T.C
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTAOKUL 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KANIT İMAJININ İNCELENMESİ

Ümmühan ATEŞ ALPAY

İzmir
2018

T.C
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTAOKUL 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KANIT İMAJININ İNCELENMESİ

Ümmühan ATEŞ ALPAY

Danışman

Prof. Dr. Serkan NARLI

İzmir
2018

YEMİN

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım yüksek lisans tezim *"Ortaokul 8. Sınıf ÖğrencilerininKanıt İmajnın İncelenmesi"*adlı çalışmanın, bilgi toplanması ve sunulması aşamalarında akademik kurallar çerçevesinde çalıştığımı, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda eserleri bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve kaynak kısmında yer verdiğimi beyan ederim.

05/06/2018

Ümmühan ATEŞ ALPAY

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Serkan NARLI

Üye : Prof.Dr. Süha YILMAZ

Üye : Dr.Öğr.Üyesi Emre EV ÇİMEN

Onay
Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

05/06/2018

Prof. Dr. Süha YILMAZ
Enstitü Müdürü V.

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve rehberlik anlamında bana yol gösteren başta çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Serkan NARLI ve diğer Dokuz Eylül Üniversitesi Matematik Eğitimi Bölümünde yer alan değerli hocalarıma,

Hayatım boyunca sevgilerini ve hiçbir desteği benden esirgemeyen her zaman arkamda durarak eğitim hayatımı kolaylaştıran babam Murat Ateş ve annem Cahide Ateş'e,

Çalışkanlığı, dürüstlüğü ve bilgeliğiyle her daim örnek aldığım her anımda yanımda olan canım abim Mehmet ATEŞ ve kıymetli eşine,

Bu çalışmada emeği geçen çalışmayı yürüttüğüm 8. Sınıf öğrencilerine,

Ve hayat arkadaşım, tez yazım sürecinde en büyük destekçimve yardımcım her türlü desteğini benden esirgemeyen canım Ahmet Emre ALPAY'a yanımda olduğu için,

Teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

ÖZET

Ortaokul 8. Sınıf Öğrencilerinin Kanıt İmajının İncelenmesi

Genellikle matematiğe özgü bir işlem olarak kabul edilen ispat, bir yargı, sav, ya da sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2000). Ancak ispat yapmak sadece bununla sınırlı değildir. İspat bir öğrencinin öğrenme süreci içindeki öğrenmelerinin içselleştirilmesi ve yeni edinilen bilgilerin arasındaki bağların güçlenmesi açısından da önemli bir işleve sahiptir. Bilgiler arasında bağlantılar kuran, neden sonuç ilişkisi içerisinde, sorgulamaya dayalı öğrenme süreçleri geçiren bir öğrencinin, yeni öğrenilen bilgileri kullanma ve farklı durumlara transfer etmesi daha olasıdır. Dolayısı ile öğrencinin ispat yapma süreci, üzerinde çalışılması gereken ve çalışılan bir konudur.

Literatüre bakıldığında, ispat yapma sürecini inceleyen çalışmalar olduğunu görülebilir. Ancak bu çalışmaların çok az bir kısmı ortaokul düzeyinde ispat yapma sürecini incelemeyi amaçlamıştır. Dolayısıyla bu çalışma, ortaokul öğrencilerinin ispat yapabilme süreçlerini incelemeyi amaçlamaktadır. Bu amaçla bu araştırmada, Balacheff'in (1988) üç düzey olarak ortaya koyduğu ispat düzeyleri de göz önünde bulundurularak 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat yapma süreçleri, Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan kanıt imajı çatısı çerçevesinde araştırılmıştır.

Bu çalışma betimsel türde olup nitel bir çalışmadır. Araştırma nitel araştırma yöntemlerinde durum çalışması (case study) niteliği taşımaktadır. Çalışmanın ilk aşamasında uzman görüşü alınarak hazırlanan temel düzeydeki ispat sorularından oluşan "İspatlama Düzeyi Belirleme Formu", öğrencilerin ispatlama seviyelerini Balacheff'in ortaya koyduğu ispat düzeylerine göre belirlemek adına, 100 ortaokul 8.sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Uygulama sonunda ispat yapma düzeyinde olan kişiler arasından gönüllü üç öğrenci belirlenerek bu öğrenciler ile çalışmaya devam edilmiştir. Bu öğrencilerin her biri ile üç ayrı yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Bu amaçla üç ayrı görüşme formu hazırlanmıştır. Yapılan yarı

yapılandırılmış görüşmeler ile öğrencilerin kanıt imajları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır

İspatlama Düzeyi Belirleme Formu'nun uygulanması ile elde edilen verilere göre, öğrencilerin onlara yöneltilen ifadeleri ispatlamak için sıklıkla örnek vermeyi uygun gördükleri gözlenmiştir. Dolayısıyla öğrencilerin büyük bir kısmının yapmış olduğu ispatların Balacheff'in ortaya koyduğu ispat seviyelerinden pragmatik ispat seviyesinde yer aldığı görülmüştür.

Diğer yandan, görüşmelere katılan öğrencilerin ispatlama süreçlerindeki bilişsel ve duyuşsal davranışlarına yönelik analizler yapılmıştır. Sonuç olarak öğrencilerin ispat sürecinde oluşturdukları kanıt imajlarının, Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan kanıt imajının bilişsel ve duyuşsal bileşenlerinin özelliklerine sahip oldukları görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Kanıt İmajı, İspat, İspatlama Düzeyi

ABSTRACT

Investigating the Proof Images of Secondary School 8th Grade Students

Generally accepted as a math-specific process, a proof is an effort to prove the validity or invalidity of a judgment, argument or conclusion with sufficient evidence (Yıldırım, 2000). But proving is not limited to this. The proof also has an important role in strengthening the links between the learning of a student's learning process and the newly acquired knowledge. It is more likely that a student who has set up links between information and has undergone inquiry-based learning processes within a cause-and-effect relationship is using new learned information and transferring them to different situations. Therefore, the student's proof making process is a subject that needs to be studied and is already working.

In literature, there are studies examining the process of proving. However, only a few of these studies aimed to examine this process on secondary school level. This study aims to study this topic on secondary school students. In order to achieve this, mathematical proofs' of students were investigated according to proof image of Kidron and Dreyfus (2014) with taking three levels of proofs presented by Balacheff (1988) into account.

This study is descriptive and qualitative and is a qualitative case study which qualitative research methods are used. In the first step, the Proof Level Determination Forms, consisting the basic level proof questions, has been applied to 100 middle schools 8th-grade students in order to determine the proving levels of the students according to the proof levels set by Balacheff. Expert opinion and help were taken during preparing of forms. At the end of the study, three volunteered students were selected to participate in the research further. Three separate semi-structured interviews were conducted with students and three separate interview forms have been prepared. The semi-structured interviews were conducted in order to obtain the proof images of the students.

According to the results deducted from the Proof Level Determination Form, it has been observed that students often find it appropriate to give an example to prove the statements given to them. Therefore, the proofs of large part of the students have done, are at the pragmatic proof level in Balacheff's.

In addition, analyzes were made on the cognitive and affective behaviors of the participating students in interviews. As a result, it was seen that the images of evidence that students made during the proof process had the characteristics of the cognitive and affective components of the image of evidence put forth by Kidron and Dreyfus (2014).

Key words: Proof Image, Proof, Proof Level

BÖLÜM I

GİRİŞ

Matematik insanoğlunun doğayı anlamlandırma çabası ile ortaya çıkmış bir bilim olup "Matematik nedir?" sorusuna yüzyıllardır cevap aranmıştır. Matematiğin önemi ve faydası konusunda herkes hemfikir olsa da tanımı hakkında farklı fikirler ortaya çıkmaktadır. Matematiğin ne olduğuna ilişkin görüşler kişilere, ortamlara ve içinde bulunulan durumlara göre değişiklik gösterebilir. Matematik kimilerine göre kendi terminolojisi olan bir dil, kimilerine göre ise karşılaşılan problemlerin çözümü için kullanılan bir yöntemdir.

Tarihsel süreçte matematik, insanoğlunun eklektik bir şekilde oluşturduğu ve geliştirmeye devam ettiği bir alandır. Bu gelişim sürecinde ortaya çıkan yenilikler önceki çalışmaların ışığında ortaya koyulmuştur. Bu bağlamda matematiksel bilginin oluşumunda daima bir çıkış noktası, neden sonuç ilişkisi bulunmuştur. Kabul görmek adına her yeni bilgi ispatlanmaya gerek duymuştur. Dolayısı ile matematiksel bilginin inşasında önemli rol oynayan kavramlardan biri ispattır. Matematiksel bilginin neden, nasıl doğru olduğunun gösterimi aşamasında ispattan faydalanılır. Yıldırım'a göre (2000) ispat, yaygın anlamıyla bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır. İspat matematiksel bilgi birikiminin sağlam temeller üzerinde tutarlı bir şekilde genişlemesini sağlamaktadır. Bu birikim hem genel anlamda matematik bilgisini hem de öğrencinin öğrenme süreci içerisinde edindiği bilgileri anlamlandırmasını ifade etmektedir. İspat bir öğrencinin ezberci öğrenmeden ayrılarak anlamlı öğrenmelere sahip olması için kendi içinde yapması gereken bir süreçtir.

Ortaokul Matematik Eğitiminde İspatın Yeri

Öğrenciler bir ifadeyi ispatlarken, konuyla ilgili bilgileri arasında bağlar kurarak çıkarım yapmaya çalışırlar. İspat yapan kişinin bu çabası önermeleri ya da formülleri son haliyle ezbere bilmek yerine nedenleri ve sonuçları ile açıklama yapmaya olanak sağlar. Bu bakımdan matematiksel ispat, hem matematiğin hem de matematik eğitiminin önemli bir elemanıdır (Güven, Çelik ve Karataş, 2005).

Matematik eğitimi açısından ispat, matematiksel bilginin oluşumu aşamasında önem taşımaktadır. Knuth'a göre (2002) ispat matematik öğrenme sürecinin bir aracıdır. Bu bağlamda ispat sadece matematiksel bilgiye ulaşmak için değil, sahip olunan bilginin temelini oluşturmak adına da önemsenmektedir.

Matematik eğitimi için öneminden sık sık bahsedilmesine rağmen ispat yapabilmenin, yüksek sınıf düzeylerinde kazanılması gereken bir beceri olarak görüldüğü söylenebilir. Önceki matematik öğretim programı kapsamında ortaokul öğrencileri geometri öğrenme alanında bazı ispatlara yer verilmesine rağmen son düzenlemeler ile bu ispatlar da lise müfredatına kaydırılmıştır. Bu değişikler ile ortaokul matematik öğretim programında ispat kelimesi hiç geçmemektedir. Diğer taraftan ispat ile ilişkilendirilebilecek bazı becerilerin programda yer aldığı görülmektedir.

2013 yılında yayımlanan "Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı" incelendiğinde, programda kazandırılması planlanan beş temel beceri olduğu görülmektedir. Bu beceriler aşağıdaki gibidir (MEB, 2013, s.III):

- Problem çözme
- Matematiksel süreç becerileri:
  - İletişim
  - Akıl yürütme
  - İlişkilendirme
- Duyuşsal beceriler

• Psikomotor beceriler

• Bilgi ve iletişim teknolojileri

Programda ispattan doğrudan bahsedilmemekle birlikte, akıl yürütme becerisi *"Akıl yürütme (muhakeme), eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme teknikleri (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci"* (MEB, 2013, s.IV) olarak tanımlanmıştır. Ayrıca akıl yürütme becerisinin kazandırılması için dikkate alınması gereken ögelerin bazıları şunlardır:

• Çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma

• Mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma

• Bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanma (MEB, 2013).

Buradan hareketle ortaokul müfredatında doğrudan ispata yer verilmemiş olsa da akıl yürütme becerisi içinde istenilen yeterlilikler ile ispat yapma becerisinin örtüştüğü noktaların olduğu söylenebilir. Diğer taraftan en son 2018 ocak ayında güncellenen 1-8 Matematik Dersi Öğretim Programı'nda bu becerilere açıkça yer verilmemiştir. Bununla birlikte bu becerilerin programa yedirildiği söylenebilir.

2018'de yenilenen Matematik Dersi Öğretim Programı'nda 2013'te yayınlanan Öğretim Programında olduğu gibi beş öğrenme alanı vardır. Bu öğrenme alanları "sayılar ve işlemler, cebir, geometri ve ölçme, veri işleme, olasılık" olarak verilmektedir (MEB, 2018, s.12).

Bazı sınıf seviyelerinde bu öğrenme alanlarından tümü bulunurken bazılarında hepsine yer verilmemiştir. Olasılık öğrenme alanı sadece 8. sınıfta yer alırken, cebir öğrenme alanı 5. sınıf hariç tüm sınıflarda yer almaktadır. Sayılar ve İşlemler, Geometri ve Ölçme ve Veri İşleme öğrenme alanları tüm sınıf düzeylerinde bulunmaktadır (MEB, 2018). Burada 2013 programındaki dağılımın korunduğu görünmektedir.

Bu çalışmada ispatlama etkinliklerinde sayılar ve işlemler ile cebir öğrenme alanlarına odaklanılmış, sorular bu alanlara yönelik hazırlanmıştır.

Sayılar ve işlemler, ortaokulun ilk yıllarından itibaren öğrenciler tarafından görülen ve öğretim programında büyük bir yer kaplayan öğrenme alanıdır. Cebir ise ilk olarak 6. sınıf kazanımlarında yer alsa da ayrıntılı olarak ele alınması 8. sınıf düzeyindedir denilebilir. Aşağıda "sayılar ve işlemler" ve "cebir" öğrenme alanının sınıf düzeylerine göre dağılımını gösteren tablo verilmiştir (MEB, 2018).

SIRA	ÖĞRENME ALANI	ALT ÖĞRENME ALANI	SINIFLAR			
			5	6	7	8
1	SAYILAR VE İŞLEMLER	*Doğal Sayılar*	x			
		Doğal Sayılarla İşlemler	x	x		
		Kesirler	x			
		Kesirlerle İşlemler	x	x		
		Ondalık Gösterim	x	x		
		Yüzdeler	x		x	
		Çarpanlar ve Katlar		x		x
		Kümeler		x		
		Tam Sayılar		x		
		Tam Sayılarla İşlemler			x	
		Rasyonel Sayılar			x	
		Rasyonel Sayılarla İşlemler			x	
		Oran		x		
		Oran ve Orantı			x	
		Üslü İfadeler				x
		Kareköklü İfadeler				x
2	CEBİR	*Cebirsel İfadeler*		x	x	
		Eşitlik ve Denklem			x	
		Doğrusal Denklemler				x
		Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler				x
		Eşitsizlikler				x

Şekil 1: Sayılar ve İşlemler ve Cebir öğrenme alanının sınıf düzeylerine göre dağılımını gösteren tablo

2013'te yayımlanan program incelendiğinde yukarıdaki tabloda, oldukça az farklılık görülmektedir. 2013'te 7. sınıfta bulunan "doğrusal denklemler" alt öğrenme alanı, 2018 öğretim programında 8. sınıfa taşınmıştır. 8. sınıfta yer alan "denklem sistemleri" alt öğrenme alanı ise programdan çıkarılmıştır. Ayrıca 2013 programında sadece 6. sınıfta bulunan "cebirsel ifadeler" alt öğrenme alanı yenilenen programda 6. ve 7. sınıflarda yer almaktadır. Dolayısıyla, bu çalışma 2013

Matematik Öğretim Programı'na göre öğrenim gören 8. sınıf öğrenicileri ile yapıldığından araştırma sonuçlarının yenilen programa göre de geçerli olduğu düşünülebilir.

Sayılar ve işlemler öğrenme alanının temelini sayı kavramının oluşturduğu, cebirin de dayanağının sayılardan oluştuğu yorumu yapılabilir. Bu nedenle öğrencilerin cebirle ilgili fikirlerini aritmetikle ilgili daha önceki deneyimlerinden yola çıkarak yapılandırdıklarından bu iki alan arasında yoğun ve karşılıklı bir ilişki olduğu da ifade edilebilir (Akkan ve ark., 2011).

Sayılar ve işlemler, gerek ilkokulun ilk yıllarından itibaren öğrencilerin tanışık olduğu bir alan, gerek de günlük yaşamda kullanılabilir kavramlar olduğundan dolayı öğrenciler için somut bir yapıdadır. Cebir ise bu somut yapıyı soyutlaştırma evresinde kullanılan bu nedenle öğrenciler için anlaşılması daha güç olan bir alandır denilebilir. Akgün (2006)'e göre karşılaştırma, sayma ve sayılarla işlem yapma eylemlerini içeren aritmetiğin soyutlanmasıyla matematiğin önemli bir dalı olan cebir doğmuştur. Tabach ve Friedlander (2003)'den akt. Akkan ve ark. ise cebir için "cebir, geleneksel anlamda "genelleşmiş aritmetik" olarak tanımlanan, çoğunlukla aritmetiğin sembolik tarafı üzerinde yoğunlaşmıştır." tanımını yapmışlardır. Bu açıklamalardan da yola çıkarak söylenebilir ki sayılar ve işlemler ile cebir, birbirini takip eden ilişkili olan iki alandır.

Yapılan bu çalışmada ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin ispat süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu düzeyde hazırlanabilecek ispat gerektiren soruların ise sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait olarak seçilmesi, öğrencilerin seviyelerine ve bilgi birikimlerine uygun olacaktır diye düşünülmüştür. Ayrıca sayılar ve işlemler öğrenme alanı ve matematiksel ispat yapma ile ilişkili olarak kullanılacak bir diğer öğrenme alanı olarak cebir öğrenme alanı belirlenmiş ve sonuç olarak araştırmada kullanılan sorular bu iki öğrenme alanına ait kazanımlara yönelik olarak hazırlanmıştır.

Problem Durumu

Öğretim programına bakıldığında doğrudan ismi geçmese de ispat becerisinin, akıl yürütme becerisinin gelişmesinde rol oynadığı söylenebilir. Dolayısı ile öğretim süreçleri içerisinde, öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin de geliştirilmesi beklenebilir.

İspat yapma soyut bir süreç içermesi nedeni ile öğrenciler açısından zor ve anlaşılması güç bir durumdur. İspat ile ilgili farklı eğitim çalışmaları yapılagelmiştir. Konu ile ilgili literatür incelendiğinde daha çok yükseköğretim düzeyindeki öğrencilerinin ispat yapma süreçleri hakkında çalışmaların olduğu görülmektedir. Ortaokul öğrencilerinin ispat ile ilgili algılarının ortaya konmasına yönelik çalışmaların sayısı daha azdır (Aylar, 2014). Bu durum yükseköğretimde ispat yapılacak konuların daha yoğun olmasından kaynaklanıyor olabilir. Ayrıca ortaokul öğrencilerinin bilişsel seviyeleri göz önüne alınırsa bu seviyedeki ispat çalışmalarının daha zor yürütülebileceği düşünülebilir. Kanıt imajı kanıtın doğrudan kendisini değil sürecini değerlendiren bir teorik çerçevedir. Dolayısıyla bu çalışmada, ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerinin kanıt imajı teorik çerçevesi altında incelenmesi amaçlanmıştır.

Teorik Çerçeve

Araştırmada öncelikle 100 ortaokul 8. sınıf öğrencisine, öğrencilerin ispat yapma seviyelerini belirleyebilmek için hazırlanan "İspatlama Düzeyi Belirleme Formu" uygulanmıştır. Bu formdan elde edilen veriler, Balacheff (1988) in ortaya koyduğu ispat düzeylerine göre değerlendirilmiştir. Buradan "zihinsel ispat" düzeyinde bulanan üç öğrenci seçilmiş ve bu öğrencilerin kanıt imajlarını ortaya çıkarabilmek için yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Balacheff (1988) in ispat seviyeleri ve Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından tanımlanan kanıt imajı teorik çerçeveleri aşağıda sunulmuştur:

Balacheff'in İspat seviyeleri

Balacheff (1988) matematiksel ispatı, pragmatik ispat, zihinsel ispat ve demonstrasyon olmak üzere üç seviyeye ayırmıştır. Bu seviyeler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

1) Pragmatik ispat**:** En alt seviyedeki ispat yapma durumlarıdır. Örnek vererek yapılan gösterimlerdir. Anlaşılması ve yorumlanması en kolay olan ispat şeklidir. Bu ispatlar da ikiye ayrılır:

Acemi Deneycilik: İfadenin rastgele seçilen birkaç örnekte denendiği ve genellemeye varıldığı ispatlardır. Yani, belirli sayıdaki deney durumlarından elde edilen kanıtlarla önerme doğrulanmaya çalışılır.

Kritik Deneyim: İfadenin dikkatle seçilmiş bir örnek üzerinde denendiği ispatlardır. Bilinçli bir örnek seçilir ve o örnek kullanılarak genellemeye ulaşılmaya çalışılır. Öğrencinin o örneği seçmesinin bir gerekçesi vardır.

2) Zihinsel İspat (Entelllektüel İspat): Özellikleri formüle etmeye dayalı olarak yapılan ispatlardır. Özellikler arası ilişki kullanılır. Matematik diline ve tanımlara uygun olarak yapılır. Bu ispat türü de ikiye ayrılır:

Belirleyici/Kapsamlı/Jenerik Örnek: Matematiğin yapısal özellikleri dikkate alınarak seçilen belirleyici bir örnek yardımıyla doğrulama yapılır.

Düşünce Deneyi: Önerme örneklerden ziyade matematiğin yapısal özellikleri ile doğrulanmaya çalışılır. Bu süreç karmaşık bilişsel, dilsel ve anlatımsal yapılar içerir.

3) Demonstrasyon/Gösterim**:** En ileri seviye ispatlardır, bir teoriyle organize edilmek zorunda olan veya bir topluluk tarafından kabul edilen bilgileri kullanan ispatlardır.

Kanıt İmajı

Kidron ve Dreyfus (2014) ispat yapma sürecinde sezgisel ve mantıksal düşünme arasındaki etkileşimi ve bu etkileşim arasından doğan bilginin yapılandırılması sürecini 'bağlamda soyutlama' (abstraction in context) teorik çerçevesi ile incelediklerinde kanıt imajı (proof image) kavramına ulaşmışlardır. Bu kavram çerçevesinde, bir iddianın neden doğru olduğunu anlamaya teşebbüs etmiş olan bireyin bir kanıt imajına sahip olabileceğini belirten yazarlar, kanıt imajını iddianın neden doğru olduğuyla ilgili bireyin bilişsel anlayışı ve kanıt süresince etkili olan anlama, doğruluk ve kesinlik hissi olmak üzere iki bileşene ayırmıştır. Bu bileşenlerden ilki kişisel, dinamik, mantıksal bağlantılar içeren ve bir şeyin oluşumuna sebebiyet veren bilişsel bir anlayıştır (ispatın neden doğru olduğuna dair). İkinci bileşen ise sezgisel ikna sağlayan duyuşsal bir kesinlik hissidir.

AİC (Absraction in Context) Bağlamda soyutlama teorisi ise Freudenthal Okulunun dikey matematikleştirme görüşünü temel almaktadır. Bu yaklaşıma göre yeni yapıların önceki yapıların dikey olarak yeniden organize edilmesi ve yapılar arasında ilişki kurulmasıyla öğrenme gerçekleşmektedir. Dikey matematikleştirme, öğrenen tarafından inşa edilen, önceki matematiksel yapıların, matematik içinde ve matematiksel anlamda yeniden organizasyonunu içeren bir süreçtir. İspat imajının çatısı olan 'bağlamda soyutlama' araştırmacılara mikro-analitik düzeyde matematiksel, tarihsel, sosyal bağlamda oluşan matematiksel soyutlama sürecini tanımlamayı ve analiz etmeyi sağlar. AİC, aktivite teorisini bir teorik çerçeve olarak düşünen Giest'i de takip eder. Aktivite teorisi öğrenmenin gerçekleştiği matematiksel, tarihsel, sosyal ve öğrenme bağlamlarını dikkate alırken öncelikli olarak bilişsel süreçleri göz önüne alan bir çerçeve sunar. Aktivite teorisine göre, önceki aktivitelerin ürünleri doğal olarak başka olgulara dönüşür, aktiviteler devam ettikçe soyutlamanın oluşumu ve gelişimi görülür. Soyutlama ile alakalı bu eylemler epistemik-öğrenenin bilgisiyle alakalı ve gözlenebilir eylemlerdir. AİC, soyutlama ile ilgili birçok araştırma çalışmasında ve bilginin yapılandırılmasının dinamik sürecinde kullanılmıştır(Dreyfus, Hershkowitz, Schwarz, 2001; Kidron, Dreyfus, 2010).

Davydov’un bilgi oluşturma felsefesine ve Leont’ev’in Aktivite Teorisine dayanan matematiksel soyutlama ve bilgi oluşturma sürecini açıklayan teorilerden biri de RBC soyutlama teorisidir (Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus, 2001). Kidron ve Dreyfus kanıt imajı kavramının oluşumunda RBC soyutlama teorisinden yararlanmışlardır. RBC teorisi Tanıma (Recognizing), İnşa Etme (Building with), Oluşturma (Constructing) epistemik eylemlerinin ilk harflerinin bir araya getirilmesiyle oluşmuştur.

Tanıma (R), öğrencilerin ilgilendiği probleme uygun önceden oluşturulmuş belli yapıları fark ettiğinde meydana gelir (Türnüklü ve Özcan, 2014). Bireyin karşılaştığı durum ile ilgili geçmiş yaşantılarını sürece dahil etmesi şeklinde yorumlanabilir.

Kullanma (B), belirli bir amacı gerçekleştirmek için önceden oluşturulan matematiksel yapıların kullanılmasıdır (Schwarz, Dreyfus, Hadas & Hershkowitz, 2004).

Oluşturma (C) soyutlama sürecinin ana basamağıdır ve oluşturma tanınan yapıların kısmi değişikliğe uğratılarak yeniden yapılandırılması ve düzenlenmesi sürecidir (Bikner – Ahsbahs, 2004).

Amaç ve Önem

İspat yapabilmenin, soyut süreçleri içerisinde barındırdığı için gelişim seviyesi açısından ortaokul öğrencilerine göre üst düzey bir beceri olduğu düşünülebilir. Ancak Kidron ve Dreyfus tarafından ortaya konan kanıt imajı kavramı bize ispat yapmak için matematik dilini kullanmanın gerekli olmadığını, bir şeyin doğruluğu veya yanlışlığına dair zihinde oluşan bütün kavramların ispat imajı olarak adlandırılabileceğini söylemektedir. Kidron ve Dreyfus kanıt imajı kavramını ortaya koydukları makalede, kanıt imajı kavramının ilkokul seviyesinde bulunan öğrencilerdeki yansımalarının nasıl olacağının merak konusu olduğunu dile getirmişlerdir.

Bu bağlamda ortaokul öğrencilerin ispat yapma sürecinde kullandıkları kanıt imajının araştırılması ve bu sınıf düzeyindeki öğrencilerin ispat yapma süreçlerin nasıl olduğunun incelenmesi bu araştırmanın amacını oluşturmaktadır. Matematiksel ispat yapma süreci ile ilgili yapılmış çalışmalar incelendiğinde erken yaş grubunda yapılan çalışmaların nispeten az olduğu görülebilir. Bu çalışmanın ortaokul düzeyindeki öğrencilerin ispat yapabilme süreçleri hakkında bilgi sahibi olunması ve kanıt imajlarının ortaya çıkarılması konusunda literatüre fayda sağlayacağı düşünülmektedir.

Problem Cümlesi

Araştırmanın problemi aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

Ortaokul 8. Sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreci ve süreçte kullandıkları kanıt imajları nasıldır?

Alt Problemler

Araştırmanın alt problemleri aşağıda verilmiştir.

1. Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin, Balacheff tarafından ortaya konan ispat seviyelerine göre dağılımı nasıldır?
2. Ortaokul 8.sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçleri kanıt imajı bağlamında incelendiğinde ortaya çıkan sonuçlar nelerdir?

Sayıltılar

1. Araştırmada öğrenciler ile yapılan görüşmelerde, görüşme formundaki sorulara öğrencilerin doğru ve samimi cevap verdikleri varsayılmaktadır.
2. Veri toplama araçlarının tüm yetkileri kapsadığı ve görüşleri ortaya çıkarır nitelikte olduğu varsayılmaktadır.

Sınırlılıklar

Bu araştırma, çalışmaya katılan öğrenciler ve sorulan sorular ile sınırlıdır. Elde edilen bulgulardan yola çıkılarak ulaşılan sonuçlar bu öğrenciler için geçerlidir.

Tanımlar

İspat

Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama (TDK).

Cebir

Yapı, bağıntı ve nicelik üzerine uğraşan bir matematik dalıdır. Bilinmeyen değerlerin, simge ve harflerle betimlenerek kurulan denklemlerle bulunması (ya da bilinmeyenlerin arasındaki bağıntının bulunması) temeline dayanır.

Kısaltmalar

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

TDK: Türk Dil Kurumu

AiC : Abstraction in Context (Bağlamda Soyutlama)

R- : Recognizing (Tanıma)

B- : Building With (Kullanma)

C- : Construction (Oluşturma)

EBOB: En Büyük Ortak Bölen

EKOK: En Küçük Ortak Bölen

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

Literatür incelemesi yapıldığında ortaokul öğrencilerinin ispat seviyelerini araştıran çalışma sayısının az olduğu söylenebilir. Bu kısıtlılığın sebebi ortaokul öğrencilerinin henüz soyut düşünme evresine yeni girmelerinden dolayısıyla ispat yapabilme becerilerinin gelişmemesidir denilebilir.

Bununla ilgili olarak bazı çalışmalarda ortaokul öğrencilerine ispat yapma yöntemleri ile ilgili konu anlatımları yapıldığında karşılaştıkları önermeleri ispatlayabildiklerine ilişkin bulgulara da ulaşılmıştır.

Aylar (2014), yapmış olduğu çalışmada, 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapma becerilerini geliştirmeyi amaçlayan bir öğretim sonrasında öğrencilerin ispata yönelik algı ve ispat yapma becerilerinin geliştiğini gözlemlemiştir. 7. sınıftan 54 öğrenci ile yapılan çalışmada 14 hafta, haftada 1 saat süren ispat öğretimi gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen bu derslerde doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yoluyla ispat yöntemleri ele alınmıştır. Araştırmacı uygulamaların ardından öğrencilerin ispata yönelik algılarındaki değişimi ve ispat yöntemlerine yönelik beceri ve performanslarını betimlemeyi amaçlayan testler uygulanmıştır. Öğrenciler ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen bulgular öğrencilerin cebirsel ifadeleri anlamada ve uygulamada sorun yaşadıklarını ortaya koymuştur. İspat yapmaya yönelik performanslarını olumsuz etkileyen faktörlerden birisinin bu olduğu söylenebilir. Ayrıca öğrencilerin durum yoluyla ispat yapmada zorlandıkları ama aksine örnek verme, doğrudan ispat ve tüketerek ispatlama yöntemleriyle önermeleri ispatlamada başarılı oldukları görülmüştür.

Arslan (2007) tarafından yapılan başka bir çalışmada 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişiminin incelenmesi amaçlanmıştır. 679 öğrenci ile gerçekleştirilen çalışmada ortaokul öğrencilerinin muhakeme etme düzeylerinin düşük olduğu ve bu süreçte kullanılması beklenen stratejileri yeterli düzeyde kullanamadıkları belirlenmiştir. Diğer yandan verilen ifadelerin doğruluğunu göstermede tercih edilen ispat türünün sınıf seviyesi ile birlikte belli oranda değiştiği (görsel ve örnekle doğrulamadan cebirsel ispata yönelme) görülmüştür.

Pala (2016), ilköğretim matematik öğretmen adayları ile yaptığı çalışmada, öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini belirlemede kullandıkları yaklaşımları ve süreçte oluşturdukları imajları kanıt imajı (Kidron ve Dreyfus, 2014) teorik çerçevesi ile incelemeyi amaçlamıştır. Durum çalışması yönteminin kullanıldığı çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adayları 5 hafta boyunca gözlenmiş, tüm grup ile genel uygulama çalışmaları yapılmıştır. Ayrıca kanıt imajına ilişkin analizlerin gerçekleştirilmesi amacıyla 3 öğrenci ile sonsuz kümelerin denkliğine yönelik ispat çalışmaları içeren görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Elde edilen verilerin analizinde içerik analizi kullanılmıştır. Bu çalışmada ulaşılan bulgular aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

· Genel uygulama çalışmalarının sonucunda, öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini belirlemede genel olarak sezgisel yaklaşımı kullandıkları görülmüştür.

· Öğrencilerden bir kısmının, matematiksel dili yetersiz kullanma, ispat yöntemlerine ilişkin yetersiz bilgiye sahip olma givbi nedenlerden dolayı formal ispata ulaşamadıkları görülmüştür.

· Bireysel çalışmalardan elde edilen bulgulara göre ise üç öğretmen adayının da formal ispata ulaşabildikleri ve Kidron ve Dreyfus tarafından ortaya konan tanım ışığında kanıt imajına sahip oldukları görülmüştür.

Zalimoğlu (2012) yaptığı çalışmada 8.sınıf öğrencileri ile çalışmıştır. 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat ve akıl yürütme sürecini, ispat temsillerine olan eğilimlerini tümevarım ve tümdengelimsel muhakeme doğrultusunda incelemiştir. Bu amaçla sekiz açık uçlu sorudan oluşan soru formunu kullanmıştır. Soru seçiminde geometri temelli üçgen ve açıların ön planda tutulmasına özen gösterilmiştir. Sonuç olarak, öğrencilerin deney ve gözleme dayalı tümevarımsal yaklaşımı tercih ettikleri, cebirsel ispatı tercih etmedikleri, doğrudan ispatı kısmen kullanabildikleri ancak dolaylı ispata dayalı akıl yürütmeyi hemen hemen hiç bilmedikleri ortaya çıkmıştır.

