik Yapıyı Kurma'da sergilenen zihinsel eylemler genel çözüm stratejisini tasarlama, çözüm için gerekli/gereksiz stratejik etkenleri/bilgileri ayıklama, stratejik etkenleri gruplandırma, üst düzey varsayımlarda bulunma, deneyimlerden yararlanma ve teknolojik ile matematiksel gösterim arasındaki geçişi gerçekleştirme olmuştur. Paralel olarak, Blomhøj & Jensen (2006) bu aşamayı araştırmanın etki alanından sistemi kurmaya geçerken gerçekleştirildiği söylemekte ve bu aşamayı "sistematik hale getirme" olarak ifade etmektedir. Schwarz, Wissmach and Kaiser (2008) de bu aşamayı "ideal hale getirme" olarak vurgulamaktadır. Buna göre çözüm sürecinde öğrenciler gerçek yaşam modelini oluştururken problem durumunu ideal hale getirmektedirler.

Sistematik Yapıyı Kurma'da genel çözüm stratejisini tasarlama alt basamağı öğrencilerin bu basamakta olduklarını gösteren önemli işaretlerden biri olmuştur. Pólya (1945), Penrose (1978), Abrams (2001) modelleme sürecindeki zihinsel eylemlerden biri olarak genel çözüm stratejisinden bahsetmektedir. Öğrencilerin sistematik yapıyı kurmalarında temel alt elemanlardan birisidir. Bu sayede çözüm için gerekli en genel strateji yol/yöntem bağlamında seçilmiş ve gerekli matematiksel kavramlar ve gerçek yaşam durumuna ilişkin algılar ilişkilendirilerek bu yönde bir karara varılmıştır.

Sistematik Yapıyı Kurma'daki bir diğer alt basamak çözüm için gerekli/gereksiz stratejik etkenleri/bilgileri ayıklama olmuştur. Bu durum çözümde kullanılacak her türlü etkenin veya düşüncenin net bir şekilde ortaya koyulması ve ayrıştırılması işlemidir. Öğrenciler bu aşamada önemli ve önemsiz şeyleri ayıklamışlar ve gerekli olabilecek şeyleri de ikinci bir plan doğrultusunda dikkate almışlardır. Berry & Houston (1995) ve Kapur (1982) bu durumdan "uygun değişkenleri seçme" olarak bahsetmektedir. Bu süreçte sadece değişkenler değil gerekli düşünceler, stratejik etkenler (değişken sabit, parametre gibi) seçilmektedir. Berry & Houston'ın (1995) çalışmasında "uygun değişkenleri seçme" ifadesini incelendiğinde aslında kastettiğinin sadece değişkenler olmadığı düşünceleri ve tüm stratejik etkenleri kapsadığı görülmektedir.

Sistematik Yapıyı Kurma basamağında Hıdıroğlu'na (2012) paralel olarak öğrenciler çözüm için seçtikleri stratejik etkenleri kendi içerisinde gruplandırmıştır. Bu onların daha kolay ilişkilendirebileceklerini düşündükleri stratejik etkenleri bir arada ele almaları şeklinde olmuştur. İleriki basamaklarda ise gruplandırılan bu stratejik etkenler gerekli YMMlerin hangilerinin olacağı hakkında bir temel oluşturmuştur.

Sistematik Yapıyı Kurma'da en belirgin eylemlerden birisi de üst düzey varsayımların kurulması ve gerçek yaşama problem durumunun modelin mantıksal çerçevelerde oluşturulmuş bu üst düzey varsayımlar doğrultusunda şekillenmesidir. Bu aşamada öğrencileri gerçek yaşamdaki duruma ilişkin mantıklı ve çözümde istenileni onlara sağlayabilecek varsayımları gerekçeleriyle birlikte ortaya atmışlardır. Galbraith & Stillman (2006), Stillman, Galbraith, Brown & Edward, 2007), Hıdıroğlu (2012) da benzer olarak sürecin ilk aşamasında ortaya çıkan basit yapıdaki varsayımların yerini bu basamakta bağlantılı ve sağlam gerekçelere sahip üst düzey varsayımların aldığını ifade etmektedir.

Sistematik Yapıyı Kurma'da bir diğer zihinsel eylem genel çözüm stratejisinin ortaya koyulmasında, üst düzey varsayımların belirlenmesinde büyük etkisi olabilen deneyimlerden yararlanmadır. Bu aşamada deneyimler çözüme ulaşmak için bir araç olarak kullanılmıştır. Aynı şekilde Pólya (1945), Abrams (2001), Biccard & Wessels (2011), Şen Zeytun (2013), Blum (1996) ve Kaiser-Meßmer (1986) öğrencilerin modelleme sürecinde deneyimlerini ortaya koyduklarını vurgulamaktadır.

Sistematik Yapıyı Kurma, Matematikselleştirme, Üst Matematikselleştirme ve Matematiksel Analiz basamaklarında ayrı zamanlarda ortaya çıkmış zihinsel eylem teknolojik ile matematiksel gösterim arasındaki geçişi gerçekleştirme olmuştur. Sistematik Yapıyı Kurma'da gerçek yaşamdan matematiksel dünyaya bir geçişin gerçekleştiği düşünüldüğünde bu aşamada teknolojiyi de kullanarak gerçekleştirilen çözümlerde gerçek yaşamdan matematiğe, matematikten de teknolojiye geçişler gerçekleşmiştir. Burada temel amaç gerçek yaşam durumunun bir modelini kurmak için teknolojinin sürece entegre olmasıdır. Galbraith & Stillman (2006) da süreci açıklarken kategorilerde uygun teknolojiyi seçme ifadesini basamaklarda sık sık kullandığı görülmektedir. Uygun teknolojinin kullanımı ise matematiksel gösterimler ve teknolojik gösterimler arasındaki ilişkinin kurulmasıyla gerçekleşmiştir. Bu nedenle öğrenciler Matematikselleştirme'de YMMleri kurarken, Üst Matematikselleştirme'de AMMye ulaşırken, Matematiksel Analiz'de ise matematiksel çözüm ve sonuçlar elde ederken bu zihinsel eylemde bulunmuşlardır. Hıdıroğlu'na (2012) paralel olarak, bu zihinsel eylemin ortaya çıkış nedeni farklı olduğundan dolayı her temel basamakta ayrı bir kategori olarak düşünülmüştür.

Sürecin üçüncü aşamasında gerçek yaşam problem durumunun modelinden yardımcı matematiksel modellere geçiş gerçekleşerek durum modeli yardımıyla çözüm için gerekli YMMleri ortaya koyulmuştur. Modelleme sürecinde bu aşamada matematiksel modeller oluşturulmuştur. Uluslararası alan yanına bakıldığında modelleme süreci çalışmalarında hem yardımcı matematiksel modellere hem de ana matematiksel model kavramına Hıdıroğlu'nun (2012) çalışmasının dışında yer verilmediği görülmektedir. Sadece Berry & Houston (1995) çözüm sürecinde bazı alt model (sub-model)lerin oluştuğundan çok kısa bahsetmektedir. Aynı zamanda da Saeki & Matsuzaki (2013) ikili modelleme döngüsü yaklaşımında farklı matematiksel modellerin çözüm sürecindeki varlığından bahsetmektedir. Ama süreç modelinde ve süreci açıklayan yorumlarda bu iki bileşene vurgu yapılmaması doktora çalışmasındaki süreç modelini diğerlerinden ayıran önemli unsurdur.

Modelleme sürecinin üçüncü aşamasında bu doğrultuda durum modelinden hareketle gerekli yardımcı matematiksel modeller tanımlanmıştır. Gerçek yaşamdaki durumların karmaşık oluşu, Abrams'ın (2001) dediği gibi her modelleme döngüsünde daha iyi bir modeli oluşturmayı sağlamaktadır. Bununla birlikte daha iyi modellerin oluşturulabilmesi için varsayımların daha da özelleşerek farklı matematiksel modelleri ortaya çıkarmıştır. Bu basamakta çözüm matematiksel dünya temelli bir yaklaşımla ilerlemiş ve stratejik etkenlerin matematiksel gösterimleri üzerinden matematiksel bilgiler ve beceriler doğrultusunda çözüm ilerlemiştir. Bunlar dikkate alınarak modelleme sürecinin üçüncü temel basamağı

Matematikselleştirme olarak belirlenmiştir. Matematikselleştirme'de sergilenen zihinsel eylemler YMMlerin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini bulma, bağımlı-bağımsız değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirleme, stratejik etkenleri matematiksel sembollerle ifade etme, stratejik etkenleri yorumlama, YMMlere ilişkin ön tahminlerde bulunma, teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma, problemde verileri bulunmayan stratejik etkenlere yönelik sayısal tahminlerden ve ölçümlerden yararlanma, üst düzey matematiksel ve teknolojik bilgiden yararlanma, teknolojik ve matematiksel gösterim arasında geçişi gerçekleştirme olmuştur. Blum (1985) Blum, 1996; Kaiser-Meßmer, 1986 benzer olarak gerçek modelden matematiksel modele geçilirken matematikselleştirme yapıldığından bahsetmektedir. Bununla birlikte Blomhøj & Jensen, 2006 Stillman, Galbraith, Brown & Edward, 2007 Schwarz, Wissmach and Kaiser, 2008 Biccard & Wessels (2011) Neubrand (2013) ve Voskoglou (2006) da bu aşamayı matematikselleştirme olarak ifade etmiştir. Farklı olarak Abrams (2001) ve Berry & Houston (1995) matematiksel modeli kurma; Berry & Davies 1996 ve CCSSM (2010) ise formüle etme ifadesini kullanmıştır.

Matematikselleştirme'de öğrenciler çözüm stratejilerine bağlı olarak gerekirse teknolojinin de yardımıyla gerekli YMMlerin ya cebirsel ya da geometrik gösterimlerine ulaşma yoluna gitmişler ve YMMleri oluşturan stratejik etkenler arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlardır. Hıdıroğlu (2012) ve Galbraith & Stillman (2006) bu süreçte teknolojinin etkisinin öğrencileri grafiklere yönelttiğini ifade etmektedir. Galbraith & Stillman (2006) bu durumu sürecinde "Modelin grafiksel gösterimini seçmek için uygun teknolojiyi seçme" şeklinde ifade etmektedir.

Matematikselleştirme'deki diğer zihinsel eylem bağımlı veya bağımsız değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirlemedir. Sistematik yapıyı kurma basamağında gruplandırılan stratejik etkenler kesin olarak seçilmiş ve değişken, sabit veya parametre olduğu vurgulanmıştır. Şen Zeytun (2013), Mason (1988), Galbraith & Stillman (2006) de bu süreçte çözümde kullanılacak değişkenlerin seçimine vurgu yapmaktadır. Galbraith & Stillman (2006) modelleme sürecinde çözümde kullanılacak bağımlı bağımsız değişkenleri belirleme olarak ifade etmektedir.

Matematikselleştirme'de matematiksel bir çözümün gerçekleştirilebilmesi için stratejik etkenlerin matematiksel sembollerle ifade edilmesi gerekmiştir. Öğrenciler bağımlı veya bağımsız değişken, sabit ve parametrelere göre uygun matematiksel sembolleri kullanmışlar ve farklı değişkenlere aynı sembolleri vermemeye dikkat etmişlerdir. Mason (1988), Blomhøj & Jensen (2006) ve Hıdıroğlu (2012) da benzer olarak matematiksel gösterimlerin önemini ve gerekliliğini süreci açıklarken vurgulamaktadır. Galbraith & Stillman (2006) da bu eylemi uygun matematiksel notasyonları kullanma olarak ifade etmektedir.

Matematikselleştirme'de öğrenciler YMMleri ortaya koyarlarken stratejik etkenlere ilişkin yorumlamalarda bulunmuş, YMMlere ve onları oluşturan etkenlere ilişkin tahminler yapmışlardır. Bununla birlikte problemde verileri bulunmayan stratejik etkenlere yönelik sayısal tahminlerden ve ölçümlerden yararlanmışlardır. Hıdıroğlu (2012) da aynı şekilde öğrencilerin bu süreçte ilişkileri ortaya çıkarırlarken sayısal tahminlerden yararlandıklarını ve YMMlerin yapısına ilişkin ileriye dönük tahminlerde bulunduklarını vurgulamaktadır. Şen Zeytun (2012) bu eylemi "Bilinmeyen değişkenler ve ilişkiler hakkında tahminde bulunma" şeklinde ifade etmektedir.

Matematikselleştime'deki zihinsel eylemlerden biri teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma olmuştur. Öğrenciler teknoloji ile destekli bir çözüm yaparlarken YMMleri daha iyi gözlemlemek için onun görsel olanaklarını dikkate almışlardır. Galbraith & Stillman (2006) da paralel olarak öğrencilerin teknolojinin görsel olanaklarının onlara çözümde faydalı olduğundan bahsetmektedir.

Matematikselleştirme'de öğrencilerin temel olarak matematiksel dünyada yer aldıkları ve gerçek yaşam çözümüne artık matematiksel yollarla çözüm aramaya başladıkları görülmüştür. Öğrenciler matematiksel ilişkileri ortaya koyarlarken mutlaka üst düzey matematiksel bilgilerden (kavramların günlük yaşamdaki kullanımı, farklı kavramlarla ilişkilendirilmesi gibi) yararlanma yoluna gitmişlerdir. Ayrıca teknoloji ile desteklenmiş bir çözümde de üst düzey teknolojik bilgilere ihtiyaç duyulmuştur. Bu zihinsel eylem farklı zamanlarda Üst Matematikselleştirme'de ve Matematiksel Analiz'de de ortak olarak görülmüş ve matematiksel modelleme problemlerinin zorluğunu ortaya çıkaran zihinsel eylemlerden birisi olmuştur. Çünkü matematiksel olarak bir yanıt bulabilmek için öğrencilerin çözüm için gerekli olacak matematiksel kavramlara ilişkin bilgiye sahip olmaları gerekmiştir. Benzer şekilde Schoenfeld (1985), Mason (1988), Lesh & Doerr (2003), Siller & Greefrath (2010), Blum & Niss (1991) ve Berry & Houston (1995) modelleme sürecinde gerekli matematiksel bilgilerin önemine vurgu yapmaktadır. Hıdıroğlu (2012) benzer şekilde Matematikselleştirme, Üst Matematikselleştirme ve Matematiksel Analiz'de matematiksel ve teknolojik (kullanılırsa) bilgilere ihtiyaç duyulduğunu ifade etmektedir.

Modelleme sürecinin dördüncü aşamasında YMMlerden AMM oluşturulmuştur. Bu basamak modelleme sürecinde YMMlerin yardımıyla daha etkili bir matematiksel modelin kurulmasına zemin hazırlamıştır. Çünkü AMM için kullanılacak YMMler gerçek yaşam durumu için ne kadar nitelikliyse AMM de gerçek yaşam çözümü için o kadar çok uygun bir araç olmuştur. Üst Matematikselleştirme'de sergilenen zihinsel eylemler YMMlerin cebirsel gösterimlerinden yararlanma, bağımlı-bağımsız değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirleme, teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma, gerekli YMMleri belirleme, YMMlerin grafiksel gösterimlerinden yararlanma, YMMlerin yorumlanmasına olanak sağlayan teknolojik sistemi kurma, AMM için gerekli verileri YMMlerden elde etme, stratejik etkenleri yorumlama ve AMMye ilişkin ön tahminlerde bulunma, üst düzey matematiksel ve teknolojik bilgilerden yararlanma, AMMnin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini bulma, teknolojik ve matematiksel gösterim arasındaki geçişi geçekleştirmedir.

Üst Matematikselleştirme'de elde edilen AMMler bazen YMMlerin grafiksel gösterimlerden bazen de cebirsel gösterimlerden yaralanılarak oluşturulmuştur. Bu durumun oluşmasında öğrencilerin bilgileri, becerileri etkili olmuştur. Hıdıroğlu (2012) benzer şekilde öğrencilerin ya cebirsel ya da geometrik olarak YMMlerden faydalandıklarını ortaya koymaktadır. Galbraith & Stillman (2006) da AMM ve

YMMler arasındaki ayrıma dikkat çekmeden öğrencilerin bu aşamada cebirsel gösterimler yardımıyla çözüme gittiklerinden ve bazı sembolik basitleştirmelerle cebirsel gösterimlerden yararlandıklarını ifade etmektedir.

Üst Matematikselleştirme'de AMM'nin yapısına karar verilerek gerekli bağımlı veya bağımsız değişkenlerin, sabitlerin ve parametrelerin ne olduğu ifade edilmiş ve bir diğer zihinsel eylem olarak da bu doğrultuda gerekli YMMleri belirlenmiştir. Bu aşamalarda, oluşturulacak AMMnin içereceği stratejik etkenler hangi YMMlere ihtiyaç duyulacağının belirlenmesinde etkili olmuştur.

AMMye ulaşma sürecinde YMMlerin teknoloji destekli ortamda grafikleri oluşturulmuş YMMlerin grafiksel gösterimlerinden hareketle AMMye ulaşılmıştır. Bu zihinsel süreçten Galbraith & Stillman (2006) ve Hıdıroğlu (2012) da bahsetmektedir. Galbraith & Stillman (2006) bunu AMM ve YMM ayrımına girmeden sadece tek bir matematiksel model üzerinden yorumlayarak "Grafiksel gösterimi üretmek için teknolojiyi kullanma" şeklinde ifade etmektedir. Fakat tez çalışmasında öğrencilerin bunu kullanım amacı AMMye ulaşmak için YMMlerin grafiklerinden yaralanmak olmuştur.

