ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MATEMATİKSEL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Zeynep ÇİFTCİ

Doktora Tezi
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN
2015

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MATEMATİKSEL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

(Investigation of the Mathematical Reasoning Skills of Pre-Service Mathematics Teachers)

DOKTORA TEZİ

Zeynep ÇİFTCİ

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN

ERZURUM
Kasım, 2015

KABUL VE ONAY

Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN danışmanlığında, Zeynep ÇİFTCİ tarafından hazırlanan "Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı çalışma 06/11/2015 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Ali Sabri İPEK	İmza: ....
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN	İmza: ....
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Yasin SOYLU	İmza: ....
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Enver TATAR	İmza: ....
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Ercan ÖZDEMİR	İmza: ....

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

23/11/2015

Prof. Dr. H.Ahmet KIRKKILIÇ

Enstitü Müdürü

TEZ ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

Doktora Tezi olarak sunduğum "**Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi**" başlıklı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve onurumla doğrularım.

Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

06/11/2015

Zeynep ÇİFTCİ

ÖZET

DOKTORA TEZİ

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MATEMATİKSEL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Zeynep ÇİFTCİ

2015, 321 sayfa

Bu araştırmanın amacı, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel akıl yürütme becerilerini incelemektir. Araştırma sürecinde nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Katılımcıların belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden, ölçüt örnekleme tekniği kullanılmıştır. Bu teknikle belirlenen ve araştırmaya katılmaya gönüllü olan 10 ortaöğretim matematik öğretmeni adayı araştırmanın katılımcılarını oluşturmaktadır.

Veri toplama aracının geçerlik ve güvenirliğini sağlamak için 2013-2014 güz yarıyılında 3 ortaöğretim matematik öğretmeni adayı ile pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışma verileri ve literatür incelemeleri neticesinde asıl uygulamada kullanılacak, altı problemden oluşan veri toplama aracı oluşturulmuştur. Araştırmanın uygulamaları 2013-2014 bahar yarıyılında yapılmıştır. Bu uygulamalarda her bir öğrenci ile 3 adet olmak üzere toplamda 30 adet klinik mülakat gerçekleştirilmiştir. Verilerin analizi sürecinde ilgili literatürde yer alan ve matematiksel akıl yürütme süreçlerinin analizi için kullanılan yöntem temel alınmış ve elde edilen verilerin analizinde nitel betimsel analiz kullanılmıştır.

Araştırmada elde edilen bulgular, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının karşılaştıkları problem durumları karşısında, yüzeysel düşünme yapıları sergileyerek benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme türlerini öncelikli olarak tercih ettiklerini göstermiştir. Ezber ve algoritmaya dayalı olan bu matematiksel akıl yürütme türlerine yönelik yapılan tercihler neticesinde, öğretmen adaylarının konu ile alakalı kavramsal alt yapılarını ve düşünme güçlerini bütüncül kullanamadıkları sonucuna varılmıştır. Aynı problem durumlarında yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türünü tercih eden öğretmen adaylarının ise matematiksel kavramlara daha hâkim oldukları dikkat çekmektedir. Matematiksel akıl yürütmeyi etkili kullanabilecek öğretmenlerin yetiştirilebilmesi için, lisans eğitimindeki öğrencilerin mevcut akıl yürütme durumlarını geliştirmeye yönelik ortamların oluşturulması önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Akıl Yürütme, Matematiksel Akıl Yürütme Türleri, Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adayları

ABSTRACT

DOCTORAL DISSERTATION

INVESTIGATION OF THE MATHEMATICAL REASONING SKILLS OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS

Zeynep ÇİFTCİ

2015, 321 pages

The purpose of this research is to analyze the mathematical reasoning skills students of pre-service mathematics teachers. The case study method, one of the qualitative research designs, was used in the research process. The criteria sampling technique, one of the purposive sampling methods, was used to determine the participants. 10 volunteered pre-service mathematics teachers who were determined by this technique populates the participants of this research.

A pilot study with three pre-service mathematics teachers was conducted in the 2013-2014 fall semester to ensure the validity and reliability of the data collection tool. As a result of the pilot study and literature reviews, a data collection tool which consists of six problems was formed to use in the actual practice. The practice of the research was carried out in the 2013-2014 spring semester. This practice was carried out in a total of 30 clinical interviews including 3 clinical interviews with each student. During the data analysis, the method that exists in the relevant literature and is used for mathematical reasoning processes was based and qualitative descriptive analysis was used.

The findings of the study show that pre-service mathematics teachers prefer primarily imitative reasoning types with exhibiting superficial thinking structures, when they encounters any problems. As a result of choosing these memorised and algorithmic reasoning types, it was determined that students can not use content related conceptual foundations and thinking abilities holistically. It has been noticed that the students who choose creativity reasoning in problematic situations are more confident on mathematical concepts. In order to train teachers who can effectively use mathematical reasoning, it is recommended to design environments to improve the reasoning skills of the students in undergraduate education.

Keywords: Mathematical Reasoning, Mathematical Reasoning Types, Pre-Service Mathematics Teachers

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim boyunca, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşarak yol gösteren, bu zorlu süreçte yardımını ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, sonsuz anlayış sahibi saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamın her aşamasında bana zaman ayırıp görüş ve katkılarını sunan hocalarım Doç. Dr. Enver TATAR'a, Doç. Dr. Yasin SOYLU'ya ve Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN'e teşekkürlerimi sunarım. Tez hazırlama sürecinin her aşamasında yardımlarını esirgemeyerek zorlukları aşmama katkı sağlayan değerli meslektaş ve dostlarım Arş. Gör. Aysun ÇETİN'e ve Arş. Gör. Tuba ÖZ'e teşekkürlerimi sunarım

Bugünlere ulaşmamda en büyük katkı sahibi olan, annem Sevgi BAYRAKDAR, babam Hasan BAYRAKDAR, ablam Rezan KOCATÜRK ve abim Mustafa BAYRAKDAR'a; bu kritik süreçte bana sonsuz destek olan değerli eşim Orhan ÇİFTCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TUBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Erzurum – 2015 **Zeynep ÇİFTCİ**

İÇİNDEKİLER

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

BEŞİNCİ BÖLÜM

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

KISALTMALAR DİZİNİ

MR : Ezbere Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Memorised Reasoning)

AR : Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Algorithmic Reasoning)

FAR : Bilinen Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Familiar Algorithmic Reasoning)

DAR : Sınırlandırılmış Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Delimiting Algorithmic Reasoning)

GAR : Rehber Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Guided Algorithmic Reasoning)

Person GAR : Kişi Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Person Guided Algorithmic Reasoning)

Text GAR : Doküman Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Text Guided Algorithmic Reasoning)

CR : Yaratıcılığa Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Creative Reasoning)

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Günümüz dünyasında, ülkelerin öğretim faaliyetleri, profesyonel bir örgütlenmeyle hazırlanan öğretim programlarıyla sürdürülmektedir. Tüm ülkelerdeki ilk ve orta öğretim programlarının hemen hepsinde yer alarak, tamamlayıcı öğe olan konu alanı ise hiç kuşkusuz matematiktir. Matematikle kazandırılması amaçlanan öğeler, bu konu alanını vazgeçilmez kılmaktadır. Çünkü matematik dersleriyle, temel yeteneklerin öğretilmesi, çocukların mantıklı düşünebilmelerine yardımcı olunması, onların günlük yaşam ve çalışma koşullarına hazırlanması, tüm bunların sonucunda da toplumdaki eğitimli birey sayısının arttırılması amaçlanmaktadır (Steen, 1999). Matematiğin bu amaçlara ulaşması, kendi bünyesinde barındırdığı özellikleri neticesinde kolaylaşmaktadır. Matematik, cebiri, cebirsel işlemleri, geometriyi ve daha birçok konuyu öğretirken, kendi doğası gereği özünde bulunan akıl yürütmeyi, gerekçeli düşünmeyi, keşfetmeyi, tahminde bulunmayı ve sonuçlara ulaşmayı öğretir (Umay, 2003).

Matematik eğitimi üzerine çalışan bilim insanları yaptıkları çalışmalar, araştırmalar ve uygulamalar neticesinde matematiğin odağının, sonuçtan anlama doğru kaydığını belirtmişlerdir (Kehle, 1999). Değişen dünya koşulları neticesinde bilginin farklı boyutlarına ihtiyaç duyulması, belirtilen odak kaymasının sebebi olarak gösterilebilir. Son elli yıl içinde hazırlanan öğretim programlarındaki matematik derslerinin hedeflerine bakıldığında, bahsi geçen odak kaymasını görmek mümkündür. 60'ların yeni matematik anlayışındaki kavramsal anlama 70'lerde temel yeteneklere; 80'lerin problem çözme anlayışı ise 90'larda kendini matematiksel güce bırakmıştır. Gelecek, matematiksel akıl yürütmeye aittir. Öğretim programlarında bu konunun desteklenmesi ise, matematiksel akıl yürütme anlayışının gelişmesine önemli katkı sağlamaktadır (Steen, 1999). Çünkü matematikte gerçeklere, diğer bilimlerde olduğu gibi deney ve gözlemlerle değil; matematiksel akıl yürütmelerle ulaşılır. Akıl yürütme, matematikteki tüm kuralların ve işlemlerin temelini oluşturmaktadır. Matematiği tam manasıyla öğrenme ve matematikte başarılı olmanın yolu, matematiksel akıl yürütme ve düşünmeden geçmektedir (Umay ve Kaf, 2005). Muhakeme, usavurma ya da akıl yürütme olarak adlandırılan bu süreç, bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp, akılcı bir sonuca ulaşma işidir. Bireyin olaylar karşısında ortaya koyduğu ileri düzeydeki düşüncelerin, akıl yürütme adı altında nitelendirilmesi, bu düşüncelerin bir bilgi temeline dayanması, gerekçelendirilmesi ve mantıklı yaklaşımlar içermesiyle mümkündür. Bu sebeple bir konuda muhakeme yapabilen kişi, o konu hakkında yeterli düzeyde bilgiye sahip demektir (Umay, 2003). Dolayısıyla muhakeme, analiz etmeyi, tartışmayı ve ulaşılan sonucu savunabilmeyi barındırır (Lee, 1999).

Matematiksel düşünme ve akıl yürütme, matematik başarısının önemli bir yardımcısıdır. Bu durumun farkında olan eğitim camiası da matematiksel akıl yürütmenin önemini hem ulusal hem de uluslararası öğretim programlarında ısrarla vurgulamaktadır (Başaran, 2011). Günümüz dünyasında, matematiğe değer veren, matematiksel düşünme gücü gelişmiş, matematiği modelleme ve problem çözmede kullanabilen bireylere her zamankinden daha çok ihtiyaç duyulmaktadır.Bu kapsamda, ülkemizde uygulanan lise matematik öğretim programı ile öğrencilerin; problem çözme becerilerini geliştirmeleri, matematiksel düşünme becerisi kazanmaları, matematiğin kendine has dilini ve terminolojisini doğru ve etkili bir şekilde kullanabilmeleri, matematiğe ve matematik öğrenimine değer vermelerinin sağlanması amaçlanmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013). Uluslararası pencereden bakıldığında ise okul öncesinden başlayarak ortaöğretim eğitiminin sonuna kadar olan süreçteki beş standardın içerisinde matematiksel akıl yürütme ve ispat yer almaktadır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Bu nedenle matematik eğitiminde akıl yürütme yeteneğinin geliştirilmesi önemli bir yer tutmaktadır (Umay, 2003).

Ulusal ve uluslararası öğretim programlarında önemle vurgulanan ve kazandırılması hedeflenen beceri olan matematiksel akıl yürütmeyi öğrenebilmek, bir süreç ihtiva etmektedir. Öğrenciler matematiksel akıl yürütmeyi kullandıklarında, matematiksel kavramları açıklar, geneller, iddiada bulunur ve bağlantı kurarlar. Bu özelliklerin kullanıldığı matematiksel akıl yürütme süreci ise öğretmen gibi bir rehbere ihtiyaç duyar (Brodie, 2010). Öğretim programlarıyla kazandırılması amaçlanan bu becerilerin gerçek yaşama aktarılmasında rehber olan öğretmenlerin ise lisans eğitiminde bu bilgi ve birikime sahip olacak şekilde eğitilmeleri önem kazanmaktadır (Tıraşoğlu, 2013). Yani matematik eğitimi bir bütün olarak göz önünde tutulursa, ilköğretimden yükseköğretime kadar matematik derslerinde tartışma ve akıl yürütme kültürünün yerleşmesi gerekmektedir. Bu sayede öğrencilerin matematiksel akıl yürütme yeteneklerinin gelişeceğinden söz etmek mümkün olabilir (Yankelewitz, 2009).

1.1. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu araştırmanın amacı, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının, matematiksel akıl yürütme becerilerini incelemektir.

Her alanda hızla değişen ve gelişen dünyamızın, bu değişimin üstesinden gelebilecek, kendini ve çevresini iyi tanıyan, düşünme gücünün farkında olan insanlara olan ihtiyacı da artmaktadır. Belirtilen özelliklere sahip bireyleri yetiştirebilmenin yolu ise yapıları çözümleyebilen, içindeki ilişkileri görebilen, olaylar arasında neden-sonuç ilişkisi kurabilen, kısaca muhakeme becerileri kazandırmayı hedefleyen yeni eğitim anlayışlarından geçer (Umay, 2003). İspat ve muhakeme, insanların içgüdüsel olarak sahip oldukları birer yetenektir. Ancak, doğru stratejilerin kullanılmasıyla gelişirler. Eğer yanlış stratejiye maruz kalırlarsa, doğuştan sahip olunan bu yetenek ortadan kalkar. Süreç sonunda da ezberleme yolunu takip eden, neden sonuç zincirini oluşturamayan bireyler oluşur. Burada bahsettiğimiz strateji kavramı ispat ve muhakeme yapısının gelişimiyle ilgili öğretim programlarıdır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Belirtilen durumun farkında olan eğitim camiası da son yıllarda öğretim programlarını bu doğrultuda geliştirmişlerdir.

Matematikte akıl yürütme, tanımlamalar ve varsayımların temeli üzerine mantıksal sonuçlar çıkarabilmeyi içererek, bir şeyin nasıl değil, aynı zamanda niçin çalıştığını de düşünmektir. Kısacası matematiksel akıl yürütme, öğrencilerin anlamlı yollarla matematiği kullanmalarını ve bunun hakkında düşünmelerini sağlar. Öğretim programlarında matematiksel akıl yürütme üzerine belirtilen stratejiler ile öğrenciler arasında kurulacak bağ ise matematik öğretmenleriyle sağlanır. Öğretmene düşen görev, bu tür öğrenme ortamlarını oluşturup; öğrencilerin matematiksel muhakeme becerilerini geliştirmek olacaktır. Ancak öğretmenlerdeki matematiksel akıl yürütme becerilerine dair eksikliğin varlığı, derslerde bu becerinin kullanım sıklığını da düşürecektir. Bu nedenle öğretmen yetiştiren programlarda ispat ve akıl yürütme becerisi kazandırabilmek oldukça önem arz etmektedir (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006).

Her bireyin farklı bir düşünme yapısı, ona daha makul gelen farklı bir düşünme stratejisi olduğu gibi matematiksel akıl yürütmede bireysel bir süreçtir. Bu süreçte etkili akıl yürütmeler yapabilmek ise karşılaşılan durumla doğrudan ilişkilidir. Etkili ve değişik akıl yürütme yollarının ortaya çıkmasının önkoşulu, farklı çözüm yollarını bünyesinde barındıran ve iyi yapılandırılmış problem durumlarının mevcut olmasıdır. Bu aşamadan sonra da öğrencilerin düşüncelerini ortaya koyabileceği, iddialarını kanıtlayabileceği bir tartışma ortamının sağlanmasıdır. Bireylerin matematiksel akıl yürütme yeteneklerinin ne yönde ilerlediğini belirlemek istiyorsak öncelikli olarak göze alacağımız durum, onların mevcut akıl yürütme yollarıyla olaylar arasındaki geçişleri ve bağlantıları nasıl kurduklarını keşfetmektir (Brodie, 2010). Oldukça karmaşık olan bu düşünce sistemi içerisinde yer alan matematiksel akıl yürütmelerin karakterize edilebilmesi, bu karmaşıklığı azaltacak uygun yolları bulmakla mümkündür (Lithner, 2006).

İnsanın doğuştan kazandığı temel bir yetenek olarak kabul edilen akıl yürütme, uygun ortamlar, şartlar ve programlar dahilinde geliştirilebilir. Böylece çok yönlü düşünüp etkili akıl yürütebilen birey sayısı arttırılarak, günlük hayatın birçok alanında bu tür bireylere duyulan ihtiyaç karşılanabilir. Akıl yürütme yeteneğinin, matematiksel kavramlar, konular kısacası matematiksel dil ile bütünleşik olarak kullanılması ise matematiksel akıl yürütmeyi oluşturmaktadır. Öğretim programlarının vazgeçilmez konu alanı olan matematik dersinin etkili bir şekilde öğretiminde matematiksel akıl yürütme süreçleri son yıllarda oldukça önem kazanmıştır. Uluslararası ve ulusal matematik öğretim programlarında, bir süreç becerisi olarak kazandırılması hedeflenen matematiksel akıl yürütme becerisinin öğrencilere aktarımı ise öğretmenlerle sağlanmaktadır. Matematiksel akıl yürütmeyi etkili bir şekilde kullanabilen öğretmen, bu yeteneğin gelişmesini sağlayacak öğrenme ortamlarını da oluşturabilir. Öğretmenlerin etkili matematiksel akıl yürütme becerisini kazanıp bu beceriyi geliştirebilecekleri ortam ise lisans eğitimi sürecidir. Eğitim fakültelerinde lisans eğitimine devam eden öğrencilere ait matematiksel akıl yürütme becerilerinin karakterize edilerek ortaya çıkarılması; lisans eğitimi sürecinin bu doğrultuda geliştirilmesine imkân sağlayacaktır.

Ülkemizde gerçekleştirilen matematiksel akıl yürütme çalışmaları incelendiğinde bu çalışmaların daha çok nicel temeller üzerine kurulduğu görülmektedir (Duatepe, Akkuş-Çıkla ve Kayhan, 2005; Yeşildere ve Türnüklü, 2007; Küpçü, 2008; Pilten, 2008; Apaydın ve Taş, 2010; Çoban, 2010; Işıksal, Koç ve Osmanoğlu, 2010; Başaran, 2011; Karakoca, 2011; Aladağ ve Artut, 2012; Karatoprak, 2014). Bu çerçeveden bakıldığında nitel yöntemler kullanılarak alanda yapılan derinlemesine incelemeler sayesinde özellikle matematiksel akıl yürütme becerisine yönelik durumların detaylı bir şekilde ortaya çıkarılması sağlanacaktır. Araştırmanın katılımcıları olarak ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarına yer verilmesi neticesinde, bu adayların belirtilen beceriye ne ölçüde sahip olduklarına, hangi tür akıl yürütme becerilerini etkin kullandıklarına, nasıl bir akıl yürütme süreci sergilediklerine ve süreçte yaşanılan aksaklıklara ışık tutulmuş olacaktır. Elde edilen sonuçlar, diğer üniversitelerdeki öğrencilerin matematiksel akıl yürütme süreçlerinin incelenmesine de dayanak oluşturacaktır. Tüm bu değişkenler bütüncül olarak ele alındığında ise özellikle öğretmenlerin yetiştirildiği lisans programlarının, matematiksel akıl yürütme becerisi kazandırmaya yönelik yeniden planlanmasına zemin hazırlanacaktır. Belirtilen sebeplerden dolayı, çalışma önem arz etmektedir.

1.2. Problem Cümlesi

Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının, matematiksel akıl yürütme becerileri ne düzeydedir?

Bu çerçevede araştırma kapsamında aşağıdaki araştırma sorularına cevap bulunmaya çalışılmıştır.

1.3. Alt Problemler

1. Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme becerileri ne düzeydedir?
2. Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme becerileri ne düzeydedir?
3. Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme becerileri ne düzeydedir?

1.4. Araştırmanın Varsayımları

1. Araştırmanın katılımcıları arasında olumlu ya da olumsuz bir etkileşimin olmadığı varsayılmıştır.
2. Araştırmanın katılımcılarının uygulanan problemleri, matematiksel akıl yürütme becerilerine ulaşabilecek şekilde doğru ve içten yanıtladıkları varsayılmıştır.
3. Veri toplama aracının oluşturulması sürecinde, görüş alınan uzmanların değerlendirmelerinin yeterli olduğu varsayılmıştır.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

1. Verilerin analizi sürecinde esas alınan akıl yürütme becerisi türleri, literatürde verilen kaynaklar ile sınırlıdır.
2. Araştırmadan elde edilen bulgular, 2013-2014 eğitim-öğretim yılı ile sınırlıdır.

1.4. Tanımlar

Matematiksel akıl yürütme: Matematiksel bilgileri ve matematiksel yapıları kullanarak iddialar oluşturup yeni bir yapılandırma ortaya çıkarmayı temel alan düşünme sürecidir (Ball ve Bass, 2003).

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Kuramsal Çerçeve

Bu bölümde matematik ve matematiksel düşünme, matematiksel akıl yürütme ve matematiksel akıl yürütme yaklaşımları hakkında kuramsal bilgilere yer verilmiştir.

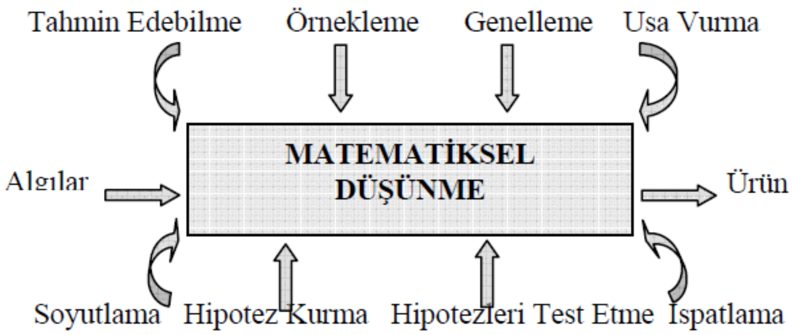
2.1.1. Matematik ve matematiksel düşünme

Eğitim öğretim süreçlerimizin başlamasıyla isim olarak farkına vardığımız, oysaki varoluşumuzdan itibaren hem canlılar hem de evrenin tüm yapılarında kendini gösteren matematik, bu yönüyle bir ders türü olmaktan çok ötedir.

Önemi, herkes tarafından kabul edilen matematiğin ne olduğu sorusuna ise dünden bugüne kadar geçen zaman dilimi içerisinde yetkili beyinler tarafından net bir açıklama getirilememiştir (Yıldırım, 2012). Ancak içinde bulunduğumuz çağdaki birçok bilim insanı kendi bakış açısı ile matematiğin farklı boyutlarını ele alarak farklı tanımlamalarda bulunmuşlardır (Tıraşoğlu, 2013). Courant ve Robbins (1996), insan beynindeki ifadesiyle matematiği, mükemmel bir düzenin, derinlemesine bir düşüncenin ve aktifliğin yansıtıcısı şeklinde görmektedir. Matematik; kimilerine göre bir zekâ oyunu; kimilerine göre sayıları bünyesinde barındıran soyut bir bilim; kimilerine göre günlük yaşamda kullanılabilecek yararlı bir hesaplama tekniği; matematikçilerin bakış açılarına göre ise bizi doğruya götüren bir düşünme yöntemidir (Yıldırım, 2012). Matematiği soyut kavramlar yığını olarak tanımlamak ne kadar yanlışsa; sadece somut kavramlardan, günlük ihtiyaçlardan ve deneysel gözlemlerden ortaya çıkmış bir yapı olarak tanımlamakta o kadar yanlıştır (Baki, 2008). Çünkü matematik, özünde bazı sembollerin ve sayıların oluşturduğu bir dil olarak bilinse de, aslında birçok bilgi ve düşünme süreçlerini içinde barındıran bir disiplin, bir bilim ve bir sistemdir (Çoban, 2010).

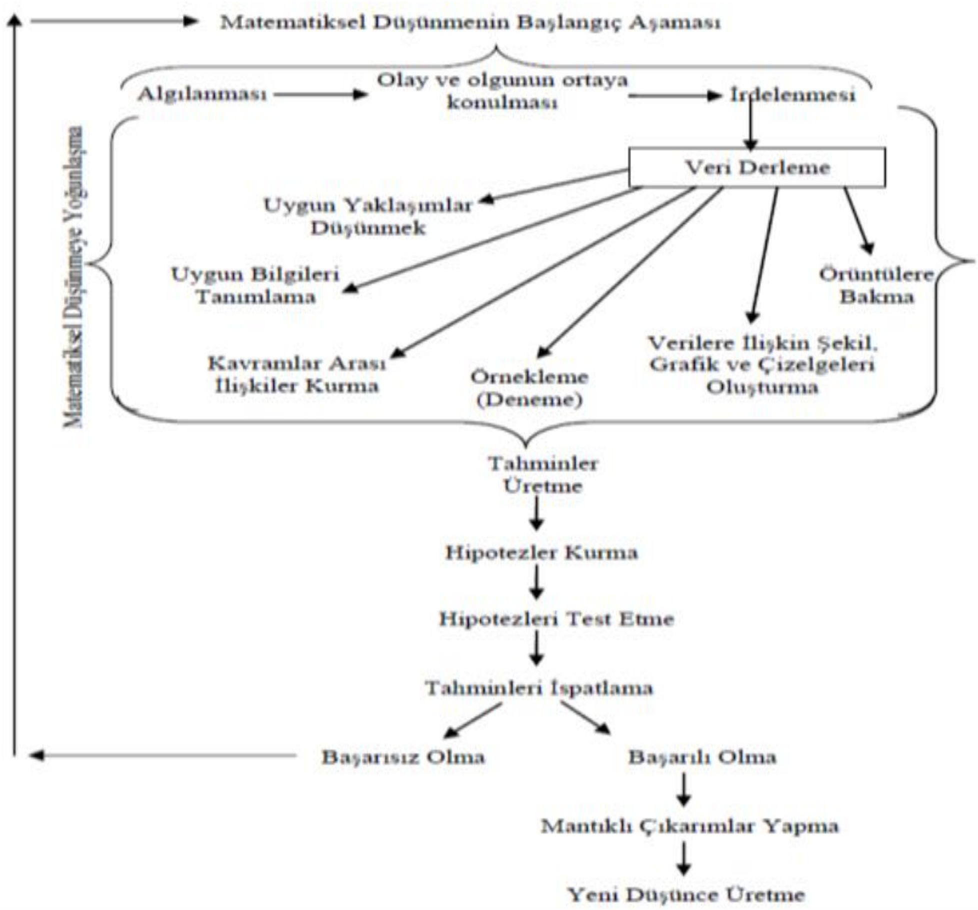
Her birinde farklı bir özelliğine değinilen matematik kavramı için geliştirilen bunca tanım, onun çok yönlü olmasının bir sonucudur. Adını ‘matematik’ olarak bilmesek de aslında doğduğumuzdan itibaren yaşantımızın bir parçası olan matematiği sezgilerimizle öğreniriz. Tıpkı anadil öğrenme sürecinde kelimeleri ard arda sıraladığımız gibi, düşünürken de matematiksel pek çok kavramı sıralayarak bir düşünce zinciri oluşturur ve problemlere çözüm buluruz (Umay, 1996). O halde matematik, gerçeklerin basitçe bir araya toplanması değil düşünmenin bir yoludur (Kehle, 1999).

İnsan zekâsını ve onun ürünü olan düşünmeyi geliştiren en önemli etken matematiktir (Sevgen, 2002). Düşünme, "tasarımlardan ayrı olarak aklın bağımsız ve kendine özgü durumu" veya "karşılaştırmalar yapma, ayırma, birleştirme, bağlantıları ve biçimleri kavrama yetisi" şeklinde tanımlanabilir (Türk Dil Kurumu [TDK], 2015). Yaşamı anlamlı bir şekilde sürdürebilmek amacıyla karşılaşılan problemlere etkili çözümler bulabilmek, hipotezler kurmak ve onları denemek, geleceği yönlendirecek sonuçlar çıkarmak ve bilgiler üretmek ise düşünce üretimini gerektirir. İşte bu düşünmeler matematiksel düşünme olarak adlandırılır. Matematiksel düşünme de birey, önceden edindiği bilgileri kullanarak soyut, tahmin, genelleme, hipotez kurup test etme, usa vurma, ispat ve betimleme yollarını kullanarak yeni bilgiye ulaşır. Bu özelliği ile diğer düşünme türlerinden ayrılan matematiksel düşünmenin işleyişini gösteren şema Şekil 2.1'de sunulmuştur (Alkan ve Bukova Güzel, 2005).



Şekil 2.1. Matematiksel düşüncenin işleyiş yapısı (Alkan ve Bukova Güzel, 2005'ten alınmıştır)

Birden fazla kavramı bünyesinde harmanlayarak ortaya çıkan matematiksel düşünceyi diğer düşüncelerden ayıran bazı temel farklar da vardır. Bu farklardan en önemlisi sonucun kesinlik içermesidir. Çünkü matematikte tanımlanan gerçekler, kişi ya da konuma göre değişen esnek veya birden fazla olamaz. Kısacası matematiksel düşünce problemlerin çözümünde sağlam ve objektif bir bakış açısı sağlar (Umay, 1996) Matematiksel düşünce ile elde edilen sonuç tek olsa da gidiş yolunda farklılıklar olması muhtemeldir. Çünkü matematiksel düşünmede birey, iç ve dış dünyayla kurduğu bağlantıları, matematiksel gerçeklere dair anlamayı ve düşünmeyi bireysel olarak tercih ettiği farklı yollarla gerçekleştirir (Ferri, 2003). Bu farklı bireysel yolların temelinde ise matematiksel düşüncede kullanılan üç farklı yaklaşım vardır. Görsel yaklaşım eğilimliler, daha çok resimler, şekiller, grafikleri kullanarak; analitik yaklaşım eğilimliler daha çok sembolik olarak düşünerek; kavramsal yaklaşım eğilimliler ise sınıflandırma ve soyut düşünme ile matematiksel düşünce sergilerler (Burton, 1999, 95). Matematiksel düşüncenin belirtilen yaklaşımlarla gelişmesi ve sergilenmesinde birey bu üç yaklaşımı tek olarak kullanabildiği gibi üçünü birden de kullanabilir. Alkan ve Bukova Güzel (2005), bu üç yaklaşımı göz önünde bulundurarak matematiksel düşüncenin oluşum sürecini Şekil 2.2. ile şematik olarak ifade etmişlerdir. İfade edilen sürece göre matematiksel düşünceler tıpkı bir sürekli fonksiyon gibi arada boşluk olmadan devamlı üretilir. Üretilen her yeni düşünce diğer bir düşünce için başlangıç olarak kabul edilir.



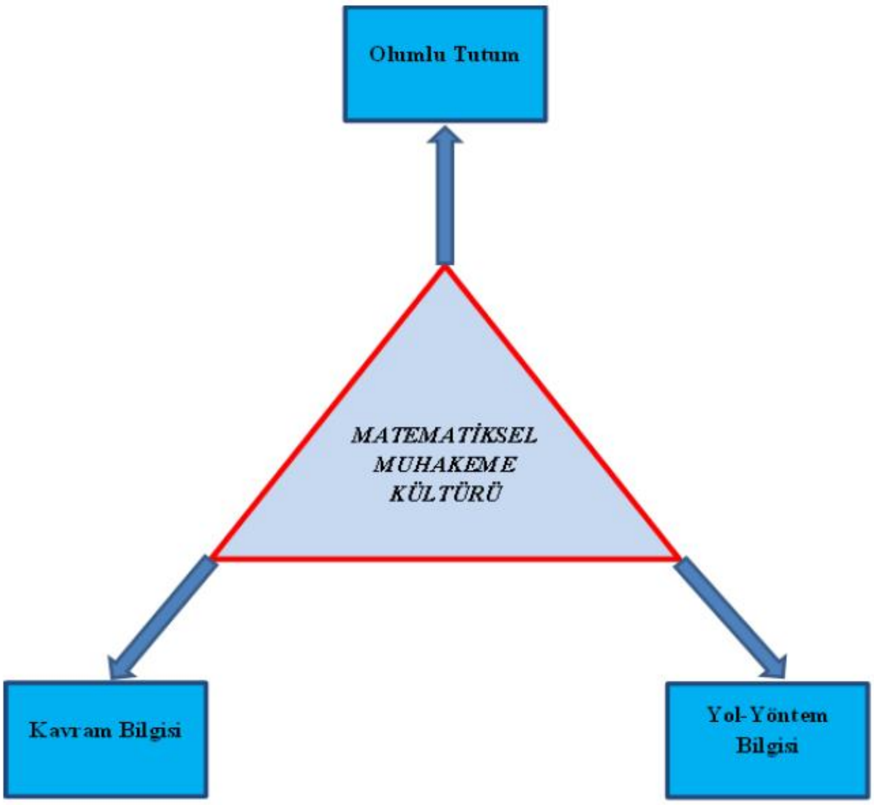
Şekil 2.2. Matematiksel düşüncenin oluşum süreci (Alkan ve Bukova Güzel, 2005'ten alınmıştır.)

2.1.2. Matematiksel akıl yürütme (Muhakeme)

Akıl yürütme, verilen bir görevde sonuca ulaşabilmek veya bir iddia üretebilmek için takip edilen düşünme yoludur. Başka bir açıdan bakıldığında akıl yürütme, bir düşünme süreci, bu sürecin bir ürünü veya bunların her ikisi olarak da görülebilir (Lithner, 2008). Akıl yürüten birey planlı, programlı ve mantıklı bir şekilde düşünüp, problemi "Neden" ve "Nasıl" soruları etrafında anlamlandırarak üst düzey düşünebilmektedir (Erdem, 2011). Yaratılışı gereği sahip olduğu düşünebilme özelliğiyle diğer canlılardan ayrılan insan, tüm etmenleri göz önüne alıp, düşünce gücünü kullanarak akılcı bir sonuca ulaşma işi olan akıl yürütme sayesinde, yeni karşılaştığı durumları tüm boyutlarıyla inceler, keşfeder, mantıklı tahminlerde varsayımlarda bulunur, düşüncelerini gerekçelendirir, bazı sonuçlara ulaşarak bu sonuçları açıklayabilir (Umay, 2003). Bu süreçte etkili akıl yürütmeler yapabilmek için fikirlerin sağlam bir zemine oturtulması gerekmektedir. Sağlam zeminin oluşu ise ortaya atılan düşüncelerin gerekçelendirilebilmesiyle mümkündür. Çünkü matematiksel gerekçelendirme, kabul edileni veya mantıklı geleni öğrenmeyi ve açıklamayı barındırır. Yani akıl yürütmenin özünde, "Eğer…, ise…", "Çünkü…" şeklindeki gerekçe ifadelerini kullanarak varsayımlarda bulunma ve sonuçlara ulaşma vardır (Mason, 2001). Özetlemek gerekirse muhakeme sonuçlardan, yargılardan, gerçeklerden veya önermelerden bir sonuç çıkararak bu önermeleri, yargıları karara bağlamak ve onlardan emin olmak demektir (Altıparmak ve Öziş, 2005)

Muhakemenin en çok kullanıldığı alanlardan birincisi ise hiç kuşkusuz matematiktir. Çünkü matematik bünyesinde barındırdığı geometri, cebir, olasılık, sayılar ve daha pek çok konuyu öğretirken; gerekçeli düşünme, örüntüler keşfetme, tahminde bulunma, akıl yürütme ve sonuca ulaşma gibi temel becerileri de öğretir (Umay, 2003). Epistemolojik açıdan bakıldığında, akıl yürütme matematiğin yapı taşıdır (Steen, 1999). Dolayısıyla muhakeme, matematikte var olan kuralların ve işlemlerin öğrenilmesinde, her birey tarafından ihtiyaç duyulan temel bir öğedir (Erdem, 2015).

Matematiksel akıl yürütme, matematiksel nesneleri kullanarak yine bu nesneler hakkında muhakeme yapabilmektir (Brodie, 2010). Yani eldeki mevcut bilgilerden hareketle matematiğin tanım, sembol gibi kendine özgü araçlarını, tümdengelim ve tümevarım gibi düşünme tekniklerini kullanarak yeni bilgiler elde etme sürecidir (MEB, 2013). Düşünebilme, yorum yapabilme gibi temel yeteneklere doğuştan sahip olan insanoğlu için, matematiksel akıl yürütme becerisini de bir temel yetenek olarak değerlendirmek mümkündür (Ball ve Bass, 2003). Bu temel yeteneğin gelişmesi ve güçlenmesinde, bireysel kültür önemli bir yer tutmaktadır. Çünkü matematiksel muhakeme, bireysel bir kültürdür ve kişinin bilgi birikimi, olaylara bakış açısı gibi birçok faktörden etkilenir. Matematiğe karşı oluşturulan olumlu tutumdan yola çıkılarak, bu olumlu tutum ve istek neticesinde gerekli kavram ve yol-yöntem bilgisine sahip olunması durumda, güçlü bir matematiksel muhakeme kültürünün oluşması kaçınılmaz olur (Erdem, 2015). Matematiksel muhakeme kültürünün oluşmasını sağlayan etmenlerin Erdem (2015) tarafından hazırlanan şematik gösterimi Şekil 2.3. ile sunulmuştur.



Şekil 2.3. Matematiksel muhakeme kültürünün oluşmasını sağlayan etmenler (Erdem, 2015'ten alınmıştır.)

Akıl yürütme ve ispat yetenekleri doğuştan sahip olunan içgüdüsel bir yetenektir. Ancak bu yetenekler, uygun ortam ve stratejilerin oluşturulması halinde gelişerek etkili bir hal alabilir. Bahsi geçen bu uygun ortam ve stratejiler ise ilkokul, ortaokul ve liselerde kullanılan öğretim programları ile oluşturulur (Altıparmak ve Öziş, 2005). Matematik eğitiminin amacı öğrencilerin matematiksel akıl yürütme, matematiksel düşünce üretebilme ve düşüncelerini savunmada kendilerine olan güveni arttırabilmeyi sağlamaktır (MEB, 2013). Bu sebeple özellikle son yıllarda değişen dünya şartlarına ayak uydurabilmek için ulusal ve uluslararası matematik öğretim programlarında reformlara gidilerek, akıl yürütme becerisinin önemi ve bu beceriyi kazandırma yolları ısrarla vurgulanmaktadır.

NCTM tarafından oluşturulan standartlarda matematiksel akıl yürütme ve ispatın önemi yer almaktadır. 12 yıllık temel öğretim sürecinde öğrencilere kazandırılması hedeflenen beceriler ise aşağıdaki şekilde sıralanmıştır:

- ✓ İspat ve muhakemeyi matematiğin temel yapı taşlarından biri olarak tanımlama
- ✓ Matematiksel varsayımlar oluşturma ve araştırma
- ✓ Matematiksel kanıtlar geliştirme ve bunları değerlendirme
- ✓ Çeşitli ispat ve muhakeme türlerini seçebilme ve kullanabilme (NCTM, 2003)

Ülkemizde MEB tarafından 2013 yılında güncelleştirilen Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programında yer alan ve matematiksel kavramların kazandırılması yanında, matematiği etkili öğrenmeye ve kullanmaya yönelik geliştirilmesi hedeflenen temel beceriler aşağıda sunulmuştur.