Knuth ve Sutherland (2004) yaptıkları çalışmada öğrencilerin örnek vererek doğrulama yöntemine yoğunlaşmışlardır. Araştırmada, öğrenciler örnekle doğrulamanın ispat için yeter olup olmadığını ne oranda düşünmektedir? gibi sorulara cevap aramışlardır. Veriler 394 ortaokul öğrencisinden toplanmıştır. Öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin %40'nın örnekle doğrulamayı ispat olarak seçtiği görülmüştür. İspatı doğru olarak seçen öğrenciler ise % 30' u oluşturmaktadır. Sonuç olarak bu çalışma çoğu ortaokul öğrencisinin genellenebilir yargıya ulaşmayı pek fazla kavrayamadıklarını ortaya koymuştur.

Narlı ve diğerleri (2015) yapmış oldukları çalışmada, matematik öğretmen adaylarının ispat sürecinin duyuşsal ve bilişsel boyutlarını kanıt imajı teorik çatısı, duyuşsal olmayan bilişsel hisler ve RBC açısından incelemişlerdir. Yapılan çalışmada iki açık uçlu sorudan oluşan ölçek 120 matematik öğretmenliği 3.sınıf öğrencisine uygulanmış, sorulara doğru cevap veren üç öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır.

Çalışmanın sonunda öğrencilerin kanıt imajına sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca ispat süreci incelendiğinde sadece kanıt imajının ortaya çıkışı değil, formal ispata geçişin gerçekleştiği de gözlemlenmiştir. Diğer yandan süreçte duyuşsal olmayan bilişsel hislerin de ispatın inşasında önemli rol oynadığı sonucuna varılmıştır.

Zack (2002)'ın 1999-2000 öğretim yılında 20 ve 2000-2001 öğretim yılında 23 aynı 5. sınıf öğrencileri ile yaptığı çalışmada, öğrencilerin muhakeme ve ispatlama içeren konuşmalarındaki bir ifadenin yanlış olduğunu gösteren tartışmalarını incelenmiştir. Çalışmada öğrencilere bir problem verilmiş, daha önceden aynı problemle uğraşan bir öğrencinin önerdiği çözüm açıklanmıştır. Sonrasında ise onlardan bu önerinin doğru olup olmadığını kendi grupları arasında tartışmaları istenmiştir. Çalışmanın sonunda ise verilerin önermenin yanlış olduğuna dair 5 tür açıklama öğrenciler tarafından getirilmiştir. Bu açıklamaların öğrencilerin matematiği kavramalarını aydınlattığı ve öğretmenler içinde yeni fikirler olarak faydalanıldığı görülmüştür.

Bir diğer araştırmada ise Çalışkan (2012) iki yönlü bir çalışma yürütmüştür. Çalışmanın ilk aşamasında ilköğretim 6., 7., 8. sınıf matematik ders kitaplarındaki etkinlikleri Balacheff'in ispat düzeylerine göre analiz etmiştir. Yapılan araştırmada ders kitaplarının ve matematik öğretim programının öğrencilerin ispat becerilerini geliştirmede yeterli düzeyde olmadığı görülmüştür. Yer alan etkinliklerin Balacheff'in düzeylerinden alt seviyede yoğunlaştığı, üst seviyelere yönelik etkinliklere hiç yer verilmediği görülmüştür. İkinci aşamada ise ilköğretim 8.sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyeleri arasındaki ilişki incelenmiştir. Öğrencilerin ispat düzeyi ile SBS başarıları arasında anlamlı bir ilişki olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Özer ve Arıkan (2002) tarafından lise öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme düzeyleri incelenmiştir. Bu kapsamda lise 2. sınıfta bulunan 110 öğrenciye açık uçlu sorular sorularak ve üç ayrı lise 1. sınıf öğrencileri ile görüşme yapılarak çalışma yürütülmüştür. Öğrencilerin yaptıkları ispatlar Balacheff ve Miyazaki'nin ispat konusunda yaptığı çalışmalar göz önünde tutularak değerlendirilmiştir. Buna göre öğrencilerin neredeyse tamamının tümdengelim ve tümevarım yoluyla ispat yapamadıkları görülmüştür. Çalışmada sorulan altı açık uçlu soruyu öğrenciler genelde sayısal değerler vererek yanıtlamışlardır. Bu yanıtlar Balacheff'in belirlediği ispat seviyelerinden pragmatik ispat düzeyinde yer almaktadır. Öğrencilerin sadece iki soruya yaklaşık olarak %47 oranında demonstrasyon seviyesinde yanıt verdikleri görülmüştür.

Araştırma sonucunda lise 2 öğrencilerinin istenilen düzeyde ya da materyal kullanarak ispat yapamadıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin ispat yapma yöntem ve tekniklerini yeterince kullanmadıkları saptanmıştır.

Cooper ve diğerleri (2011) yapmış oldukları çalışmada öğrencilerin matematiksel varsayımları doğrulamak için kullandıkları örneklerin niteliğine odaklanmışlardır. Çalışmada örnekle doğrulama ispat olarak değerlendirilmemekle birlikte ispat düşüncesine giden yol olarak üzerinde durulmuştur. Çalışma kapsamında yedi altıncı sınıf, yedi yedinci sınıf ve beş sekizinci sınıf öğrencisi ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler boyunca öğrencilere toplam iki soru yöneltilmiştir. Araştırma sonucunda elde edilen bulgulara göre, öğrencilerin %47'si soruyu yanıtlamak konusunda isteksiz davranmışlardır. Beş öğrenci iki soru için de ispat yapamamıştır. Öğrenciler iki soru için toplamda 18 geçerli sayılabilecek ispat gerçekleştirmiştir. Öğrencilerin ispatları daha çok sözel anlatım olarak, az bir kısmı ise cebirsel ispat olarak sınıflanmıştır. Öğrencilerin %22'si ortaya koydukları ispatla yetinmemiş, ispatı yaptıktan sonra önermeleri örnek vererek de doğrulamışlardır. %78'i ise ispatı yapmadan önce önermeyi örnek vererek doğrulamışlardır.

Öğrenciler başlangıçta doğru olduğunu düşündükleri ve geçerli bir ispat ortaya koydukları önermelerde az sayıda ve az çeşitlilikte örnek deneme eğilimi göstermişlerdir.

Maher ve Martino (1999) beş yıl boyunca bir öğrencinin matematiksel savunma düşüncelerinin gelişimini izlemişlerdir. Bu süreçte bir öğrencinin 1. sınıftan 5.sınıfa kadar geçirdiği süreçteki değişimini ve gelişimini izlemişlerdir. Öğrenci süreçte bireysel ve grup çalışmalarına katılmıştır. Öğrenci ilk açıklamasını 1. sınıftayken yapmış ancak gelişmiş olarak sayılabilecek savunmasını ise 4. sınıfta yapmıştır. Bu seviyede düşüncelerini sınıfa savunarak açıklayan öğrenci 5. Sınıfa geldiğinde kanıt yapmaya geçiş yapmıştır. Öğrencinin zamanla yaptığı savunmalar az gelişmiş formdan daha gelişmiş bir forma doğru ilerlemiştir. Nedenleriyle beraber düşüncelerini savunan öğrenci diğer arkadaşlarını ikna etmiştir. Araştırmada öğrencilerin savunmayı kanıt olarak kabul ettiği görülmüştür. Çünkü kanıtın oluşumundan ziyade söylenmesini yeterli bulmaktadırlar.

Literatür taraması sonucunda, ispat ile ilgili çalışmaların lise ve çoğunlukla üniversite düzeyinde yoğunlaştığı söylenebilir. Ancak yapılan çalışmaların öneriler kısmında da görülebilir ki, ispat kavramına ilköğretimin ilk yıllarından itibaren başlanması gerekmektedir. İspat kavramı ve muhakeme yapma becerisi ile ilgili çalışmalar ortaöğretim düzeyinde de yapılmış olmasına rağmen öğrencilerin kanıt imajlarını (Dreyfus ve Kidron, 2014) belirlemeye yönelik bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Bu araştırma ortaokul öğrencilerinin ispat yapma sürecindeki kanıt imajlarını ortaya çıkarmayı ve alandaki bu eksikliğin giderilmesine katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın yöntemi hakkında bilgi sunulmuştur. Bu amaçla araştırmanın modeli, çalışma grubu, veri toplama araçları ve veri analiz yöntemine ilişkin açıklamalar yapılmıştır.

Araştırma Modeli

Yapılan çalışma, 8. sınıf öğrencilerinin ispat seviyelerini belirlemek ve kanıt imajlarını ortaya çıkarmaya yöneliktir. Dolayısıyla araştırmanın konusuna uygun olarak çalışmada, betimsel türde nitel araştırma modeli kullanılmıştır. Nitel araştırma, "*gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama tekniklerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma*" olarak tanımlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Nitel araştırmalarda, sıklıkla kullanılan araştırma yöntemlerinden biri durum çalışmasıdır. Durum çalışmasında, bir veya birkaç duruma ilişkin etkenler bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine derinlemesine araştırma yapılır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Durum çalışmasının temel amacı, bir durum hakkında detaylı betimlemeler yapmak ve o durumu var olduğu şekliyle anlamaktır (Büyüköztürk ve ark., 2013).

Bu bağlamda ortaokul 8.sınıf öğrencilerinin sahip oldukları kanıt imajlarını incelemek ve var olan durumu ayrıntılı olarak betimleyebilmek için durum çalışmasından yararlanılmıştır. Bu amaçla 8. sınıf öğrencilerine, seviyelerine uygun ispat yapmayı gerektiren ifadelerden oluşan İspat Düzeyi Belirleme Formu (Ek1'de verilmiştir) uygulanmış ve öğrencilerin verdikleri yanıtlar analiz edilerek Balacheff'in ispat düzeylerine göre hangi kategoride yer aldıkları belirlenmiştir. Akabinde, Balacheff'in ispat düzeylerinden *Zihinsel İspat* düzeyinde yer alan üç öğrenci ile bu öğrencilerin kanıt imajlarını inceleyebilmek için yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Görüşme insanların perspektiflerini, tecrübelerini, duygularını ve algılarını ortaya koymada kullanılan oldukça güçlü bir yöntemdir (Bogdan ve Biklen, 1992). Bu nedenle öğrencilerin var olan kanıt imajlarının özelliklerini inceleyebilmek ve ispat sürecindeki hal ve tavırlarını ortaya koyabilmek adına çalışmada görüşme yönteminden yararlanılmıştr.

Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubu, ortaokul 8. sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Çalışma iki aşamadan oluştuğundan dolayı örneklem seçiminde çok aşamalı örnekleme modeli kullanılmıştır. İlk aşamada, amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir örnekleme yöntemi ile Manisa ilinde ortaokul 8.sınıfta öğrenim gören 100 öğrenci belirlenmiştir. Bu öğrencilere sınıf seviyelerine uygun ispat yapmayı gerektiren ifadelerden oluşan "İspat Düzeyi Belirleme Formu" uygulanmıştır. Öğrencilerden bu formda yer alan üç adet ifadeyi ispatlamaları istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri yanıtlar analiz edilerek Balacheff'in ispat düzeylerine göre hangi kategoride yer aldıkları belirlenmiştir.

Araştırmanın devamında yapılan görüşmeler için seçilen 3 öğrencinin belirlenmesinde ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemin kullanılmasındaki amaç, seçilen öğrencilerin ispat yapabilme seviyesinde olmalarını belirleyebilmektir. Bu çalışmada görüşme yapmak için belirlenen öğrencilerin seçiminde kullanılan ölçütler, İspatlama Düzeyi Belirleme Formunda yer alan ifadeleri ispatlayabilme seviyelerinin Balacheff'in ispat düzeylerinden *Zihinsel İspat* düzeyinde yer alması ve araştırmaya katılmaya gönüllü olmalarıdır. Araştırma sürecinde seçilen üç öğrenci ile üçer kez görüşme yapılmış, görüşmeler video ile kayıt altına alınmış ve elde edilen veriler kanıt imajı bağlamında değerlendirilmiştir.

Veri Toplama Araçları

Veri toplama araçlarının belirlenmesi sürecinde öncelikle araştırma konusu ile ilgili literatür taraması yapılmış, ortaokul düzeyinde yapılan matematik olimpiyatlarında yer alan sorular incelenmiş ve ortaokul öğrencilerinin ispatlama süreçleri ile ilgili yapılmış çalışmalarda kullanılan sorular araştırılmıştır. Ayrıca ortaokul matematik öğretim programı dahilinde 8.sınıf matematik dersi kazanımları ayrıntılı olarak incelenmiş ispat yapmaya uygun ifadeler, bu bağlamda seçilmeye çalışılmıştır. Bu doğrultuda, çalışmada kullanılmak üzere dört adet veri toplama formu hazırlanmış olup bu veri toplama araçları aşağıda tanıtılmıştır:

İspatlama Düzeyi Belirleme Formu

Araştırmanın ilk kısmında ortaokul 8.sınıf öğrencilerinin ispat yapabilme düzeylerini incelemek ve görüşmeler için öğrenci seçebilmek adına İspatlama Düzeyi BelirlemeFormu (Ek-1) hazırlanmıştır.

Form üç adet açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Açık uçlu sorular öğrencinin düşünme sürecini keşfetmeyi ve kavramları nasıl anladığı hakkında daha derin bir görüşe sahip olmayı sağlar (Glazar ve Vrtacnik, 1992, akt. Selvi ve Yakışan, 2004). Bu sorularla ortaokul 8.sınıf öğrencileri arasından ispat yapmaya yatkın öğrencilerin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla 100 tane 8. sınıf öğrencisine ulaşılarak uygulama yapılmıştır. Formda yer alan sorular ortaokul öğrencilerinin formal veya sözel olarak ispatlayabileceği seviyede basit düzeyde ispat yapmayı gerektirecek seviyede hazırlanmıştır.

Formda yer alan sorular Ortaokul Matematik Öğretim Programında 6. ve 7. sınıf düzeyinde yer alan şu kazanımlara uygun olarak hazırlanmıştır:

· *Örüntülerin kuralını harfle ifade eder; kuralı harfle ifade edilen dizinin istenilen terimini bulur.*

· *Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade yazar*

Uzman görüşü alınarak form düzenlenmiş ve 10 öğrenci ile ön uygulama yapılmıştır. Ön uygulama sonunda formun öğrencilerin seviyelerine uygun olduğu düşünülerek değişiklik yapılmadan forma son hali verilmiştir.

Formda yer alan birinci soru ile öğrencilerin belirli bir kurala göre devam eden örüntülerde bir sonraki adımı tahmin edebilme, örüntü kuralını fark edebilme gibi matematiksel becerileri ne düzeyde gerçekleştirebildiklerini ve nasıl ifade edebildiklerinin incelenmesi amaçlanmıştır. İkinci ve üçüncü sorular ile de öğrencilerin tam sayılar ve doğal sayıların özelliklerini fark etme, cebirsel ifade oluşturma gibi matematiksel bilgilerini kullanarak ifadeleri doğrulamaları beklenmektedir. Sorular Ek1'de görülebilir.

Sonuç olarak, hazırlanan bu form ile öğrencilerden alınan yanıtların Balacheff'in ispat düzeylerinden hangisinde yer aldığını belirlemek ve *zihinsel ispat* düzeyinde yer alan üç öğrenciyi belirlemek amaçlanmıştır.

Görüşme Formları

Nitel araştırma yöntemlerinden yaygın kullanılan veri toplama tekniklerinden biri görüşmedir. Büyüköztürk vd. (2013) görüşmeyi "*en az iki kişi arasında sözlü olarak sürdürülen bir iletişim süreci"* olarak tanımlamıştır. Görüşme, bireylerin görüşlerini, deneyimlerini ve duygularını ortaya çıkarır. Böylelikle nicel veri toplama araçlarının sınırlılığını ortadan kaldırır (Yıldırım & Şimşek, 2008). Görüşme tekniği, yapılandırılmış görüşme, yarı yapılandırılmış görüşme ve yapılandırılmamış görüşme olarak sınıflandırılabilir. Bu çalışmada yarı yapılandırılmış görüşme tekniğinden yararlanılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşme tekniğinin araştırmacıya sunduğu en önemli kolaylık görüşmenin önceden hazırlanmış görüşme protokolüne bağlı olarak sürdürülmesi nedeniyle daha sistematik ve karşılaştırılabilir bilgi sunmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 1999).

Araştırma sürecinde üç öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu amaçla araştırmada kullanılmak üzere üç adet yarı yapılandırılmış görüşme formu hazırlanmıştır. Öğrencilerin sahip oldukları kanıt imajlarını ortaya çıkarabilmek adına veri toplamak amacıyla hazırlanan bu görüşme formları; Veri Toplama Formu 1 (Ek-2), Veri Toplama Formu 2 (Ek-3) ve Veri Toplama Formu 3 (Ek-4) olarak adlandırılmıştır. Formlarda ikişer soruya yer verilmiştir. Bunun sebebi, kanıtlama sürecinin karmaşık bir işlem olduğu göz önünde tutulduğundan öğrencileri çok fazla zorlamamak ve yorgunluk gibi değişkenlerin araştırma sürecini etkilemesine engel olmaktır.

Formlarda yer alan sorular oluşturulurken literatür taraması yapılmış ve daha çok 8. sınıf düzeyinde yer alan kazanımlardan yararlanılmıştır. Ayrıca 8. sınıf "sayılar ve işlemler" ve "cebir" öğrenme alanlarındaki kazanımların çoğunu kapsayan soru yazılmasına gayret edilmiştir. İki alan uzmanından görüş alınarak formlara son hali verilmiştir.

Veri Toplama formu 1'de yer alan sorulardan ilki sayılar ve işlemler öğrenme alanının içerisinde yer alan üslü sayılar alt öğrenme alanına ait *"Üslü ifadeler ile ilgili temel kuralları anlar, birbirine denk ifadeler oluşturur.*" kazanımına yönelik olarak hazırlanmıştır. Diğer soru ise, cebirsel ifadeler alt öğrenme alanı içerisinde yer alan *"Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade yazar."* kazanımı ile ilişkili olarak hazırlanmıştır.

Görüşme formlarının ikincisinde yer alan sorular ise sırasıyla*"Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade yazar"* ve "*Gerçek sayıları tanır, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir."* kazanımına yönelik olarak hazırlanmıştır.

Üçüncü görüşme formundaki soruların ilki ise *"İki doğal sayının en büyük ortak bölenini ve en küçük ortak katını hesaplar"* ve "*Verilen iki doğal sayının aralarında asal olup olmadığını belirler"* kazanımları ile ilgilidir. Diğer soru ise cebirsel ifadeler alt öğrenme alanı içerisinde yer alan *"Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade yazar*" kazanımı ile ilişkili olarak hazırlanmıştır.

Öğrencilerden formda yer alan soruları ispatlamaları istenmiştir. Görüşmede öğrencilerin düşüncelerini sesli bir şekilde araştırmacı ile paylaşması söylenmiştir. Ayrıca öğrencilerin fikirlerini etkileyecek hiçbir yönlendirme yapılmamış ve dönütte bulunulmamıştır. Öğrencilerin hal ve tavırları ispat yaparken doğal hali ile gözlemlenmiş böylelikle tüm bu tedbirler ışığında bireylerin ispat süreçleri ve oluşturdukları imajların anlaşılabilmesi amaçlanmıştır. Yapılan görüşmeler ile ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerinde oluşturdukları imajlar kanıt imajı çerçevesinde analiz edilerek bulgulara ulaşılmıştır.

Veri Çözümleme Teknikleri

Ortaokul 8.sınıf öğrencilerinin ispat seviyelerini ve ispat imajlarını ortaya çıkarmak için yapılan görüşmeler ve gözlemlerden elde edilen sonuçlar içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. İçerik analizi, toplanan verilerin daha derinlemesine incelenmesini sağlayan, önceden belirgin olmayan konuların ve boyutların ortaya çıkarılmasında kullanılan bir tekniktir (Erdem, 2011).

Öğrencilerden İspat Düzeyi Belirleme Formu ile elde edilen veriler Balacheff'in oluşturduğu ispat seviyeleri bağlamında değerlendirilmiştir. Bu amaçla İspat Düzeyi Belirleme Formu ile elde edilen yanıtlar üzerinde içerik analizi uygulanarak belirli temalar oluşturulmuştur. Formda yer alan soruların her biri ayrı ayrı ele alınarak kategorilere ayrılmıştır. Öncelikle herbir soru için öğrencilerin yanıtları Balacheff'in ortaya koyduğu ispat seviyelerine göre kategorileştirilmiştir. Daha sonra her bir kategoride yer alan yanıtlar çeşitliliklerine göre, birbirine benzeyen belli cevapları bir araya toplamak şartıyla alt kategorilere ayrılmıştır. Böylece çeşitli temalar elde edilerek öğrencilerin ispat yapma sürecinde kullandıkları yöntemler belirlenmeye çalışılmıştır.

Araştırmada elde edilen verilerin ve bunlara ilişkin araştırmacının ulaştığı sonuçların ve yorumların veri kaynakları (katılımcılar) ile teyit edilmesinde yarar vardır (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 268).Oluşturulan kategoriler sonrası başka bir matematik eğitimcisi tarafından da aynı işlemin yapılması istenmiş ve uyum yüzdesinin %93 olduğu görülmüştür. Uyum sağlanmayan verilerde ise tartışma yoluyla uyumsuzluk giderilmiştir. Birden fazla araştırmacının birlikte çalıştığı durumlarda, aynı veri seti kodlanır ve ortaya çıkan kodların benzerlikleri ve farklılıkları sayısal olarak karşılaştırılarak en az %70 düzeyinde bir güvenirlik yüzdesine ulaşmak gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 233).

Görüşmelerden elde edilen verilerin analizleri için ise, öncelikle her bir öğrenciyle yapılan görüşmeler, görüşmelerin ardından transkript edilmiştir. Elde edilen bu yazılı dokümanlar Kanıt İmajı teorik çatısı çerçevesinde yorumlanmıştır. Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan bu teorik çerçeve ispatlama sürecinde sezgisel ve mantıksal düşünme arasındaki etkileşimi ve bu etkileşimden doğan bilginin yapılandırma sürecini "bağlamda soyutlama" teorik çerçevesiyle incelenmesiyle oluşmuştur. Kanıt imajı teorik çatısı AİC ve RBC teorik çerçeveleri üzerine kurulmuştur. AİC teorik çerçevesi öğrenmeyi bir soyutlama süreci olarak ele alırken, RBC soyutlama süreci Tanıma (R), Kullanma (B) ve Oluşturma (C) epistemik eylemlerinden oluşmaktadır.

Durum çalışmalarında geçerliliği sağlamak için çalışmanın yapı, iç ve dış geçerliliği sağlanmalıdır (Çepni'den aktaran Kaleli Yılmaz, 2015). İç geçerliliğin sağlanması amacı ile elde edilen bulgular herkes tarafından anlaşılır olacak şekilde ifade edilmeye çalışılmış, yapı geçerliliğini sağlamak adına ise veriler çeşitli kaynaklardan toplanmıştır. Çeşitleme farklı veri kaynakları, farklı veri toplama ve analiz yöntemleri kullanılarak araştırma sonuçlarının inandırıcılığını arttırmayı ve aynı zamanda araştırmanın geçerlik ve güvenirliğini sağlamayı hedeflemektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011. s.94). Çalışmanın geçerliliğinin sağlanması için ayrıca çalışma boyunca uzman görüşü alınarak yapılan yorumların teyit edilmesi sağlanmıştır. Bir sonraki bölümde araştırmadan elde edilen bulgulara ve bulgulardan hareketle oluşturulmuş yorumlara yer verilmiştir.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Ortaokul 8.sınıf öğrencilerinin sahip oldukları kanıt imajlarını belirlemeyi amaçlayan çalışmanın bu kısmında, uygulanan *İspatlama Düzeyi Belirleme Formu* ve yapılan görüşmeler sonucunda elde edilen bulgular ve bulgulara ait yorumlar iki aşamada sunulmuştur. İlk aşamada, araştırmanın birinci alt problemi kapsamında uygulanan *İspatlama Düzeyi Belirleme Formu'*naöğrencilerinverdikleri cevaplar Balacheff'in ispatlama düzeyleri bağlamında incelenerek bunlara ait bulgular sunulmuştur. İkinci aşamada ise çalışmanın ikinci alt problemine yönelik olarak yapılan görüşmelerin sonucunda 8.sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerinde sahip oldukları kanıt imajları belirlenmeye çalışılacak ve buna yönelik bulgular sunulmuştur.

İspatlama Düzeyi Belirleme Formuna İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Bu bölümde, araştırmanın birinci alt problemi olan *"Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin, Balacheff tarafından ortaya konan ispat seviyelerine göre dağılımı nasıldır?"* alt problemine yönelik bulgulara yer verilmiştir.

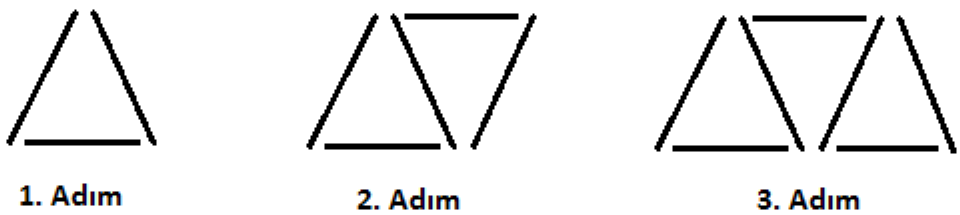
Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapabilme düzeylerini Balacheff'in ispat seviyeleri bağlamında incelemek adına *İspat Düzeyi Belirleme Formu* oluşturulmuş ve 100 öğrenciye uygulanmıştır. Bu uygulamanın sonucunda elde edilen veriler analiz edilmiştir. *İspatlama Düzeyi Belirleme Formu* ile toplanan verilerin analizinde formda yer alan her bir soru ayrı ayrı değerlendirilmiştir. İlk olarak her soru için Balacheff'in ispat seviyeleri olan pragmatik ispat, zihinsel ispat ve demonstrasyon seviyelerinde öğrencilerden alınan yanıtlar kategorileştirilmiştir. Daha sonra her bir seviyede yer alan cevaplar çeşitliklerine göre alt kategorilere ayrılmış ve bu kategorilerde yer alan öğrencilerin ispat yaparken kullandıkları yöntemler yorumlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca oluşturulan alt kategorilere ait örnekler sunulmuştur.

Tüm bu analizlerde amaç, uygulanan forma verilen cevapları ispat seviyelerine göre ayırdıktan sonra içerisinden ispat yapma düzeyinde olan 3 öğrenciyi seçerek araştırmanın ikinci aşaması olan görüşmeleri yapmaya olanak sağlamaktır.

1.Soruya Yönelik Bulgular ve Yorumlar

İspat Düzeyi Belirleme Formuna ilişkin ilk soru şu şekildedir:

Aşağıda verilen üçgenlerde her bir kenar bir kürdandan oluşmaktadır.



Örüntünün ilk üç adımı yukarda verildiğine göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1.Her bir adımda kullanılan kürdan sayısını bulmak için gerekli olan örüntü kuralı nedir?

2.Verilen kuralı kullanarak bir sırada 7 üçgen yapmak için kaç kürdan gerektiğini bulunuz.

Verilen soru ile öğrencilerin belirli bir kurala göre devam eden örüntülerde bir sonraki adımı tahmin edebilme, örüntü kuralını fark edebilme gibi matematiksel becerileri ne düzeyde gerçekleştirebildiklerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Verilen sorunun ilk seçeneğine ait, öğrencilerin vermiş olduğu yanıtlardan yola çıkarak oluşturulan tablo aşağıda verilmiştir.

Tablo 1

İspatlama Düzeyi Belirleme Formu - Birinci soruya verilen yanıtların Balacheff'in İspat Seviyelerine göre dağılımı

Balacheff'in İspat Seviyeleri	**Kişi Sayısı**
Pragmatik İspat	53
i. Acemi Deneycilik	34
ii. Kritik Deneyim	19
Zihinsel İspat	15
i. Belirleyici Örnek	0
ii. Düşünce Deneyi	15
Demonstrasyon	0
Cevap Vermeyenler	9
Kuralı Yanlış Belirleyenler	23

Yukarıda oluşturulan tablo, öğrencilerin birinci sorunun ilk şıkkına verdikleri cevapların Balacheff'in ortaya koyduğu ispat düzeyleri açısından dağılımını göstermektedir. Formun uygulanmış olduğu 100 öğrenciden 53 tanesi *pragmatik ispat* düzeyinde 15 tanesi ise *zihinsel ispat* düzeyinde ispat yaparak süreci tamamlamıştır. *Demonstrasyon*, Balacheff'e göre en üst düzeyde ispat şeklidir ve öğrencilerden hiç biri bu seviyede ispat yapamamıştır. Ayrıca çalışmaya katılan öğrencilerden dokuz tanesi bu soruya cevap vermemiş, 23 tanesi ise örüntünün kuralını yanlış belirlemiştir.

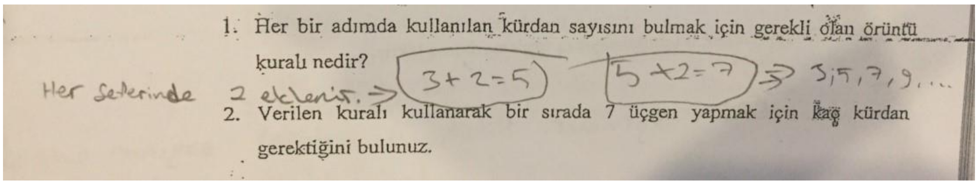
Öğrencilerden alınan yanıtlar daha anlaşılabilir şekilde sunulması açısından çeşitliliklerine göre kategorilere ayrılmıştır. Böylelikle her bir kategoride yer alan benzer cevapları veren öğrencilerin konuyla ilgili süreçte kullandıkları yöntemler anlamlandırılmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin ilgili soruya verdikleri yanıtların kategorileştirilmesiyle oluşturulan tablo aşağıda sunulduğu gibidir.

Tablo 2

İspatlama Düzeyi Belirleme Formu- Birinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen alt kategoriler

	Kişi Sayısı
Örüntünün kuralını 2 artıyor şeklinde belirleyenler	31
Örüntünün kuralını, kaç üçgen oluşuyorsa kenar sayısından o adımın 1 eksiği çıkarılır şeklinde oluşturanlar	3
Örüntünün kuralını bir üçgen ekleyip bir kenar çıkarılıyor şeklinde belirleyenler	19
2n+1 şeklinde kural oluşturanlar	15
Toplam	68

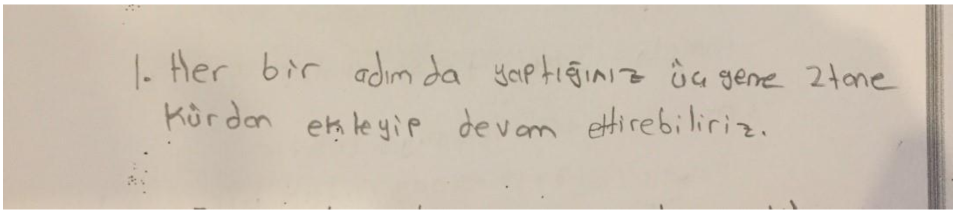
Araştırmaya katılan öğrencilerden 31 tanesi verilen örüntünün kuralını, kibrit sayısı ikişer ikişer artıyor şeklinde belirlemiştir. Öğrencilerin bu sonuca verilen ilk üç adımda bulunan kibritleri sayarak ulaşmıştır yorumu yapılabilir. Diğer yandan öğrencilerin vermiş olduğu bu yanıtlar Balacheff'in belirlemiş olduğu ispat seviyelerinden *pragmatik ispat* seviyesinde yer alan *acemi deneyciliğe örnek* olarak gösterilebilir. Çünkü bu cevaba ulaşan öğrenciler bir kaç örnekte kibrit sayısını deneyerek bir genellemeye varmışlardır. Bu kategoride yer alan cevaplardan bazıları aşağıda sunulmuştur.



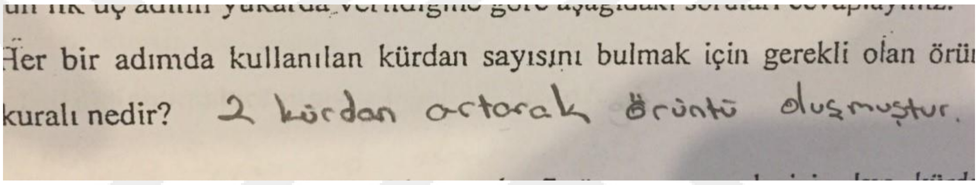
1. Her bir adımda kullanılan kürdan sayısını bulmak için gerekli olan örüntü kuralı nedir?

Her Seferinde 2 eklenir. → (3+2=5) (5+2=7) → 3,5,7,9,...