Teknolojinin çözümde kullanılması Üst Matematikselleştirme'de öğrencilerin matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşmak için simülasyondan yararlanmalarına olanak sağlamıştır. Bu şekilde YMMler ayrıntılı incelenerek istenilen AMMye ulaşılmaya çalışmıştır. Bu zihinsel süreçten Galbraith & Stillman (2006) ve Hıdıroğlu (2012) da bahsetmektedir. Galbraith & Stillman (2006) bunu AMM ve YMM ayrımına girmeden sadece tek bir matematiksel model üzerinden yorumlayarak "Çoklu durumlara göre fonksiyonun işlevselliğini otomatik olarak sağlamak için uygun teknolojiyi kullanma" şeklinde ifade etmektedir.

Üst Matematikselleştirme'nin Matematikselleştirme'den daha uğraştırıcı ve üst düzey bilgileri gerektiren bir süreç olduğunu gösterene zihinsel eylemlerden biridir. Bu aşamada öğrenciler YMMlerden istedikleri AMMye ulaşamadıklarında YMMlerden elde ettikleri verileri AMMye ulaşmada kullanmışlardır. Bu aşamada tam bir AMMye ulaşılamasa da YMMler çözümde denklem sisteminin parçaları gibi düşünülerek hareket edilmiştir. Hıdıroğlu (2012) da benzer olarak bu durumu ifade etmekte ve öğrencilerin bu süreçte deneysel modelleme stratejisine bağlı yöntem ve teknikler kullandığını vurgulamaktadır.

Matematikselleştirme gibi Üst Matematikselleştirme'de de öğrenciler YMMleri ortaya koyarlarken stratejik etkenlere ilişkin yorumlamalarda bulunmuş, YMMlere ve onları oluşturan etkenlere ilişkin tahminler yapmışlardır. Bununla birlikte problemde verileri bulunmayan stratejik etkenlere yönelik sayısal tahminlerden ve ölçümlerden yararlanmışlardır. Hıdıroğlu (2012) da aynı şekilde öğrencilerin bu süreçte ilişkileri ortaya çıkarırlarken sayısal tahminlerden yararlandıklarını ve YMMlerin yapısına ilişkin ileriye dönük tahminlerde bulunduklarını vurgulamaktadır. Şen Zeytun (2012) bu eylemi "Bilinmeyen değişkenler ve ilişkiler hakkında tahminde bulunma" şeklinde ifade etmektedir.

Üst Matematikselleştirme'de öğrenciler çözüm stratejilerine bağlı olarak gerekirse teknolojinin de yardımıyla gerekli YMMlerin ya cebirsel ya da geometrik gösterimlerine ulaşma yoluna gitmişler ve YMMleri oluşturan stratejik etkenler arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlardır. Hıdıroğlu (2012) ve Galbraith & Stillman (2006) bu süreçte teknolojinin etkisinin öğrencileri grafiklere yönelttiğini ifade etmektedir. Galbraith & Stillman (2006) AMM ye vurgu yapmadan bu durumu sürecinde "Modelin grafiksel gösterimini seçmek için uygun teknolojiyi seçme" şeklinde ifade etmektedir.

Sürecin beşinci temel bileşeni AMMden elde edilen ve problemde istenilen duruma direk olarak yanıt veren matematiksel çözümler olmuştur. AMMlerden matematiksel çözüme ulaşmak için gerçekleştirilen bu temel süreç ise matematiksel analiz olarak ifade edilmiştir. Bu doğrultuda öğrencileri matematiksel olarak elde ettiklerini ayrıntılı şekilde analiz etmiş ve matematiksel modeller doğrultusunda matematiksel çözümlerle birlikte matematiksel sonuçlara ulaşmışlardır. Matematiksel sonuçlar problemde istenen duruma direk olarak yanıt vermeyen ama durumun daha ayrıntılı incelenmesine olanak sağlayan yardımcı bileşen olarak karşımıza çıkmıştır.

Uluslararası alan yazında matematiksel çözüm ve matematiksel sonuçların benzer şekillerde kullanıldığı görülmüş ve ikisi arasındaki ayrıma değinilmemiştir. Süreç modelleri incelendiğinde Hıdıroğlu (2012), Müller & Wittmann'ın (1984) bu bileşeni matematiksel çözüm olarak Blum'un (1985) Blum (1996), Kaiser-Meßmer (1986) Borromeo Ferri (2006) ve Blum'un (2011) ise matematiksel sonuç olarak ele aldığı görülmektedir. Tez çalışmasında matematiksel çözüm ve matematiksel sonuç olarak alınmasının nedeni öğrencilerin matematiksel sonuçlara ulaşsalar problem için istenen şeyi bulamadıklarında yani matematiksel çözüme ulaşamadıklarında Yorumlama basamağına geçmemişlerdir. Burada Matematiksel Analizi'n bittiğini gösteren bileşen matematiksel çözümdür. Çözüm ifadesinin burada kullanıldığı anlamı ise bir denklemde (matematiksel modelde) bilinmeyenlerin yerine konulduğunda o denklemi (matematiksel modeli) gerçekleştiren sayı veya sayılardır (TDK, 2014). Sonuç kavramının tez çalışmasında ele alındığı anlam, bir bağımlılık ya da birlikte değişme ilişkisinde bağımsız değişken tarafından belirlenen ya da bağımlı konumda olan etkenler veya sayısal değerlerdir (TDK, 2014). Yani matematiksel çözüm problemde istenilen şeye verilecek yanıtı kapsamıştır. Matematiksel sonuç ise matematiksel çözümün yanında gerçek yaşam durumunu açıklayan genel yanıtlar olmuştur. Matematiksel sonuçların niteliği ise bu süreçte gerçekleştirilen matematiksel analizin niteliğiyle doğru orantılı olmuştur.

AMMden matematiksel çözüm elde edilirken gerçekleştirilen Matematiksel Analiz'de sergilenen zihinsel eylemler Y/AMMlerin grafiksel veya cebirsel gösterimlerinden yararlanma, teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma, matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşmak için hesaplama yapma, matematiksel çözümü ve sonuçları veren teknolojik sistemi kurma, Y/AMMlerin kritik noktalarına ilişkin matematiksel sonuçlar elde etme, matematiksel ve teknolojik bilgilerden yararlanma, teknolojik ve matematiksel gösterim arasındaki geçişi gerçekleştirme olmuştur. Bu temel basamağı Maull & Berry (2001), Berry & Houston (1995) matematiksel problemi çözme; Voskoglou (2006), Mason (1988) matematiksel modeli çözme; Berry & Davies (1996) matematiksel olarak çözme; Blomhøj & Jensen (2006), Verschaffel et al., (2000), Pedley (2005) matematiksel analiz;

Borromeo Ferri (2006), Blum (2011), Stillman, Galbraith, Brown & Edward (2007), Neubrand (2013), Biccard & Wessels (2011) matematiksel olarak çalışma şeklinde ifade etmektedir. Tez çalışmasında öğrencilerin Matematikselleştirme, Üst Matematikselleştirme ve Matematiksel Analiz'in hepsinde matematiksel olarak çalışma yaptıkları düşünüldüğünde bu süreci daha ön plana çıkararak diğerlerinden farkını ortaya çıkaran matematiksel analiz ifadesinin kullanılmasının uygun olacağı düşünülmüştür.

Matematiksel Analiz'deki zihinsel eylemlerden biri Y/AMMlerin grafiksel veya cebirsel gösterimlerinden yararlanma olmuştur. Bu basamakta YMMlerle birlikte AMM de kullanılarak matematiksel çözüme ulaşmak için grafik ve cebirsel ifadeler kullanılmıştır. Galbraith & Stillman (2006) ve Hıdıroğlu (2012) da matematiksel modelin grafiksel veya cebirsel gösterimlerinin yardımıyla matematiksel sonuçlara ulaşıldığını vurgulamaktadır.

Matematiksel Analiz'de matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşmanın yolu matematiksel hesaplamalar yapmaktır. Galbraith & Stillman'ın (2006) bu durumu açıklamada "Hesaplamayı yapmak için matematiksel tabloları veya teknolojiyi kullanma" ifade ettiği görülmektedir. Bununla birlikte öğrenciler daha etkili bir şekilde matematikse modellerden matematikse sonuçlara ulaşmak için teknolojiyi sürece entegre ettikleri ve onlara matematiksel çözümü ve sonuçları verecek teknolojik sistemi (simülasyon) oluşturdukları görülmüştür. Benzer olarak Hıdıroğlu (2012) ve Galbraith & Stillman (2006) da öğrencilerin çoklu durumlara ilişkin matematiksel sonuçlar elde etmek için matematiksel modelin işlevselliğini teknoloji yardımıyla otomatik olarak sağladıklarını ifade etmektedir. Ang (2010) de aynı şekilde öğrencilerin teknoloji yardımıyla matematiksel modellerin farklı değerlerine hızlı bir şekilde ulaşabildiklerini vurgulamaktadır. Matematiksel Analiz'de matematiksel sonuçlar ortaya koyulurken özellikle elde edilen matematiksel modellerin tanım kümesi, tanımsız noktaları, negatif değerleri, en yüksek veya en düşük değerleri gibi kritik noktalarının incelendiği görülmüştür.

Sürecin yedinci temel bileşeni gerçek yaşam çözümü olmuştur. Bu doğrultuda Matematiksel Analiz'de elde edilen matematiksel çözüm gerçek yaşam bağlamında ele alınarak gerçek yaşam çözümüne dönüşmüştür. Aynı zamanda Kang & Noh'un (2012) da ifade ettiği gibi elde edilen matematiksel sonuçlardan gerçek yaşam sonuçlarına ulaşılmıştır. Borromeo Ferri (2006) Biccard & Wessels (2011) ve Voskoglou (2006) süreç modellerinde gerçek yaşam sonuçlarını temel bileşen olarak dikkate almaktadır. Bu çalışma ve Hıdıroğlu'nda (2012) ise gerçek yaşam çözümü (problemde istenilen şeye yanıt veren değerler) temel bileşen; gerçek yaşam sonuçları (probleme geniş perspektiften bakmayı sağlayan değerler) yardımcı bileşen olarak karşımıza çıkmıştır.

Yorumlama bir durumun, olayın veya sistemin anlaşılması güç, karanlık yönlerini iyice açıklayarak aydınlığa kavuşturması ve belli bir görüşe göre açıklayarak değerlendirilmesidir (TDK, 2014). Bu doğrultuda Matematiksel Analiz'den sonra gerçek yaşam çözümüne ulaşmak için sergilenen eylemler Yorumlama temel basamağı altında toplanmıştır. Yorumlama'da sergilenen zihinsel eylemler matematiksel çözümün gerçek yaşam karşılığını belirleme, gerçek yaşam durumu ile zihinsel modeli arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarma, AMMnin kritik noktalarının gerçek yaşam karşılıklarını belirleme, gerçek yaşam çözümü ve sonuçlarının problem durumu açısından incelenmesi, varsayımları gerçek yaşam çözümü ve sonuçları doğrultusunda irdeleme olmuştur. Müller & Wittmann (1984) da bu süreci yorumlama olarak ifade etmekte ve ona göre bu aşamada matematiksel çözümden gerçek yaşam durumuna ilişkin çıkarımlara geçilmektedir. Penrose (1978) bu basamağı "matematiksel çözümü yorumlama" olarak ifade etmektedir. Blum (1985) süreç modelinde matematiksel sonuçların gerçek duruma göre yorumlanmasını "geriye doğru yorumlama ve uygulama" olarak ifade etmektedir. Bu basamağı Mason (1988) çözümü yorumlama; Berry & Houston (1995) ve Maull & Berry (2001); Borromeo Ferri (2006), Blum (2011) yorumlama; Berry & Davies (1996), Schwarz, Wissmach and Kaiser, (2008), Blum (1996), Kaiser-Meßmer (1986) tekrar yorumlama ve doğrulama olarak vurgulamaktadır. Blomhøj & Jensen (2006) ise "yorumlama/değerlendirme" olarak tanımlamaktadır. Çoğu süreç modelinde temel basamak olarak ele alınan bu basamak genel olarak araştırmacılar tarafından matematiksel olarak elde edilenlerin gerçek yaşam bağlamında ele alınmasını içermektedir. Benzer olarak Stillman, Galbraith, Brown & Edward (2007) çözümün gerçek yaşam anlamı bileşenine geçilirkenki bu basamağı matematiksel çıktıları yorumlama olarak ifade etmektedir. Fischer & Malle (1985), Biccard & Wessels (2011), Neubrand (2013) ve CCSSM (2010) bu basamağı benzer şekilde yorumlama olarak ele almaktadır.

Yorumlama'daki zihinsel eylemlerden biri matematiksel çözümün gerçek yaşam karşılığını belirleme olmuştur. Bu basamakta artık çözümde matematiksel dünyadan gerçek yaşama geçiş yapılmıştır. Matematiksel modeller yardımıyla elde edilen matematiksel çözüm gerçek yaşam durumu dikkate alınarak gerçek yaşam durumunda yorumlanmıştır. Matematiksel çözümden gerçek yaşam çözümüne ulaşmadan önce gerçek yaşam durumu ile gerçek yaşam durumunun modeli arasındaki ilişki ortaya çıkarılmıştır. Bu sayede hem matematiksel çözümlerden gerçek yaşam çözümüne hem de matematiksel sonuçlardan gerçek yaşam sonuçlarına ulaşılmıştır. Berry & Houston (1995) da aynı şekilde elde edilen matematiksel sonuçların gerçek yaşam durumuna göre değerlendirildiğini vurgulamaktadır. Hıdıroğlu (2012) doktora tez çalışmasına benzer olarak modelin kritik noktalarının matematiksel sonuçlardan gerçek yaşam sonuçlarına ulaşmayı sağladığını ifade etmektedir. Galbraith & Stillman (2006) bu durumu süreç modelini açıklarken "Matematiksel sonuçları gerçek yaşamdaki karşılıklarıyla birlikte tanımlama" şeklinde ifade etmektedir. Bu şekilde AMMnin kritik noktalarının gerçek yaşam karşılıkları belirlenmiş ve gerçek yaşam çözümü ve sonuçları problem durumu açısından incelenmiştir. Bu basamakta varsayımların gerçek yaşam çözümü ve sonuçları doğrultusunda irdelendiği ve varsayımların gerçek yaşam durumunu nasıl etkilediği yorumlanmıştır. Galbraith & Stillman (2006) bu durumu açıklarken öğrencilerin geçici ve kesin matematiksel sonuçları varsayımları doğrultusunda gerçek yaşam durumu açısından irdelediklerini ifade etmektedir.

Sürecin sekizinci temel bileşeni çözüm kararı olmuştur. Bu doğrultuda bu aşamada gerçek yaşam çözümünün doğruluğu incelenerek yapılan çözümün doğruluğu hakkında bir karara varılmıştır. Paralel olarak MEI (1994), Kang & Noh

(2012) ve Biccard & Wessels'a (2011) göre süreçte çözümün doğruluğunun incelenmesi çözüm hakkında verilecek karar ile son bulmaktadır.

Öğrenciler gerçek yaşam çözümünü ve sonuçlarını elde ettikten sonra bu basamakta çözüm süreçlerinin doğruluğunu irdelemişler ve bu doğrultuda gerçekleştirdikleri çözümleri ilgili bir karara varmışlardır. Doğrulama'da sergilenen zihinsel eylemler gerçek yaşam sonuçlarındaki beklenmeyen durumların irdelenmesi, gerçek yaşam sonuçlarını deneyimlere dayalı tahminlerle veya ölçümlerle karşılaştırma, gerçek yaşam sonuçlarını problem verileri ile karşılaştırma, gerçek yaşam sonuçlarını video ve resimlerdeki durumlarla karşılaştırma, gerçek yaşam çözümü veya sonuçlarının yeterliğine ilişkin karara varma, işlemleri, düşünceleri ve basamakları kontrol etme olmuştur. Birçok araştırmacı bu basamağa süreç modellerinde yermiştir. Örneğin, Hıdıroğlu (2012) bu süreci modelin doğrulanması olarak ifade etmektedir. Bu çalışmada Hıdıroğlu'ndan (2012) farklı olarak sadece modelin doğrulandığı anlamı çıkarılmaması açısında basamak sadece doğrulama olarak ifade edilmiştir. Bu süreci Schoenfeld (1985) çözümü doğrulama; Voskoglou (2006) Berry & Houston (1995), Penrose (1978), Mason (1988) modeli doğrulama; Ärlebäck & Bergsten (2010), Borromeo Ferri (2006), CCSSM (2010), Neubrand (2013), Kang & Noh (2012), Biccard & Wessels (2011), Garofolo & Lester (1985), Blum (2011) doğrulama; Stillman, Galbraith, Brown & Edward (2007) birleştirme, eleştirme, doğrulama; Schwarz, Wissmach and Kaiser (2008), Blum (1996) ve Kaiser-Meßmer (1986) tekrar yorumlama ve doğrulama; Berry & Davies (1996) çözümü değerlendirme; Şen Zeytun (2013) yorumlama ve doğrulama olarak ifade etmektedir. Pólya (1945) ise bu basamağı problem çözme sürecinin son basamağı olarak Bulunan yanıta gerçekten inanılıp inanılmadığını sorgulama şeklinde ifade ettiği görülmektedir. Genel olarak süreç modellerinin hemen hepsinde temel basamak olarak yer almakta sadece bazı araştırmalarda (Müller & Wittmann, 1984; Verschaffel et al., 2000; Ang, 2001; 2010; Tatsis, 2010); yorumlama basamağının içerisinde kendisine ye bulmaktadır.