- ✓ Problem Çözme
- ✓ Matematiksel Süreç Becerileri:
    - ▪ İletişim
    - ▪ Akıl Yürütme
    - ▪ İlişkilendirme
- ✓ Duyuşsal Beceriler
- ✓ Psikomotor beceriler
- ✓ Bilgi ve İletişim Teknolojileri (BİT) (MEB, 2013)

Matematiksel süreç becerileri içerisinde gösterilerek kazandırılması hedeflenen akıl yürütme becerisi için okul ve okul dışı hayatı kolaylaştırdığı, bu sebeple de bu beceriyi geliştirmek için gerekli ortamların hazırlanmasının önemi programda vurgulanmıştır. Öğrencilere akıl yürütme becerilerinin kazandırılması için dikkate alınması gereken bazı göstergeler ise aşağıdaki şekilde sıralanmıştır:

- ✓ Çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma
- ✓ Mantıklı genellemeler ve çıkarımlarda bulunma
- ✓ Bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanma
- ✓ Yuvarlama, uygun sayıları gruplandırma ilk veya son basamakları kullanma gibi stratejileri ve kendi geliştirdiği stratejileri kullanarak işlem ve ölçümlerin sonucuna dair tahminlerde bulunma
- ✓ Belirli bir referans noktasını dikkate alarak ölçmeye ilişkin tahminde bulunma (MEB, 2013)

Ortaöğretim seviyesinde kullanılmak üzere yine MEB tarafından 2013 yılında hazırlanan, Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında da akıl yürütme becerisine yer verilmiştir. Matematik öğretim programı ile geliştirilmesi hedeflenen matematiksel beceri ve yeterlilikler aşağıda sunulmuştur:

- ✓ Matematiksel modelleme ve problem çözme
- ✓ Matematiksel süreç becerileri: Matematiksel dil ve terminolojiyi doğru ve etkin kullanma (matematiksel iletişim), matematiksel akıl yürütme ve ispat yapma, matematiğin kendi içindeki konular/kavramlar arasında ve başka alanlarla ilişkilendirme
- ✓ Matematiğe ve öğrenimine değer verme
- ✓ Psikomotor becerilerde gelişim sağlama
- ✓ Bilgi ve iletişim teknolojilerini (BİT) yerinde ve etkin kullanma (MEB, 2013)

Ortaokul matematik öğretim programında olduğu gibi ortaöğretim matematik öğretim programında da matematiksel akıl yürütme becerisi, kazandırılması hedeflenen süreç becerileri arasında yer almıştır. Bu becerinin etkili bir şekilde kazandırılması için ise öğrencilerde aşağıda sunulan davranışların geliştirilmesi hedeflenmiştir:

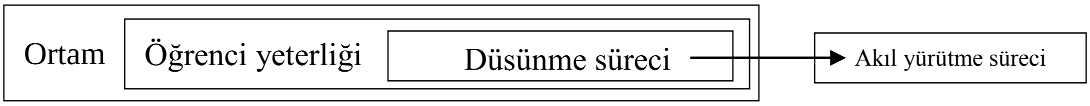
- ✓ Matematikte ve günlük yaşantısında mantığa dayalı genellemeler ve çıkarımlarda bulunma
- ✓ Matematikteki ve matematik dışındaki çıkarımlarının, duygu ve düşüncelerinin doğruluğunu/geçerliliğini savunma

- ✓ Düşüncelerini açıklarken matematiksel modeller, kurallar ve ilişkileri kullanma
- ✓ Bir (matematiksel) durumu analiz ederken matematiksel ilişkileri kullanma
- ✓ Matematikteki ilişkileri açıklama
- ✓ Farklı stratejiler kullanarak kestirimlerde bulunma ve bunu mantıksal gerekçelerle savunma (örneğin fonksiyonun türevinin grafiğinden fonksiyonun grafiğini tahmin etme)
- ✓ Genel ilişkileri özel durumlara uygulayabilme
- ✓ Modelleri, önermeleri, özellikleri ve ilişkileri kullanarak yaptığı matematiksel çıkarımı açıklayabilme
- ✓ Matematiksel doğrulama sürecinde tümevarımı ve tümdengelimi etkin olarak kullanabilme
- ✓ Matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme (MEB, 2013)

Çoban (2010), TIMMS, NCTM, MEB ve Kaliforniya okullarındaki matematik programlarında yer alan ve öğrencilere matematiksel akıl yürütme ile kazandırılması hedeflenen kavramları bir potada eriterek aşağıdaki şekilde sıralamıştır:

- ✓ Matematiksel örüntüleri tanıma ve kullanma
- ✓ Aynı verinin farklı kullanımlarını ve gösterimlerini tanıma
- ✓ Tahmin etme
- ✓ Çözüm için mantıklı tartışmalar geliştirme
- ✓ Çözüm yolunun ve sonucun doğruluğuna karar verme
- ✓ Genelleme yapma
- ✓ Rutin olmayan problemleri çözme

Lithner (2008), akıl yürütmeyi etkileyen faktörleri Şekil 2.4'te sunulduğu gibi şematik bir şekilde göstermiştir. Belirtmiş olduğu bu yapıya göre bireyin ortaya koyduğu akıl yürütmeler, düşünme süreci, öğrenci yeterlilikleri ve içinde bulunduğu sosyokültürel ortam tarafından etkilenmektedir. Akıl yürütme türlerinin oluşumu düşünme süreci ile şekillenir. Yani düşünme süreçleri, akıl yürütme türlerinin oluşturucusudur. Belirtilen bu gösterim ile düşünce ve akıl yürütmenin birbirlerine göre konumları da daha netleşmektedir. Etkileşimli ilerleyen bu yapıda yer alan düşünme süreçleri de öğrencinin sahip olduğu yeterlikler ışığında kendini göstermektedir. Öğrenci yeterliği ise sürekli etkileşim içerisinde bulunduğu sosyokültürel çevre ile şekillenir. Birbiri içine geçmiş şekilde meydana gelen bu girift yapı, ortaya çıkan akıl yürütmelerin alt yapısını oluşturmaktadır.

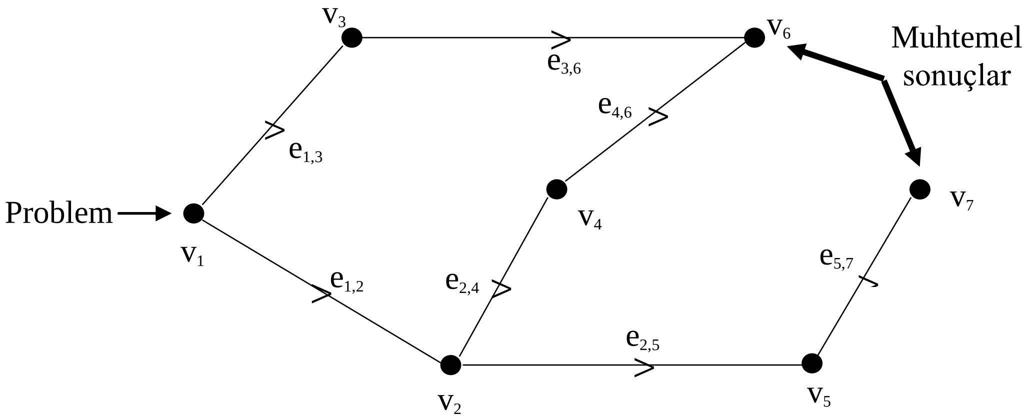


Şekil 2.4. Akıl yürütmeleri etkileyen faktörler (Lithner, 2008'den alınmıştır)

Lithner (2008), bir problem durumu karşısında sergilenen matematiksel akıl yürütme sürecinin dört adımdan meydana geldiğini belirtmiştir. Bu adımlar:

1. Problem durumu ile karşılaşma
2. Bir strateji seçimi yapma
3. Seçilen stratejinin uygulanması
4. Bir sonuca ulaşma

şeklindedir. Birinci adımda problem durumu ifade edilir ve henüz nasıl bir çözüm yolu takip edileceği belli değildir. İkinci adımda, küçük çözüm yollarından genel uygulamalara kadar uzanan strateji yelpazesinin içerisinden yapılandırma, tahmin, keşfetme gibi yöntemlerle harmanlanan strateji seçimi yapılır. Seçilen bu strateji bu probleme çözüm olur mu şeklinde düşünülerek kestirimsel tartışma ile desteklenir. Üçüncü adımda; seçilen stratejinin probleme nasıl bir çözüm oluşturduğu doğrulayıcı tartışma ile desteklenir. Dördüncü ve son adımda ise artık probleme bir çözüm bulunmuş ve akıl yürütme süreci tamamlanmıştır. Belirtilen bu adımların Lithner (2008) tarafından benzer görsel bir sunumu Şekil 2.5. te sunulmuştur. Şemada köşelerde bulunan v_n'ler problem durumuyla karşılaşma ve o an ki bilgiyi temsil etmektedir. Öğrenci v_n'ler boyunca strateji seçimi yapar. Stratejinin uygulaması ise $e_{n,m}$ ile temsil edilmiştir. Burada v_n hâlihazırda var olan bilgi iken v_m ise stratejisi neticesinde oluşan yeni bilgiyi temsil etmektedir. Probleme kısmen çözüm bulunmuşsa benzer yol tekrar takip edilerek esas çözüme ulaşılır. İşte köşeler arasındaki bu hareketlilik akıl yürütme süreci olarak adlandırılır.

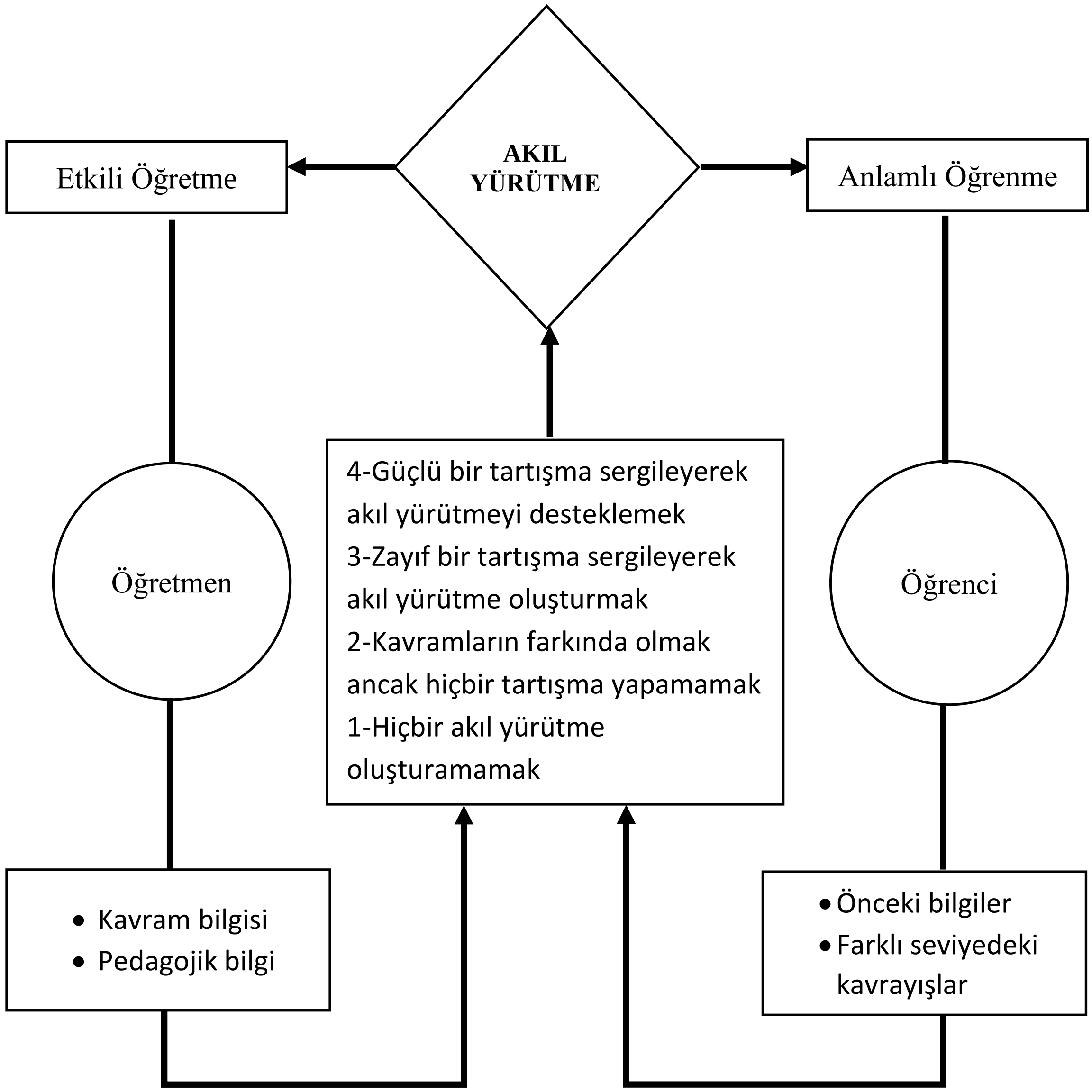


Şekil 2.5. Akıl yürütme sürecinin gerçekleşme aşamaları (Lithner, 2008'den alınmıştır)

Eğitim-öğretim çevresinde asıl amaçlanan ve olması istenilen durum; öğretmenlerin, anlamlı öğretmeler sağlatırken, öğrencilerin de matematikte yeterli olabilecek bir öğrenme gerçekleştirmesidir. Çünkü matematiği anlamlı bir şekilde öğrenen öğrenci, sahip olduğu bu bilgileri esnek bir şekilde kullanarak birbirleriyle bütünleştirebilir ve yeni çözüm yolları inşa edebilir. Aksi takdirde öğrenci, anlamlı öğrenmeyi gerçekleştirmemiştir. Sahip olduğu bilgileri ve durumları ezberleyen öğrenciler bu bilgileri nerede ve nasıl kullanacakları konusunda tereddüt yaşayabilirler. Yani anlamlı öğrenmeler öğrenciyi matematikte özgürleştirirken çok daha etkili öğrenmeler sağlatabilir (Castro, 2004). Oluşan bu etkili öğrenme çevresi de akıl yürütmenin kalitesini arttıracaktır. Çünkü akıl yürütmeyi etkileyen faktörler arasında öğrenci yeterliği önemli yer tutmaktadır. Yumus (2001), akıl yürütme sürecini öğretmen ve öğrenci ile birlikte ele alarak akıl yürütmenin seviyelerini belirlemiştir (Akt. Castro, 2004). Öğretmenlerin kavramsal ve pedagojik bilgileri ile öğrencilerin var olan bilgi birikimi ve çeşitli seviyelerdeki anlama durumlarının birleşmesiyle ortaya dört farklı akıl yürütme seviyesinin çıktığını belirtmiştir. Bu seviyeler;

1. Hiçbir akıl yürütme oluşturamamak
2. Kavramların farkında olmak ancak hiçbir tartışma sergileyememek
3. Zayıf bir tartışma sergileyerek akıl yürütme oluşturmak
4. Güçlü bir tartışma sergileyerek akıl yürütmeyi desteklemek

şeklindedir. Burada en son seviye de yapılmış olan akıl yürütme ile öğretmenler etkili öğretmeyi gerçekleştirmiş; öğrenciler ise anlamlı öğrenmeler sağlamış olurlar. Belirtilen durumun şematik gösterimi Şekil 2.6. ile sunulmuştur (Yumus, 2001, akt. Castro, 2004).

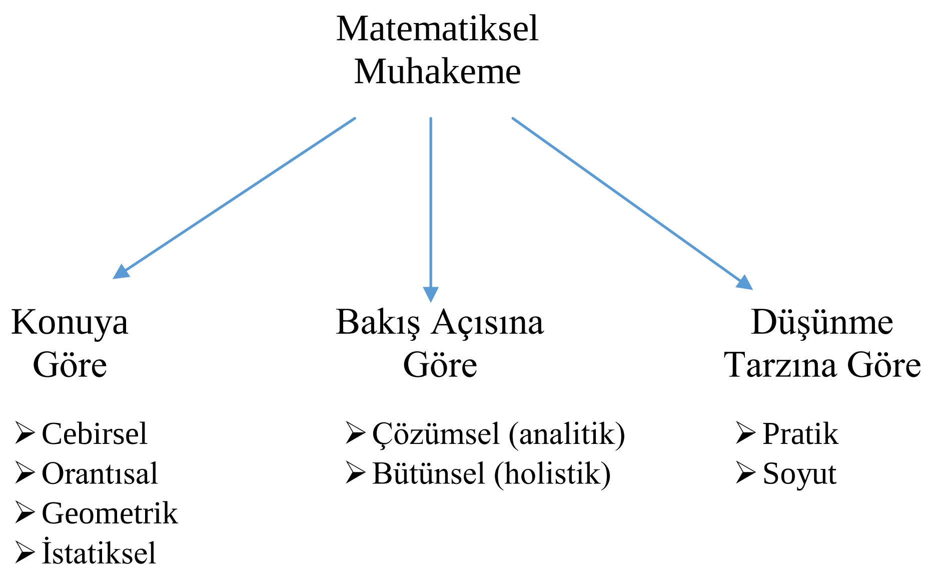


Şekil 2.6. Öğretme-öğrenme sürecinde matematiksel akıl yürütmeyi etkileyen faktörler (Castro, 2004'ten alınmıştır)

2.1.3. Matematiksel akıl yürütme yaklaşımları

Bir düşünme işi olan matematiksel akıl yürütme yaklaşımlarını en genel olarak ikiye ayırmak mümkündür. Bu sınıflandırmada birincisi, tümevarıma dayalı akıl yürütmedir. Tümevarıma dayalı akıl yürütme ile tek tek olaylardan kısacası özelden genele gitme söz konusudur. İkinci sınıflandırma yaklaşımı ise tümdengelime dayalı akıl yürütmedir. Bu sınıflandırma türünde ise birden fazla öncül kullanılarak sonuca varılır yani genelden özele varan bir yol takip edilir.

Matematiksel akıl yürütme yaklaşımlarını sınıflandırmak; bu sınıflara damga vuran özelliğe karar vererek isimlendirmek, bireysel özelliklere hatta o sınıflandırmayı yapan kişinin olaya bakış açısına göre bile değişmektedir (Umay, 2003). Akkuş Çıkla ve Duatepe (2002), matematiksel akıl yürütme yaklaşımına farklı bir sınıflandırma oluşturarak matematiksel muhakemeyi, konu temelli, bakış açısı temelli ve düşünme tarzı temelli olacak şekilde üç sınıfa ayırmış, sonrasında da bu sınıfların alt kategorilerini belirlemişlerdir. Konu temelli muhakeme yaklaşımı, cebirsel, orantısal, geometrik ve istatistiksel; bakış açısı temelli muhakeme yaklaşımı, çözümsel (analitik), bütünsel (holistik); düşünme tarzı temelli muhakeme yaklaşımı ise pratik ve soyut şeklinde kategorilendirilmiştir. Oluşturulan bu sınıflandırmanın görsel hali Şekil 2.7 da sunulmuştur.



Şekil 2.7. Matematiksel muhakeme yaklaşımları(Akkuş Çıkla ve Duatepe, 2002)

Matematiksel akıl yürütme yaklaşımlarına bir sınıflandırma da Lithner (2008) tarafından oluşturulmuştur. Öğrenme ve başarı güçlüklerinin arkasında yatan sebepleri ve akıl yürütme süreçlerini incelediği birçok araştırması (Lithner, 2000b, 2003, 2004) neticesinde, akıl yürütmeleri belli şartları sağlamasına göre sınıflayarak daha anlamlı hale getirmeyi amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda matematiksel akıl yürütmeleri temelde iki sınıfa ayırmıştır. Birincisi, önceki bilgileri hatırlamanın veya tekrarlamanın yoğunlukla kullanıldığı benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme; ikincisi ise derinlemesine düşünce süreçlerinin yoğunlukla kullanıldığı yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütmedir.

2.1.3.1. Benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme (Imitative Reasoning)

Bu akıl yürütme türünde, öğrenci bir problemin çözümünü gerçekleştireceği zaman, probleme ait çözüm yolunun ya birebir aynısını ya da çözüm yolunda kullanılacak algoritmayı hatırlayarak sonuca ulaşma esas alınır. Bu akıl yürütmenin iki temel alt sınıflandırması vardır. Bunlar ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme ve algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme şeklindedir (Lithner, 2008).

2.1.3.1.1. Ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme (Memorised Reasoning (MR))

Yapılan akıl yürütmenin bu sınıflandırmaya ait olabilmesi için aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekmektedir:

1. Strateji seçiminde bir çözüm yolunun tamamı hatırlanmalıdır.
2. Stratejinin uygulanması, sadece bu çözüm yolunu yazmayı içermelidir.

Ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme de öğrenci bir problemle karşılaşınca bu sorunun çözümünü önceki öğrenme tecrübelerinden, derslerden ya da ders kitabından hatırlayarak birebir uygular. Süreçte kendi bilgi birikiminden herhangi bir katkı ya da yorum yapmaz. Bu sınıflandırma türünün seçilmesine etken olan durumlar bireyin inançları, kavram imajları, gerçeğe karşı duyulan endişe ve öğrenme çevresinden edindiği tecrübelerdir (Lithner, 2008).

2.1.3.1.2. Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme (Algorithmic Reasoning (AR))

Sınıflandırma türüne isim veren “algoritma”, bir problem için çözüm olabilecek sıralı adımları içeren uygulamadır. Yani yürütülebilir yönergelerin sonlu bir dizisidir. Yapılan akıl yürütmenin bu sınıflandırmaya ait olabilmesi için aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekmektedir:

1. Strateji seçiminde bir çözüm algoritması hatırlanır. Yeni bir çözüm yolu oluşturulmaz.

2. Stratejinin uygulanması akıl yürüten kişi için önemsizdir. Çünkü adımlar otomatik olarak ilerlemektedir. Sadece dikkatsizlikten kaynaklanan hatalar yanlış sonuca ulaştırabilir.

Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme de öğrenci bu sorunun çözüm yolundaki adımları hatırlar, sonrasında bu adımları birebir uygular ve sonuca ulaşır. Adımlarda umulmadık hiçbir durum olmaz. Yeni bir bilgi, yeni bir karar, yeni bir yorum ya da onlara dayandırılan yeni bir anlam olmaz. Öğrenci, uyguladığı algoritmanın kavramsal kısmıyla ilgilenmez. Örneğin, 3. Dereceden bir polinomun türevini alıp; türev konusunda herhangi bir kavramsal açıklamada bulunmama bu türe örnek verilebilir. Bu akıl yürütme türü de kendi içinde üç farklı sınıfa ayrılır. Bunlar, Bilinen Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Familiar Algorithmic Reasoning), Sınırlandırılmış Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Delimiting Algorithmic Reasoning), Rehber Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Guided Algorithmic Reasoning) şeklindedir (Lithner, 2008).

2.1.3.1.2.1. Bilinen algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme (Familiar Algorithmic Reasoning (FAR))

Yapılan akıl yürütmenin bu sınıflandırmaya ait olabilmesi için aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekmektedir:

1. Strateji seçiminde, soruda yer alan benzer bir noktadan hareket edilerek bilinen bir algoritma seçilir.
2. Seçilen algoritma uygulanır.

İfade edilen benzerlik, problemde geçen bir kelime, grafiksel ya da sembolik bir ifadedir. Örneğin, öğrenci problemde yer alan “en fazla” ifadesi ile “bu soruda maksimum minimum problemlerinde yapılan işlemler kullanılacak” şeklinde bir düşünce ile strateji seçimini yapar ve gerekli algoritmayı uygular (Lithner, 2008).

2.1.3.1.2.2. Sınırlandırılmış algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme (Delimiting Algorithmic Reasoning (DAR))

Yapılan akıl yürütmenin bu sınıflandırmaya ait olabilmesi için aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekmektedir:

1. Strateji seçiminde kullanılan algoritma, yüzeysel özellikler dikkate alınarak oluşturulmuş bir algoritma kümesinin içerisinden seçilir.
2. Stratejinin uygulanmasında, seçilen algoritma ile doğru sonuca ulaşılamazsa; algoritma kümesi içerisindeki bir başka algoritma ile yola devam edilir.

Problem türüne yönelik öğrencinin zihninde hatırlanan tüm algoritmalar herhangi bir kavramsal düşünce ortaya konulmadan tek tek uygulanır. Amaç algoritmanın uygunluğu değil bir cevabın elde edilmesidir (Lithner, 2008).

2.1.3.1.2.3. Rehber algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme (Guided Algorithmic Reasoning (GAR))

Rehber algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü sergilenirken kullanılacak algoritmalar, bireyin kendi öğrenme yaşantıları neticesiyle edinilmiş algoritmalar değildir. Bu algoritmalar, bireyin kendisinden bağımsız olan bir rehber vasıtasıyla elde edilir. Rehberin türüne göre de iki farklı alt kategoriye ayrılır. Eğer bu rehber, bir kişi ise probleme yönelik strateji seçimi bu kişi vasıtasıyla yapılıyor ve çözen kişide herhangi bir tartışma ortamı oluşturmadan stratejiyi uygularak sonuca ulaşıyorsa, akıl yürütme türü Kişi Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Person Guided Algorithmic Reasoning) olarak adlandırılır. Belirtilen bu rehber, teorem, örnek soru, diyagram ya da kuralı barındıran yazılı bir doküman ise ve bu doküman aracılığıyla strateji seçimi yapılarak herhangi bir tartışma ortamı oluşturulmadan strateji uygulaması gerçekleştiriliyorsa akıl yürütme türü Doküman Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Text Guided Algorithmic Reasoning) olarak adlandırlır (Lithner, 2008).

2.1.3.1.3. Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme (Creative Reasoning)

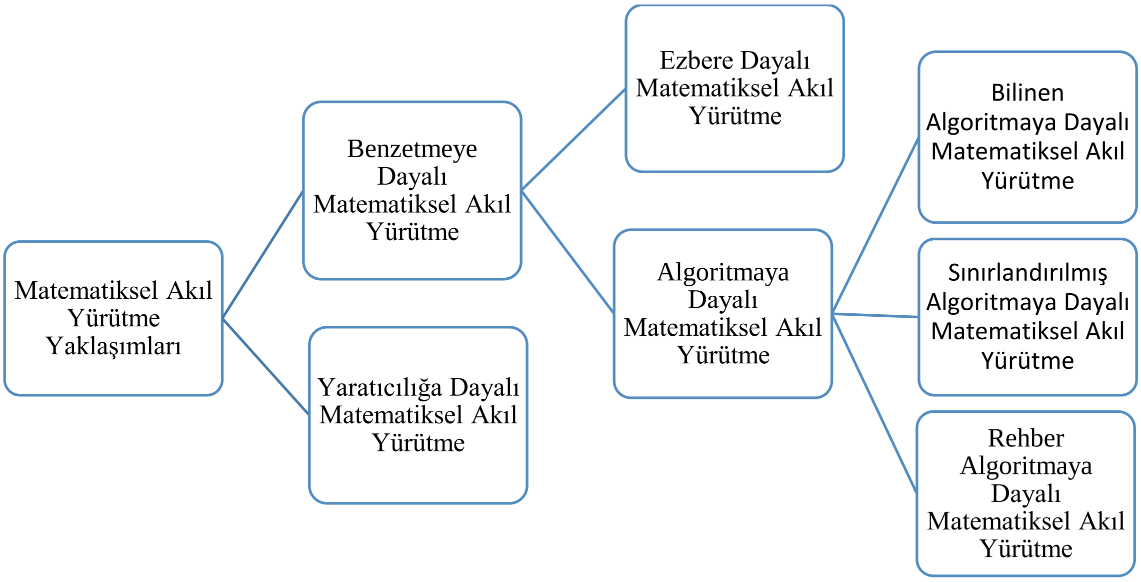
Matematikte yaratıcılık, bağımlılıktan kurtulup farklı düşünebilmektir. Kullanılan kavramların bünyesinde barındırdığı kavramsal bilgilere derinlemesine hâkim olarak farklı yorumlarda bulunabilmektir. Yapılan bir akıl yürütmenin yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme sınıfında yer alması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekmektedir:

1. Strateji seçiminde yeni bir çözüm yolu seçilmelidir. Bu çözüm yolu Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütmedeki gibi uygulamanın hatırlanması veya Ezbere Dayalı Matematiksel Akıl Yürütmedeki gibi cevabın tamamının hatırlanması şeklinde olmamalıdır.
2. Stratejinin seçimi ve uygulama süreci, elde edilecek sonucun neden doğru ya da yanlış olacağı yönünde tartışma ortamı oluşturularak ortaya konulmalıdır.

Problem durumuyla karşılaşan öğrenci çözüme yönelik önceki öğrenme tecrübelerinden, soruda yer alan benzer ifadelerden yararlanmadan sadece kavramsal bilgi temelini ve düşünce gücünü kullanarak bir çözüme ulaşır. Burada çözümün kesin doğru olması önemli değil izlenen yolun matematiksel temellere uygunluğu önemlidir. Öğrenci kullandığı kavramların derinlemesine özelliklerini açıklayabilmeli; uyguladığı adımları neye dayanarak attığını belirtebilmelidir (Lithner, 2008).

Oluşturulan bu sınıflandırma ile Lithner (2008), düşünmeye dayalı bir süreç olması nedeniyle oldukça kompleks olan akıl yürütme sürecini anlamlandırmayı amaçlamaktadır. Belirtilen sınıflamadaki yaklaşımlar tek başına kullanılmak zorunda değildir. Öğrenci, problemi çözme sürecinde bu yaklaşımların üçünü birden kullanabildiği gibi sadece birini veya her ikisini de kullandığı durumlar mevcuttur.

Matematiksel akıl yürütme yaklaşımlarının Lithner (2008) tarafından oluşturulmuş sınıflandırması Şekil 2.8'de görsel olarak sunulmuştur.



Şekil 2.8. Matematiksel akıl yürütme yaklaşımları (Lithner, 2008)

2.2. İlgili Araştırmalar

Bu bölümde akıl yürütme ve matematiksel akıl yürütme ile ilgili ulusal ve uluslararası alanda yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Steen (1999), epistemolojik olarak matematiğin temelinin akıl yürütme olduğunu belirtmiştir. Matematiksel akıl yürütme hakkında ortaya koyduğu yirmi soru ve cevabı barındıran çalışmasıyla matematiksel akıl yürütme konusuna ışık tutmuştur. Bireylerin matematiksel akıl yürütme yeteneği açısından gelişmeleri neticesinde, sadece eğitim süreçlerinde başarılı olmaları değil, aynı zamanda gerçek yaşam şartlarına da etkili bir şekilde hazırlanmaları sağlanacaktır. Bu sayede bireyler, etkili bir şekilde kullanabildikleri düşünce güçleriyle, karşılaştıkları problemlere yapıcı çözüm yolları sunabilirler. Dünya şartları değiştikçe yenilenen öğretim programlarında matematiksel akıl yürütmenin önemle vurgulanması, onun değerini arttırmıştır. Ancak bu yeteneğin öğretmenler tarafından öğretilmesi pekte kolay değildir. Çünkü birbiriyle bağlantılı birçok durum söz konusudur. Öğretmenlerin matematiksel akıl yürütme konusundaki alt yapıları, öğrencilerin sosyal ve kültürel çevreleri, yine öğrencilerin matematiğe karşı bakış açıları bunlardan bazılarıdır. Matematiği ezber olarak algılayan ve matematiğe karşı kaygı duyan öğrencilerde matematiksel akıl yürütme yeteneğinin gelişmesi de zora girmektedir. Ancak bu konunun üzerinde sıkça durulması, herkesin düşüncelerini serbestçe ortaya koyabileceği ortamların oluşturulması, kısacası beyin gücünün kullanılmasına izin verilmesi matematiksel akıl yürütme yeteneğinin gelişmesine yardımcı olacaktır. Çünkü beynimiz bunları yapabilecek güce sahiptir. Araştırmacı bu konudaki düşüncesini 'ya beynini kullan ya da onu at gitsin' şeklinde ifade etmiştir. Günümüzün vazgeçilmez araçları arasına giren ve neredeyse insan beyninin yerini alan bilgisayar teknolojisinin de yerinde kullanılmasıyla matematiksel akıl yürütme yeteneğine katkıda bulunulduğunu belirtmiştir. Özellikle mantıksal çıkarımların ön planda olduğu bilgisayar oyunlarının oynatılmasını önermektedir.

Lithner (2000a), yaptığı çalışma ile üniversite öğrencilerinin sorular karşısında ortaya koydukları akıl yürütmelerin karakterlerini derinlemesine incelemektense, o sorular karşısında öğrencilerin yaşamış oldukları zorlukların arkasında yatan nedenleri gün yüzüne çıkarmayı amaçlamıştır. Üniversite birinci sınıfa devam eden dört öğrenci ile yürüttüğü çalışmada bu öğrencilerin ikisine bir soru; diğer ikisine de başka bir soru sormuştur. Öğrencilerin sorularla uğraşmalarını sağlamıştır. Tüm bu süreci ayrıntılı bir şekilde aktararak öğrencilerin yaşamış oldukları güçlüklerin neler olduğuna odaklanmıştır. Çalışmanın sonucunda, araştırmayı sürdürdüğü dört öğrencinin de sahip oldukları sınırlı kavram imajlarında yer alan bilgileri hatırlamaya odaklandıklarını belirtmiştir. Öğrencilerin daha çok benzer bilgileri hatırlamaya çalışmaları onların yeni uygulamalar yapmasına engel olduklarını ileri sürmüştür. Ayrıca benzer durumlardan hareket ederek uyguladıkları stratejilerin arka planını tam manasıyla anlamadıklarını bu sebeple de oldukça zorlandıklarını ifade etmiştir.

Lithner (2000b), önceki çalışmasında öğrencilerin verilen sorular karşısında sergiledikleri akıl yürütmelerin karakteristiğindense yaşanılan güçlüklere odaklanmıştı. Bu çalışmasında ise yine matematiksel akıl yürütmelerin türlerine daha geniş çapta odaklanmayı amaçlamaktadır. Bu amaçla çalışmasında birinci dönemin sonunda olan; başarı puanı olarak da ortalama ve ortalamanın üzerinde olan üç üniversite öğrencisiyle çalışmıştır. Belirlenen bu üç öğrenciye ne tam manasıyla rutin ne de rutin olmayan iki soru yöneltmiştir ve çözüm yolunu kaydetmiştir. Diğer çalışmalarında kullandığı analiz yöntemlerini bu çalışmasında da uygulayarak öğrencilerin sergilemiş oldukları matematiksel akıl yürütme süreçlerini derinlemesine betimlemiş ve analiz etmiştir. Araştırmanın sonuçlarına bakıldığında ise öğrencilerin strateji seçimlerinde daha çok kendi öğrenme deneyimlerini dikkate aldıkları, bu sebeple de akıl yürütme türlerinin bu kategorideki tür noktasında baskın olduğu görülmektedir.

Akkuş Çıkla ve Duatepe (2002), ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının orantısal akıl yürütme becerilerini araştırdığı bu çalışmada oran orantı içeren problemlerle öğrencileri karşı karşıya getirmiştir. Literatürden alınarak Türkçe' ye adapte edilen veri toplama aracı 3 aşama ve 8 sorudan oluşmaktadır. Bu sorulara ek olarak oran orantı ile ilgili kavramsal bilgileri sorgulayan sorulara de yer verilmiştir. 12 ilköğretim matematik öğretmen adayı ile sürdürülen bu çalışmada görüşme yöntemiyle, öğretmenlerin bilişsel süreçleri hakkında bilgiler edinilmiştir. Araştırma sonuçlarına göre öğretmen adaylarının soruların gerektirdiği işlemsel bilgilere sahip olduklarını, ancak kavramsal bilgilere tam olarak sahip olmadıkları belirtilmiştir. Konuyla ilgili üst düzey işlemsel beceriyi gösteren öğretmen adaylarının konunun dayandığı kavramsal temelleri anlayamadıkları ve bu işlemleri ezbere yaptıkları bilgisine ulaşılmıştır.

Lithner (2003), yaptığı çalışmada üniversite öğrencilerinin akıl yürütme durumlarını derinlemesine bir şekilde incelemeyi amaçlamıştır. Bu amaçla üniversitelerde matematik dersi için kullanılan ders kitaplarındaki sorulara araştırmada yer vermiştir. Akıl yürütme türlerini özellikleriyle birlikte açıkladığı bu çalışmada üç üniversite öğrencisi ile görüşmeler yapılarak dört ya da beş soru yöneltilmiştir. Nitel yöntemler temel alınarak yapılan derinlemesine analizler neticesinde öğrencilerin sorulan sorulara verdikleri cevaplardan yola çıkarak akıl yürütme türlerini belirleyip sınıflandırmıştır. Bu sınıflandırmalar neticesinde, öğrencilerin yaptıkları strateji seçimlerinin ve uygulamalarının çoğunda derinlemesine matematiksel özellikleri göz ardı ederek çalıştıkları sonucuna ulaşılmıştır. Özellikle stratejilerinde kullandıkları çözüm yollarının taklit olduğu ve çok az bir akıl yürütme yapılandırdıkları belirtilmiştir.

Umay (2003) yaptığı bu çalışmayla matematiksel akıl yürütme kavramına ışık tutacak *"matematiksel muhakeme yaklaşımları nelerdir?", "bireylerin matematiksel muhakeme yaklaşımları neye göre değişmektedir?", "kültür farklılıkları muhakeme biçiminin değişmesinde etken midir?", "kişilerin belli bir muhakeme "stili" var mıdır, yoksa hangi muhakeme yaklaşımını kullanacağı duruma göre mi değişmektedir?", "herkes kendine en uygun muhakeme tarzını nasıl bulabilir?*" sorularına cevap aramıştır. Matematiksel muhakemenin bireysel bir yaklaşım olduğunu belirterek her bireyin farklı bir düşünme yapısının olduğunu ve matematiksel akıl yürütme sürecinin her birey için farklı olarak geliştiğini; yapılan muhakemenin çeşidine karar vermede bireylerin bakış açısının etkili olduğunu; bireyin çocukluğundan itibaren edindiği bir çok farklı bilginin, onun muhakeme gücünü geliştirdiğini; kesin olmamakla beraber kişilerin içinde yaşadığı çevreye göre farklı muhakemeler yapabilmesinden hareketle kişisel bir muhakeme yapısının da olabileceğini; uygun, korkusuz ve rahat ortamlarda kişi farklı muhakeme türlerini tanıma fırsatı bulduğundan kendine en yakın olan muhakeme türünü de benimseyebileceğini araştırmasında ifade etmiştir. Etkili bir akıl yürütme, ileri düzeyde düşünme becerisi, bunun yanında konuyla ilgili bilgilerin kullanılıp mantıkla harmanlanmasıyla gerçekleşmektedir. Matematiksel akıl yürütmenin bireyin kendini ve düşünme biçimlerini tanıyıp keşfetmesinde etkili olduğunu belirtmiştir. Bireyin içinde yaşadığı kültürün, onun düşünme ve akıl yürütme yeteneğini biçimlendirdiği çalışmanın sonuçlarında görülmektedir.

Lithner (2004) çalışmasında, üniversitede takip edilen ve öğrencilerin sıklıkla kullandığı cebir kitaplarındaki soruları ve alıştırmaları matematiksel akıl yürütmeler açısından incelemeyi amaçlamıştır. İki farklı alt problemi barındıran bu çalışmanın birinci probleminde belirtilen kitaplardaki sorular nitel olarak incelenmiştir. Bu inceleme ile soruların sınıflandırma türlerinden hangisine ait olacağına da ışık tutulması sağlanmıştır. Böylece okuyucu hem sınıflandırma türlerinden haberdar edilmiş hem de bir sonraki nicel kısımda yapılacak süreç ayrıntılı anlatılmıştır. Bu sınıflandırmaya göre incelenecek sorunun birebir benzeri, kitabın alıştırmalar bölümünde çözülmüşse benzerlik tanımlamalı (identification of similarities IS); eğer incelenecek soru, alıştırmalardaki bir soruya benzeyen ancak o soruya ait çözüm yolu birebir uygulanmadan çözüme ulaşılabilecek türde ise lokal muhakemeli (local plausible reasoning LPR); incelenecek soru, alıştırmalarda yer alan hiçbir soruya benzemeyen, tamamen derinlemesine bir akıl yürütme kullanılarak çözüme ulaşılabilecek tarzda bir soru ise de global muhakemeli (global plausible reasoning GPR) olarak isimlendirilmiştir. Araştırmanın nitel kısmında bu sınıflandırmaya ait açıklamalar yapılırken; nicel kısmında ise 598 soru incelenmiş ve sınıflandırılmıştır. Sınıflandırma sonucunda üç kitapta da IS sınıflandırmasına sahip soruların çokluğu dikkat çekmektedir. Araştırmacı bu durumun öğrencilerin derinlemesine matematiksel akıl yürütmeler sergilemelerini zorlaştırdığını savunmuştur.

Umay ve Kaf (2005) yaptıkları çalışmada ilköğretim öğrencilerinin ne gibi kusurlu akıl yürütmeler yaptıklarını incelemeyi amaçlamışlardır. Öğrencilerin düşünme biçimleri hakkında bilgi veren matematiksel akıl yürütmelerinin her zaman doğru sonuca ulaştırmadığını; kusurlu akıl yürütmeler olarak da adlandırılan bu durumun kavram yanılgılarının sebebini ortaya çıkarmada da yardımcı olduğunu belirtmişlerdir. Altıncı, yedinci ve sekizinci sınıfa devam eden 90 öğrenci üzerinde çalışmalarını tamamlamışlardır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin yaptıkları kusurlu akıl yürütmelerin sebeplerini, akıl yürütme süreçlerini tamamlamadan sona erdirmelerine ya da kavramsal bilgilerindeki eksikliğe bağlamışlardır. Öğrencilerin alışılagelmiş kalıp çözümlere yöneldiklerini bu sebeple de zayıf akıl yürütme oranının doğru akıl yürütme oranına göre daha fazla olduğunu belirtmişlerdir. Matematiksel akıl yürütmenin gerçekleşmesinde konu hakkındaki bilgi birikimi önemli olduğundan, kavramsal öğrenmenin iyi bir şekilde yapılması halinde bu yeteneğin artacağı bilgisini sunmuşlardır.