2. Verilen kuralı kullanarak bir sırada 7 üçgen yapmak için kaç kürdan gerektiğini bulunuz.



1. Her bir adımda yaptığınız üç gene 2tane Kürdan ekleyip devam ettirebiliriz.

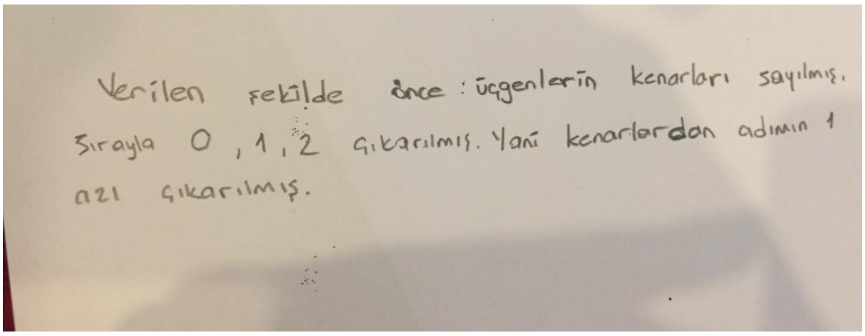


Her bir adımda kullanılan kürdan sayısını bulmak için gerekli olan örü

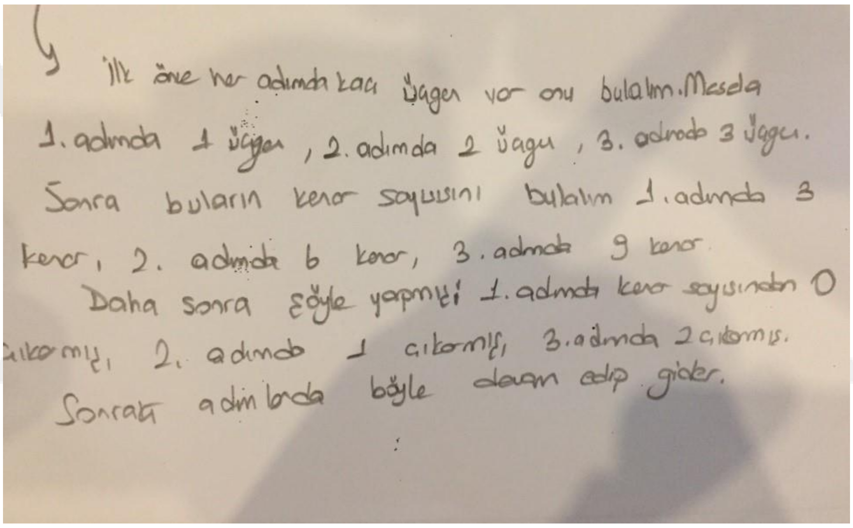
kuralı nedir? 2 kürdan artarak örüntü oluşmuştur.

Örnekler incelendiğinde bu cevapları veren öğrencilerin örüntünün genel kuralını oluştururken bilinmeyen kullanma ya da üçgen sayısı ile kullanılan kibrit sayısı hakkında ilişkilendirmeye gitmediği görülebilir. Bu seviyede cevap veren öğrenciler sadece ilk üç aşamada bulunan kibritleri sayarak bir kurala ulaşmışlardır.

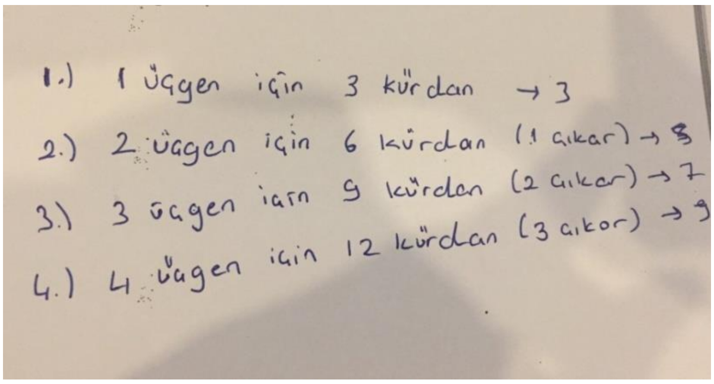
Araştırmaya katılan öğrencilerden üç tanesi ise örüntünün kuralını *"kaç üçgen oluşuyorsa kenar sayısından o adımın 1 eksiği çıkarılır."* şeklinde tanımlamıştır. Bu sonuca ulaşan öğrenciler kibritleri rastgele seçmemiş, her adımda oluşan üçgen sayısını da göz önünde bulundurarak bir çıkarım yapmaya yönelmişlerdir. Buna göre 1. adımda bir tane üçgen olduğu için kenar sayısı olan 3'ten adım sayısının 1 eksiği olan 0 çıkarılırsa 3 tane kibrit çöpüne ulaşılır. Aynı şekilde 2. adımda iki tane üçgen olduğu için kenar sayısı olan 6'dan adım sayısının 1 eksiği olan 1 çıkarılırsa 5 tane kibrit çöpüne ulaşılır şeklinde bir kural oluşturmuşlardır. Bu sonuca ulaşan öğrenciler örüntü kuralını ifade ederken formüle etmemişlerdir. Bu nedenle *zihinsel ispat* seviyesinde ispat yaptıkları söylenemez. Balacheff'in ispat seviyelerinden *pragmatik ispat* seviyesinde yer alan *kritik deneyim* kategorisinde bir cevap verdikleri yorumu yapılabilir. Çünkü genellemeye varırken üçgen sayısı ve kibrit sayısı arasındaki ilişki için gerekli denemeleri yapmışlardır. Bu cevabı veren öğrencilerin yanıtları aşağıda sunulmuştur.



Verilen şekilde önce : üçgenlerin kenarları sayılmış. Sırayla 0 , 1 , 2 çıkarılmış. Yani kenarlardan adımın 1 azı çıkarılmış.



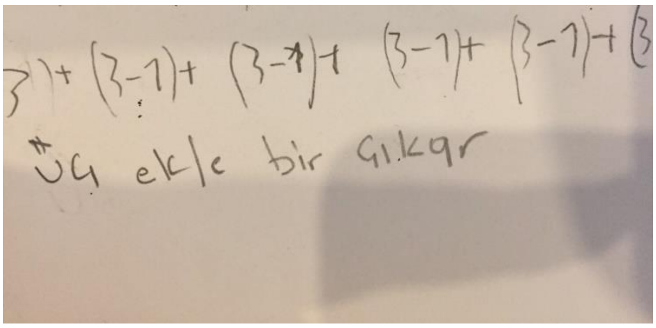
İlk önce her adımda kaç üçgen var onu bulalım. Mesela 1. adımda 1 üçgen, 2. adımda 2 üçgen, 3. adımda 3 üçgen. Sonra bunların kenar sayısını bulalım 1. adımda 3 kenar, 2. adımda 6 kenar, 3. adımda 9 kenar. Daha sonra şöyle yapmış 1. adımda kenar sayısından 0 çıkarmış, 2. adımda 1 çıkarmış, 3. adımda 2 çıkarmış. Sonraki adımlarda böyle devam edip gider.

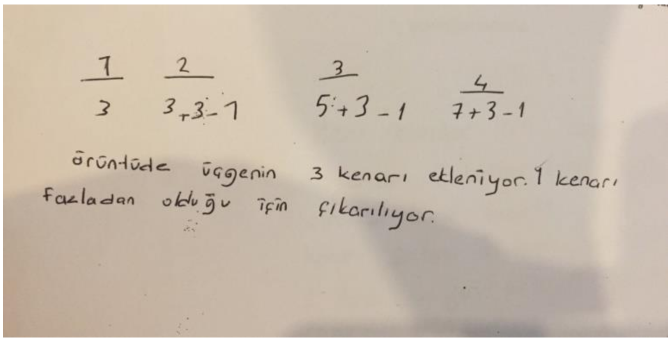


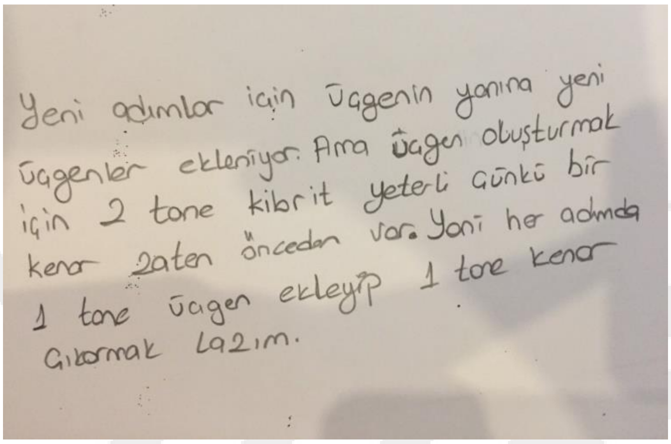
1.) 1 üçgen için 3 kürdan → 3
2.) 2 üçgen için 6 kürdan (1 çıkar) → 5
3.) 3 üçgen için 9 kürdan (2 çıkar) → 7
4.) 4 üçgen için 12 kürdan (3 çıkar) → 9

Üç öğrencinin yanıtları incelendiğinde her adımda oluşan üçgenlerin kaç kenarı olduğunu bulduklarını ve adım sayısının bir eksiğinin çıkarılması yoluyla kuralı oluşturdukları görülebilir.

Çalışmaya katlan öğrencilerden 19 tanesi ise örüntünün kuralı olarak *"her adımda 1 tane üçgen ekleyip 1 tane kenar çıkartılıyor"* tanımını yapmışlardır. Bu açıklamayı yapan öğrenciler her bir adımda örüntüye yeni bir üçgen eklendiğini ve ortak olan kenarın çıkarılması gerektiğini fark edebilmişlerdir. Bu sonuca ulaşan öğrencilerin görsel olarak da örüntünün ilerleyişini keşfettiği yorumu yapılabilir. Çünkü her seferinde mevcut üçgenlerin yanına bir tane daha üçgen eklendiğini ve eklemeden kaynaklı ortak olan kenar tekrar çizilmediğinden 1 eksilmesi gerektiğinin ayrımına varmışlardır. Diğer yandan öğrencilerin vermiş olduğu bu yanıtlar Balacheff'in ispat seviyeleri bağlamında yorumlandığında *kritik deneyim* kategorisinde yer aldığı söylenebilir. Çünkü ulaştıkları sonuca rastgele sayarak değil, örüntünün adımları arasındaki ilişkiden hareketle örnekler üzerinden ulaşmışlardır. Bu alt kategoride cevap veren öğrencilerin yanıtlarından örnekler aşağıda sunulmuştur.

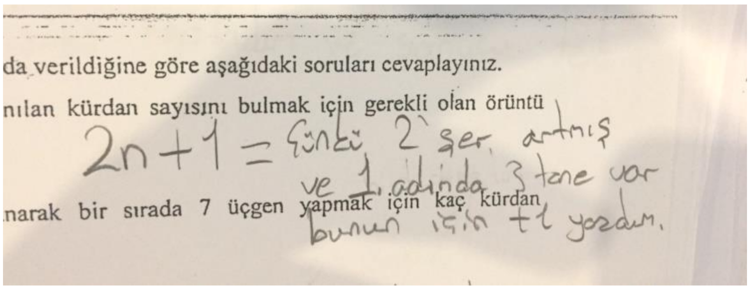


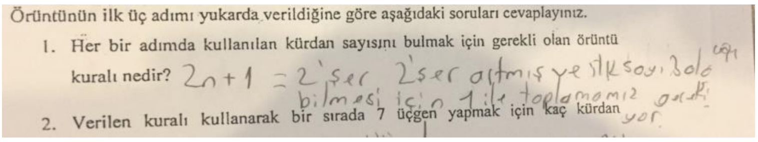




Bu soruya yanıt veren öğrencilerden 15 tanesi örüntünün kuralı olarak *"2n+1 şeklindedir"* yorumunu yapmışlardır. Öğrencilerin vermiş oldukları bu yanıt ile onların matematik dilini kullanarak bir kural oluşturdukları söylenebilir. Bu kuralı oluşturabilen öğrenciler, diğer öğrenciler gibi artış miktarını göz önünde tutmuş ek olarak ise herhangi bir n. adımda ihtiyaçları olan kibrit sayısını bulmaya yönelik formülü oluşturmuşlardır.

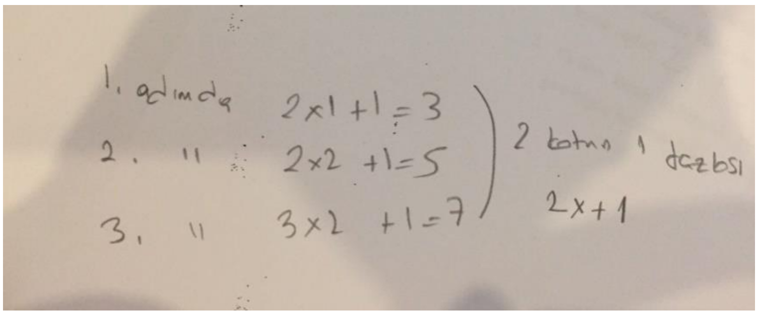
Burada 2n+1 kuralını oluşturabilen 15 öğrencinin Balacheff'in ortaya koymuş olduğu ispat seviyelerinden *Zihinsel İspat* düzeyinde bir yanıt verdikleri söylenebilir. Çünkü ulaştıkları sonucu matematik dilini kullanarak formüle etmeyi başarmışlardır. Bu cevabı veren öğrencilerin yanıtlarından bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.


da verildiğine göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.
nılan kürdan sayısını bulmak için gerekli olan örüntü
$2n+1$ = Çünkü 2'şer artmış ve 1. adımda 3 tane var bunun için +1 yazdım.
narak bir sırada 7 üçgen yapmak için kaç kürdan


Örüntünün ilk üç adımı yukarda verildiğine göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Her bir adımda kullanılan kürdan sayısını bulmak için gerekli olan örüntü kuralı nedir? $2n+1$ = 2'şer 2'şer artmış ve ilk sayı 3 olabilmesi için 1 ile toplamamız gerekiyor
2. Verilen kuralı kullanarak bir sırada 7 üçgen yapmak için kaç kürdan

Yukarıda cevabı verilen öğrenciler adım sayısına “n” değişkenini vermiş ve artış miktarını bu değişkenin katsayısı olarak belirlemişlerdir. Bir eklemelerinin sebebi olarak ise 1.adımda üç olan kürdan sayısını elde edebilmek olduğunu belirtmişlerdir. Öğrencilerin bulduğu formül örüntü kuralı olarak doğru olsa da ezbere bir yöntemle bu sonuca ulaşmışlardır. Ayrıca öğrencilerin kullandığı, örüntü kuralı belirlemek için olan bu yöntem sadece artış miktarı sabit olan spesifik durumlar için geçerlidir.



Yukarıda verilen üçüncü örneğin sahibi olan öğrenci ise her bir adımdaki kürdan sayısı ile adım sayısı arasında bir kural bulmuş ve bunu cebirsel olarak ifade etmiştir.

İspatlama Düzeyi Belirleme Formu’nun birinci sorusunun ikinci seçeneğinde ise *“Verilen kuralı kullanarak bir sırada 7 üçgen yapmak için kaç kürdan gerektiğini bulunuz.”* şeklindedir. Bu soru ile, öğrencilerin üçgen sayısı ve kibrit sayısı arasında bir ilişki kurmaları beklenmektedir. Bu soruya öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlar, Balacheff'in ispat seviyelerine göre gruplandırılmış ve tablo halinde aşağıda sunulmuştur.

Tablo 3

ikinci seçeneğe verilen yanıtların Balacheff'in İspat Seviyelerine göre dağılımı

Balacheff'in İspat Seviyeleri	**Kişi Sayısı**
Pragmatik İspat	62
i. Acemi Deneycilik	41
ii. Kritik Deneyim	21
Zihinsel İspat	13
i. Belirleyici Örnek	13
ii. Düşünce Deneyi	0
Demonstrasyon	0
Cevap Vermeyenler	8
Yanlış Sonuca Ulaşanlar	17

Araştırmaya katılan öğrencilerden büyük bir çoğunluğu *pragmatik ispat* sevisinde verdikleri cevaplar ile sonuca ulaşmışlardır. Bu seviyedeki öğrencilerden 41 tanesi herhangi bir kural oluşturmaya gitmeden sadece örnekleri sayarak sonuca ulaşmıştır. Bu nedenle araştırmacı tarafından *acemi deneycilik* kategorisine ait oldukları düşünülmüştür. Ayrıca *pragmatik ispat* seviyesinde yanıt veren 23 öğrenci ise, sorunun özelliğini göz önünde bulundurarak örnek durumu özenle oluşturmuştur. Bu nedenle *kritik deneyim* seviyesindedirler yorumu yapılmıştır. Araştırmaya katılan öğrencilerden 13 tanesi matematiksel dili kullanarak sonuca ulaşmıştır. Bu nedenle

Balacheff’in ispat seviyelerinden *zihinsel ispat* kategorisinde yer almışlardır. Sorunun bu seçeneğinde demonstrasyon seviyesinde yanıt oluşturan öğrenci bulunmamaktadır. Diğer yandan öğrencilerin sekiz tanesi bu soruyu boş bırakmış 19 tanesi ise yanlış sonuca ulaşmıştır.

Öğrencilerin süreçte nasıl bir yol izleyerek sonuca ulaştıkları kısmının daha anlaşılabilir olması için toplanan yanıtlar çeşitliliklerine göre kategorilere ayrılmış ve benzer sonuçlar bir arada toplanmıştır. Bu verilere yönelik oluşturulan tablo aşağıda sunulduğu gibidir.

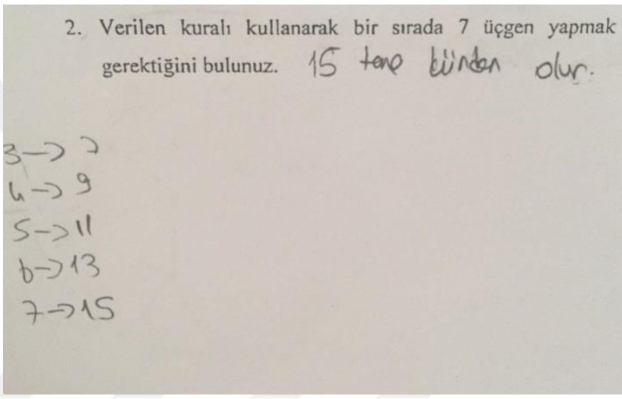
Tablo 4

ikinci seçeneğe verilen yanıtlardan elde edilen alt kategoriler

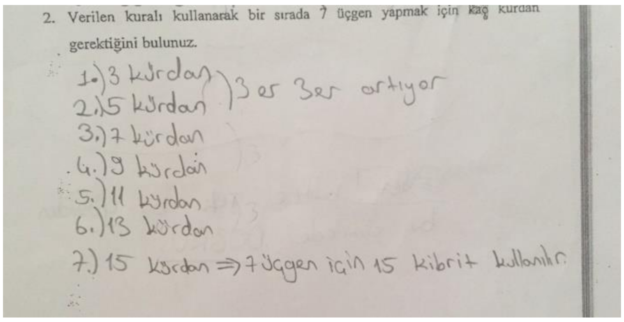
	Kişi Sayısı
Kibrit sayısını 2’şer arttırarak sonuca ulaşanlar	41
7.adıma kadar şekil oluşturup kibrit sayanlar	18
Her bir adım için 3 ekleyip 1 çıkararak 7.adıma ulaşanlar	3
Oluşturdukları kuralda n yerine adım sayısını yazarak sonuca ulaşanlar	13
7 tane ayrı üçgen çizip hepsinin kenarlarını sayanlar	12
Örüntününadımlarını yanlış oluşturup 7.adımdaki kibrit sayısını sayanlar	4
Toplam	91

Araştırmaya katılan öğrencilerden 41 tanesi, başlangıçta üç kibrit sonraki adımlarda buna iki eklenerek oluşmuş düşüncesinden hareketle 3,5,7,9,11,13,15… şeklinde devam ederek 7. adımdaki kibrit sayısına ulaşmışlardır. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun bu yöntemi kullanmasının sebebi kolay yoldan sonuca ulaşmak istemelerinden kaynaklı olabilir. Yani öğrenciler burada örüntünün adımlarının ilerleyişi ile ilgili ayrıntılı çıkarım yapmak yerine sadece iki kibrit ekleme yoluyla sonuca ulaşmışlardır. Diğer yandan bu cevabı veren öğrencilerin yanıtları Balacheff'in ispat seviyelerinden *pragmatik ispat* düzeyinde yer alan *acemi deneycilik* kategorisine karşılık gelir yorumu yapılabilir. Çünkü bu yöntemi kullanan öğrenciler 7.adıma kadar oluşturdukları örnek ile sonuca varmışlardır.

İlgili kategoride yer alan cevaplardan bazıları aşağıda örnek olarak sunulmuştur.


2. Verilen kuralı kullanarak bir sırada 7 üçgen yapmak gerektiğini bulunuz. 15 tane kürdan olur.

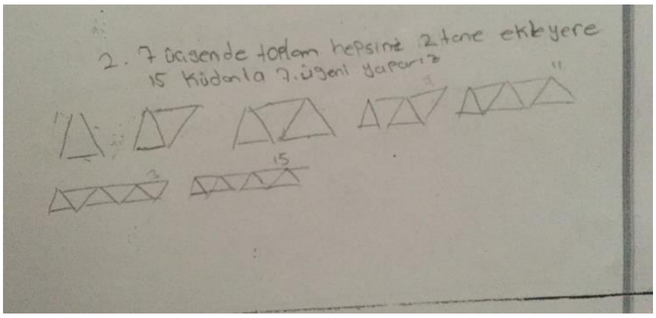
3→7
4→9
5→11
6→13
7→15

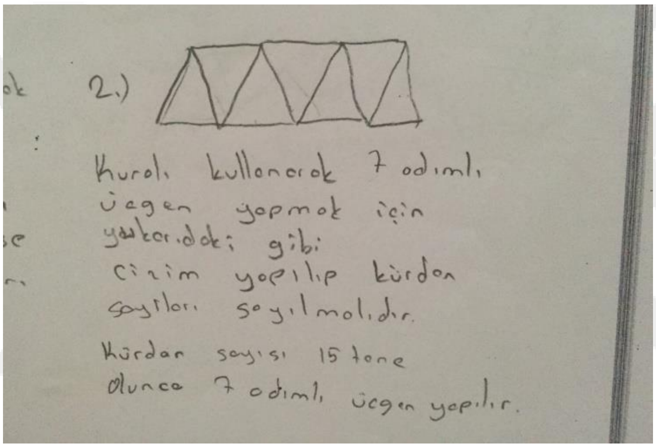

2. Verilen kuralı kullanarak bir sırada 7 üçgen yapmak için kaç kürdan gerektiğini bulunuz.

1.) 3 kürdan
2.) 5 kürdan } 3 er 3er artıyor
3.) 7 kürdan
4.) 9 kürdan
5.) 11 kürdan
6.) 13 kürdan
7.) 15 kürdan ⇒ 7 üçgen için 15 kibrit kullanılır

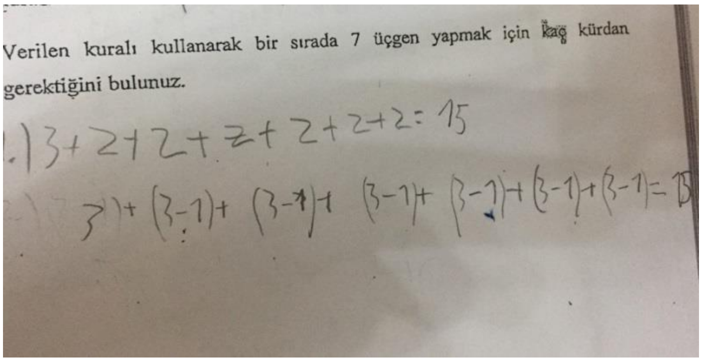
Bu soruya cevap veren öğrencilerin 18 tanesi ise süreci, her bir adımda yer alan şekilleri oluşturarak kullanılan kibrit sayısını bularak tamamlamışlardır. Öğrencilerin örüntünün ilerleyen adımlarını oluşturabilmeleri, onlara yöneltilen örüntüdeki şeklin kuralını fark ettikleri şeklinde yorumlanabilir. Bu kategoride yer alan öğrencilerin sonuca ulaşmak için izledikleri yol Balacheff'in ispat seviyeleri bağlamında yorumlandığında *pragmatik ispat* düzeyinde yer alan *kritik deneyim* seviyesinde bulunduğu söylenebilir. Çünkü bu cevabı veren öğrencilerin örüntünün adımlarını oluşturmak suretiyle örnek vererek sonuca ulaştıkları görülebilir.

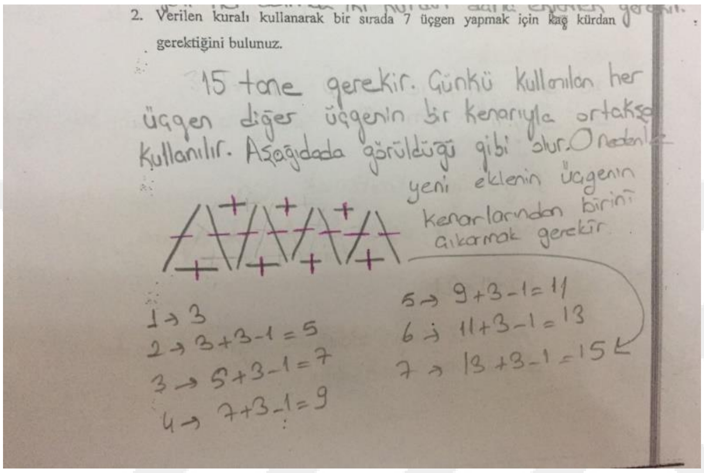
Bu kategoride yer alan yanıtlardan bazıları aşağıda örnek olarak sunulmuştur.



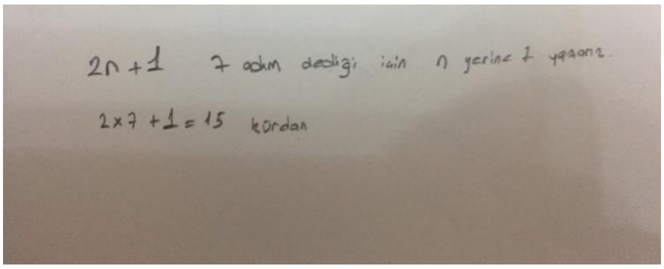


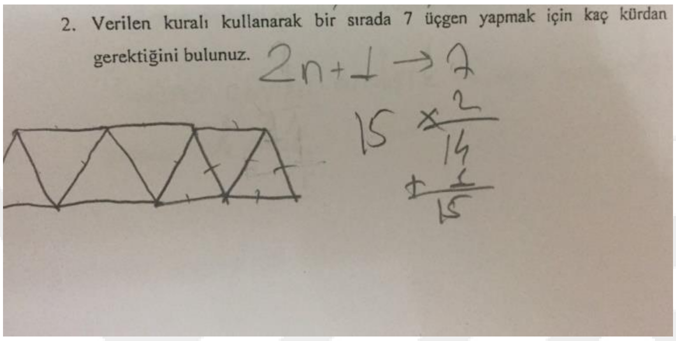
Araştırmaya katılan öğrencilerin çok az bir kısmı ise adımlarda gerekli olan kibrit sayısını oluştururken bir önceki adıma üç ekleyip bir çıkarma yöntemini kullanmışlar ve bu yöntem ile 7. adımdaki kibrit sayısına ulaşmışlardır. Bu yöntemi kullanan öğrenciler bir önceki şıkta ifade ettikleri örüntünün kuralını ikinci şıkta uygulamaya geçirmişlerdir. Öğrencilerin burada üç eklemesinin nedeni her adımda yeni bir üçgen eklemelerinden kaynaklı, bir çıkarmaları ise oluşan üçgenin bir kenarının önceki üçgenle ortak olmasından kaynaklıdır. Öğrenciler burada rastgele denemeler yapmayıp, keşfettikleri kuralı uygulamaya yönelik bilinçli seçtikleri örnek yardımıyla sonuca ulaşmışlardır. Bu nedenle yapılan bu işlemler Balacheff'in ortaya koyduğu ispat seviyelerinden *kritik deneyim* seviyesindedir yorumu yapılabilir. Bu kategoride yer alan öğrencilerin cevapları aşağıda sunulmuştur.



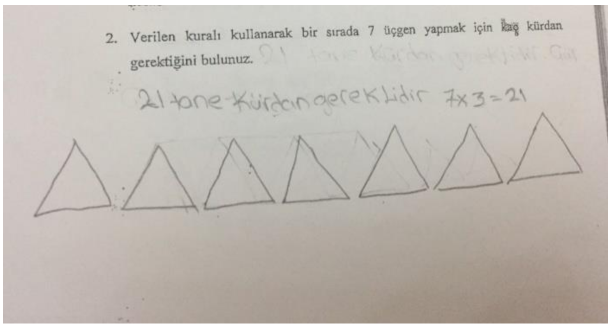


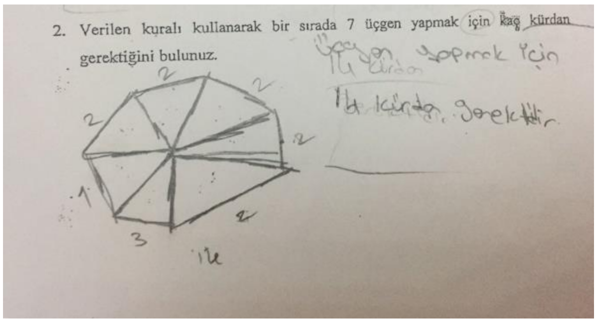
Soruyu cevaplandıran öğrencilerden 13 tanesi ise cebirsel ifadelerden faydalanarak 7. adımda kaç tane kibrit olduğunu bulmuşlardır. Süreçte bu yöntemi kullanan öğrenciler ilk olarak örüntünün genel kuralını 2n+1 şeklinde ifade etmiş ve buradaki "n" değişkeninin adım sayısına karşılık geldiğinin ayrımına varmışlardır. Bu kategoride cevap veren öğrencilerin diğer öğrencilere ek olarak tek tek sayılamayacak adımlarda da kaç kibrit olacağını bulabilecekleri söylenebilir. Çünkü onlar rastgele sayarak sonuca ulaşmaktan öte, matematiğin özelliklerinden faydalanarak kuralı formülize etmişlerdir. Oluşturdukları bu formülde "n" değişkeni yerine yedi sayısını koyan öğrenciler 2.7+1=15 işlemi ile sonuca ulaşmışlardır. Bu işlemi yaparak süreci tamamlayan öğrencilerin Balacheff'in ispat seviyelerine göre *zihinsel ispat* düzeyinde yer alan *belirleyici örnek* seviyesinde oldukları söylenebilir. Çünkü onlara sunulan örüntünün kuralını matematik dilini kullanarak ifade etmiş ve istenen adımı cebirsel ifadelerin özelliklerinden faydalanarak hızlı bir şekilde bulabilmişlerdir. Bu işlemleri yaparak sonuca ulaşan öğrencilerden bazılarının yanıtı aşağıda örnek olarak gösterilmiştir.

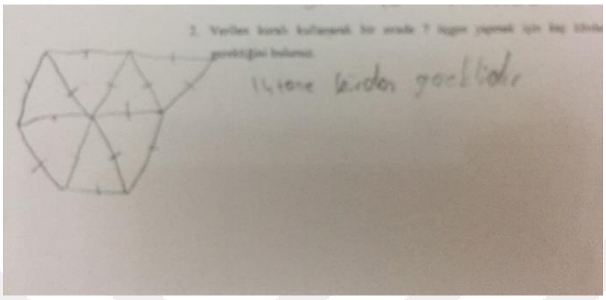




Bu soruya yanlış cevap veren öğrencilerden ise 12 tanesi yedi tane ayrı üçgen oluşturup her birinin kenar sayısını sayarak 21 sonuna ulaşmıştır. Bu cevabı veren öğrenciler onlara yöneltilen örüntüyü dikkate almayarak bu örüntünün oluşma şeklinden bağımsız olarak üçgenleri oluşturmuştur. Diğer yandan dört kişi ise bir kenarları ortak olacak şekilde yedi üçgen oluşturmuş, ancak yan yana ilerleyişi göz ardı ettikleri için hatalı sonuca ulaşmışlardır. Bu iki hatayı yapan öğrencilerin cevaplarından örnekler aşağıda verilmiştir.







İspatlama Düzeyi Belirleme Formu 2.Sorusuna Yönelik Bulgular ve Yorumlar

İspatlama Düzeyi Belirleme Formu’nun ikinci sorusu ise aşağıda verildiği gibidir.

“Aşağıda verilen önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını gösteriniz. Doğru ise neden doğru, yanlış ise neden yanlış olduğunu gerekçeleriyle belirtiniz.

1)3’e bölünebilen 3 tane sayının toplamı da 3’e bölünebilir.”

Öğrencilere yöneltilen bu soru ile onların, tam sayılar, bölünebilme, cebirsel ifadeler gibi konulara ait bilgilerini kullanarak önermeyi ispatlamaları beklenmektedir. Öğrencilerin bilgi seviyeleri ve gelişimsel özellikleri bu ispatı yapmak için yeterli seviyededir. Öğrencilerin vermiş olduğu yanıtların Balacheff’in ispat düzeylerine göre kategorileştirilmesiyle elde edilen tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 5

İkinci soruya verilen yanıtların Balacheff'in İspat Seviyelerine göre dağılımı

Balacheff'in İspat Seviyeleri	**Kişi Sayısı**
Pragmatik İspat	72
i. Acemi Deneycilik	55
ii. Kritik Deneyim	17
Zihinsel İspat	13
i. Belirleyici Örnek	1
ii. Düşünce Deneyi	12
Demonstrasyon	0
Cevap Vermeyenler	11
Yanlış Sonuca Ulaşanlar	4

Araştırmaya katılan 8. sınıf öğrencilerinden büyük bir kısmı bu soruya *pragmatik ispat* düzeyinde yanıt oluşturmuşlardır. Pragmatik ispat, örnek vererek sonuca ulaşmayı içeren bir ispat türüdür. Öğrencilerin çoğunluğunun onlara sunulan ifadeyi örnek göstererek doğrulamaya çalışması cebirsel ifadeleri kullanmaya aşina olmadıklarından kaynaklıdır yorumu yapılabilir. Öğrencilerin, gerek öğretim programında bu tip soruların çok yer almaması gerekse soyut düşünme yeteneklerinin henüz yeteri kadar gelişmemesinden ötürü değişken kullanarak genel bir sonuca ulaşamadıkları düşünülmektedir. Pragmatik düzeyde ispat yapan öğrencilerin 55 tanesi *acemi deneycilik*, 17 tanesi ise *kritik deneyim* seviyesinde bulunmaktadır. Soruyu acemi deneycilik seviyesinde yanıtlayan öğrenciler sadece rastgele oluşturdukları bir örnek ile genellemeye ulaşmışlardır. Kritik deneyim seviyesinde cevap veren öğrenciler ise durumu bir kaç örnek üzerinden deneyerek bir yargıya varmışlardır.