Doğrulama'da ortaya çıkan zihinsel süreçlerden biri gerçek yaşam sonuçlarındaki beklenmeyen durumların irdelenmesi olmuştur. Bu doğrultuda öğrenciler elde ettikleri bazı gerçek yaşam sonuçlarının beklenen şekilde ortay çıkmadığını düşünmüşlerdir. Hıdıroğlu (2012) benzer görüşleri vurgulamakta Galbraith & Stillman (2006) ise bu eylemi benzer düşünceyle “beklenmedik sonuçlarla gerçek durumu uzlaştırma” olarak ifade etmektedir. Bununla birlikte Doğrulama’da gerçek yaşam sonuçları deneyimlere dayalı tahminler, problem verileri, video ve resimlerdeki durumlarla karşılaştırılmıştır. Şen Zeytun’un (2013) doğrulamada çözümün doğruluğunu kontrol etmek için matematiksel gerçeklerden veya değişkenlerin özel değerlerinden yararlanma ifadesi söz konusu aşamayla paralellikler göstermektedir. Hıdıroğlu & Bukova Güzel’in (2013) düşüncesine paralel olarak teknoloji doğrulama basamağındaki zihinsel eylemlerin oluşumunda önemli olmuştur. Doğrulama ayrıca gerçek yaşam çözümünün veya sonuçlarının yeterliğine ilişkin karara varılmıştır. Galbraith & Stillman (2006) da modelleme sürecinde modelin ayrıntılı sonuçlarının gerçek dünya yeterliliğine ilişkin karara varıldığını ifade etmektedir. Doğrulama’da karşılaşılan bir diğer zihinsel eylem ise işlemleri, düşünceleri ve basamakları kontrol etme olmuştur. Bu doğrultuda öğrenciler sürekli olarak çözümlerini gözden geçirmişler ve doğruluğunu incelemişlerdir. Schoenfeld (1985) Fischer & Malle (1985) ve Şen Zeytun (2013) da benzer şekilde modelleme sürecinin doğrulama aşamasında çözümün kontrol edildiğini vurgulamaktadır.

Doğrulama’nın sonunda elde edilen çözüm kararı sonucunda eğer çözümün doğruluğuna ilişkin olumsuz bir karar verildiyse çözümdeki gerekli tüm düşünce ve matematiksel gösterimlerin tekrardan gözden geçirilmesi gerekmiştir. Bu doğrultudan öğrenciler çözümlerini ideal bir çözüme ulaşana kadar sürdürmüşlerdir. Yani Doğrulama süreci sonrasında alınan olumsuz karar öğrencileri revize etme basamağına geçirmiştir.

Revize etme bir şeyi daha iyi hale getirmek için yapılan düzeltmeler ve değişikliklerdir (TDK, 2014). Bu doğrultuda modelleme sürecinde çözüm kararı olumsuz olduğunda sürece geri dönmek için sergilenen zihinsel eylemler revize etme basamağında gerçekleşmiştir. Revize Etme’de karşılaşılan zihinsel eylemler çözümdeki hata veya yanlışın kaynağını belirleme, işlemleri ve düşünceleri tekrar gözden geçirme, alternatif çözüm stratejileri belirleme, üst düzey varsayımlarda değişiklik yapma olmuştur. Revize etme basamağı araştırmacıların çoğu tarafından modelleme sürecinde açıklansa da bazıları tarafından süreç modelinde vurgulanmaktadır. Araştırmacılar revize etmeyi genellikle doğrulamanın sonrasında alınan kadar doğrultusunda çözüme tekrar dönme olarak ifade etmektedir. Bu basamağı süreç modelinde Penrose (1978) Stillman, Galbraith, Brown & Edward (2007) revize etme; Berry & Davies (1996), Ang (2010), Kang & Noh (2012) modeli revize etme; Fischer & Malle (1985), Berry & Houston (1995) modeli geliştirme; Pedley, 2005 Bulunacak uygun bir çözüme kadar süreci tekrarlama ve geliştirme; Abramovich (2007) modelin değişimi şeklinde süreç modellerinde açıklamaktadır. Bazoune (2010) da paralel olarak modellemede çözüm ikna edici olmadığında süreçte tekrar başa dönülerek çözümü iyileştirilmesi gerektiğini vurgulamaktadır.

Revize Etme'deki zihinsel eylemlerden biri çözümdeki hata veya yanlışın kaynağını belirleme olmuştur. Kang & Noh'un (2012) görüşüne paralel olarak çözümde hata yapıldığı düşünüldüğünde çözüm sürecinin hangi kısmında hata yapmış olunabileceği düşünülmüştür. Bununla birlikte işlemler ve düşünceler tekrar gözden geçirilmiştir. Üstesinden gelinemeyen veya yanlış durumlar için alternatif çözüm stratejileri üretilmiş ve üst düzey varsayımlarda değişikliğe gitmeye çalışılmıştır. Berry & Houston (1995) ve Ang'e (2010) göre problemi revize etmede çözümde hata olduğu düşünülüyorsa varsayımlarda bulunma temel basamağına geri dönülerek varsayımlarda değişikliğe gidilmekte ve eski model bu doğrultuda revize edilmektedir. Kang & Noh'un (2012) da bu durumda çözümdeki seçimlerde, varsayımlarda ve yaklaşımlarda değişikliğe gidildiğinden bahsetmektedir.

Sürecin çözüm kararından sonra ortaya çıkan dokuzuncu temel bileşeni ise çözüm raporu olmuştur. Çözüm kararı sonrasında modelleme sürecinde eğer çözümün doğruluğuna ilişkin olumlu bir karar verildiyse çözümdeki gerekli tüm düşünce ve matematiksel gösterimlerin raporlaştırılması gerekmiştir. Bu doğrultuda sürecin başında beri yapılmış karalamalar temize geçilmiş ve süreç çözüm raporu ile sona ermiştir. Benzer olarak Berry & Houston (1995), Berry & Davies (1996) ve

Verschaffel et al. (2000), CCSSM (2010), Kang & Noh (2012) ve Stillman, Galbraith, Brown & Edward (2007) modelleme sürecinin sonlarında çözüm raporunun hazırlandığını ifade etmekte ve süreç modellerinde rapor bileşenine yer vermektedir. Hıdıroğlu (2012) ise bu bileşeni süreç modelinde kısa çözüm raporu olarak açıklamaktadır.

Bu doğrultudan öğrenciler çözüm kararını olumlu olarak belirledikten sonra çözüm raporunun oluşturmaya çalışmışlardır. Bu aşamada çözümdeki gerçekleştirilen düşüncelere ilişkin sözel ifadelerde bulunarak yazılı bir rapor haline getirmeye çalışmışlardır. Bu çalışmada raporlaştırma herhangi bir işte, bir konuda yapılan inceleme, araştırma sonucunu, düşünceleri veya tespit edilenleri yazılı hale getirme veya ifade etme (TDK, 2014) anlamında kullanılmıştır Raporlaştırma'da sergilenen zihinsel eylemler raporda yazılması gereken önemli düşünceleri vurgulama, çözümü ayrıntılı matematiksel ifadelerle destekleme, raporda yazılması gerekenleri sıralama olmuştur. Bu basamağa süreç modelinde Maull & Berry (2001) rapor yazma; Ärlebäck & Bergsten (2010) yazma; Penrose (1978), Berry & Houston (1995) ve Berry & Davies (1996) raporlaştırma olarak yer vermektedir. Borromeo Ferri (2006) ve Biccard & Wessels (2011) ise bu basamağı sunma (presenting); Blum & Leiβ (2007) ise bu basamağı açığa çıkarma (exposing) olarak ifade etmektedir.

Raporlaştırmada ortaya çıkan zihinsel eylemlerden biri raporda yazılması gereken önemli düşüncelerin vurgulanması olmuştur. Voskoglou'ya (2006) göre de modelleme sürecinde elde edilen sonuçlar gerçek yaşam durumuyla ilişkilendirilerek çözümde öne çıkan önemli etkenler ifade edilmektedir. Öğrencilerin bunun yanında raporlaştırmada çözümün ayrıntılı bir şekilde matematiksel ifadelerle desteklenmesine dikkat etmişlerdir. Bir diğer zihinsel eylemleri ise raporda yazılması gerekenlerin sıralama olmuştur.

Matematiksel modelleme sürecinde elde edilen dokuz temel bileşen, dokuz temel basamak ve elli beş alt basamağın ortaya çıkmasında, bu zihinsel eylemler arasındaki geçişlerde ve modelleme döngüsünün karmaşık yapısında üst bilişsel eylemler büyük önem taşımıştır. Bu doğrultuda yukarıdaki süreç modelini şekillendiren zihinsel eylemlerden olan üst bilişsel yapılar tez çalışmasında Planlama'da altı, İzleme'de dört, Değerlendirme'de yedi ve Tahmin'de beş olmak üzere yirmi iki farklı kategori altında ele alınmıştır.

Çalışmada Magiera & Zawojevski'nin (2011) de ifade ettiği gibi öğrencilerin modelleme sürecindeki üst bilişsel eylemleri bireysel düşünceleri veya deneyimleri ve grubun düşünceleri veya deneyimleri olmak üzere iki kaynaktan beslenmiştir. Magiera & Zawojevski (2011) üst bilişsel eylemlere ilişkin bireysel ve grupsal olmak üzere iki temel boyut altında altı farklı kategoriler ortaya koymakta, fakat bunların üst bilişin planlama, izleme, değerlendirme ve tahmin boyutlarından hangisine ait olduğuna ilişkin bir sınıflandırmaya gitmemektedir. Tez çalışmasında farklı olarak planlama, izleme, değerlendirme ve tahmin boyutları dikkate alınarak süreçteki üst bilişsel yapılar kapsamlı olarak açıklanmıştır.

Matematiksel modelleme sürecinde üst bilişsel eylemler üst bilişsel eylem grupları ile şekillenmiştir. Modelleme sürecinin karmaşık yapısının ve alanda çalışmanın zorluğunun iki nedeni, bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin iç içe karmaşık bir süreci oluşturması ve üst bilişsel eylemlerin üst bilişsel eylem gruplarından meydana gelmesi olmuştur. Bu durum modelleme sürecindeki yaklaşımlara ilişkin farklı araştırmacıların bu konudaki görüşlerine de ihtiyaç duyulmasına neden olmaktadır.

Desoete, Roeyers & Buysse'un (2001) ifade ettiği gibi tez çalışmasında da, genel olarak planlama eylemleri harekete geçilmek üzere tasarlanacak zihinsel eylemlerin öncesinde, izleme eylemleri zihinsel eylemlerin uygulama esnasında, değerlendirme eylemleri zihinsel eylemlerin sonunda, tahmin eylemleri ise söz konusu zihinsel eylemlerin öncesinde, uygulanması anında ve sonrasında ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte, planlama eylemleri modelleme sürecinin başlarında olduğu gibi sürecin ortalarında ve sonlarında da, değerlendirme eylemleri de modelleme sürecinin sonlarında olduğu gibi sürecin ortalarında ve başlarında da meydana gelmiştir.

Maaβ (2006) ve Pugalee'nin (2001) vurguladığı gibi çalışmada öğrencilerin sergiledikleri üst bilişsel eylemler süreçteki farklı stratejilerin dikkate alınmasında, bu stratejilerin bilinçli olarak incelenmesinde ve öğrencilere önemli bir uyarıcı rolü üstlenerek onların modelleme becerilerinin gelişiminde önemli bir tetikleyici olmuştur. Bunun yanında Maaβ (2006), Stillman, Galbraith, Brown and Edwards (2007) ve Fernandez, Hadaway and Wilson (1994) üst bilişsel eylemlerin modellemedeki temel basamaklar arasındaki düzensiz geçişlere neden olduğunu ifade etmiştir. Çalışmamızda da benzer şekilde basamaklar arasındaki düzensiz veya beklenmedik geçişlerde üst bilişsel eylemler etkili olmuştur, fakat üst bilişsel eylemlerin hepsi temel basamaklar arasında düzensiz veya beklenmedik geçişlere yol açmamış, süreçteki bir basamağı daha da düzenleyici ve yapılandırıcı bir rol oynamıştır.

Süreç boyunca üst bilişsel ve bilişsel eylemler sürekli olarak iç içe geçmiş eylemlerin içinde ortaya çıkmışlardır ve bu durum da yakın zamanda ortaya çıkan bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin önceliğinden sonralığından bahsetmeyi imkansız hale getirmektedir. Bu doğrultuda bulgular doğrultusunda verilen eylem sırasına bakıldığında yakın zamandaki eylemlerin önceliğinden sonralığından bahsetmek mümkün olmamıştır. Grafikler sadece süreçte ortaya çıkan bilişsel ve üst bilişsel eylemleri ortaya koymaya yönelik derin bir bakış sağlamıştır. Benzer olarak Zawojewski & Lesh (2003) ve Lesh & Doerr (2003) de özellikle bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin ardışık olarak meydana gelmediklerini ifade etmekte, bu eylemlerin paralel ve iç içe geçmiş bir süreci oluşturdukları vurgulamaktadır. Buna göre biliş zaten üst bilişsel eylemlerin özünde varken, üst biliş bazı bilişsel eylemlerde ortaya çıkmaktadır.

Çalışmaya paralel olarak Lester, Garofalo & Kroll (1989), Maaβ (2006), Hartman (1998), Jacobson (1998), Schraw & Dennison (1994), Shia, Howard & McGee (1998), Panaoura & Philippou (2005), Fortunato ve dğr. (1991); Pugalee (2001), Schoenfeld (1985), Senemoğlu (1997) ve Artz & Armour Thomas (1992) da çalışmalarında planlamayı üst bilişsel eylemlerden biri olarak dikkate almaktadır. Bu doğrultuda tez çalışmasında matematiksel modellemedeki üst bilişsel planlama eylemleri olarak amaç ve imkanların analizini yapma, temel büyük düşünceyi tasarlama, çoklu düşünce yapılarını birleştirme ve ayrıştırma, matematiksel ve teknolojik düşünceleri uzlaştırma, matematiksel ve gerçek yaşam düşüncelerini uzlaştırma, grup içi görev paylaşımı sağlama kategorilerine ulaşılmıştır.

Üst bilişsel eylemlerden matematik, teknoloji ve gerçek yaşamı da içine alan düşüncelerde bir uzlaşı sağlama süreci, Magiera & Zawojevski'nin (2011) "matematiksel fikir birliğine varma" eylemiyle paralellik göstermiştir. Çalışmamızda farklı olarak teknolojinin etkisi de ön plana çıkmıştır. Planlamada ortaya çıkan ilk üst bilişsel eylemler problemin amacının ve imkanlarının analiz edilmesi olmuştur. Senemoğlu'na (1997) göre de problem çözme sürecinde problemin amaç ve imkanlarının ortaya çıkarılması üst bilişsel bir süreçtir. Pólya (1945) da üst biliş olarak ifade etmese de problem sürecinde ilk olarak net bir şekilde amacın ortaya koyulmasının gerekli olduğunu ifade etmektedir. Bununla birlikte planlamada çoklu düşünce yapılarını birleştirirken veya ayrıştırırken eski deneyimlerin ve yeni durumun arasında ilişki kurulmuştur. Hurme & Järvelä (2001), Biryukov (2004), Schoenfeld'in (1992) ve Blomhøj (1993) problem çözmede eski deneyimlerden yararlanıldığını ve eski ve yeni düşünceler arasında bağlantılar kurulduğunu ifade ederek üst bilişsel eylemlerin varlığını vurgulamaktadır.

Planlamada temel büyük düşüncenin ortaya koyulmasında öğrencilerin yaptıkları varsayımlarla ve gerekli matematiksel kavramlarla ilgili düşüncelerini organize ettikleri görülmüştür. Bu konuda Lin (2001), üst bilişin bireyin kendi düşüncelerinin, varsayımlarının ve kendi etkinliklerinin sonuçlarını anlaması ve izlemesi yeteneğini kapsayan bir kavram olduğunu ileri sürerek benzer bir görüş ortaya koymaktadır.

Çalışmaya paralel olarak Jacobson (1998), Wilson (1999), Schraw & Dennison (1994), Shia, Howard & McGee (1998), Kapa (2001), Hollingworth & McLoughlin (2000, 2001), Goos, Galbraith & Renshaw (2000), Panaoura & Philippou (2005), Fortunato ve dğr. (1991), Pugalee (2001), Lin (2001), Schoenfeld (1985), Gama (2000), Brown (1987), Lester, Garofalo & Kroll (1989), Goos, Galbraith, & Renshaw (2002), Shahbari, Daher & Raslaan (2014) ve Maaβ (2006) da çalışmalarında izlemeyi üst bilişsel eylemlerden biri olarak dikkate almaktadır. Bu doğrultuda matematiksel modellemede ortaya çıkan üst bilişsel izleme eylemleri, anlık soru ve sorunlara yönelik anlık düşünceler sergileme, planı takip etme, plan dışı durumları ortaya koyma, modelleme sürecine uygun ilerleme oluşmuştur. Çalışmamamızdaki anlık soru ve sorunlara yönelik anlık düşünceler sergileme eylemi Magiera & Zawojevski'nin (2011) "kişisel görüşünü kullanma" ifadesiyle paralellik göstermiştir. Modelleme sürecinde tasarlanan planın uygulanıp uygulanmadığı sürekli olarak takip edilmiştir. Pólya (1945) da üst bilişe vurgu yapmasa da benzer şekilde planın uygulanmasında uygulanacak her adımın kontrol edilmesinden bahsetmektedir. Yani üst bilişsel eylemlerden izlemeye vurgu yapmaktadır. Aynı zamanda modelleme sürecine uygun ilerleme üst bilişsel izleme eyleminden Pólya'nın (1945) benzer şekilde bahsetmektedir. Pólya (1945) da problem çözmede öğrencilerin problem çözme evrelerinden ve tekniklerinden haberdar olmalarının gerekli olduğunu ve bu düşüncelerin problem çözmede dikkate alınmasını vurgulamaktadır. Senemoğlu (1997) problem çözme sürecinde izleme davranışı sergilenirken ani sorun ve sorunlarla karşılaşıldığından bahsetmektedir. Bu durum da çalışmada ortaya konulan anlık soru ve sorunlara yönelik anlık düşünceler sergileme üst bilişsel izleme davranışını destekleyen bir görüştür.