Duatepe, Akkuş-Çıkla ve Kayhan (2005), ilköğretim ikinci kademedeki öğrencilerin, orantısal akıl yürütme gerektiren oran orantı sorularında kullandıkları stratejilere odaklanmışlar ve bu stratejilerin soru türlerine göre nasıl değiştiklerini incelemeyi amaçlamışlardır. 295 öğrenciye uyguladıkları beş farklı türdeki 10 açık uçlu sorudan oluşan orantısal akıl yürütme testi ile verilere ulaşmışlardır. Bilinmeyen değer türündeki sorularda, içler dışlar çarpımı stratejisini; niceliksel karşılaştırma türündeki sorularda birim oran stratejisini; niteliksel karşılaştırma türündeki sorularda belirli bir strateji kullanmayarak sadece orantısal akıl yürütebildiğine dair ipucu vermeyi; karşılaştırma türündeki sorularda toplumsal stratejisini ve ters orantı türündeki sorularda ise ters orantı algoritması stratejisini kullandıkları sonuçlarına ulaşılmıştır.

Altıparmak ve Öziş (2005), matematiksel ispat ve matematiksel muhakeme konuları üzerine daha çok kavramsal boyutta bir inceleme çalışması yürütmüşlerdir. Bu çalışmada, okul öncesi, ilköğretim ve lise seviyelerinde matematiksel ispat ile ilgili bilgi ve örneklere yer verilmiştir. NCTM standartları doğrultusunda hazırlanan bu ispatlarla, okul öncesindeki öğrencilerinin sınıflama, eşleştirme, karşılaştırma, sıralama; ilköğretimin birinci kademesinde öğrenciler somut dönemde olduğu için parça bütün ilişkileri; ikinci kademede varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri; lise döneminde ise soyut düşünme becerisi geliştiği için tümevarım ve tümdengelim ispat çeşitlerinin etkin bir şekilde kullanılması gerekliliği vurgulanmıştır. Böylece içgüdüsel olarak sahip olunan ispat ve muhakeme becerisini geliştirecek uygun ortamların sağlanacağı belirtilmiştir.

Bergqvist, Lithner ve Sumpter (2006) yaptıkları çalışmada lise öğrencilerinin, matematik problemlerine yönelik geliştirdikleri çözüm prosedürlerine odaklanarak bu süreçlerdeki matematiksel akıl yürütme türlerini belirlemeyi amaçlamışlardır. Bu amaçla başarı seviyeleri bakımından eşit dağılmış olan 15 lise öğrencisi seçilerek 40 dakikalık görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmelerde öğrencilerin sesli düşünmeleri istenmiştir. Her bir öğrenciye üç ya da altı matematik problemi yöneltilmiştir. Matematik problemleri orta seviyede sorular arasından seçilmiştir. Yapılan nitel analizler neticesinde öğrencilerin daha çok yüzeysel düşüncelerle çözüm aradıkları ortaya çıkmıştır. Yaratıcılığa dayalı akıl yürütme türüyle çözülebilecek problemler olmasına rağmen, analizlerde bu sonuçların oldukça az olduğu belirtilmiştir. Öğrencilerin en fazla sergilediği matematiksel akıl yürütme türünün ise algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Zembat (2006), yaptığı çalışmasında teknoloji destekli dinamik bir ortam ile kâğıt kalemden oluşan geleneksel bir ortamın akıl yürütmeler üzerindeki etkisini karşılaştırmayı amaçlamıştır. Maksimum minimum problemleri konusu üzerinde yaptığı bu çalışmayı 3 ortaöğretim matematik öğretmeni adayının katılımıyla gerçekleştirmiştir. Matematik eğitiminde teknoloji kullanımı ile matematiksel akıl yürütme yeteneği arasındaki ilişkiyi incelediği bu çalışmanın sonuçlarına bakıldığında ise; öğrencilerin keşfetme, düşüncelerini formüllere aktarabilme, olaylar arasındaki mantıksal ilişkileri bulabilme gibi yeteneklerini geliştiren bilgisayar donanımlarının yüksek seviyede akıl yürütme becerisi kazandırdığı ortaya çıkmıştır.

Pilten (2008), yapmış olduğu çalışmada ilköğretim 5. Sınıf matematik dersi problem çözme sürecinde kullanılan üstbiliş stratejilerinin matematiksel muhakeme becerisine etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Deney ve kontrol gruplu olarak ilerletilen çalışmada, toplamda 66 öğrenciden oluşan iki denk sınıf örneklem olarak seçilmiştir. Deney grubunu oluşturan sınıfa problem çözme sürecindeki üstbiliş stratejileri uygulanırken; kontrol grubuna problem çözme sürecinde var olan normal süreç uygulanmıştır. Üstbiliş stratejisi olarak Mevarech ve Kramarski (1997) tarafından geliştirilmiş İMPROVE stratejisi kullanılmıştır Öğrenciler bu stratejiyle alakalı problemlerle karşı karşıya getirilmiştir. Belirtilen bu strateji giriş (***I**ntroduction*), üstbilişsel sorgulama (***M**etacognitive questioning*), uygulama (***P**ractising*), gözden geçirme (***R**eviewing*), uzmanlık (***O**btaining mastery*), doğrulama (***V**erification*), zenginleştirme (***E**nrichment*) diye adlandırılan aşamalardan oluşmaktadır. Dokuz haftalık ders sürecinin başında ve sonunda her iki gruba da matematiksel muhakeme ölçeği ön test ve son test olarak uygulanmıştır. Elde edilen veriler nicel analize tabii tutularak t testi kullanılmıştır. Araştırma sonucunda, deney grubunda belirtilen üstbiliş stratejisiyle yapılan öğretimin, kontrol grubundaki öğretime göre birçok noktada deney grubu yönünde anlamlı farklılık oluşturduğu bilgisine ulaşılmıştır. Bu noktalar matematiksel bilgileri ve örüntüleri tanıma ve kullanma; tahmin etme; uygun muhakemeyi bulma ve kullanma; çözüme yönelik mantıklı tartışmalar geliştirme; genelleme yapma; rutin olmayan problemleri çözme; matematiksel muhakeme becerileri şeklindedir.

Küpçü (2008), çalışmasında etkinlik temelli öğretim yaklaşımları ile yürütülen dersin, orantısal akıl yürütmeye dayalı problem çözme başarısına etkisini incelemiştir. Nicel araştırma tekniklerinden öntest-sontest kontrol gruplu deneme modelinin kullanıldığı araştırma da 134 ilköğretim 7. Ve 8. Sınıf öğrencisi ile çalışma sürdürülmüştür. Öğrencilerin orantı kelime problemlerinde kullandıkları stratejiler araştırılarak bu stratejilerin problem türlerine göre nasıl bir farklılık gösterdiği de ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Etkinlik temelli öğretim materyalleri hazırlanarak deney grubundaki çalışmalar bu materyaller üzerinden sürdürülürken kontrol grubunda geleneksel öğretim yöntemi uygulanmıştır. Orantı ve matematiğin farklı konuları ile alakalı birçok sonucun elde edildiği çalışmada genel olarak etkinlik temelli öğretim yaklaşımıyla yürütülen dersleri takip eden öğrencilerin, kontrol grubundaki öğrencilere göre akademik başarılarında anlamlı bir artışın olduğu ifade edilmiştir. Bunların yanında orantı problemlerini çözme başarıları açısından, orantısal akıl yürütme becerileri arttıkça ilköğretim 7. Ve 8. Sınıf öğrencilerinin daha başarılı oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

Yankelewitz (2009), ilköğretim öğrencilerinin sınıf ortamında farklı materyaller kullanarak kesirler konusundaki matematiksel akıl yürütmelerinin gelişimini incelemeyi amaçladığı çalışmasında, konuyla alakalı çeşitli görevlerle öğrencileri karşı karşıya getirerek düşünmelerini sağlamıştır. Derslerde gerçekleştirilen video kayıtları, öğrencilerden edinilen yazılı çalışmalar ve araştırmacının alan notları veri kaynakları olarak kullanılmıştır. Bu süreçte öğrencilerin kullandığı çeşitli matematiksel akıl yürütmeler kodlanmıştır. Nitel verilerle ilerleyen çalışma da matematiksel akıl yürütmenin bireysel bir süreç olduğu, bu sebeple de herkesin kendine has akıl yürütmelerinin olabileceği bir kez daha belirlenmiştir. Ayrıca oluşturulan ortamların özelliğinden dolayı öğrencilerin birbirleriyle etkileşim içinde oldukları, bu sayede fikirlerini paylaşabildikleri ve farklı akıl yürütmelerden haberdar oldukları ifade edilmiştir. İçinde bulundukları bu kompleks ortamın onların matematiksel akıl yürütmelerini olumlu yönde geliştirdiği savunulmuştur.

Çoban (2010), çalışmasında öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme becerileri ile biliş ötesi öğrenme stratejilerini kullanma düzeyleri arasındaki ilişkiyi araştırmayı amaçlamıştır. Bu bağlamda belirlenen bir üniversitenin sınıf öğretmenliği, fen bilgisi öğretmenliği, sosyal bilgiler öğretmenliği, psikolojik danışma ve rehberlik, bilgisayar ve öğretim teknolojileri eğitimi bölümlerinin birinci sınıflarında öğrenim gören 348 öğrenci üzerine, Namlu (2004) tarafından geliştirilen "Bilişötesi öğrenme stratejileri ölçeği" ile araştırmacı tarafından geliştirilen "matematiksel muhakeme değerlendirme ölçeği" uygulanmıştır. Nicel araştırma yöntemlerinin kullanıldığı bu çalışmada elde edilen verilerin analizi neticesinde bilişötesi öğrenme stratejileri ile matematiksel muhakeme becerileri arasında pozitif yönde anlamlı bir ilişki olduğu yani öğrenciler bilişötesi öğrenme stratejilerini kullandıkça matematiksel muhakeme becerilerinde artış olduğu sonucuna varılmıştır. Bunların yanında bilişötesi öğrenme stratejilerinin kullanım düzeyi cinsiyete, öğrenim görülen bölüme göre farklılık gösterirken Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) puan türüne göre farklılık göstermediği; matematiksel muhakeme becerilerinin ise cinsiyete, öğrenim görülen bölüme ve ÖSS puan türüne göre farklılık gösterdiği belirtilmiştir.

Boesen, Lithner ve Palm (2010), yaptıkları çalışmada problem türleri ile öğrencilerin kullandıkları akıl yürütmeler arasındaki ilişkiyi incelemeyi amaçlamışlardır. Bu amaçla literatürde yer alan ve problem türlerinin nasıl sınıflandırıldığına dair gerekli bilgiyi sunmuşlardır. Bu sınıflandırma, Lithner (2004) tarafından açıklanan sınıflandırmaya benzemektedir. Sınıflandırmada ders kitabındaki çözülmüş alıştırmalar ile o soru arasında kurulan bağ temel alınmaktadır. Bu bağ, alıştırmalarda o soruya benzeyen sadece bir sorunun olması, birden fazla sorunun olması, çözümdeki algoritmanın benzemesi ve benzer hiçbir sorunun olmamasına göre dört farklı sınıflandırma ile kurulmuştur. Araştırma İsveç'te 8 lise öğrencisi ile gerçekleşmiştir. Bu öğrenciler geometri, lineer fonksiyonlar, üstel fonksiyonlar, istatistik, olasılık, lineer denklem sistemleri, toplam fonksiyonları, geometrik toplam, türev, trigonometrik denklemler, diferansiyel denklemler, integral ve kompleks sayılardan oluşan altı dönemi başarıyla tamamlamış öğrencilerdir. Tanımlanan soru sınıflandırmasına göre sınıflandırılmış 107 soru öğrencilere uygulanmış ve cevapları analiz edilmiştir. Öğrencilerin ortaya koydukları akıl yürütme türleri ile soruların kendi bünyesinde barındırdıkları sınıflandırma türlerinin sayıları bir tablo ile görselleştirilmiştir. Araştırma sonuçlarına göre ders kitabında yer alan sorulara benzer olan sorular da öğrenciler daha çok taklit akıl yürütme türünü kullandıkları tespit edilmiştir. Yani yeni bir akıl yürütme yapılandırmadan, derinlemesine matematiksel özellikleri göz önüne almadan çözüme ulaşmaktadırlar. Sonuçta başarılı olsalar bile bu durumun onların kavramsal anlamalarını geliştirmelerine engel olduğu savunulmuştur.

Başaran (2011), çalışmasında üniversite öğrencilerinin çalışma alışkanlıklarını, öz yeterlik algılarını, problem çözme stratejilerini, demografik profillerini, matematiksel düşünme ve akıl yürütme yetkinliklerini uyarlanmış bir görüş ölçeği ve bir yeterlik testi ile belirlemeyi amaçlamıştır. Belirtilen ölçekler ilk ve ortaöğretim matematik, okul öncesi ve sınıf öğretmenliği bölümlerinde öğrenimlerini sürdüren 431 üniversite öğrencisine uygulanmıştır. Nicel veri analizi yöntemlerinin etkili bir şekilde uygulandığı çalışmada birçok faktör ortaya çıkarılarak bu faktörlerin birbirleri ile olan ilişkileri ayrıntılı şekilde sunulmuştur. Öğretmen adaylarının öz yeterlik algıları matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerini pozitif yönde etkilerken, motivasyonlarını negatif yönde direkt etkilemektedir. Kadın öğretmen adaylarının erkek öğretmen adaylarına göre anlamaya daha odaklı olduğu görülmüştür. Ayrıca araştırmanın yapıldığı Ankara'daki öğretmen adaylarının Kuzey Kıbrıs'taki öğretmen adaylarına göre matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerinde daha başarılı oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

Erdem (2011), çalışmasında ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin matematiksel ve orantısal muhakeme becerilerini incelemiştir. Matematiğin temelini oluşturan muhakeme kavramı ile henüz gerçekleşmemiş olaylar hakkında muhakeme gücünü kullanmayı barındıran olasılık kavramını birleştirerek incelemeler yaptığı bu çalışmada, 167 ilköğretim yedinci sınıf öğrencisi üzerinde tarama modellerinden korelasyon modelini kullanılarak bu iki muhakeme türü ile ilgili becerilerini belirlemek ve bunlar arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Literatürden faydalanılarak oluşturulan "*Matematiksel Muhakeme Beceri Düzeyi Belirleme Ölçeği"*ve *"Olasılıksal Muhakeme Beceri Düzeyi Belirleme Ölçeği"* veri toplama araçlarıyla elde edilen veriler analiz edilmiştir. Analizler sonucunda araştırmaya katılan öğrencilerin her iki muhakeme türü için de orta seviyede bir beceriye sahip oldukları ve bu iki beceri arasında da pozitif yönde bir ilişkinin olduğu bilgisine ulaşılmıştır.

Karakoca (2011), çalışmasında altıncı sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecinde matematiksel düşünmeyi kullanma durumlarını araştırarak, bu durumların cinsiyete, okul öncesi eğitime ve matematik başarısına göre farklılaşıp farklılaşmadığını incelemiştir. Nicel ve nitel araştırma yöntemlerinin kullanıldığı çalışmada tabakalı örnekleme yöntemiyle belirlenen 1114 altıncı sınıf öğrencisi yer almaktadır. Literatür desteğiyle 12 soru içeren bir ölçek geliştirilmiştir. Bu ölçeğin altı sorusu rutin; altı soru ise rutin olmayan problemlerden oluşmaktadır. Araştırmanın nitel kısmında ise öğrencilerin sorular üzerinde uyguladıkları stratejiler araştırılarak matematiksel düşünme durumları incelenmiştir. Nicel verilerden elde edilen bulgulara göre problem çözmede matematiksel düşünme durumlarında cinsiyete göre farklılığın oluşmadığı; okul öncesinde eğitim almış olma ve matematik başarısı değişkenlerinde ise anlamlı bir farklılığın oluştuğu belirtilmiştir. Nitel verilerden elde edilen bulgulara göre ise öğrencilerin akıl yürütme, iletişim ve esnek düşünme gibi becerilerde sorun yaşadıkları belirtilmiştir. Öğrencilerin daha çok rutin algoritmaları tercih etmesi ise ulaşılan diğer bir sonuçtur.

Gülşen (2012), çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının görsel akıl yürütme durumlarını incelemeyi amaçlamıştır. Görsel akıl yürütmenin, matematik kavramlarını anlamada oldukça etkili olduğunun savunulduğu bu çalışma, araştırmaya katılmaya gönüllü olan üç matematik öğretmeni ile sürdürülmüştür. Görsel ispatı ispatlama ile alakalı üç; yine görsel ispatı yorumlama ile ilgili bir soru belirlenerek iki oturum halinde öğretmenler ile görüşmeler yapılmıştır. Görsel akıl yürütme durumlarının ortaya çıkarılması için gömülü desen yöntemi kullanılmıştır. Çalışma kâğıtları ve ses kayıtlarının yazılı hallerinin analiz edilmesi ile ulaşılan sonuçlara göre;

öğretmenler ispatı algılama, ispat için bir süreç takip etme ve ulaştıkları sonuçların farkında olmaları noktasında zorluklar yaşadıkları belirtilmiştir. Daha çok cebire eğilim göstererek görsel ispat sürecinden uzaklaştıkları; bunun yanında görsel ispattaki şekil ve çözümler üzerinden stratejiler uyguladıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Bergqvist ve Lithner (2012), matematiksel akıl yürütme çalışmalarını öğretmenlerin günlük ders sunumlarını inceleyerek sürdürmüş ve bu sayede öğretmenlerin derslerde uyguladıkları çözüm süreçleri ile öğrencilerin matematiksel akıl yürütme kapasitelerine nasıl bir katkı sağladıklarını ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Bu amaç doğrultusunda 12 dersten 23 öğretim durumunu incelemiş, tanımlamış ve analiz etmişlerdir. Takip edilen derslerin ikisi ilköğretim seviyesinden, altısı lise seviyesinden, dördü de üniversite seviyesindendir. Araştırma öğretmenlerin derslerde çözüm aradığı soruların, çoğunlukla bir algoritmayı takip etme ile doğru cevaba ulaşılabilen sorular kullandıklarını göstermiştir. Bu süreçte herhangi bir ispatlamaya yer vermedikleri ve bunun artık bir öğrenme alışkanlığı olduğuna değinilmiştir. Yaratıcı bir akıl yürütme yapıldığında öğrencilerin sürece daha çok katıldığı ancak bunu da mütevazı bir şekilde ortaya koydukları belirtilmiştir.

Tıraşoğlu (2013), yaptığı çalışmada Polya'nın problem çözme basamaklarından faydalanılarak işlenen bir ders kapsamında, İlköğretim Matematik öğretmenliğinde öğrenim gören öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme bağlamında matematik zihin alışkanlıklarını nicel ve nitel olarak değerlendirmiştir. İlköğretim matematik öğretmenliği 2. Sınıf öğrencilerine uygulanan bu çalışmanın uygulama süreci 14 hafta ders anlatımı şeklinde gerçekleşmiştir. Araştırmacı tarafından hazırlanan başarı testi ve görüşme formu ile nicel ve nitel veriler elde edilmiştir. Derslerin işlenmesi sürecinde Polya'nın problem çözme basamakları tanıtılmış ve bu basamaklara uygun sorulara yer verilmiştir. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin akademik başarılarında bir artış meydana geldiği belirtilirken; öğrencilerin problem çözme basamakları üzerinde kendilerini geliştirmek istedikleri ve bunu kullanacakları belirtilmiştir.

Ersoy ve Başer (2013), öğretmen adaylarının matematiksel düşünme düzeylerini ölçebilmek için bir likert tipi ölçek geliştirmeyi amaçlamışlardır. Bu amaçla madde havuzu oluşturma, kapsam geçerliğini (uzman görüşü) sınama, faktör analizi (yapı geçerliği) ve güvenirlik olmak üzere dört aşamadan oluşan ölçek geliştirme çalışmasını takip etmişlerdir. Öğrencilerin bilişsel boyutta öğrenmelerini ölçmek amacıyla geliştirilen bu 'Matematiksel Düşünme Ölçeği', üst düzey düşünme eğilimi, akıl yürütme, matematiksel düşünme becerisi ve problem çözme alt boyutlarından oluşmaktadır. 20 olumlu, 5 olumsuz olmak üzere toplam 25 maddeyi kapsayan matematiksel düşünme ölçeğinin geçerlik ve güvenirlik çalışmaları gerçekleştirilerek literatüre kazandırılmıştır.

Karatoprak (2014), çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının istatistiksel akıl yürütmelerini incelemeyi amaçlamıştır. İstatistiksel akıl yürütmenin, istatistiksel bilgiyi anlama, uygulama ve verilere dayalı çıkarımlarda bulunma olarak tanımlandığı bu çalışmada, ilköğretim matematik ve ortaöğretim matematik öğretmenliği son sınıflarında öğrenime devam eden 173 öğretmen adayına Garfield (2003) tarafından geliştirilen istatistiksel akıl yürütme testi, Türkçe' ye çevrilme işlemleri yerine getirilerek uygulanmıştır. Betimsel olarak analiz edilen veriler neticesinde her iki bölümün öğretmen adaylarının olasılığı yorumlama, bağımsızlığı anlama, iki yönlü tabloları anlamlandırma ve büyük örneklemlerin önemini anlamada başarı gösterdikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bunların yanında olasılık, ortalamayı seçme, örneklem çeşitliliği, ilişki ve nedensellik ayırt etmede zorlandıkları belirtilmiştir. Yapılan bu betimsel analizin yanında ilköğretim matematik ve ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının istatistiksel akıl yürütmelerini nicel boyutta da karşılaştıran çalışmada istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunmamıştır.

Erdem (2015), çalışmasında öğretim ortamlarını farklı öğretim yöntemleriyle zenginleştirerek bu ortamların matematiksel muhakemeye ve tutuma etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Bu amaçla çalışma, rastgele belirlenen bir devlet okulundaki 27 yedinci sınıf öğrencisi, bu öğrencilerin matematik dersini yürüten matematik öğretmeni ve aynı okuldaki başka bir matematik öğretmeninin katılımıyla sürdürülmüştür. Nicel ve nitel yöntemlerin beraber kullanıldığı bu çalışmada kesirler ve tam sayılar konularının anlatımı, eğitsel oyunlar, somut materyaller, bilgisayar destekli uygulamalar, karikatürler gibi farklı yöntemler ve işbirlikli heterojen öğrenci gruplarında tartışılarak sekiz hafta boyunca gerçekleştirilmiştir. Araştırma verileri öğrencilere öntest ve sontest olarak verilen matematiksel muhakeme ölçeği ve matematik tutum ölçeği ile toplanmıştır. Ayrıca öğretmen ve öğrenci görüşleriyle günlükleri de sürecin aydınlanmasına ışık tutmuştur. Yapılan analizler neticesinde, uygulanan bu sürecin matematiksel muhakemeye olumlu yönde oldukça etki gösterdiği, kalıcılığı arttırdığı, derse olan katılımı arttırdığı ve öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarını olumlu yönde etkilediği sonuçlarına ulaşılmıştır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırma deseni, katılımcılar, veri toplama araçları, pilot çalışma, verilerin analizi ve geçerlik güvenirlik çalışmaları hakkında bilgilere yer verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Deseni

Araştırmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Çünkü nitel araştırma yöntemi ile oldukça girift ve kompleks olan bir konuya, ayrıntılı bir anlayış oluşturulabilir (Creswell, 2013). Nitel araştırma, araştırmacının veri toplama sürecinde temel belirleyici olduğu, farklı inceleme yöntemlerini bünyesinde toplayıp (Merriam, 2013); katılımcıların bakış açıları üzerinden hareket ederek sosyal bir olguyu doğal ortamı içerisinde derinlemesine anlamaya odaklanan yöntemdir (Mcmillan ve Schumacher, 2001). Bu çalışma, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel akıl yürütme becerilerini araştırmayı konu almaktadır. Araştırılan bu konunun merkezinde insan olması ve insan davranışlarının da ancak esnek ve bütüncül bir yaklaşımla araştırılması gerekliliğinden dolayı nitel araştırma yöntemi tercih edilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması seçilmiştir. Durum çalışması; olgu ya da olayların kendi doğal ortamında, farklı araçlarla ve araştırmacıların katılımıyla derinlemesine incelendiği bir nitel araştırma desenidir (Gerring, 2007). Araştırmanın analiz birimi olarak ortaöğretim matematik öğretmeni adayları kullanıldığından matematiksel akıl yürütme becerileri bütüncül olarak ele alındığından, durum çalışması türlerinden "bütüncül çoklu durum" deseni uygun görülmüştür. Bu desende, kendi içinde bütüncül olarak algılanabilecek birden fazla durum mevcuttur ve her biri kendi içinde bütüncül olarak ele alınır ve birbirleriyle karşılaştırılır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Araştırmada her bir öğrencinin matematiksel akıl yürütme becerileri bütüncül olarak incelenip daha sonra karşılaştırıldığından bu desenin sınırları içinde yer almaktadır.

3.1. Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını, nitel araştırma geleneği içerisinde yer alan amaçlı örnekleme yöntemlerinden, ölçüt örnekleme tekniği ile belirlenmiş on ortaöğretim matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Amaçlı örnekleme yöntemleri ile zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılması sağlanırken; ölçüt örnekleme tekniği ile de önceden belirlenmiş birden fazla ölçütü karşılayan tüm durumların çalışılması sağlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu nedenle araştırmanın katılımcıları, ortaöğretim matematik öğretmeni adayları içerisinden; Analiz I, II derslerini almış olması ölçütlerine göre belirlenmiştir. Belirtilen ölçüt şartlarına uyan öğrencilerde de; kendilerini etkili bir şekilde ifade edebilme, kolay ulaşılabilir olma ve araştırmaya katılma hususunda gönüllü olma özelliklerini taşımalarına dikkat edilmiştir. Bu ölçütleri sağlayan öğrenciler, gerçekleştirilecek mülakatlarda oldukça konuşkan davranarak düşüncelerini rahatlıkla ifade edebilirler. Öğrencinin akıl yürütme sürecini açıkça sergileyebilmesi neticesinde ise özellikle durum çalışmalarında araştırmacı tarafından sürecin anlamdırılması daha kolay olmaktadır (Dreyfus ve Tsamir, 2004; Weber, 2009). Son olarak araştırmaya katılmaya karar veren ortaöğretim matematik öğretmeni adayları ile gönüllülük sözleşmesi imzalanmıştır.

Katılımcıların özellikleri Tablo 3.1‘de verilmiştir. Araştırmanın etiği gereği kullanılan isimler öğrencilerin kendi isimleri değildir. Kullanılan isimler araştırmacının kendisi tarafından belirlenen takma isimlerdir.

Tablo 3.1

Katılımcıların Özellikleri

	Cinsiyet	**Sınıf**
Aylin	Kız	2
Banu	Kız	3
Derya	Kız	3
Ece	Kız	2
Harun	Erkek	3
Hikmet	Erkek	2
Leyla	Kız	3
Nurdan	Kız	3
Önder	Erkek	3
Umut	Kız	2

3.3. Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması

Matematiksel akıl yürütme becerilerinin ortaya çıkarılmasında en önemli unsur karşılaşılacak problem durumlarıdır. Birçok farklı çözüm yolunu bünyesinde barındıran iyi yapılandırılmış problem durumlarına ihtiyaç vardır. Bu sayede birey, tek bir çözüm yoluna bağlı kalmadan, kendi öğrenme yaşantıları ile elde ettiği farklı düşünce yapılarını da sergileme imkanı bulabilir. Belirtilen bu sebepler çerçevesinde araştırmanın veri toplama araçlarını klinik mülakatlar oluşturmaktadır.

Klinik mülakat, her öğrencinin birbirinden farklı olduğu düşüncesi üzerine kurulmuş, bu sebeple de pozitivist bilim yaklaşımının dikte ettiği standartlaşmış süreçlerin aksine esnek süreçlerin hâkim olduğu bir yöntemdir. Matematik eğitimi araştırmalarında kullanılan klinik mülakat yöntemi ile öğrencilerin stratejilerini, bilgi yapılarını veya becerilerini karakterize etmek, problem çözme davranışlarını ve problem çözme süreçlerini ayrıntılı bir şekilde araştırmak amaçlanmaktadır. Problem çözme sürecinde öğrencinin içinde bulunduğu duruma göre "Niçin böyle düşünüyorsun?", "Yaptığın işlemin ne anlama geldiğini söyleyebilir misin?", "Problemden ne anladın?" şeklinde sorular yöneltilerek daha anlamlı sonuçlara ulaşılabilir. Matematik eğitiminde bir becerinin değerlendirilmesi için gerekli olan motivasyon, sübjektif eşitlik ve inanç boyutlarını da yine bu yöntemle sağlamak mümkündür. Araştırma sürecinin başlangıcında öğrenciyi motive etmek; herkesin aynı şeyi anlayabileceği problemler oluşturmak; cevapların tutarlılığını saptayabilmek klinik mülakattaki esneklik ile oluşturulmaktadır. (Ginsburg, 1981; Baki, Karataş ve Güven, 2002; Karataş ve Güven, 2003).

Öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerilerini en etkili şekilde ortaya çıkarabilmeyi amaçlayan bu veri toplama aracındaki problemler, araştırmacı tarafından ilgili alan yazın ve kaynak kitaplar kullanılarak hazırlanmıştır (lisans ders kitapları, MEB'in liselerde okuttuğu kitaplar vb.). Seçilen problemler Analiz I ve Analiz II dersini almış bir öğrencinin çözebileceği seviyede ve rutin olmayan problemlerdir. Bu problemlerin seçiminde Analiz I-II derslerinin içeriklerini kapsamasına özen gösterilmesinin sebebi ise, katılımcıların liselerde öğretmenlik mesleklerini yerine getirirken daha çok Analiz I-II derslerinin içeriğinde yer alan birçok konuyu anlatacak olmalarıdır. 10 ortaöğretim matematik öğretmeni adayları ile yürütülen araştırmada, belirtilen özellikleri taşıyan 6 farklı problem için, öğretmen adaylarının matematiksel akıl yürütme becerileri tespit edilmeye çalışılmıştır. Veri toplama aracının oluşturulma süreçleri pilot çalışma kısmında ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur.

Araştırmanın veri toplama sürecinde, amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak belirlenmiş ve araştırmaya katılmaya gönüllü olan 10 ortaöğretim matematik öğretmeni adayının her biri ile 3, toplamda 30 klinik mülakat, 2013-2014 eğitim öğretim yılı Bahar döneminde gerçekleştirilmiştir. Veri toplama sürecine başlamadan önce araştırmacı tarafından her bir öğrenciyle bireysel şekilde görüşmeler yapılarak araştırmanın amaçları konusunda bilgiler sunulmuştur. Daha etkili veri elde edebilmek amacıyla araştırmaya katılımları konusunda öğrenciler motive edilmiş ve süreçte yapmaları gerekenler anlatılmıştır. Özellikle problemler üzerinde çalışırken zaman kısıtlamalarının olmadıkları, düşündüklerini rahatça ifade etmeleri ve sesli düşünmeleri gerektiği belirtilmiştir. Ayrıca mülakatlardan sonra öğrencilerin karşılaştıkları problemleri bir başka mülakat öğrencisiyle paylaşmaması konusunda uyarı yapılmıştır. Her bir öğrencinin uygun olduğu vakitler göz önünde bulundurularak bir mülakat takvimi oluşturulmuştur. Bu takvime göre ayarlanan klinik mülakatlar, yalnızca araştırmacı ve katılımcının olduğu sessiz bir derslikte gerçekleştirilmiştir. Her bir etkinlik A4 boyutundaki boş bir sayfanın baş kısmına yazılarak alt tarafında öğrencinin düşüncelerini aktarabileceği boşluk bırakılmıştır. Tüm mülakatlar katılımcıların izni dahilinde ses kaydına alınmıştır. Özellikle problemlerin çözümü sırasında silgi kullanılmamasına dikkat edilmiştir. Klinik mülakatlar, problemlerin özelliklerine göre yaklaşık süreleri 8 dk. ile 34 dk. arasında değişmektedir. Tablo 3.2~~.~~’de öğrencilerle yapılan klinik mülakatların tarihleri ve süreleri sunulmuştur. Araştırmacı ise problem çözümü sürecinde dikkatlice bu süreci takip edip gerekli yerlerde öğrenciye sorular yönelterek derinlemesine bilgi almaya çalışmıştır.

Tablo 3.2

Öğretmen Adayları İle Yapılan Klinik Mülakatlara Ait Tarih ve Süreler

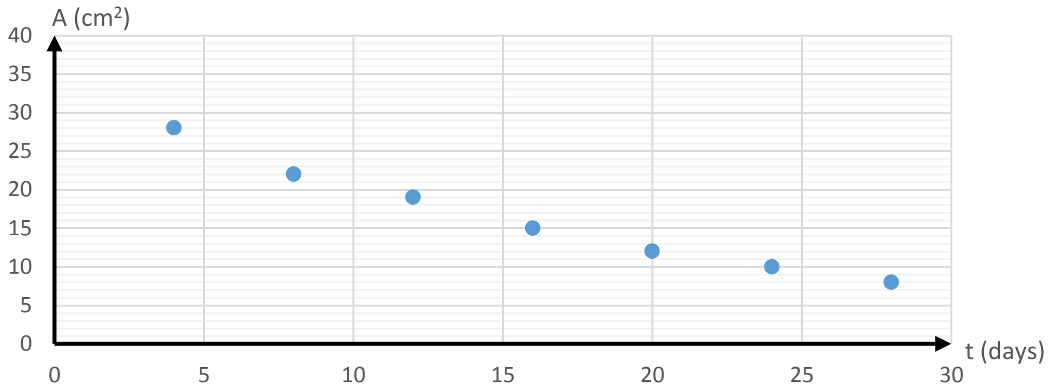
	1. Mülakat	2. Mülakat	3. Mülakat
Aylin	20.05.2014 21.20 dk.	27.05.2014 11.17 dk.	30.05.2014 9.16 dk.
Banu	21.05.2014 11.14 dk.	26.05.2014 8.38 dk.	29.05.2014 15.00 dk.
Derya	21.05.2014 10.38 dk.	28.05.2014 13.00 dk.	29.05.2014 31.39 dk.
Ece	23.05.2014 8.50 dk.	27.05.2014 7.58 dk.	30.05.2014 22.2 dk.
Harun	20.05.2014 22.45 dk.	26.05.2014 12.24 dk.	29.05.2014 17.55 dk.
Hikmet	20.05.2014 14.55 dk.	2.06.2014 10.00 dk.	2.06.2014 33.00 dk.
Leyla	21.05.2014 9.03 dk.	27.05.2014 10.08 dk.	30.05.2014 19.4 dk.
Nurdan	21.05.2014 13.53 dk.	28.05.2014 15.27 dk.	12.06.2014 23.29 dk.
Önder	21.05.2014 11.16 dk.	26.05.2014 10.56 dk.	29.05.2014 34.36 dk.
Umut	20.05.2014 18.14 dk.	27.05.2014 18.40 dk.	30.05.2014 19.10 dk.

3.3.1. Pilot çalışma

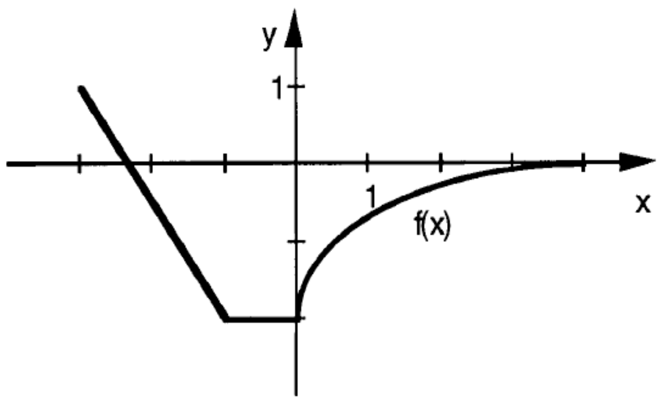
Pilot çalışma yapılmasının amacı, asıl uygulamada kullanılacak olan veri toplama aracının son halini almasını sağlamak, veri toplama sürecine yönelik tecrübe kazanmak ve bu süreçte meydana gelmesi olası olan problemleri önceden fark edip önlem almaktır. Belirtilen bu amaçlar dahilinde pilot çalışma süreci, veri toplama aracındaki problemleri oluşturmakla başlamıştır. Araştırma konusuyla ilgili alan yazın ve kaynak kitaplar kullanılarak öncelikle bir problem havuzu oluşturulmuştur. Özellikle birden fazla çözüm yolunu içeren soruların yer aldığı 45 adet problem, alanında uzman bir kişiyle incelenerek 30'a indirilmiştir. Bu eleme, rutin problem olmama durumuna göre gerçekleştirilmiştir. Sonrasında eldeki 30 soru, ilgili olduğu kavramlara göre homojen bir şekilde dağıtılmaya çalışılarak 10 sorudan oluşan üç adet test elde edecek şekilde ayrılmıştır. 2013-2014 eğitim öğretim yılı güz döneminde bir devlet üniversitesinin ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarına bu testler uygulanmıştır. Öğretmen adaylarına uygulanan testler için istedikleri kadar süre verilerek her bir soruyu uygun gördükleri yöntem ile çözmeleri istenmiştir. Birinci test 24 kişiye, ikinci test 19 kişiye, üçüncü test ise 23 kişiye uygulandıktan sonra öğrencilerin yapmış oldukları tüm çözüm yolları araştırmacı tarafından kontrol edilmiştir. Öğrencilerin farklı çözüm yolları ile çözüme ulaştırdığı 7 soru, veri toplama aracında kullanılmak üzere seçilmiştir. Bu sayede öğrencilerin bakış açıları da dikkate alınarak birden fazla çözüm yolunu bünyesinde barındıran problemlerin seçilmesi sağlanmıştır. Devam eden literatür çalışmaları neticesinde benzer konulu çalışmalarda kullanılan (Lithner, 2000a; Boesen, Lithner, ve Palm 2010) üç problem daha eklenerek 10 soruluk veri toplama aracı oluşturulmuştur.

Veri toplama aracı oluşturulduktan sonra pilot çalışmanın klinik mülakatlar aşamasına geçilmiştir. Ortaöğretim matematik öğretmeni adayları arasından rastgele seçilen ve araştırmaya katılmaya gönüllü olan 3 öğretmen adayı ile klinik mülakatlar yapılmıştır. Belirlenen görüşme saatlerine göre sadece araştırmacı ve öğrencinin bulunduğu uygun bir sınıf ortamında mülakatlar gerçekleştirilmiştir. 10 problemden oluşan veri toplama aracı iki kısma ayrılarak, her bir mülakatta öğrencilerden 5 probleme cevap bulmaları istenmiştir. Tüm süreçler öğrencilerin izni dahilinde ses kaydına alınmıştır. Süreleri 22 dk. ile 41 dk. arasında değişen 6 klinik mülakat gerçekleştirilmiştir. Bu süreçlerin ardından verilen cevaplar kontrol edilmiştir. Elde edilen sonuçlar alanında uzman iki matematik eğitimcisiyle tartışılarak pilot çalışmadaki veri toplama aracından dört soru çıkarılıp esas veri toplama aracı elde edilmiştir. Yapılan çalışmalar ve uzman görüşleriyle veri toplama aracının içerik geçerliği sağlanmıştır.