Araştırmaya katılan öğrencilerden 13 tanesi ise *zihinsel ispat* düzeyinde işlemler yaparak cevaplarına ulaşmışlardır. Bu seviyedeki öğrenciler *pragmatik ispat* seviyesindeki öğrencilere göre daha sistematik şekilde genellemeye varmışlardır. Öğrencilerden 12 tanesi "3'e bölünen sayılar 3n ile gösterilir" gibi cebirsel ifade kullanmaya yönelmişlerdir. Öğrencilerin süreçte değişken kullanması daha önceden bu tip bir soruyla karşılaşmış olmalarından veya cebirsel ifadeler konusunu zihinde anlamlandırabilmelerinden kaynaklı olabilir.

Öğrencilerden hiçbiri demonstrasyon seviyesinde ispat yapmamıştır. Bunun sebebi demonstrasyonun ileri düzeyde matematiksel bilgi gerektirmesi ve bu sınıf düzeyindeki öğrenciler için yeterli yapılarının olmamasından kaynaklıdır denilebilir. Ayrıca araştırmaya katılan öğrencilerden 11 tanesi soruyu boş bırakmış dört tanesi ise yanlış sonuca ulaşmıştır. Öğrenciler, 3'e bölünmeyle ilgili bilgi eksikliği olduğundan dolayı yanlış cevap vermişlerdir.

Diğer yandan bu soru ile ilgili öğrencilerin cevapları çeşitliliklerine göre kategoriler altında toplanmış ve oluşturulan tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 6

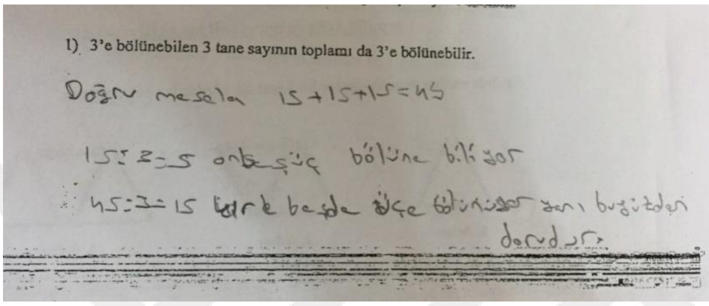
2. soruya verilen yanıtlardan elde edilen alt kategoriler

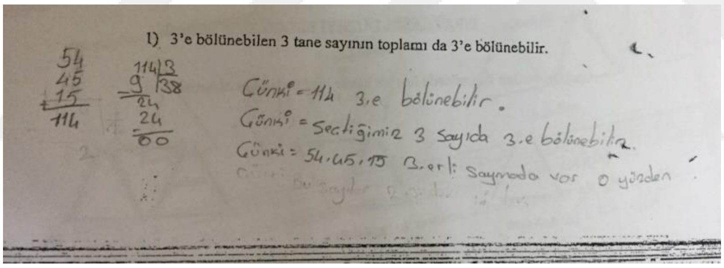
	Kişi Sayısı
Tek bir örnek vererek genellemeye ulaşanlar	55
Bir kaç farklı örnek vererek genellemeye ulaşanlar	10
Seçilen sayılar zaten 3'ün katı olduğu için toplamları da 3'e bölünür şeklinde sözel açıklama yapanlar	5
Değişken kullanarak genellemeye ulaşanlar	12
Toplam	82

Araştırmaya katılan öğrencilerden 55 tanesi, onlara yöneltilen ifadenin doğru veya yanlış olduğu genellemesine varmak için sadece bir örnek göstermekle yetinmiştir. Öğrenciler burada 3'e bölünen üç tane sayı seçerek bunların toplamının da 3'e böldüğünü göstererek "*evet üçe bölünen üç sayının toplamı da üçe bölünür"* sonucuna ulaşmışlarıdır. Burada öğrenciler bir örnek için iddianın doğru olmasının bütün durumlar için doğru olması gerektiği şeklinde bir düşünce içerisindedirler.

Balacheff'in ortaya koymuş olduğu ispat seviyeleri bağlamında değerlendirildiğinde ise bu cevabı veren öğrencilerin *pragmatik ispat* seviyesinde yer alan *acemi deneycilik* kategorisinde yer aldıkları söylenebilir.

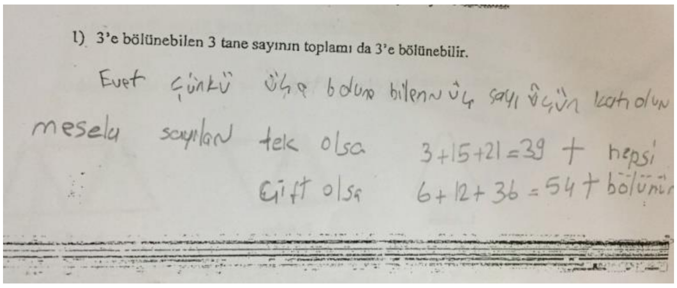
Öğrencilerin bu soruya verdikleri yanıtlardan birkaç örnek aşağıda sunulmuştur.





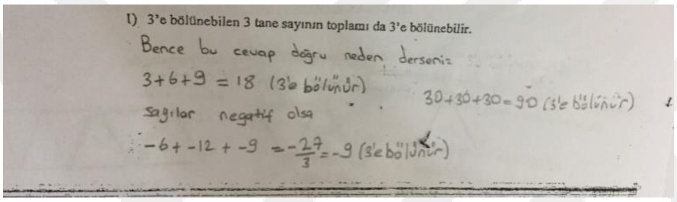
Araştırmaya katılan öğrencilerden 10 tanesi ise tek bir örnekten ulaştıkları sonuçtan tatmin olmamış, birden fazla örnek durum oluşturmuşlardır. Birden fazla örnek durum oluşturan öğrenciler sayıları çeşitli özelliklere göre (tek, çift olması vb.) yenileyerek tüm durumları gözden geçirmeye çalışmışlardır. Bu kategoride yer alan öğrenciler bir önceki kategoride yer alan öğrencilere göre ifadeye daha şüpheci yaklaşarak, tek bir örneğin tüm durumlar için geçerli olamayabileceğini düşünmüşlerdir. Süreci birden fazla örnek vererek tamamlayan öğrencilerin de Balacheff'in ispat seviyelerinden *pragmatik ispat* seviyesinde oldukları söylenebilir. Çünkü bu kategorideki öğrenciler de matematik dilini kullanarak sonuca ulaşmaya çalışmadan örnek vermekle yetinmişlerdir. Ancak bir önceki kategoriden farklı olarak rastgele bir örnekten değil, sayıları özelliklerine göre değiştirerek birden fazla örnek durum oluşturduklarından dolayı *kritik deneyim* seviyesinde ispat yaptıkları söylenebilir.

Bu kategoride yanıt veren öğrencilere ait bazı örnek durumlar aşağıda sunulmuştur.



1) 3'e bölünebilen 3 tane sayının toplamı da 3'e bölünebilir.

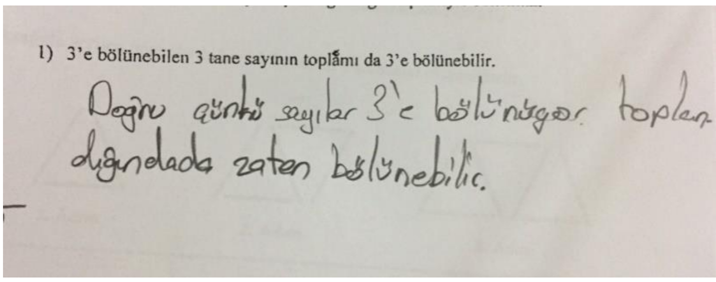
Evet çünkü üçe bölüne bilen üç sayı üçün katı olur
mesela sayılar tek olsa 3+15+21=39 + hepsi
Çift olsa 6+12+36=54 + bölünür



1) 3'e bölünebilen 3 tane sayının toplamı da 3'e bölünebilir.

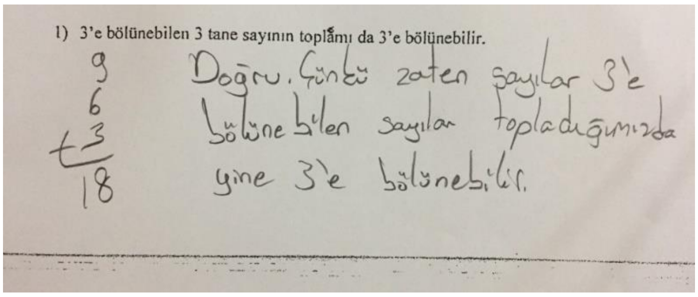
Bence bu cevap doğru neden derseniz
3+6+9 = 18 (3'e bölünür) 30+30+30=90 (3'e bölünür)
Sayılar negatif olsa
−6+−12+−9 = −27/3 = −9 (3'e bölünür)

Araştırmaya katılan öğrencilerden beş tanesi ise örnek durum oluşturmamış sadece *"toplamam gerek sayılar zaten 3'ün katı. 3'ün katı olan sayıları toplasak yine 3'ün katı olur zaten, o yüzden 3'e bölünür*" gibi bir açıklama yaparak soruyu yanıtlamışlardır. Buradaki öğrenciler onlara yöneltilen sorunun içeriğindeki ilişkiyi analiz etmiş ve düşüncelerini deneme yapmaya gerek görmeden ifade edebilmişlerdir. Bu cevabı veren öğrencilerin Balacheff'in ispat seviyelerinden *zihinsel ispat* seviyesinde oldukları söylenebilir. Çünkü öğrenciler soruda verilen ifadeyi kendi cümleleriyle açıklayarak yanıtlamışlardır. Bu kategoride yer alan öğrencilerin açıklamalarına yönelik örnek durumlar aşağıda gösterilmiştir.



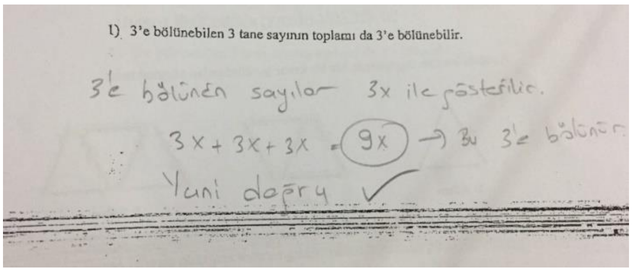
1) 3'e bölünebilen 3 tane sayının toplamı da 3'e bölünebilir.

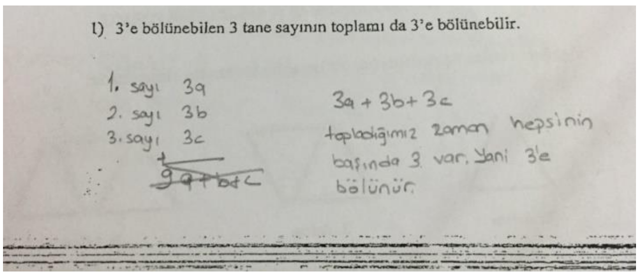
Doğru çünkü sayılar 3'e bölünüyor toplan dığındada zaten bölünebilir.



Araştırmaya katılan öğrencilerden 12 tanesi ise ifadeyi doğrularken süreçte cebirsel ifadeleri kullanmıştır. Öğrenciler 3'e bölünebilen sayıları 3n ile göstermişlerdir. Ancak burada bazı öğrenciler sayıların hepsini aynı değişkenle göstermiş, farklı sayılar olabileceğini göz ardı etmişlerdir. Sonucu etkilemese de öğrencilerin bu hataları cebirsel ifade kullanmaya yatkın olmadığından kaynaklıdır denilebilir. Diğer kategoride yer alan öğrenciler bir kaç sayıyla sınırlı kalsa da, değişken kullanan öğrenciler bütün sayılar için bir doğrulama yoluna gitmişlerdir. Süreçte cebirsel ifade kullanarak sonuca ulaşmaları onların Balacheff'e göre *zihinsel ispat* düzeyinde oldukları bağlamında yorumlanabilir.

Öğrencilerin yapmış olduğu işlemlere bazı örnek durumlar aşağıda sunulmuştur.





3.Soruya Yönelik Bulgular ve Yorumlar

İspatlama Düzeyi Belirleme Formu'nun üçüncü sorusu şu şekildedir:

Aşağıda verilen önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını gösteriniz. Doğru ise neden doğru, yanlış ise neden yanlış olduğunu gerekçeleriyle belirtiniz.

2)Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.

Öğrencilere yöneltilen bu soru ile onların ifadenin doğruluğunu gösterirken kullandıkları yöntemlerin neler olduğunun incelenmesi ve Balacheff'in ortaya koyduğu ispat seviyelerinden hangi düzeyde olduğunun belirlenmesi amaçlanmıştır. Öğrencilerin verdiği cevapların ispat seviyeleri bağlamında yorumlanmasıyla oluşturulan tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 7

Üçüncü soruya verilen yanıtların Balacheff'in İspat Seviyelerine göre dağılımı

Balacheff'in İspat Seviyeleri	**Kişi Sayısı**
Pragmatik İspat	53
i. Acemi Deneycilik	17
ii. Kritik Deneyim	36
Zihinsel İspat	15
i. Belirleyici Örnek	0
ii. Düşünce Deneyi	15
Demonstrasyon	0
Cevap Vermeyenler	9
Yanlış Olduğunu Söyleyenler	22

Öğrencilerin soruya vermiş oldukları cevaplar incelendiğinde büyük bir kısmının *pragmatik ispat* düzeyinde ispat yaptıkları söylenebilir. Çünkü öğrenciler onlara yöneltilen ifadenin doğru olup olmadığını anlamak için örnek bir durum yaratmış ve ulaştıkları sonuç ile genellemeye varmışlardır. Onların yaptığı bu işlem Balacheff'e göre en basit düzeyde yapılan ispat türüdür. Araştırmaya katılan öğrencilerden sadece 15 tanesi süreci cebirsel ifade kullanarak tamamlamıştır. Öğrenciler içinde bulundukları sınıf düzeyinin getirmiş olduğu bilgi birikimi ile bu ifadede yer alan özellikleri cebirsel ifade kullanarak gösterebilecek düzeydedirler, ancak ispat yapmaya alışkın olmamaları nedeni ile süreçte kullanamamışlardır. Diğer yandan öğrencilerden 22 tanesi ise ifadenin yanlış olduğu sonucuna varmışlardır. Yanlış olduğunu söyleyen öğrencilerin cevapları incelendiğinde ardışık sayılar ile ilgili bilgi eksiklikleri olduğu görülmüştür.

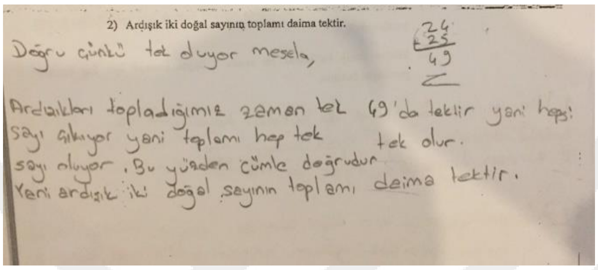
Bu soru ile ilgili öğrencilerin cevapları çeşitliliklerine göre kategoriler altında toplanmış ve oluşturulan tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 8

Üçüncü soruya verilen yanıtlardan elde edilen alt kategoriler

	Kişi Sayısı
Tek bir örnek vererek genellemeye ulaşanlar	17
Bir kaç farklı örnek vererek genellemeye ulaşanlar	28
Sadece açıklama yaparak düşüncelerini açıklayanlar	8
Değişken kullanarak genellemeye ulaşanlar	15
İfade yanlıştır sonucuna ulaşanlar	22
Toplam	90

Araştırmaya katılan öğrencilerden 17 tanesi önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını anlamak için bir tane örnek oluşturmuşlardır. Ardışık iki sayı seçerek toplamının tek olduğunu görmüşler ve ifade doğrudur sonucuna ulaşmışlardır. Öğrencilerin burada ulaştığı sonuç yanlış değildir ancak tek bir örnekten genellemeye ulaştıkları için ispat olması bakımından yeterli değildir. Öğrencilerin vermiş olduğu bu yanıtlar Balacheff'in İspat seviyelerinden p*ragmatik ispat* seviyesinde yer alan *acemi deneycilik* düzeyindedir. Bu kategoride yer alan öğrencilerin vermiş olduğu cevaplardan bir kaç örnek aşağıda verilmiştir.



2) Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.

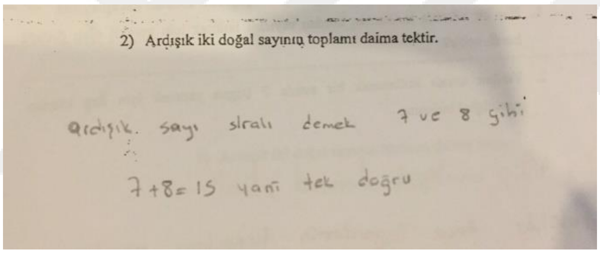
Doğru çünkü tek oluyor mesela,

24
+25
49

Ardışıkları topladığımız zaman tek sayı çıkıyor yani toplamı hep tek sayı oluyor. Bu yüzden cümle doğrudur

49'da tektir yani hepsi tek olur.

Yani ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.



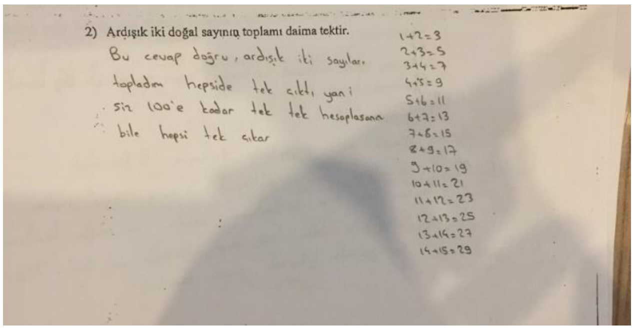
2) Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.

ardışık sayı sıralı demek 7 ve 8 gibi

7+8=15 yani tek doğru

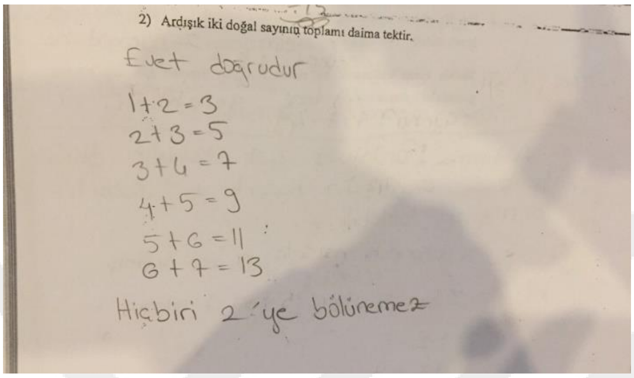
Öğrencilerden 28 tanesi ise önermeyi doğrulamak için sadece bir örnek vermekle yetinmeyip birden fazla örnek durum oluşturarak çıkan sonuçları incelemişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrencilerin bir önceki kategoride yer alan öğrencilere göre soruya daha şüpheci yaklaştıkları ve birden çok durum için doğru olan önermenin her durumda doğru olduğu sonucuna ulaştıkları görülmüştür. Öğrencilerin vermiş olduğu bu yanıtlar Balacheff'in ispat seviyelerinden *pragmatik ispat* seviyesinde yer alan *kritik deneyim* düzeyinde yer almaktadır. Çünkü öğrenciler rastgele seçtikleri tek bir örnekten sonuca ulaşmak yerine birden fazla özel durum oluşturarak süreci tamamlamışlardır.

Bu kategoride yer alan öğrencilerin bazı cevapları aşağıda sunulmuştur.


2) Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.

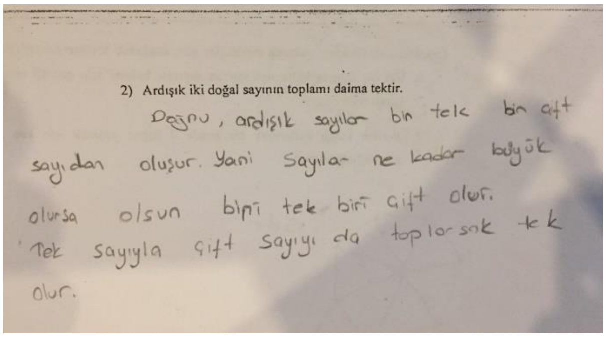
Bu cevap doğru, ardışık iki sayıları topladım hepside tek çıktı yani siz 100'e kadar tek tek hesaplasanız bile hepsi tek çıkar

1+2=3
2+3=5
3+4=7
4+5=9
5+6=11
6+7=13
7+8=15
8+9=17
9+10=19
10+11=21
11+12=23
12+13=25
13+14=27
14+15=29

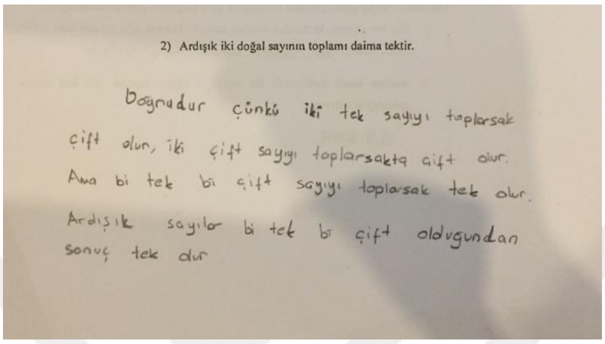

2) Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.

Evet doğrudur
1+2=3
2+3=5
3+4=7
4+5=9
5+6=11
6+7=13
Hiçbiri 2'ye bölünemez

Araştırmaya katılan öğrencilerden sekiz tanesi ise ifadeyi örnekle doğrulamamış, kendi cümleleriyle doğru olacağını açıklamışlardır. Açıklama yapan öğrencilerin geneli *"Ardışık sayılar bir tek bir çift olarak sırayla birbirini takip eder. Yani ardışık iki sayıyı topladığımız da bir tek ve bir çift sayıyı toplamış oluruz. Tek ve çift sayılar toplandığında ise sonuç tek olur. Bu nedenle ifade doğrudur."* şeklinde düşüncelerini açıklamışlardır. Öğrencilerin yapmış olduğu bu açıklamalardan hareketle, onların ardışık sayı kavramını zihinlerinde oluşturdukları ve örneklerin dışında genel durumlar içinde ardışık iki sayının sırasıyla tek ve çift olacağını görebildikleri yorumu yapılabilir. Öğrencilerin yanıtları Balacheff'in ispat seviyeleri bağlamında yorumlandığında ise *pragmatik ispat* seviyesinde yer alan *kritik deneyim* düzeyinde yer aldığı söylenebilir. Öğrencilerin vermiş olduğu cevaplardan bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.


2) Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.

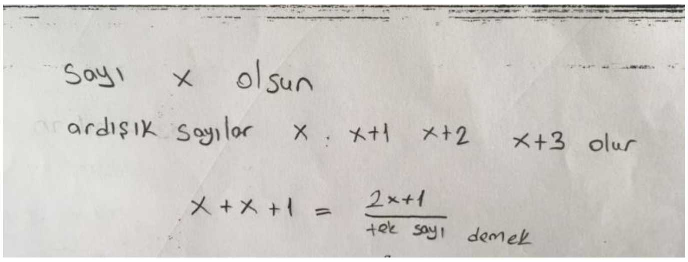
Doğru, ardışık sayılar bir tek bir çift sayıdan oluşur. Yani sayılar ne kadar büyük olursa olsun biri tek biri çift olur. Tek sayıyla çift sayıyı da toplarsak tek olur.


2) Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.

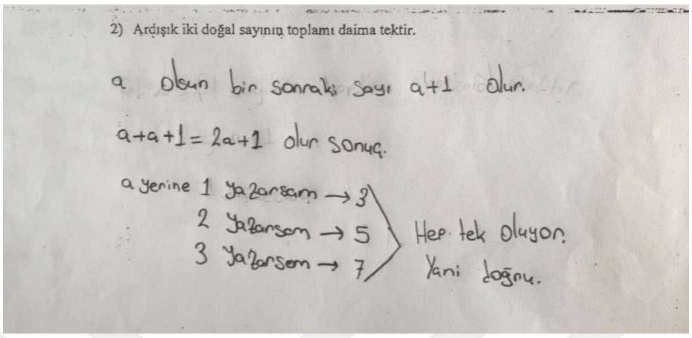
Doğrudur çünkü iki tek sayıyı toplarsak çift olur, iki çift sayıyı toplarsakta çift olur. Ama bi tek bi çift sayıyı toplarsak tek olur. Ardışık sayılar bi tek bi çift olduğundan sonuç tek olur

15 öğrenci ise ifadenin doğru veya yanlış olduğunu gösterebilmek adına cebirsel ifadelerden faydalanmıştır. Bu kategoride yer alan öğrencilerin geneli *"Sayının kaç olduğunu bilmediğimiz için x* deriz. *Ardışık sayılar bir fazlası* demek *o zaman x+1 olur.* x *ile x+1'i toplayınca 2x+1 olur bu da tek sayı* demek *zaten."* açıklamasını yapmışlardır. Öğrencilerin bu açıklamayı yapabilmeleri onların, ardışık sayılar, cebirsel ifadeler ve tek çift sayılar kavramlarına ilişkin bilgilerinin yeterli olmasından kaynaklıdır denilebilir. Burada öğrenciler diğer kategoride yer alan öğrencilerden farklı olarak onlara yöneltilen ifadeyi bir kaç örnek üstünden denemek yerine tüm sayılar için genel bir ifade oluşturarak göstermişlerdir.

Öğrencilerin bu ispatı Balacheff'in ortaya koyduğu ispat seviyelerinden *zihinsel ispat* seviyesinde yer alan *düşünce deneyi* kategorisinde değerlendirilebilir. Çünkü öğrenciler burada örneklerden ziyade matematiğin yapısal özelliklerini kullanarak ifadeyi doğrulamayı başarmıştır. Öğrencilerin vermiş olduğu cevaplardan bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.



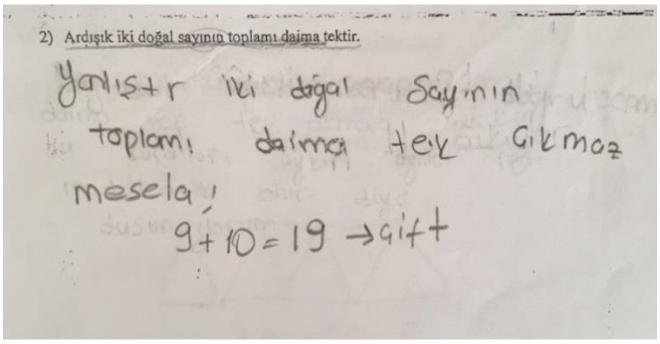
Sayı x olsun
ardışık sayılar x . x+1 x+2 x+3 olur
x + x + 1 = 2x+1 tek sayı demek



2) Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.

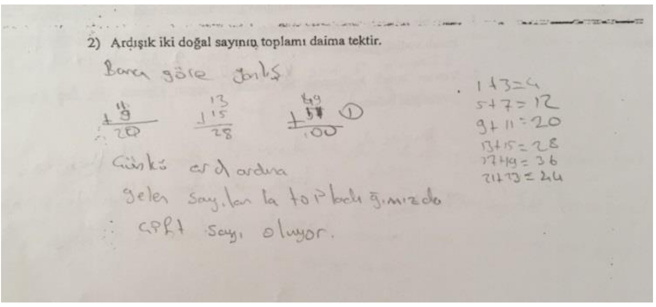
a olsun bir sonraki sayı a+1 olur.
a+a+1 = 2a+1 olur sonuç.
a yerine 1 yazarsam → 3
2 yazarsam → 5
3 yazarsam → 7
Hep tek oluyor. Yani doğru.

Öğrencilerden 22 tanesi ise *"ifade yanlıştır yani ardışık iki doğal sayının toplamı tek olmak zorunda değildir."* cevabını vermişlerdir. Bu yanıta ulaşan öğrencilerin kağıtları incelendiğinde ulaştıkları sonucun, ardışık sayılar veya tek-çift sayılar ile ilgili bilgi eksikliğinden kaynaklandığı söylenebilir. Burada bazı öğrenciler ardışık sayılar olarak 2-4 gibi ardışık olmayan sayıları seçmiş, bazıları ise ulaştıkları 15 gibi bir sonuca çifttir demişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrencilerin vermiş oldukları cevaplardan bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.



2) Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.

Yanlıştır iki doğal sayının toplamı daima tek çıkmaz
mesela;
9+10=19 → çift



Görüşmelere İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Bu bölümde, araştırmanın ikinci alt problemi olan *"Ortaokul 8.sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçleri kanıt imajı bağlamında incelendiğinde ortaya çıkan sonuçlar nelerdir?"* problemine yönelik bulgulara yer verilmiştir.

Öğrencilerin ispat yapma sürecinde oluşturdukları kanıt imajlarının incelenebilmesi için *İspatlama Düzeyi Belirleme Formu*'nun uygulandığı 100 kişilik gruptan seçilen üç öğrenci (öğrenciler Ç, F ve H olarak adlandırılmıştır) ile her biriyle üçer defa olmak üzere görüşmeler gerçekleştirildi. Görüşmelerde 8.sınıf kazanımlarına uygun olarak seçilen ikişer ifadenin ispatlanması istenmiştir.

Bu bölümde her öğrencinin toplamda ispatlamış olduğu 6 sorudan 3'üne ilişkin bulgular sunulmuştur. Bu soruların seçiminde, her bir soruya ilişkin cevaplardan en az bir kere sunulmasına özen gösterilmiş, böylece analiz edilmeyen soru kalmaması sağlanmıştır. Ayrıca benzer yanıtları tekrardan sunulmasının önüne geçmek adına aynı sorulara verilen benzer cevaplar tekrardan sunulmamıştır.

Öğrencilerin süreçte verdikleri yanıtlar doğru veya yanlış diye kategorileştirilmemiş, amaç öğrencilerin düşünme süreçlerini ve kanıt imajlarını belirlemek olmuştur.

Ç'nin İspat Süreci

A ve B aralarında asal iki sayı olsun. Bu durumda, EKOK(A,B)=A.B 'dir. Gösteriniz.

Ç'ye yukarıda verilen soru yöneltilmiş ve düşüncelerini yüksek sesle araştırmacıyla paylaşması istenmiştir.

Ç, verilen soruyu dikkatlice okumuş ve 2-3 dakika boyunca hiç bir tepki vermeden düşünmeye başlamıştır. Bu sırada stresli bir hali olduğu araştırmacı tarafından gözlenmiştir. Bir kaç dakika sonra verilen önermeyi tereddütlü bir ses tonuyla, alçak sesle okumuştur. Kâğıda uzun uzun baktıktan sonra aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

"Şimdi burada iki tane A ve B sayıları var ve bunların ekoklarının sayıların çarpımına eşit olduğunu göstermem gerekiyor."

Ç'nin yaptığı açıklama ile ona yöneltilen sorudaki ilişkileri anlamlandırmaya çalıştığı söylenebilir. O, verilen ifadeyi kendi cümleleriyle ifade etmiştir. Ancak Ç'nin tavırlarından hala kararsız olduğu görülmüştür. Bu durumun da ispat sürecini henüz zihninde şekillendirememesinden kaynaklandığı şeklinde yorumlanabilir.

Bir süre daha sessiz kalan Ç, ardından aşağıda verilen açıklama ile görüşlerini belirtmiştir.

"Ekok bulmam isteniyor. Yani iki sayının da katı olan bir sayı arıyoruz."

Açıklama incelendiğinde Ç'nin, zihninde daha önceden yer alan bilgileri gözden geçirdiği, iki veya daha fazla sayının ortak katlarının en küçüğü (EKOK) kavramını durumla ilişkili olarak seçtiği ve bunun da tanıma (R-) epistemik eylemine karşılık geldiği söylenebilir.

Yukarıda verilen açıklamasına Ç, aşağıda verildiği gibi devam etmiştir.

“Aslında burada yapmam gereken şey EKOK bulmak değil. Verilen iki sayının EKOK’larının çarpımlarına eşit olduğunu göstermem gerekiyor.”

Ç’nin yaptığı açıklama ile ona verilen ifadeyi anlamlandırmaya başladığı söylenebilir. Ayrıca imajın şekillenmeye başladığı yorumu da yapılabilir. Çünkü o, izleyeceği yolu belirlemeye başlamıştır.

Bir süre sonra Ç, açıklamasının devamında *“Burada aklıma şu takılıyor. EKOK sayıların çarpımına eşit olmak zorunda mı?”* sorusunu kendisine yöneltti.

Ç’nin kendisine bu soruyu sorarak ona verilen ifadedeki ilişkileri analiz etmeye çalıştığı yorumu yapılabilir. Zihninde yer alan EKOK kavramının her zaman iki sayının çarpımına eşit olmayacağını fark etmiş ve bu noktayı vurgulamıştır. Bu noktada Ç’nin şekillenmeye başlayan imajının mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir. Çünkü o, sorduğu sorular ile ispat sürecine yön vermeye başlamıştır.