Çalışmaya paralel olarak Wilson (1999), Hartman & Stenberg (1993), Schraw & Dennison (1994), Shia, Howard & McGee (1998), Fortunato ve dğr. (1991); Pugalee (2001); Panaoura & Philippou (2005), Garrett, Mazzocco & Baker (2006), Desoete, Roeyers & Huylebroeck (2006), Schoenfeld (1985), Yimer & Ellerton (2006) ve Magiera & Zawojevski (2011) de çalışmalarında değerlendirmeyi üst bilişsel eylemlerden biri olarak dikkate almaktadır. Bu doğrultuda çalışmada farklı düşünceleri değerlendirme, planı ve planın sonuçlarını sorgulama, düşüncelere ilişkin kişisel ya da grupsal tatmin sağlama, farklı şekillerde ulaşılan çözümü karşılaştırma, işlem hatalarını tarama, alternatif çözüm yolu üretme, yazılı raporu revize etme olmak üzere yedi üst bilişsel değerlendirme eylemi ortaya çıkmıştır.

Çalışmamızdaki üst bilişsel değerlendirme eylemlerden "farklı düşünceleri değerlendirme" eylemi Magiera & Zawojevski'nin (2011) "farklı görüşleri yorumlama" ifadesiyle benzerlik göstermiştir. Gene çalışmamızda "düşüncelere ilişkin kişisel ya da grupsal tatmin sağlama" eylemi Magiera & Zawojevski'nin (2011) "kişisel tatmine ulaşma" ifadesi ile benzerlik göstermiştir. Modelleme sürecinde sürekli olarak düşüncelere ilişkin bireysel veya grupsal tatminin sağlanması önemli olmuştur. Bu sayede grup düşünceleri kabul ederek çözüm sürecinde kullanmışlardır. Paralel olarak Schoenfeld (1985) ve Pólya (1945) da çözüm sürecinde çözüm adımının ve düşüncenin doğruluğunun çözücü tarafından kabul edilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Üst bilişsel değerlendirmede ortaya çıkan bir diğer üst bilişsel eylem ise planı ve planın sonuçlarını sorgulama olmuştur. Benzer şekilde Yimer & Ellerton (2006) da çözüm sürecinde üst bilişsel eylem olarak planın ve sonuçların değerlendirildiğini ifade etmektedir.

Çalışmaya paralel olarak Borromeo Ferri (2006), Treilibs, Burkhardt & Low (1980), Schoenfeld (1985), Garrett, Mazzocco & Baker (2006) ve Desoete, Roeyers & Huylebroeck (2006) de çalışmalarında tahmini üst bilişsel eylemlerden biri olarak dikkate almaktadır. Bu doğrultuda çalışmada genel çözüm stratejisini içeren kapsamlı görüş olan temel büyük düşüncenin ilerleyişine ve stratejik etkenlere yönelik tahminlerde bulunma (karar öncesi), farklı sonuçları uzlaştırmak için tahmin yapma, kararların etkilerini önceden tahmin etme (kararı uygularken), ulaşılamayan stratejik etkenler için tahminlerden yararlanma ve farklı durumlardaki sonuçlara veya aynı durumdaki farklı düşüncelere ilişkin tahminlerde bulunma olmak üzere beş üst bilişsel tahmin eylemi ortaya çıkmıştır.

Tahmin eylemleri öğrencilerin planlama, izleme ve değerlendirme eylemleri arasındaki dengeyi sağlamada önemli bir oynamıştır. Borromeo Ferri'nin (2006) de ifade ettiği gibi çalışmamızda modelleme sürecindeki tahminler genel anlamda sezgiye ve bilgiye dayalı olarak ortaya çıkmıştır ve modelleme döngüsündeki düşünceler matematik, teknoloji ve gerçek yaşama yönelik sezgilere ve bilgilere dayalı tahminlerle şekillenmiştir.

Treilibs, Burkhardt & Low (1980), Schoenfeld'in (1985) inançlar ve sezgilerin modelleme sürecinde üst bilişsel eylemlere örnek teşkil edeceği düşüncesinin temelinde yatan “sense of direction” fikrini ortaya atmaktadır. Buna göre öğrenciler modelleme sürecinde problemde nasıl ilerleyeceklerini ve hangi aşamada nasıl ilerleyebileceklerini bilgilerinin yetmediği durumlarıyla tahmin etmektedirler. Çalışmada da paralel olarak öğrenciler genel çözüm stratejisini içeren kapsamlı görüş olan temel büyük düşüncenin ilerleyişine ve stratejik etkenlere yönelik tahminlerde bulunurken ve kararların etkilerini önceden tahmin ederlerken aslında çözüm yoluna ilişkin tahminlerde bulunmuşlardır. Bununla birlikte tahminlerinde inanç ve sezgileri etkili birer kaynak olmuştur.

Öğrencilerin üst bilişsel eylemlerindeki zenginliği ortaya çıkaran en önemli faktörlerden biri de grup çalışmasıyla gerçekleştirilen çözümler olmuştur. Üst bilişin en genel anlamda düşüncelerle ilgili şeyleri kapsadığı düşünüldüğünde grup içerisinde ortaya çıkan farklı ve zengin düşünceler hem bilişsel hem de üst bilişsel eylemleri zenginleştirmiştir. Grup çalışması modelleme sürecinde farklı düşüncelerin değerlendirilmesinde, çoklu düşüncelerin birleştirilmesinde veya ayrıştırılmasında, anlık soru ve sorunlara yönelik anlık düşüncelerin sergilenmesinde, farklı deneyimlerin ve düşüncelerin paylaşılarak zengin yaklaşımların sergilenmesine olanak sağlamıştır. Benzer şekilde Goos, Galbraith, & Renshaw, 2002 ve Shahbari, Daher & Raslaan (2014) grup çalışmasının üst bilişe pozitif etkisine vurgu yapmaktadır. Zawojewski & Lesh (2003) ve Lesh & Doerr (2003) benzer şekilde model oluşturma etkinliklerinin küçük gruplarla yapılmasının interaktif faaliyetleri arttırdığını, MOElerin üst bilişsel süreçler için uygun ortamları sağlayarak matematiksel modelleri hakkında düşünceler sergilemelerini, onu test etmelerini ve gerekirse varsayımlarını ve tahminlerini revize etmelerini sağlamaktadır. Aynı şekilde Magiera & Zawojevski (2011) modelleme sürecinde üst bilişsel eylemlerin bireysel ve grup düşünceleri veya deneyimlerinden beslendiğini ifade etmektedir.

Çalışmanın üçüncü önemli kavramı olan teknoloji modelleme sürecindeki hem bilişsel hem de üst bilişsel eylemler için zengin ortam yaratmıştır. Hıdıroğlu'nun (2012) dediği gibi modelleme sürecinin her temel basamağında teknolojinin etkisi ortaya çıkmış ve süreçte bazı alt basamaklar teknoloji ile ortaya çıktıkları gibi bazı alt basamaklar da teknolojinin yardımıyla gerçekleşmiştir. Teknoloji (video, animasyon, fotoğraf, GeoGebra, hesap makinesi), Ang'in (2010) ve Baki'nin (2002) ifade ettiği gibi çalışmada da gerçek yaşam durumunu açıklamada, temel büyük düşüncenin ortaya çıkarılmasında, modelin davranışının ve eğilimlerinin sürekli olarak incelenmesinde, matematiksel modelin uygun bir şekilde yorumlanmasında ve doğruluğunun daha ayrıntılı ve sağlıklı bir şekilde irdelenmesinde, düşüncelerin sürekli olarak karşılaştırılmasında, çoklu düşüncelerin birleştirilmesinde, plan dışı ilişkilerin ve özelliklerin kolaylıkla keşfedilmesinde büyük rol oynamıştır. Modelleme sürecinde hesap makinesinin ve GeoGebra'nın sağladığı işlemsel kolaylıklar Lingefjärd (2006; 2012), Ang (2010), Hıdıroğlu (2012) ve Hıdıroğlu & Bukova Güzel'in (2013) de vurguladığı gibi öğrencilerin işlemsel yüklerinin hafifleterek kavramsal işleyişe daha fazla ağırlık verilmesine fırsat vermiştir.

Çalışmada, Siller & Greefrath' ın (2010) ve Henn'in (2007) vurguladığı gibi, modelleme süreci gerçek yaşam, matematiksel dünya, teknolojik dünya olmak üzere üç dünya çerçevesinde şekillenmiştir. Siller & Greefrath (2010) ve Henn (2007) süreçte teknolojik dünyanın, matematiksel dünya ve gerçek yaşam gibi temel bir dünya rolünü üstlendiği ifade etmektedir. Bu çalışmada ise, teknolojik dünyanın süreçte hiçbir zaman temel dünya rolünü üstlenmediği, ama sürecin nerdeyse her anında yardımcı bir dünya rolünde sürece entegre olduğu görülmüştür. Benzer bakış açısıyla da, Siller & Greefrath' ın (2010) ifade ettiğinin aksine süreçte teknolojik model ve teknolojik sonuçlar süreç modelinin bir temel bileşeni olarak değil, süreci destekleyen yardımcı bileşenler olarak karşımıza çıkmıştır. Yani teknoloji sürecin ilerlemesi için gerekli değil destekleyici bir rol üstlenmiştir. Çalışmada teknolojik gösterimler temel basamaklarda matematiksel gösterimlerle ilişkilendirirlerek anlam kazanmışlardır. Çalışmada, teknoloji temel basamaklardaki alt basamakları zenginleştirerek, teknoloji yeterliklerinin entegre olduğu modelleme yeterlikleri hakkında geniş bir açıklama getirilmiştir.

Matematik öğretiminde teknoloji ve matematiksel modellemenin grup çalışması ile entegrasyonu dikkate alınarak oluşturulan öğrenme ortamları yaratılarak öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin geliştirilmesi gerekmektedir. Öğrenciler derslerde matematiksel modelleme problemleriyle baş başa bırakılması, teknolojiyi çözümlerinde kullanmaları desteklenmelidir. Çağımızın bilgisayar çağı olduğu düşünüldüğünde ve günlük yaşamda sorun çözecek öğrencilerin yetiştirilmesinin temel hedef olduğu öğretim programları dikkate alındığı eğitimde iki kavram öne çıkmaktadır: teknoloji ve matematiksel modelleme. Teknoloji destekli ortamda ortaya çıkan zihinsel eylemler öğrencilerin gerekli becerileri kazanmaları etkili bir araçtır. Öğrencilerin ders içi olduğu gibi ders dışı etkinliklerde de matematiksel modelleme problemleriyle baş başa bırakılmalıdır. Tez çalışması kapsamında sürecin bir modeli ortaya konmuş elli beş alt basamaktan ve yirmi iki üst bilişsel yapıdan oluşan bir döngüyü açıklamıştır. Bu da modelleme sürecinin ne kadar zengin bir ortam sağladığının açık bir göstergesidir.

Öğrenme ve problem çözme ortamlarında öğretmenlerin bireysel çalışma kadar grup çalışmalarına da önem vermeleri, öğrencilerin düşüncelerini paylaşacakları ve tartışacakları aktif bir ortamların sağlanması gerekmektedir. Günümüzdeki matematik eğitiminde kullanılmak üzere tasarlanmış birçok bilgisayar matematik yazılımı olduğu düşünüldüğünde öğrencilerin önce programları bilmeleri ve sonra da yazılımcı olmaları küçük yaşlardan itibaren desteklenmelidir. Yazılım becerilerinin gelişmesinde de teknoloji destekli öğrenme ortam ve yazılımı sağlayacak matematiksel ilişkileri içerecek matematiksel modellerin oluşumu çok önemlidir.

Öğretim programların temel becerilerden biri olarak ele alınan modelleme beceri ve teknoloji kullanımının etkisinin öğrenme ortamlarındaki etkisinin arttırılması gerekmektedir. Bunun için ilk aşama öğrencilere öğretecek seviye bu beceriler sahip ileri görüşlü ve idealist öğretmenler yetiştirmek amacıyla teknoloji destekli matematiksel modelleme kapsamında bir dersin konulması ve bu sayede geleceğin öğrencilerini yetiştirecek öğretmenlere bu zihniyeti aşılamaktır. İkinci aşama ise bu öğretmenlerin derslerin teknolojiyi ve matematiksel modellemeyi kullanmalarını sağlayacak desteği ve önemi onlara vermektir.

Tez çalışması teknolojinin ve grup çalışmasının etkisiyle şekillenen matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel süreçlere ilişkin yapılmış uluslararası alan yazındaki en önemli birkaç çalışmadan birisidir. Bununla birlikte üst biliş ve bilişin farkını ortaya çıkarmanın zorluğu bu tür çalışmaların daha fazla yapılmasını zorunlu kılmaktadır. Bu doğrultuda modellemedeki farklı sınıflandırmalar ve teknolojik yazılımlar dikkate alınarak kuramsal çerçevesi faklı olan bir araştırmalar yürütülebilir. Kuramsalı farklı üst biliş bakış açısıyla modelleme sürecine farklı açıklamalar getirilebilir. Modelleme sürecinde ortaya çıkan zihinsel süreçler ortaya çıkarılarak atomik ve bütüncül yaklaşım veya benzeri yeni yaklaşımlar dikkate alınarak yeni ve yaratıcı öğrenme ortamları tasarlanabilir. GeoGebra'nın yapısının matematiksel modelleme için oldukça uygun olduğu düşünüldüğünde GeoeGebra destekli matematiksel modelleme sürecinin bilişsel ve üst bilişsel ayrım dikkate alınarak gerçekleştirilen ilk çalışma olmasıyla öne çıkan bu tez çalışması gibi, yeni matematik yazılımları veya modelleme problemlerine ilişkin farklı sınıflandırmalar çerçevesinde modelleme sürecinin yapısı ilerideki çalışmalarda incelenebilir.

Literatürde matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel eylemlerin ortaya çıkarılmasına yönelik daha kapsamlı çalışmalara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu doğrultuda bilişsel yapılar ve üst bilişsel yapıların ilişkilerine, farklı modelleme türlerindeki üst bilişsel eylemlere, üst biliş kavramının kuramsal yapısına, farklı öğrenci seviyelerindeki üst bilişsel eylemlerin farklılığına ve farklı teknolojik araçların üst bilişsel eylemlere etkisine dikkat çekilerek, modelleme sürecinin daha ayrıntılı incelenmesine ve farklı şekillerde ele alınmasına yönelik çalışmalara önem verilmelidir.

KAYNAKÇA

Abramovich, S. (2007). Modeling as Isomorphism: Using New Technologies in Mathematics Teacher Education. In Electronic Proceedings of the 13th **International Conference on Teaching Mathematical Modeling and Applications.** (http://site.educ.indiana.edu/Portals/161/Public/Abramovich.pdf adresinden 1.11.2013 tarihinde alınmıştır.).

Abramovich, S. (2010). **Topics in Mathematics for Elementary Teachers: A Technology-enhanced Experiential Approach.** Information Age Publishing.

Abrams, J. P. (2001). Mathematical Modeling: Teaching the Open-Ended Application of Mathematics. **The Teaching Mathematical Modeling and the of Representation**. 2001 Yearbook, NCTM, (Eds. Cuoco, A.A. and Curcio, F.R.).

Adkins, J. (1997). **Metacognition: Designing For Transfer. College of Education.** University of Saskatchewan. (http://www.usask.ca/education/coursework/802papers/Adkins/ADKINS.PDF adresinden 8.8.2014 tarihinde alınmıştır.).

Aiken, L. R. (1997). **Qustionnaires and inventories: Surveying opinions and assessing personality.** New York: John Wiley & Sons, Inc.

Akpınar, Y. (1999). **Bilgisayar Destekli Öğretim ve Uygulamalar.** Ankara: Anı Yayıncılık.

Altun, M. (2012). **Ortaöğretimde Matematik Öğretimi.** (17. Baskı) Alfa Aktiel Yayınları, Bursa.

Andrews, J. G. and McLone, R. R. (1976). **Mathematical Modelling.** Butterworth.

Ang, K. C. (2001). Teaching Mathematical Modelling in Singapore Schools. **The Mathematics Educator.** 6(1), 63-75.

Ang, K.C. (2006a). Mathematical Modelling, Technology and H3 Mathematics. **The Mathematics Educator.** 9(2), 33-47.

Ang, K. C. (2006b). **Differential Equations: Models and Methods.** McGraw-Hill, Singapore.

Ang, K. C. (2010). **Teaching and Learning Mathematical Modelling with Technology.** Nanyang Technological University. (http://atcm.mathandtech.org/ep2010/invited/3052010_18134.pdf adresinden 20.03.2012 tarihinde alınmıştır.).

Ärlebäck, J. B. (2009a). On the Use of Realistic Fermi Problems for Introducing Mathematical Modelling in School. **The Montana Mathematics Enthusiast.** 6 (3), 331- 364.

Ärlebäck, J. B. and Bergsten, C. (2010). On the Use of Realistic Fermi Problems in Introducing Mathematical Modelling in Upper Secondary Mathematics. In R. Lesh, P. L. Galbraith, W. Blum & A. Hurford (Eds.), **Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. ICTMA 13**. (pp. 597-609) Springer.

Artzt, A. F. and Armour Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. **Cognition and Instruction.** *9*(2), 137–175.