Veri toplama aracından çıkarılan dört soru ve bu problemin çıkarılma sebepleri ise şu şekildedir: Pilot çalışmanın birinci problemi "$y = ax^2 + bx + c$ *parabolünün tepe noktasının koordinatlarını bulunuz*" şeklindedir. Verilen bir parabolün tepe noktasının koordinatlarını sorgulayan bu problemde, öğrenciler kalıp olarak hatırladıkları koordinatlar ile doğrudan sonucu yazmaya yönelmişlerdir. Etkili bir düşünme gerektirmeden, direkt sonuca ulaşılan bu problemin öğrenciler için rutin bir problem olduğu kararına varılması nedeniyle veri toplama aracından çıkarılmıştır. İlgili literatürden alınan pilot çalışmanın yedinci problemi "*Bir yaranın iyileşme hızını tahmin* *etmek için, yara alanı her 4 günde bir saat 12:00'de ölçülmektedir. Sonuçlar aşağıdaki tabloda yer almaktadır. Ölçümün alan olarak yaklaşık değeri* $A = 34.0{,}95^t\ cm^2$ *üstel fonksiyonuyla ifade edilmiştir. Burada t ölçüm yapılan günün kaçıncı gün olduğunu göstermektedir. Yara alanının 1* $cm^2/gün$*'e kadar azalması için kaç gün geçmelidir."*



şeklindedir. Çözüm sürecinde, öğrencilerin problemi net bir şekilde anlayamadıkları, özellikle de grafikteki noktaların kesin yerlerini belirleyemedikleri fark edilmiştir. Belirsizliğin sonucu olarak da öğrenciler derinlemesine bir yorumda bulunamamıştır. Bu sebeple problemin veri toplama aracından çıkarılmasına karar verilmiştir. Pilot çalışma neticesinde veri toplama aracından çıkarılmasına karar verilen bir diğer problem ise;



"

f(x) fonksiyonun grafiği yukarıdaki gibidir

a) $f'(x)$ *in grafiğini oluşturunuz*

b) $f(-2), f'(0), f''(2)$ *nedir?*

c) $g'(x) = f(x)$ *ise* $g(x)$ *in grafiğini oluşturunuz.* “

şeklinde verilen sekizinci problemdir. Bu problemde türev kavramı hakkında matematiksel akıl yürütme becerileri incelenmek istenmiştir. Fakat kesin noktaların yine tam olarak belirli olmaması ve sorunun anlaşılamaması nedeniyle transkript aşamasında belirsizlikler yaşanmıştır. Öğrenciler “*şunu şuradan çizelim. Şurayı da şöyle getirelim*” şeklinde cümlelerle çözüme gitmiştir. Bu durumda verilerin net olarak belirlenmesini engellediği için veri toplama aracından çıkarılma kararı alınmıştır. Son olarak pilot çalışmayla veri toplama aracından çıkarılmasına karar verilen problem ise “*Bir aralıkta asla sıfır olmayan bir sürekli fonksiyonun bu aralıkta asla işaret değiştirmeyeceği doğru mudur? Cevabınızı gerekçeleriyle açıklayınız.*” şeklinde yer alan onuncu problemdir. Bu problemin çözümünde pilot çalışmaya katılan öğrenciler hiçbir yorum yapamamıştır. Bu problemin standart seviyenin üzerinde bir problem olduğu kararına varılmıştır.

Araştırmacı, pilot çalışma süreciyle asıl uygulamaya yönelik birçok deneyim kazanmıştır. Bu deneyimlere katılımcıların özellikleri açısından bakıldığında, özellikle kendisini iyi bir şekilde ifade edebilen bireylerin önemi anlaşılmıştır. Aksi takdirde düşündüğünü ya da düşünmek istediğini anlaşılır şekilde aktaramayan bireylerden etkili bilgi alınamamaktadır. Bunların yanında verilen problemler üzerinde bir akıl yürütme süreci oluşturabilmek için belirli bir akademik başarının gerekliliği anlaşılmıştır. Aksi takdirde öğrenci değil matematik akıl yürütme süreçlerinin en alt basamağını kullanmayı, hiçbir matematiksel yorum yapmadan sessizce soruya bakmayı tercih etmektedir. Mülakat sürecine dair elde edilen deneyimlere bakıldığında ise tek seferde beş problemin fazla olduğu kararına varılmıştır. Öğrenciye kullanabildiği kadar süre tanınmasına rağmen öğrencide sıkılma durumu oluşmaktadır. Bu sebeple tek bir klinik mülakatta en fazla iki probleme yer verilmesi uygun görülmüştür. Pilot çalışmadaki klinik mülakatlar esnasında silgi kullanımının yanlışlığı da anlaşılmıştır. Çünkü cevaplar analiz edilirken öğrencinin o süreçte yaptığı işlemlerle görüşmeler karşılaştırmalı olarak ele alınmaktadır. Yazılıp silinen işlemler, akıl yürütme becerilerinin daha etkin belirlenmesine engel olmaktadır. Klinik mülakat sürecine dair edinilen bir diğer tecrübe de bu süreçte araştırmacının öğrenciye daha fazla sonda sorular yöneltmesidir. “soruyla ilgili düşüncen nedir?”, “bu yöntemi seçmendeki sebep nedir?", "… kavramı ne demektir?", "neden bu şekilde bir düşünce sundun?" tarzındaki sorularla ortaya konulan matematiksel akıl yürütme sürecine daha etkin bir ışık tutulması sağlanmaktadır.

3.4. Verilerin Analizi

Bu araştırmada, veri analizi için betimsel analiz tekniği kullanılmıştır. Nitel bir veri analizi tekniği olan betimsel analiz için analiz süreci, eldeki verilerin daha önceden belirlenmiş temalara göre özetlenip yorumlanmasıyla gerçekleştirilir. Var olan temalara, araştırma sorularından ulaşılabileceği gibi görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan boyutlar ve sorular dikkate alınarak da ulaşılabilir. Betimsel analizde amaç, mevcut verileri sistematik ve açık bir şekilde betimleyip düzenleyerek yorumlamak; neden sonuç ilişkilerini irdeleyip birtakım sonuçlara ulaşmaktır. Bu süreçte görüşülen ya da gözlenen katılımcıların düşüncelerini çarpıcı bir şekilde yansıtabilmek amacıyla da doğrudan alıntılara sık sık yer verilir (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel akıl yürütme becerilerinin araştırıldığı bu araştırmada, veri analizi için betimsel analiz tekniği çatısı altında Lithner (2006) tarafından literatüre kazandırılan yapılar ve sınıflandırmalar kullanılmıştır. Lithner (2006), oluşturduğu bu yapılar ile oldukça kompleks olan matematiksel akıl yürütme durumlarını karakterize etmiştir. Bu sayede matematiksel akıl yürütme becerilerini belirli türlere ayırmıştır. Betimsel analiz tekniğiyle ulaşılan bu türler, analiz sürecinin de temalarını oluşturmuştur. Veri toplama aracı ile katılımcılardan elde edilen ham verilere betimsel analizin nasıl uygulanacağı ise yine Lithner (2006) tarafından ayrıntılı olarak belirtilmiştir. Bu sayede daha sistematik, açıklayıcı ve okuyucunun kolay anlayabileceği bir betimleme süreci oluşturulmaya çalışılmıştır. Bunun yanında araştırma güvenirliğini sağlamak amacıyla araştırma da kullanılan yöntem, veri toplama aracı, veri toplama süreci ve analiz işlemleri ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

Betimsel analiz sürecine başlamadan önce, veri toplama aracı kullanılarak öğrencilerle yapılan görüşmelerden elde edilen verilerin ses kayıtları bilgisayar ortamına aktarılmış; ardından bilgisayar ortamında yazılmıştır. Bu ses kayıtlarının yazılı halleri, araştırmacı tarafından belirli aralıklarla okunup kontrolü sağlandıktan sonra her bir öğrenciye ait veriler, veri toplama aracındaki her bir problem için ayrı olacak şekilde düzenlenmiş ve yedeklenmiştir. Adayların problemi çözerken kullandıkları çalışma kağıtları ve ses dosyalarından elde edilen yazılı dökümanlar bir araya getirildikten sonra ise betimsel analiz süreci başlamıştır. Veri toplama aracında yer alan bir problem için 10 katılımcının da verileri analiz edildikten sonra diğer problem ele alınmıştır. Tüm problemlerin analizleri tamamlandıktan sonra, kullanılan analiz sürecine hâkim başka bir uzman tarafından bu analizler kontrol edilmiştir. Yapılan ilk analizlerle uyumlu sonuçlara ulaşılmıştır. Böylece sonuçların güvenirliği sağlanmıştır.

Lithner (2006) tarafından oluşturulan kuramsal çerçeveye göre, matematiksel akıl yürütme becerisi türleri yani analiz sürecindeki temalar üç adettir. Bunlar, Ezbere Dayalı Akıl Yürütme (Memorized Reasoning MR), Algoritmaya Dayalı Akıl Yürütme (Algorithmic Reasoning AR) ve Yaratıcılığa Dayalı Akıl Yürütme (Creative Reasoning CR) adları altında belirlenmiştir. Yapılan betimsel analiz süreci ile katılımcıların her bir problem için ortaya koydukları matematiksel akıl yürütme becerileri bu üç tür dikkate alınarak analiz edilmiştir. Betimsel analiz sürecinin nasıl işletildiğine dair ayrıntılı açıklamaya geçmeden önce belirlenen üç temanın taşıdığı özellikler aşağıda sunulmuştur.

1) **Ezbere Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Memorised Reasoning (MR)):** Problem çözme sürecinde kullanılan akıl yürütmeler aşağıdaki iki şartı sağlıyor ise bu birey ezbere dayalı mtematiksel akıl yürütme türünü kullanmıştır.
   - **i)** Strateji seçimi hafızadaki bir cevap üzerinden hatırlanarak bulunur.
   - **ii)** Stratejinin uygulanması sadece yazmayı içerir. Birey çözümün tüm aşamalarını hatırlar ancak bunların anlamını bilmez.

2) **Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Algorithmic Reasoning (AR)):** Algoritma, belli bir problemi çözerken takip edilecek kurallar bütünüdür. Matematiksel olarak düşünüldüğünde ise ard arda gelen tüm iyi tanımlı prosedürlerdir. Bireyin kullandığı matematiksel akıl yürütme aşağıdaki şartları sağlıyorsa algoritmaya dayalı akıl yürütme yapılmaktadır:

   - **i)** Strateji seçimi yine hafıza da var olan cevap üzerinden hatırlanır. Ancak ezbere dayalı matematiksel akıl yürütmede olduğu gibi çözümün tüm detayları hatırlanmaz. Kurallar seti doğru sonuca götürür. Yeni bir çözüm yolu üretilmez.

ii) Kural verildiğinde ya da hatırlandığında stratejinin geri kalanı akıl yürüten için önemli değildir. Sadece dikkatsizlikten kaynaklanan hatalar sonuca ulaşmaya engel olur.

Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme kendi içinde alt kategorilere ayrılır. Kullanılan algoritmanın elde ediliş şekli bu kategorilerin oluşturulmasına zemin hazırlamıştır. Bu alt kategoriler; Bilinen Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Familiar Algorithmic Reasoning), Sınırlandırılmış Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Delimiting Algorithmic Reasoning), Rehber Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Guided Algorithmic Reasoning) şeklindedir. Rehber algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme de kendi içerisinde Kişi Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Person Guided Algorithmic Reasoning) ve Doküman Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Text Guided Algorithmic Reasoning) iki alt kategoriye ayrılır.

3) Yaratıcılığa Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Creative Reasoning (CR)): Yaratıcılık yeni bir şeyi üretmek için hayal etme ve yeteneği kullanmayı içerir. Problem hakkında yeni bir yol düşünmedir. Bireyin kullandığı matematiksel akıl yürütme aşağıdaki şartları sağlıyorsa yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme yapılmaktadır:

i) Çözüm için hatırlanan yol değil, yeni bir yol bulunmalıdır.

ii) Stratejinin seçiminde ve uygulanmasında akıl yürütmeler tartışmalar ile desteklenmelidir.

Eldeki veriler üzerine uygulanan betimsel analiz sürecinde veri toplama aracındaki tüm problemler tek tek ele alınarak her bir katılımcının o problem için ortaya koyduğu matematiksel akıl yürütme becerisi türü belirlenmeye çalışılmıştır. Bunun için ilk etapta yazıya dökülmüş olan görüşme ile öğrencinin o problemi çözerken kullandığı çalışma kâğıdı karşılaştırmalı olarak araştırmacı tarafından bir kaç kez okunmuştur.

Sonrasında öğrencinin sergilemiş olduğu bu düşünceler ışığında, Lithner (2006) tarafından betimsel analiz için belirlenen dört soruya cevap aranmıştır. Bu dört soru görüşme verileri yardımı ile araştırmacı tarafından ayrıntılı şekilde cevaplanmıştır. Veri toplama sürecini araştırmacı bizzat yürüttüğü için, öğrencinin problemi çözerken içinde bulunduğu ruh haline de hâkim olması, cevaplandırma sürecini kolaylaştırmıştır. Cevaplanan sorular neticesinde, öğrencinin o problem için sergilemiş olduğu matematiksel akıl yürütme becerisi türü sebepleri ile ortaya çıkmış olmaktadır. Daha sonra da bu akıl yürütme becerisi türü sürecin tüm özelliklerini yansıtan sınıflandırma kodlarıyla kodlanmıştır. Bu süreçte doğrudan alıntılara sıkça yer verilerek sonuçların güvenirlik ve geçerliği arttırılmaya çalışılmıştır. Cevabı aranan dört sorunun neler olduğu ve bu sorularda geçen kavramların ifade ettiği anlamlar aşağıda sunulmuştur.

Soru 1: Sergilenen matematiksel akıl yürütme sürecinin içerdiği farklı bileşen çeşitleri nelerdir?

Soru 2: Belirlenen bileşenlerin barındırdığı, matematiksel açıdan anlamlı olan veya olmayan özellikler nelerdir?

Soru 3: Araştırılan bu süreçte yer alan düşük ve yüksek seviyedeki matematiksel akıl yürütme türleri nelerdir?

Soru 4: Araştırılan bu muhakeme durumu çalışmasında yaşanılan gelişim ya da güçlüğün altında yatan ana sebepler nelerdir?

Analizler yapılırken bu sorulara verilen cevaplar S1, S2, S3 ve S4 şeklinde numaralandırılarak sunulmuştur. Belirtilen bu sorularda 'bileşen' ve 'bileşenlerin özellikleri' kavramları yer almaktadır. Lithner (2006)'in bu kavramlar ve çeşitleri için yapmış olduğu açıklamalar ise şöyledir:

Bileşen (Component): Akıl yürütme sürecinin temel birimlerini oluşturan çatı ifadedir. Üç farklı bileşen mevcuttur. Bunlar nesne, dönüşüm ve kavramdır.

- Nesne (Object): En temel birimdir. Bir kişinin yaptığı şey ya da yapılan bir şeyin sonucudur. Örneğin, sayılar, fonksiyonlar, grafikler, diyagramlar…
- Dönüşüm (Transformasyon): Bir nesnenin başka bir nesneye dönüşme olayıdır. Örneğin, temel aritmetik işlemlerinin reel sayılara uygulanması bir dönüşümdür.

- Kavram (Concept): Nesneler, dönüşümler ve onların özellikleri üzerine inşa edilmiş olan matematiksel fikirlerdir. Fonksiyon kavramı, sonsuzluk kavramı örnek olarak verilebilir. Kavram ifadesinin sınırları kesin olarak çizilemese de temelde ortak bir anlayışı sağlamak esastır.

Bir bileşenin sahip olduğu nesne, dönüşüm ve kavram ifadeleri matematik toplumu tarafından kabul edilebilir doğrulukta ise bu bileşen, kabul edilebilir bileşen (accepted component) olarak adlandırılır. Bunun yanında bir de gerçek yaşamla ilgili olan ifadeler gerçek yaşam bileşeni (real world component) olarak adlandırılır.

Bileşenlerin özellikleri (Property): Belirtilen bileşenlerin matematiksel açıdan durumlarını ifade eden yapıdır. Alt kategorileri ise şöyledir:

- Kabul edilebilir özellik (Accepted property): Bir bileşen özelliğinin bu kategoride olması için kabul gören matematiksel gerçeklere dayalı olması gerekir. Örneğin tabanları aynı olan iki üslü sayının çarpımında üsler toplanır. Bu bir kabul edilebilir bileşen özelliğidir.
- Modelleme Özelliği (Modelling property): Gerçek yaşamdaki bir durumun matematiksel dünyaya aktarılarak çözüm bulunabilmesidir. Bu aktarım üç aşamada yapılır. Birincisi, gerçek yaşam durumu sunulur ve bu durum pür matematik dünyasına transfer edilir. İkincisi, soru matematiksel metotlarla çözülür. Üçüncüsü ise, sonuç tekrar gerçek yaşam durumuna çevrilir ve yorumlanır. 1. ve 3. safhalarda gerçekleştirilen dönüşümdür. 1. Safhada girenler ile 3. Safhada çıkanlar kabul edilebilir bileşen (accepted component) değil gerçek durum bileşenidir (real world component).
- Matematiksel Özellik (Mathematical property): Bir özelliğin matematiksel özellik olabilmesi için kabul edilebilir özellik (accepted property) ya da modelleme özelliği (modelling property) olması gerekir.
- Yüzeysel ve derinlemesine özellik (Surface and intrinsic property): Derinlemesine özellik problem çözme sürecindeki belli bir durumun bileşenlerinin merkezidir. Yani konunun özüne hâkim olan düşünce yapısını içerir. Yüzeysel özellik ise bu durumla çok az ilişkilidir veya hiç değildir. Yani problem çözme sürecine hâkim olmayan düşünce yapılarını içerir.

Analiz sürecinde, belirtilen dört soru ve o sorulardaki alt kavramlar kullanılarak matematiksel akıl yürütme becerisi türlerine ulaşılmaya çalışılmaktadır. Birinci soru ile öğrencinin ortaya koyduğu düşünce yapısını bölümlere ya da bileşenlere ayırmak amaçlanmaktadır. Böylece içinde bulunulan karışık tablo sadeleştirilmeye çalışılmaktadır. İkinci soru ile bölümlere ayrılıp sadeleşen bu tablodaki bileşenler tek tek ele alınarak bunların matematiksel özellik taşıyıp taşımadıkları; yüzeysel veya derinlemesine düşünce yapısı barındırıp barındırmadıklarını incelemek amaçlanmaktadır. Uygun bileşenleri ve onların özelliklerini belirlerken asıl hedeflenen durum ise akıl yürütme türünü yakalayabilmektir. Birinci ve ikinci soruda belirlenen bileşenler ve bileşenlerin özellikleri ışığında mevcut akıl yürütme becerisi türü şekillenmeye başlamaktadır. Üçüncü soru ile öğrencinin sunmuş olduğu bu tablodaki düşük ve yüksek seviyedekimatematiksel akıl yürütmelere dikkat çekilir. Bileşenlerdeki özellikler de göz önünde bulundurularak bu tablonun genel resminin ortaya çıkması sağlanır. Ortaya konulan akıl yürütmenin belirtilen matematiksel akıl yürütme becerisi türlerinden hangisiyle uyum gösterdiği açıklanır. Dördüncü soruda ise bu tablonun altında yatan nedenlere odaklanılır. Öğrencinin görüşme sürecinde kullandığı ifadelerden ve görüşme sürecindeki tavrından hareketle böyle bir akıl yürütme sürecini ortaya koyma nedenleri belirlenmeye çalışılır.

Tüm katılımcıların her bir problem için sergilemiş oldukları matematiksel akıl yürütme süreçleri araştırmacı tarafından belirtilen şekilde analiz edilmiştir. Analiz süreci sonunda da yine Lithner (2006) tarafından sınırları çizilen sınıflandırma kodları kullanılarak, tüm matematiksel akıl yürütme süreçleri için birer kod oluşturulmuştur. Bu kodlama sistemi, analiz sürecinde ayrıntılı bir şekilde anlatılan tüm bilgilerin okuyucu tarafından birkaç simgeyle anlaşılmasına fırsat vermektedir. Belirtilen bu kodlama sistemi, analiz sonucu elde edilen matematiksel akıl yürütme becerisi türünü ve üç farklı alt kategoriyi barındırmaktadır. Bu alt kategoriler ise şu şekildedir:

1) Doğruluk (Correctness): Verilerin MR, AR veya CR olarak sınıflandırılmasından sonra yapılan akıl yürütmenin tam olarak yapılıp yapılmadığını belirtmede kullanılan kategoridir. Bu açıdan bakıldığında yapılan akıl yürütme ile ulaşılan sonuç doğru ise d,yanlış ise y; ne tam doğru ne de tam yanlış ise olası yani o;eğer bu durumların üçü de mevcut değilse herhangi bir sonuç yoksa x (belirsiz) olarak kodlama yapılır. Genel olarak

akıl yürütmeler dikkatsizlik hataları hariç ya doğru ya da olası olarak kodlanır.

2) Çeşitlilik (Range): Çözülmeye çalışılan bir problemde, farklı akıl yürütme türleri bir arada bulunabilir. Örneğin yapılan akıl yürütmenin bir kısmı MR'nin özelliklerini gösterirken diğer kısmı AR'nin özelliklerini gösterebilir. Bu durumda akıl yürütmenin türüAR olarak kodlanır. Akıl yürütmeler bu açıdan sınıflanırken lokal (l, **l**ocal) ya da **g**lobal (g) terimleri ile adlandırılır. Eğer tek bir akıl yürütme türü hakim ise g(global), birden fazla tür mevcut ise l (lokal) bu durumların ikisi de mevcut değilse x (belirsiz) olarak kodlama yapılır.
3) Matematiksel esaslar (Mathematical foundation): Çözüm oluşturulurken, matematiksel açıdan yüzeysel (**s**urface) ya da derinlikli (**i**ntrinsic) özelliklerden hangisinin dikkate alınarak bir akıl yürütme yapıldığını gösterir.Yüzeysel ise y, derinlikli ise d, bu durumların ikisi de mevcut değilse x (belirsiz) olarak kodlama yapılır.

Sınıflandırma yapılırken akıl yürütmelerin bu özellikleri de dikkate alınarak kodlamalar gerçekleştirilmekte ve bu kod AR_{xxx} şeklinde ifade edilir. Burada AR, üzerinde çalışılan durum için belirlenen matematiksel akıl yürütme türünü; alt kategorilerdeki birinci x, akıl yürütmenin doğruluğunu; ikinci x, akıl yürütme türü çeşitliliğini; üçüncü x ise akıl yürütmenin matematiksel temellerini göstermek için belirlenmiştir. Veriler için kullanılan sınıflandırma kodlamasına bir örnek verelim: yapılan akıl yürütme incelenmiş AR_{dgx} şeklinde bir kod verilmiş olsun. Bu kodun anlamı şudur: Bireyin yaptığı akıl yürütme temel akıl yürütme türlerinden algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütmedir. Bunun yanında sırasıyla verilen alt kodlara bakıldığında, doğruluk kategorisinde d kodu ile doğru bir akıl yürütme yaptığı; çeşitlilik kategorisinde g kodu ile sadece algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütmenin özelliklerini sergilediği; matematiksel temeller kategorisinde ise x kodu ile belirsiz bir durumun mevcut olduğu anlaşılmaktadır. Bunun anlamı ise yüzeysel veya derinlikli bir düşünce sergilediği noktasında kesin ayrımın yapılamadığıdır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme, algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme ve yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme becerilerine ait bulgulara yer verilmiştir. Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel akıl yürütme becerilerini incelemeye yönelik yapılan klinik mülakatlardan elde edilerek metin haline getirilen ses kayıtları, çalışma kâğıtları ve bu iki veri kaynağı ışığında araştırmacı tarafından yapılan analizler, üç başlık altında toplanmış ve yorumlanmıştır.

4.1. Öğretmen Adaylarının Ezbere Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular

Ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme sürecinde öğrenci, karşılaştığı problem durumuna ait çözüm yolunu önceki öğrenme yaşantılarından birebir hatırlayarak, sadece yazma işlemini yapar ve sonuca ulaşır. Bu aşamalarda kullandığı matematiksel kavramlar hakkında derinlemesine açıklamalarda bulunmaz ve yorum yapmaz. Veri toplama aracında yer alan 2, 3 ve 4. problemlerde, araştırmaya katılan öğretmen adaylarından bazıları ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme sürecini kullanarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Bunlar: Problem 2 için, bir öğrenci; Problem 3 için, bir öğrenci; Problem 4 için, altı öğrenci şeklinde dağılmıştır. İlgili problem durumu, öğretmen adaynın çalışma kâğıdı, klinik mülakatın metin hali ve bu yazılı dokümanlar ışığında araştırmacının yapmış olduğu analizler aşağıda sunulmuştur. Ayrıca, sınıflandırma kodu ile öğretmen adayının sergilediği akıl yürütme süreci özetlenmiştir. Bu sayede tüm verilerin bütüncül olarak düşünülmesi sağlanarak, akıl yürütme becerilerine dair daha geçerli ve güvenilir sonuçlara ve yorumlara ulaşılacağı düşünülmektedir.

4.1.1. Problem 2

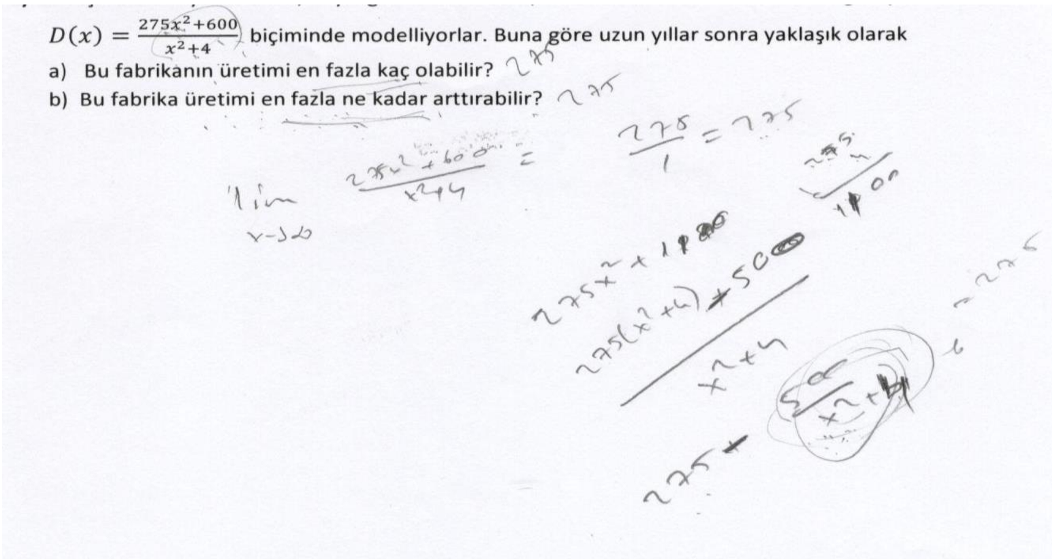
"Bir işletmenin yöneticileri, x yılı göstermek üzere, ton cinsinden üretimi veren bağıntıyı $D(x) = \frac{275x^2+600}{x^2+4}$ biçiminde modelliyorlar. Buna göre uzun yıllar sonra yaklaşık olarak

a) Bu fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir?

b) Bu fabrika üretimi en fazla ne kadar arttırabilir?"

4.1.1.1. Önder'in problem 2'ye ait matematiksel akıl yürütme durumu

Önder'in Problem 2'ye ait olan çalışma kağıdı Şekil 4.1, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.1. Önder'in problem 2'ye ait çalışma kağıdı

Önder'in Problem 2'ye Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Soruyu tam olarak anlamaya çalış Önder.*

Önder: *Evet uzun yıllar dediğine göre ben burada limit durumunu alırım. a şıkkını yapıyorum* $lim_{x\to\infty} \frac{275x^2+600}{x^2+4}$ *olur. Eşittir; burada sonsuz bölü sonsuz belirsizliği vardır. İki kere türev alınırsa* $\frac{275}{1}$ *den 275 gelir. a şıkkının cevabı bana göre 275.*

Mülakatçı: *Neden limit aldın?*

Önder: *Limit almamın sebebi uzun yıllar sonra dediğinden dolayı hocam. Yani uzun yıllar ne kadar uzun yıllar bunu 1 den başlatıp 2, 3, 4, 5 limit durumuna göre sonsuza götürürüm. Zaten en uzun durumu bu olur ve buradan bize yaklaşık olarak 275 değeri gelir yani. Ondan limit aldım.*

Mülakatçı*: Peki b şıkkı.*

Önder: *Bu fabrika üretimi en fazla ne kadar arttırabilir? Hocam burada da limit durumu var ama acaba benim çözdüğüm limit buraya mı giriyordu. En fazla ne kadar arttırılabilir. Bu yıl cinsinden oluyor bu ton cinsinden üretimi. Bir saniye ya… hıı burada hocam x in ömrünü soruyor bize yani değil mi? x yılı gösterdiğine göre en fazla ne kadar arttırılabilir dediğine göre x yani ne kadar büyük olabilir diyor. Burada x in ne kadar büyük olduğuna gelince…*

Mülakatçı*: x yıl. Bu fabrika üretimi en fazla ne kadar arttırır.*

Önder: *Hı… üretimi en fazla ne kadar arttırabilir… Soruyu anlamadım. Yani fabrikanın üretimi diyor. Iıı…(öğrenci düşünmektedir.)* $\lim\limits_{x \to 0}$ *yapmamız gerekiyor herhalde hocam.*

Mülakatçı*: Neden?*

Önder: *Neden, çünkü aklıma başka hiçbir şey gelmiyor. Ben bunu yapamayacağım herhalde.*

Mülakatçı*: Düşün biraz daha. Nasıl bir şey istiyor neyi istiyor.*

Önder: *Tamam. Yani bu üretimi en fazla ne kadar arttırabilir? Şu sayının en fazla ne kadar büyük oluru istemiyor mu bizden? Şu bağıntının* $\frac{275x^2+600}{x^2+4}$ *ün ne kadar büyük olduğunu mu söylüyor bize?*

Mülakatçı: *Bu bulduğun nedir peki?*

Önder: *Bu bulduğum en fazla kaç olabilir dediği üretim yani. Bu mesela 1 yıl sonra* $\frac{675}{5}$ *den bir sayı gelecek ama 275 den küçük olur. Bu bulduğum herhalde onu verir. Bu fabrika üretimi ne kadar arttırabilir? Bir saniye x i sonsuza götürürsek o kadar arttırabilir. Hocam bu soruda en fazla ne kadar arttırılabilir derken şu fonksiyonun grafiğini düşünüp tepe noktasını bulsak, en fazla ne kadar arttırılabilir değil de şu en fazla kaç olabiliri öyle buluruz. Bu en fazla ne kadar arttırılabilir de bunun cevabı 275 olması gerekiyor herhalde. Yani b şıkkını buldum ben galiba. Bu fabrika üretimi en* *fazla ne kadar arttırabilir? 275 e kadar arttırabilir. Çünkü x yılı gösterdiğine göre x i sonsuza kadar götürürüm üretim sürekli artar. En fazla da 275 artar. b şıkkının cevabı 275 olur. Bu fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir. Şöyle 275.4 yazıyorum buda 1000 yapar. 1000 den fazla yapar 1100.*

Mülakatçı: *Neden 4 ile çarptın? Ne yapıyorsun?*

Önder: *Hocam şimdi şey yapacağım şunu 275 parantezine alıyorum* $\frac{275(x^2+4)-500}{(x^2+4)}$ *bunu da* $275-\frac{500}{x^2+4}$ *yaptım. Sonra en fazla kaç olabilir dediğine göre şurayı en küçük yapacak değeri bulurum. En küçük yapacak değer 500 e yakın çıkması gerekiyor. Evet. Hocam bunun cevabı da 275.*

Mülakatçı: *Neden? 0 mı aldın orayı da (*$\frac{500}{x^2+4}$*) .*

Önder: *Yani x i ne kadar arttırırsam bu değer küçülür dedim. Bu* $\frac{500}{x^2+4}$ *de* x^2 *yi de sonsuza götürdüm. Burası da 0 geldi.* $275-0=275$ *geliyor. Ondan dolayı yaptım.*

Mülakatçı: *O zaman hem en fazla değer 275 hem de ne kadar arttırabileceği değer de mi 275?*

Önder: *Evet hocam ama ikisinden birisi doğru. Yani hocam üretimi ne kadar arttırabilir derken yani ben x yılı sürekli üretim arttığına göre sonsuza götürdüm yani limit durumuna baktım. Sonsuzda 275 çıkıyor bunun cevabı ve b şıkkını ondan dolayı dedim. a şıkkında da farklı bir yöntemden yaptım. a şıkkını fonksiyon gibi düşündüm bunu zaten fonksiyon bu bağıntı yani. Bağıntıda öncelikle şunu eksi cinsten yazmak için* $\frac{275x^2+1100-500}{x^2+4}$ *şeklinde yazdım sonra* $\frac{275(x^2+4)-500}{x^2+4}$ *den* $275-\frac{500}{x^2+4}$ *geldi sonra buranın en fazla kaç olabilir dediğine göre,* $275-$ *olduğuna göre buranın en küçük değerini bulmak lazım. Yani buranın dediğim* $\frac{500}{x^2+4}$ *değerinin en küçük değerini bulmak lazım. Eee... bunda da x i sürekli arttırıyorum çünkü bize en fazla kaç olur dediğine göre istediğim gibi artırabilirim. Burayı da durumdan dolayı 500 buldum.*

Mülakatçı: *Cevaba ilişkin başka bir yorumun var mı?*

Önder: *Hayır.*

Önder'in Problem 2'ye Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Önder'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Limit kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyonlar), bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Önder çözüm prosedüründe $x \to \infty$ durumu için limit almaya karar vermiş ve a şıkkı için bir sonuç belirlemiştir. Ancak b şıkkını okuyunca kafası karışmış; öncelikle soruyu çözemeyeceğini belirtip, sonrasında da a şıkkı için bulduğu sonucun b şıkkına ait olduğunu savunmuştur. Önder aslında soruda sorulmak istenileni bir türlü anlayamamıştır. Sorunun a şıkkı için de verilen fonksiyonu yeniden düzenleyip $x \to \infty$ için limit almış ve b şıkkıyla aynı sonucu bulmuştur. Ancak yaptığı işlemleri derinlemesine düşünemeyince, iki şık içinde ayrı ayrı yollar takip ettiğini belirtmiştir. Dolayısıyla yüzeysel bir düşünce yapısının hâkim olduğu bu çözüm prosedüründeki aritmetik işlemler doğru olmasına rağmen, sürecin kendisi matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Önder'in soruyu okur okumaz, limit alması gerektiğini belirtmesi, sonrasında ise yaptığı bu işlemin hangi şıkta olacağından emin olamaması sorunun çözümünden daha önce haberdar olduğunu düşündürmektedir. Ayrıca b şıkkının çözümüne geçtiğinde, "*Hocam burada da limit durumu var ama acaba benim çözdüğüm limit buraya mı giriyordu*?" şeklindeki ifadesi bu düşünceyi destekler niteliktedir. Bu aşamadan sonra b şıkkı için uyguladığı çözüm prosedürünün, a şıkkında yapmış olduğu işlemle aynı olduğunu fark etmemesi çözümü ezberden yaptığının bir diğer göstergesidir. Uygulanan sürece hâkim olmaksızın sadece çözümün yazıldığı akıl yürütme türü olan MR, Önder'in bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü olarak sınıflandırılabilir.

S4: Önder'in akıl yürütme sürecinde, soruda sorulmak istenileni anlamaması, yaptığı uygulamaların ifade ettiği anlamları derinlemesine düşünememesi güçlük çektiği noktalar arasındadır. Ayrıca yapması gereken çözümü ezberlemesi onun farklı düşünceler ortaya koymasına engel olmuştur. Kafası iyice karışınca çözüme ulaşamayacağı düşüncesiyle karamsarlığa kapılmıştır. Oysa aritmetik işlemleri doğru ilerletmesi, konuyla ilgili bir bilgi birikiminin varlığını göstermektedir. Ancak Önder'in farklı bir yol tercih etmesi; kendi bilgi birikimine ve düşünce gücüne olan güvensizliğinin göstergesi sayılabilir.

Önder'in Problem 2'ye Ait Sınıflandırma Kodu

Önder'in Problem 2'ye ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **MR$_{xgy}$**olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü MR; doğruluk kategorisinde, problemde a şıkkı için doğru, b şıkkı için yanlış bir sonuca ulaşıldığından x (belirsiz); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

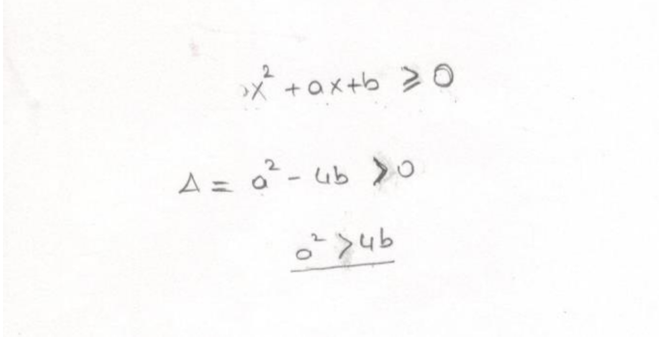
Ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türü problem 2 için sadece Önder tarafından kullanılmıştır. Öğrencinin bu akıl yürütme türünü kullanması, onun tek noktaya yani bu problem için limite odaklanmasına sebep olduğundan, düşüncelerini aktifleştireceği ortam kaybolmuştur. Bu ortam, yapmış olduğu aynı işlemleri farklıymış gibi algılatmıştır. Öğrenme ortamlarının ezberlemeye yönelik ilerlemesi, öğrencinin bu problemde yaşadığı sorunla karşılaşmasına temel hazırlamaktadır.

4.1.2. Problem 3

"$y = \sqrt[4]{x^2 + ax + b}$ *fonksiyonunun en geniş tanım kümesinin gerçek sayılar kümesi olabilmesi için* a *değerinin nasıl seçilmesi gerektiğini belirleyiniz."*

4.1.2.1. Ece'nin problem 3'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin Problem 3'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.2, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.2. Ece'nin problem 3'e ait çalışma kağıdı

Ece'nin Problem 3'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Ece sesli düşünerek çözmeni istiyorum.*

Ece: *Fonksiyonun en geniş tanım kümesi… ilk önce böyle seçsem* $(x^2 + ax + b \geq 0)$

Mülakatçı*:* *Neden?*

Ece*: Neden, çünkü kök işleminin tanımlı olabilmesi için içerisinin sıfırdan büyük veya eşit olması gerekiyor. Şimdi buna baktığım zaman eşitsizliğin sıfırdan büyük olabilmesi için* Δ*'sı* $a^2 - 4b$ *buda 0'dan büyük olmalı.*

Mülakatçı*: Neden* Δ*'ya girdin?*

Ece: *Çünkü eşitsizlikleri hatırlıyorum. Bu 0'dan büyük olduğu zaman* Δ*'sı da 0'dan büyük a'sı da 0'dan büyük olurdu. Yani a dediğim de şuradaki* x^2*'li terimin katsayısı. a değeri nasıl seçilmeli derken mesela ne demek istiyor tam olarak.*

Mülakatçı*: Yani özelliği ne olmalı a'nın ki bu fonksiyonun tanım kümesi reel sayılar olsun.*

Ece: *Yani denklem şeklinde bir şey mi olmalı?*

Mülakatçı: *a'nın hangi özellikte olması gerekiyor, nasıl seçilmesi gerekiyor?*

Ece: *a, b'ye bağlı olarak seçilmesi gerekiyor. Buradan o çıkıyor.*

Mülakatçı*:* Δ*'yı* $\geq$*'mi seçtin* $>$*'mü? Buradan hangisi olduğunu seçemedim de.*

Ece: *Onu bence* $>$ *almalıyım.*

Mülakatçı: *Neden?*

Ece: *Ben direkt ezberden gidiyorum şuan yani.*

Mülakatçı: *Neyi kullanıyorsun ezberden?*

Ece: *Şu şey vardı ya hani eşitsizliklerde bu* $\geq$ *olduğu zaman* Δ*'sı da büyüktür. Şurada ki* x^2 *'nin de büyük olması gerekiyor. Sadece onu kullandım şuan.*

Mülakatçı: *Bunun anlamını biliyor musun peki? Neden büyük olması gerektiğini?*

Ece: *Hayır onu bilmiyorum.* $a^2 > 4b$*. Buradan sadece hani a, b'ye bağlıdır şeklinde bir şey çıkıyor.*

Mülakatçı:*Ezberden gittim neden büyük olduğunu bilmiyorum dedin. Bunun sebebini bilmen sana ne sağlayacaktı. Ne oldu da sen şuan sadece ezberi kullandın?*

Ece: *Mesela şuan benim yaptığım yanlış olabilir. Ama mantığını bilseydim direkt kendim de çıkartabilirdim.*

Mülakatçı: *Peki bunun mantığını bilmemenin sebebi sebebi sence ne olabilir?*

Ece: *Kendim de olabilir yani kimseyi sorumlu tutmuyorum da bilmiyorum yani bize mantığı öğretildi mi yoksa direkt böyle mi verildi. Lise de bize direkt formül olarak verilmişti bunlar. Bende şuan da oradan hatırladım. Ama kendim çıkarmak istesem, büyük olması için 0'dan yok hayır çıkaramıyorum.*
Mülakatçı: *Tamam Ece*

Ece'nin Problem 3'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Ece'nin akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Eşitsizlik kavramı bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Ece çözüm prosedürünün tüm aşamalarında oldukça yüzeysel bir düşünce şekli sergilemiştir. Öncelikle köklü sayıların özelliklerinden dolayı kök içindeki sayının sıfırdan büyük veya eşit olması gerektiğini belirtmiş, buna bağlı olarak da Δ'nın yani $a^2 - 4b$'nin 0'dan büyük olması gerektiğini düşünerek sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Ancak bu aşamaların hiçbirinde herhangi bir tartışma ortamı oluşturamamış ve uyguladığı işlemlerin nedenlerini açıklayamamıştır. Eşitsizlik kavramıyla ilgili kavramsal bilgisi ezber boyutundadır. Çözüm prosedüründe kurmuş olduğu bağlantılar matematiksel olarak anlamlı değildir. Ulaştığı sonuç ise yanlıştır.