Bir süre sessiz kalan Ç’ye araştırmacı tarafından ne düşündüğü sorusu yöneltilmiş ve Ç ile araştırmacı arasında aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

Ç: *EKOK kavramını düşünüyorum.*

A: *Nedir peki EKOK kavramı?*

Ç: *Şöyle, iki sayının ortak katı demek. Yani bana verilen iki tane sayının tek tek katlarına bakıp, ortak olanların en küçüğünü seçersem EKOK olur. Ama sorun şu ki yani anlayamadığım nokta bu sayıların çarpımlarına eşit olmak zorunda mı?*

Sunulan konuşma incelendiğinde Ç’nin EKOK konusuna ilişkin bir süre önce seçtiği bilgileri kullanmaya (-B) başladığı söylenebilir. Ç konuşmanın ardından kâğıda bazı sayılar yazıp üzerini karalamaya başlamıştır. Onun bu hareketi araştırmacı tarafından kendisini ifade etmeye yarayacak uygun örnekleri bulma çabası içinde olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Bir süre sonra Ç tarafından yapılan açıklama aşağıda sunulmuştur.

"Şimdi 6 ve 10 sayılarını düşünelim. EKOK'ları 30 oluyor. Yani çarpımlarına eşit değil."

Ç'nin açıklama yaparken yüzünde stresli bir hali olduğu görülmüştür. Bunun sebebi olarak zihninde yer alan ekok kavramı ile ona verilen ifade arasında bir çatışma yaşadığı yorumu yapılabilir. Çünkü o, şu ana kadar ifadenin ilk kısmında yer alan A ve B sayılarının aralarında asal olması durumunu göz ardı etmiş sadece EKOK(A,B)=A.B kısmına odaklanmıştır. Bu nedenle düşündüğü örneklerle soru arasında uyumsuzluklar olduğunu görmüştür.

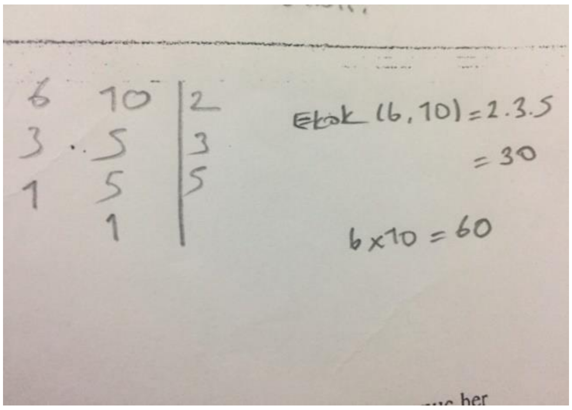
Ç'nin ispat sürecinde şu ana kadar verilen ifadeyi anlamlandırmaya çalıştığı ancak yeterli matematiksel bağları kuramadığından dolayı hala tereddütlü olduğu söylenebilir.

Bir süre sonra Ç, kısık sesle aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

Bir de şöyle düşünsem. EKOK hesaplarken asal çarpanlarına ayırıyoruz. Bu yöntemle denesem belki neden sorudan farklı sonuçlar elde ettiğimi bulabilirim.

Verilen açıklama incelendiğinde Ç'nin zihnindeki bilgileri yokladığı ve sayıların ortak katlarını bulmak için asal çarpanlarına ayırma yöntemini seçtiği (-B) söylenebilir. O, önceki kısımda denediği yöntemden farklı olarak sayıları asal çarpanlarına ayırmayı ve EKOK bulma aşamasında hangi noktada farklılık olduğunu görmeyi amaçlamıştır.

Yaptığı açıklamanın ardından Ç, kâğıda aşağıda verilen örneği yazmıştır.



Verilen örnek incelendiğinde Ç'nin bir önceki adımda ulaştığı sonuca tekrar ulaştığı söylenebilir. Ç burada seçtiği sayıları asal çarpanlarına ayırmış ve elde ettiği asal çarpanları çarparak sayıların EKOK'una ulaşmıştır. Ancak yine gözden kaçırdığı nokta sayıların "2" gibi ortak bir çarpana sahip olmasıdır.

Yazdıklarına kararsız bir yüz ifadesiyle uzun bir süre bakan Ç, "*Buldum!*" diyerek sevinçle ayağa kalkmış ve arkasından şu açıklamayı yapmıştır:

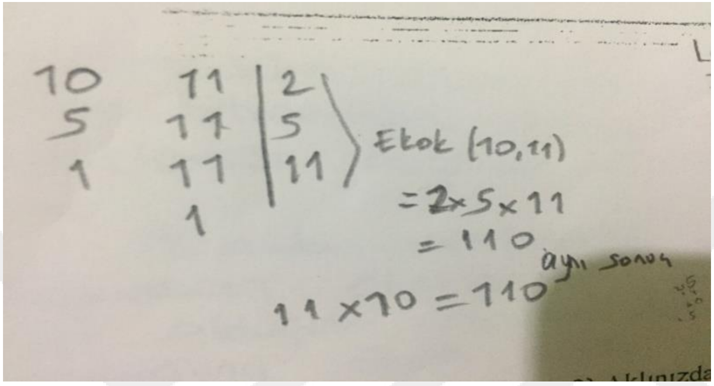
"Ama ben burada sayıları aralarında asal seçmedim ki. Sorunun en başında aralarında asal diyor. Yani ortak böleni yok. 6 ve 10 aralarında asal sayılar değil. Tam emin değilim ama galiba bu nedenle bir türlü istediğim sonucu elde edemiyorum."

Burada, Ç'nin, sürecin en başından itibaren gözden kaçırdığı ve örnek seçerken de atladığı bir noktayı fark ettiği söylenebilir. O, bu açıklamanın ardından kendinden emin bir şekilde yeni örneklerini düşünmeye başladı. Sergilediği bu tutumun, Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından sezgisel ikna sağlayan duyuşsal bileşen olarak adlandırılan tanıma karşılık geldiği söylenebilir.

Diğer yandan burada O'nun aralarında asal sayıları ön bilgilerini yoklayarak tanıdığı (R-) ve örnek seçerken kullandığı (B-) söylenebilir. Ayrıca ifadedeki ilişkileri tam anlamıyla şu ana kadar anlamlandıramadığı yorumu yapılabilir. Dolayısı ile sürecin şu andan itibaren farklı bir yöne doğru şekillendiği söylenebilir.

İstediği örneği bulmak için yeterli zamanı kullanan Ç’nin yaptığı açıklama ve işlem aşağıda verilmiştir.

“Şimdi bu sefer sayıları aralarında asal olarak seçmeliyim. 10 ve 11 olabilir.”



“Evet, bu sefer oldu. EKOK’ları sayıların çarpımına eşit.”

Ç’nin vermiş olduğu örnek incelendiğinde, ifadeyi doğrulamak için uygun örnekler seçtiği görülebilir. Bu noktada O, sürecin başından beri yok saydığı A ve B sayılarının aralarında asal olma durumlarını fark etmiş ve soruyu doğrulamak adına örneğindeki sayıları aralarında asal seçerek uygulamaya karar vermiştir. Bu doğrultuda 10 ve 11 sayılarının aralarında asal olduğuna karar vermiş, EKOK’larını bilinen yöntemlerle hesaplayarak sayıların çarpımına eşit olduğunu göstermiştir. Böylece aralarında asal iki sayının EKOK’larının sayıların çarpımına eşit olduğunu ispatlama sürecini seçtiği örnekle biçimlendirmiştir.

Ç’nin sahip olduğu imaj, seçtiği örneklerle yeniden şekillenmiştir. İlk önce ele aldığı örneğin istediği sonuca ulaştırmaması nedeniyle tekrar süreci gözden geçirmiş, atladığı noktaları fark ederek örneğini yeniden yapılandırmıştır. Buradan hareketle imajın dinamik olduğu yorumu yapılabilir.

Bir süre sonra araştırmacı Ç'ye ispatının bitip bitmediğini sormuştur. Cevabı ise aşağıda verilmiştir.

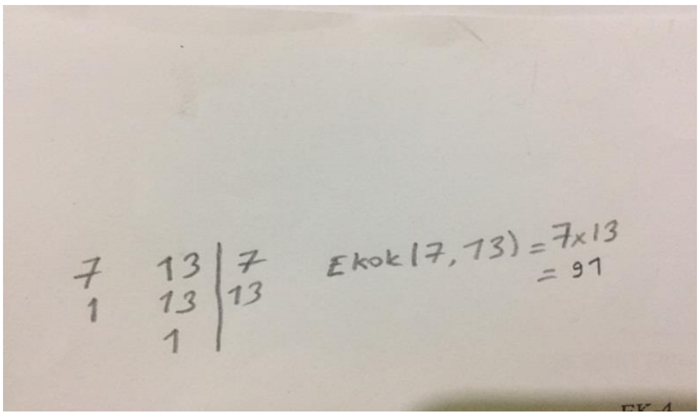
"Aslında aralarında asal iki sayının ekoklarının sayıların çarpımına eşit olduğunu gördüm. Ama neden böyle olduğunu henüz söyleyemem."

Bu açıklama ile Ç için henüz ispat sürecinin bitmediği sonucuna varılabilir. Şu ana kadar geçen süreçte Ç, verdiği örnekler ile asal sayılar, asal çarpanlarına ayırma, aralarında asal olma, sayıların ortak katını bulma gibi birbiriyle ilişkili konuları kullanmıştır. İspat sürecinde tüm bu konuları seçerek kullanması Ç'nin sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içerdiğinin göstergesi olarak yorumlanabilir. Çünkü O, tüm bu kavramları, farklılıklarını göz önünde bulundurarak kullanmış ve örnekleri bu doğrultuda seçmiştir.

Yaptığı açıklama ile sürecin sonlanmadığını söyleyen Ç aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

"Aralarında asal olan sayıların EKOK'larının diğer sayılardan farklı olduğunu göstermek istiyorum."

Bir süre sessiz kalan Ç, ardından aşağıda verilen örneği kâğıda yazmıştır.



Örneğin, 7 ve 13 sayıları aralarında asaldır. Bunların EKOK'larını hesaplayalım.

Araştırmacı Ç'ye yazdıklarını açıklamasını istediğinde Ç açıklamasına aşağıda verilen şekilde devam etmiştir.

"Bu sefer örnekleri ikisi de asal olacak şekilde seçtim. 7 ve 13. Asal çarpanlarına ayrılınca kendilerinden başka çarpanları olmuyor. Yani EKOK'larını hesaplarken sayıların kendilerini çarpmış oluyorum."

Sunulan açıklamadan hareketle Ç'nin verdiği spesifik örneklerle oluşturduğu özel durumu genel bir yargıya varmak için kullandığı söylenebilir. O, mevcut ana kadar örnekler yardımıyla ifadenin neden doğru olduğunu anlamayı başarmıştır.

Araştırmacı ile Ç arasında sürecin sonunda aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

A: *ispat sürecini tamamladın mı?*

Ç: Evet tamamladım. Çünkü neden çarpımlarına eşit olduğunu artık anladım.

A: Nasıl olduğunu bana anlatabilir misin?

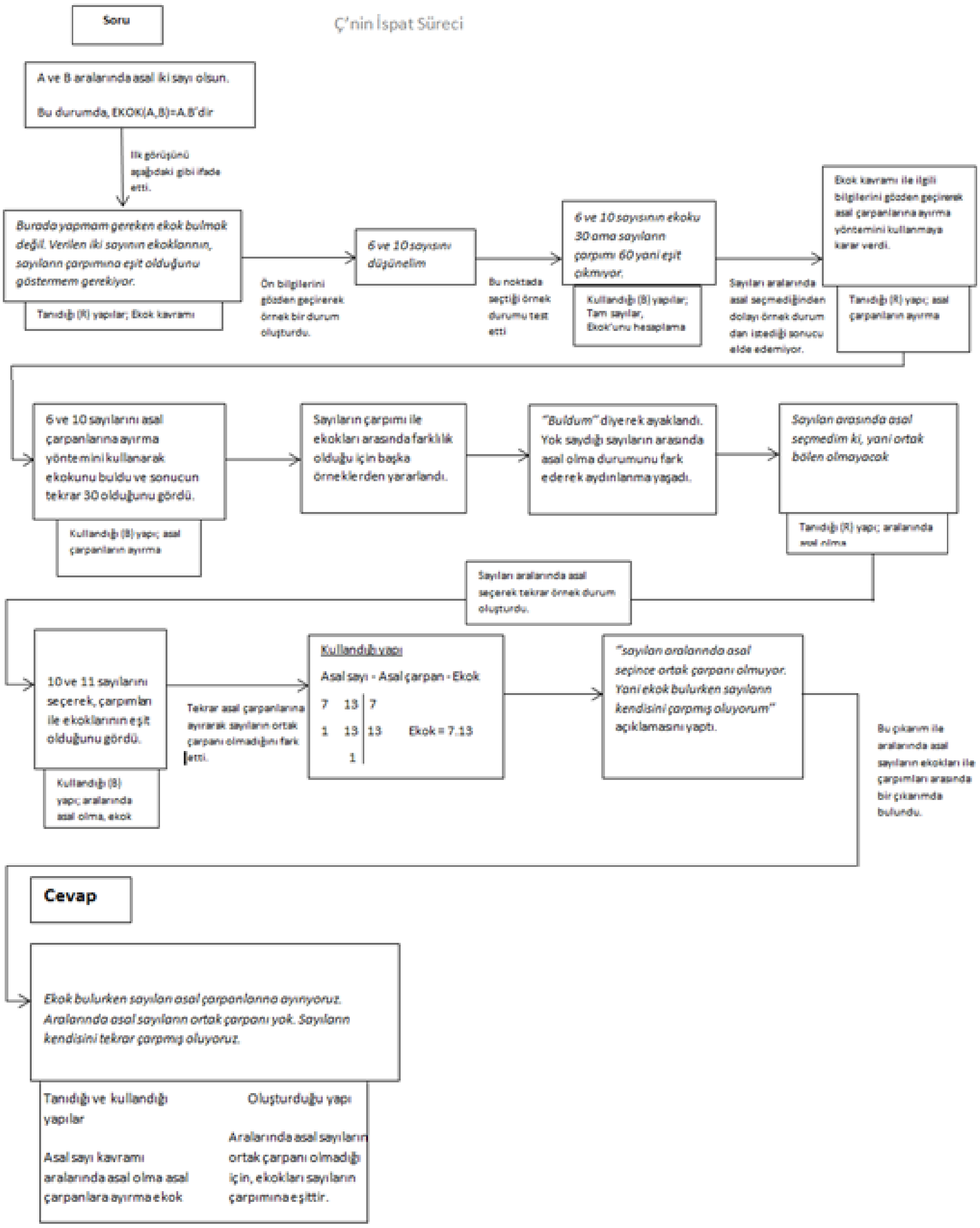
Ç: EKOK kavramının ne olduğunu zaten biliyordum. Ama verdiğim örneklerde bulduğum sonuç sayıların çarpımına eşit çıkmadığı için bi yanlışlık yaptığımı anladım. Soruyu tekrar dikkatlice okuyunca başında aralarında asal dediğini fark ettim. Zaten sayıları da aralarında asal seçince gerçekten de sayıların çarpımı ile EKOK 'ları eşit çıkıyor.

A: Neden eşit çıkıyor peki?

Ç: Çünkü EKOK bulurken sayıları asal çarpanlarına ayırıyoruz. E aralarında asal sayıların zaten ortak çarpanı yok, sayıların kendi çarpanlarını çarpmış oluyoruz yani.

Bu noktada Ç, önermenin doğruluğunu göstermek adına seçtiği örnekleri kendisine verilen soruya uygun olarak yenileyerek genişletmiştir. Bu durum için Ç'nin sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içerdiği biçiminde yorumlanabilir. Ayrıca konu ile ilgili örnekleri seçerken bir önceki örneği göz önünde tutması, imajın dinamik olması olarak değerlendirilebilir. Ayrıca Ç'nin süreç boyunca soruya olan yaklaşımı, örnek seçimi gibi faktörler onun kişisel bilgi birikiminin ürünüdür. Bu bağlamda imajın kişisel olduğu da söylenebilir. Diğer yandan ispat kendi içerisinde bir bütünlük oluşturmaktadır. Bu bağlamda imajın varlık karakteristiğine de sahip olduğu söylenebilir.

Ç'nin soruya yönelik oluşturmuş olduğu ispat imajını özetleyen şema aşağıda şekil 2'de sunulmuştur.



Şekil 2: Ç'nin Oluşturduğu İspat İmajını Özetleyen Şema

Başka bir görüşme sırasında Ç'ye aşağıda verilen ifade sunulmuş ve görüşlerini yüksek sesle açıklaması istenmiştir.

"a,b $\in$ Z ve b≠0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel, yazılamayanlara ise irrasyonel sayılar denir."

Yukarıdaki bilgi göz önünde tutulduğunda 4,45454545… ve $\sqrt{2}$ sayılarının rasyonelliği ve irrasyonelliği hakkındaki düşüncelerinizi belirtiniz.

Verilen ifadeyi okuduktan birkaç dakika sonra Ç'nin yüzü aydınlanmıştır. Bu kez tereddütlü ya da endişeli değildir. Onun bu hali araştırmacı tarafından Ç'nin ifadeye aşina olduğu ve doğrulamak için izleyeceği yolu belirlediği şeklinde yorumlanmıştır.

Bir süre sonra Ç aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

"*Soruda bana rasyonel ve irrasyonel sayılar hakkında bilgi vermiş ve verilen iki örneğin hangi sayı tipine girdiğini söylememi istiyor. Benim yapmam gereken sayıların rasyonel mi irrasyonel mi olduğunu bulmak."*

Ç'nin yaptığı açıklama ile ona yöneltilen soruyu anlamlandırmaya başladığı ve zihninde yer alan konuyla ilgili bilgilerini yokladığı söylenebilir. O, bu anlamlandırma çalışması ile ispat sürecine başlama evresindedir yorumu yapılabilir.

Bir süre sonra araştırmacı Ç'ye "*Peki irrasyonel sayılar ve rasyonel sayılar ne demek?"* sorusunu yöneltmiştir.

Birkaç dakika düşündükten sonra Ç, bu soruya aşağıda sunulan açıklamayı yapmıştır.

"Rasyonel sayılar bildiğimiz kesirli olarak da yazabildiğimiz sayılar, irrasyonel sayılar ise kesirli olarak yazılamıyor ve karekökün içinden de çıkamıyor."

Ç, gerçek sayılar ile ilgili sahip olduğu bilgilerini yoklamış ve rasyonel-irrasyonel sayılar ayrımını (R-) yapmıştır. Ancak, Ç'nin rasyonel ve irrasyonel sayılara getirdiği açıklama ile onun bu konuda özelleme yaptığı söylenebilir. O, irrasyonel sayıları sadece karekökün içinden çıkamayan sayılar olarak kısıtlamıştır. Onun bu tanımı hatalıdır denilemese de eksik bilgiler içerdiği söylenebilir. Ç'nin yaptığı tanıma göre 1,134545464246… gibi düzensiz ondalık gösterimler irrasyonel sayıların dışında kalmaktadır. Ç, bu tip sayıları yok saymaktadır.

Ç'nin yaptığı tanımdan yola çıkarak düşüncelerini öğrenmek isteyen araştırmacı ile Ç arasında aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

A: *İrrasyonel sayılar sadece karekökün dışına çıkamayan sayılardan mı oluşuyor?*

Ç: *Evet galiba. Ama bir de π sayısı var.*

A: *Peki o zaman senin tanımına göre* $\sqrt{2}$ *irrasyonel sayı mı?*

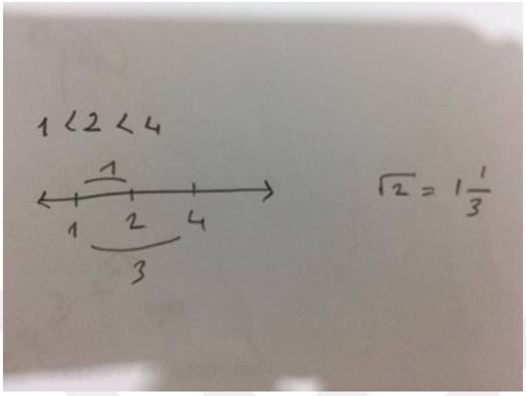
Ç: *Ben de onu düşünüyordum.* $\sqrt{2}$*karekökün içinden çıkamıyor. O nedenle irrasyonel gibi görünüyor. Ama bir düşüncem daha var.*

A: *Nedir düşüncen?*

Ç: *Derste kareköklü sayıları kesirli olarak yazmamızı sağlayan bir formül öğrenmiştik. O formülü kullansam nasıl olur diye düşünüyorum.*

Bu diyalogdan hareketle; Ç'nin irrasyonel sayı kavramına ilişkin bazı bilgi eksikliğine sahiptir yorumu yapılabilir. Onun zihninde yer alan irrasyonel sayı kavramı karekökün içinden çıkamayan sayılar ve π sayısıyla sınırlı kalmıştır. Ç'nin kökün içinden çıkamayan sayıları rasyonel hale çevirmek için kullanmak istediği formül aslında kareköklü irrasyonel sayıların yaklaşık değerini hesaplamak için kullanılan bir formüldür. Ç bu ayrıntıyı göz ardı ederek $\sqrt{2}$ sayısını rasyonel hale getirebileceğini düşünmektedir. Diğer yandan mevcut ana kadar geçen süre ve Ç'nin açıklamaları incelendiğinde imaj oluşturma sürecinin başında olduğu yorumu yapılabilir. Çünkü O, konuya hâkim olduğu düşüncesiyle kendisinden emin bir şekilde sürece başlasa da, sahip olduğu yanılgılar nedeniyle çelişkilere düşmektedir.

Bir süre düşünen Ç'nin kâğıda yazdıkları aşağıda verilmiştir.



Araştırmacı Ç'den yazdıklarını açıklamasını istemiştir.Buna karşılık, Ç'nin yapmış olduğu açıklama aşağıda verilmiştir.

"Şimdi $\sqrt{2}$ *sayısını kesirli olarak yazmaya çalıştım. Çünkü yazabilirsem rasyoneldir derim. 2 den büyük ve küçük tam kare olan sayıları belirledim. Yani 1 ve 4. 2 bunların arasındadır. 2'den küçük olan tam kare sayı 1, karekökü de 1 olduğundan dolayı kesrin tam kısmı 1 olmalı. Daha sonra paydaya 1 ile 4 arasındaki farkı yazdım, yani 3. Paya ise 2 ile 1'in farkını yazdım. Böylelikle* $\sqrt{2} = 1\frac{1}{3}$ *yazılabildi."*

Ç, kareköklü irrasyonel sayıların yaklaşık değerini bulma ile ilgili bilgilerini yoklamış (R-), ve bu formülü kullanmıştır (B-). Ancak yukarıda da belirtildiği gibi Ç'nin sahip olduğu bilgi hatalıdır. Bu nedenle onu hatalı bir sonuca ulaştırmıştır. Onun burada ulaşmış olduğu $1\frac{1}{3}$ sayısı $\sqrt{2}$ sayısının karşılığı değil, yaklaşık bir değeridir.

Bir süre sonra araştırmacı ile Ç arasında geçen konuşma aşağıda verilmiştir.

A: *İspatını tamamladın mı?* $\sqrt{2}$*'nin rasyonel veya irrasyonel olması hakkında ne düşünüyorsun?*

Ç: *Tamamladım diyebilirim.* $\sqrt{2}$ *sayısının kesirli olarak karşılığını bulabildiğime göre rasyoneldir bence.*

A: *Peki sonucun az önce irrasyonel sayılar ile ilgili yaptığın açıklama ile çelişmiyor mu?*

Ç: *Evet benim de aklıma geldi aslında.* (1-2 dakika sessiz kaldıktan sonra devam etti.) *Karekökün dışına çıkamayan sayılar irrasyoneldir demiştim. Ama işlem yapınca* $\sqrt{2}$ *sayısının karekökün dışına çıkabildiğini yani* $\frac{a}{b}$ *olarak yazılabildiğini gördüm. O nedenle* $\sqrt{2}$ *rasyonel bir sayıdır.*

Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan kanıt imajı kavramı kişiseldir. Yani bireyden bireye farklılık gösterebilir. Bireylerin bilgi birikiminden etkilenir. Bu nedenle bireylerin sahip olduğu kanıt imajı doğrudur ya da yanlıştır gibi bir ifadede bulunmak doğru olmaz. Ancak Ç bazı hatalı bilgilere sahip olduğundan dolayı imajı bu doğrultuda şekillenmiştir. Yani Ç'nin bu örnekte sahip olduğu kanıt imajı yanlış bilgiler içermektedir.

$\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğuna ikna olan Ç, soruda verilen diğer sayıya yönelmiştir. Bu sefer yüzünde daha gergin bir ifade belirmiştir. Araştırmacı tarafından bu ifade Ç'nin henüz zihninde süreci şekillendirememesinden kaynaklı olabileceği yönünde yorumlanmıştır. Bir kaç dakika sessiz kaldıktan sonra Ç aşağıda sunulan açıklama ile konuşmasına başlamıştır.

"Şimdi diğer sayıya bakmak istiyorum.4,4545454545… sayısına yani. Verilen bu sayı devirli bir sayı ve bunu kesir çizgisini kullanarak yazmaya çalışacağım."

Ç, sahip olduğu bilgiler arasından devirli ondalık sayılar ile ilgili olanları seçmiştir. Onun bu hareketi tanıma epistemik eylemi olarak yorumlanabilir. Ç devirli ondalık sayılar ile gerçek sayıları ilişkilendirmeye çalışmaktadır.

Ç'nin stresli halinin artmasının ardından araştırmacı tarafından düşüncelerini paylaşması istenmiştir.

"Aslında devirli sayıları biliyorum. Virgülden sonra kendini tekrar eden sayılar. Az önce olduğu gibi bununla ilgili de bir formül olduğunu biliyorum ama bir türlü aklıma gelmiyor. Onu hatırlamaya çalışıyorum."

Araştırmacı Ç'ye ihtiyacı olan zamanı tanımak için bir süre sessizce beklemiş, süre sonunda Ç, kendiliğinden konuşmaya başlamıştır.

„Formülü hatırlayamayacağım galiba. Ben de farklı düşünürsem belki sonuca ulaşabilirim diye düşündüm."

Ç'nin formülü hatırlayamaması onu başka yöntemler düşünmeye sevketmiştir. Mevcut anda onun bu davranışı ezbere işlem yapmak yerine, devirli sayıların rasyonelliği altında yatan ilişkileri dikkate almasını sağlamıştır.

Ç'nin sessiz kaldığını fark eden araştırmacı ile Ç arasında aşağıdaki konuşma gerçekleşmiştir.

A: *Sessiz kaldın, düşüncelerini benimle paylaşır mısın?*

Ç: Devirli sayılar nasıl $\frac{a}{b}$ olarak yazılabilir onu düşünüyorum. Aklıma bir şeyler geliyor ama tam olarak açıklayamıyorum. Örnekler vermemin işe yarayabileceğini düşünüyorum.

A: *Nasıl bir örnek? Başka devirli sayının mı rasyonel veya irrasyonel olduğunu göstereceksin?*

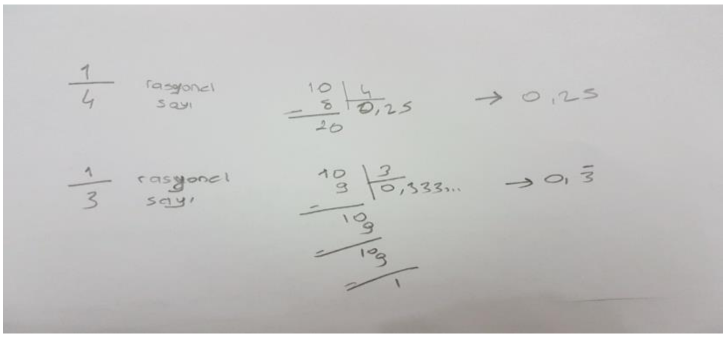
Ç, bir süre soruya dalarak düşündükten sonra devam etmiştir.

Ç: *Hayır aslında tam olarak öyle değil. Aklımdan bazı rasyonel sayılar geçiyor.*

A: *Nasıl rasyonel sayılar?*

Ç: Bazı rasyonel sayıları düşünüyorum. Bu sayıları ondalık olarak yazmak istediğimde devirli olması lazım. Ama işte istediğim gibi bir sayı bulamadım henüz. Düşünmem lazım biraz daha.

Yukarıda verilen konuşma incelendiğinde Ç'nin devirli bir sayının rasyonel olduğunu göstermek için tersten düşündüğü söylenebilir. Yani, verilen bir rasyonel sayının devirli olarak yazılabileceğini göstermeye çalışmaktadır. O, burada sayının rasyonel olduğunu kanıtlama sürecinde önceden zihninde yer alan rasyonel sayıların ondalık gösterimlerinden yararlanmıştır. Ç'nin gerçekleştirmiş olduğu bu eylem kullanma (B-) epistemik eylemi olarak değerlendirilebilir. İstediği örneği bulabilmek için denemeler yaptığı görülen Ç'nin zihninden bu deneme yanılmaları yapması imajın mantıksal bağlar içerdiği şeklinde yorumlanabilir. Çünkü O, örneği rastgele değil kendisini doğru sonuca ulaştıracak şekilde dikkatle seçmeye çalışmaktadır. Bir süre sonra Ç, aşağıda verilenleri yazmaya başlamıştır.



Yazdıklarının ne anlama geldiğini soran araştırmacıya Ç aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

"Şimdi aradığım örnekleri buldum. $\frac{1}{4}$ *ve* $\frac{1}{3}$ *sayıları rasyonel çünkü* $\frac{a}{b}$ *şeklinde yazılmışlar. Ben bu sayıları ondalık olarak yazmak istediğimde* $\frac{1}{4}$ *sayısını*

yazabiliyorum ama $\frac{1}{3}$ *sayısı devirli olarak yazılabiliyor. Demek ki devirli sayılar rasyonel olabilir diye düşündüm ben de örnekler sonunda."*

Açıklaması incelendiğinde Ç'nin soruyu ilk okuduğundan farklı bir yönde ele almaya başladığı görülebilir. O, devirli sayıların nasıl yazıldığına dair kendine bir açıklama getirmeye çalışmaktadır. Bir bakıma sadece ona verilen 4,454545… sayısına odaklanmamış, genel olarak rasyonel sayılardan devirli sayılara nasıl geçildiğini ilişkilendirmeye çalışmıştır.

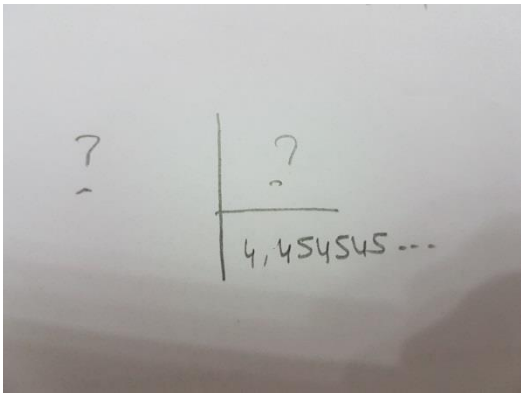
Yaptığı açıklamadan sonra araştırmacı bu kez ispatın bitip bitmediğini sormuş ve aşağıda verilen cevabı almıştır.

"Hayır, henüz bitti diyemem. Çünkü bana verilen 4,45454545…sayısını $\frac{a}{b}$ *şeklinde göstermem lazım."*

Görüldüğü gibi Ç, rasyonel sayıların devirli olarak yazılabileceğini seçtiği örneklerle göstermeye çalışmıştır. Buradan hareketle Ç'nin sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir. Çünkü O, rasyonel sayıların devirli olarak ifade edilebileceğine seçtiği örneklerle ulaşabilmiştir.

Ç, seçtiği örnekle devirli sayıların rasyonel olabileceğine yönelik farkındalığı sağlamıştır ancak 4,454545… sayısını $\frac{a}{b}$ şeklinde gösteremediği için henüz rasyonel olup olmadığını söyleyemeyeceğini düşünmektedir. Bir süre sonra aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

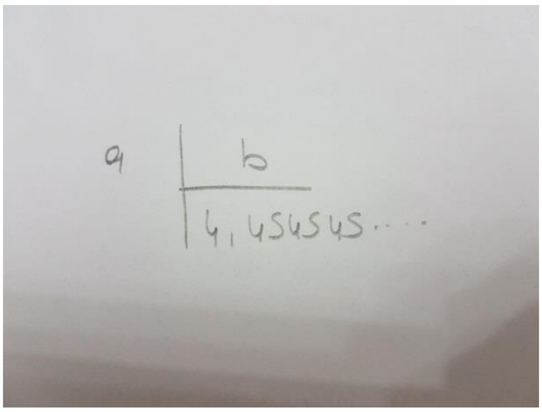
"Az önceki örnekte gördüğüm gibi demek ki bir sayı bir sayıya bölünmüş ki 4,4545… sonucuna ulaşılmış."



Ç’nin kağıda yazdığı ifade incelendiğinde O’nun, 4,454545… sayısının aslında bir “a” sayısının bir “b” sayısına bölünmesiyle oluştuğunu farkettiği ancak bu ifadenin yerine gelmesi gereken sayıları bulamadığı söylenebilir. Bu da aslında rasyonel sayı tanımına karşılık gelmektedir. Yani iki sayının bölümü olarak yazılabilen sayılara rasyonel sayı denildiği göz önünde tutulduğunda Ç’nin ulaşmış olduğu sonucun da bu anlama geldiği söylenebilir.

Ç yazdığı ifadeden sonra yazdıklarına tekrar tekrar bakarak aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

“Ben şunu bulmaya çalışıyorum; 4,454545… sayısı $\frac{a}{b}$ *olarak yazılabilir mi?*$\frac{a}{b}$ *a’nın b’ye bölümü demek. O zaman az önce yazdığım bölme işlemi bana çok mantıklı geliyor.”*



“Yani a sayısını b sayısına bölünce 4,454545… sayısı elde edilmiş. O halde bu sayı rasyoneldir.”