Athens, L. (2010). Naturalistic inquiry in theory and practice. **Journal of Contemporary Ethnography.** 39(1), 87-125.

Bailey, K. D. (1982). **Methods of social research** (2nd ed.). New York: The Free Pres.

Baki, A. (2008). **Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi.** Harf Eğitim Yayıncılığı, Ankara.

Barbosa, J. C. (2008). **What do students discuss when developing Mathematical Modelling activities?.** Electronically published, State University of Feira de Santana. (http://site.educ.indiana.edu/Portals/161/Public/Barbosa.pdf adresinden 20.03.2012 tarihinde alınmıştır.).

Bazoune, A. (2010). **Systems Dynamics & Control Chapter 1: Introduction to System Dynamics.** (http://faculty.kfupm.edu.sa/ME/qahtanih/ME413Note/Chapter1.pdf adresinden 27.1.2012 tarihinde alınmıştır.).

Berry, J. (2002). Developing Mathematical Modelling Skills: The Role of CAS. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM.** 34(5), 212-220.

Berry, J. and Davies, A. (1996) Written Reports. In C.R. Haines and S. Dunthorne (eds) **Mathematics Learning and assessment: Sharing Innovative Practices.** London: Arnold, 3.3-3.11.

Berry, J. and Houston K. (1995). **Mathematical Modelling.** Bristol: J. W. Arrowsmith Ltd.

Biccard, P. and Wessels, D. C. J. (2011). Documenting the Development of Modelling Competencies of Grade 7 Mathematics Students. **International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling.** 1(5), 375-383.

Biryukov, P. (2004). Metacognitive aspects of solving combinatorics problems. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**.

(http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/biryukov.pdf adresinden 25.10.2010 tarihinde alınmıştır.).

Biryukov, P. (2004). Metacognitive Aspects of Solving Combinatorics Problems. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning.** (www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/biryukov.pdf adresinden 11. 02. 2013 tarihinde alınmıştır.).

Blakey, E. and Spence, S. (1990). **Developing metacognition.** Eric Reproduction Services No. ED327218. (http://www.thememoryhole.org/edu/eric/ed327218.html adresinden 7 ocak 2013 tarihinde elde edilmiştir.).

Blomhøj, M. and Jensen T. H. (2006). What's All the Fuss about Competencies? Experiences with Using a Competence Perspective on Mathematics Education to Develop the Teaching of Mathematical Modelling. In W. Blum, P.L. Galbraith and M. Niss: **Modelling and Applications in Mathematics Education.** New York: Springer, 2(2), 45-56.

Blomhøj, M. and Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching Mathematical Modelling through Project Work - Experiences from an in-Service Course for Upper Secondary Teachers, **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.** 38(2), 163-177.

Blomhøj, M. (1993). Modelling of Dynamical Systems at O-Level. In J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley, & M. Niss (Eds.), **Innovation in mathematics education by modelling and applications**. (pp. 257-268). Chichester: Ellis Horwood.

Blomhøj, M. (2008). Different Perspectives on Mathematical Modelling in Educational Research - Categorising the TSG21 Papers. **ICME 11 International Congress on Mathematics Education**. 1-13.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), **Trends in the teaching and learning of mathematical modelling - Proceedings of ICTMA14**. (pp. 15-30). New York: Springer.

Blum, W. and Leiß, D. (2005). How Do Students and Teachers Deal with Mathematical Modelling Problems? The Example "Sugarloaf". In Haines, C. Galbraith P., Blum, W. and Khan, S. (2006), **Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics.** Chichester: Horwood Publishing, pp. 222-231.

Blum, W. and Leiß, D. (2007). How Do Students and Teachers Deal With Modelling Problems? In C. Haines et al. (Eds), **Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics.** Chichester: Horwood. 222-231.

Blum, W. and Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Application, and Links to Other Subjects-State, Trends and Issues in Mathematics İnstruction. **Educational Studies in Mathematics.** 22(1), 37- 68.

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion.**Mathematische Semesterberichte**. 32, 195-232.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Pesrpetiven. G. Kadunz ve diğerleri. (Ed.), **Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik Der Mathematik,** 23. Vienna: Hölder-Pichler-Tempsky, 15-38.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education-Discussion Document. **Educational Studies in Mathematics.** 51, 149-171.

Blum, W. and Niss, M. (1989). Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. M. Niss, W. Blum ve I. Huntley (Ed.). **Modelling Applications and Applied Problem Solving**. (*s.*1-19). England: Halsted Pres.

Blum, W. and Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Application, and Links to Other Subjects-State, Trends and Issues in Mathematics İnstruction. **Educational Studies in Mathematics.** 22(1), 37- 68.

Bogdan, R. C. and Biklen, S. K. (1998*).* **Qualitative research for education an introduction to theory and methods** (3rd ed.). Allyn and Bacon.

Bogdan, R. C. and Biklen, S.K. (2007). **Qualitative research for education: An introduction to theories and methods** (5th ed.). Boston: Pearson Education.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and Empirical Differentiations of Phases in the Modelling Process. In Kaiser, G., Sriraman B. & Blomhoij, M. (Eds.) **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.** 38(2), 86-95.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behaviour. **Journal für Mathematikdidaktik**. 31 (1), 99-118.

Borromeo Ferri, R. (2011). **Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens. Kognitive Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht**. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Brown, A. L. (1987). Metacognition, Executive Control, Self-Regulation, and Other More Mysterious Mechanisms. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Eds.), **Metacognition, Motivation, and Understanding**. chapter 3 (pp. 65-116). London: LEA Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, E. Ö., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2013). **Bilimsel araştırma yöntemleri** (15. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Carlson, M., Larson, S., and Lesh, R. (2003). Integrating a Models and Modeling Perspective with Existing Research and Practices. In R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), **Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching.** (pp. 465-478). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Chamberlin, S. A. (2002). **Analysis of Interest During and After Model-Eliciting Activities: A Comparison of Gifted and General Population Students**. Doctoral Dissertation.

Charmaz, K. (1983). The grounded theory method: An explication and interpretation. In R. Emerson (Ed.), **Contemporary field research: A collection of readings** (pp. 109-126). Boston, MA: Little Brown Company.

Charmaz, K. (2006a). **Constructing Grounded Theory: A Practical Guide Through Qualitative Analysis.** SAGE Publications: London.

Charmaz, K. (2006b). "What is Theory", "Theorizing in Grounded Theory". C**onstructing Grounded Theory / A Practical Guide Through Qualitative Analysis.** London: Sage Publications Ltd., pp. 125-128; 133-139.

Clarke, A. E. (2005). **Situational analysis: Grounded theory after the postmodern turn.** Thousand Oaks, CA: Sage.

Clarke, D. J., Waywood, A., and Stephens, M. (1993). Probing the structure of mathematical writing. **Educational Studies in Mathematics**. 25, 235-250.

Clement, J. (2002). Protocol evidence on thought experiments used by experts. In Wayne Gray & Christian Schunn (Eds.), **Proceedings of the twenty-fourth**

annual conference of the cognitive science society. (pp. 32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cohors Fresenborg, E. & Kaune, C. (2001). Mechanisms of the Taking Effect of Metacognition in Understanding Processes in Mathematics Teaching, in Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. **Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics**. (pp. 29-38). Ludwigsburg. (http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2001/index.html adresinden 8.3.2014 tarihinde alınmıştır.).

Corbin, J. and Strauss, A. (2008*)*. **Basics of qualitative research** (3rd ed.). Thousand Oaks: Sage.

Creswell, J. W. (2013). **Research design: Qualitative, quantitative and mixed method approaches** (4nd ed.). Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Çepni, S. (2007). **Araştırma ve proje çalışmalarına giriş**. Trabzon: Celepler Matbaacılık.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, Mathemacy and Technocracy: A Trivium For Today. **Mathematical Thinking and Learning.** 1(2), 131-153.

Dahl, B. (2004). Analysing cognitive learning processes through group interviews of successful high school pupils: Development and use of a model. **Educational Studies in Mathematics**. 56, 129-155.

Maki, D. and Thompson, M. (2010). **The Mathematical Modeling Cycle**. http://www.indiana.edu/~hmathmod/modelmodel.html adresinden 5.2.2014 tarihinde alınmıştır.).

Daniels, D. (2002). Metacognition and Reflection. **Educational Psychology.** (http://dennisgdaniels.com/tikiindex.php?page=Metacognition%20and%20Reflection adresinden 03. 05.2012 tarihinde alınmıştır.).

De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on leaming (mathematics) from instmction. **Applied Psychology: An International Review.** 53, 279-310.

DeMarrais, K. (2004). Qualitative interview studies: learning through experience. In deMarrais, K. & Lapan, S. D. (Eds.), **Foundations for research methods of inquiry in education and the social sciences.** New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Desoete, A. and Roeyers, H. (2002). Off-Line Metacognition-A Domain- Specific Retardation in Young Children With Learning Disabilities?. **Learning Disability Quarterly**. 25, Spring.

Desoete, A. (2001). **Off-line metacognition in children with mathematics learning disabilities.** Doctoral research. Belgium: Ghent: RUG University.

Desoete, A., Herbert, R. And Anne, H. (2006). Metacognitive skills in Belgian third grade children (age 8 to 9) with and without mathematical learning disabilities. **Metacognition and Learning.** 1(2), 119-135.

Desoete, A., Roeyers, H. and Buysse, A. (2001). Metacognition and Mathematical Problem Solving in Grade 3. **Journal of Learning Disability.** 34(5), September/October .435–449.

Desoete, A., Roeyers, H. and Huylebroeck, A. (2006). Metacognitive skills in Belgian third grade children (age 8 to 9) with and without mathematical learning disabilities. **Metacognition Learning**, 1, 119-135.

Dewey, J. (1936). **How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process**. In J. Boydson (Ed.). Carbondale: Southern Illinois University Press.

Doerr H. M. and English L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal for Research in Mathematics Education.** 34(2):110–136.

Doerr, H. M. (1997). Experiment, Simulation And Analysis: An Integrated Instructional Approach To The Concept Of Force. **International Journal Of Science Education.** 19, 265-282.

Dossey, J. A., McCrone, S., Giordano, F. R. and Weir, M. D. (2002). **Doing mathematics: Living the standards. Mathematics Methods and Modeling for Today's Mathematics Classroom: A contemporary approach to teaching grades 7-12**. (pp. 65-122). Brooks Cole.

Dönmez, A. (2002). **Matematiğin Öyküsü ve Serüveni 1- Matematik Sözlüğü, Cilt 10.** Toplumsal Dönüşüm Yayınları, İstanbul.

Ebdon, S. A., Coakley, M. M. and Legnard, D. (2003). Mathematical mind journeys: Awakening minds to computational fluency. **Teaching Children Mathematics.** 9,486–493.

Edwards, D & Hamson, M. (1996). **Mathematical Modelling Skills**. London: Macmillan.

Edwards, D. (1997): **Discourse and Cognition.** London: Sage.

Elliott, A. (1993). Metacognitive teaching strategies and young children's mathematical learning. **Aworking paper presented at the Australian**

Association for Research in Education Conference. November, at Fremantle, WA.

English, L. (2009). Promoting Interdisciplinarity Through Mathematical Modelling. *ZDM*—**The International Journal on Mathematics Education**. 41(1-2), 161-181.

English, L. D. and Watters, J. J. (2004). *Mathematical Modeling in the Early School Years.* Mathematics Education Research Journal, 16(3), 59-80.

English, L. D. (2003) Mathematical Modelling With Young Learners. S. J. Lamon, W. A. Parker ve S. K. Houston (Ed.). **Mathematical Modelling: A Way of Life**. (s. 3-18), Chichester: Horwood Publishing.

English, L. & Doerr, H. (2004). Learning through interacting with students' ways of thinking. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), **Mathematics Education For the Third Millennium: Towards 2010.** Proceedings of the twenty-seventh annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (Vol. 1, pp. 215-222). Townsville: MERGA.

English, T. (1996). Evaluation of evolutionary and genetic optimizers: no free lunch. In Fogel, L., Angeline, P., Back T., (eds.), **Evolutionary Programming V: Proceedings of the Fifth Annual Conference on Evolutionary Programming**. MIT Press, pp. 163-169.

Fang, Z. and Cox, B. E. (1999). Emergent metacognition: a study of preschoolers' literate behavior. **Journal of Research in Childhood Education.** 13, 175-187.

Fernandez, M. L., Hadaway, N. and Wilson, J. W. (1994). Problem solving: Managing it all. **The Mathematics Teacher.** Vol. 87, No. 3, pp. 195 - 199.

Finnegan, R. (1996). Oral Tradition. **Encyclopedia of Cultural Anthropology** (Ed. David Levinson, Melvin Ember), Volume: 3, New York, USA, Henry Holt and Company, s. 887-891.

Fischer, R. and Malle, G. (1985). **Mensch und Mathematik- Eine Einfu¨hrung in didaktischen Denken und Handeln**.Zu¨rich: Bibliographisches Institut.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring. **American Psychologist**. 34 (10) 906-911, October 1979.

Fontana, A. and Frey, J.H. (1994). Interview: the art of science (In Denzin, N. K. & Lincoln, Y.S. (Eds.), **Handbook of qualitative research.** CA: Sage Publications.

Fortunato, I., Hecht, D., Tittle, C. K. and Alvarez, L. (1991). Metacognition and problem solving. **The Arithmetic Teacher**. 39(4), 38-40.

Foshay, R. and Kirkley, J. (2003). **Principles for Teaching Problem Solving**. Technical Paper 4, LATO Learning, Inc. (In Pate & Miller, 2011).

Fraenkel, J. R. and Wallen, N. E. (2010). **How to design and evaluate research in education** (7th ed.). McGraw-Hill.

Fram, S. M. (2013). The Constant Comparative Analysis Method Outside of Grounded Theory. **The Qualitative Report**. 18(1), 1-25. (http://www.nova.edu/ssss/QR/QR18/fram1.pdf adresinden 2.5.2014 tarihinde alınmıştır.).

Freudenthal, H. (1991). **Revisiting Mathematics Education**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Galbraith, P. and Stillman, G. (2006). A Framework for Identifying Student Blockages During Transitions in the Modelling Process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM.** 38(2), 143-162.

Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J. and Edwards I. (2007). Facilitating Middle Secondary Modelling Competencies. C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan (Ed.), **Mathematical Modelling: ICTMA 12: Education, Engineering an Economics.** 130-140.

Gama, C. (2000a). **The role of metacognition in problem solving: Promoting reflection in interactive learning systems.** Sussex, England: University of Sussex.

Gama, C. (2000b). Metacognitive Awareness: a Pilot Study in a Software Design Course. **In Proceedings of the 4th Postgraduate Workshop on Human−Centered Technologies**. **Zayas, B. and Simpson, S. (Eds.), Cognitive Science Research Paper 525**. (pp. 91−94), COGS, University of Sussex, Brighton, UK.

Gama, C. A. (2004). **Integrating Metacognition Instruction in Interactive Learning Environments.** University of Sussex. (Doctoral Dissertation).

Garofalo, J. and Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. **Journal for Research in Mathematics Education.** 16, 163-176.

Garrett, A. J., Mazzocco, M. M. and Baker, L. (2006). Development of the metacognitive skills of prediction and evaluation in children with or without math disability. **Learning Disabilities Research & Practice**. 21(2), 77–88.

Gartmann, S. and Freiberg, M. (1995). Metacognition and Mathematical Problem Solving: Helping Students to Ask the Right Questions. **The Mathematics Educator.** 6(1): 9-13.

Gençoğlu, Y. A. (2012). Bir Kavram ve Kuram Üretme Stratejisi Olarak Temellendirilmiş Kuram. **Tarih Okulu Dergisi (TOD).** 7, XVII, 681-700.

Gerrish K, and Lacey A. (2010) **The Research Process in Nursing**. 6th edition. Blackwell Publishing, Oxford.

Glaser, B. (1978). **Theoretical sensitivity.** Mill Valley, CA: Sociology Press.

Glaser, B. (1992). **Basics of Grounded Theory Analysis: Emergence Versus Forcing**. Mill Valley, CA: Sociology Press.

Glaser, B. G. and Strauss, A. L. (1967). **The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research**. Chicago: Adline Publishing Company.

Glaser, B. and Strauss A. (2006). **The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research**. New Brunswick, USA and London, U.K.: Aldine Transaction.

Goos, M., Galbraith, P. and Renshaw, P. (2000). A Money Problem: A source of insight into problem solving action. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, 80, 1-20.

Guest, G., MacQueen, K. M. and Namey, E. (2012). **Applied thematic analysis**. Thousand Oaks: Sage.

Hacker, D. J. (1998). Metacognition: Definitions and empirical foundations. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graesser (Eds.), **Metacognition in educational theory and practice**. (pp. 1-23). Mahwah, NJ: Erlbaum

Haines, C. R. and Crouch, R. (2010). Remarks on a Modeling Cycle and Interpreting Behaviours. In R. Lesh, P. L. Galbraith, W. Blum & A. Hurford (Eds.), **Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies, ICTMA 13**. Part 5, 145-154.

Halaweh, M. (2012). Integration of grounded theory and case study: An exemplary application from e-commerce security perception research. **Journal of information Technology Theory and Application,** *13*(1), 31-50.

Hartman, H. H. and Sternberg, R.J. (1993). A broad BACEIS for improving thinking. **Instructional Science**. 21: 401–425.

Hartman, H. J. (1998). Metacognition in teaching and learning: An introduction. **Instructional Science**, 26, 1-3.

Hartman, H. J. (2001). **Metacognition in learning and instruction: Theory, research and practice**. Boston, MA: Kluwer.