S3: Ece akıl yürütme sürecinde ezbere dayalı bir yol izlemiştir. Kullandığı kavramları öğrenme yaşantısından hatırlamaktadır. Ancak bu kavramların ne ifade ettiğini ve hangi durumlarda kullanıldığını açıklayamamıştır. Tartışma ortamı oluşturamamış ve matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce sergileyememiştir. İçinde bulunduğu durumun kendisi de farkındadır ve şu ifadeleri kullanmıştır: " *ben direkt ezberden gidiyorum şuan*" bu ifadeden de anlaşıldığı gibi Ece, yaptığı işlemlerin ve kullandığı kavramların matematiksel alt yapısını göz önüne almadan hatırladıkları vasıtasıyla sonuca ulaşmaya çalışmıştır. O halde bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü MR olarak sınıflandırılabilir.

S4: Ece öğrenme çevresinden edindiği hazır bilgileri kullanarak bir akıl yürütme süreci ortaya koymuştur. Kullanmış olduğu kavramların mantıksal açıklamalarını yapamadan sergilediği bu süreçte, oldukça yüzeysel bir düşünce yapısı benimsemiştir. Bu durum, ulaştığı sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını da tartışabilmesine engel olmuştur. Çünkü uyguladığı işlemlerin kavramsal bilgisine hâkim değildir. Ece'nin ifade ettiği "*Mesela şuan benim yaptığım yanlış olabilir. Ama mantığını bilseydim direkt kendim de çıkartabilirdim*." şeklindeki düşünce bu durumu açıklar niteliktedir. Ayrıca *" Lise de bize direkt formül olarak verilmişti bunlar*" ifadesiyle de öğrenme çevresinden bu bilgileri hazır olarak aldığı; bu durumunda onu yorum yapmadan uzaklaştırdığı sonucuna varılabilir.

Ece'nin Problem 3'e Ait Sınıflandırma Kodu

Ece'nin Problem 3'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{MR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü MR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

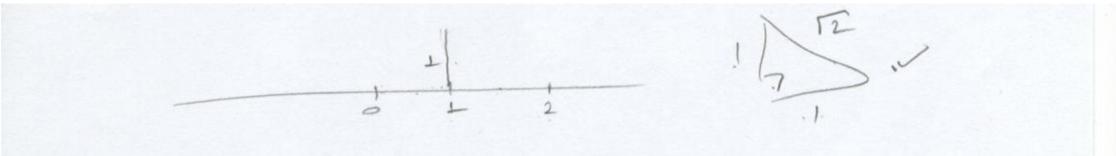
Ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 3 için sadece Ece tarafından kullanılmıştır. Matematiksel kavramlar hakkında yeterli kavramsal bilgiye sahip olmaması ve zihninde kalan yarım bilgiler sergilemiş olduğu bu sürecin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Öğretim ortamlarında, özellikle de öğretmen adaylarında matematiksel açıdan sağlam temellere oturmuş bir alt yapının oluşturulmasının önemi bir kez daha görülmüştür.

4.1.3. Problem 4

"$\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki kesin yerini çizerek gösteriniz. "

4.1.3.1. Banu'nun problem 4'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Banu'nun Problem 4'eait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.3, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.3. Banu'nun problem 4'e ait çalışma kağıdı

Banu'nun Problem 4'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Banu:$\sqrt{2}$ *Sayısının kesin yerini çizerek gösteriniz.*
Mülakatçı: *Ne oluştu kafanda soruyu görünce?*
Banu: *Sanki bu soru sorulmuştu gibi geldi de. Şimdi şöyle*$[0,1]$ *bir de 2 alalım. Şimdi dik üçgende ne vardı. 1,1,* $\sqrt{2}$ *vardı. Immm... şimdi mantık gereği biz tam yerini belirleyemiyoruz ama 1 ile 2 arasında olacak* $\sqrt{2}$*. Şuradan 1 birim uzaklık alsak... Bunu nasıl yapmıştık yaa. Ben hatırlıyorum sanki böyle çizdik cetvelle de yaptık tam o kestiği nokta mı oldu hatırlıyorum ama hangi derste olduğunu hatırlamıyorum. Böyle kesrin üzerinde yine 1, 1, oluşturduk* $\sqrt{2}$*'yi hani oradan düşünerek dedik ki şurada kesiyor. Tam o nokta kesin noktadır dedik ama şu an nasıl çizeceğim onu düşünüyorum.*
Mülakatçı*: Peki o aklına gelmedi. Sen nasıl çözebilirsin bu soruyu?*
Banu: *Ben bunu bulur muyum? Ee... Bu zamana kadar kareköklerle hiç uğraşmadık hep tam sayılarla uğraştık. Açıkçası bulabilir miydim? Yani şuan aklıma direkt bu geldiği için başka bir şey yanmıyor aklımda açıkçası.* $\sqrt{2}$*... Biz* $\sqrt{2}$*'nin gerçek değerini bile bilmiyoruz değil mi. Hesap makinasından hesaplıyoruz. Muhakkak bu yöntemdir de başka bir yöntemi olduğu da düşünmüyorum. Yani pek fazla matematikte olmuyor ama bir de sonuç olarak karekök sayısı bu geometri de birkaç yoldan çözülebilir. Yani bir*

tek o yöntem vardır. Ben bulamadım başka. Onu da zaten size tam olarak açıklayamadım.
***Mülakatçı**: Tamam Banu.*

Banu'nun Problem 4'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Banu'nun akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Sayı doğrusu üzerine çizdiği $(1,2)$ aralığı, kenar uzunlukları $1, 1, \sqrt{2}$ olan dik üçgen (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Banu $\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki kesin yerini belirlemeye çalışırken bir sayı doğrusu çizerek. $\sqrt{2}$ nin 1 ile 2 arasında olacağını belirtmiştir. Bu tespit matematiksel özellikler barındırmaktadır. Ancak matematik bilgisi olarak oldukça yüzeyseldir. Kenar uzunlukları $1, 1, \sqrt{2}$ olan bir dik üçgeni kullanarak sonuca gidebileceğini hatırlayan Banu; bununla ilgili derinlemesine bir düşünce yapısı sergileyememiştir. Bu düşünce biçimi de matematiksel açıdan anlamlı değildir. .

S3: Banu bu sorunun çözümüne başladığında buna benzer bir soruyla, lisans derslerinin birinde karşılaştığını hatırlamıştır. Bu sebeple cevabın hatırında olması muhtemeldir. Bu durumu da: *"...bunu nasıl yapmıştık yaa... Ben hatırlıyorum... Ama hangi derste olduğunu hatırlamıyorum."* şeklinde ifade etmiştir. Banu'nun ortaya koyduğu bu akıl yürütme becerisi türü MR için tipik bir örnektir. Bu türde birey, olayı hatırlar, soru ile bağ kurar ve tüm akıl yürütmelerini yüzeysel bir şekilde ortaya koyar.

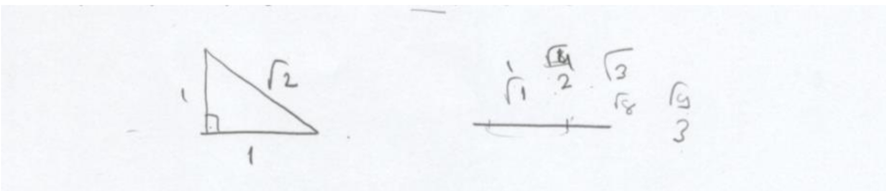
S4: Banu verilen soruda herhangi bir sonuca ulaşamamıştır. Ancak önceki derslerden birinde bu soruya benzer bir sorunun, dersin hocası tarafından çözüldüğünü hatırlamıştır. Soruya dair aklında bir dik üçgen kalmış; fakat bunu da nasıl kullanacağına dair derinlemesine bir düşünce ortaya koyamamıştır. Yaşanan bu çözümsüzlüğün sebebi sorulduğunda ise; bugüne kadar genelde tam sayılarla ilgili işlemler yaptıklarını ve kareköklü sayılarla uğraşmadıklarını belirtmiştir. Yani Banu, kareköklü sayılar konusunda derinlemesine düşünebileceği ortamların yokluğunu bu çözümsüzlüğün sebebi olarak ifade etmiştir. Dolayısıyla da bu soruya, kendi sahip olduğu matematik bilgisi ile çözüm oluşturamamıştır. Önceki derslerde karşılaştığı benzer sorunun çözümünü de içselleştiremediğinden sonucu hatırlayamamıştır.

Banu'nun Problem 4'e Ait Sınıflandırma Kodu

Banu'nun Problem 4'e aitortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak$\mathbf{MR_{ogy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü MR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.1.3.2. Derya'nın problem 4'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Derya'nın Problem 4'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.4, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.4. Derya'nın problem 4'e ait çalışma kağıdı

Derya'nın Problem 4'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Derya: *Hocam $\sqrt{2}$ sayısını yukarıdan 1 birim alsam aşağıdan bir birim alsam hani dik olduğu zaman nasıl elde edildiğini 1,1 olunca $\sqrt{2}$ elde eder ya hocam. Bunu sayı doğrusunda gösterildiğini daha önce bize sayı doğrusunda göstermişlerdi hocam ama nasıl gösterdiğini şuan nasıl anlatacağımı bilmiyorum. Hocam hani bunu biz bir sayı doğrusu üzerinde bulduğumuz zaman herhangi bir köklü ifadenin, mesela $\sqrt{3}$ derken ne deriz veya $\sqrt{4}$ diyeyim hocam. Bu hani 2'ye tekabül ediyor ya hocam 1 ile 3 arasında derim. 1 ile 3 arasında $\sqrt{9}$ ile $\sqrt{1}$ arasında derim. Bu şekilde $\sqrt{2}$ değeri de… Mesela 2* *değeri $\sqrt{4}$ ise $\sqrt{2}$ daha küçük bir değer arasındadır diye bulurum. Ama hocam mesela kesin yerini çizerek gösteriniz derken bu hocam mesela pergelle mi yapıyorduk hani döndürme işlemini nasıl yapıldığını hatırlamıyorum.*

***Mülakatçı**: Yani önceden görmüştünüz*

***Derya**: Önceden görmüştük hocam öyle hatırlıyorum ama şuan nasıl gördüğümüzü onu hatırlamıyorum.*

***Mülakatçı:** Peki önceden görmeseydin böyle bir soru da çözümü kendin oluşturabilir miydin?*

***Derya:** Şuan kendim oluşturabilir miydim? Sayı doğrusundaki yerini, dediğim şekilde oluşturmaya çalışırdım hocam bildiğim değerlerin sayıların arasındaki ifadeye göre tahminen oluştururdum. Hani mesela dedim ya hocam $\sqrt{9}$ ne, 3'e tekabül ediyor. Hani bana $\sqrt{8}$'i verseniz ben de ne derim $\sqrt{9}$ 3 ise, 1 ile 2 arasında bir yerdedir. İşte anca o şekilde düşünürdüm ama kesin yerini çizerek önceden gösterilmeseydi yapabilir miydim? Galiba yok hocam.*

***Mülakatçı:** Tamam Derya.*

Derya'nın Problem 4'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Derya'nın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Sayı doğrusu, sayılar, $1, 1, \sqrt{2}$ kenar uzunluklu dik üçgen (nesne) iii) Aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Derya'nın çözüm prosedürünü uygulamaya çalışırken kullandığı sayı doğrusu ve dik üçgen matematiksel olarak anlamlıdır. Ancak bunlarla derinlemesine bir tartışma ortamı sağlanamamıştır. Sayıların kareleri veya karekökleri alınarak $\sqrt{2}$ nin tahmini yeri bulunmaya çalışılmıştır. Bu yapılanlar matematiksel olarak oldukça yüzeysel kalmaktadır.

S3: Derya soruyla karşılaştıktan sonra, önceki öğrenme çevresinden edindiği ve sorunun çözümüne dair takip edebileceği bir yolu anımsamıştır. Dik kenar uzunlukları 1 birim, hipotenüsü $\sqrt{2}$ birim olan dik üçgeni bu yol için kullanacağını hatırlamış; ancak nasıl kullanacağı yönünde herhangi bir fikir ya da tartışma ortaya koyamamıştır. Bu durumu da "*Önceden görmüştük hocam. Öyle hatırlıyorum. Ama şuan nasıl gördüğümüzü hatırlayamıyorum*." şeklinde ifade etmiştir.$\sqrt{2}$'nin tahmini yerini belirtmek için yaptığı işlemler de derinlemesine matematiksel düşünceler içermemektedir. Duygu'nun bu soru için sahip olduğu akıl yürütme becerisinin türü MR olarak sınıflandırılabilir. Çözüm için izlenecek yol hatırlanmıştır. Bu yol dışında matematiksel olarak bir tartışma ortaya konulmamıştır.

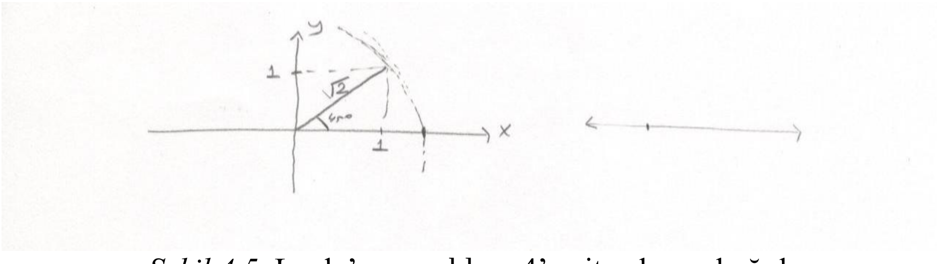
S4: Derya, önceki öğrenme çevresinde edindiği ve bu sorunun çözümü için kullanabileceği bileşenleri hatırlamasına rağmen çözüme ulaşamamış; elindeki mevcut bileşenleri de bütüncül düşünüp derinlemesine yorumlar sergileyememiştir. Sadece sayı doğrusu ve kareköklü sayıları kullanarak $\sqrt{2}$ sayısının yerine dair yüzeysel yorumlar yapabilmiştir. Yaşanılan bu zorlukların arka planında, irrasyonel sayıların tam olarak içselleştirilememesi ve eldeki verilere rağmen çok yönlü düşünmede zorluklar yaşanması gösterilebilir.

Derya'nın Problem 4'e Ait Sınıflandırma Kodu

Derya'nın Problem 4'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **MR$_{ogy}$** olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü MR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.1.3.3. Leyla'nın problem 4'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Leyla'nın Problem 4'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.5, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.5. Leyla'nın problem 4'e ait çalışma kağıdı

Leyla'nın Problem 4'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Leyla: *Evet yine bu soru.*

Mülakatçı: *Biliyor musun bu soruyu?*

Leyla: *Bu soruya kavram yanılgıları dersinde bakmıştık da. Şöyle x ekseni ile y ekseninden 1 br olan aralığı seçip, şuranın değeri hani kareleri toplamından $\sqrt{2}$ olur. Bunu da işte aralık olarak şöyle şu şekilde yapıp şuraya gelen kısmını…*

Mülakatçı: *Ne çiziyorsun öyle?*

Leyla: *Yani yay çizerek o açıyı x eksenine, şurası 45°'lik bir açı olur. Bu açıyı x eksenine yerleştirerek hani buradaki karşılığına gelen değer $\sqrt{2}$'nin değeri oluyordu.*

Mülakatçı: *Peki bu dersten önce bunu sorsaydım nasıl ulaşırdın sonuca?*

Leyla: *Iı… Bu dersten önce de Konya'da böyle bir soru sorulmuştu hani öyle hatırlıyorum ama, onun dışında böyle bir şey düşünebilir miydim bilmiyorum. Yani zannetmiyorum.*

Mülakatçı: *Neden peki?*

Leyla: *Yani aslında şöyle mesela $\sqrt{2}$'nin tam bir reel sonucunu bulamadığımız için doğal sayılarda mesela sayı doğrusunda yerine yerleştirebilmek için tam olarak orayı kavrayamadığımızdan, hangi sayıyla hangi sayı arasında olduğunu kavrayabiliyoruz ama onun tam olarak değerini bilmediğimiz için yerleştirmek anca yaklaşık olarak yerleştirebilirdik. Yani karesi hangi sayıdan küçük hangi sayıdan büyük diye onun için 1 ile 2 arasında bir değer olabilirdi.*

Mülakatçı: *Tamam Leyla.*

Leyla'nın Problem 4'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Leyla'nın akıl yürütme sürecinde: i) Çözüm prosedürü ii) Koordinat düzlemi, koordinat düzlemi üzerindeki dik üçgen (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Leyla soruyu okur okumaz, önceki öğrenme çevresinden bu soruyu hatırladığını belirtmiştir. Bu aşamadan sonra onu sonuca götürecek çözüm prosedürünü birebir uygulamıştır. Koordinat sistemini çizmiş üzerine dik üçgeni yerleştirmiş ve uzunluğu $\sqrt{2}$ birim olan hipotenüsü sayı doğrusu üzerine taşımıştır. Uyguladığı çözüm prosedürü ve bu prosedürde kullandığı nesneler matematiksel olarak anlamlıdır. Ancak derinlemesine düşünce yapısı kullanarak, herhangi bir tartışma ortamı oluşturmamıştır.

S3: Benzer soruyu, hem şuan devam ettiği lisans programından hem de bundan önceki lisans programından hatırlayan Leyla, çözüm basamaklarını birebir takip ederek sonuca ulaşmıştır. Herhangi bir yorumda bulunmamış, kendi matematik bilgisinden bir düşünce sunmamıştır. Bu durumda akıl yürütme becerisi türü tipik bir MR örneğidir.

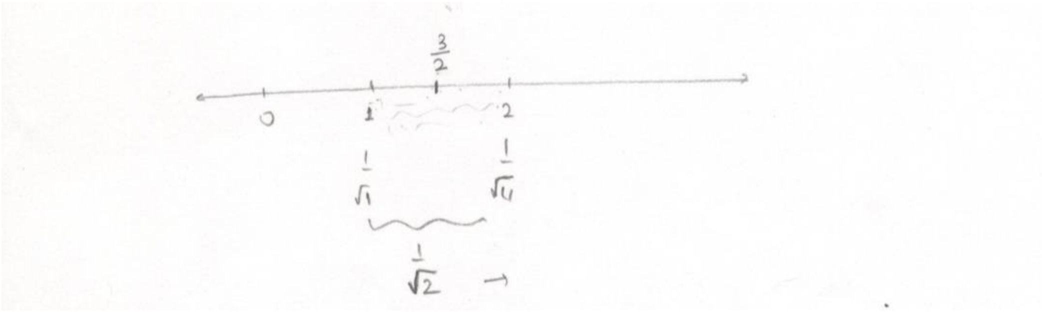
S4: Leyla $\sqrt{2}$ nin kesin yerini önceki yaşantılarından hatırlayarak matematiksel olarak derinlemesine bir tartışma ortamı sunmadan ulaşmıştır. Araştırmacının, "*Bunları hatırlamasaydın sen sonuca nasıl ulaşırdın?*" sorusu karşısında ise Leyla herhangi bir şey düşünemeyeceğini belirtmiştir. Yani bu noktada kendi bilgisine ve bu bilgileri bütüncül olarak düşünebileceğine dair bir güvensizliğin varlığından bahsedilebilir. Bunun nedeni olarak da özellikle irrasyonel sayılar konusunda oluşmuş ya da oluşturulmuş kavram imajlarını gösterebiliriz. Çünkü Leyla irrasyonel sayıları doğal sayılar gibi kavrayamadıklarını belirtmiştir. Sorunun cevabı noktasında sadece$\sqrt{2}$'nin tahmin yoluyla yerini söyleyebileceğini dile getirmiştir. Tüm bu durumlar Leyla'nın akıl yürütürken ezbere yönelmesinin ve derinlemesine fikirler sunmada yaşadığı zorlukların sebepleri olarak gösterilebilir.

Leyla'nın Problem 4'e Ait Sınıflandırma Kodu

Leyla'nın Problem 4'e aitortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{MR_{dgy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü MR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.1.3.4. Ece'nin problem 4'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin Problem 4'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.6, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.6. Ece'nin problem 4'e ait çalışma kağıdı

Ece'nin Problem 4'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Ece: *Kesin yerini.*

Mülakatçı: *Evet.*

Ece: *Kesin yerini sayı doğrusu üzerinde gösteriniz. Bir sayı doğrusu çizeyim mi? $\sqrt{2}$'nin bir kere 1 ile 2 arasında olduğunu biliyorum.*

Mülakatçı: *Nereden biliyorsun?*

Ece: *Çünkü bunun kök içine alırsam $\sqrt{1}$, bu da nedir $\sqrt{4}$. O zaman buda nedir $\sqrt{2}$, otomatikman bu aralıkta olması gerekiyor. Kesin yerini…*

Mülakatçı: *Nereden ulaşmaya çalışıyorsun? Nasıl bir şey var aklında?*

Ece: *Aklımda şöyle bir şey var; bu değer $\frac{3}{2}$'nin sağında mı solunda mı oldu?*

Mülakatçı: *Ona nasıl karar vereceksin?*

Ece: *İşte ben de onu düşünüyorum kesin yerini nasıl çizeceğiz. $\sqrt{2}$ var, ne tarafta olur ki?*

Mülakatçı: *Peki hangi tarafta olduğunu bulunca kesin yerini bulabilecek misin?*

Ece: *Hayır bulamayacağım. Kesin yeri gösterilebilir mi ki? Yani bu arada sonsuz tane rasyonel sayı var. $\sqrt{2}$'nin kesin yerini diyor. Ben sadece bu aralıkta olduğunu söyleyebilirim. Başka bir şey söyleyemem. Çünkü yani neye bağlı olarak gösterebilirim ki? Sonuçta bu aralıkta bir sürü reel sayı var. Aralığı kaça böleceksin, nerede* *alacaksın. İrrasyonel bir sayı. Hocam bence gösteremeyiz. Sadece 1 ile 2 arasında olduğunu söyleyebiliriz.*

Mülakatçı: *Peki biraz daha düşünsen akıl yürütsen.*

Ece: *Nereden mesela. Şuan tüm her şeyi düşünüyorum. Kesin yeri… $\sqrt{2}$ ‘nin yaklaşık değeri… onu bulsam da burada nasıl göstereceğim. Ama $\sqrt{2}$ yaklaşık değerini bulsak bile kesin yeri dediği için tutar mı? O da var. Yok hocam.*

Mülakatçı: *Tamam Ece.*

Ece'nin Problem 4'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Ece'nin akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü, ii) sayı doğrusu ve sayılar (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Ece, sorunun çözümüne yönelik birkaç yol izlemeye çalışmıştır. Uygulamayı düşündüğü çözüm prosedürlerini ilerletememiş ve bir sonuca varamamıştır. Düşüncelerini matematiksel kavramlarla açıklayamamıştır. Dolayısıyla çözüm prosedürleri matematiksel bir özellik taşımamaktadır. Çizdiği sayı doğrusu ve sayı doğrusunda yerleştirdiği sayılar matematiksel olarak anlamlıdır. Oluşturduğu sıralamayı kullanarak $\sqrt{2}$ yi 1 ile 2 arasında bulmuş; $\frac{3}{2}$ nin sağında mı solunda mı olduğuna karar verememiştir. Son olarak da bu aralıkta sonsuz sayı olduğunu ve $\sqrt{2}$ yi yerleştiremeyeceği şeklinde matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce belirtmiştir.

S3: Ece akıl yürütme sürecinde, önceki öğrenme çevresinden elde ettiği herhangi bir soru ya da algoritma kullanmamıştır. Bunların yanında matematiksel olarak derinlemesine bir tartışma da ortaya koyamamıştır. Ancak Ece bugüne kadar ki öğrenme çevresinden edindiği irrasyonel sayılara yönelik bir kavram görüntüsünden faydalanmıştır. Bu da irrasyonel sayıların kesin bir yerinin olmadığıdır. Belli bir kavram imajının gölgesinde, herhangi bir matematiksel tartışma ortamı oluşturulmadan sergilenen akıl yürütme MR olarak sınıflandırılabilir.

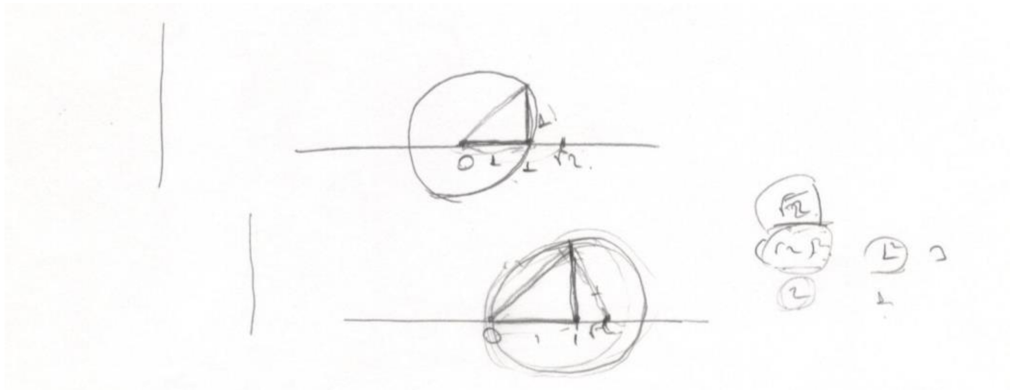
S4: Ece'nin "*İrrasyonel sayıların sayı doğrusu üzerinde kesin yeri yoktur.*" şeklinde oluşan kavram imajı, bu sorunun çözümünde yaşadığı zorluğun sebebi olarak gösterilebilir. Bu güçlüğün yansımalarını, uygulamaya çalıştığı farklı çözüm yollarında da görebiliriz. Her bir çözüm yolu ile $\sqrt{2}$ nin tahmini yerini bulmaya çalışmıştır. Amacı kesin yerini bulmaktan ziyade hangi sayıya yakın olduğunu ortaya çıkarmaktır. Nitekim tüm denemelerine rağmen, yakın olduğu sayıyı da belirleyememiştir. 1 ile 2 arasında geniş bir aralıkta olacağını belirtmiştir. Bireyin zihninde oluşan kesin çizgilerin, farklı düşünce tarzlarını ortaya çıkarmada engel teşkil ettiğini söyleyebiliriz.

Ece'nin Problem 4'e Ait Sınıflandırma Kodu

Ece'nin Problem 4'e aitortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **MR$_{ogy}$** olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü MR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.1.3.5.Nurdan'ın Problem 4'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nurdan'ın Problem 4'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.7, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.7. Nurdan'ın Problem 4'e Ait Çalışma Kağıdı

Nurdan'ın Problem 4'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Nurdan: *Sayı doğrusundaki kesin yerini çizerek gösteriniz. Tamam, Iıı… Aslında biz irrasyonel sayıları tam olarak sayı doğrusunda gösteremediğimiz için bazı şeyler* *geliştirmiştik. Şöyle çizeyim, şurası 0 olsun, şurası 1 olsun. Şöyle 1 birim yukarı doğru çekeyim. İşte yarıçapı 1 olan bir çemberden, şurası merkezi bu. Hatta çeyrek çember, merkezi buradan alayım. Şöyle bir çember geçireceğim. Şurayı da içine alacak. Yarıçapı 1 olsun. Şurası da aslında 1 olur o zaman. $\sqrt{2}$ Sayısını sayı doğrusunda… o nasıldı yaaa.*

Mülakatçı: *Görmüş müydün daha önce?*

Nurdan: *Hıhı biliyordum.*

Mülakatçı: *Derste mi görmüştün?*

Nurdan: *Evet derste bir hoca sanki bahsetmişti gibi (öğrenci sessizce düşünmeye başlar). Nasıldı ya? $\sqrt{2}$ Değerini ortak bulacaktım. Şimdi $\sqrt{2}$, 1 den büyük bir değer aslında. Şuraya filan bir yere geldiğini düşünelim. İşte onu oraya nasıl getiriyoruz?*

Mülakatçı: *Nasıl bir şeydi hatırladığın şey?*

Nurdan: *Hocam çember çiziyorduk çemberin denk geldiği yer mi düştüğü yer miydi?*

Mülakatçı: *Niye öyle bir şey yapılıyor sence?*

Nurdan: *Tam olarak yerini bilmiyoruz ya çemberden çiziyorduk. Gerçi şuan hatırlamıyorum birinci sınıfta galiba görmüştüm ama. 1 diyeyim, 1 diyeyim, şurasını $\sqrt{2}$ kabul edersem çemberi şuradan çizmiş olurum. Ayy unuttum yaa. Hatta bilim tarihinde mi görmüştük?*

Mülakatçı: *Bilim tarihi mi?*

Nurdan: *Şey var ya Pisagor hani sayıları kimseye göstermiyor onların vardı ya hani sayıları kabul etmemişler önce irrasyonel sayıları. Orda vardı sanki. 1 birim burada 1 birim yukarı çıkarıyoruz. Buraya izdüşümü diyeceğim, şuraya filan denk gelecek ama…*

Mülakatçı: *Peki diyelim ki çizdin 1’e 1 birim; ama sonraki hareketi hatırlamıyorsun. Kendin düşünsen. Mesela böyle bir yolu görmeseydin senin aklına gelir miydi?*

Nurdan: *Kesin yer deyince... Aslında ben köklü sayıları kullanıyorum basitlik olsun diye. Mesela neyle neyin arasında olduğunu az çok tahmin ediyorum. Şunun karesini alıyorum işte 1’le 3 diyelim. İşte karelerinde aynı işlemi uyguladığım için diyorum ki $\sqrt{2}$, 1’den daha büyük… ama işte kesin yerini sorunca, bu çemberden yapılıyordu da onu hatırlayamadım.*

Mülakatçı: *Devam etmek ister misin?*

Nurdan: *Bir daha bakayım hocam. Şöyle çizeyim. Tamam 1 birim buradan 1 birim yukarıya doğru. Şurayı merkez kabul etsem(merkezin yerini değiştirdi). Yukarıya doğru*

geldiğini düşünsem, şurası $\sqrt{2}$… ama işte hocam kesin dediğiniz için… yani burada bir yerde de nasıl gelecek onu kestiremedim.
Mülakatçı: *Tamam Nurdan.*

Nurdan'ın Problem 4'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Nurdan'ın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü, ii) Sayı doğrusu ve birim çember (nesne), kareköklü sayılar kavramı bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Nurdan, karşılaştığı soruya bir çözüm oluşturmaya çalışırken matematiksel olarak oldukça yüzeysel bir düşünce tarzı ortaya koymuştur. Bu sebeple de çözüm prosedürü matematiksel özellik göstermemektedir. Soruya çözüm ararken sayı doğrusunu çizmiş, ancak $\sqrt{2}$ sayısının tahmini yerini göz kararı belirlemiştir. Sayı doğrusunu üzerinde birim çember çizerek kenar uzunlukları $1, 1, \sqrt{2}$ olan dik üçgen oluşturmuştur. Dolayısıyla akıl yürütmesinde kullandığı bu bileşenler matematiksel özellik göstermektedir. Bu tarz sorularda iki farklı sayının karekökünü alarak, tahmini yerini bulmak istediği kareköklü bir sayıyı da bu sayılara göre sıraladığını belirtmiştir. Belirtilen çözüm yolu, kareköklü sayıların kesin yerini bulma işlemleri için kabul edilen özellik değildir.

S3: Nurdan soruyu okuduktan sonra benzer bir sorunun daha önce aldığı bir derste, ders hocası tarafından çözüldüğünü hatırlamıştır. Bir dik üçgen ve bir birim çember kullanarak sonuca ulaşılabileceği bilgisinden hareketle çözüme yönelik prosedürleri uygulamaya başlamıştır. Ancak tüm bunları kullanmasına rağmen istediği sonuca ulaşamamış; elindeki verilerle derinlemesine bir düşünme sürecini oluşturamamıştır. Yüzeysel hatırlamalar şeklinde yürütülen bu akıl yürütme süreci, tür açısından MR özellik göstermektedir.

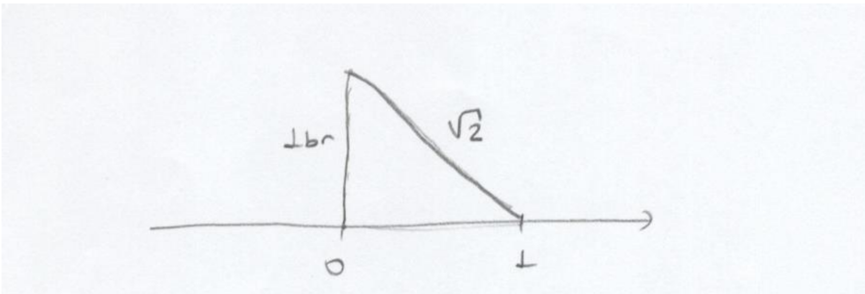
S4: Nurdan ortaya koyduğu akıl yürütme ile sorunun çözümüne ulaşamamıştır. Önceki yaşantılardan bu soruyla benzer bir sorunun çözümünü hatırlamıştır. Ancak çözüme yönelik derinlemesine bir tartışma sunamamıştır. Sadece hatırladıklarından bir sonuca gitmeye çalışmıştır. Benzer çözüm yoluyla önceki derslerde karşılaşmış olmasına rağmen, hangi derste öğrendiklerini, ne şekilde bir yol izlediklerini tam olarak ifade edememesi, hatırladıklarıyla istediği çözüm yoluna ulaşamaması bu tarz sorularla ilgili anlamlı bir öğrenme yapamadığının göstergesidir. Bu tarz soruların çözümü için kendi düşünce dünyasında izlediği yol ise oldukça yüzeysel kalmaktadır.

Nurdan'ın Problem 4'e Ait Sınıflandırma Kodu

Nurdan'ın Problem 4'e aitortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{MR_{ogy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü MR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.1.3.6. Hikmet'in problem 4'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hikmet'in Problem 4'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.8, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.8. Hikmet'in problem 4'e ait çalışma kağıdı

Hikmet'in Problem 4'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Hikmet: *Bunu bize bir hoca göstermişti hocam (diyerek gülümsedi). Şimdi şurası 0 şurası 1. Şöyle bir şey alırsak 1 birimlik yukarıdan, burası da 1 birim zaten bunları birleştirirsek burası* $\sqrt{2}$ *birim yapar. Pergeli şu kadar açıp şuradan (*$\sqrt{2}$ *kadar açıp) itibaren çevirdiğimizde yerini buluruz.*

Mülakatçı: *Peki bunu hoca göstermeseydi sen nasıl bulurdun?*

Hikmet: *Hoca göstermeseydi yani yapamazdım herhalde. Şöyle bulurdum mesela* $\sqrt{2}$ *yaklaşık şudur deyip o aralıkta bulurdum yani. Tam kesin olarak bir yer söyleyemezdim.*
Mülakatçı: *Tamam Hikmet.*

Hikmet'in Problem 4'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Hikmet'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü, ii) Koordinat düzlemi ve üzerine konumlandırılmış dik üçgen (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Hikmet soruyu okuduktan sonra direkt olarak çözüm yolunu tanımlamıştır. Ancak bu çözüm yolunun temel matematiksel özellikleri hakkında herhangi bir tartışma ya da açıklamada bulunmamıştır. Çözüm yolunu uygularken kullandığı nesneleri, matematiksel özelliklere uygun bir şekilde kullanılmıştır. Çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlıdır.

S3: Hikmet sorunun doğru cevabına ulaşmıştır. Ancak bu sonucu daha önceki öğrenme yaşantılarını birebir hatırlayarak bulmuştur. Bu durumu da soruyu okur okumaz, "*Bunu bize hoca göstermişti.*" şeklinde ifade etmiştir. Çözüm yolunu birebir anlatmıştır. Bu yol veya kullandığı nesneler hakkında herhangi bir fikir, açıklama, tartışma ortaya koymamıştır. O halde Hikmet'in bu soru için akıl yürütme becerisi türü MR olarak kategorize edilebilir.

S4: Hikmet'in önceki yaşantıları sonucu sergilediği çözüm prosedürünün ardından araştırmacı, "*Bunu hoca göstermeseydi sen nasıl bulurdun?*" şeklinde bir soru yöneltmiştir. Çözümü hiç takılmadan bulabilen Hikmet kendi başına bu soruya çözüm bulamayacağını, sadece tahmini yerini söyleyebileceğini ifade etmiştir. Buradan hareketle öğrencilerin öğrenme ortamlarında karşılaşacakları her farklı durumun, onların matematiksel akıl yürütme becerilerine katkı sağlayacağı sonucuna varabiliriz. Hikmet çözüm yoluna yönelik derinlemesine bir açıklama yapmasa da tüm verileri doğru bir şekilde kullanmıştır.

Hikmet'in Problem 4'e Ait Sınıflandırma Kodu

Hikmet'in Problem 4'e aitortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{MR_{dgy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü MR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

Ezberedayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 4 için Banu, Derya, Leyla, Ece, Nurdan ve Hikmet tarafından kullanılmıştır. Bu akıl yürütme türünü kullanan öğrenciler, benzer bir soruyu önceki öğrenme çevrelerinden hatırladıklarını belirterek, oradaki bilgilerin rehberliğinde probleme çözüm aramışlardır. Yeni bir yapılandırmanın olmadığı akıl yürütme türü olan ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme ile verilen probleme bir çözüm bulabilmiş; kendi bilgi birikimleriyle bu durumu düşünemeyeceklerini belirtmişlerdir. O halde öğretim ortamlarında farklı düşünce tarzlarını barındıran durumlara yer verilmesinin öğrencilerin zihinsel süreçlerini geliştirdiği savunulabilir. Bunların yanında yine eğitim ortamlarında özellikle çok daha soyut matematiksel kavramları ilgilendiren tartışma ortamlarının oluşturularak tartışılması, bu kavramların etkin öğrenilmesi için önemli olduğu düşünülmektedir. Zira Problem 4'te ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme süreci kullanan öğrenciler özellikle irrasyonel sayılar ve bu sayıların sayı doğrusundaki kesin yerleri hakkında bir yorum yapamamışlardır. Bazı öğrenciler irrasyonel sayıların kesin yeri yoktur düşüncesini savunurken; bazıları dabu sayılarla fazla uğraşmadıklarını daha çok tam sayılarla işlemler yaptıklarını belirtmişlerdir.

4.2. Öğretmen Adaylarının Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular

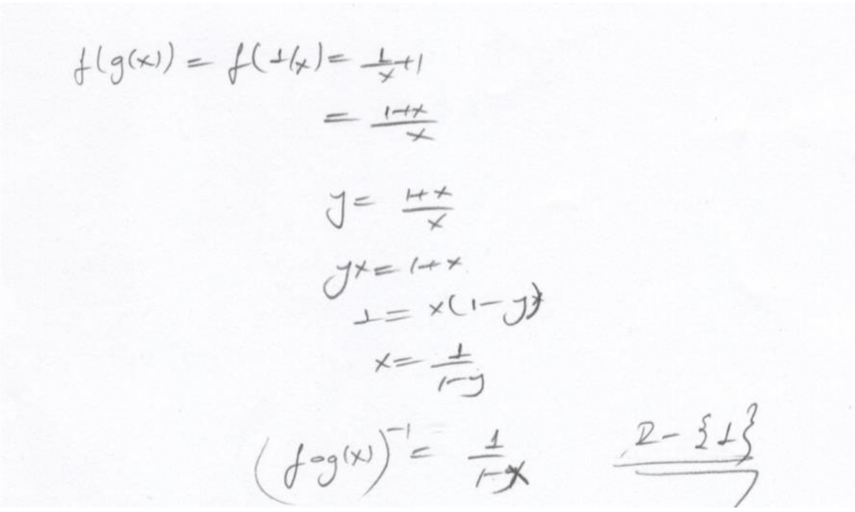
Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme sürecinde öğrenci, karşılaştığı problem durumu için çözüme ulaştıracağını düşündüğü bir algoritmayı hatırlayıp problemdeki verileri kullanarak sonuca ulaşır. Çözüm aşamasında derinlemesine matematiksel düşünceler sergilenmez. Öğrenci algoritmayı adım adım uygular. Çözüm prosedürüne yeni bir şeyler eklemez. Veri toplama aracında yer alan tüm problemler için, araştırmaya katılan öğretmen adaylarının çoğu tarafından algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü kullanılmıştır. Bunların dağılımı: Problem 1 için altı öğrenci; Problem 2 için, dört öğrenci; Problem 3 için, yedi öğrenci; Problem 4 için, üç öğrenci; Problem 5 için, yedi öğrenci; Problem 6 için, yedi öğrenci şeklinde olmuştur. Akıl yürütme türünün uygulandığı problem durumu, öğrencinin çalışma kâğıdında yapmış oldukları, klinik mülakatın metin hali ve dokümanlar ışığında araştırmacının yapmış olduğu analizler aşağıda sunulmuştur. Ayrıca, sınıflandırma kodu ile öğrencinin sergilediği akıl yürütme süreci özetlenmiştir. Bu sayede tüm verilerin bütüncül olarak düşünülmesi sağlanarak, akıl yürütme becerilerine dair daha geçerli ve güvenilir sonuçlara ve yorumlara ulaşılacağı düşünülmektedir.