Yapılan açıklama incelendiğinde Ç’nin ön bilgileri arasından $\frac{a}{b}$ ifadesini a’nın b’ye bölümü olarak seçtiği (R-) ve bu ifadeyi 4,454545… sayısının da bu şekilde gösterebileceğini belirtmek amacıyla kullandığı (B-) görülebilir.

“Aslında 4,454545… sayısının rasyonel olduğunu göstermek için $\frac{1}{3}$ *gibi iki sayının bölümü olarak yazmam gerekiyor. Hangi iki sayının bölümü olduğunu bulamadım ama* $\frac{a}{b}$ *gibi iki sayının bölünmesiyle elde edildiğine eminim. Yani 4,454545… sayısı rasyoneldir.”*

Ç’nin yukarıda yaptığı açıklamadan hareketle, sayısal işlem yaparak “a” ve “b” ifadelerine karşılık gelen sayıyı bulamadığı ancak sezgisel olarak bunların varlığına ikna olduğu söylenebilir. Bu da Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından doğruluk ve kesinlik hissi olarak adlandırılan kavrama karşılık gelmektedir. Yani burada Ç, ispatın doğruluğuyla ilgili sezgisel bir iknaya sahiptir.

Yapılan üçüncü görüşme sırasında Ç’ye araştırmacı tarafından aşağıda verilen soru yöneltilmiş ve düşüncelerini araştırmacı ile paylaşması istenmiştir.

“a ve b tam sayı olmak üzere a^2+b^2 *sayısı daima 2’ye bölünür” ifadesinin doğruluğunu ya da yanlışlığını tartışınız. Düşüncelerinizi ifade ediniz.*

Ç, kendisine sunulan ifadeyi kısık sesle bir kaç kez okumuştur. Bu sırada düşünceli bir hali olduğu araştırmacı tarafından gözlenmiştir. Bir süre daha düşündükten sonra aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

“Şimdi tam sayı diyor ya negatif sayılar da olabilir mi acaba?”

Ç'nin, aklına takılan bu soru ile tam sayılar konusuna ilişkin bilgilerini yokladığı söylenebilir. Ç burada tam sayıları negatif tam sayılar ve pozitif tam sayıların birleşimi olarak yorumlamıştır. Onun bu hareketi tanıma (R-) epistemik eylemi olarak yorumlanabilir. Ancak burada "a" ve "b" sayılarının pozitif veya negatif olması sonucu etkilememekte çünkü bu iki sayının karesi alındığı için sonuç daima pozitif olmaktadır. Sürecin henüz başında olan Ç, bu ayrıntıyı fark etmemiş o nedenle ikileme düşmüştür.

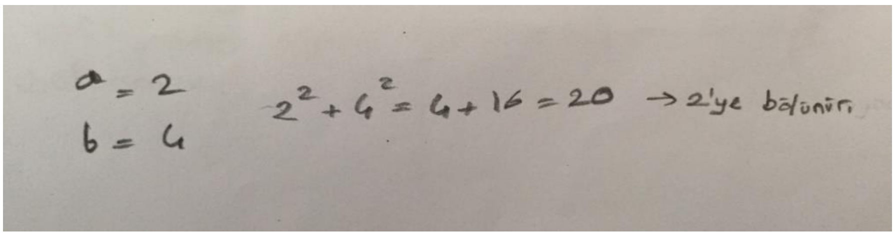
Yaptığı açıklamanın ardından bir süre düşünen Ç, devamında aşağıdaki açıklamayı yaparak düşüncelerini dile getirmiştir.

"Burada bana verilen cümlenin doğru olup olmadığını anlamak için a ve b yerine sayılar versem belki bir şeyler bulurum diye düşünüyorum."

Bu aşamada Ç'nin ona sunulan ifadenin doğru ya da yanlış olması hakkında henüz bir düşünceye sahip olmadığı yorumu yapılabilir. O, seçeceği örneklerden hareketle bir yargıya sahip olabileceğini düşünmektedir.

Ç'nin "a" ve "b" değişkenleri yerine sayılar vererek bir yargıya ulaşma çabası, imajın mantıksal bağlar içerdiğinin göstergesi olarak yorumlanabilir.

Vereceği örnek için bir süre düşünen Ç'nin ardından kâğıda yazdıkları aşağıda verilmiştir.



"a ve b tam sayı dediği için 2 ve 4 sayılarını seçtim. 2^2 *=4 ve* 4^2 *=16 toplamları 20 ediyor. Yani ikiye bölünüyor."*

Ç, kâğıda yazdığı örneğin ardından kendinden emin bir şekilde yukarıda verilen açıklamayı yapmıştır. O'nun sonucundan emin şekilde konuşması araştırmacı tarafından duyuşsal bir ikna yaşadığı şeklinde yorumlanmıştır.

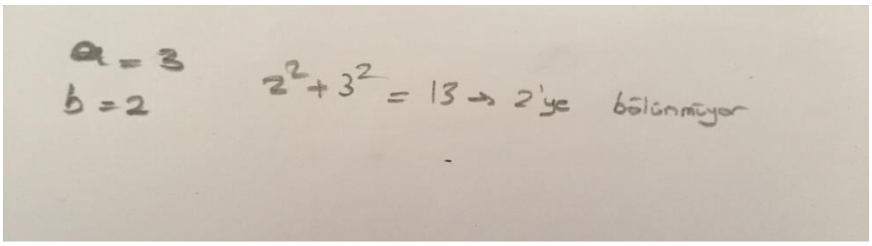
Diğer yandan Ç'nin kendisine verilen ifade ile ilgili olarak bilgilerini yokladığı ve 2 ve 4 gibi sayıları tam sayı olarak tanıdığı (R-) ve bu tam sayıların karesini alma ve 2'ye bölünme gibi özellikleri kullandığı (B-) söylenebilir.

Ç'nin uzun bir süre sessiz kaldığını fark eden araştırmacı tarafından Ç'ye ulaştığı sonuç hakkındaki düşüncesi sorulmuş ve cevabı aşağıda verilmiştir.

"Şimdi burada seçtiğim sayılara göre soruda yazan şey doğru. Ama tek bir örneğe göre de kesin sonuca ulaşmışım gibi gelmiyor. O nedenle başka sayılar da denemeye karar verdim."

Ç, bu adımda oluşturduğu özel bir durumun ifadenin geneli için geçerli olamayabileceğini düşünmüştür. Onun bu şüpheci yaklaşımı imajın mantıksal bağlar içermesi özelliğine sahip olduğunu kuvvetlendirmektedir. Bu noktada Ç, sürece seçtiği yeni örneklerle devam etmiştir.

Ç'nin "a" ve "b" değişkenleri için yeni sayılar vererek oluşturduğu örnek aşağıda verilmiştir.



Yazdığı örneğin ardından Ç'nin yapmış olduğu açıklama aşağıda sunulmuştur.

"İşte aklımdan geçen şey de buydu. a'yı 3 ve b'yi 2 seçtiğim zaman sonuç 13 oluyor ve 2'ye bölünmüyor. E şimdi soruda geçen cümle birinci örnek için doğru, ikinci örnek için yanlış olmuş oluyor."

Ç, ikinci adımda ulaştığı sonuç ile çelişki yaşamaya başlamıştır. Verdiği ilk örnek ile ikinci örneğin sonuçlarının farklı çıkmasını Ç'nin henüz anlamlandıramadığı yorumu yapılabilir.

Mevcut anda Ç'nin yaşadığı sorunun kaynağı seçtiği sayılar ile alakalıdır. O, sayıların ikisini de çift seçtiği durumda (n ve k ϵ Z, $(2n)^2$ + $(2k)^2$ = $4(n^2 + k^2)$ /2) sonuç 2'ye tam bölünebilirken, sayıların birini tek birini çift seçtiği anda (n ve k ϵ Z, $(2n)^2$ + $(2k+1)^2$ = $4n^2$ $+4k^2$+4k+1) çıkan sonuç 2'ye tam bölünmemektedir. Ancak Ç bu durumu fark edememiş ve tekrar düşünmeye başlamıştır. Bu süreçte onun kafasından başka sayılar denediği araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir. O, mevcut anda yaşadığı sorunun kaynağının ne olduğunu bulmaya çalışmakta ve bu nedenle örnekleri çeşitlendirerek bir sonuç bulmaya çalışmaktadır.

Bu noktada araştırmacı Ç'nin düşüncelerini merak etmiş ve Ç ile arasında aşağıda sunulan konuşma gerçekleşmiştir.

A: *Şu anda ne düşündüğünü benimle paylaşır mısın?*

Ç: *Açıkçası ulaştığım sonuç kafamı karıştırdı. İlk örnekte* a^2 + b^2 *2'ye bölünüyor ama ikinci örnekte* a^2+b^2 *2'ye bölünmüyor.*

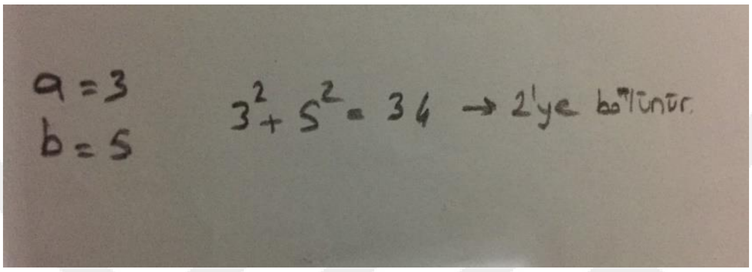
A: *Peki bu neden kaynaklanıyor olabilir?*

Ç: *Ben de bunu bulmaya çalışıyorum. Bir kaç sayı daha denesem sonucu bulurum belki.*

Konuşmada görüldüğü gibi Ç, örnek vermeye devam ederek bu ana kadar fark edemediği noktayı bulmaya çalışmaktadır. Ayrıca Ç'nin ispatlama süreci incelendiğinde, sürecin örneklere paralel olarak şekillendiği söylenebilir. Diğer bir ifadeyle Ç’nin sahip olduğu imajın aşamaları birbirinden etkilenerek şekillenmektedir. Bu noktada gelişen imajın dinamik olduğu yorumunu yapılabilir.

Ç, sürece çeşitli örnekler vererek devam etmiştir. Seçtiği örneklerde “a” ve “b” sayılarının bazılarını negatif seçmiş ve sonucu değiştirmediğine karar vermiştir.

Ç, istediği sonuca ulaşmak için çok sayıda denemeler yapmıştır. Aşağıda araştırmacı tarafından sonuç ile bağlantısı olduğu düşünülen örneğe yer verilmiştir.



Ç, bu kez a ve b sayılarının ikisini de tek sayı olarak seçmiş ve sonucun 2’ye bölündüğünü görmüştür (n ve k ϵ Z$(2n+1)^2(2k+1)^2$=2($2n^2$+2n+$2k^2$+2k+1)/2).

Ç, mevcut anda “a” ve “b” sayılarının tek ve çift olması özelliğine göre sonucun nasıl değiştiğine dair tüm durumları verdiği örneklerle görmüştür. Ancak bu üç örnekte oluşan sonuçların sayıların hangi özelliğinden kaynaklandığını henüz fark edememiştir. Kendisi de ulaştığı sonucun neden kaynaklandığını belirleyemediğini açıkça ifade etmiştir.

Mevcut ana kadar geçen sürede Ç, kendisine yöneltilen ifadeyle ilgili bilgileri tanımış (R-), tam sayıların karelerini alma ve bölünebilme özelliklerini kullanmıştır (B-). Ancak Ç’nin bu aşamada ulaştığı sonuçlardan hareketle yeni bir bilgi oluşturamadığından, oluşturma epistemik eylemini (C-) gerçekleştiremediği söylenebilir. Ç’nin örneklerden hareketle yeni bir yargıyla ulaşmak için Kidron ve Dreyfus’un(2014) kanıt imajı kavramına ait olarak bahsettiği bir aydınlanmaya ihtiyacı vardır.

Araştırmacıdan biraz daha süre isteyerek yeni örnekler oluşturmaya devam eden Ç, sonunda ihtiyacı olan aydınlanmayı yaşayarak aşağıda sunulan açıklamayı yapmıştır.

"Doğru ya! Sayıların biri tek biri çift olduğunda sonuç ikiye bölünmüyor. İkisi de tek ya da ikisi de çift olduğu durumlarda sonuç çift oluyor, yani 2'ye tam bölünüyor."

İstediği sonuca ulaşan Ç'nin yüzünde emin bir ifade olduğu araştırmacı tarafından gözlenmiştir. Kuralı bulduğundan emin olan Ç'nin duyuşsal bir iknaya sahip olduğu söylenebilir.

Ç'nin düşüncelerini derinlemesine öğrenmek isteyen araştırmacı ile Ç arasında geçen konuşma aşağıda sunulmuştur.

A: *Bir sonuca ulaştın galiba. Bana da anlatır mısın?*

Ç: *Bana* a^2+b^2*'nin sonucu 2'ye bölünür mü diye soruyordu. Sayıların ikisi de tek ya da ikisi de çift olursa sonuç 2'ye bölünüyor. Biri tek biri çift olduğunda ise 2'ye bölünmüyor.*

A: *Neden böyle olduğunu düşündün mü peki?*

Bir süre örneklere bakarak düşünen Ç, ardından aşağıda verilen cevabı vermiştir.

Ç: *Yani sonuçta 2'ye bölünmesi için çift olması gerekiyor. İki tek sayıyı toplayınca ya da iki çift sayıyı toplayınca çift olur. Ama bir tek sayı ile bir çift sayıyı toplayınca sonuç tek çıkıyor*

.

Verilen konuşma incelendiğinde Ç'nin ifadede yer alan ilişkileri başarıyla kurduğu ve dolayısıyla ispatı yaparak süreci sonlandırdığı görülebilir.

Mevcut ana kadar geçen süreçte Ç, sahip olduğu bilgileri ifadeyi doğrulamak için seçerek kullanmıştır. Verdiği örnekleri görüşme sürecinde inceleyerek bir yargıya varan Ç'nin sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir. Ayrıca süreç, Ç'nin kendi verdiği örnekler sayesinde ilerlemiştir. Bu da onun sahip olduğu bilgi birikiminin ürünüdür. Diğer bir ifadeyle Ç'nin sahip olduğu imaj kişiseldir. Diğer yandan Ç'nin sahip olduğu imaj durağan değildir. Yani süreç içerisinde değişerek gelişmektedir. Bu bakımdan imajın dinamik olduğu yorumu da yapılabilir.

Ayrıca sürecin başında "iki tek sayı veya iki çift sayının kareleri toplamı da çifttir, bu nedenle sonuç ikiye bölünür." gibi bir yapıya sahip olmayan Ç, ispat süreci boyunca kurduğu bağlar sayesinde bu yargıya ulaştı. Ç'nin gerçekleştirmiş olduğu bu zihinsel eylem oluşturma epistemik eylemi bağlamında yorumlanabilir.

F'nin İspat Süreci

Kendisine yöneltilen ifadeleri ispatlama sürecinde sahip olduğu kanıt imajlarını belirlemek amacıyla F ile üç ayrı görüşme yapılmış ve görüşmeler sonucunda ulaşılan bulgular bu başlık altında sunulmuştur.

Yapılan ilk görüşme sırasında F'ye aşağıda verilen ifade sunulmuş ve düşüncelerini araştırmacı ile paylaşması istenmiştir.

"*A ve B aralarında asal iki sayı olsun. Bu durumda, EKOK(A,B) = A.B'dir. Gösteriniz."*

F, kendisine sunulan ifadeyi bir kaç kez okudu. Düşünceli bir hali olduğu araştırmacı tarafından gözlendi. Uzunca bir süre açıklama yapmaktan çekinen F'ye araştırmacı tarafından ne düşündüğü sorusu yöneltildi.

" *Bu konuyu sene başında matematik dersinde işlemiştik. Uzun süre geçtiği için bazı yerlerini unuttum. Hatırlamaya çalışıyorum."*

F'nin yaptığı açıklamaya dayanarak sahip olduğu bilgileri gözden geçirdiği yorumu yapılabilir. O, ona yöneltilen ifadenin, sahip olduğu bilgiler arasından çarpanlar ve katlar konusuna dâhil olduğunu tanımış (R-), ancak henüz istediği noktaları hatırlayamamıştır.

Bir süre daha düşünmeye devam eden F'nin yüzünde bir gülümseme belirmiştir. Araştırmacı tarafından bu hareket bir aydınlanma ifadesi olabileceği şeklinde yorumlanmıştır. Ardından F ile araştırmacı arasında aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

A: *Aradığın özellikleri hatırladın galiba. Düşüncelerini benimle paylaşır mısın?*

F: *Asal sayılar ve EKOK konusunun ikisini de biliyorum. Ama bu iki konuyu kullanarak nasıl bir işlem yapmam gerekir tam bilemiyorum. Aklıma bir sürü şey geliyor ama daha önce hiç ispat yapmadığım için nasıl başlamam gerekir bilmiyorum.*

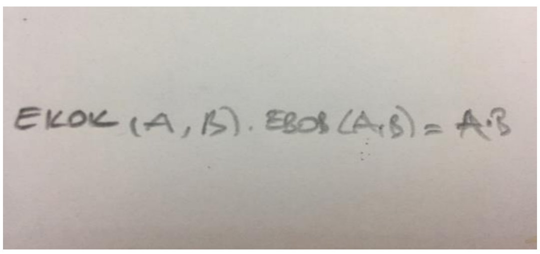
A: *Asal sayılar ve EKOK kavramı ile bildiklerini anlatır mısın?*

F: *Aralarında asal sayılar, ortak böleni olmayan sayılardır. Yani iki sayının da ortak olarak sadece 1'e bölünmesi demektir. EKOK ise iki sayının en küçük ortak katına denir.*

Sunulan konuşma incelendiğinde F'nin çarpanlar ve katlar konusuna ait olan kavramlarının doğru olduğu söylenebilir. O, konuya hâkim olmasına rağmen ispat yapmaktan çekinmektedir. Buradan hareketle F'nin ispat sürecinin henüz başında olduğu, süreçte izleyeceği adımı belirlemeye çalıştığı yorumu yapılabilir.

Bir süre düşünen F ardından aşağıda verilen açıklamayı yapmaya başlamıştır.

"*Soruda EKOK(A,B) = A.B ifadesi verilmiş. Bu benim aklıma EBOB(A,B) . EKOK(A,B) = A.B formülünü getirdi. Benziyor gibiler.*"



F'nin yapmış olduğu açıklama incelendiğinde, onun zihninde yer alan bilgileri gözden geçirerek aralarında asal olma, EBOB, EKOK gibi kavramları tanıdığı (-R) ve süreçte kullanmak için EBOB(A,B) . EKOK(A,B) = A.B formülünü seçtiği (B-) söylenebilir.

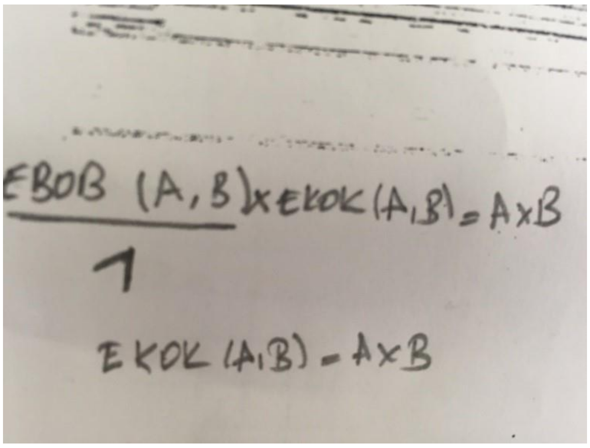
Diğer yandan F, kendisine sunulan ifade ile daha önceden öğrenmiş olduğu bilgiler arasında bağlantılar kurmaya başlamıştır. Buradan hareketle F'nin sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içerdiği yorumu yapılabilir.

Bir süre F'nin sessiz kaldığını gören araştırmacı tarafından F'ye ne düşündüğü sorusu yöneltilmiş ve cevabı aşağıda sunulmuştur.

"EBOB(A,B) . EKOK(A,B) = A.B formülünü bu soruya nasıl uygulayabilirim onu düşünüyorum. Şimdi aralarında asal sayıların EBOB'u 1 olmalı. O zaman EBOB yerine 1 yazmam lazım gibi. Ama emin de değilim tabi."

F'nin yaptığı açıklama ile ispat süreci için gerekli olan bilgilere sahip olduğu görülebilir. O, aralarında asal sayılar ile en büyük ortak bölen (EBOB) konusu arasında gerekli ilişkileri kurmuş ve aralarında asal sayıların ortak böleni olmadığı için EBOB'un 1 olduğunu söyleyebilmiştir. Buradan F'nin sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içerdiği görülebilir. Ayrıca ispat sürecini bağlantı kurduğu bilgileri ekleyerek şekillendirdiği için imajın dinamik olduğu yorumu da yapılabilir.

F, yaptığı açıklamanın ardından kağıda aşağıda sunulan ifadeleri yazmıştır



F, süreçte konular arasında kurmuş olduğu doğru bağlantılar sayesinde ona sunulan ifadeyi ispatlamayı başarmıştır. O, ifadede verilen; aralarında asal olma, en büyük ortak bölen ve en büyük ortak kat kavramlarını sahip olduğu bilgiler arasından ayırt etmiş (R-) ve süreçte kullanmak üzere EBOB(A,B) . EKOK(A,B) = A.B, aralarında asal sayılarının en büyük ortak bölenlerinin "1" olması gibi özellikleri seçmiştir (B-).

F'nin hareketlerinde bir gerginlik olduğunu sezen araştırmacı O'nun düşüncelerini merak etmiş ve aralarında aşağıda verilen konuşma gerçekleşmiştir.

A: *İspatı tamamladın mı?*

F: *Bilmiyorum.*

A: *Neden emin değilsin? Aklını kurcalayan bir kısım mı var?*

F: *Daha önce hiç ispat yapmadım. Şimdi de yapabildim mi emin değilim.*

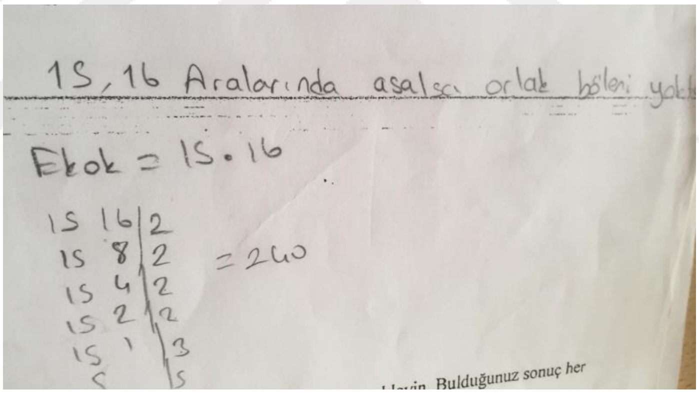
A: *Peki sana göre EKOK(A,B) = A.B ifadesinin neden doğru olduğunu gösterebildin mi? Kendin anladın mı yani?*

F: *Evet ben anladım. Çünkü sonradan yazdığım EBOB(A,B) . EKOK(A,B) = A.B formülünü sorularda kullandığım için biliyordum. Buradaki A ve B sayılarının aralarında asal olduğu durumunu düşününce EBOB(A,B) kısmı 1 olduğu için gidiyor* *ve EKOK(A,B) = A.B olduğu görülüyor. Ama A ve B yerine sayılar versem de doğru oluyor mu bi denesem olur mu?*

A: Olur tabi.

Yukarıda verilen diyalog incelendiğinde, F için ispat sürecinin henüz sonlanmadığı yorumu yapılabilir. O, ulaştığı sonucun ve yaptığı işlemlerin yeterli olduğuna dair bir inanca sahip değildir. Bu durumun Kidron ve Dreyfus'un (2014) bahsettiği imajın duyuşsal karakteristiğine karşılık geldiği söylenebilir. Yani F, ispatın doğruluğuna ilişkin sezgisel bir iknaya sahip değildir.

Süreci tamamladığı hakkında tereddütlü olan F, ikna olmak için örneklerle ifadeyi doğrulamak için bazı karamalar yapmış, ardından da kağıda aşağıda verilen örneği yazmıştır.



Araştırmacı F'den yazdıklarını açıklamasını istemiş ve F'nin açıklaması aşağıda sunulmuştur.

"Aslında soruda verilenleri sayılarla göstermek istedim. Aralarında asal olması için 15 ve 16 sayılarını seçtim (Çünkü ardışık sayılar aralarında asaldır). EKOK'larını hesapladım asal çarpanlarına ayırarak. Bulduğum sonuç sayıların çarpımına eşit çıktı. Yani EKOK(A,B) = A.B formülünün doğru olduğunu görmüş oldum."

Yaptığı açıklamanın ardından F'nin hareketleri araştırmacı tarafından sürecin tamamlandığı şeklinde yorumlanmıştır.

F, sahip olduğu bilgiler ve bu konudaki geçmiş deneyimleri sayesinde kendisine sunulan ifadeyi ispatlamıştır. Bu imajın kişisel olma özelliği bağlamında yorumlanabilir. Ayrıca ispat sürecindeki adımlar, yeni bilgiler ile şekillenerek birbiriyle bağlantılı olarak gelişmiştir. Bu yönüyle imajın dinamik olduğu söylenebilir. Diğer yandan F'nin aralarında asal olma, en büyük ortak bölen, en küçük ortak kat, asal çarpanlarına ayırma gibi konuları, konuların özelliklerini göz önünde bulundurarak süreçte kullanması ile de imajın mantıksal bağlar içerdiği yorumu yapılabilir.

Bir başka görüşme sırasında F'ye aşağıda verilen ifade sunulmuş ve düşüncelerini araştırmacı ile paylaşması istenmiştir.

"*$5x+y = 5x.5y$ ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.*"

F, kendisine yöneltilen ifadeyi okumuş ve sessizce düşünmeye başlamıştır. Uzun bir süre sessiz kaldıktan sonra aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

"*Üslü sayılarda çarpma işleminin formülünü soruda vermiş. Anladığım kadarıyla neden öyle olduğunu göstermeliyim."*

F'nin yapmış olduğu açıklamanın ardından araştırmacı tarafından F'ye "*neden öyle olduğu"* ifadesi ile ne demek istediği sorusu yöneltilmiş ve F'nin vermiş olduğu cevap aşağıda sunulmuştur.

"*Yani üslü sayılarda çarpma işlemi yapılırken taban aynı kalır, üsler toplanır. Soruda bana bu formül verilmiş. Bunun nasıl olduğunu gösterebilir miyim emin değilim."*

Yapmış olduğu açıklama ile F'nin kendisine yöneltilen ifadeyi anlamlandırmaya başladığı söylenebilir. O, kendisine sunulan ifadeyi kendi cümleleriyle açıklamayı başarmıştır. Bu doğrultuda üslü sayılarda çarpma işlemi formülünün neye dayandığını göstermesi gerektiğini ifade etmiştir.

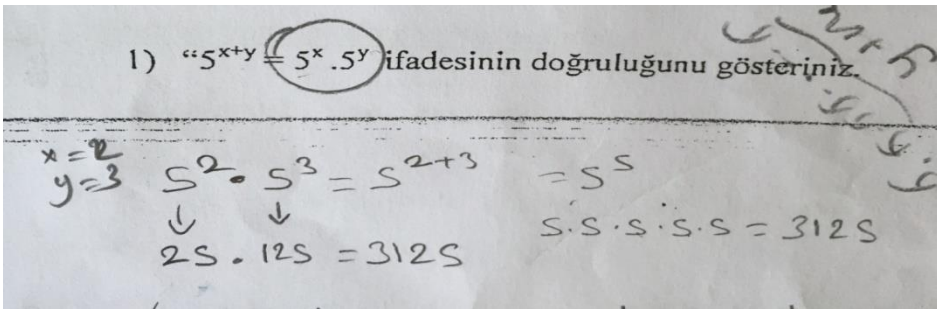
Ayrıca, F'nin yaptığı açıklama ile sahip olduğu bilgileri gözden geçirdiği ve kendi cümleleriyle tanımladığı söylenebilir. Yapmış olduğu bu eylem tanıma (R-) epistemik eylemi olarak yorumlanabilir. Çünkü F, sahip olduğu bilgiler arasından üslü sayılarda çarpma işlemi ile ilgili olanları seçerek ifade etmiştir.

Bir süre sessiz kalıp düşünen F, ardından aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

"*x ve y yerine örnek sayılar versem. Belki buradan aklıma bir şeyler gelebilir.*"

Verilen açıklama incelendiğinde, F'nin kendisine sunulan ifadeyi doğrulamak için ilk olarak değişkenlerin yerine değer vererek doğrulamayı denemek istediği görülebilir.

Açıklamasının ardından F, formülün neden doğru olduğunu göstermesine yardımcı olacak sayıları düşünmeye başlamıştır. Bir süre sonra önünde bulunan kâğıt üzerine bazı işlemler yazmaya başlamıştır. F'nin kâğıda yazmış olduğu ifadeler aşağıda verilmiştir.



F'nin yazmış olduğu ifadeler incelendiğinde, O'nun üslü sayılarda çarpma işlemi formülünü örnek vererek doğrulamaya çalıştığı görülebilir. Bu amaçla, x=2 ve y=3 sayılarını seçerek formülde yerine koymuş ve yaptığı işlemler sayesinde eşitliğin iki tarafının aynı olduğu görülmüştür.

F, kâğıda yazdıklarının ardından aşağıda sunulan açıklamayı yapmıştır.

"*x yerine 2, y yerine 3 sayılarını koydum. Bu durumda* 5^{x+y}=5^5 *oldu. Diğer tarafta* $5^2.5^3$ *işlemini yaptım. Hesaplayınca sonuç eşit çıkıyor.*"

F'nin yaptığı açıklama doğrultusunda, O'nun burada sahip olduğu bilgiler arasında üslü sayılar ile ilgili olanları seçtiği (-R) ve bu kavramları örneğini oluştururken kullandığı (-B) yorumu yapılabilir. O, örneğinde üslü sayıların özelliklerinden ihtiyacı olanları başarılı bir şekilde kullanmıştır. Bu noktada F'nin vermiş olduğu örnekten hareketle denklemin doğruluğunu ifade etmesi sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içermesi özelliği bağlamında yorumlanabilir.

F, bir süre sonra sözlerine aşağıda verilen açıklama ile devam etmiştir.

"*Verdiğim örnekle formülün doğru olduğunu gördüm. Ama az önce de söylediğim gibi benim yapmam gereken neden böyle olduğunu gösterebilmek.*"

Açıklama incelendiğinde F'nin henüz ispat sürecine başladığını düşünmediği görülebilir. O, verdiği örneği ispat için yeterli olarak kabul etmeyip yeni yollar düşünmektedir. Ancak F'nin yaşı nedeniyle sahip olduğu bilgi birikimi O'nun tam anlamıyla cebirsel bir ispat yapması için yeterli olmamaktadır. O nedenle F'nin bir sonraki adımda, sahip olduğu bilgiler arasından uygun olanlarını seçerek ifadeyi doğrulaması beklenmektedir.

Bir süre sonra F önünde duran kâğıda aşağıda verilen ifadeleri yazmaya koyulmuştur.

Yazdıklarının ardından F aşağıda sunulan açıklamayı yapmıştır.

"*Tekrar örnek vermekten başka fikir aklıma gelmedi. Bu sefer sayıyı biraz daha küçük seçtim. Belki buradan bir şeyler fark edebilirim diye düşündüm. x=2, y=1 olarak seçtim.* $5^3=5^2.5^1$*oldu. Yine her iki tarafın sonucu eşit çıktı.*"

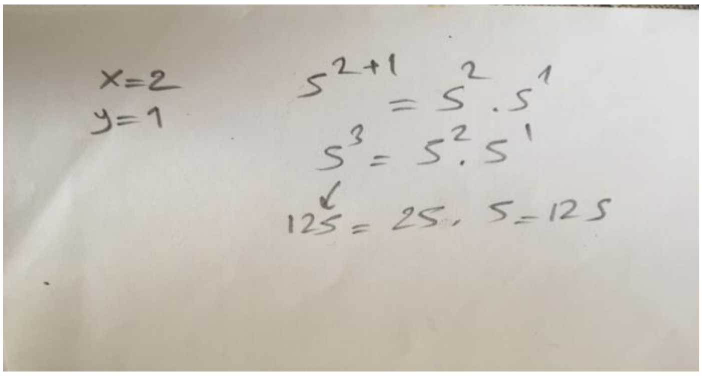
Yapılan açıklamadan hareketle, F'nin örneklerden yola çıkarak kurala ulaşma çabasında olduğu yorumu yapılabilir. Bu noktada araştırmacı, F'ye ne düşündüğünü sormuş ve araştırmacı ile F arasında aşağıda sunulan konuşma gerçekleşmiştir.

A: *Ne düşünüyorsun? Sence ispat yolunda gidiyor mu?*

F: *Göstermek istediğim şeyi bir türlü gösteremiyorum.*

A: *Peki verdiğin örnekler hakkında be düşünüyorsun?*

F: *İki defa örnek verdim farklı sayılar vererek. Sonuç doğru çıktı. Neden olduğunu inceliyorum şimdi ben de.*



Araştırmacı F'nin istediği sonuca ulaşabilmesi için bir süre sessizce beklemiştir. Ardından F kendiliğinden aşağıda verilen açıklamayla konuşmasına devam etmiştir.

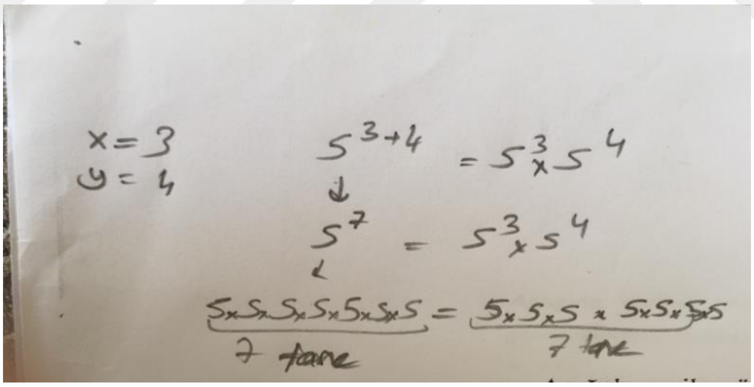
"Aslında iki tarafın da eşit sonuç çıkması mantıklı. Çünkü iki tarafta da aynı sayıda 5'i çarpmış oluyorum."