Heirdsfield, A. M. (2002). The Interview in Mathematics Education: The Case of Mental Computation. **Australian Association for Research in Education (AARE) Conference.** (http://www.aare.edu.au/data/publications/2002/hei02334.pdf adresinden 03. 05.2013 tarihinde alınmıştır.).

Heirdsfield, A. M. and Cooper, T. J.(2002). Flexibility and Inflexibility in Accurate mental Addition and Subtraction: Two Case Studies**. Journal of Mathematical Behaviour.** 21, 57-74.

Hıdıroğlu, Ç. N. (2012). **Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinin analiz edilmesi: Yaklaşım ve düşünme süreçleri üzerine bir açıklama.** Yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir. http://tez2.yok.gov.tr/ adresinden edinilmiştir.

Hıdıroğlu, Ç. N. ve Bukova Güzel, E. (2013). Teknoloji Destekli Ortamda Matematiksel Modellemede Modelin Doğrulanmasındaki Yaklaşımların ve Düşünme Süreçlerinin Kavramsallaştırılması. **Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi (KUYEB).** *13(4), 2487-2508*.

Hıdıroğlu, Ç. N. ve Bukova Güzel, E. (2014). Matematiksel Modellemede GeoGebra Kullanımı: Boy-Ayak Uzunluğu Problemi. **Pamukkale üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**. 36 (Temmuz 2014/II), ss. 29-44.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., and Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. **Proceedings of International Conference in Mathematics Education, Monterrey**, Mexico.

Hollingworth, R. W. and McLoughlin, C. (2000). Developing first year science students' problem solving skills: Can we do it online? **Paper presented at the ASCILITE Australia.**

Hollingworth, R., and McLoughlin, C. (2001). Developing science students' metacognitive skills online. **Australian Journal of Educational Technology.** 17(1), 50-63.

Hong, N. S., Mcgee, S. and Howard. B. C. (2001). Essential Components for Solving Various Problems in Multimedia Learning Environments. Paper presented at the annual meeting of the **American Educational Research Association,** Seattle. (http://www.cet.edu/research/pdf/AERA01NHpbslvg.pdf adresinden 2. 3. 2012 tarihinde alınmıştır.).

Hurme, T. R. and Järvelä, S. (2001). Metacognitive processes in problem solving with CSCL in Mathematics. **Paper presented at the first European**

Conference on Computer-Supported Collaborative Learning. EURO-CSCL 2001, Maastricht, The Netherlands, 22-24 March.

Imel, S. (2002). Metacognitive Skills For Adults Learning. ERIC. Trends and Issues Alerts. *No:30.* Columbus, OH: **ERIC Clearinghouse on Adult, Career, and Vocational Education.** (http://www.calpro-online.org/eric/docs/tia00107.pdf adresinden 02. 09. 2012 tarihinde alınmıştır.).

Jacobs, J. E. and Paris, S.G. (1987). Children's Metacognition About Reading: Issues in Definition, Measurement, and _nstruction. **Educational Psychologist**, *22,* 255-278.

Jacobson, R. (1998). Teachers Improving Learning Using Metacognition With Self Monitoring Learning Strategies. **Education.** 118(4), 579 - 589.

Jegede, O., Taplin, M., Fan, R.Y.K., Chan, M.S.C. and Yum, J., (1999). Differences between Low and High Achieving Distance Learners in Locus of Control and Metacognition. **Distance Education**. 20 (2). 255-273.

Jones, M. and Alony, I. (2011). Guiding the Use of Grounded Theory in Doctoral Studies: An Example from the Australian Film Industry", **İnternational Journal of Doctoral Studies**. Volume 6, Wollongong: Universtiy of Wollongong.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In Graumann, G. et al. (Eds.) **Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht.** (pp. 66 – 84) Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G. and Sriraman, B. (2006). A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Education. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.** 38(3), 302-310.

Kaiser, G. (2005). Introduction to the Working Group "Applications and Modelling". **CERME4 Proceedings**. p 1611-1622.

Kaiser Meßmer, G. (1986). **Anwendungen im Mathematikunterricht. Vol. 1 – Theoretische Konzeptionen.** Vol. 2 – Empirische Untersuchungen. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kang, O. K. (2010). A study on a modeling process for fitting mathematical modeling. **Journal of the Korean Society of Educational Research in Mathematics.** 20(1), 73-84.

Kang, O., and Noh, J. (2012). *Teaching mathematical modelling in school mathematics*. **12th International Congress on Mathematical Education.** 8-15 July 2012, Seoul, Korea. (http://www.icme12.org/upload/submission/1930_f.pdf adresinden 4.3.2013 tarihinde alınmıştır.).

Kapa, E. (2001). A metacognitive support during the process of problem solving in a computerized environment. Educational Studies in Mathematics, 47, 317-336.

Kapur, J. N. (1982). The Art of Teaching the Art of Mathematical Modeling. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. 13(2), 185-192.

Karasar, N. (2005). **Bilimsel Araştırma Yöntemi**. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Karataş, İ. ve Güven, B. (2004). 8. Sınıf öğrencilerinin problem çözme becerilerinin belirlenmesi: Bir özel durum çalışması. **Milli Eğitim Dergisi**. Sayı 163.

Kawakami, T., Saeki, A. and Matsuzaki, A. (2012). Necessity for modelling teaching corresponding to diversities: Experimental lessons based on dual modelling cycle framework for the 5th grade pupils**. ICME-12 Preproceedings.** (pp. 3291-3300). Seoul, Korea: ICME-12.

Kramarski B, Mevarech Z. R., and Aramı, M. (2002). The Effects of Metacognitive Instruction on Solving Mathematical Authentic Tasks. **Educational Studies in Mathematics** 49: 225–250, 2002.

Kuiper R. (2002). Enhancing Metacognition Through the Reflective Use of Self-Regulated Learning Strategies. **The Journal of Continuing Education in Nursing.** 33(2):78-87.

Lalinská, M. and Majherová, J. (2010). Aspects Of Visualization During The Exploration Of „Quadratic World" Via The Ict – Problem „Fireworks". **CERME 6 – Proceedings of the sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. 98-107.

Lamb, J., Kawakami, T., Saeki, A., & Matsuzaki, A. (2014). Leading a new pedagogical approach to Australian curriculum mathematics: Using the dual mathematical modelling cycle framework. **Proceedings of the 37th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.** (pp.357-364). Sydney, Australia: The University of Technology, Sydney.

Lamberts, K. (2005). **Mathmatical Modelling of Cognition.** Koen, Lamberts ve Robert L., Goldstone (Ed.), Handbook of Cognition. London: Sage Yayınları.

Larkin, S. (2000). How Can We Discern Metacognition in Year One Children From Interactions Between Students and Teacher? **Paper presented at ESRC Teaching and Learning Research Programme Conference, 9th November 2000**. http://www.tlrp.org/pub/acadpub/Larkin2000.pdf adresinden 8.3.2013 tarihinde alınmıştır.).

Lee, R. M. and Fielding, N. (1996). Qualitative Data Analysis: Representations of a Technology: A Comment on Coffey, Holbrook and Atkinson. **Sociological Research Online**. 1(4). (http://www.socresonline.org.uk/1/4/lf.html adresinden 12.11.2013 tarihinde alınmıştır.).

Lesh, R. and Doerr, H. M. (2003). (Eds.). **Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching.** Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. and Harel, G. (2003). Problem solving, modelling, and local conceptual development. **Mathematical Thinking and Learning.** *5*, 157–190.

Lesh, R. and Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), **The handbook of research on mathematics teaching and learning (2nd ed.)**. (pp. 763 - 804). Reston, VA/Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. and Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In A. Kelly & R. Lesh (Eds), **Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.** (pp.591-645). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum and Associates, Inc.

Lesh, R., Surber, D. and Zawojewski, J. (1983). Phases in Modelling and Phase-Related Processes. J. C. Bergeron ve N. Herscovics. (Ed.), **Proceedings of the Fifth Annual Meetig Psychlogy of Mathematics Education, North American Chapter.** 2, 129-36.

Lester, F. K., Garofalo, J. and Kroll, D. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem solving behavior. In D. McLeod, & V. Adams (Eds.), **Affect and mathematical problem solving: A new perspective**. (ss. 324-355).New York: Springer-Verlag.

Lin, X. (2001). Designing Metacognitive Activities. **Educational Technology Research and Development.** 49(2), 23 -40.

Lingefjärd, T (2006). Faces of Mathematical Modeling. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM.** 38(2), 96-112.

Lingefjärd, T. (2000). **Mathematical Modeling by Prospective Teachers Using Technology**. Electronically published doctoral dissertation, University of Georgia. (http://ma-serv.did.gu.se/matematik/thomas.htm adresinden 28.11.2010 tarihinde alınmıştır.).

Lingefjärd, T. (2002). Mathematical Modeling for Preservice Teachers. A Problem from Anesthesiology. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**. 7, sayfa 117-143.

Lingefjard, T. (2012). Learning Mathematics Through Mathematical Modelling**. Journal of Mathematical Modelling and Application,** Vol. 1, No.5, 41-49.

Livingston, J. A. (1997). **Metacognition: An overview.** (http://gse.buffalo.edu/fas/shuell/CEP564/Metacog.htm adresinden 18.10.2012 tarihinde alınmıştır.).

Lomax, J. (2002). **Metacognition.** (http://www.146.87.24.9:300/metacognition.htm adresinden 21.05.2012 tarihinde alınmıştır.).

Lucangeli, D. and Cornoldi, C. (1997). Mathematics and metacognition: What is the nature of the relationship? **Mathematical Cognition.** 3, 121-139.

Maaß, K. (2006) What are Modelling Competencies? **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.** 38 (2),113-142.

Macdonald K. and Tipton T. (1993). In Gilbert N (ed.) (1993). **Researching Social Life.** London, SAGE Publications.

Magiera, M. T. and Zawojewski, J. (2011). Characterizations of social-based and self-based contexts associated with students' awareness, evaluation, and regulation of their thinking during small-group mathematical modeling. **Journal for Research in Mathematics Education.** 42(5), 486-520.

Mason, J., (1988). Modelling: What Do We Really Want Pupils to Learn? In D. Pimm (Ed.), **Mathematics, Teachers and Children.** (pp. 201-215). London: Hodder & Stoughton.

Matsuzaki, A. (2011). Using Response Analysis Mapping to Display Modellers' Mathematical Modelling Progress. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, and G. Stillman (Eds.), **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14 (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling)** (pp. 499-508). New York, USA: Springer.

Maull, W. and Berry, J. (2001). An Investigation of Student Working Styles in a Mathematical Modelling Activity. **Teaching Mathematics and its Applications.** 20(2), 78-88.

McClellan, J. E. and Dorn, H. (2013). **Dünya Tarihinde Bilim ve Teknoloji.** Çeviri: Haydar Yalçın. Akılçelen Kitaplar, (3. Baskı), Ankara.

Merriam, S. B. (2013). **Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber** (Çev. Ed. Selahattin Turan). Ankara: Nobel Yayıncılık.

Meyer, K., 1994. Derivative-Intense Restricted Maximum Likelihood Estimation of Covariance Components for Animal Models. **5th World Congr. Genet. Appl. Livest. Prod.**. Vol. 18, pp. 365-369.

Meyer, W. J. (1984). **Concepts of mathematical modeling**. Mineola, New York: Dover Publications, INC.

Miles, H. B. and Huberman, A.M. (1994**). Qualitative Data Analysis.** 2. Baskı, Thousand Oaks, CA: Sage.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], (2013). **Ortaöğretim Matematik Dersi (9-12. Sınıflar) Öğretim Programı.** Ankara: MEB Basımevi.

Minichiello, V., Aroni, R., Timewell, E. and Alexander, L. (1990). **In-depth Interviewing: Researching people.** Hong Kong: Longman Cheshire Pty Limited.

Moore, T. J. (2010). **Model-Eliciting Activities: A Case-Based Approach for Getting Students Interested in Material Science and Engineering.** (http://matdl.org/jme/files/2008/06/moore_jme_model_eliciting_activities.pdf adresinden 25.7.2011 tarihinde alınmıştır.).

Mousoulides, N., Christou, C., and Sriraman, B. (2006). **From Problem Solving to Modelling- a Meta Analysis.** (http://www.umt.edu/math/reports/sriraman/mousoulideschristousriraman.pdf adresinden 26.11.2010 tarihinde alınmıştır.).

Mousoulides, N., Sriraman, B. & Christou, C. (2007). From Problem Solving to Modelling: The Emergence of Models and Modelling Perspectives. **Nordic Studies in Mathematics Education.** 12(1), 23-47.

Mousoulides, N.,Chrysostomou, M., Pittalis, M. & Christou C. (2010). Modeling With Technology In Elementary Classrooms. **CERME 6 – Proceedings of the sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.** 199-208.

Munby, H., Versnel, J., Hutchinson, N.L., Chin,P., and Berg, D. H.(2003). Workplace Learning and the Metacognitive Functions of Routines. **Journal of Workplace Learning. Bradford.** Vol 15.iss 3. pg 94, 11 pgs.

Müller, G., & Wittmann, E. (1984). **Der Mathematikunterricht in der Primarstufe**. Braunschweig: Vieweg.

Nancarrow, M. (2004). **Exploration of metacognition and non-routine problem based mathematics instruction on undergraduate student problem solving success**. Doctoral dissertation, The Florida State University, Florida.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). **Principles and Standarts for School Mathematics: An Overview. National Council of Teachers of Mathematics.** Reston: Author.

Nevin, A. and Cardelle Elawar, M. (2003). Dialogic retrospection as a metacognitive action research tool. **Australian Journal of Educational & Developmental Psychology,** 3. (http://www.newcastle.edu.au/group/ajedp/Archive/Volume_3/v3-nevinelawar.html. adresinden 23.05.2014 tarihinde alınmıştır.

Niss, M. (1989). Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula. In W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. Huntley, G. Kaiser-Messmer & L. Profke (Eds.), **Applications and modelling in learning and teaching mathematics**. (pp. 22-31). Chichester: Ellis Horwood.

O'Connor, M.K., Netting, F.E., & Thomas, M.L. (2008). Grounded theory: Managing the challenge for those facing institutional review board oversight. **Qualitative Inquiry**, *14*(1), 28-45.

Özer Keskin, Ö. (2008). **Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel Modelleme Yapabilme Becerilerinin Geliştirilmesi Üzerine Bir Araştırma.** Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Panaoura, A. (2007). **The Impact Of Recent Metacognitive Experiences On Preservice Teachers' Self-Representation In Mathematics And Its Teaching**. Department of Pre-primary Education, Frederick Institute of Technology, Cyprus, pre.pm@fit.ac.cy.

Panaoura, A., & Philippou, G. (2005). **The Measurement of Young Pupils' Metacognitive Ability in Mathematics: The Case of Self-Representation and Self-Evaluation.** (http://cerme4.crm.es adresinden 21.1.2011 tarihinde alınmıştır.).

Panaoura, A., Philippou, G. and Christou, C. (2003). Young Pupils' Metacognitive Ability in Mathematics. **CERME 3**: **Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education** 28 February 3 March 2003 in Bellaria, Italy. (http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_Panaoura_cerme3.pdf adresinden 02. 12. 2012 tarihinde alınmıştır.).

Papaleontiou Louca, E. (2003). The concept and instruction of metacognition. **Teacher Development.** *7*(1), 9-30.

Pate, M. L., Wardlow, G. W. and Johnson, D. M. (2004). Effects of thinking aloud pair problem solving on the troubleshooting performance of undergraduate agriculture students in a power technology course. **Journal of Agricultural Education**, 45(4), 1-11.

Patton, M. Q. (1980). **Qualitative Evaluation Methods**. Newbury Park, CA: Sage.

Patton, M. Q. (2002). **Qualitative research & evaluation methods** (3rd ed.), Thousand Oaks, CA: Sage.

Pedley, T. J. (2005). Applying Mathematics. **Mathematics Today.** 41(3), 79-83.

Peirce, C. S. (1867), **On a New List of Categories in Essential Peirce**. Selected Philosophical Writings Vol. 1 (1867-1893). Edited by Nathan & Christian Kloesel (1992), Indiana University Press, Bloomington, pp. 1-10.

Peirce, W. (2003). **Metacognition: Study Strategies, Monitoring and Motivation**. A greatly expanded text version of a workshop presented November 17, 2004, at Prince George's Community College. (http://academic.pgcc.edu/~wpeirce/MCCCTR/metacognition.htm adresinden 19.6.2013 tarihinde alınmıştır.).

Penrose, O. (1978). How can we teach mathematical modelling? **Journal of Mathematical Modelling for Teachers.** 1, 31.

Peter Koop, A. (2004). Fermi Problems in Primary Mathematics Classrooms: Pupils' Interactive Modelling Processes. In I. Putt, R. Farragher, & M. McLean (Eds.), **Mathematics education for the Third Millenium: Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. pp. 454-461. Townsville, Queensland: MERGA.

Peter Koop. (2009). Teaching and Understanding Mathematical Modelling Through Fermi-Problem. In B. Clarke, B. Grevholm & R. Millman (Eds.), **Tasks in**

Primary Mathematics Teacher Education, 131–146. New York (NY), USA: Springer.

Piaget, J. (1982). **Yapısalcılık.** Çeviren: Füsun Akatlı. İstanbul: Dost Kitapevi Yayınları.

Pierce, W. (2003). **Metacognition: Study Strategies, Monitoring and Motivation.** (http://academic.pg.cc.md.us/~wpierce/MCCCTR/metacognition.htm adresinden 03. 05. 2012 tarihinde alınmıştır.).

Pintrich, P. R. (2002). The role of metacognitive knowledge in learning, teaching, and assessing. **Theory into Practice.** *41*(4), 220.

Pollak, H. (1969). How can we tech application of mathematics?. **Educational Studies in Mathematics.** 2, 393-404.