4.2.1. Problem 1

"$f(x) = x + 1 \; g(x) = \frac{1}{x}$ ise fog fonksiyonu için görüntü kümesini bulunuz."

4.2.1.1 Banu'nun problem 1'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Banu'nun Problem 1'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.9, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.9. Banu'nun problem 1'e ait çalışma kağıdı

Banu'nun Problem 1'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Sorumuz fonksiyonlarla ilgili Banu.*

Banu: *Görüntü kümesi. Önce fog yi elde edelim. Iı… şu şekilde yazalım $(1/x) + 1$ den $(1 + x)/x$. Görüntü kümesini istiyor. Görüntü kümesini istemesi için bunun tersini* *alalım.* $y = (1 + x)/x$. $yx = 1 + x \dots$ *şimdi* x *i yalnız bırakacağız.* $1 = x$ *parantezinde* $1 - y$ *oluyor. x eşittir 1/ (1-y). Demek ki* fog *nin tersi buymuş. O zaman tanım kümesi nedir* $R - \{1\}$.

Mülakatçı: *Tanım mı görüntü mü?*

Banu: *Yani* $fog(x)$ *in tanım kümesinin tersi* fog *fonksiyonun görüntü kümesine denk olduğu için görüntü kümesi bu oluyor.*

Mülakatçı: *Bunu bu şekilde mi yaparsın hep? Farklı bir yolun var mı?*

Banu: *Farklı bir yolum yok.*

Mülakatçı: *Derslerde nasıl görmüştünüz?*

Banu: *Yani ilk akla gelen benim için bu oldu. Pratik bir çözümü var mıdır? (Banu düşünüyor). Şimdi şöyle yapalım* $g(x)$*i yerine koyuyoruz,* f *i elde ediyoruz. Görüntü kümesi* $R - \{1\}$

Mülakatçı: *Evet bu şekilde bulunuyor…*

Banu'nun Problem 1'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Banu'nun akıl yürütme süreci i) çözüm prosedürü ii) fonksiyonlar (nesneler), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Banu çözüm prosedürünü uygularken herhangi bir yorum ve tartışma yapmadan belirlediği algoritmayı uygulamıştır. Yaptığı aritmetik işlemler matematiksel olarak anlamlı olmasına rağmen ters fonksiyona ulaşırken işlem hatası yaparak farklı bir fonksiyona ulaşmıştır. Ancak ulaştığı ters fonksiyonun tanım kümesini doğru ifade etmiştir. Aritmetik işlemlere yani transformasyona giren ve çıkan fonksiyonlar; dolayısıyla da uyguladığı çözüm prosedürü ve ulaştığı çözüm matematiksel olarak kabul edilebilir düzeydedir.

S3: Banu, karşılaştığı soru ile ilgili düşüncelerini sesli bir şekilde ifade ettiği akıl yürütme sürecinde fazla bir yorum ortaya koymamıştır. Soruyu okuduktan sonra kuralına uygun olarak fog fonksiyonunu oluşturmuş; ardından tersini bulmuş ve elde ettiği fonksiyona göre görüntü kümesini belirlemiştir. Bu süreçte uygulamış olduklarıyla ilgili açıklama yapmamış; herhangi bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. Belirlediği algoritmanın her bir adımını doğru bir şekilde uygulamıştır. Küçük bir işaret hatası yapmasına rağmen doğru sonuca ulaşmıştır. Var olan tüm bu özelliklerden dolayı

Banu’nun bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir.

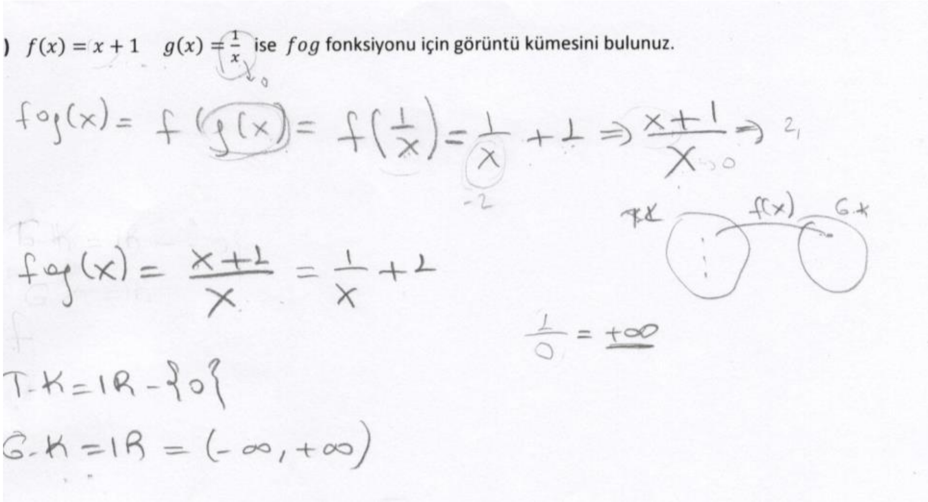
S4: Banu akıl yürütme sürecinde tek bir algoritmayı takip etmiş ve doğru şekilde uygulayarak çözüme ulaşmıştır. Takip ettiği bu yoldan daha farklı bir yol uygulaması istendiğinde ise “*Farklı bir yolum yok*” şeklinde cevap vermiştir. Kullandığı kavramlar ile ilgili açıklamada bulunmayışı, farklı bir yol üretebilmek için herhangi bir düşünme çabası içerisine girmeyişi Banu’nun bileşke fonksiyon kavramıyla ilgili zengin kavramsal bir alt yapıya sahip olmayışının göstergesidir. Bunun yanında öğrenme yaşantılarından edindiği tecrübeler noktasında eksiklikten de söz edilebilir.

Banu’nun Problem 1’e Ait Sınıflandırma Kodu

Banu’nun Problem 1’e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{dgy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.1.2 Aylin’in problem 1’e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Aylin’in Problem 1’e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.10, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.10. Aylin'in problem 1'e ait çalışma kâğıdı

Aylin'in Problem 1'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Şimdi ilk sorumuz fonksiyonlarla ilgili*

Aylin: *hıhı... şimdi bunu $fog(x)$şeklinde yazıyorum… $f\ (g(x))$… $g(x)$,$1/x$ e eşit olduğu için $f(1/x)$ ... Burada $f(x)\ x+1$ di. $f(g(x))$ de $g(x)\ +\ 1$ aslında. Buda aslında $g(x)$ de $1/x$ den, $(1/x)+1$ oluyor.*

Mülakatçı: *Evet. Şuan şeyi buldun $fog(x)$ i buldun.*

Aylin: *Evet şimdi görüntü kümesini istiyor. Görüntü kümesinde şuraya şey yapalım... $x+(1/x)$ ... Aslında şurada x şeklinde yazmama gerek var mı onu tam olarak bilmiyorum ama burada şey gibi x paydada olduğu için sıfır olmaz. Sıfır haricinde diğer şeyleri… Hayır ama x burda x hocam şeyin elemanı mı reel sayıların elemanı mı?*

Mülakatçı: *Evet.*

Aylin: *x e burda -2 versek 1den küçük olur 2 versek 1 den büyük olur…*

Mülakatçı: *Senin fonksiyonun bu $(x+1)/x$ değil mi? Şimdi bunun görüntü kümesini buluyorsun.*

Aylin: *Görüntü kümesi de reel sayılardan sıfırın çıkarılmış halidir.*

Mülakatçı: *Görüntü kümesi ne demek tam olarak?*

Aylin: *Görüntü kümesi; x in aldığı değerlerden $f(x)$ fonksiyonunun gittiği yani x in aldığı değerleri $f(x)$ fonksiyonuna gidiyor. x tanım kümesi olsa burada x değerler alıyor bunun $f(x)$ fonksiyonuyla eşiti de görüntü kümesi oluyor.*

Mülakatçı: *Hıhı...*

Aylin: *Ama burada $f(1/x)$'i $f(x)$'e çevirmemiz gerekiyor mu?*

Mülakatçı: *Dene bakalım. (öğrenci oflanır) peki sen şuan $f(x)$ i mi buluyorsun $fog(x)$i mi buluyorsun?*

Aylin: *$fog(x)$i… haa! O zaman çevirmemize gerek kalmıyor.*

Mülakatçı: *Bulduğun ne tam olarak?*

Aylin: *$fog(x)$ in eşiti*

Mülakatçı: *Tamam*

Aylin: *$fog(x)$ in eşiti. Burada x'ler değer alır, her değeri alır ama sıfır alamaz. Şimdi reel sayılar dedik. 1 desek 2 alır.*

Mülakatçı: *Peki ben sana fog' nin tanım kümesini sorsam?*

Aylin: *Tanım kümesi reel sayılar olur. Reel sayılar ama 0 dersek 0 olmaz. Yine sıfır çıkarmamız gerekiyor*

Mülakatçı: *fog nedir? fog 'nin x li ifadesi*

Aylin: *Onun eşitini mi soruyorsunuz?*

Mülakatçı: *Hıhı…*

Aylin: $(x+1)/x$

Mülakatçı: *Tamam, $(x+1)/x$. Bunun tanım kümesini bana söyleyebilir misin?*

Aylin: *Tanım kümesi… x bütün değerleri alıyor ama 0 ı alamıyor bence. x sıfır alamaz.*

Mülakatçı: *Tamam.*

Aylin: *Ha1 o zaman bu tanım kümesi olmuş oluyor görüntü kümesi de hı… Görüntü kümesi tanım kümesi. Bu aslında sıfırın çıkarılması tanım kümesi oluyor. Görüntü kümesi de reel sayılar olmuş oluyor.*

Mülakatçı: *Ona nasıl ulaştın*

Aylin: *Yani x in mesela -1 desek 0 a eşit olur. 0 desek, 0 diyemiyoruz zaten. İşte -2 desek $-1/2$ olur negatif sayıları da alır, 2 desek pozitif sayıları da alır. Yani bütün sayıları alır.*

Mülakatçı: *Hıhı… Genelde bu tür soruları nasıl çözüyorsun? Nasıl bir yol izliyorsun?*

Aylin: *Direkt yazıyorum. Sonra da hangisini alır hangisini almaz yani yazışım bu şekilde oluyor hani karıştırmamak adına direkt$g(x)$ i yerine yazıyorum. Bunu bulduktan sonra da hani hangi değerlerde tanımsız yapıyor. Onu düşünüyorum. 0 alamıyor. Dolayısıyla da sıfırı çıkarıyorum.*

Mülakatçı: *Bu tanım kümesi oluyor.*

Aylin: *Hıhı… görüntü kümesi de yani bütün değerleri alabiliyorsa..*

Mülakatçı: *Yani karşılığındaki değerler. Tanım kümesindeki aldığı değerlerin karşılıkları…*

Aylin: *Evet görüntü kümesi olmuş oluyor.*

Mülakatçı: *Tamam. Teşekkür ederim Aylin.*

Aylin'in Problem 1'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Aylin'in akıl yürütme süreci i) Çözüm prosedürü ii) Görüntü kümesi kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyon), fonksiyonlar (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Aylin çözüm prosedürüne bileşke fonksiyonunu oluşturan algoritma ile başladı ve fog fonksiyonunu sorunsuz bir şekilde oluşturdu. Bileşke fonksiyonun görüntü kümesini oluştururken ise matematiksel olarak oldukça yüzeysel bir düşünce yapısı ortaya koymuştur. Görüntü kümesi adı altında, ilk etapta fog'nin tanım kümesini belirlemesine rağmen sorgulanan görüntü kümesi kavramını doğru bir şekilde belirleyebilmiştir. Yaptığı hatanın farkına vardıktan sonra görüntü kümesini bulmak için fonksiyonda sayıları yerine koyarak tek tek denemiş ancak yanlış bir sonuca ulaşmıştır. Yaptığı aritmetik işlemler, görüntü kümesine dair açıklamaları matematiksel olarak anlamlı olmasına rağmen; görüntü kümesi bulmaya yönelik izlediği yol matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Aylin ortaya koyduğu akıl yürütme sürecinde, yaptığı uygulamalarla ilgili herhangi tartışma ortamı oluşturmamış; oldukça yüzeysel bir düşünce yapısı sergilemiştir. Öğrenme yaşantılardan edindiği bileşke fonksiyon oluşturma algoritmasını birebir uygulayabilmiştir. Ancak kavramsal olarak ifade edebilmesine rağmen, bulduğu bileşke fonksiyonun görüntü kümesini belirtmekte zorlanmıştır. İşte, belirli bir algoritmanın takip edildiği, derinlemesine yorumların yer almadığı akıl yürütme becerisi türü olan AR, Aylin'in bu soru için geçerli olan akıl yürütme becerisi türü olarak sınıflandırılabilir.

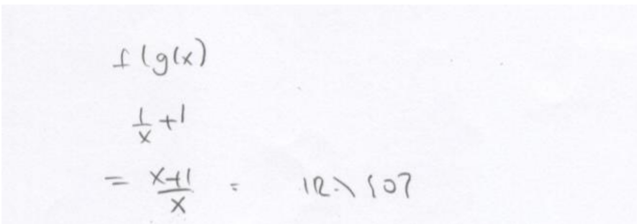
S4: Aylin'in akıl yürütme sürecinde görüntü kümesi kavramıyla ilgili belirttiği ifade " *x tanım kümesi olsa. Burada x değerler alıyor, bunun $f(x)$ fonksiyonuyla eşiti de görüntü kümesi oluyor*" şeklindedir. Kavramsal ifadesi doğrudur ancak uygulama aşamasında ise tanım kümesindeki değerleri fonksiyonda tek tek yerine yazmaya çalışmıştır. Denediği birkaç değeri, tüm kümeyi temsil edercesine kabul etmiştir. Ayrıca bu tarz sorularda benzer yolu takip ettiğini *" Direkt yazıyorum. Sonra da hangisini alır hangisini almaz yani yazışım bu şekilde oluyor*" şeklinde belirtmiştir. Yani Aylin'in akıl yürütme sürecinde karşılaştığı güçlüğün altında, belirttiği bu yolla ulaştığı sonuçlar neticesinde edindiği öğrenme tecrübeleri yatmaktadır. Oysaki aşina olduğu çözüm yolu, verilen problemde işe yaramamıştır.

Aylin'in Problem 1'e Ait Sınıflandırma Kodu

Aylin'in Problem 1'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.1.3 Derya'nın problem 1'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Derya'nın Problem 1'e Ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.11, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.11. Derya'nın problem 1'e ait çalışma kağıdı

Derya'nın Problem 1'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Derya: *$fog(x)$ fonksiyonun görüntü kümesi diyoruz ya hocam normal fonksiyonların bileşke işlemini alacağım. $f(g(x))$ desem daha sonra bunu g yi f yerine yazsam. Ama* *görüntü kümesi hocam herhangi bir değer olması gerekmiyor mu? Mesela bir değer verirsiniz Z den R ye, Z'den Z'ye diye. Ona göre görüntü kümesini bulabilirim diye düşünüyorum. Ama bir tanım aralığı yokya hani hocam burda.*

Mülakatçı: *R üzerinde düşünebilirsin.*

Derya: *Hım…R üzerinde düşüneyim. f yerine yazdığım zaman x yerine yazdığım zaman $(x+1)/x$ olacak. Görüntü kümesi hocam 0 hariç reel sayılar diye düşünüyorum ama hocam.*

Mülakatçı: *Peki tanım kümesi nedir fog nin.*

Derya: *Daha doğrusu tanım kümesi bütün sayılar olabilir hocam reel sayılar alırım ama görüntü kümesinde sıfır tanımsız yapacağı için sıfırı çıkarırım.*

Mülakatçı: *Peki, tanım kümesi ne demek?*

Derya: *Iı… tanım kümesi fonksiyonun, yani hocam tanım…*

Mülakatçı: *Mesela fog, tanım kümesi şu fog …*

Derya: *Hıhı fog tamam hocam bu. fog tanım kümesi hocam ıı görüntü kümesi, burada değerler ifadeler yerine yazacağım karşısında gelen ifadelere diyeceğim. O yüzden ben x e istediğim değerleri verebilirim ama 0 tanımsız yapacağı için 0 ı çıkarmam lazım. O zaman tanım kümesinde de sıfır olmayacak. Görüntü kümesi de tam sayılar belirtmediğine göre herhangi bir şey olabilir. Sıfır hariç herşey.*

Mülakatçı: *Tamam o zaman yaz istersen.*

Derya: *O zaman hocam reel sayılardan sıfırı çıkaracağım.*

Mülakatçı: *Bu hem tanım hem görüntü kümesi için mi?*

Derya: *Evet hem tanım hem görüntü kümesi. Reel sayılardan…Evet hocam hem tanım hem görüntü kümesi diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Tamam.*

Derya'nın Problem 1'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Derya'nın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Tanım ve görüntü kümesi kavramları iii) Fonksiyon (nesne), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Derya'nın çözüm prosedürünü uygularken takip ettiği adımlara hakimiyetsizliği dikkat çekmektedir. Fonksiyonları kullanarak bileşke fonksiyonunu doğru bir şekilde ifade edebilmiştir. Ancak sonraki süreçte tanım ve görüntü kümesi kavramlarıyla ilgili yaptığı açıklamalar, matematiksel olarak anlamlı değildir. Bileşke fonksiyonunu bulduktan sonra bu fonksiyon üzerinden hareket ederek, görüntü kümesinin 0 hariç diğer reel sayılar olduğunu belirtmiştir. Bileşke fonksiyonunun tanım kümesi sorulduğunda ise önce duraksamış sonra görüntü kümesi ile aynı olduğunu ifade etmiştir. Bu durumu da "*o zaman tanım kümesinde de* 0 *olmayacak. Görüntü kümesi de tam sayılar belirtmediğine göre herhangi bir şey olabilir.* 0 *hariç herşey.*" Şeklinde ifade etmiştir. O halde çözüm prosedürü de matematiksel olarak anlamlı değildir. Matematiksel olarak oldukça yüzeysel bir düşünce yapısı sergilemiştir.

S3: Derya akıl yürütme sürecinde bileşke fonksiyonu ifadesini bulurken bir algoritma takip ederek fonksiyona ulaşmıştır. Aritmetik işlemlerin doğru bir şekilde yapıldığı bu algoritma ile ilgili herhangi bir açıklamada bulunamamıştır. Bileşke fonksiyonuna ulaştıktan sonra onun kavramsal özelliklerini kullanıp istenilen çözüme varamamıştır. Yine tanım ve görüntü kümesi kavramlarıyla ilgili matematiksel olarak derinlemesine düşünceler sergileyememiştir. Tüm bu belirtilen durumlardan hareketle Derya'nın bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir.

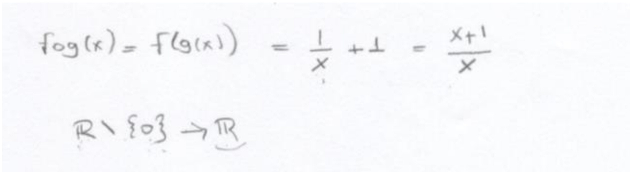
S4: Derya'nın etkili bir akıl yürütme süreci ortaya koymasına, bileşke fonksiyon, tanım ve görüntü kümesi kavramlarındaki zayıf kavramsal alt yapısının engel olduğu düşünülebilir. Çünkü algoritmik olarak doğru bir şekilde oluşturduğu bileşke fonksiyonunun özelliklerine süreçte yer vermemiştir. Derinlemesine bir düşünce ortaya koyamamıştır. Bunun yanında tanım kümesine görüntü kümesi gibi davranmış; görüntü kümesinin bir değer olması gerektiğini de ifade etmiştir. Matematiksel olarak anlamlı olabilecek net bir yorum, açıklama ya da duruş sergileyememiştir.

Derya'nın Problem 1'e Ait Sınıflandırma Kodu

Derya'nın Problem 1'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.1.4. Leyla'nın problem 1'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Leyla'nın Problem 1'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.12, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.12. Leyla'nın problem 1'e ait çalışma kağıdı

Leyla'nın Problem 1'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Leyla: *Şimdi hocam fog fonksiyonu diyor. Bu bir bileşke fonksiyonu olduğu için şöyle $fog(x)$ dersem bu da eşittir $f(g(x))$ oluyor. o zaman f fonksiyonun da x gördüğüm yere g fonksiyonundaki x i yazacağım. Yani $(1/x)\ +1$ olur. O da $(x+1)/x$ olur.*
Mülakatçı: *Tamam.*
Leyla: *Bu şekilde olmaz mı?*
Mülakatçı: *Tamam bu fog. Sana bunun görüntü kümesini soruyor.*
Leyla: *Hımm… Görüntü kümesi de. Şimdi mesela paydayı sıfırlayan değerler olmaması gerekiyor. $x = 0$ için bir değer olmaz. Bunun dışındaki tüm reel sayılar için sağlar bence. $R - \{0\}$*
Mülakatçı: *Peki tanım kümesi nedir bu fonksiyonun fog nin?*
Leyla: *…(öğrenci düşünür) tanım kümesi mi bu olur?. Tanım kümesi bundan R ye mi olur.*
Mülakatçı: *Peki tanım kümesi nedir görüntü kümesi nedir? Tam olarak kafanda nasıl canlanıyor?*
Leyla: *Ya tanım kümesi şimdi hocam. Tanım kümesinde reel sayılar fark sıfır dersem buraya koyduğum tüm değerler için bir reel sayı bulacağım demektir. Bu yüzden bu şekilde bir tanımlama yani reel sayılar fark sıfırdan reel sayılara bir fonksiyon tanımlayabilirim bence.*

Mülakatçı: *O halde görüntü kümesi?*

Leyla: *Reel sayılar.*

Mülakatçı: *Tamam.*

Leyla'nın Problem 1'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Leyla'nın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Tanım ve görüntü kümesi kavramları iii) Fonksiyon girdi çıktıları (nesne), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Leyla'nın çözüm prosedüründe kendinden emin olarak uyguladığı tek şey bileşke fonksiyonu oluşturma algoritmasıdır. Bu algoritmayı doğru bir şekilde kullanıp, bileşke fonksiyonunu oluşturduktan sonra; paydada yer alan x değerinden dolayı görüntü kümesinde 0 olmayacağını belirtmiştir. $R-\{0\}$ kümesini görüntü kümesi olarak ifade etmiştir. Araştırmacının tanım kümesini sormasıyla kuşkulanmış, bulduğu kümeyi tanım kümesine çevirmiştir. Bu kümeleri kavramsal olarak açıklaması istendiğinde ise matematiksel olarak anlamlı bir açıklamada bulunamamıştır. Sonuç olarak görüntü kümesi ile ilgili cevabını yanlış ifade etmiştir. Dolayısıyla çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlı değildir. Oldukça yüzeysel bir düşünce yapısı sergilemiştir.

S3: Leyla akıl yürütme sürecinde, soruda yer alan ya da kendi kullandığı matematiksel kavramlarla ilgili herhangi bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. Soruyu okuduktan sonra direkt olarak algoritmayı uygulayarak bileşke fonksiyonunu oluşturmaya yönelmiştir. Bileşke fonksiyonuna ulaştıktan sonra hatırladığı diğer yöntem ise paydayı ya da fonksiyonu tanımsız yapan değeri, Reel sayılar kümesinden çıkarmaktır. Ancak oluşan bu kümenin tanım kümesi mi yoksa görüntü kümesi mi olduğunu hiç düşünmemiştir. Sadece algoritmayı uygulamış ve soruda hangi kümeyi soruyorsa bulduğunun o küme olduğuna karar vermiştir. Leyla'nın bu soru için sergilemiş olduğu akıl yürütme becerisi türü, belirtilen özelliklerinden dolayı AR olarak sınıflandırılabilir.

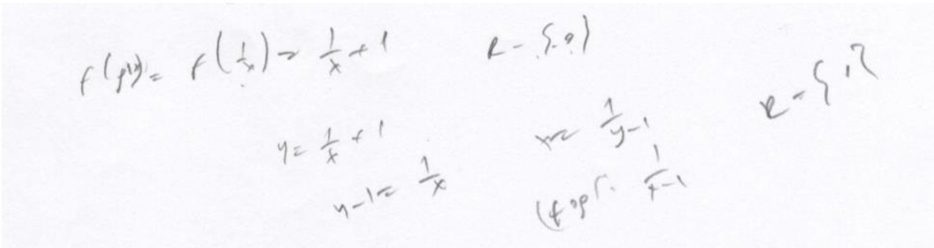
S4: Leyla'nın tanım ve görüntü kümesi kavramları ile alakalı derinleşmemiş kavramsal alt yapısı, onun bu süreçte güçlük çektiği noktalar arasındadır. Bileşke fonksiyonundan hareketle bulduğu kümeyi direkt görüntü kümesi olarak belirlemesi, araştırmacının sorusuyla kümenin adını değiştirmesi ve " *Tanım kümesinde reel sayılar fark sıfır* ($R-\{0\}$) *dersem, buraya koyduğum tüm değerler için bir reel sayı bulacağım* *demektir*." şeklindeki yüzeysel bir yorumla görüntü kümesini R olarak değiştirmesi bahsedilen zayıf alt yapının göstergesidir. Öğrenme çevresinde uyguladığı bu yöntemin genelde işe yaramış olması, Leyla'nın bu şekilde bir kavramsal alt yapı oluşturmasını kuvvetlendirdiği söylenebilir.

Leyla'nın Problem 1'e Ait Sınıflandırma Kodu

Leyla'nın Problem 1'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.1.5. Önder'in problem 1'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Önder'in Problem 1'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.13, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.13. Önder'in problem 1'e ait çalışma kağıdı

Önder'in Problem 1'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Evet Önder sorumuz fonksiyon sorusu senden sesli düşünerek çözmeni istiyorum.*

Önder: *Tamam hocam öncelikle fog yi tanımlarım. Şu şekilde $f(g(x))$ sonra $f(x)$ de şurası $g(x)$ olacak $1/x$ yazarım. Sonra x gördüğüm yere $(1/x)+1$ yazarım. Bunun* *görüntü kümesinde tanımsız olan yerleri çıkartırım. Tanımsız olan yerler de R- den yani sıfır çıkartılır. Bunun görüntü kümesi fog nin görüntü kümesi R den 0 ın çıkarılmasıdır.*

Mülakatçı: *Peki fog nin tanım kümesi nedir?*

Önder: *fog nin mi?*

Mülakatçı: *Evet.*

Önder: *Tanım kümesi… R den 0 ı çıkartma. Bir dakika dur hocam görüntü kümesi şimdi aklıma geldi tersini mi buluyorduk? $y = (1/x) + 1$ bu tanım kümesi oluyor hocam. Yani R den sıfırı çıkardığımız şey tanım kümesi.*

Mülakatçı: *Neden tanım kümesi dedin ona az önce görüntü demiştin.*

Önder: *Iı… hocam görüntü kümesi şaşırmışım çünkü tanım kümesi önce tanım kümesi olması gerekir. Tanım kümesi ıı… sıfır verirsek tanımsız olur. Tanım kümesinden sıfırı çıkartırsak bu tanım kümesini verir. Görüntü kümesini bulmak için şu fog ye y dedim. Sonra x i yalnız bırakmaya çalışıyorum $y - 1 = 1/x$ sonra $x = 1/(y - 1)$ yani fog nin görüntüsü mü tersi neyse işte $(fog)^{-1} = 1/(x - 1). R - \{1\}$ bu görüntü kümesini verir.*

Mülakatçı: *Buda görüntü kümesi. Tersini bulup öyle yaptın.*

Önder: *Aynen öyle.*

Önder'in Problem 1'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Önder'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Tanım ve görüntü kümesi kavramları iii) Fonksiyon girdi çıktıları (nesne), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Önder çözüm prosedüründe öncelikle bileşke fonksiyonu algoritmasını kullanarak bileşke fonksiyonunu elde etmiştir. Bu esnada kullandığı kavramlarla ilgili açıklama ya da tartışma ortamı oluşturmadan direkt algoritmayı uygulamıştır. Elde ettiği bileşke fonksiyonunu tanımsız yapan noktayı bulup, reel sayılardan çıkararak görüntü kümesine ulaştığını belirtmiştir. Bu süreçte yapmış olduğu aritmetik işlemler doğru olsa da çözüm prosedürü ve kavramlar matematiksel olarak anlamlı değildir. Araştırmacının tanım kümesi kavramını sorgulaması üzerine tanım kümesini de görüntü kümesiyle aynı şekilde ifade etmiştir. Fakat yaptığı hatayı anlayıp yeni bir algoritma ile görüntü kümesine ulaşmıştır. Yaptığı uygulama matematiksel olarak anlamlı olmasına rağmen yüzeysel bir düşünce yapısı sergilemiştir.

S3: Önder akıl yürütme sürecinde, ilk olarak bileşke fonksiyonu bulduran algoritmayı; sonrasında ise bileşke fonksiyonunun tersini bulduran algoritmayı aritmetik işlem hataları yapmadan uygulamıştır. Bu süreçte kullandığı kavramlar ve ifadeler ile ilgili herhangi bir açıklama yapmamış ve tartışma ortamı oluşturmamıştır. Sergilemiş olduğu bu akıl yürütme becerisi türü AR için tipik bir örnektir. Bu sebeple Önder'in bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir.

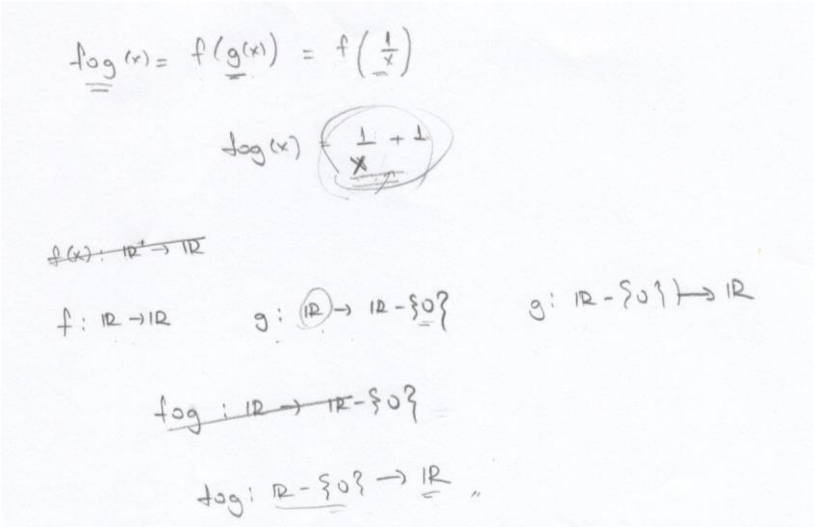
S4: Önder'in çözüm prosedürünü uygularken bileşke fonksiyonunu bulmasının ardından tanım kümesini buluyormuş gibi görüntü kümesini belirlemesi, algoritmaya olan bağlılığın bir göstergesidir. Çünkü uygulayacağı algoritmayı zihninde sağlam bir yere oturtmuştur. Bu algoritma ile fonksiyon, kuralına göre bulunur ve tanımsız yapan nokta çıkarılır. Nitekim ters fonksiyonu bulurken de benzer yol izleyerek görüntü kümesini elde etmiştir. Yani bireyin öğrenme çevresinde algoritmaya dayalı öğrenme tecrübelerinin daha fazla yer alması, uygulamış olduğu algoritma ile her zaman doğru cevap elde etme düşüncesini desteklerken; takip ettiği bu adımların matematiksel altyapısını düşünmekten uzaklaştırmaktadır.

Önder'in Problem 1'e Ait Sınıflandırma Kodu

Önder'in Problem 1'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{dgy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tüt akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.1.6 Ece'nin problem 1'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin Problem 1'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.14, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.14. Ece'nin problem 1'e ait çalışma kağıdı

Ece'nin Problem 1'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Evet Ece ilk soruyla başlayalım. Bir fonksiyon sorusu. Sesli düşün, nasıl çözüme ulaşabilirsin?*

Ece: *Önce şunu oluştursam. Yazayım mı?*

Mülakatçı: *Evet yaz. Ne yapmayı planlıyorsun?*

Ece: *Fonksiyonu oluşturuyorum.* $f(g(x))$. x *gördüğüm yere yazarım* $fog(x) = (1/x) + 1$. *Böyle mi olur?*

Mülakatçı: *Sana bu kümenin görüntü kümesini soruyor.*

Ece: *Şunlara kendim şey tanımlasam. Şunları düşünerek tanım ve görüntü kümesi.*

Mülakatçı: *Nasıl yapmak istiyorsan öyle yap.*

(öğrenci f *için* R den R *ye* g *için* R den $R - \{0\}$ *yazdı.)*

Mülakatçı: *Neden böyle yaptın?*

Ece: *Çünkü orada sıfır tanımsız yapacak. O yüzden sıfırı almadım. Şimdi de şunu oluştursam (*fog *için tanım ve değer kümesi oluşturuyor:* fog *için* R den $R - \{0\}$ *yazdı) o zaman bu da hocam şey olmaz mı tüm reel sayılardan…*

Mülakatçı: *Nasıl vardın bu kanıya? Neyi nereye yazdın?*

Ece: *(Öğrenci güler.) Fonksiyon bu ya* g *den aldım* f *ye getireceğim. Ya da nasıl oldu (öğrenci emin değil)*

Mülakatçı: *Nasıl bir dağıtım yaptın?*

Ece: *Şuan ben de onu düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Sonuca hissel olarak mı ulaştın?*

Ece: *Hissel olarak ulaştım. Ama şunu ben yanlış yazdım (g fonksiyonunu göstererek).*

Mülakatçı: *Neden yanlış. Nasıl olacak?*

Ece: *Tam tersi olması gerekiyor. Sıfırı ben tanım kümesinde alamam. Sonuçta tüm reel sayılar olabilir ama sıfırı alamam (g nin tanım ve değer kümesini düzelterek $R-\{0\}$ dan R ye olarak tanımlar). O zaman bu da bence (fog yi yeniden yazar ve $R-\{0\}$ dan R ye olarak tanımlar)…*

Mülakatçı: *Tanım kümesi nedir?*

Ece: *Tanım kümesi tüm reel sayılar alınamaz mı?*

Mülakatçı: *Yok genel olarak yani*

Ece: *Nasıl yani?*

Mülakatçı: *Yani sendeki tanım kümesi deyince ne akla geliyor?*

Ece: *Tanım kümesi bu fonksiyonun tanımlanabileceği tüm değerler x in. Yani sıfır hariç. Çünkü fonksiyonum buysa tanım kümesinde yine alamam.*

Mülakatçı: *Tamam değer kümesi?*

Ece: *Reel sayılar olur.*

Mülakatçı: *Neden?*

Ece: *Neden. Yani şu değerler için fonksiyonu düşündüğüm zaman reel sayılar olur başka bir şey olmaz ki*

Mülakatçı: *Yerine koyuyorsun ve karşılığına bakıyorsun.*

Ece: *Yerine koyarak düşünerek onu düşünüyorum yerine koyduğum zaman sıfır hariç burası her zaman reel sayılar olur. Öyle olmaz mı? Bilmiyorum ben öyle düşünüyorum.*

Ece'nin Problem 1'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Ece'nin akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Tanım, değer ve görüntü kümesi kavramları iii) Fonksiyon (nesne), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Ece çözüm prosedürüne, bileşke fonksiyonunu elde edeceği algoritma ile başlamıştır. Bileşke fonksiyonuna ulaştıktan sonra ise verilen fonksiyonların tanım ve değer kümelerini belirleyerek; buradan bileşke fonksiyonu için tanım ve değer kümelerini oluşturmuştur. Ancak bu süreçte matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce yapısı veya yaptığı işlemleri anlatacağı bir tartışma ortamı sergilememiştir. Hatta yaptığı uygulamadan emin olmadığını *“... Fonksiyon bu ya g’den aldım f’ye getireceğim ya da nasıl oldu...*” şeklindeki ifadelerinden de anlaşılmaktadır. Çözüm prosedürünün son aşamalarında ise bileşke fonksiyonunun tanım kümesindeki elemanların tek tek karşılığını düşünerek *R* kümesinin istenen sonuç olduğunu belirtmiştir. Oysaki ulaştığı sonuç değer kümesidir, görüntü kümesi değildir. Öğrenci bunun ayrımını da yapamamıştır. Dolayısıyla aritmetik işlemler doğru olsa da çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Ece akıl yürütme sürecinde bir algoritmadan faydalanarak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Bileşke fonksiyonunu elde ettiği bu algoritmanın uygulama aşamasında ve sonrasında kullandığı kavramlara yönelik bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. Uygulamalarında emin olamadığı noktalar olmuştur. Tüm bu nedenlerden dolayı Ece’nin bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir.

S4: Ece, bu soru için sergilediği akıl yürütme süreciyle algoritma kullanımında sorun yaşamadığını göstermiştir. Ancak sahip olunan bilgileri kullanarak kavramlarla ilgili yorum yapma konusunda ise sorunlar yaşadığı anlaşılmaktadır. Gerek, tanım ve görüntü kümelerini belirlerken bulduğu sonuçlardan emin olamaması; gerekse de emin olmuş gibi göründüğü durumlarda doğru sonuca ulaşamaması, belirtilen durumun göstergesidir. Özellikle görüntü kümesini bulurken öğrenme tecrübelerinden edindiği yol, tanım kümesindeki her bir değerin fonksiyondaki karşılığının düşünülmesi şeklindeydi. Ancak genelde doğru sonuca ulaştıracağına inandığı bu yol mevcut soruda işe yaramamıştır. Bulduğu sonuçtan emin olduğunu da “ *Yerine koyarak düşünerek onu düşünüyorum. Yerine koyduğum zaman sıfır hariç burası her zaman reel sayı olur. Öyle olmaz mı? Bilmiyorum ben öyle düşünüyorum.*” Şeklinde ifade etmiş, doğruluğunu kontrol ihtiyacı duymamıştır.

Ece'nin Problem 1'e Ait Sınıflandırma Kodu

Ece'nin Problem 1'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **AR**$_{\mathbf{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 1' in çözüm prosedüründe altı öğrenci tarafından kullanılmıştır. Öğrencilerin bu problemde uyguladıkları temel algoritma fog fonksiyonunu oluşturmak şeklindedir. Bileşke fonksiyonuna ulaştıktan sonra görüntü kümesini belirleme aşamasında ise öğrenciler oldukça zorlanmıştır. Genel olarak yaptıkları uygulama, bileşke fonksiyonunu tanımsız yapan noktaları eleyerek bir küme belirlemektir. Ancak algoritma uygulamaya odaklanan öğrenciler, derinlemesine bir matematiksel düşünce sergilemedikleri için yaptıkları bu işlemle aslında tanım kümesine ulaşacaklarının farkında değildirler. Görüntü kümesinin kavramsal anlamını doğru şekilde açıklamalarına rağmen, altı kişiden yalnızca ikisi gerçek görüntü kümesine ulaşmıştır. Bazı öğrenciler ise tanım kümesindeki değerleri bileşke fonksiyonu için tek tek düşünerek görüntü kümesini oluşturmayı hedeflemişlerdir. Fakat sonsuz elemana sahip olan tanım kümesinin tüm elemanlarını göz önüne alamadıklarından yine yanlış sonuçlara ulaşmışlardır. Ortaya çıkan tüm bu durumların hem kavramsal bilgi eksikliği, hem eksik oluşturulmuş öğrenme tecrübelerinin bir sonucu olduğu düşülmektedir.

4.2.2. Problem 2

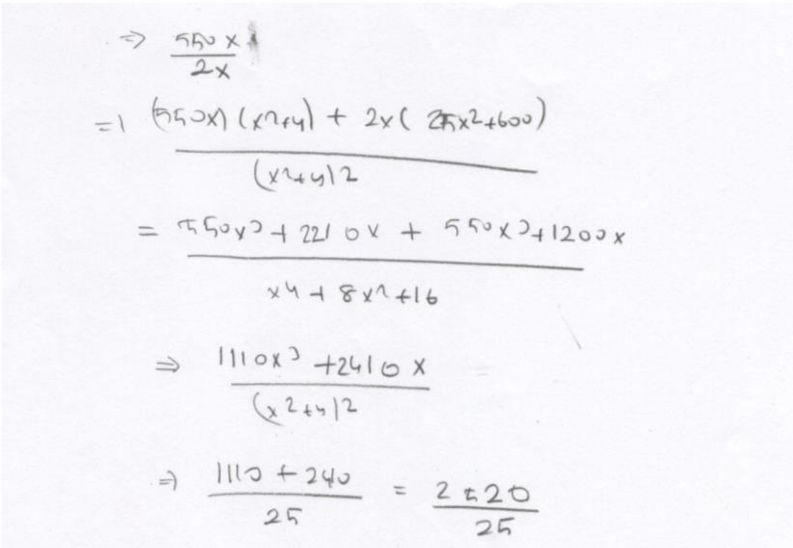
"Bir işletmenin yöneticileri, x *yılı göstermek üzere, ton cinsinden üretimi veren bağıntıyı* $D(x) = \frac{275x^2+600}{x^2+4}$ *biçiminde modelliyorlar. Buna göre uzun yıllar sonra yaklaşık olarak*

a) Bu fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir?

b) Bu fabrika üretimi en fazla ne kadar arttırabilir?"