Sunulan açıklama incelendiğinde, F'nin örneklerden hareketle, üslü sayılarda çarpma işleminin formülünü anlamlandırmaya başladığı söylenebilir. F'nin düşüncesini tam olarak anlamaya çalışan araştırmacı, F'den düşüncesini açıklamasını istemiştir.

F, açıklamasına şöyle devam etmiştir.

"Yani diyorum ki, mesela x=3 ve y=4 olsun. $5^{3+4} = 5^3.5^4$ *bi tarafta 7 tane 5'i çarpıyorum. Diğer tarafta ise bir 3 defa bir de 4 defa 5'i çarpmış oluyorum. Yani toplamda iki tarafta da 7 tane 5'i çarpmış oluyorum".*

Ardından F, söylediklerinin tam olarak anlaşılabilmesi için önündeki kâğıda aşağıda verilenleri yazmaya başlamıştır.



Yapılan açıklama incelendiğinde F'nin ön bilgileri arasından üslü sayıları, sayıların kendileri ile tekrarlı çarpımı olarak tanıdığı (R-) ve bunu durumla alakalı olarak üslü sayılarda çarpma işlemi yapmak için kullandığı (B-) söylenebilir. Bu noktada F'nin, üslü sayılarda çarpma işlemi yaparken neden üslerin toplandığına dair ayrıntıyı fark ettiği söylenebilir.

F, vermiş olduğu örnekleri inceleyerek üslü sayılarda çarpma işleminde; üsler kadar tabanı çarptığında sonuçta üslerin toplamı kadar sayının çarpılmasına denk geldiğini görebilmiş ve bunu açıkça kendi cümleleriyle ifade etmeyi başarmıştır.

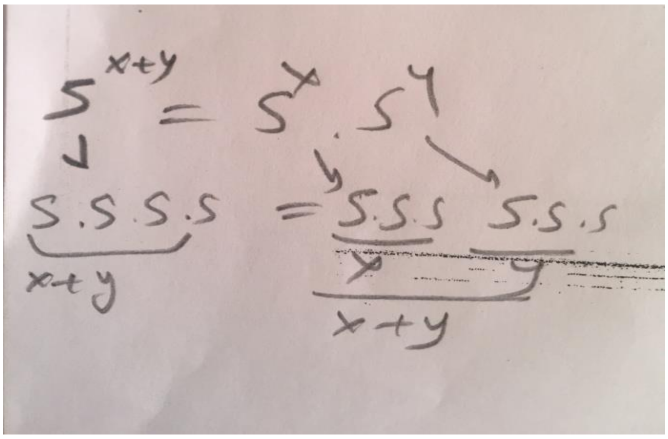
F’nin vermiş olduğu örneklerden hareketle kurduğu bağlantılar sayesinde kuralın nereden geldiğini fark edebilmesi sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içerdiğinin göstergesi olarak yorumlanabilir. Diğer yandan, F’nin ispat yapmaya yönelik imajı verdiği örnekler sayesinde bir önceki adımdan daha gelişmiş olarak devam etmiş ve böylelikle onu istediği sonuca ulaştırmıştır. Bu bakımdan F’nin sahip olduğu imajın dinamik olduğu söylenebilir. Ayrıca, F’nin izlemiş olduğu adımlar ve ulaştığı sonuç kişisel bilgi birikiminin ürünüdür. Bu da imajın kişisel olma karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir.

F için, sürecin bitip bitmediğini öğrenmeye çalışan araştırmacı ile F arasında geçen konuşma aşağıda verilmiştir.

A: *Sence ispatı tamamladın mı?*

F: *Bilmiyorum. Ben formülün nereden geldiğini anladım. Yani kendim sonuca ulaştım ama ispat olarak oldu mu bilmem.*

A: *Peki şu an ulaştığın sonucu yazarak bana da gösterebilir misin?*



Yukarıda verilenleri kâğıda yazan F, ardından şu açıklamayı yapmıştır:

"Burada x tane 5 ile y tane 5'i çarpıyorum. Yani toplamda x+y tane 5'i çarpmış oluyorum. O da üslerin toplamı anlamına geliyor."

Sunulan bu açıklama incelendiğinde, F'nin üslü sayılarda çarpma işlemine ilişkin kurala ulaştığı görülebilir. Mevcut anda F, örnek vermeyi bırakarak cebirsel ifadeler yardımıyla da formülü doğrulamayı başarmıştır.

F, bu noktada, üslü sayılara ilişkin bilgilerini gözden geçirerek, üslü sayıların değerlerini hesaplama, çarpma işlemi yapma gibi ön bilgilerini seçmiş (R-) ve süreçte bunları başarıyla kullanmıştır (B-). Ayrıca F, önceki aşamalarda oluşturduğu örneklere ait durumdan hareketle üslü sayılar konusuna ait ilişkiler çerçevesinde, çarpma işlemine dair yeni bir yapı oluşturmuştur. F'nin gerçekleştirdiği bu eylem oluşturma (C-) epistemik eylemi olarak yorumlanabilir. Çünkü O, sürecin başında sadece kural olarak bildiği üslü sayılarda çarpma işleminin neye dayandığını anlamlandırabilmiştir. Başka bir ifade ile sadece ezbere yaptığı işlemin artık neden öyle yapıldığına dair bilgiye sahiptir. Buradan hareketle, imajın mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir. Çünkü F, mevcut ana kadar geçen süreçte yapıyı oluşturabilmek için konu kapsamında yer alan bilgileri özenle seçmiş ve bu bilgiler arasında kurduğu bağlar sayesinde sonuca ulaşabilmiştir.

İspatını tamamlayan F, düşüncelerini aşağıda verilen şekilde açıklamıştır.

"Oldu galiba. Gerçekten soruyu ilk okuduğumda hep kullandığım formül olduğunu biliyordum ama neden diye hiç düşünmemiştim. Biraz kendimi zorlayınca sonuca ulaşmış oldum."

İspat sürecinin sonunda F, üslü sayılarda çarpma işlemi yapılırken tabanlar aynı ise üsler toplanır kuralının çıkış noktasını matematiksel olarak göstermeyi başarmıştır. Sürecin sonunda F'nin kanı imajının duyuşsal boyutu olan kesinlik hissine sahip olduğu da araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir.

F ile yapılan son görüşmede kendisine, aşağıda verilen ifade sunulmuş ve düşüncelerini araştırmacı ile paylaşması istenmiştir.

"Aklınızdan bir sayı tutun ve bu sayıya yarısını ekleyin. Bulduğunuz sonuç her zaman 3'e bölünebilen bir sayı mıdır? Tartışınız. "

F, sürece kendisine yöneltilen soruyu birkaç kez okuyarak başlamıştır. Bu aşamada yüzünde kararsız ya da tereddütlü bir ifade araştırmacı tarafından gözlenmemiştir. Bir süre daha sessizce bekledikten sonra aşağıda verilen açıklamayı yapmaya başlamıştır.

"Bu sefer kesin doğru olan bir şeyi ispatlamaya çalışmayacağım. İlk önce soruda verilen kural doğru mu yanlış mı onu bulmam lazım."

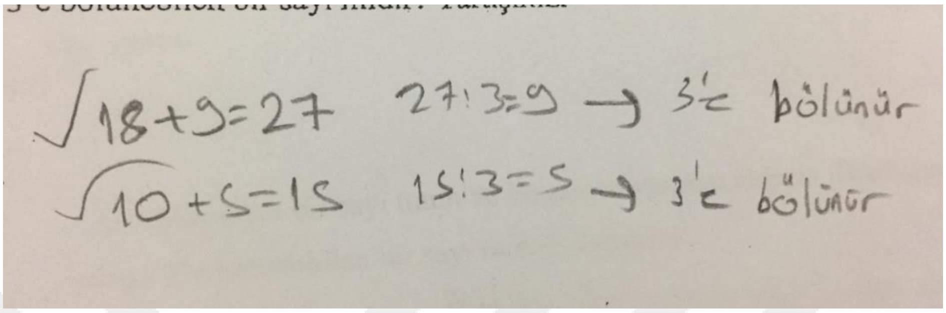
Verilen açıklama incelendiğinde, F'nin ilk aşama olarak ona sunulan ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını belirlemeye çalıştığı görülebilir. Ancak araştırmacı tarafından F'nin hareketleri nasıl bir yol izleyeceğini henüz belirlemediği olarak yorumlanmıştır.

Mevcut anda F'nin süreci nasıl başlatacağına dair fikirlerinin oluşması için araştırmacı bir süre sessiz beklemiştir. 2-3 dakikanın ardından F, kendiliğinden aşağıda sunulan açıklamayı yapmaya başlamıştır.

"Soruda aklınızdan sayı tutun diyor. Ben de öyle yapmaya karar verdim. Birkaç farklı sayı deneyerek sonucun 3'e bölünüp bölünmediğini görmeye çalışacağım."

Sunulan açıklama incelendiğinde, F'nin O'na yöneltilen ifadeye uygun olarak bir yol belirlediği söylenebilir. F, bu aşamada gelişimsel ve bilişsel özelliklerinin yeterli olmamasından dolayı değişken atayarak sonuca gitmeyi bir çözüm yolu olarak göremeyip, verdiği örnekler yardımı ile süreci biçimlendirmeyi hedeflemektedir.

Bir süre düşünen F, ardından bazı sayılar seçerek aşağıda sunulan ifadeleri kâğıda yazmaya başlamıştır.



F’nin yazmış olduğu ifadeler incelendiğinde O’nun sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait bilgilerini yoklayarak tanıdığı (R-) ve bölünebilme kuralını kullandığı (B) söylenebilir. Ayrıca F, örnek seçerken yarısını bulma gibi kendisine yöneltilen ifadedeki özellikleri göz önünde bulundurmuştur. Buradan hareketle imajın mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir.

F’nin vermiş olduğu her iki örneği oluşturan sayılar çift sayı olduğu için ($n \in Z$; $2n + n = 3n / 3$) sonuç 3’e bölünebilmektedir. Yani F’ye sunulan ifade şu ana kadar oluşturduğu spesifik örnekler için doğrulansa da tüm tam sayılar için geçerlidir yorumu yapılamaz. F ilk anda sadece çift sayılara odaklanmış, tek sayıları göz ardı etmiştir.

F’nin düşüncelerini merak eden araştırmacı ona ne düşündüğünü sormuş ve aralarında geçen konuşma aşağıda sunulmuştur.

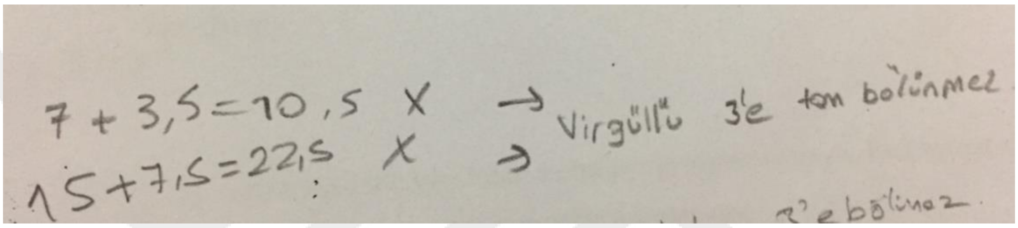
F: *Şimdi verdiğim sayılara yarısı eklendiğinde sonucun 3’e böldündüğünü gördüm. Ama yarısı olmayan sayılarda var. Onlar nasıl olur diye düşünüyorum.*

A: *Yarısı olmayan sayılar nedir?*

F: *Mesela 5, 13 gibi. Bu sayıların yarısı yok, nasıl ekleyeyim kendisine?*

Verilen konuşma incelendiğinde, F'nin 2'ye tam olarak bölünemeyen yani tek olan sayıları yarısı olmayan sayılar olarak tanımladığı görülebilir. Bu aşamada F aslında ifadenin bütün doğal sayılar için değil, sadece çift sayılar için doğru olduğunun farkındadır ancak tam olarak ifade edememiştir.

F, söylediklerinin araştırmacı tarafından anlaşılması amacı ile tek sayılar ile ilgili bazı örnekler vermiştir. F'nin vermiş olduğu örnek aşağıda sunulmuştur.

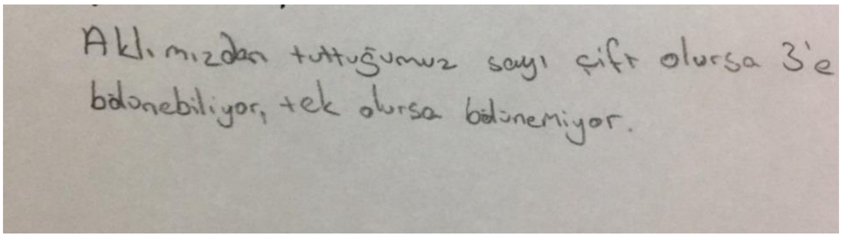


Yazdıklarının ardından F aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

"Demek ki soruda bana sorulan kural 2'ye bölünebilen (çift sayı) sayılar yani yarısı olan sayılar için doğru, 2'ye bölünemeyen (tek sayı) yani yarısı olmayan sayılar için yanlıştır."

Yaptığı açıklamanın ardından F, kendinden emin bir şekilde kalemini bırakmıştır. Araştırmacı tarafından O'nun bu hareketi, sürecin F için sonlandığı şeklinde yorumlanmıştır. İspat sürecinde F'nin bilinçli olarak seçtiği örneklerle bir sonuca ulaşabilmesi imajın mantıksal bağlar içerdiği şeklinde yorumlanabilir. O, doğal sayıların kendisi ile yarısının toplamının 3'e tam olarak bölünüp bölünemeyeceğini görebilmek amacıyla önce çift sayıları, daha sonra ise tek sayıları örnek vermek amacıyla özenle seçmiştir. Ayrıca vermiş olduğu bir önceki örnekten hareketle yeni örneklere geçmesi ve birbirleriyle ilişkilerini gözeterek çıkarım yapabilmesi ile de imajın dinamik olduğu söylenebilir. Diğer yandan F için, süreç tamamen kendi bilgi birikimi içerisinden seçmiş olduğu öznel örnekleriyle şekillenmiştir. Buradan hareketle F'nin sahip olduğu imajın kişisel olduğu da söylenebilir.

Yaptığı açıklamanın ardından F, ulaştığı sonucu kâğıda yazmıştır. F'nin yazmış olduğu ifadeler aşağıda sunulmuştur.



İspat sürecinde F'nin, sahip olduğu bilgiler arasından sayılar ve işlemler öğrenme alanını ifadeye uygun olarak tanıdığı (R-) ve bir tam sayının yarısını bulma, 3'e bölünebilme kuralı gibi bilgileri duruma uygun olarak seçerek kullandığı (B-) görülmüştür. Ayrıca sürecin başında bu konuyla ilgili bir şemaya sahip olmayan F, sürecin sonunda "çift sayılara yarısı eklendiğinde 3'e bölünür, tek sayıların yarısı tam sayı olmadığı için bu kural geçerli değildir " gibi bir şemaya sahip olmuştur. F'nin gerçekleştirmiş olduğu bu eylem oluşturma (C-) epistemik eylemi bağlamında yorumlanabilir.

H'nin İspat Sürecinin İncelenmesi

Kendisine yöneltilen ifadeleri ispatlama sürecinde sahip olduğu kanıt imajlarını belirlemek amacıyla H ile üç ayrı görüşme yapılmış ve görüşmeler sonucunda ulaşılan bulgular bu başlık altında sunulmuştur.

H ile yapılan görüşme sırasında araştırmacı tarafından aşağıda verilen ifade sunulmuş ve düşüncelerini paylaşması istenmiştir.

"*$a,b \in Z$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel, yazılamayanlara ise irrasyonel sayılar denir.*"

Yukarıdaki bilgi göz önünde tutulduğunda 4,45454545… ve $\sqrt{2}$ *sayılarının rasyonelliği ve irrasyonelliği hakkındaki düşüncelerinizi belirtiniz.*

H, ona yöneltilen ifadeyi kısık sesle okumuş ve bir açıklama yapmadan bir kaç dakika düşünmeye başlamıştır. Yüzünde tedirgin bir ifade olmadığından, araştırmacı tarafından konuya aşina olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Bir süre sonra H, kendiliğinden aşağıda sunulan açıklamayı yapmaya başlamıştır.

"*İrrasyonel ve rasyonel sayılar ile ilgili bilgi verilmiş. Ben bunu biliyordum zaten. Şimdi* $\sqrt{2}$ ve 4,454545… *sayısını nasıl* $\frac{a}{b}$ *olarak gösterebilirim onu düşünüyorum*."

H'nin yapmış olduğu açıklama incelendiğinde, O'na verilen ifadeyi anlamlandırdığı görülebilir. O, mevcut bilgilerini yoklayarak rasyonel ve irrasyonel olanları duruma uygun olarak seçmiştir. Bunun tanıma (R-) epistemik eylemine karşılık geldiği söylenebilir. Diğer yandan, H'nin irrasyonel ve rasyonel sayılar kavramına ilişkin bilgilere sahip olsa da kendisine verilen sayıların irrasyonelliğini veya rasyonelliğini göstermeye yönelik nasıl bir yol izleyeceğini henüz belirleyemediği yorumu yapılabilir.

Bir süre daha sessizce düşünen H, ardından düşüncelerini açıklamaya devam etmiştir.

"*Açıkçası* $\sqrt{2}$ *sayısının irrasyonel olduğunu nasıl gösteririm bilmiyorum. Ama devirli sayının rasyonel olduğunu göstermem kolay çünkü onun formülünü biliyorum."*

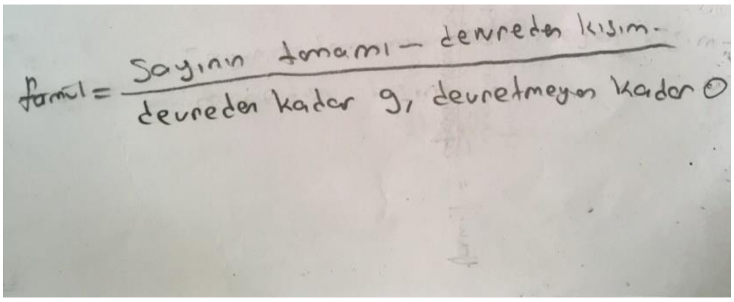
H'nin yaptığı açıklama incelendiğinde, imajın şekillenmeye başladığı yorumu yapılabilir. O, verilen iki sayının $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilmesi için izleyeceği yolu belirlemeye başlamıştır. Diğer yandan H, sahip olduğu bilgileri yoklayarak devirli sayılar ile ilgili olanları durumla alakalı olarak seçmiştir. Mevcut ana kadar H'nin yapmış olduğu açıklamalar doğrultusunda, imajın mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir. O, kendisine yöneltilen 4,45454545… sayısının rasyonel olduğunu gösterebilmek için devirli sayıları $\frac{a}{b}$ şeklinde yazmaya yarayan formülü kullanabileceğini açıkça ifade etmiştir.

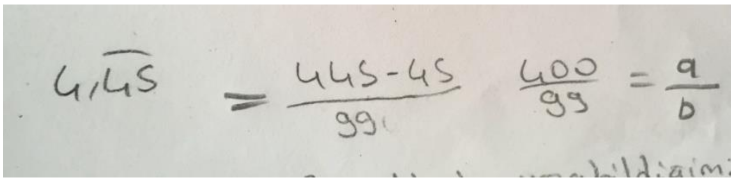
Kağıda karalamalar yapan H'ye araştırmacı tarafından ne düşündüğü sorulmuş ve H'nin cevabı aşağıda sunulmuştur.

" *Devirli sayıları kesirli olarak yazdıran formülü hatırlamaya çalışıyorum. Paydasına virgülden sonra devreden sayı kadar 9, devretmeyen sayı kadar 0 koyuyorduk. Ama pay kısmının kuralını çıkaramadım tam olarak."*

Sunulan açıklama incelendiğinde, H'nin süreçte kullanmak üzere devirli ondalık gösterimleri rasyonel sayı halinde yazmaya yarayan (rasyonel sayı=$\frac{sayıntamamı - devretmeyenkısım}{Virgüldensonradevredensayıkadar9, devretmeyensayıkadar0}$) formülü sahip olduğu bilgiler arasından seçtiği görülebilir. H'nin gerçekleştirdiği bu eylem kullanma (B-) epistemik eylemi olarak yorumlanabilir.

Bir süre daha önünde bulunan kağıda karamalar yapan H'ye araştırmacı tarafından hatırlamak için ihtiyacı olan süreyi tanımak adına hiç bir müdahale yapılmamıştır. Birkaç dakika sonra H'nin önündeki kağıda yazdıkları aşağıda sunulmuştur.





Yazdıklarının ardından H şu açıklamayı yapmıştır.

"Bahsettiğim formülü hatırlamaya çalıştım. Hatırladığıma göre pay kısmına sayının tamamından devreden kısmını çıkarıp yazıyorduk, payda kısmına ise devreden sayı kadar 9, devretmeyen sayı kadar 0 koyuyorduk. Bu formüle göre 4,454545… sayısını yerine koyduğumda 400/99 sonucuna ulaştım. Yani $\frac{a}{b}$ *olarak yazdım. Ama aklımda bir endişe var, çünkü formülü tam doğru hatırladığımdan emin değilim."*

H'nin yazdıkları ve yapmış olduğu açıklamalar incelendiğinde, O'nun sayının tamamından devretmeyen kısmı çıkarmak yerine devreden kısmını çıkarmasından kaynaklı bir hataya düştüğü söylenebilir. H, matematik dersi kapsamında öğrendiği formülün bir kısmını unutmuş ve hatırlarken hata yapmıştır. H'nin sonucundan emin olmadığını düşünen araştırmacı ile arasında aşağıda sunulan konuşma gerçekleşmiştir.

A: *4,454545… sayısının rasyonel olduğunu gösterdin mi?*

H: *Dediğim gibi tam emin değilim.*

A: *Peki ne yapmayı düşünüyorsun şu anda? İspatı bitirdin mi?*

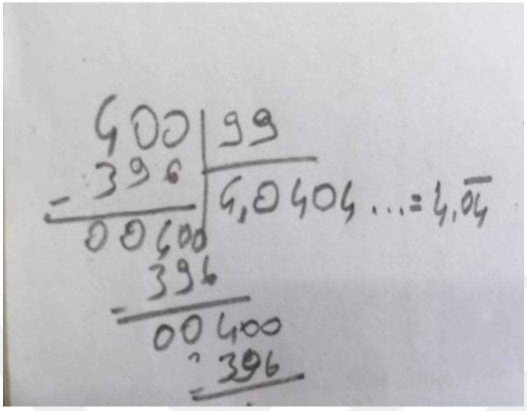
H: *Aklımda şöyle bir düşünce var. Formülden emin değilim ya onun için sağlama yapsam nasıl olur?*

A: *Nasıl bir sağlama?*

H: *Tersten gitme. Yani 400/99 bulduğum sonucu ondalık olarak yazmaya çalışsam acaba 4,454545… olur mu diye. 4,454545… çıkarsa sonucum doğru demektir.*

Sunulan konuşmadan hareketle, H'nin yaptığı ispatın doğru olduğuna dair bir hisse sahip olmadığı bundan dolayı da sağlama yoluna gittiği söylenebilir. H'nin sahip olduğu bu belirsizlik Kidron ve Dreyfus'un bahsettiği sezgisel bir ikna sağlayan duyuşsal his kavramına karşılık gelmektedir. H, burada yaptıklarına dair bir iknaya sahip değildir. Diğer yandan, H'nin imajının mantıksal bağlar içerdiği de söylenebilir. Çünkü O, devirli ondalık sayı ve rasyonel sayı kavramları arasında gerekli ilişkiyi doğru bir şekilde kurmayı başarmıştır.

Ulaştığı sonuçtan emin olmak için sağlamasını yapmak isteyen H'nin yaptığı işlemler aşağıda verilmiştir.



H, bilgilerini yoklayarak devirli sayıları bazı rasyonel sayıların ondalık gösterimi olarak tanımış (R-) ve sonucunu kontrol etmek için, rasyonel sayıyı ondalık olarak yazmak üzere payı paydaya bölme özelliğini kullanmış (B-)tır.

Mevcut anda H, ulaşmayı hedeflediği 4,454545… sayısına değil, 4,0404… sayısına ulaşmıştır. Bu da H'nin süreçte kullandığı formülü yanlış hatırlamasından kaynaklıdır.

Yazdıklarının ardından H'nin yapmış olduğu açıklama aşağıda verilmiştir.

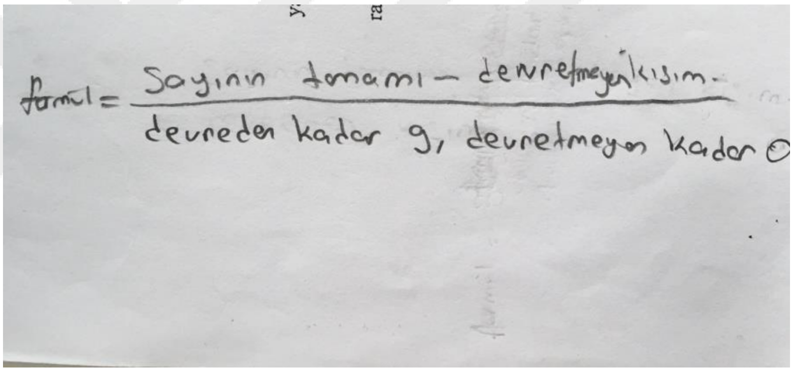
" *Tahmin ettiğim gibi formülü yanlış hatırlamışım. Ondalık olarak yazmak için 400'ü 99'a böldüm. 4.040404... çıktı. Formülün doğrusunu hatırlamak için düşünüyorum."*

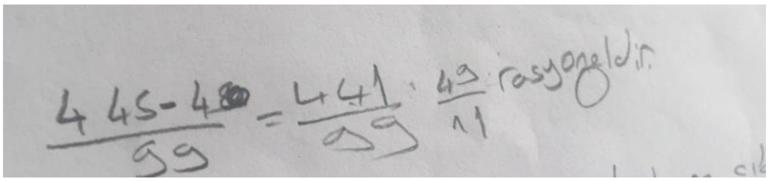
H, ispat sürecinde kullanmış olduğu hatalı formül nedeniyle yanlış sonuca ulaşmıştır. Bu nedenle süreci tekrar planlayan H'nin imajının dinamik olduğu yorumu yapılabilir.

Bir süre düşünen H, "*Galiba şöyle alacaktı.*" diyerek ardından aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

" *Yanlışımı buldum gibi. Paya (sayının tamamı-devreden kısım) yazmak yerine (sayının tamamı-devretmeyen kısım) yazmalıydım. Ondan yanlış sonuca ulaştım gibi geliyor bana.*"

H, düşünme sürecinin ardından kullandığı formülde yanlış yaptığı yeri bularak bir aydınlanma yaşamıştır. Yaptığı açıklamanın ardından H, önünde bulunan kâğıda yeniden işlemler yapmaya başlamıştır. H'nin yapmış olduğu işlemler aşağıda verilmiştir.





Ardından tekrar sağlamasını yapan H, bulduğu sonucun 4,454545…'e eşit olduğunu görmüş ve ardından şu açıklamayı yapmıştır.

"*Evet bu sefer sağlamamdan doğru çıktı. Yani 4,454545… sayısını kesirli olarak yazmayı başardım. Yani bu devirli sayı rasyoneldir.*"

4,454545… devirli sayısının rasyonel olduğunu ispat etme sürecinde H, devirli sayılar, rasyonel sayılar, ondalık sayılar konularıyla ilgili bilgilerini konuyla ilgili olarak tanıyarak O'nu sonuca ulaştıracak formülleri kullanmıştır. Buradan hareketle H'nin sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir. Ayrıca onun süreçte izlediği adımları bir önceki adımda ulaştığı sonuca göre yeniden yapılandırdığından hareketle imajın dinamik olduğu yorumu da yapılabilir.

Diğer bir görüşme sırasında H'ye aşağıda verilen ifade sunuldu.

" Bir sayıya iki katı eklendiğinde sonuç daima 3'e bölünür." ifadesini tartışınız. Düşüncelerinizi gerekçeleriyle belirtiniz.

Bir süre düşünen H devamında aşağıdaki açıklama ile görüşlerini açıklamaya başlamıştır.

" Soruda bana bir sayıyla iki katını topladığımızda sonuç 3'e bölünür mü diye soruyor. Yani mesela 10 ile 2 katı 20'yi toplayınca 30 evet 3'e bölünüyor."

Yaptığı ilk açıklama ile H'nin, ifadeyi anlamlandırmaya başladığı söylenebilir. H, ona sunulan ifadedeki özellikleri göz önünde tutarak sayısal değer vererek doğrulamaya çalışmaktadır. H'nin yapmış olduğu açıklamadan hareketle sayılar ve işlemler, bölünebilme, çarpanlar ve katlar kavramlarına ilişkin sahip olduğu ön bilgileri gözden geçirerek konuyla ilişkili olarak tanıdığı (-R) yorumu yapılabilir. Çünkü bu konularla ilgili bilgilerini göz önünde tutarak düşüncelerini açıklamıştır.

Bir süre konuşmadan önündeki kağıda işlemler yapan H'nin bu hareketi araştırmacı tarafından, onun başka sayılar ile denemeler yaparak ifadenin doğruluğu veya yanlışlığı hakkında bilgi edinmeye çalıştığı şeklinde yorumlanmıştır.

Bu işlemlere bir süre daha devam eden H ile araştırmacı arasında geçen kısa konuşma aşağıda sunulmuştur.

H: *Bir sürü sayı denedim. Hepsini 2 katıyla topladığım zaman sonuç 3'e bölünüyor.*

A: *O halde ifade doğrudur diyebilir misin?*

H: *Bilmiyorum ki. Ben altı tane sayı denedim hepsinde oldu. Ama bütün sayılarda doğrudur diyebilir miyim emin değilim.*

Verilen konuşma incelendiğinde, H'nin önermeyi doğrulamak için bir kaç durum için deneme yaptığı ancak denediği durumların tüm durumlar için geçerli olduğundan emin olmadığı görülebilir. Yani H, mevcut anda henüz duyuşsal bir ikna sağlayan kesinlik hissine sahip değildir.

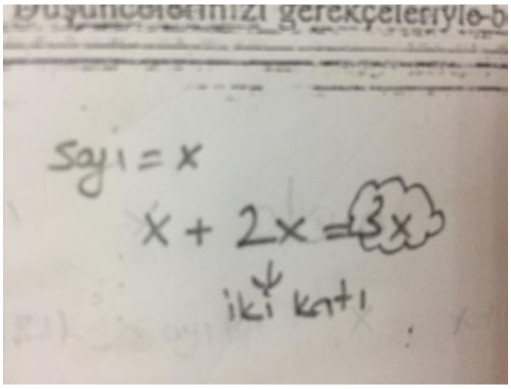
Diğer yandan, H'nin şekillenmeye başlayan imajının mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir. Çünkü O, birkaç örnekle yetinmenin doğru olamayabileceğini düşünerek bütün sayılar için geçerli olabilecek bir yöntem arayışına girmiştir.

Bir süre tekrar tekrar önündeki ifadeyi okuyan H, ardından heyecanla kâğıda karamalar yaparak şu açıklamayı yapmıştır:

"Soruda bir sayı diyor. Matematik dersinde sayının kaç olduğunu bilmediğimiz zaman x diyorduk."

H'nin yapmış olduğu açıklama ile değişken kullanmaya karar verdiği görülebilir. Bütün sayılar için doğruluğunu göstermek için yöntem arayan H'nin sayı hakkında bilgisi olmadığı için değişken ataması, konuyla ilgili olarak cebirsel ifadeler kavramını tanıdığı (R-) ve bu kavramı kullanmak için seçtiği (B-) söylenebilir.

Cebirsel ifadeleri kullanabileceğini söyleyerek bir sonraki adıma geçen H'nin yapmış olduğu işlemler aşağıda verilmiştir.



Bu noktada H’nin cebirsel ifadelerden faydalanarak kendine yöneltilen ifadeyi matematiksel bir dille ifade etmesi imajın mantıksal bağlar içermesi özelliğine sahip olduğu olması bağlamında yorumlanabilir. Diğer yandan imaj durağan bir yapıya sahip değildir. Yani H’nin şu ana kadar süreçte oluşturduğu adımlar birbiriyle ilişkili olarak gelişerek şekillenmiştir. Bu bağlamda imajın dinamik olma karakteristiğine sahip olduğu söylenebilir.

Sonraki süreçte, H’nin düşüncelerini daha iyi anlamak isteyen araştırmacı tarafından H’ye düşünceleri sorulmuş ve aralarında geçen konuşma aşağıda sunulmuştur.

A: *3x sonucuna ulaştın galiba en son. Sence bu ne demek? Yani ispatın için yeterli mi?*

H: *Ben de onu düşünüyorum. Toplamları 3x ediyor.*

A: *3x 3’e bölünür diyebilir misin?*

H: *Bölünmesi lazım sanki ama tam emin olamadım. Biraz düşünsem olur mu?*

Verilen konuşmadan hareketle, H’nin henüz oluşturduğu cebirsel ifadenin 3’e bölünüp bölünmediğinden emin olmadığı, yani ispatı tamamlamadığı söylenebilir. Şu ana kadar geçen süreçte H, sayısal değer vererek denediği bir kaç özel durumdan, tüm sayılar için geçerli olabilecek genel bir cebirsel yöntem kullanmıştır. Ancak ulaştığı “3x” cebirsel ifadesinin 3’ün katı anlamına geldiğini fark edemediği için ifade ile ilgili bir kanıya varamamıştır.