Pollak, H. (1979) The Interaction between Mathematics and other School Subjects. UNESCO (Ed.). **New Trends in Mathematics Teaching IV.** Paris.

Pólya, G. (1945). **How to solve it: A new aspect of mathematical method.** Princeton, USA, Princeton University Press.

Pólya, G. (1967). **Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.** Hoboken, NJ: Wiley.

Pólya, G. (1973). **How to solve it**. Princeton, NJ: University Press.

Pólya, G. (1990). **How to solve it: The classical introduction to mathematical problem-solving.** New York: Penguin Books, 2nd edition.

Pugalee, D. (2001). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving. **School Science and Mathematics**, 101 (5), 236-246.

Punch, K. F. (2005). **Sosyal Araştırmalara Giriş Nicel ve Nitel Yaklaşımlar.** 1. Basım Çeviri: Bayrak, D., Arslan, H.B., Akyüz, Z.. Siyasal Kitabevi, Ankara.

Richardson, K. (2004). **A design of useful implementation principles for the development, diffusion, and appropriation of knowledge in mathematics classrooms**. Doctoral dissertation, Purdue University.

Rivers, W. P. (2001). Autonomy at All Costs: An Ethnography of Metacognitive Self-Assessment and Self-Management Among Experienced Language Learners. **The Modern Language Journal.** 85 (2), 279–290.

Saeki, A. and Matsuzaki, A. (2013). Dual modelling cycle framework for responding to the diversities of modellers. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. Brown (Eds.), **Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice**. (pp. 89-99). New York, USA: Springer.

Saeki, A. and Matsuzaki, A. (2011). Dual Modelling Cycle Framework for Responding to the Diversities of Modellers. **Proceedings of ICTMA15, CD-ROM (7pages)**. Melbourne, Australia: Australia Catholic University.

Sargent, R. G. (2007) Verification and Validation of Simulation Models. **Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference.** pp. 124-137.

Schoenfeld, A. H (1985). **Mathematical problem solving.** Orlando: Academic Press, Inc.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's All the Fuss About Metacognition? In Schoenfeld, A.H. (ed.), **Cognitive Science and Mathematics Education,** chapter 8, 189-215. Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A., H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. **Mathematical Thinking and Problem Solving**. A. Schoenfeld, H. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.: 53-69).

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. D. A. Grouws (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning** (s. 334–370). Macmillan: New York.

Schraw, G. and Dennison, R. S. (1994). Assessing metacognitive awareness. **Contemporary Educational Psychology.** 19, 460-475.

Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. **Instructional Science.** 26 (1-2), 113-125.

Schraw, G. and Graham, T. (1997). Helping gifted students develop metacognitive awareness. **Roeper Review.** 20, 4-8.

Schraw, G. and Moshman, D. (1995). Metacognitive Theories**. Educational Psychological Review** 7: 351–371.

Schunk, D. H. (2009). **Öğrenme teorileri (Learning theories),** Ankara, Nobel Pub.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. **Der Mathematikunterricht.** 36(6), 5-16.

Schurter, W. A. (2002). Comprehension monitoring: An aid to mathematical problem solving. **Journal of Developmental Education**. 26(2), 22-33.

Schurter, W.A.(2001).**Comprehension Monitoring and Pólya's Heuristics as Tools for Problem Solving by Developmental Mathematics Students.** Texas: The University of The Incarnate Word.UM_: 3027443.

Schwarz, B., Wissmach, B. and Kaiser, G. (2008). 'Last curves not quite correct': Diagnostic compentences of future teachers with regard to modeling and graphical representations. **ZDM Mathematics Education.** 40, (5), 777-790.

Scott, J. (1990). **A matter of record: Documentary sources in social research**. Cambridge: Polity Press.

Senemoğlu, N. (1997). **Gelişim Öğrenme ve Öğretim.** Ankara: Spot Matbaası.

Shahbari, J., Daher, W. and Raslan, S. (2014). Mathematical knowledge and the cognitive and metacognitive processes emerged in model-eliciting activities. **International Journal of New Trends in Education and Their Implications**. 5 (2), 209-2019.

Shia, R. M., Howard, B. C. and McGee, S. (1998). **Metacognition, Multiple Intelligence and Cooperative Learning**. (http://www.cet.edu/pdf/intelligences.pdf adresinden 16 Nisan 2013 tarihinde alınmıştır.).

Siller, H. S. and Greefrath, G. (2010). Mathematical Modelling In Class Regarding To Technology. **CERME 6 – Proceedings of the sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. 108-117.

Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktischsozialem Vertrag. **Journal für Mathematikdidatik.** 24(1), 18–40.

Skovsmose, O. (1994). **Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education**. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J. and Edwards, I. (2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. **Mathematics: Essential Research, Essential Practice.** *2*, 688-697.

Strauss, A. and Corbin, J. (1990). **Basics of Qualitative Research.** (1st ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Strauss, A. and Corbin, J. (1998). **Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory** (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Strübing, J. (2007). Research as pragmatic problem-solving: The pragmatist roots of empirically grounded theorizing. In A. Bryant. & C. Charmaz (Eds.), **The SAGE handbook of grounded theory** (552-573). London: Sage.

Swetz. F. and Hartzler, J. S. (1991). Mathematical modeling in the secondary school curriculum. **Mathematics Teacher.** 84(7), 571.

Şendurur, Y. ve Akgül Barış, D. (2002). Müzik Eğitimi ve Çocuklarda Bilişsel Başarı. **Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi.** 22(1):165-174.

Tanner, H., and Jones, S.(1999). Scaffolding Metacognition: Reflective Discourse and The Development of Mathematical Thinking. Paper presented at the **British Educational Research Association Conference**, University of Sussex, Brighton. (http://www.bera.ac.uk adresinden 12. 11 2012 tarihinde alınmıştır.)

Tatsis, K. (2010). Assessing in-service teachers' modeling activities: Issues of content and complexity. **The 17thAnnual Conference of ALM Adults Learning Mathematics – a Research Forum.** Oslo, 28 June 2010.

Thornberg, R. (2012), Informed grounded theory. Scandinavian Journal of **Educational Research.** 56, 243-259.

Treffers, A. (1987). **Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction- The Wiskobas Project**. Reidel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

Treilibs, V., Burkhardt, H. and Low, B. (1980). **Formulation processes in mathematical modelling**. Nottingham, England: Shell Centre for Mathematical Education.

Turner, R. (2007). Modelling and Applications in PISA. W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn ve M. Niss (Ed.). **Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14. ICMI Study.** New York: Springer.

Türk Dil Kurumu [TDK] (2013). **Güncel Türkçe Sözlük,** (http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GTS.51e292ec8a5eb4.94808124 adresinden 13.01.2013 tarihinde alınmıştır.).

Ülgen, G. (1997). **Eğitim psikolojisi.** (3. baskı). İstanbul: Alkım Yayınları.

Ülgen, G. (2001). **Kavram Geliştirme: Kuramlar ve Uygulamalar** (3. Baskı). Ankara: Pegem-A Yayıncılık.

Verschaffel, L., De Corte, E. & Borghart, I. (1997). Pre-service Teachers' Conceptions and Beliefs about the role of Real-World Knowledge in Mathematical Modeling of School Word Problems. **Learning and Instruction**. 7(4), 339-359.

von Glasersfeld, E. (1995). **Radical constructivism: A way of knowing and learning**. Washington, DC: Falmer.

Vos, H. (2001). **Metacognition in Higher Education.** PhD thesis. Enschede, The Netherlands, University of Twente.

Voskoglou, M. G. (2006). The Use of Mathematical Modelling as a Tool for Learning Mathematics. **Quaderni di Ricerca in Didattica.** 16, 53-60.

Vovides, Y. (2003). Investigating The Impact of Learning From Hypermedia. Sixth **International Conference on Computer Based Learning in Science (CBLIS).** 5-10 July 2003. University of Cyprus. Nicosia: Cyprus. (http://cblis.utc.sk/cbliscdold/2003/3.PartB/Papers/Computer_Based_Learning/Vovides.pdf adresinden 03. 03. 2011 tarihinde alınmıştır.).

Wetherell, M, Taylor and Yates, S. (2001). **Discourse as Data: A guide for analysis**. London: Sage. (http://www.restore.ac.uk/lboro/resources/links/da_primer.php#sthash.dmnCYhlX.dpuf adresinden 2.11.2013 tarihinde alınmıştır.).

Williams, J. S. (1989). Real Problem Solving in Mechanics: The Role of Practical Work in Teaching Mathematical Modelling. M, Niss, W, Blum ve I, Huntley (Ed.), **Modelling Applications and Applied Problem Solving.** England: Halsted Pres. 158-167.

Williamson, R.A. (1996). Self-questioning: An aid to metacognition. **Reading Horizons.** 37, 30-47.

Wilson, J. and Clarke, C. (2002). Monitorin mathematical metacognition. Paper presented at the **Annual Meeting of the American Education Research Association.** New Orleans, LA.

Wilson, J. and Clarke, C. (2004). Towards the modelling of mathamatical metacognition. **Mathematics Education Research Journal,** 16 (2), 25-48.

Wilson, J. (1999). Defining metacognition: A step towards recognising metacognition as a worthwhile part of the curriculum. **Proceedings AARE Conference,** Melbourne. (http://www.aare.edu.au/99pap/wil99527.htm adresinden 30 eylül 2013 tarihinde alınmıştır.).

Wilson, J. (2001). **Assessing metacognition**. Doctoral thesis, The University of Melbourne.

Wilson, J. and Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. **Mathematics EducationResearch Journal.** 16(2), 25–48.

Wilson, W. J. and Chaddha A. (2010). The role of theory in ethnographic research. **Ethnography**. 10(4): 549-564.

Yavuzer, H. (1999). **Çocuk Psikolojisi** (17. Basım). Remzi Kitabevi, İstanbul. Hazırlayan: Psikolog Dr. Sezai Kalafat.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2013). **Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri.** Seçkin Yayıncılık, 7. Baskı, Ankara.

Yıldırım, T. B., Shuman, L. and Besterfield Sacre, M. (2010). Model Eliciting Activities: Assessing Engineering Student Problem Solving and Skill Integration Processes. **İnternational Journal of Engineering**. 26(4), pp. 831–845**.** (http://modelsandmodeling.net/Publications_files/MEA_Ijee2332.pdf adresinden 25.1.2012 tarihinde alınmıştır.).

Yimer, A. & Ellerton N. F. (2006). Cognitive and Metacognitive Aspects of Mathematical Problem Solving: An Emerging Model. **Mathematics**

Education Research Group of Australasia, Conference Proceedings. 575-582.

Yurdakul, B. (2004). **Yapılandırmacı Öğrenme Yaklaşımının Öğrenenlerin Problem Çözme Becerilerine, Biliş Ötesi Farkındalık ve Derse Yönelik Tutum Düzeylerine Etkisi ile Öğrenme Sürecine Katkıları.** Doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi: Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Zohar, A. (1999). Teachers' Metacognitive Knowledge and The Instruction of Higher Order Thinking. **Teaching and Teacher Education.** 15, 413-429.

EKLER

Ek 1: Doktora Tez Çalışmasına İlişkin Araştırma İzni Yazısı

T.C
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
BUCA EĞİTİM FAKÜLTESİ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK
ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI

Sayı : B.8.6.YÖK.2.DE.F.14.0.16.00/301 — 31 Ekim 2014
Konu: Tez Uygulama

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜNE

İLGİ: 27.10.2014 tarih ve 300/2098 sayılı yazınız.

Enstitünüz Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Doktora Programı öğrencisi Çağlar Naci HIDIROĞLU'nun tezi kapsamında Anabilim Dalımızda öğrenim gören 1. sınıf öğrencileri ile uygulama yapması ilgili Bilim Dalı Başkanlıkları ve Anabilim Dalı Başkanlığımızca uygun görülmektedir.

Gereği için bilgilerinize arz ederim.

Prof.Dr.Şuur NİZAMOĞLU
Anabilim Dalı Başkanı

Ek 2: Doktora Tez Çalışmasında Gönüllü Katılımcı Olduğunu Belirtir Dilekçe

Dokuz Eylül Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne;

Ben Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda öğrenim gören nolu isimli öğrenciyim. Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL danışmanlığında Çağlar Naci HIDIROĞLU'nun yürüttüğü "Teknoloji Destekli Ortamda Matematiksel Modelleme Problemlerinin Çözüm Süreçlerinin Analiz Edilmesi: Bilişsel ve Üstbilişsel Yapılar Üzerine Bir Açıklama" başlıklı doktora tezinin Katılımcı Bilgilendirme Formunu okudum. Bu araştırmaya katılımcı olarak katılmayı kabul ediyorum.

Gereğinin yapılmasını arz ederim.

30.09.2014

Ek 3: Matematiksel Modelleme Sürecinin Temel Elemanları

Matematiksel Modelleme Sürecinin Temel Bileşenleri

1. Karmaşık Gerçek Yaşam Durumu
2. Gerçek Yaşam Problem Durumu
3. Gerçek Yaşam Problem Durumunun Modeli
4. Yardımcı Matematiksel Model/ler
5. Ana matematiksel Model
6. Matematiksel Çözüm
7. Gerçek Yaşam Çözümü
8. Çözüm Kararı
9. Çözüm Raporu

Matematiksel Modelleme Sürecinin Temel Basamakları

A. Problemin Analizi
B. Sistematik Yapıyı Kurma
C. Matematikselleştirme
D. Üst matematikselleştirme
E. Matematiksel Analiz
F. Yorumlama
G. Doğrulama
H. Revize Etme
J. Raporlaştırma

"Problemin Analizi" Temel Basamağındaki Alt Basamaklar

Karmaşık Gerçek Yaşam Durumu → Gerçek Yaşam Problem Durumu

A_1. Problemi okuma
A_2. Problemi basit ifadelerle açıklama/sadeleştirme
A_3. Problemdeki stratejik etkenleri düşünme
A_4. Problemdeki verileri inceleme, içeriği yorumlama
A_5. Basit varsayımlar yapma

"Sistematik Yapıyı Kurma" Temel Basamağındaki Alt Basamaklar

Gerçek Yaşam Problem Durumu→Gerçek Yaşam Problem Durumunun Modeli

B_1. Genel çözüm stratejisini tasarlama

B_2. Çözüm için gerekli/gereksiz stratejik etkenleri/bilgileri ayıklama

B_3. Stratejik etkenleri gruplandırma

B_4. Üst düzey varsayımlarda bulunma

B_5. Deneyimlerden yararlanma

B_6. Teknolojik ile matematiksel gösterim arasındaki geçişi gerçekleştirme

"Matematikselleştirme" Temel Basamağındaki Alt Basamaklar

Gerçek Yaşam Problem Durumunun Modeli→Yardımcı Matematiksel Model/ler

C_1. YMMlerin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini bulma

C_2. Bağımlı-bağımsız değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirleme

C_3. Stratejik etkenleri matematiksel sembollerle ifade etme

C_4. Stratejik etkenleri yorumlama, YMM'lere ilişkin ön tahminlerde bulunma

C_5. Teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma

C_6. Problemde verileri bulunmayan stratejik etkenlere yönelik sayısal tahminlerden ve ölçümlerden yararlanma

C_7. Üst düzey matematiksel ve teknolojik bilgiden yararlanma

C_8. Teknolojik ve matematiksel gösterim arasında geçiş yapma

"Üst Matematikselleştirme" Temel Basamağındaki Alt Basamaklar

Yardımcı Matematiksel Model/ler→Ana Matematiksel Model

D_1. YMMlerin cebirsel gösterimlerinden yararlanma

D_2. Bağımlı-Bağımsız değişkenleri, sabitleri ve parametreleri belirleme

D_3.Teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma

D_4. Gerekli YMMleri belirleme

D_5. YMMlerin grafiksel gösterimlerinden yararlanma

D_6. YMMlerin yorumlanmasına olanak sağlayan teknolojik sistemi kurma

D_7. AMM için gerekli verileri YMMlerden elde etme

D_8. Stratejik etkenleri yorumlama ve AMMye ilişkin ön tahminlerde bulunma

D_9. Üst düzey matematiksel ve teknolojik bilgilerden yararlanma

D_{10}. AMMnin cebirsel veya grafiksel gösterimlerini bulma

D_{11}. Teknolojik ve matematiksel gösterim arasındaki geçiş yapma

“Matematiksel Analiz” Temel Basamağındaki Alt Basamaklar

Ana Matematiksel Model→Matematiksel Çözüm

E_1. Y/AMMlerin grafiksel veya cebirsel gösterimlerinden yararlanma

E_2. Teknolojinin görsel olanaklarından yararlanma

E_3. Matematiksel çözüme ve sonuçlara ulaşmak için hesaplama yapma

E_4. Matematiksel çözümü ve sonuçları veren teknolojik sistemi kurma

E_5. Y/AMMlerin kritik noktalarına ilişkin matematiksel sonuçlar elde etme

E_6. Matematiksel ve teknolojik bilgilerden yararlanma

E_7. Teknolojik ile matematiksel gösterim arasındaki geçiş yapma

“Yorumlama” Temel Basamağındaki Alt Basamaklar

Matematiksel Çözüm→Gerçek Yaşam Çözümü

F_1. Matematiksel çözümün gerçek yaşam karşılığını belirleme

F_2. Gerçek yaşam durumu ile zihinsel modeli arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarma

F_3. AMMnin kritik noktalarının gerçek yaşam karşılıklarını belirleme

F_4. Gerçek yaşam çözümü ve sonuçlarının problem durumu açısından incelenmesi

F_5. Varsayımları gerçek yaşam çözümü ve sonuçları doğrultusunda irdeleme

“Doğrulama” Temel Basamağındaki Alt Basamaklar

Gerçek Yaşam Çözümü → Çözüm Kararı

G_1. Gerçek yaşam sonuçlarındaki beklenmeyen durumların irdelenmesi

G_2. Gerçek yaşam sonuçlarını deneyimlere dayalı tahminlerle veya ölçümlerle karşılaştırma