4.2.2.1. Derya'nın problem 2'ye ait matematiksel akıl yürütme durumu

Derya'nın Problem 2'ye ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.15, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.15. Derya'nın problem 2'ye ait çalışma kâğıdı

Derya'nın Problem 2'ye Ait Klinik Mülakat Transkripti

Derya: *En fazla kaç olabilir? Hocam fabrikanın üretimini soruyor ya en fazla kaç olabilir diye x yılı gösteriyor. Fabrikanın ne kadar artırma dediği zaman bunun türevini alacağız demi hocam artış miktarı olarak?*
Mülakatçı: *Bende yorum yok sen çözeceksin.*
Derya: *Artış miktarı en fazla kaç olabilir? ...*
Mülakatçı: *Nasıl bir şey düşünüyorsun a şıkkı için?*
Derya: *Üretimi en fazla kaç olabilir? x yılı gösterecek. x sıfırdan büyük zaten öyle olacakta. x^2 5 ama o da olmaz. Hocam en fazla dediği için türevini alacağım. Hani bu maksimum minimum problemlerinden düşünüyorum da. Türevini aldığım zaman bir alayım hocam. Öyle düşünüyorum şuan. $275 ile$ 2 yi çarptığım zaman 540 değil mi hocam yok $550\,x\ +$ zaten türev aldığın zaman $2x$ desem ($550x/2x$ şeklinde bir ifade yazmıştır.). 225 diye düşünüyorum en fazla. Ama x olmaz zaten de Δx yaptığım zaman...*

Mülakatçı: *Altına tekrar yazabilirsin*

Derya: *Hocam hani en fazla dediği zaman türevini almayı düşünüyorum ama bölümün türevini alacağım daha doğrusu bu şekilde değil. Yapayım da hocam o şekilde*

Mülakatçı: *Tamam. Yaz açıkça.*

Derya: $\frac{(550x)(x^2+4)+2x(275x^2+600)}{(x^2+4)^2}$ *dağıtayım hocam bunları* $\frac{550x^3+2210x+550x^3+1200x}{x^4+8x^2+16}$ *en fazla kaç olabilir? Hocam bu sıfırdan büyük… ya onunla da alakası yokta… x yılı gösteriyor. Topladığımız zaman bir şey çıkar mı?* $\frac{1110x^3+2410x}{(x^2+4)^2}$ *desem tekrardan. Hocam en fazla olabilmesi için paydanın en küçük değer almasını sağlarsam; 1 mesela. Ama işte* x *e* 1 *verdiğim zaman çıkabilecek sonuç en fazla…*

Mülakatçı: *Türevde mi?*

Derya: *Evet türevini aldığım zaman. Öyle olabilir mi? Öyle olur diye düşünüyorum şuan ama tam olur mu? Gerçi hocam şuan işlemleri tam doğru yaptım mı ondan da emin değilim açıkçası çarpmayı filan.* 1 *versem buna* $\frac{1110+2410}{25}=\frac{2520}{25}$ *böldüğüm zaman çıkan sonuç* x *in en büyük değeri yani en fazla kaç olabilir. Diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Maksimum minimum problemlerinde böyle mi yapıyorsun?*

Derya: *İşte hocam şuan maksimum minimum problemlerinde bile kafam karıştı yani. Böyle bir soruyla karşılaşacağımı hiç düşünmüyordum. İşte maksimumda bir değer bulacağım, onu getirip… bir denklem kuracağım onu yerine yazacağım daha sonra yapacağım. Öyle hatırlıyorum. Ama şuan kafamda bildiklerim de gitti hocam. Sonra bunu yerine yazacaktım galiba (öğrenci söylediğinden emin olmayan bir ifadeyle konuşuyor). İşte x artıya bir değer bulacaktım sonra onu yerine yazacaktım. Diye düşünüyorum hocam şuan.*

Mülakatçı: *Peki hiç maksimum-minimumu düşünme. Mantıken düşün. Kural hatırlamıyorsun ya.*

Derya: *İşte evet hocam şuan yani… Şimdi hocam en fazla üretim dediği zaman, en fazla en az o zaman maksimum-minimum aklıma geldi de ama işte maksimum-minimum da türev aldıktan sonra bir denklem kuruyorduk önce ondan sonra bunu yapıyorduk. Ama işte o denklemi tam şey yapamadım. Ton cinsinden veren bağlantı bu. Birde hocam bu üretimi en fazla ne kadar arttırılabilir derken diferansiyelde delta hani artım miktarını* Δx *diyor ya, onda da türev olacak ama işte onda nasıl olacak (Öğrenci soruların içinde kalmış bir ses tonuyla konuşmaktadır.). En fazla kaç olabilir? Mantıklı*

düşündüğüm zaman da hocam böyle olmaz gibi geliyor. Sıfırdan zaten büyük olacak 1 *verdiğimizde… hocam şuan… Bu fabrikanın üretimi en fazla ne kadar arttırılabilir?*
Mülakatçı: *Var mı başka uygulayabileceğin bir yol?*
Derya: *Hocam şuan türeve odaklandım diye bir tek aklıma o geliyor. Ama normal başka nasıl… Kaldım öylece hocam. Bir de hocam bu en fazla ne kadar arttırılabilir de* Δx *artış miktarı ama işte orada da türev aldığım zaman yani nasıl ne yapacağımı şuan kestiremedim.*
Mülakatçı: *Tamam Derya.*

Derya'nın Problem 2'ye Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Derya'nın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Maksimum minimum problemi kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyonlar) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Derya çözüm prosedürüne *" Hocam en fazla dediği için türevini alacağım. Hani bu maksimum minimum problemlerinden düşünüyorum da*" şeklinde ifade ettiği düşüncesiyle başlamayı uygun görmüştür. Buradan hareketle belirlediği algoritmayı uygulamak için öncelikle pay ve paydanın ayrı ayrı; sonrasında da bölümün türevi olacak şekilde türev almıştır. Derya uygulayacağı algoritmaya tam olarak hâkim olmadığından, en büyük değeri bulmak için türev alarak ulaştığı fonksiyona değer vermeye başlamıştır. Buradan da tatmin edici bir sonuca ulaşamayınca kafası iyice karışmıştır. Algoritmadan vazgeçip kendi mantığıyla hareket etmesi istendiğinde ise herhangi bir yorum yapamamıştır. Yalnızca uyguladığı aritmetik işlemler matematiksel olarak anlamlıdır. Onun dışında çözüm prosedürü matematiksel açıdan bir anlam ifade etmemektedir. Tüm süreçte yüzeysel bir düşünce sergilemiştir.

S3: Derya, akıl yürütme sürecini matematiksel olarak derinlemesine düşünme ve tartışma ortamından uzak bir şekilde sergilemiştir. Soruyu okuyunca kafasında bir algoritma belirmiş ve tüm süreci bu algoritmanın gölgesinde tamamlamıştır. Uygulayacağı işlemleri tam olarak hatırlayamaması onu, farklı ve matematiksel olarak anlamsız uygulamalar yapmaya zorlamış ancak başarılı olamamıştır. Dolayısıyla ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR özellik gösterdiğinden bu kategoride sınıflandırılabilir.

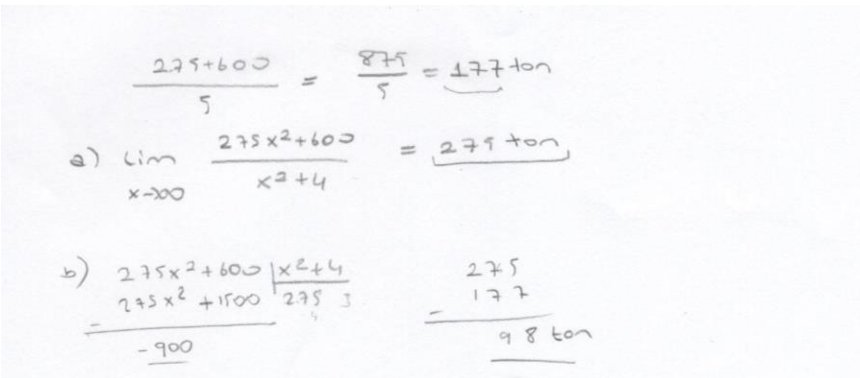
S4: Derya'nın akıl yürütme sürecinde konuyla alakalı kavramsal alt yapısında ki zayıflık ve soruyu yalnızca belirlediği algoritma ile çözebileceği düşüncesi onun yaşadığı zorlukların temelini oluşturmaktadır. Hafızasında kalan eksik bilgileri bir araya toplayarak sonuca ulaşamamıştır. Algoritmadan vazgeçip kendi düşünceleriyle bir şeyler yapması istendiğinde "*hocam şuan türeve odaklandım diye bir tek aklıma o geliyor*" şeklinde bir ifade kullanmıştır. Bu durum, öğrenme yaşantılarının bireyin düşünme gücü üzerindeki etkisini göstermesi açısından oldukça önemlidir. Farklı çözüm yollarıyla karşılaşan bireyin, kendini tek bir noktaya odaklamaktan vazgeçmesi muhtemeldir.

Derya'nın Problem 2'ye Ait Sınıflandırma Kodu

Derya'nın Problem 2'ye ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde her iki şıkta da yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.2.2. Leyla'nın problem 2'ye ait matematiksel akıl yürütme durumu

Leyla'nın Problem 2'ye ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.16, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.16. Leyla'nın problem 2'ye ait çalışma kağıdı

Leyla'nın Problem 2'ye Ait Klinik Mülakat Transkripti

Leyla: *x yılı göstermek üzere diyor. Ton cinsinden üretimi veren bağıntı x^2+4 biçiminde modelleniyor. Buna göre uzun yıllar sonra yaklaşık olarak bu fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir? (öğrenci biraz sessizce düşünür). Acaba bir polinom bölmesi yapsak bir şey gelir mi elimize?*

Mülakatçı: *Nasıl bir şey düşünüyorsun? Nasıl bir yol.*

Leyla: *Yani aslında neyi sormak istediğini tam olarak anlayamadım ama. Örneğin mesela 1 verdiğim zaman $\frac{275+600}{5}=\frac{875}{5}=177$ mesela bir yılda 177 ton üretim yapıyor. Uzun yıllar sonra diyor. Uzun yıllar sonra derken acaba burada bir limit mi alacağız? Mesela x i sonsuza mı götürmek gerekir. Bu şekilde olursa cevap 275 olur.*

Mülakatçı: *Yani uzun yıllar sonra en fazla 275 mi olur?*

Leyla: *Evet 275 olur. $lim_{x\to\infty}\frac{275x^2+600}{x^2+4}$ den bu değer 275 olur.*

Mülakatçı: *Tamam peki b şıkkı?*

Leyla: *En fazla ne kadar arttırılabilir? Hımm.*

Mülakatçı: *Nasıl bir şey düşünüyorsun?*

Leyla: *Nasıl bir şey olur bilmiyorum hocam. Üretim en fazla ne kadar arttırılabilir? Hiç bir şey gelmiyor aklıma.*

Mülakatçı: *Bir artış soruyor yani. Peki bu bulduğun 275 nedir tam olarak?*

Leyla: *Ton.*

Mülakatçı: *Yani neyin karşılığı?*

Leyla: *Yani fabrikanın üretimi mesela yani uzun yıllar sonra en fazla 275 ton üretebilir. Üretimi en fazla ne kadar artırabilir? Bilemiyorum.*

Mülakatçı: *Bir yorumun yok mu?*

Leyla: *Hiç bir şey gelmiyor aklıma hocam.*

Mülakatçı: *Polinom bölmesi mi yapıyorsun.*

Leyla: *Ama bu benim bir işime yaramaz. Yani ne demek istiyor üretimi en fazla ne kadar arttırabilir?*

Mülakatçı: *Yani uzun yıllar içinde üretim ne kadar artar. Yani nerden nereye kadar gelir?*

Leyla: *Hım… mesela şöyle bir durumu düşünsek; biz en fazla 275 olabileceğini düşündük. Bir yılda da 177 ton olur diye düşündük mesela. Bize aradaki fark ne kadar* *arttırılabileceğini gösterir mi acaba? O da çok mu mantıksız olur? En fazla bence* 98 *ton arttırılabilir (*$275 - 177 = 98$*).*

Mülakatçı: *Aradaki farktan buldun.*

Leyla: *Evet yani başka bir şey gelmiyor aklıma*

Mülakatçı: *Tamam.*

Leyla'nın Problem 2'ye Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Leyla'nın akıl yürütme süreci i) Çözüm prosedürü ii) Aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Leyla öğrenme tecrübelerinden farklı bir tarzda sorulan bu soruyu anlamadığını ifade edip amaçsız bir şekilde bildiği algoritmaları denemiştir. Öncelikle polinom bölmesi yapıp ardından x'e 1 değerini vermeyi düşünmüş; sonrasında "*uzun yıllar*" kelimesini fark edip limit almaya karar vermiştir. $x \to \infty$ iken limit alarak bir sonuca ulaşmıştır. Ancak bu süreç ile ilgili bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. Sorunun diğer şıkkında ne sorulduğunu yine anlamadığını ifade ederek yorumda bulunamamıştır. Araştırmacının açıklayıcı birkaç cümlesinden sonra, birinci yıldaki üretimi bulup; uzun yıllar sonraki üretimden farklarını alarak sonuca gitmiştir. Uyguladığı çözüm prosedürleri matematiksel olarak anlamlı olmasına rağmen; Leyla yüzeysel bir düşünce sergileyerek algoritmaları uygulamıştır.

S3: Leyla, birinci şıktaki akıl yürütme sürecinde öncelikle amaçsız algoritmalar uygulayıp sonrasında bir kelimeden faydalanarak limit alma algoritmasını kullanmıştır. Belirtilen bu süreçte matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce sergilememiştir. Bu sebeple a şıkkı için anahtar kelime stratejisini kullanarak AR özelliklerini taşıyan bir akıl yürütme süreci ortaya koymuştur. b şıkkında sorulan olguyu bile anlamadığını ifade edince, araştırmacı "*yani uzun yıllar içerisinde üretim ne kadar artar? Yani nereden nereye kadar gelir?*" şeklindeki ek bir açıklaması sonucunda yine emin olmayarak bir algoritma seçip sonuca ulaşmıştır. Tartışma ortamı barındırmayan bu akıl yürütme süreci Person GAR özelliklerini taşımaktadır. Yani dışarıdan bir kişinin yardımıyla algoritma dayalı matematiksel akıl yürütme türü sergilenmiştir.

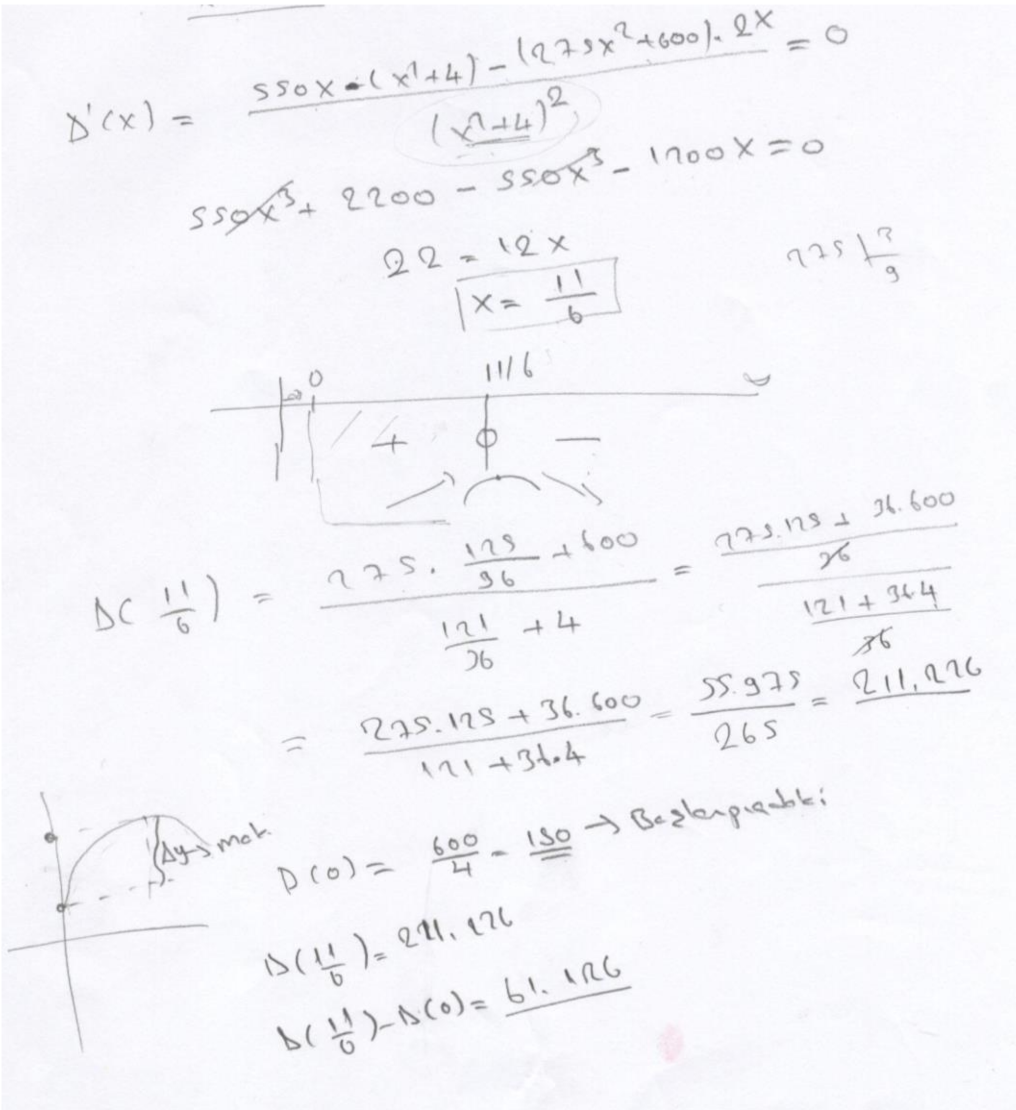
S4: Leyla, kullandığı algoritmalarda bir sorun yaşamamasına rağmen, soruda sorulmak istenileni anlayamaması bu süreçte yaşadığı zorluklardan biridir. Soruyu anlayamaması nedeniyle yapacağı ya da uygulayacağı çözüm prosedürüne de karar verememiştir. Fakat soruyu, anladıktan sonra çözüme varıp, bu çözümden de emin olamaması konuyla ilgili kavramsal zayıflığının bir göstergesi olarak görülebilir. Bunların yanında, öğrenme yaşantılarından edindiği tecrübelerinde de bu tarz rutin olmayan soruların eksikliği, etkili bir akıl yürütme süreci sergilemesine engel teşkil etmiştir.

Leyla'nın Problem 2'ye Ait Sınıflandırma Kodu

Leyla'nın Problem 2'ye ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **Person** $\mathbf{GAR_{xgy}}$olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü Person GAR; doğruluk kategorisinde, problemde a şıkkı için doğru, b şıkkı için yanlış bir sonuca ulaşıldığından x (belirsiz); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.2.3. Harun'un problem 2'ye ait matematiksel akıl yürütme durumu

Harun'un Problem 2'ye ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.17, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.17. Harun'un problem 2'ye ait çalışma kâğıdı

Harun'un Problem 2'ye Ait Klinik Mülakat Transkripti

Harun: *x yılı göstermek üzere ton cinsinden veren bağıntı şu şekilde verilmiş. Bu şeyi gösteriyormuş, bir yılda ürettiği malzeme, ikinci yılda toplam ürettiği malzeme. Tamam. Bu fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir? Şimdi şu soru şeye denk en fazla kaç olabilir derken üretimi türevdeki maksimum minimum problemleri varya maksimum minimum problemlerine denk. Yalnız şimdi bunun birde tanım kümesini filan oluşturup bunu fonksiyon yaptıktan sonra türev işlemi integral işlemi bunlar da uygulanabilir.* Zaten *fonksiyon yapıp onun da sürekli olduğu aralıkları filan bulursak; ki bunda öyle bir problem çıkmaz. Tüm reel sayılarda tanımlı olur. Sıkıntısı olmaz. O zaman bunun* *üretiminin en fazla kaç olabilir? Burada birinci türevini 0 a eşitler, orada maksimum minimum noktasını bulur, oradaki x değerini de fonksiyonda yerine yazarsak şeyi bulmamız lazım en fazla ne kadar üretebildiğini. Onu da birinci türevini alırsak…*

Mülakatçı: *Bu şekilde yol çizmene sebep olan durum soruda yazan en fazla kelimesi mi?*

Harun: *Bu şekilde öyle. Şimdi zaten burada şey vermişse bağıntı tarzı bir şey vermişse bu mutlaka belli bir küme değiştirerek bunu fonksiyon yaparsın. Zaten o kümede, fonksiyon olmayan kümede, sıkıntı çıkarır bu. Yani mesela $x = 1$ de hem 1 çıkıp hem 3 çıkıyorsa bu bizim için problem çıkarır mantıksal olarak yani 1 ton mu üretti 3 ton mu üretti. O yüzden bunu fonksiyon yapmamız şart. Fonksiyon yaptıktan sonra… ıı… nasıl fonksiyon yapacağız tanım kümesini belirleyeceğiz birde. Tanım kümesi şart. Tanım kümesi de zaten tüm reel sayılarda tanımlıymış bir sıkıntı çıkmadı. Ondan sonra fonksiyonda bu en az en çok sorularına türevden cevap veriyorduk. Bunun birinci türevini alırsak $\frac{550x.(x^2+4)-(275x^2+600).2x}{(x^2+4)^2}$ biz bu birinci türevi de sıfıra eşitlersek burayla işimiz yok zaten (Payda) burası sıfıra eşit olamaz. Buradan bulduğumuz kökün burayı sıfır yapma şansı da yok ki kök mü değil mi tartışamayız orada. Çünkü buranın kökü reel değildir. Burayı düzenlememiz lazım. Onu da $550x^3 + 2200 - 550x^3 - 1200x = 0$ bunlar götürdü $22 = 12x$ bunu 2 ile bölersek $x = \frac{11}{6}$. Şimdi bu $\frac{11}{6}$ yı bulduk. $\frac{11}{6}$nın da işaretini incelersek ona da karar verelim. Burada 0, türevin ifadesinin işareti küplüler var. Düzenlediğimiz zaman yukarının ifadesi burası daima pozitif yapar, aşağısı da x e göre negatif yapabilir. X e göre negatif yaparsa 3 verdik burası negatif oldu. O zaman yukarı negatif aşağıda pozitif... burada negatif burada pozitif (öğrenci burada işaret tablosu oluşturmuştur ve $\frac{11}{6}$ ya göre türev denkleminde işaret araştırması yapmaktadır. $\frac{11}{6}$ nın sağını negatif solunu pozitif bulmuştur.). $\frac{11}{6}$, iki küsür burası sıfır. Burası – sonsuz tarafı burası + sonsuz tarafı… Biz şurayla ilgileniyoruz. Burada fonksiyon artmış, burada azalmış. Artmadan azalmaya geçtiği için burada bir maksimum var $\frac{11}{6}$ da. Önce yerine mi yazacağız şimdi (öğrenci bu değeri verilen bağıntıda yerine yazıyor.) $D\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{275.\frac{125}{36}+600}{\frac{121}{36}+4}$ burayı da düzenlersek… Bunu düzenleyip kesin net sonuç bulmam şart mı?*

Mülakatçı: *Yani en fazla ne kadar olur diyor. Belli ki bir sayı istiyor.*

Harun: *Onu bir düzenlersek* $=\frac{\frac{275.125+36.600}{36}}{\frac{121+36.4}{36}}=\frac{\frac{275.125+36.600}{36}}{\frac{121+36.4}{36}}=\frac{275.125+36-600}{121+36.4}=\frac{55975}{265}=$ $211{,}226$ *ama bunda bir sıkıntı var gibi şüphelenmeye başladım (öğrenci işlemleri telefonunda ki hesap makinasını kullanarak yaparak sonuca ulaşmıştır). En fazla maksimum üretim buymuş.*

Mülakatçı: *Tamam peki ikinci soru?*

Harun: *İkinci soru bu fabrika üretimini en fazla ne kadar arttırabilir. Şimdi burada…*

Mülakatçı: *Nasıl bir şey soruyor, nasıl bir yol aklında oluştu?*

Harun: *Şimdi burada arttırıyor, sürekli de azalansa fonksiyon türevi negatifse burada fonksiyon azalan… ya bunun grafiği mantıksal olarak, tam olmasa da şu 0 ile*$\frac{11}{6}$ *aralığında artmış. Ondan sonra üretim miktarı bu aralıkta da düşmüş bu aralıkta da düşmüş. En fazla ne kadar arttırabilir. Burada ne kadar arttırabilir derken bunun bir başlangıç değeri var demek ki. O başlangıç değerinin üzerine belli bir müddet bir şey koymuş ondan sonra geri düşmeye başlamış yani başlangıç değeriyle tepe değeri arasındaki farkı soruyor. Yani aslında fonksiyonun grafiği diyelim ki şöyle bir salınım yaptıysa şunu soruyor herhalde şu farkla şu farkı (grafik çiziminde göstermiştir bunu). Şimdi buradan zorlasam diferansiyel çıkarırım bende… Başlangıç değerini nasıl buluruz?* x *yıl. Negatif yıl olmaz 0 yıl olsa. Şimdi muhtemelen böyle bir fonksiyon varsa 0 yıl başlangıç değerini vermeli diye düşünürüm ben.* $D(x)$ *de 0 yazsam,* $D(0)$ *oda ne yapar* $\frac{600}{4}$ *den* 150 *ton yapar. Bu başlangıçtaki ürettiğiymiş. Ondan sonra zaten bu salınımdan sonra düşmeye başlamış. Bize şuranın şu* Δy *deki maksimum değeri soruyor. O zaman burada şey yaparım* $D(\frac{11}{6})$ *yı da buldum zaten* $211{,}226$. *Buradan* $D(\frac{11}{6})-D(0)$ *derim buradan da en fazla artışı bulurum. O da 61,126 diye düşünürüm ama bilmiyorum yanlış mı doğru mu?*

Mülakatçı: *Tamam Harun buna benzer sorularla karşılaşmış mıydın daha önce?*

Harun: *Şimdi buna benzer sorularla karşılaşmış mıydım derken şu şeyde tartışıyorduk biz onu sürekli sınavlarda filan da kavram yanılgısında soruyorlar sürekli. Bunlarla değil yani okul bazında değil de kendim olarak yani nerde kullanılıyor diye düşündüğümde aklıma gelmişti.*

Mülakatçı: *Tamam teşekkürler.*

Harun'un Problem 2'ye Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Harun'un akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Türev uygulamaları kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyonlar), bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Harun çözüm prosedürüne, *" şimdi şu soru şeye denk, en fazla kaç olabilir derken üretimi türevdeki maksimum minimum var ya maksimum minimum problemlerine denk*" şeklindeki düşüncesi ışığında başlamıştır. Maksimum minimum problemlerindeki algoritmayı uygulamadan önce verilen ifadenin fonksiyon olduğunu göstermiştir. Algoritmadan elde ettiği değeri direkt sonuç olarak almayıp bunu ifadede yerine yazması gerektiğini belirtmiştir. Bu ifadeler kavramsal bilgiden haberdar olduğunu göstermektedir. Ancak çözüm prosedürünü bir algoritmanın gölgesinde ilerletmesi, yeterince derinlemesine bir düşünce sergilemesine engel teşkil etmiştir. Sorunun b şıkkında ise yorum gücünü az da olsa sürece katmıştır. $x$değerlerinin yıl ifade ettiğini göz önünde bulundurarak yorum yapmıştır. Ancak yine de aranan doğru cevaba ulaşamamıştır. Uygulamış olduğu aritmetik işlemlerin işlemsel boyutu matematiksel olarak anlamlı olmasına rağmen, takip ettiği çözüm prosedürü matematiksel açıdan anlamlı değildir.

S3: Harun akıl yürütme sürecinde belirlediği algoritmayı uygulamadan önce, o algoritmanın ön şartlarının sağlanıp sağlanmadığını göstermeyi amaçlamıştır. Bu amaçla tanım kümesini belirleyip fonksiyon olma durumunu garantilemek istemiştir. Ancak "*en fazla*" anahtar kelimesinden hareketle maksimum minimum problemlerindeki algoritmayı uygulamış, bu sürece farklı bir yorum katmamıştır. Tamamen yüzeysel bir düşünce yapısı sergilemese de, tamamen derinlemesine de düşünmemiştir. Bu özelliklerden dolayı Harun'un ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir. Bir anahtar kelime kullandığından AR'nin alt kategorisi olan FAR olarak özelleştirilebilir.

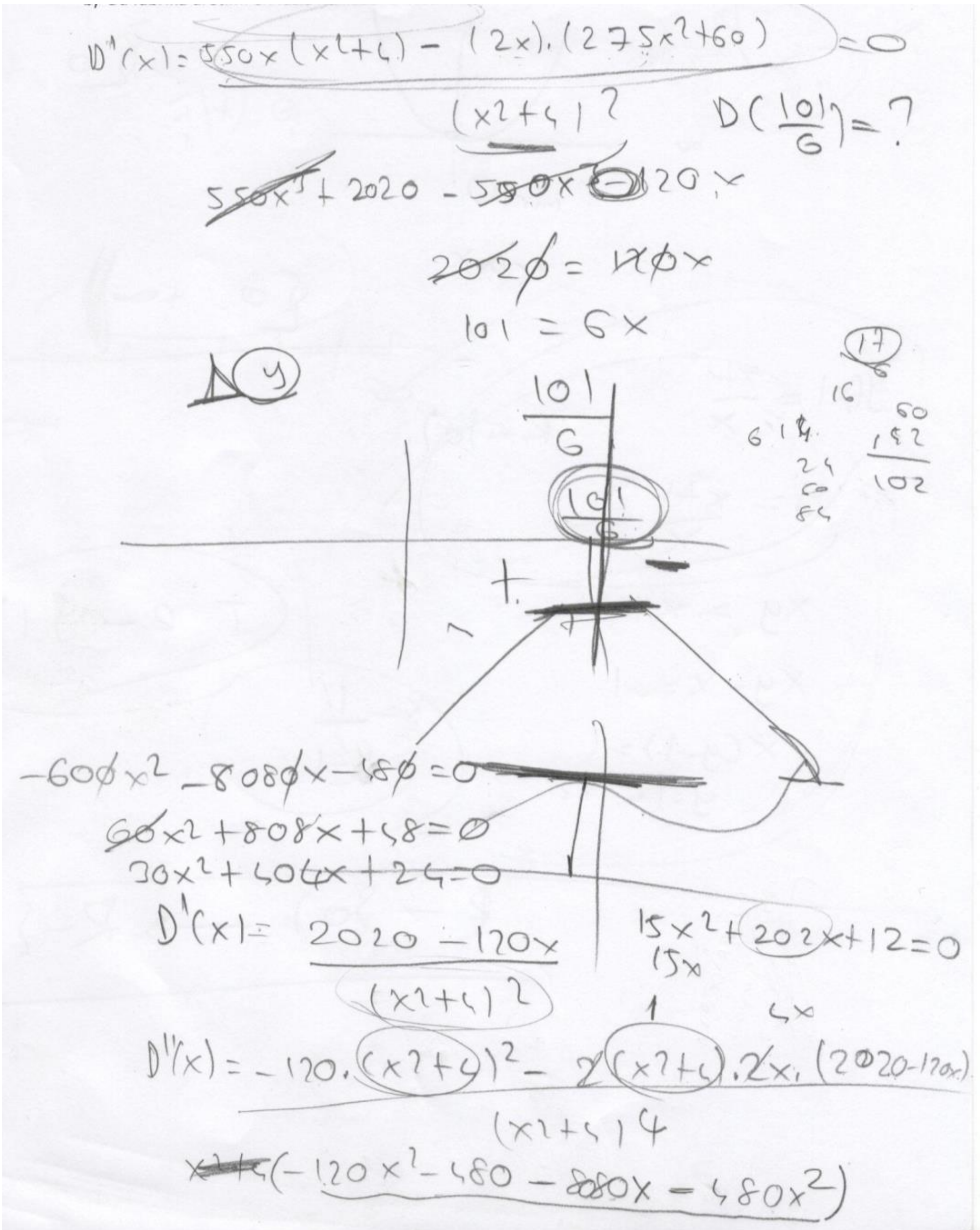
S4: Harun'un bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme sürecine genel olarak bakıldığında, kullandığı matematiksel kavramlar hakkında bir alt yapısının olduğu anlaşılmaktadır. Çünkü çözüm prosedüründe salt bir algoritma uygulaması yapmamış, kullandığı matematiksel kavramları açıklayabilmiştir. Ancak öğrenme çevresinde edindiği tecrübeler onu bir algoritmanın gölgesine hapsetmeye yetmiştir. Soru cümlesinde yer alan "*en fazla*" kelimesi, bu tarz soruların ancak bu algoritmayla çözüm bulacağı fikrini Harun'un düşünce dünyasına yerleştirmiştir. Bu durum, bireyin derinlemesine düşünmesini engellemiştir.

Harun'un Problem 2'ye Ait Sınıflandırma Kodu

Harun'un Problem 2'ye ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{FAR_{ygx}}$olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü FAR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak hem yüzeysel hem de derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden x (belirsiz) olarak kodlanmıştır.

4.2.2.4. Umut'un problem 2'ye ait matematiksel akıl yürütme durumu

Umut'un Problem 2'ye ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.18, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.18. Umut’un problem 2’ye ait çalışma kâğıdı

Umut’un Problem 2’ye Ait Klinik Mülakat Transkripti

Umut: *En fazla ya da en az ya da ne kadar olabilir sorularında türev kullanılır genelde. Türevini sıfır yaptığı noktayı buluruz kökünü buluruz. Orada artanlık mı azalanlık mı olduğuna bakarız maksimum minimum noktası. Ona göre en fazla ya da ne kadar olacağını söyleriz soruya göre. Türevini alırsam yine*

$D'(x) = \frac{550x(x^2+4)-(2x)(275x^2+60)}{(x^2+4)^2}$ *(öğrenci 600 demiştir ancak 60 yazmıştır türevi hesaplarken) şuradan bir kök gelmeyecektir (payda için). Benim için önemli olan buranın sıfır olmasıdır(pay için). Sıfır olması kökünün sıfır olmasına eşdeğer bir kavramdır. Buradan çözdüğümüzde* $550x^3 + 2020 - 550x^3 - 120x$ *yazım kötü olduğu için sınavda çok kaybediyorum hocam.*

Mülakatçı: *İşlem hatasından mı?*

Umut: *Yani yazım kötü olduğu için işlem hatasına müsait.* $2020 = 120x$ *olur. Yani x,* $\frac{101}{6}$ *olur. Yani şöyle bir şey yazarsak tablo olarak, bu denklemin en büyük dereceli kat sayısı –(eksi). Ya da bundan büyük bir sayı veririz.* $\frac{101}{6}$ *yaklaşık olarak 10 desek 60 olmaz; 12 desek 72; 13 desek 6.13 78; 14 desek 84; 15 desek 90; 16 desek 96; 17 desek 102 oluyor. Yani 17 değeri versek mesela bu denklemde veya da en büyük derecelinin kat sayısına bakarız direk daha işte kolay olsun.* $-, +$ *yani artanlıktan azalanlığa geçen bir nokta. Yani bu nokta bizim maksimum noktasıdır. Fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir diyor. En fazla* $\frac{101}{6}$ *daki değerini mi alıyoruz. Yani x in* $\frac{101}{6}$ *daki değerine bakıyoruz. D(*$\frac{101}{6}$*) değerine bakıyoruz herhalde.*

Mülakatçı: *Peki ikinci soru*

Umut: *Bu fabrika üretimi en fazla ne kadar arttırılabilir?*

Mülakatçı: *Bu fabrika üretimini en fazla ne kadar arttırabilir?*

Umut: *A evet pardon en fazla ne kadar arttırabilir? Güzel bir soru. Yani sınır noktasını acaba bura mı düşünüyoruz? Bir grafik olsa, şöyle eğrisel bir grafik, maksimum değerini aldığı bir nokta, bunun üretim kapasitesini daha da arttırabilmek için ya da en fazla ne kadar arttırılabilir?*

Mülakatçı: *En fazla ne kadar arttırabilir yani o süreç içerisinde?*

Umut: *Onda da şeye mi bakacağız hocam ikinci türeve mi acaba?*

Mülakatçı: *Niçin? Neyi sağlayacak ikinci türev?*

Umut: *Yani birinci türevi aldığımızda maksimum minimum olduğuna karar verebiliyoruz. Bulduk maksimum değerini de. Iı üretimi en fazla ne kadar arttırılabilir? En fazla y kadar arttırılsa; yani burada da bir değişim olacaktır arttırılma değişimi* Δy *yada. Bir değişimden bahsettiği için ikinci türeve mi bakmamız gerekiyor acaba? Öyle düşünüyorum ama bilmiyorum.*

Mülakatçı: *İkinci türev o* Δy *yi mi verecek sana?,*

Umut: *Yani bir değişimden bahsediyor yani ne kadar fazla arttırılabilir. Değişim kavramı da bize bir limitle yaklaşım olarak karşımıza çıkıyor bir de türev de karşımıza çıkıyor. Yani ikinci türev yardımıyla da bunun ne kadar arttırılabildiğini bulabiliriz diye düşünüyorum. Yani ivmeyle hız zaman grafikleri gibi… Yani bir bağlantı kurdum ama saçmaladım mı bilmiyorum. Yani* $D'(x) = \frac{2020-120x}{(x^2+4)^2}$ *zaten benim için bu önemli değil (payda) önemli olan üst taraf. İkinci türevini aldığım zaman* $D''(x) = \frac{120.(x^2+4)^2-2.(x^2+4).2x.(2020-120x)}{(x^2+4)^4}$ *şurayı da* (x^2+4) *parantezine alsam* $(-120x^2 - 480 - 8080x - 480x^2)$ *saçmalıyorum gibi geliyor ama. Bu denkleminde 0 a eşitlememiz gerekiyor. Şunları atıyorum (paydada bulunan* (x^2+4) *lü ifade)* $-600x^2 - 8080x - 480 = 0$*. Şunları da götürüyorum* $60x^2 + 808x + 48 = 0$ *bir daha neye bölünür?* $30x^2 + 404x + 24 = 0$ *en sade haline getirirsek* $15x^2 + 202x + 12 = 0$*. Buda artık 3 e bölünmez. 15x e 1 desek…işte burada tıkandık herhalde.*

Mülakatçı: *Oradan bir sayı çıkacak çıkan sayı neyi verecek sana?*

Umut: *Çıkan sayı da ne kadar arttırılabileceğini verecek herhalde. x değeri çıkacak onu da fonksiyonda yerine yazdığımızda artma miktarını verecek. Böyle düşünüyorum hocam ama ben tam hazırlıksız yakalandım.*

Mülakatçı: *İkinci türev artışı veriyor öylemi? Böyle sorular çözmüş müydün ikinci türevin artışına dayalı soru?*

Umut: *Dediğim gibi fizikte mesela ivme hız grafiklerine bakarsak onlarda birinci türevden ikinci türeve geçişte yani biri ivme miktarını verirken biri hız miktarını verir. Yani burada birinci de en fazla kaç olabilir derken diğerinde en fazla ne kadar arttırabilir vardı. Yani burada birini hız birini ivme gibi düşündüm ama bilemiyorum ne kadar doğru yaptım.*

Mülakatçı: *Tamam*

Umut'un Problem 2'ye Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Umut'un akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Birinci ve ikinci türev uygulamaları kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyonlar), bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Umut çözüm prosedüründe "*en fazla ya da en az ya da ne kadar olabilir sorularında türev kullanılır genelde*" şeklinde ifade kullanarak maksimum minimum problemlerinin çözümünde uyguladığı algoritmaya yönelmiştir. Dikkat hatası yaparak soruda verilen değeri yanlış almasının dışında algoritmayı kuralına göre uygulamıştır. İşaret tablosunu oluşturarak, bulduğu x değerini maksimum nokta olarak elde edip a şıkkının cevabını belirlemiştir. Ancak derinlemesine bir düşünce yapısı ile soruya yönelmediği için, bulduğu bu cevabın "zaman" ifadesi barındırdığını; ondan istenenin ise "en fazla üretim" olduğunu gözden kaçırmıştır. Öğrenme tecrübelerinden hareketle sorunun değişimi sorduğunu ve Δy'yi bulması gerektiğini belirtmiştir. Burada da ikinci türev alma işlemini sorunsuz uygulamış, ancak yine bulduğu x değerini sorunun cevabı olarak belirlemiştir. Dikkatsizlikten kaynaklanan hata dışında algoritmayı doğru uygulamasına rağmen çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Umut, akıl yürütme sürecinde soruda görmüş olduğu anahtar kelimelerden yola çıkarak bir algoritma belirlemiştir. Çünkü öğrenme çevresinde edindiği tecrübelere göre bu kelimelerin geçtiği yerler bu algoritma ile çözülmektedir. Belirtilen bu algoritma ile elde edilen sonuç ise her zaman aranan sonuç olmuştur. Ancak verilen soruda o tarz bir rutin işleyişin olmaması Umut'un hata yapmasına neden olmuştur. Her zaman çalışan algoritma, Umut'un derinlemesine düşünmesine de engel olmuştur. Bu nedenle sadece algoritmayı uygulamış, bir cevap elde etmiş ve herhangi bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. O halde akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir. Anahtar kelime kullandığından AR'nin alt kategorisi olan FAR olarak özelleştirilebilir.