Düşünmek için bir süre bekleyen H, kendinden emin bir ifadeyle aşağıdaki açıklamayı yapmaya başlamıştır.

“*Tabi ya. 3x demek 3 çarpı x (3.x) demek. E 3’le çarptığımız bir sayı da geri 3’e bölünebilir. Yani x+2x=3x, 3x 3’ bölündüğü için bana sorulan soru doğru.”*

Yaptığı açıklamanın ardından H’nin ispat sürecini sonlandırdığı görülebilir. Onun kendinden emin bir şekilde ulaştığı sonucu açıklaması ispat imajının duyuşsal bileşeni oluşturan sezgisel bir iknaya sahip olduğu söylenebilir.

H, bu sonuca ulaşırken cebirsel ifadeler, bölünebilme, tam sayılar gibi kavramları seçmiş ve kavramların özelliklerini göz önünde tutarak kullanmıştır. H’nin bu konulara ilişkin bilgilerini organize ederek kullanması ve istediği sonuca bu doğrultuda ulaşması, sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içerdiği olarak yorumlanabilir. Ayrıca H’nin süreçte yaptığı işlemler, kullandığı bilgiler kişisel birikiminin ürünüdür. Diğer bir deyişle, H’nin oluşturmuş olduğu ispat imajı kişiseldir.

Yukarıda verilen açıklamaların ardından H, ‘’bütün sayılar için 2 katı ile toplandığında 3’e bölünür’’ sonucuna ulaştığını ifade etmiş ve süreci sonlandırmıştır.

V.BÖLÜM

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde bir önceki bölümde sunulan bulgulara uygun olarak oluşturulmuş sonuçlara, tartışma ve önerilere yer verilmiştirr. Sonuçlar, ilgili alt problemler bağlamında sunulmuştur. Bu sonuçlar, literatürde yer alan benzer çalışmalar ile kıyaslanarak tartışmalar oluşturulmuş olup; bölümün son kısmında ise, gelecek çalışmalar için önerilere yer verilmiştir.

Sonuç ve Tartışma

Araştırmanın yapıldığı gruba, basit düzeyde ispatlama gerektiren sorulardan oluşan İspatlama Düzeyi Belirleme Formu uygulanmış ve toplanan veriler Balacheff'in belirlemiş olduğu ispat seviyelerine göre analiz edilerek bir önceki bölümde sunulmuştur. Bu bölümde ise öğrencilerin ispat yapma yaklaşımlarına ilişkin sonuçlara yer verilmiştir. Ek olarak, bu bölümde öğrencilerin kullandığı yöntemler ve verilere ilişkin genel değerlendirmelerden bahsedilmiştir.

Ortaokul 8.sınıf düzeyinde bulunan öğrencilerin ispat yapabilme durumlarının belirlenebilmesi için hazırlanan İspatlama Düzeyi Belirleme Form'unun ilk sorusu öğrencilerin, ilk üç adımı verilen şekil örüntüsünün genel kuralını belirleyebilmelerine yöneliktir. Öğrencilerin sahip oldukları mevcut bilgi birikimleriyle bu soruya cevap getirmeleri mümkündür. Öğrencilere yöneltilen bu soru ile onların, belirli bir kurala göre devam eden örüntülerde bir sonraki adımı tahmin edebilme, istenen bir adımı oluşturabilme gibi matematiksel becerileri ne düzeyde gerçekleştirebildikleri incelenmiş ve alınan yanıtlar Balacheff'in ispat seviyelerine göre kategorileştirilmiştir.

Öğrencilerin soruya vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde, genel olarak sayma yoluyla sonuca ulaşmaya çalıştıkları söylenebilir. Örüntü kuralını belirleyen öğrencilerin büyük bir kısmı verilen adımları sayarak "2'şer artıyor" şeklinde sözel bir açıklamada bulunmuşlardır. Burada öğrenciler örüntü kuralını fark etmelerine rağmen cebirsel olarak ifade edememişlerdir. Lee (1998, akt. Healy ve Hoyles 1999) örüntüyü fark etmekle onu cebirsel olarak ifade etmenin farklı olduğunu ve cebirsel olarak ifade etmenin kolay olmadığını belirtmiştir. Öğrencilerin sadece sayma yoluyla oluşturduğu bu yanıtlar Balacheff'in belirlediği ispat seviyelerine göre pragmatik ispat seviyesinde yer almaktadır.

Diğer yandan gruptan 15 öğrenci ise örüntü kuralını 2n+1 şeklinde bilinmeyen kullanarak ifade etmiştir. Bu sonuca ulaşan öğrencilerin artış miktarını göz önünde tutarak herhangi bir adımı bulmaya yönelik kuralı oluşturabilmişlerdir. Ulaştıkları sonucu cebirsel ifadelerden faydalanarak ifade edebilen öğrencilerin Balacheff'in ispat seviyelerinden zihinsel ispat düzeyinde yer aldığı söylenebilir.

Demonstrasyon ise Balacheff'e göre en üst seviyede ispat şeklidir. Öğrencilerden hiç biri bu seviyede ispat yapamamıştır. Bunun sebebi öğrencilerin ispat yapmaya aşina olmamaları olabilir.

Sorunun ikinci şıkkını oluşturan *"Verilen kuralı kullanarak bir sırada 7 üçgen yapmak için kaç kürdan gerektiğini bulunuz."* sorusuna ise, öğrencilerin büyük bir bölümü sonucu 7. adıma kadar oluşan kürdan sayısını sayarak veya yedi üçgen çizerek ulaşmışlardır. Öğrencilerin vermiş oldukları bu yanıtlar pragmatik ispat seviyesinde olarak yorumlanabilir. Öğrencilerin 13'ü ise oluşturdukları 2n+1 genel kuralında "n" yerine adım sayısını yazarak sonuca ulaşmışlardır. Bu şekilde sonuca ulaşan öğrenciler sayma yoluyla sonuca ulaşan öğrencilere göre daha üst düzey bir yönteme başvurmuşlardır denilebilir. Tüm durumlar için uygulanabilir bir genel kural oluşturarak sonuca ulaşan bu öğrencilerin ise zihinsel ispat seviyesinde oldukları söylenebilir.

Birinci soru için öğrencilerin büyük bir kısmı sayma ile ulaştıkları sonucu ispat olarak kabul etmektedir. Öğrencilerin çoğunluğunun vermiş olduğu bu yanıtlar Balacheff'in ispat seviyelerine göre pragmatik ispat düzeyinde yer almıştır. Bu sonuç Özer ve Arıkan'ın (2002) yaptığı çalışma ile benzer sonuçlara sahiptir.

Formda yer alan ve öğrencilerden ispatlanması istenilen diğer iki soru ise sırası ile *"3'e bölünebilen 3 tane sayının toplamı da 3'e bölünebilir."* ve *"Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir."* şeklindedir. Bu sorular ile öğrencilerin sözel olarak verilen bir ifadeye uygun cebirsel ifade oluşturma, bölünebilme kuralları ve doğal sayıların özelliklerine (tek-çift olma, ardışık olma vb. durumlar) ilişkin bilgilerini organize ederek ispat yapmaları beklenmektedir.

Araştırmaya katılan öğrencilerin büyük bir çoğunluğu ifadeleri ispatlamak için örnek durum oluşturmayı yeterli bulmuşlardır. Sayısal değer vererek ispatı tamamlayan öğrencilerin bu yanıtları pragmatik ispat düzeyinde yer almaktadır. Pragmatik ispat, örnek vererek sonuca ulaşmayı içeren bir ispat türüdür. Öğrencilerin çoğunluğunun onlara sunulan ifadeyi örnek göstererek doğrulamaya çalışması cebirsel ifadeleri kullanmaya aşina olmadıklarından kaynaklıdır yorumu yapılabilir. Öğrenciler gerek öğretim programında bu tip soruların çok yer almaması gerekse soyut düşünme yeteneklerinin henüz yeteri kadar gelişmemesinden ötürü değişken kullanarak genel bir sonuca ulaşmaya yönelmemişlerdir.

Araştırmaya katılan öğrencilerin ise az bir kısmı (2.soru için %13, 3.soru için % 15) soruya zihinsel ispat seviyesinde yanıt oluşturmuşlardır. Öğrencilerin onları yöneltilen ifadelere zihinsel ispat seviyesinde cevap oluşturamamalarının nedeni olarak, ispat yapmaya ve cebirsel ifadeleri kullanmaya yatkın olmamaları gösterilebilir.

İspat İmajına İlişkin Görüşmelerden Elde Edilen Sonuç ve Tartışma

Araştırmanın ikinci alt problemi, *"Ortaokul 8.sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçleri kanıt imajı bağlamında incelendiğinde ortaya çıkan sonuçlar nelerdir?"* biçimindedir. Bu alt probleme uygun olarak,

Öğrencilerle yapılmış olan görüşmelerden elde edilen bulgulara ilişkin sonuçlara bu bölümde yer verilmiştir. Araştırma sürecinde 3 öğrenci ile (*Ç, F, H ile isimlendirildi) 3*'er defa olmak üzere toplamda 9 mülakat ile gerçekleştirilen görüşmelere ilişkin genel değerlendirmelere yer verilmiştir.

Ç'nin İspat İmajına İlişkin Sonuçlar

Bu araştırma kapsamında Ç olarak adlandırılan öğrencinin, ifadeleri ispatlama sürecinde oluşturduğu imajlara ve bilgiyi oluşturma sürecine odaklanılmıştır. Bu bağlamda öğrenciye sunulan ifadelerden EBOB-EKOK kavramı, rasyonel- irrasyonel kavramı ve bölünebilme kavramına yönelik olan sorulara verdiği cevaplar ve süreçte oluşturduğu ispat imajları analiz edilmiştir.

Ç'nin süreçte oluşturmuş olduğu imajlar, Kidron ve Dreyfus'un (2014) belirlemiş olduğu bileşenlere göre yorumlanmıştır. Bu bileşenler; kişisel olma, mantıksal bağlar içerme, dinamik olma ve kendi içinde bir bütün olma özelliklerini kapsayan bilişsel anlayış ve sezgisel ikna sağlayan duyuşsal bir kesinlik hissidir.

Bu bileşenler ışığında analiz edildiğinde, Ç'nin ispat imajının kişisel olduğu söylenebilir. Sürecin başından itibaren verdiği örnekleri kendi bilgi birikimiyle oluşturması, izleyeceği yolu yine sahip olduğu bilgilere göre şekillendirmesi ayrıca Ç'nin sahip olduğu birkaç yanlış bilgi nedeniyle ispatı bu yönde şekillendirmesi imajın kişisel bir özelliğe sahip olduğuna dayanak olarak gösterilebilir.

Diğer yandan Ç, her üç sorunun ispatı aşamasında, sahip olduğu bilgileri durumla ilişkili olarak mantıklı ve matematik kurallarına uygun şekilde gerekli yapıları oluşturmak suretiyle kullanmıştır. Bu bağlamda Ç'nin oluşturduğu ispat imajlarının mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir. Ayrıca Ç, süreç boyunca gerek kendisine sorduğu sorular ile gerekse de gerçekleştirdiği ispatlama adımlarından hareketle süreci bir önceki adımıyla bağlantılı olarak düzenleyerek geliştirmiştir. Buradan hareketle, Ç'nin sahip olduğu imajın durağan bir yapıda değil dinamik olduğu yorumu yapılabilir.

İmajın duyuşsal bileşenini oluşturan ikna hissinin ise, Ç'nin ses tonu ve tavırları gibi vücut hareketlerinden gözlemlendiği söylenebilir. Yani Ç'nin, ispat yaptığına ve bir sonuca ulaştığına dair düşüncelerini hareketleriyle onaylayarak duyuşsal ikna hissini yaşadığı söylenebilir.

Kidron ve Dreyfus (2014) kanıt imajı kavramını oluştururken RBC teorik çatısından faydalanmıştır. RBC Teorisi Tanıma (R-), İnşa Etme (B-) ve Oluşturma (C-) epistemik eylemini kapsamaktadır. Bu bağlamda değerlendirildiğinde, Ç süreç boyunca, ispatı için gerekli olan bilgileri sahip olduğu bilgiler arasından tanımış ve durumla uygun olanları seçerek kullanmıştır. Ancak Ç'nin süreçte yapmış olduğu ispatlar, O'nun iki ifade için yeni bir bilgi yapısı inşa etmesi için yeterli olmamıştır. Buradan hareketle, oluşturma epistemik eylemini sadece bir ifadenin ispat sürecinde gerçekleştirdiği söylenebilir.

Sonuç olarak Ç'nin, süreci kişisel bilgi birikimiyle gerekli mantıksal bağları kurarak ve her adımda oluşturduğu yapıyı genişletip yenileyerek dinamik bir biçimde ilerleterek tamamladığı söylenebilir.

F'nin İspat İmajına İlişkin Sonuçlar

Çalışma sürecinde F'nin, ispatlama sürecinde oluşturmuş olduğu imajlara ve bilişsel süreçlerine odaklanılmıştır. Bu amaçla öğrenciye sunulan ifadelerden EBOB-EKOK kavramı, bölünebilme kavramı ve üslü sayılar kavramı ile ilgili sorulara verdiği cevaplar ve süreçte oluşturduğu imajın özellikleri analiz edilmiştir.

İlgili teorik çatılar bağlamında ulaşılan sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

F'nin sahip olduğu imajın mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir. Çünkü o, ispat sürecinde ihtiyacı olan kavramları ve bilgileri amacına uygun olarak seçmiş ve kullanmıştır. Bu bilgileri kullanırken, konunun özelliklerini göz önünde tutmuş ve başka konularla olan ilişki bağlantılarını başarıyla kurmuştur. Örneğin, "*A ve B aralarında asal iki sayı olsun. Bu durumda, EKOK(A,B) = A.B 'dir. Gösteriniz."* ifadesinin ispatı sürecinde EKOK(A,B) . EBOB(A,B) = A.B formülünü konuyla ilgili olarak tanıyarak süreçte kullanmıştır.

Diğer yandan F, ispat sürecinin aşamalarını birbirinden bağımsız olarak değil, her adımı bir sonrakine zemin hazırlayacak şekilde oluşturmuştur. Yani süreç durağan değil birbiriyle bağlantılı olarak ilerleyen dinamik bir yapıya sahiptir. Buradan hareketle, F'nin sahip olduğu imajın dinamik olma özelliğine sahip olduğu söylenebilir.

F, süreçte ona yöneltilen ifadeleri sahip olduğu bilgileri ve konu hakkındaki geçmiş deneyimleri sayesinde ispatlamıştır. Bu ispatlar tam anlamıyla akademik düzeyde ve teorik bir yapıda olmasa da F'nin konu ile ilgili düşüncelerini ortaya çıkarmak için yeterli olmuştur. F, süreç boyunca hiç kimsenin etkisi ve yönlendirmesi altında kalmadan kendi kişisel fikirleriyle sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla F'nin imajının kişisel bir anlayışa sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca F, ispatı bütün olarak görebilmektedir. Yani adımlar arasında kopukluk bulunmamakta ispatı zihninde tek ve bütün olarak bulundurmaktadır. Buradan hareketle F'nin imajının varlık karakteristiğine sahip olduğu söylenebilir.

İmajın duyuşsal bileşeni bağlamında değerlendirildiğinde ise, F'nin süreç içerisinde sezgisel iknaya sahip olmamasından kaynaklı olarak ispat adımlarını tekrar gözden geçirdiği ve süreci yeniden şekillendirdiği söylenebilir. Bu sayede ulaştığı sonuçtan emin olduğu an ortaya çıkan kesinlik hissi ile sezgisel bir ikna sağladığı görülebilir.

H’nin İspat İmajına İlişkin Sonuçlar

Süreçte H’nin ispatlama sürecinde oluşturmuş olduğu imajlara ve bilişsel süreçlerine odaklanılmıştır. Bu amaçla öğrenciye sunulan ifadelerden rasyonel-irrasyonel kavramı, bölünebilme kavramı ile ilgili sorulara verdiği cevaplar ve süreçte oluşturduğu imajın özellikleri analiz edilmiştir.

Teorik çatılar bağlamında ulaşılan sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

H’nin süreçte oluşturmuş olduğu imajlar, kanıt imajını oluşturan özellikler bağlamında değerlendirildiğinde, kişisel olma özelliğine sahiptir denilebilir. Çünkü H’nin süreçte ispatlama amacıyla seçtiği örnekler, sahip olduğu yanlış bilgiler de dahil süreçte kullandığı tüm bilgiler ve yorumlama çabası kendi bilgi birikiminin ürünüdür. Diğer yandan H’nin, ona yöneltilen tüm ifadelerin ispatı sürecinde oluşturduğu yapılar ve örnekler birbirinden bağımsız değil, bir mantık çerçevesinde ilerlemiştir. Sahip olduğu bilgileri konularla uygun olarak seçerek, onu ispat yapmaya götürecek ilişkileri kurarak sonuca ulaşmayı başarmıştır. Buradan hareketle, H’nin imajının mantıksal bağlar içerdiği söylenebilir. Ayrıca ispat sürecinin adımları birbiriyle bağlantılı olarak genişleyerek ve gelişerek şekillenmiştir. İmajın bu karakteristiği de dinamik bir yapıda olması bağlamında yorumlanabilir.

H’nin ispat sürecini gözden geçirmesini veya ikna olmasını sağlayan duyuşsal eylemlerini ise kesinlik hissi olarak yorumlayabiliriz. H, ispatın doğruluğundan emin olması ile doğru orantılı olarak bir kesinlik hissine sahip olmaktadır denilebilir.

ÖNERİLER

8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili genel yaklaşımları incelendiğinde, çoğunluk olarak örnek vermekle yetindikleri, matematiksel dili ve değişken kullanarak ispat yapmakta zorlandıkları görülmüştür. Öğrencilerin ispat yapma alışkanlığı kazanabilmesi ve de bu süreci içeren ve akıl yürütme stratejisine yönelik içeriklerin müfredata dâhil edilebilmesine amacıyla, bu duruma yönelik etkinlik ve çalışmaların yaygınlaşması bağlamında çalışmalar yapılabilir.

Bu bölümde yapılan çalışma ile elde edilen bulgular ışığında oluşturulan önerilere yer verilmiştir.

Kanıt imajlarının belirlenmesi adına görüşme yapılan öğrencilerin, ilk başta "ispat" kelimesinden korktukları, ancak süreç ilerledikçe yeni bilgiyi oluşturmanın mutluluğunu yaşadığı gözlenmiştir. Ortaokul matematik derslerinde de öğretmenlerin konuların başlangıcında ya da ilerleyen süreçte bu tarz ispatlara yer vermesi öğrencilerin konuyu anlamlandırmalarına yardımcı olabilir. Örneğin " x^0 =1" kuralının öğretiminde yapılacak basit bir ispat hem öğrenci için kuralı ezber olmaktan çıkarır, hem de öğrencileri karşılaştıkları diğer kuralların da gerekçesini düşünmeye itebilir.

Kidron ve Dreyfus (2014) ispat imajının bireydeki varlığından bahsetmek için "neden öyle olduğunu" düşünmesinin yeterli olduğunu belirtmiştir. Yani kanıt imajının oluşması için belli bir yaşa ve sınıf düzeyine gerek yoktur. Bu çalışmada ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin sahip olduğu imajlar incelenmeye çalışılmıştır. Yapılacak başka bir çalışma ile farklı sınıf düzeyleri için(Anaokulu veya ilkokul) öğrencinin sahip olduğu imajların özellikleri incelenebilir.

Bu çalışmada amaç, 8. Sınıf öğrencilerinin ispat yapıp yapamadıklarını incelemekten ziyade, süreçte oluşturdukları imajları incelemek olmuştur. Bu nedenle öğrenciler ispat yapabilir ya da ispatlar doğrudur-yanlıştır gibi incelemeler yapılmamıştır. Başka bir çalışmada öğrencilerin seviyelerine uygun daha fazla ifade geliştirilerek ispat yapabilme becerileri incelenebilir.

Yeni bilgi oluşumunda ispat yapmanın etkisi olup olmadığı başka bir araştırma konusu olarak düşünülebilir.

Ortaokul öğretim programında ispat yapma becerisi yer almadığından dolayı ortaokul matematik derslerinde bu beceriye yönelik çalışmalara yer verilmemektedir. Yapılacak bir çalışma ile öğrencilere bu konuda bir eğitim verip, ispatın başarı üzerinde etkisi incelenebilir, böylece öğretim programında ispatın yeri ile yeni bir görüş oluşturulabilir.

.

KAYNAKÇA

Akgün, L. (2006). Cebir ve değişken kavramı üzerine, *Journal of Qafqaz University*, 17.

Akkan. Y., Baki, A., Çakıroğlu, Ü. (2011). Aritmetik ile Cebir Arasındaki Farklılıklar: Cebir Öncesinin Önemi. *İlköğretim Online, 10(3), 812-823, 2011.*

Arslan, Ç. (2007). İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Aylar, E. (2014). 7. sınıf öğrencilerinin İspata Yönelik Algı ve İspat Yapabilme Becerilerinin İrdelenmesi, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Balacheff, N. (1988). "Aspects of Proof in Pupils Practice of School Mathematics" in D. Pimm, Mathematics, Teachers and Children. Hodder&Stoughton, London. 216-230.

Bikner-Ahsbahs, A. (2004). Towards the emergence of constructing mathematical meanings. *Proceedings of the 28th Conference of the International Groupfor the Pychology of Mathematics Education*. *2*, 119-126.

Bogdan, R., Biklen, S.K. (1992). Qualiative Research for Education An Introduction To Theories and Models.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak E., Akgün Ö.E., Karadeniz Ş. ve Demirel F. (2013). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (15.baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Cooper, J. L., Walkington, C. A., Williams, C. C., Akinsiku, O.A., Kalish, C.W., Ellis, A. B. & Knuth, E. J. (2011). Adolescent Reasoning in Matmatics: Exploring Middle School Students'n Strategic Apporaches in Empirical Justifications, In Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society. Boston, MA.

Çalışkan, Ç. (2012). 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Başarılarıyla İspat Yapabilme Seviyelerinin İlişkilendirilmesi, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Erdem, D. (2011).Türkiye'de 2005–2006 Yılları Arasında Yayımlanan Eğitim Bilimleri Dergilerindeki Makalelerin Bazı Özellikler Açısından İncelenmesi: Betimsel Bir Analiz, *Eğitimde ve Psikolojide Ölçme ve Değerlendirme Dergisi*, Yaz 2011, 2(1), 140-147

Güven B., Çelik D., Karataş İ. (2005). Ortaöğretimdeki Çocukların Matematiksel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi. Çağdaş eğitim Dergisi, 30, 319

Healy L., Hoyles C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra, *Journal for Research in Mathematics Education,* 31(4): 396-428

http://www.tdk.gov.tr

Kaleli Yılmaz, G. (2015). Durum çalışması. Metin, M. (Ed.), *Kuramdan Uygulamaya Eğitimde Bilimsel Araştırma Yöntemleri.* Pegem Akademi Yayınları, Ankara.

Kidron, I. & Dreyfus, T. (2014). Proof Image. Educational Studies In Mathematics (2014) 87:297–321

Knuth, E. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. Mathematics Teacher, 95 (7).

Knuth, E. & Sutherland, J. (2004). Student understanding of generality. Proceedings of theTwenty-sixthAnnual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 561-567. http://labweb.education.wisc.edu/~knuth/mathproject/papers/Knuth_PMENA04.pdf

Maher, C., Martino, A. M. (1999). Teacher Quastioning to Promote Justification and Generalizition in Mathematics: WhatResearch Practice Has Taught Us. *Journal of Mathematical Behavior,* 18(1),53-78.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2013). Ortaokul Matematik Dersi (5,6,7 ve 8. Sınıflar) Programı, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018). Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Ankara: 2018

Narlı, S., Aksoy, E., Pala, O. ve Ercire, Y.E. (2015). Using Proof Image and Epistemic Actions to Trace the Proof Process of a Prospective Mathematics Teacher. Proceedings of 40th Conference of the Internatıonal Group for the Psychology of Mathematics Education, s:208.

Özer, Ö. ve Arıkan. A. (2002). Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi Bildiriler Kitabı.

Pala, O. (2016). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sonsuz Kümelerin Denkliği Konusundaki Kanıt İmajlarının İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi.

Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N. ve Hershkowitz, R. (2004). Teacherguidance of knowledgeconstruction. M. J. Hoinesve A.B. Fuglesad, (Ed.), Proceedings of the 28th Conference of the InternationalGroupforthePsychology of MathematicsEducation (169-176).

Selvi, M., Yakışan, M. (2004). Üniversite Birinci Sınıf Öğrencilerinin Enzimler Konusu ile İlgili Kavram Yanılgıları. *GÜ, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, Cilt 24, Sayı2 (2004) 173-182

Türnüklü, E. ve Özcan, B. (2014). Öğrencilerin Geometride Bilgiyi Oluşturma Süreci İle Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri Arasındaki İlişki: Örnek Olay. Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, Cilt : 11 , Sayı : 27, s :295-316

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (1999). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006*). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (2000). Matematiksel Düşünme. İstanbul: Remzi Kitapevi.

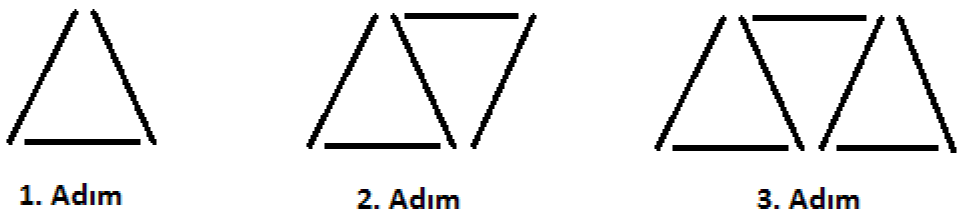
Zack, V. (1999). Everydayand Mathematical Language in Children’s Argumentation About Proof. Educational Review, 51(2), 129-146

Zalimoğlu, Ş. (2012), 8. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik İspat Süreci ve Eğilimleri. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu

EK-1

İSPATLAMA DÜZEYİ BELİRLEME FORMU

Aşağıda verilen üçgenlerde her bir kenar bir kürdandan oluşmaktadır.



Örüntünün ilk üç adımı yukarda verildiğine göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1.Her bir adımda kullanılan kürdan sayısını bulmak için gerekli olan örüntü kuralı nedir?

2.Verilen kuralı kullanarak bir sırada 7 üçgen yapmak için kaç kürdan gerektiğini bulunuz.

Aşağıda verilen önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını gösteriniz. Doğru ise neden doğru, yanlış ise neden yanlış olduğunu gerekçeleriyle belirtiniz.

*1)*3’e bölünebilen 3 tane sayının toplamı da 3’e bölünebilir.

*2)*Ardışık iki doğal sayının toplamı daima tektir.

EK-2

VERİ TOPLAMA FORMU 1

Aşağıda verilen önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında düşüncelerinizi gerekçeleriyle birlikte yazınız.

1)“$5^{x+y} = 5^{x} . 5^{y}$ ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

2)“a ve b tamsayı olmak üzere $a^2 + b^2$ sayısı daima 2’ye bölünür.” ifadesinin doğruluğunu ya da yanlışlığını tartışınız. Düşüncelerinizi ifade ediniz.

EK-3

VERİ TOPLAMA FORMU 2

Aşağıda verilen önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında düşüncelerinizi gerekçeleriyle birlikte yazınız.

1) "Bir sayıya iki katı eklendiğinde sonuç daima 3'e bölünür." ifadesini tartışınız. Düşüncelerinizi gerekçeleriyle belirtiniz.

2) "a,b $\in$Z ve b$\neq$0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel, yazılamayanlara ise irrasyonel sayılar denir."

Yukarıdaki bilgi göz önünde tutulduğunda 4,454545… ve $\sqrt{2}$ sayılarının rasyonelliği ve irrasyonelliği hakkındaki düşüncelerinizi belirtiniz.

EK-4

VERİ TOPLAMA FORMU 3

Aşağıda verilen önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında düşüncelerinizi gerekçeleriyle birlikte yazınız.

*1)*A ve B aralarında asal iki sayı olsun. Bu durumda,
EKOK (A,B) = A.B'dir. Gösteriniz.

2) Aklınızdan bir sayı tutun ve bu sayıya yarısını ekleyin. Bulduğunuz sonuç her zaman 3'e bölünebilen bir sayı mıdır? Tartışınız.

EK-5

ARAŞTIRMANIN YAPILDIĞI UYGULAMA OKULLARI

1-) MANİSA/SARIGÖL Ahmetağa Neslihan Urgancı Ortaokulu

2-) MANİSA/ALAŞEHİR Emin Ersoy Ortaokulu

3-) MANİSA/ALAŞEHİR Emine Elem Kayacık Ortaokulu

EK-6

ARAŞTIRMA İZNİ

T.C.
MANİSA VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 46949512-605.01-E.5656797 24.04.2017
Konu : Araştırma İzni

MÜDÜRLÜK MAKAMINA

İlgi: a) Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 07/03/2012 tarih ve 3616 sayılı 2012 / 13 No'lu genelgesi,
b) Dokuz Eylül Üniversitesi Öğrenci İşleri Daire Başkanlığının 31.03.2017 tarih ve 467 sayılı yazısı.

İlgi (b) yazı ve ekinde; Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı öğrencisi Ümmühan ATEŞ ALPAY'a ait "Ortaokul 8. Sınıf Öğrencilerinin Kanıt İmajının İncelenmesi" konulu tez çalışması için Sarıgöl - Ahmetağa Neslihan Urgancı Ortaokulu, Alaşehir - Emin Ersoy Ortaokulu ve Emine Elem Kayacık Ortaokulu 8. sınıf öğrencilerine yönelik yönelik bir araştırma yapmak istediği belirtilmektedir.

Söz konusu ölçeklerin; 2016 - 2017 eğitim öğretim yılı içerisinde, eğitim öğretimi aksatmadan, yazımız ekinde bulunan onaylı formların kullanılması koşuluyla, gönüllülük esasına dayalı olarak uygulanması Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde olurlarınıza arz ederim.

Necmettin OKUMUŞ
Müdür Yardımcısı

OLUR

24.04.2017

İsmail KOÇ
İl Millî Eğitim Müdür V.

EKLER :
Araştırma Değerlendirme Formu (1 sayfa)
Ölçekler (5 sayfa)

Nişancıpaşa Mh. Atatürk Blv. No:36/A Şehzadeler/MANİSA
Elektronik Ağ: www.meb.gov.tr
e-posta: strateji45@meb.gov.tr

Ayrıntılı Bilgi: Tayfun ATLI
Tel: (0 236) 231 46 08 (105)
Faks: (0 236) 231 12 51

EK-7

ARAŞTIRMA İZNİ

T.C.
MANİSA VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 46949512-605.01-E.5797915 26.04.2017
Konu : Araştırma İzni

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ REKTÖRÜLÜĞÜNE
(Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü)

İlgi: ~~23~~ 31.03.2017 tarih ve ~~767~~ 467 sayılı yazınız.

İlgi yazınız ekinde bulunan, Ümmühan ATEŞ ALPAY'a ait "Ortaokul 8. Sınıf Öğrencilerinin Kanıt İmajının İncelenmesi" konulu tez çalışması için ilimiz Sarıgöl - Ahmetağa Neslihan Urgancı Ortaokulu, Alaşehir - Emin Ersoy Ortaokulu ve Emine Elem Kayacık Ortaokulu bağlı 8. sınıf öğrencilerine yönelik yönelik araştırma izni ile ilgili olarak, Müdürlük Makamından alınan 24.04.2017 tarih ve 5656797 sayılı onay yazısı yazımız ekindedir.

Bilgilerinizi ve araştırma tamamlanmasından itibaren en geç iki hafta içerisinde araştırma sonucunu içeren bir kitap ve iki adet CD'nin Müdürlüğümüz Strateji Şubesine teslim edilmesini arz ederim.

İsmail KOÇ
İl Millî Eğitim Müdür V.

EKLER :
Onay yazısı (1 sayfa)
Ölçekler (5 sayfa)

Aslı Gibidir.
28/4/2017
Sabahat UĞURLU
Şef

D.E.Ü. REKTÖRLÜK GELEN NO
02.05.2017 11.25 - 21572

Nişancıpaşa Mh. Atatürk Blv. No:36/A Şehzadeler/MANİSA
Elektronik Ağ: www.meb.gov.tr
e-posta: strateji45@meb.gov.tr

Ayrıntılı Bilgi: Tayfun ATLI
Tel: (0 236) 231 46 08 (105)
Faks: (0 236) 231 12 51

EK-8

ORJİNALLİK RAPORU

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 07/05/2018

Tez Başlığı:

Ortaokul 8. Sınıf Öğrencilerinin Kanıt İmajının İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 135 sayfalık kısmına ilişkin, 07/05/2018 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (**Turnitin**-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin **benzerlik oranı % 10 dur.**

- http://www.kutuphane.deu.edu.tr/tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/ adresindeki Tez İntihal Analiz Programı Kullanım Kılavuzunu okudum ☒

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) ☐	**Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30)** ☒
☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç, ☐ Alıntılar dâhil, ☐ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça dâhil, ☐ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☒ **EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde.** ☒	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmasının herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Ümmühan ATEŞ ALPAY
Öğrenci No : 2015950006
Anabilim Dalı : İlköğretim
Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Statüsü : Yüksek Lisans ☒ Doktora ☐

ÖĞRENCİ
Ümmühan ATEŞ ALPAY
07/05/2018

DANIŞMAN
Prof.Dr. Serkan NARLI
07/05/2018

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (☐) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz.

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu" formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.

4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.