G_3. Gerçek yaşam sonuçlarını problem verileri ile karşılaştırma

G_4. Gerçek yaşam sonuçlarını video ve resimlerdeki durumlarla karşılaştırma

G_5. Gerçek yaşam çözümünün/sonuçlarının yeterliğine ilişkin karara varma

G_6. İşlemleri, düşünceleri ve basamakları kontrol etme

“Revize Etme” Temel Basamağındaki Alt Basamaklar

Gerçek Yaşam Çözümü → Önceki Temel Bileşenlerden Birine Geçiş

H_1. Çözümdeki hata/yanlışın kaynağını belirleme

H_2. İşlemleri ve Düşünceleri tekrar gözden geçirme

H_3. Alternatif çözüm stratejileri belirleme

H_4. Üst düzey varsayımlarda değişiklik yapma

“Raporlaştırma” Temel Basamağındaki Alt Basamaklar

Gerçek Yaşam Çözümü → Çözüm Raporu

J_1. Raporda yazılması gereken önemli düşünceleri vurgulama

J_2. Çözümü ayrıntılı matematiksel ifadelerle destekleme

J_3. Raporda yazılması gerekenleri sıralama

Ek 4: Matematiksel Modelleme Sürecindeki Üst Bilişsel Yapılar

1. Üst Bilişsel Planlama Yapıları

1a. Amaç, imkân ve ihtiyaçların analizini yapma

1b. Temel büyük düşünceyi tasarlama

1c. Çoklu düşünce yapılarını birleştirme ve ayrıştırma

1d. Matematiksel ve teknolojik düşünceleri uzlaştırma

1e. Matematiksel ve gerçek yaşam düşüncelerini uzlaştırma

1f. Grup içi görev paylaşımı sağlama

2. Üst Bilişsel İzleme Yapıları

2a. Anlık soru sorma ve soru/sorunlara yönelik anlık düşünceler üretme

2b. Planı takip etme

2c. Plan dışı durumları ortaya koyma

2d. Modelleme sürecine uygun ilerleme

3. Üst Bilişsel Değerlendirme Yapıları

3a. Farklı düşünceleri değerlendirme

3b. Planı ve planın sonuçlarını sorgulama

3c. Düşüncelere ilişkin kişisel/grupsal tatmin sağlama

3d. Farklı şekillerde ulaşılan sonuçları karşılaştırma

3e. İşlem hatalarını tarama

3f. Alternatif çözüm yolu üretme

3g. Yazılı raporu revize etme

4. Üst Bilişsel Tahmin Yapıları

4a. Temel büyük düşüncenin ilerleyişine ve stratejik etkenlere yönelik tahminlerde bulunma

4b. Sonuçları uzlaştırmak için tahmin yapma

4c. Kararların etkilerini önceden tahmin etme

4d. Ulaşılamayan stratejik etkenler için tahminlerden yararlanma

4e. Farklı durumlardaki sonuçlara veya aynı durumdaki farklı düşüncelere ilişkin tahminlerde bulunma

Ek 5: Düşme Problemi (Teorik Modelleme)

Uzaydan Dünya'ya Atlayış Problemi

Avusturyalı Felix Baumgartner, 2012 yılında ABD'nin New Mexico eyaletindeki Roswell uzay üssünden özel bir kapsül ve tulum içinde çıktığı 39.068 metreden (128.177 feet) Dünya'ya atladı. Tüm dünyanın nefesini tutarak izlediği bu denemede Baumgartner, 52 yıldır kırılamayan en uzun serbest düşüş, en yüksek atlama, balonla en yükseğe çıkma ve en hızlı insan rekorlarını hiçbir hava aracı korunması olmaksızın kırmak için kendini boşluğa bıraktı ve bunlardan üçünü gerçekleştirdi.

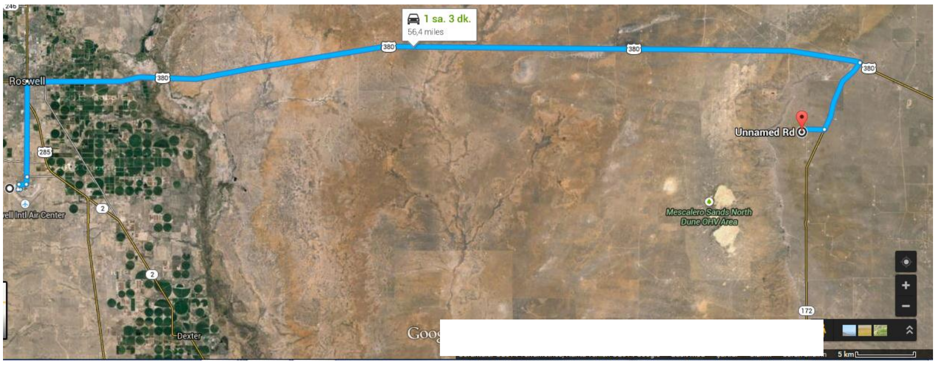
Baumgartner, deneme sırasında birçok hayati tehlike atlattı. Serbest atladığı pozisyonunu iyi ayarlamak zorundaydı. Aksi takdirde kendi çevresinde kontrolsüz dönmeye başlayarak şuurunu, gözlerini kaybedebilir; kalp krizi geçirebilir, beynine geri dönüşü olmayan hasarlar alabilirdi. Yine, çok ince bir tabakadan atladığından kanı gerçek anlamda kaynayabilir, bu da organlarının parçalanmasına neden olabilirdi. Zira, Armstrong çizgisi kabul edilen 19.000 metrenin üzerinde insan vücut ısısı olan 37 derece korunma olmadığında kaynamaya başlıyor. Nitekim, Rus Pyotr Dolgov 1962'de, Amerikan Nick Piantanida ise 1966'da benzer bir deneme sırasında kanlarının kaynaması nedeniyle hayatlarını kaybetmişti. Atladığı sırada kapsülün dış yüzeyine hiç değmemesi gerekiyordu. Zira, herhangi bir temas, basınca dayanıklı tulumunu parçalayarak oksijensiz kalmasına neden olabilirdi. Balonu belli bir yükseklikten sonra soğuktan patlayabilir, ani bir rüzgâr tüm dengesini bozabilirdi.

Asıl atlayış sırasında balon, 1360 kilogram ağırlığındaki özel kapsülün içindeki Baumgartner'ı TSİ 18.30'da yaklaşık 2 saat 40 dakika süren bir yolculuktan sonra uzaya çıkararak, en yüksek kapasiteli jetlerin bile erişebileceğinden üç kat daha fazla yükseğe ulaştırdı.

Ses hızı duvarını aşarak 1136 kilometre hızla inişe geçen Baumgartner, 4 dakika 19 saniye boyunca serbest uçuş yaptı. Baumgartner, yeryüzüne 1524 metre kala paraşütünü açarak yaklaşık 10 dakikada güvenli bir iniş yaptı. Avusturalyalı paraşütçü böylece en yüksek serbest atlama, en hızlı insan ve balonla en yükseğe çıkan insan rekorlarını ele geçirdi. Baumgartner martta 21.000, temmuzda ise 29.000 metreden başarıyla atlamıştı. Bu denemesi ekstrem paraşütçülük kariyerinin son atlayışı oldu. Baumgartner, daha önce 4 dakika 36 saniye olan en uzun serbest düşüş rekorunu ise kıramadı.

En hızlı atlama rekoru 1960 yılında 31.000 metreden saatte 988 kilometre hızla atlayan Joe Kittinger tarafından kırılmıştı. Ses hızı bariyeri deniz seviyesinde saatte 1224 kilometre kabul ediliyor. Fakat 9 bin metreden sonra bu hız saatte 1091 kilometre kabul ediliyor. Baumgartner da 1091 kilometre hızı 9.000 metrenin üzerinde kırdığı için ses hızını aşmış sayılıyor. Nitekim, Baumgartner’ın 1110 kilometreyi aşmasından sonra ekranlara Roswell’deki ekibin zafer sevinci yansıdı.

Felix Baumgartner’in serbest atlayışı sırasında vücuduna etki eden sürtünme kuvvetini Felix’in hızı ve aldığı yolu cinsinden matematiksel olarak ifade ediniz. (Matematiksel modelleri kurunuz.). Düşüş boyunca Felix’in vücuduna etkiyen sürtünme kuvveti farklı durumlarda değişmiş midir? Sürtünme kuvveti ve yerçekimi kuvveti arasındaki ilişki serbest düşme esnasında nasıldır? Çözümlerinizi matematiksel modellerle destekleyerek ve ayrıntılı olarak açıklayınız.

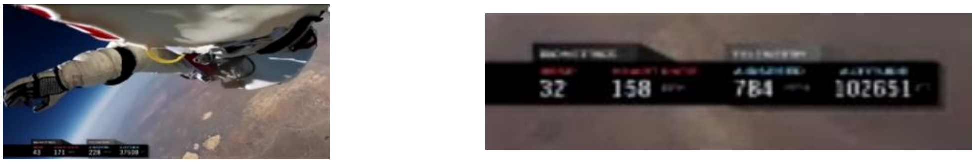


Çıkış: (33.311655,-104.539194) **İniş:** (33.354982,-103.80508)

Bununla birlikte Felix'in iniş için planlanan noktaya düşmediği görülmektedir. Kalkış ve iniş noktaları şekilde gösterilen noktalardır (Planan nokta kırmızı ile işaretlenmiştir.) Felix'in yeryüzüne inişte izlediği eğim açısı hakkında ne söyleyebilirsiniz. İniş açısı ve planlanan noktadan uzaklık arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz. Ayrıntılı olarak düşüncelerinizi yorumlayınız.

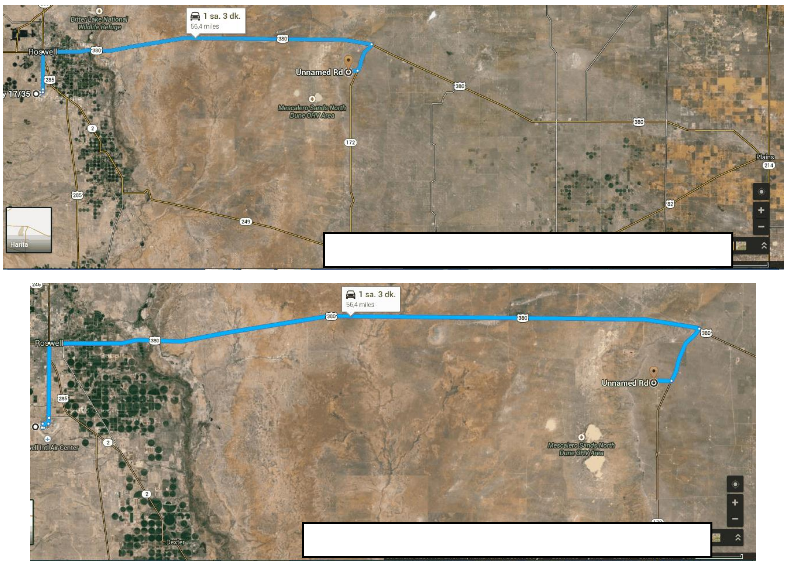
1.1. Düşme Problemi'yle Birlikte Verilen İki Videodan Bazı Kesitler

Düşme Problemiyle Birlikte Verilen 1. Video Kesitleri



Düşme Problemiyle Birlikte Verilen 2. Video Kesitleri

Düşme Problemiyle Birlikte Verilen Ölçekli Fotoğraflar



Ek 6: Tiyatro Problemi (Deneysel Modelleme)

Tiyatro Problemi

Türkiye’de 15 yıllık bir tiyatro geçmişi olan Karakter Tiyatro Grubu “Cimrinin Çocukları” isimli tiyatro oyunuyla Türkiye’de 2014-2015 yılı Şubat ayından itibaren ve 1 ay sürecek bir turneye çıkmışlardır. Yaklaşık 2 saat süren “Cimrinin Çocukları” isimli tiyatro için gidilmesi planlanan 15 il ve turne programı Tablo 1’deki gibidir.

Tablo 1

	TARİH	***YER***
1	22 Şubat	İzmir
2	24 Şubat	Aydın
3	26 Şubat	Muğla
4	28 Şubat	Denizli
5	2 Mart	Antalya
6	4 Mart	Mersin
7	6 Mart	Adana
8	8 Mart	Diyarbakır
9	10 Mart	Kayseri
10	12 Mart	Konya
11	14 Mart	Ankara
12	16 Mart	Eskişehir
13	18 Mart	Bursa
14	20 Mart	Çanakkale
15	22 Mart	İstanbul

Tiyatro ekibinin turnesi 22 Şubat 2015 tarihinde İzmir’de başlamıştır ve 22 Mart 2015 tarihinde İstanbul gösterisiyle son bulacaktır. Turne kapsamında tiyatro ekibi dün Çanakkale’de gerçekleştirdikleri oyundan çıkmış; İstanbul’a doğru ilerlemektedir. Turne ekibi ilgili illerdeki konaklama, yemek vb. ihtiyaçlara göre gider durumlarını dengelemek için her ildeki tiyatro bileti fiyatlarında değişikliğe gidilmiştir. Her ilde önceden satılan bilet fiyatı belirlenerek bilet sayısına göre olabildiğince büyük bir tiyatro salonu hazırlanmıştır.

Fakat turne ekibi fark etmiştir ki bilet fiyatlarını bazı illerde biraz arttırmalarına rağmen bilet fiyatı daha az olan yerlerden daha az kazanç elde etmişlerdir. Çünkü bilet fiyatındaki değişikler gelen izleyici sayısını etkilemiştir. Bu doğrultuda turne kapsamında gidilen illerdeki bilet fiyatı ve biletli sayısı Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2

YER	**Bilet Fiyatı (1 kişi için-TL-tek fiyat)**	**Tiyatroya Gelen Biletli Sayısı**
İzmir	40	289
Aydın	32	345
Muğla	30	367
Denizli	35	321
Antalya	35	318
Mersin	28	344
Adana	35	327
Diyarbakır	25	420
Kayseri	30	359
Konya	34	323
Ankara	45	270
Eskişehir	40	283
Bursa	45	262
Çanakkale	36	311
İstanbul	**?**	**?**

Bunun yanında turne kapsamında tiyatro ekibi her bir ilde yaklaşık olarak ortalama 5000 TLlik bir gider yapmıştır. Bu veriler ışığında İstanbul ile turnesini sonlandıracak ekibin İstanbul'daki gösteride en iyi kazancı elde etmeleri için bilet fiyatını kaç olarak belirlemeleri gerekmektedir?

Siz turneyi düzenleyen ekibin başında olsaydınız belirlenmesi gereken bilet fiyatını nasıl bulurdunuz? Çözümü matematiksel modellerle destekleyerek ve gerekçelendirerek anlatınız.

Ek 7: Köprü Problemi (Simülasyon Modelleme)

Yavuz Sultan Selim Köprüsü Problemi

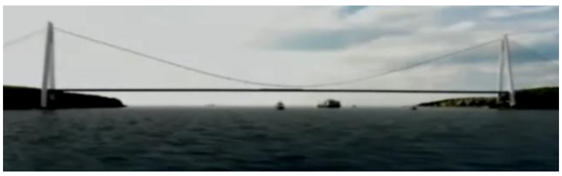
Günümüzde her ay 20.000 yeni aracın trafiğe katıldığı İstanbul'da kayıtlı olan yaklaşık 3 milyon araç bulunmaktadır. İstanbul Boğazı üzerinde bulunan iki köprü ise (Boğaziçi ve Fatih Sultan Mehmet Köprüsü) özellikle günün belirli saatlerinde yaşanan aşırı yoğunluk nedeniyle tam olarak işlevini yerine getirememektedir. Bu nedenle Boğaz'a üçüncü bir köprünün yapılması 2000'li yıllardan itibaren sıkça dile getirilmeye başlanmıştır. Bu doğrultuda yetkililerce helikopterle köprünün yapılması planlanan yerin ve üzerinden geçen yolun güzergâhını belirlemek için keşif gezileri yapılmıştır. Resimlerde görülen bölgeye köprünün yapılmasını kararlaştırılmıştır.

Yapılan köprü ile birlikte özellikle önceki iki köprüde meydana gelen trafik probleminin önüne geçilmesi düşünülmektedir. Ayrıca yük taşıyan kamyon, tır vb. büyük araçların yeni yolu kullanması sağlanarak şehir merkezindeki sıkışıklık önlenmeye çalışılacaktır. Köprüde taşıt yollarının yanı sıra 1+1'lik raylı sistemin de yapılması planlanmaktadır (bkz. Resim 4). Bu sayede Yavuz Sultan Selim Köprüsü İstanbul'da hem taşıt ulaşımının hem de raylı ulaşımın alternatifi olan bir asmalı köprü pozisyonunda olacaktır.

Yapılacak köprünün genişliği ve uzunluğunu veren matematiksel modeller oluşturunuz. Bu şekilde köprünün olası genişliği ve uzunluğu hakkında en iyi tahmininizi nedenleriyle birlikte açıklayınız (Problemle birlikte 4 resim, 1 animasyon ve 1 video verilmiştir.).

3.1. Köprü Problemi'yle Birlikte Verilen Animasyon ve Videodan Bazı Kesitler ve Fotoğraflar

Köprü Problemiyle Birlikte Verilen Animasyon Kesitleri






Köprü Problemiyle Birlikte Verilen Video Kesitleri


Köprü Problemiyle Birlikte Verilen Fotoğraflar