S4: Umut'un önceki öğrenme yaşantılarından edindiği tecrübeler, onun bu soruda güçlük yaşamasına neden olmuştur. Aynı tarz soruların aynı algoritma ile çözülebileceği inancı, bireyi derinlemesine düşünmekten, bulduğu sonucu sorgulamaktan uzaklaştırmaktadır. Umut'un türevle, limitle ilgili yaptığı açıklamalardan bu konulara ait kavramsal alt yapıya sahip olduğu bilgisine ulaşılabilir. Ancak sergilemiş olduğu akıl yürütme sürecinden de ortaya çıktığı gibi, kalıp öğrenmelerin bireylerdeki farklı düşünebilme gücünü olumsuz etkilediği sonucuna varılabilir.

Umut'un Problem 2'ye Ait Sınıflandırma Kodu

Umut'un Problem 2'ye ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak F**AR**$_{ygy}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü FAR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

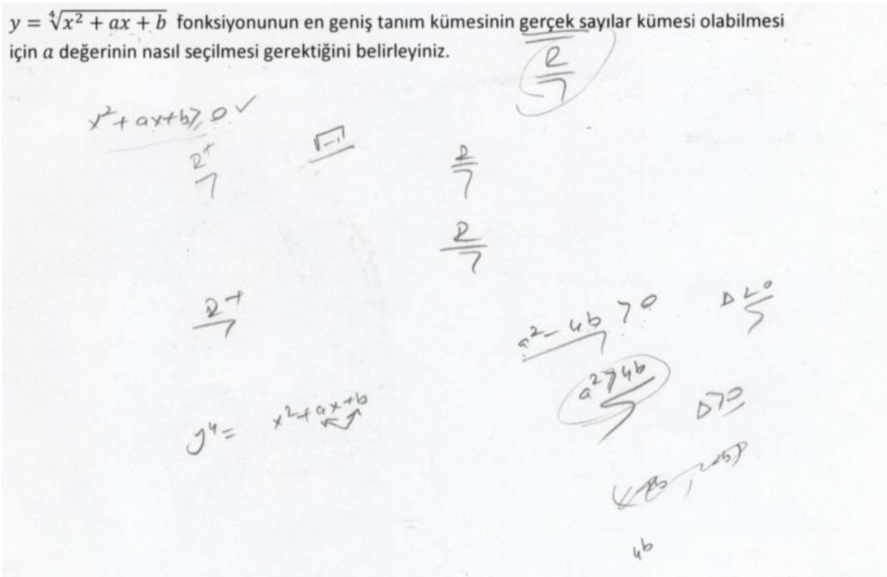
Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 2' nin çözüm prosedüründe dört öğrenci tarafından kullanılmıştır. Ortaya konulan akıl yürütme süreçleri incelendiğinde ise verilen problemde öğrencilerin daha çok anahtar bir kelimeden hareket ederek, öğrenme tecrübelerinin ışığıyla belirli algoritmalara yöneldikleri görülmüştür. Algoritmayı kullanarak elde edecekleri sonuçların kesin doğru olacağına inanan öğrenciler, bunun dışında bir düşünce sergilemekten kaçınmışlardır. Kavramsal alt yapı olarak belirli bir düzeyleri olsa bile, seçtikleri algoritmaya odaklandıklarında bu kavramsal alt yapıyı derinlemesine kullanamamışlardır. Öğrenme ortamlarında algoritma kullanmaya yönelik durumların fazla; kavramların bütüncül düşünüldüğü tartışma ortamlarının ise daha az olması, öğrencilerin etkili düşünmeler ortaya koymasına engel olmaktadır.

4.2.3. Problem 3

"$y = \sqrt[4]{x^2 + ax + b}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesinin gerçek sayılar kümesi olabilmesi için a değerinin nasıl seçilmesi gerektiğini belirleyiniz."

4.2.3.1. Banu'nun problem 3'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Banu'nun Problem 3'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.19, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.19. Banu’nun problem 3’e ait çalışma kâğıdı

Banu’nun Problem 3’e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Banu yine sesli düşünerek çözmeni istiyorum.*

Banu: *(öğrenci soruyu sessizce okudu) Bu şimdi çift yani karekök. O yüzden diyeceğiz ki içi pozitif olmalı* ≥ 0

Mülakatçı: *Neden?*

Banu: *Çünkü… ama fonksiyonun en geniş tanım kümesinin gerçek sayılar kümesi için reel sayılar kümesi olması için. Eğer içi negatif oldu mu reel sayıların dışına çıkar o yüzden tanımlı olmaz. O yüzden* ≥ 0 *olması lazım. Ama nasıl seçeceğiz şimdi mesele orada. Ama reel sayılar kümesi olabilmesi için. O zaman biz sadece reel sayıların pozitif kısmını almış oluyoruz.*

Mülakatçı: *Yani en geniş tanım kümesini düşünüyorsun.*

Banu: *Şimdi istediğimiz en geniş tanım kümesi R demiş. Biz dedik ki* R^{+} *oluyor bunun tanım kümesi. Şimdi a ya nasıl ulaşacağız? a değerinin nasıl seçilmesi gerektiğini belirleyiniz diyor.*

Mülakatçı: *Neler olabilir aklına gelen yol var mı?*

Banu: *Düşünüyorum. Acaba tersini mi alsak? Bu sefer görüntü kümesi… en geniş tanım kümesinin gerçek sayılar olabilmesi için…*$y^4 = x^2 + ax + b$ *olur. Buradan da bir şey gelmez. İki tane bilinmeyenimiz var birde. a’yı bir şeye göre mi seçeceğiz?*

Acaba içini negatif yapacak bir şey mi bulmak lazım. Δ *sına mı baksak? Evet* Δ *mantıklı gibi duruyor.* $a^2 - 4b$ *eğer bunun olması için reel kökün olması lazım o halde* $> 0. a^2 > 4b$ *hıh böyle çıkacak.*

Mülakatçı: *Neden* Δ *ya girdin ne düşündün?*

Banu: *Şimdi yani dedim ki… ama neden girdim evet. Sonuç olarak reel kök olmazsa* $\Delta < 0$ *olur karmaşık sayılara gider diye düşündüm. Bunun da tanım olabilmesi için köklerinin hani nasıl diyeyim karmaşık sayı olmayacağını düşündüm. O yüzden dedim ki* $\Delta > 0$ *olması için buna eşit olması lazım* $a^2 - 4b$ *nin* > 0 *olması gerek dedim. Yani a değeri -2b ile b aralığında olmalı mı acaba?*

Mülakatçı: Δ *dan kök oldu diye düşündün…*

Banu: *Evet ama doğru mudur acaba bilemiyorum. Yine bakalım* $a^2 - 4b > 0$*. Bu olmalı yaa bence böyle.*

Mülakatçı: *Reel kök olması için* $\Delta > 0$ *olmalı ki bu şartı sağlasın diye düşündün.*

Banu: *Evet sonuç olarak ne dedik başta geniş tanım kümesini R aldık ama bunun tanımlı olabilmesi için* R^+ *dedik,* R^+ *olabilmesi için reel kök olması lazım. reel kökün olması için* $\Delta > 0$ *olması lazım.* Δ*'dan gidersek de a'nın aralığı da ne olur* $a^2 > 4b$ *yi sağlayan a değerleri olur.*

Mülakatçı: *Tamam Banu.*

Banu'nun Problem 3'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Banu'nun akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Reel kök kavramı, aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Banu, çözüm prosedürünü oluşturma aşamasında oldukça kararsız kalmış ve zorlanmıştır. Köklü sayının çift derecesinden dolayı, kökün içindeki sayının ≥ 0 olması gerekliliğini ve bunun nedenini belirtmiş ancak sonraki adımları netleştirememiştir. Fonksiyonun tersini bulma, kök içini negatif yapma gibi yolları düşünmüş Δ(diskriminant)'da karar kılmıştır. Verdiği bu karardan da emin olmamakla birlikte; soru kökünde geçen "*en geniş tanım kümesinin gerçek sayılar kümesi...*" ifadesi bu kararının nedeni olmuştur. Δ'nın 0'dan büyük ya da küçüklüğüne göre ortaya çıkan durumu belirtmiş ve çözüm prosedürünü tamamlamıştır. Ancak bu süreçte pozitif reel sayı değerleri için Δ'nın 0'dan büyük olduğu durumunu kullanması hem çözüm prosedürü hem de reel kök kavramı açısından matematiksel olarak anlamlı değildir. Yüzeysel bir düşünce yapısı sergilemiştir.

S3: Banu akıl yürütme sürecinde köklü sayıların derecelerine göre nasıl hareket ettiklerini; Δ'nın 0'dan büyüklük küçüklük durumuna göre nasıl yorumlandığını doğru bir şekilde belirtmiştir. Ancak bu durumlarla soru arasında bağlantı kurarken kelime benzerliklerinden hareket etmiş; matematiksel alt yapısını göz önünde bulundurmamıştır. Reel sayı olması için reel kökün mevcut olduğu Δ'nın 0'dan büyük olması durumunu çözüm olarak kabul etmiştir. Matematiksel temellere sağlam oturmayan bu durum için de emin olmadığını ifade etmiştir. O halde derinlemesine düşünmenin olmadığı, benzerliklerden faydalanılarak belirli bir algoritmanın kullanıldığı akıl yürütme türü olan AR, Banu'nun bu soruda ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü olarak belirlenebilir.

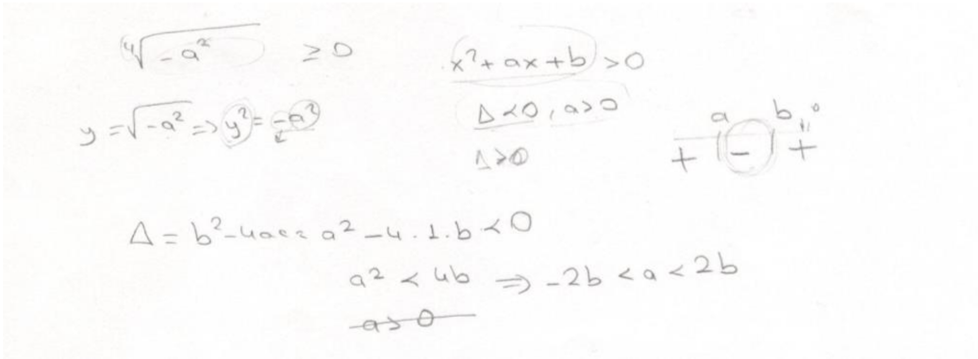
S4: Banu çözüm prosedürünü oluştururken kullandığı kavramların özelliklerini açıklayabilmiş ve bunlar arasındaki geçişleri, bağlantıları yüzeysel olarak gerçekleştirmiştir. Bu durumu da *"... geniş tanım kümesini R aldık. Ama bunun tanımlı olabilmesi için R^+ dedik. R^+ olabilmesi için reel kök olması lazım. Reel kökün olması için $\Delta > 0$ olması lazım*" şeklinde ifade etmiştir. Yani kullandığı matematiksel kavramların esas özelliklerini dikkate almadan adımlar atmıştır. Pozitif reel sayılarda tanımlı olması için reel kök olması durumunu şart koşmuştur. Bu tarz bir bağlantının kurulma nedeni olarak, bu kavramlara kavramsal açıdan hakim olmama durumunu gösterebiliriz.

Banu'nun Problem 3'e Ait Sınıflandırma Kodu

Banu'nun Problem 3'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.3.2. Aylin'in problem 3'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Aylin'in Problem 3'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.20, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.20. Aylin'in problem 3'e ait çalışma kağıdı

Aylin'in Problem 3'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Evet Aylin sesli düşünerek soruyu çözmeni istiyorum.*

Aylin: *Bu karekök ifadesi çift katlı yani 4. dereceden çift bir derece. Dolayısıyla içerisinin* ≥ 0 *olması gerekiyor.*

Mülakatçı: *Neden?*

Aylin: *Çünkü kökün içi negatif olamaz çift katlılarda. Bunu şöyle düşünebiliriz yani* $-a$ *olsa* $\sqrt[4]{-a^2}$ *diye bir şey olmaz yani eşiti. Bunu nasıl açıklayayım ıı*

Mülakatçı: *Negatif olunca ne oluyor?*

Aylin: *Eksi olunca tanımsız oluyor. hani nasıl tanımsız oluyorsa mesela* $y = \sqrt{-a^2}$ *desek karelerini alsak* $y^2 = -a^2$ *gibi bir şey olur ki y'nin karesi hiçbir zaman negatif olmaz. Buda pozitif bu da pozitif ama buradaki işaret negatif olmuş oluyor. bu mümkün olmuyor. Dolayısıyla içinin* ≥ 0 *olması gerekiyor. Diyor ki en geniş tanım kümesinin reel sayı yani gerçel sayılar kümesi olması için a değerinin nasıl seçilmesi gerekiyor. Bu ifadenin reel sayılar olabilmesi için bence burada* $\Delta < 0$ *olması gerekiyor.*

Mülakatçı: *Neden?*

Aylin: *Şey çünkü* $\Delta < 0$ *olursa şuradaki a'nın da* > 0 *olması lazım.* $\Delta < 0$ *olursa bu ifade her zaman* > 0 *olur.*

Mülakatçı: *Neye bağlı olarak oluyor bu durum?*

Aylin: *Neye bağlı olarak… Şimdi* $\Delta = 0$ *olursa mesela veya işte* $\Delta > 0$ *olursa iki tane kök olmuş oluyor a ve b gibi. Biz bunun işaret tablosunu yapınca, atıyorum a da pozitif olduğu için şu değer de negatif olmuş oluyor ki içerisi negatif olamaz (işaret tablosunu inceledi köklerden a ve b arasını negatif buldu). Yani o yüzden dolayı* Δ*'nın* < 0 *olması gerekiyor ki kök olmasın.*

Mülakatçı: *Peki pozitifli kısımları alsak buradan.*

Aylin: *Negatifleri atsak… onu… pozitifleri alırsak o da olabilir aslında ama işte pozitifleri alırsak mesela şu ifade de pozitif olur ve sağlar. Ama şey burada köklerini bulmamız sıkıntı o yüzden öyle düşünüyorum.*

Mülakatçı: *O yüzden* $\Delta < 0$ *olunca hiçbir kökü olmayacak, a da pozitif olduğu için baştaki* x^2*'nin katsayısı. O zaman nasıl bir şey yapacağız?*

Aylin: *Hı hı evet. O zaman* $\Delta = b^2 - 4ac$ *den* $a^2 - 4.1.b < 0$ *diyorum* $a^2 < 4b$ *oldu. Bir de* $a > 0$ *vardı.*

Mülakatçı: *Hangi* a*?*

Aylin: *Şu a…Ha başta zaten a* > 0 *oluyor bu değil o zaman. Böyle bir ifade geldi.*

Mülakatçı: *O halde a nasıl seçilmeli?*

Aylin: a *-2b ile 2b arasında seçilmeli* $(-2b < a < 2b)$*.*

Mülakatçı: *Tamam Aylin. Peki böyle bir çözüm yaptın. Böyle akıl yürütmeyi ya da böyle kavramsal olarak bilmeyi nasıl öğrendin?*

Aylin: *Ben yani önce okuldan öğrendim* $\Delta < 0$ *durumunu filan. Kitaplara çalışınca filan da gördüm. İlk başlarda bunları pek hatırlayamıyordum mesela* $\Delta < 0$ *,* $a > 0$ *gibi biraz hafızamda şey vardı ama işte zamanla bu oturdu yerine. Şimdi mesela böyle bir soru gördüğümde hemen işte şey diyebiliyorum* $\Delta < 0$ *seçelim,* $a > 0$ *diyelim pozitif olsun filan diye diyebiliyorum. Zamanla oturdu yani biraz bu. Özellikle şu ifade. Yani bu soruları okurken zaten bana bir ipucu veriyor yani en geniş tanım kümesinin reel sayılar kümesi olması için. Yani burada hemen diyebiliyorum* $\Delta < 0$ *olsun diye. Biraz da herhalde çok soru çöze çöze oluyor.*

Mülakatçı: *Tamam Aylin.*

Aylin'in Problem 3'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Aylin'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Köklü sayılar kavramı, aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Aylin çözüm prosedürünü öğrenme yaşantılarından edindiği kavramsal bilgilerle inşa etmiştir. Attığı adımlarda kullandığı ifadelerin veya yapıların, araştırmacı tarafından sorgulanması durumunda bunları açıklayabilmiştir. Örneğin, çift dereceli köklü sayılarda kökün içindeki sayının neden sıfırdan büyük olması gerektiğini; kullanacağı Δ sayısının neden sıfırdan küçük olması gerektiğini, aksi durumda neler olacağını matematiksel esaslar ışığında belirtmiştir. Çözüme ulaşacağı son aşamada yaptığı aritmetik işlem hatası nedeniyle doğru sonuca ulaşamamıştır. Ancak sadece sonuca yönelik ve yüzeysel olmayan bir düşünce tarzı sergilemeyi başarmıştır.

S3: Aylin akıl yürütme sürecini, attığı adımların farkında olacak şekilde ilerletmiştir. Konu ile alakalı kavramsal bilgiye hâkim olduğu anlaşılmaktadır. Derinlemesine matematiksel özellikleri göz önünde bulundurmuştur. Buraya kadar ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü CR özelliklerini taşıyormuş gibi görünse de görüşme sonunda kullandığı ifadeler gerçek türü belirlememizde yardımcı olmuştur. Aylin'in "*özellikle şu ifade, yani bu soruları okurken zaten bana bir ipucu veriyor. Yani en geniş tanım kümesinin reel sayılar kümesi olması için yani burada hemen diyebiliyorum* $\Delta < 0$ *olsun diye.*" şeklindeki düşüncesi, onun bu tip sorularda bir algoritma kullandığının göstergesidir. Bu sebeple verilen soru için akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılmaktadır.

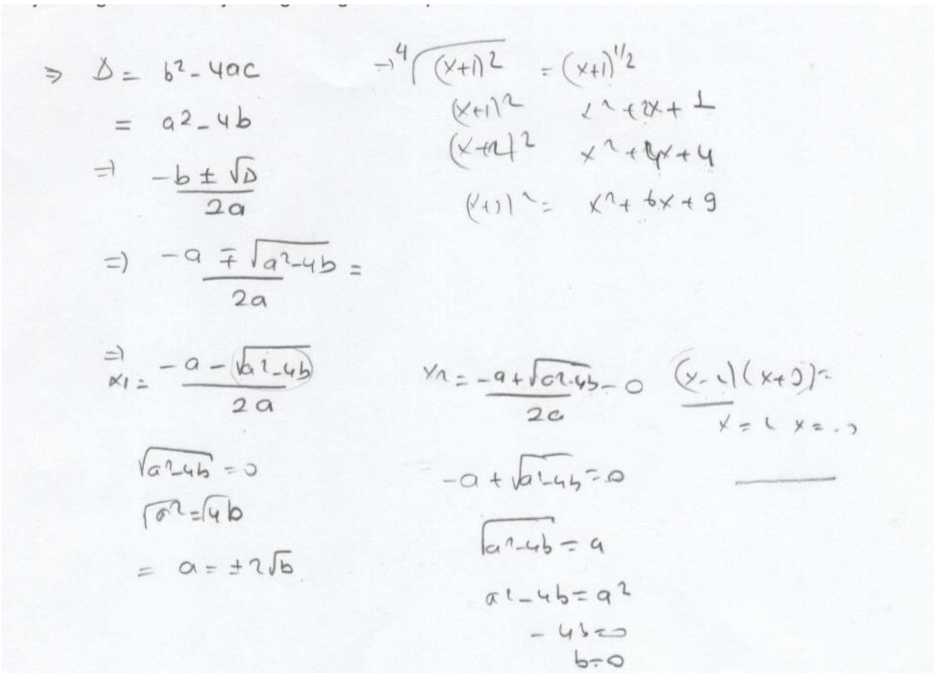
S4: Aylin ortaya koyduğu akıl yürütme süreciyle, konuyla ilgili matematiksel kavramlara hâkim olduğunu gösteren bir durum sergilemiştir. Bu hâkimiyet, süreçte kullandığı kavramların anlamlarını kolayca açıklayabilmesi ve yorum yapabilmesi aracılığıyla anlaşılabilmektedir. Araştırmacının bu hâkimiyetin nedenini sorgulamaya yönelik sorduğu soruya Aylin, " *Ben yani önce okuldan öğrendim* $\Delta < 0$ *durumunu filan. Kitaplara çalışınca filan da gördüm. İlk başlarda bunları pek hatırlayamıyordum mesela* $\Delta < 0$, $a > 0$ *gibi biraz hafizamda şey vardı. Ama işte zamanla bu oturdu yerine. Şimdi mesela böyle bir soru gördüğümde hemen işte şey diyebiliyorum* $\Delta < 0$ *seçelim,* $a > 0$ *diyelim pozitif olsun filan diyebiliyorum*" şeklinde cevap vermiştir. Yani kavramlar üzerindeki hâkimiyetin yanında bir aşinalıkta söz konusudur. Bu durumu ise hem kendi çalışmaları hem de öğrenme çevresiyle elde ettiğini belirtmiştir.

Aylin'in Problem 3'e Ait Sınıflandırma Kodu

Aylin'in Problem 3'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **AR$_{\mathbf{ogd}}$** olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

4.2.3.3. Derya'nın problem 3'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Derya'nın Problem 3'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.21, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

$= a^2 - 4b$

$\Rightarrow \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow \dfrac{-a \mp \sqrt{a^2-4b}}{2a} =$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2-4b}}{2a}$

$\sqrt{a^2-4b} = 0$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{4b}$

$= a = \pm 2\sqrt{b}$

$\rightarrow \sqrt[4]{(x+1)^2} = (x+1)^{1/2}$

$(x+1)^2 \quad x^2+2x+1$

$(x+2)^2 \quad x^2+4x+4$

$(x+3)^2 = x^2+6x+9$

$x_2 = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2a} = 0$

$-a + \sqrt{a^2-4b} = 0$

$\sqrt{a^2-4b} = a$

$a^2 - 4b = a^2$

$-4b = 0$

$b = 0$

$(x-1)(x+0) =$

$x = 1 \quad x = 0$

Şekil 4.21. Derya'nın problem 3'e ait çalışma kağıdı

Derya'nın Problem 3'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Derya yine sesli düşünerek çözüme ulaşmanı isteyeceğim.*

Derya: *Hocam ilk önce ben burada bir Δ değerini bulmaya çalışırım.*

Mülakatçı: *Neden Δ?*

Derya: *Hocam hani Δ fonksiyonun tam değer çıkabilmesi için bir Δ değerine bakmam lazım. Hani 0'dan küçük olduğunda kök bulamayız ya. O yüzden ben bir Δ'ya bakayım ona göre bulayım düşünüyorum $\Delta = b^2 - 4ac$. Hocam bundan sonra da köklerini bulmaya çalışırım. $= a^2 - 4b$ derim. Sonra hocam kökümü $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ile bulurum. Bir de hocam bunun en geniş tanım kümesinin gerçel sayılar olması için bu ifadenin de bir tam kare şeklinde olması da gerekiyor mu sanki?*

Mülakatçı: *Niçin?*

Derya: *Hani mesela hocam tam kare… gerçi onunda bir etkisi olmaz galiba. Hani derdim $(x+1)^2$olur derim iç ifade. Bunun 4. kuvveti ($\sqrt[4]{(x+1)^2}$) olsa eğer $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ ama onda bir şey olmaz herhalde hocam burada. Yani en geniş tanım kümesinin gerçel sayılar olması için. Yine köklü bir ifade çıkıyor yani bu değerden. Hocam bi Δ'ya bakayım da ben $\frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2a}$ Δ'yı yerine yazdım. Δ eşittir sıfırlasam hocam hani çift katlı kökten değerleri daha iyi bulabilir miyim diye? $\frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2a}$ eşittir 0 desem hocam Δ'yı sıfırlasam yo daha doğrusu… hı bu kök bu şekilde bulunuyor ya hocam ben bu kökleri mesela sıfırlasam oradan a b değerlerine gitmeye çalışsam. Ama yok öyle de olmaz. $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ hani köklerim buydu ya hocam benim $\frac{-a - \sqrt{a^2-4b}}{2a}$ bir kököm bu, bir kököm de $\frac{-a + \sqrt{a^2-4b}}{2a}$, iki kök var hocam. En geniş gerçek sayılar kümesi olabilmesi için a değerinin nasıl seçilmesi gerektiğini. Hocam ama o zaman bu ifademin, 0'dan büyük zaten olacakta, 0'dan büyük olsa mesela…*

Mülakatçı: *Δ mı?*

Derya: *Evet Δ. Δ'mız 0'dan büyük olduğu zaman… mesela hocam bu $a^2 - 4b = 0$ desem $a^2 = 4b$ dersem hani a'yı b cinsinden bulsam. Iı burada a'yı yerine yazarsam… gerçi yine aynı $\sqrt{a}$ olsa $a = \pm 2\sqrt{b}$ değerini de bulurum hocam sonuçta karesini aldığım zaman. Sonra bu a'yı yerine yazarsam yine bir şey çıkmaz baştaki değerime dönerim. En geniş gerçek sayılar için a değeri nasıl… Hocam a'nın bir sayının b'nin* *tam katları şeklinde (öğrenci düşüncelerini kekeleyerek ağzından çıkarıyor düşüncelerini toparlayamadığı için böyle düşük cümleler kuruyor) mesela hocam* $a^2 = 4b$ *ama bu ifadenin tanım kümesi olması için* $a^2 = 4b$ *şeklinde……. Tam olarak ne demek istediğimi anlatamadım.* $a^2 - 4b$ *desem mesela b yi öyle değerler vermem lazım ki mesela* Δ*' yı 0'a eşitlesem… mesela b' ye 4 versem aynı şekilde a'da 4 olur. Yerine yazdığım zaman kökleri en geniş tanım kümesi…*

Mülakatçı: *a, b'ye eşit mi olmalı?*

Derya: *İşte onu düşünüyorum ama hocam her değerde o olmaz. Mesela 2 verdiğim zaman olmuyor. 4'te sağlıyor, başka değerlerde de sağlar ama… a değeri nasıl seçilmeli. Bir değişkene bağlı seçilmeli bence hocam. Mesela b gibi bir değişkene bağlı seçilecek ki ifademde yerine yazdığım zaman tam bir kare gelsin ya da şey olabilsin hocam hani* Δ *kökler yerine yazdığım zaman ifade çıkabilsin diye. Şuan böyle düşünüyorum ama hocam. Burada başka ne diyebilirim… hocam mesela b'ye değerler versem a'yı bu cinsten bulurum ama her değer bunu sağlar mı? Mesela hocam* Δ *ya sıfır olur çift kat kök ya da sıfırdan büyük olması lazım küçük olamaz kök olmaz. Gerçi köklük bir durum da yok da. Hocam mesela a'nın bu ifadeden daha büyük olması mı gerek ama yok oda olmaz.*

Mülakatçı: *Kökleri buluyorsun ama ondan sonrası?*

Derya: *İşte hocam ondan sonra ne yapmam gerektiğini… mesela a'yı yerine yazsam bir şey çıkmaz galiba buradan. Hocam işte mesela kare şeklini alsa mesela* $x +$*… işte dördüncü dereceden olamaz zaten* x^2 *ile başlamış. Herhangi bir sayının karesi şeklinde alsam değerlerimi mesela* $x + 1$ *in birde karesini alsam* $x^2 + 2x + 1$ *oluyor ya da* $(x + 2)^2$ *alınınca* $x^2 + 4x + 4$ *oluyor. İşte hocam a ile b arasında bir bağıntı bulamıyorum hani o şekilde olsaydı.*

Mülakatçı: *Tam kareleri mi arttırıyorsun* $(x + 1)^2$, $(x + 2)^2$ *?*

Derya: *Evet hocam işte arada bir bağıntı kurabilir miyim diye sonra hocam* $(x + 3)^2$ *aldığım zaman* $x^2 + 3x + 9$ *oluyor ya hocam mesela bunlar 2'şer arttığı zaman (a'lardan bahsediyor) kareler şeklinde arttığı zaman b' de kareler şek… ama hocam olmuyor. O bağıntıyı şey yapamadım tam yani. Oradan acaba bir şey çıkar mı diye.*

Mülakatçı: *Peki* $x^2 + ax + b$ *tam kare bir ifade mi?*

Derya: *İşte öyle kabul ettim belki bir şey olur diye. Tam kare kabul ettiğimde de bir şey çıkmıyor hocam mesela buradan da. Yani hocam tam karelik bir durumda yok hani en* *geniş tanım kümesini istiyor bizden bununla bunun pek bir bağlantısı yok hani belki bir şey bulabilirim diye dedim ama burada direk aklıma Δ geldi hocam. Δ'yı bulurum köklere giderim. Ama köklerde de tıkandım hani.*

Mülakatçı: *Δ ne verir sana? Ne zaman nerede kullanılır?*

Derya: *Hocam Δ bana, mesela köklerini bulmak için hani verilen ifadenin, birde hocam hani bazen Δ sıfırdan küçük olunca köklerini filan bulamıyorum hani başka yoldan deniyorum da eşit çift katlı kök olup olmadığına bakmak için. Bir de hocam kökleri bulduktan sonra tablo çizerim en geniş aralığını o şekilde fonksiyonda sağlar mı sağlamaz mı o şekilde bulmamı sağlar. Ama işte burada kökler bunu buldum. Mesela $(x-2)(x+3)$ diye bir kök bulduğum zaman 0 a eşitliyorum. $x=2$ oluyor $x=-3$ oluyor. Ben bunu tabloda yerine yazıyorum. Burada da 0 a eşitlesem mesela $-a+\sqrt{a^2-4b}=0$ desem, $\sqrt{a^2-4b}=a$ desem, her tarafın karesini alayım hocam.*

Mülakatçı: *Kökleri mi 0 a eşitledin?*

Derya: *Hıhı bulduğum kökleri; hani Δ dan sonra çıkan kökleri. Sonra hocam $a^2-4b=a^2$ diyeyim hani şey olsun diye… ama buradan da işte $-4b=0$ oluyor $b=0$ olsa…*

Mülakatçı: *Kökü 0'a eşitlersen yani denklem 0'da sağlanmış oluyor anlamına gelmiyor mu?*

Derya: *İşte denklem 0'da sağlanmış oluyor anlamına geliyor. O zaman da bu b'yi… o da olmuyor hocam.*

Mülakatçı: *Kök ne demek?*

Derya: *Denklemi sıfırlayan değerler demek. Hani yerine yazarken. İşte hocam ben o denklemi mesela hani biz herhangi bir denklemim bu ya benim bunu açıyorum, kökler haline getiriyorum. Mesela denkleme 2 veririm 0'a eşitler. Hani bende bu denklemin bir kökünü buldum ya diyelim. Bunu 0'a eşitliyorum bu değeri burada yerine yazdığımda 0 bulmak için. Hocam işte burada bunu 0'a eşitlediğim zaman da böyle bir değer çıkıyor ama oda olmuyor yani galiba. b, 0 tamam hani b 0 olsa da o zaman $a^2=a^2$ oluyor. Burada da bir değere varamıyorum yani. Başa geliyorum yine. Yani hocam tam şey yapamadım sonuca ulaşamadım. a değerinin nasıl seçilmesi gerektiğini… Şu an hocam fikir yürütemedim ama yani çok zor olmasa gerek. Hocam peki dediğim mantık doğru mu? Hani köklerini sıfıra eşitlerim köklerini bulurum denklemde yerine yazarım.*

Mülakatçı: *Peki denklemi de 0'a eşitleyip kökünü buluyorsun, sonra da kökünü 0'a eşitleyip neyi buluyorsun?*

Derya: *İşte aynı şey oluyor. Kökünü sıfıra eşitliyorum… ama gerçi aynı yine başa dönüyorum değil mi hocam. Olmadı… Denklemin kökünü de sıfıra eşitliyorum gerçi o denklemin sağlanıp sağlanmadığına bakılıyor bir nevi. Ay hocam şuan bir şey yürütemedim yani.*

Mülakatçı: *Tamam.*

Derya'nın Problem 3'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Derya'nın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Köklü sayılar kavramı ve diskriminant kavramı, iii) Algoritmalar, aritmetik işlemler (transformasyon), bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Derya, çözüm prosedürünü uygularken ne yapacağına tam olarak karar verememiş, karmaşık bir yol takip etmiştir. Soruyu okuyunca kök içindeki sayının diskriminant değerini bulacağını belirtip buradan hareketle iki adet kök bulmuştur. Bu aşamadan sonrası deneme yanılma süreci olarak ilerlemiştir. $\Delta = 0, \Delta > 0$ olduğu durumları denemiş; b'ye değer verip a'yı bulmaya çalışmış; köklü sayının içerisindeki ifadeyi tam kare yapmaya çalışmış; $(x+1)^2, (x+2)^2$ gibi tam kareli ifadelerden a ve b arasında bağlantı bulmaya çalışmış; Δ yardımıyla bulduğu kökleri 0'a eşitleyip a ve b'ye ulaşma gibi aklına gelen tüm yolları denemiştir. Ancak takip ettiği hiçbir yol dolayısıyla da çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlı değildir. Süreçte çokça kullandığı Δ ve kök kavramlarının ne ifade ettiği kendisine sorulduğunda matematiksel olarak anlamlı cevaplar verememiştir. Δ'nın kök bulmaya yaradığını, köklerinde tabloya yazılarak fonksiyonun en geniş aralığını sağlayıp sağlamadığını göstermede kullanıldığını belirtmiştir. Ayrıca kök için "*denklemi sıfırlayan değer*" ifadesini kullanmıştır. Ancak sonrasında kullandığı *" köklerini sıfıra eşitlerim, köklerini bulurum, denklemde yerine yazarım*." İfadesi hatalıdır. Derya yüzeysel bir düşünce yapısı sergilemiştir.

S3: Derya akıl yürütme sürecinde birçok farklı deneme yaparak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Ancak uyguladığı hiçbir algoritma da başarılı olamamıştır. Çünkü varmak istediği noktayı kendi zihninde netleştirememiş, bu nedenle de ilgili veya ilgisiz birden fazla algoritma denemiştir. Amacı, yaptığı uygulamalardan küçükte olsa bir şey elde etmektir. Bu amacını algoritmaların birinde: "*Yani hocam tam karelik bir durumda yok hani en geniş tanım kümesini istiyor bizden bununla bunun pek bir bağlantısı yok hani belki bir şey bulabilirim diye dedim…*" şeklinde ifade etmiştir. Uyguladığı hiçbir algoritmada tartışma ortamı oluşturarak derinlemesine bir düşünce sergileyememiştir. O halde bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir. Birden fazla algoritma denediği için AR'nin alt türü olan DAR olarak da özelleştirilebilir.

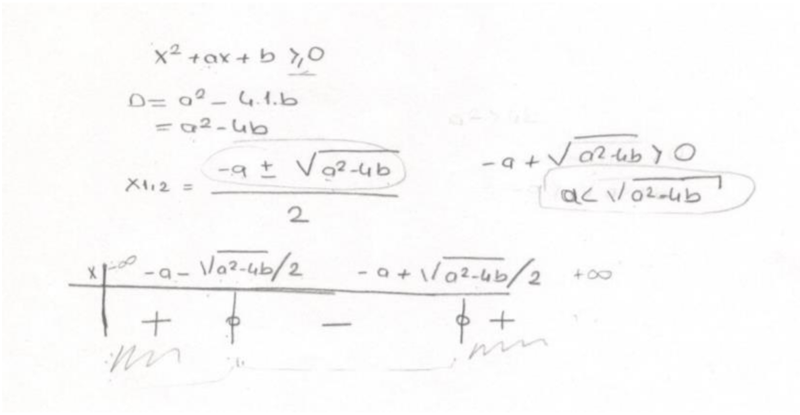
S4: Derya'nın son derece kontrolsüz olarak sergilediği akıl yürütme sürecinin arkasında, kullandığı kavramlar ile alakalı zayıf kavramsal alt yapısı yatmaktadır. Fonksiyonu kullanarak Δ'yi ve kökleri işlemsel olarak bulabilmiş, ancak bu kavramları amacına uygun yorumlayamamıştır. Öğrenme tecrübeleriyle aklında kalan sıfıra eşitleme, benzerlik bulma, tam kare yapma gibi ilgili ya da ilgisiz algoritmaları bu kavramlara uygulamaya çalışmış ancak başarılı sonuçlara ulaşamamıştır. Matematiksel anlamda yüzeysel düşünmelerin ve kavramlar üzerindeki hakimiyetsizliğin bu tarz bir akıl yürütmeye sebep olduğu söylenebilir.

Derya'nın Problem 3'e Ait Sınıflandırma Kodu

Derya'nın Problem 3'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{DAR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü DAR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.3.4. Leyla'nın problem 3'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Leyla'nın Problem 3'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.22, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.22. Leyla'nın problem 3'e ait çalışma kâğıdı

Leyla'nın Problem 3'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Leyla sorumuz bir tanım kümesi sorusu.*

Leyla: *En geniş kümesinin gerçel sayılar kümesi olabilmesi için a değerinin nasıl seçilmesi gerektiğini belirleyiniz.*

Mülakatçı: *Nasıl bir şey oluştu kafanda?*

Leyla: *Şimdi bu içinin zaten kökten dolayı pozitif olması lazım…*

Mülakatçı: *Neden?*

Leyla: *Iı negatif bir değer olursa kökten dışarı çıkaramayız. Gerçek sayılar kümesi diyor, gerçi doğru gerçek sayılar kümesi i olarak falan da çıkarabiliriz.*

Mülakatçı: *Gerçek sayılar reel sayılar.*

Leyla: *Hıı… o zaman tamam.* $x^2 + ax + b \geq 0$ *desek…*

Mülakatçı: *Niye büyük eşit* $\geq$*?*

Leyla: *0'a da eşit olabilir. a değeri… acaba köklerini mi düşünmek gerekir?*

Mülakatçı: *Neden?*

Leyla: *Hani köklerine göre şey yapıyorduk da 0'dan büyük değer…* Δ *desek* $a^2 - 4.1.b$. *yani* $a^2 - 4b$ *çıkar* Δ. *Köklerini bulmak istesem* $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$

Mülakatçı: Δ*' ya girmendeki amacın neydi?*

Leyla: Δ*'ya niye girdim… hani grafik yapıyorduk ya hocam, fonksiyon şeyini tabloya yerleştiriyorduk da + - değerler, hani belki öyle bulursam hangi kökler arasında pozitif değer alabileceğini, yani fonksiyonun 0'dan büyük olabileceğini bulabilmek için. Bunları zaten çıkaramam (köklerin değerini), bu şekilde fonksiyonun grafiğine* *yerleştirsem? Tablosuna pardon. (öğrenci işaret tablosuna bulduğu kök değerlerini yerleştirmektedir)*

Mülakatçı: *Hangisinin büyük olduğunu nereden anladın?*

Leyla: *İşte bende az önce onu düşündüm hangisinin büyük olduğunu.* $a^2 - 4b$ *bilemeyiz evet. O zaman kabul etsek.* $a > b$ *desek mesela. Ama yine* $a^2 - 4b$ *'nin hangisinin negatif hangisinin pozitif çıkacağını bilemeyiz. O zaman şöyle kabul edelim* $a^2 > 4b$ *olsun. O zaman burası pozitif çıkar. Iı ıı… olmadı yine. Şu köklere göre değerlendirsem.* $-a - \sqrt{a^2 - 4b} > 0$ *olabilmesi için* $-a > \sqrt{a^2 - 4b}$.

Mülakatçı: *Ne yapmayı amaçladın burada.*

Leyla: *Birinci kökü düşündüm. Hani 0'dan büyük olan kök o olsun dedim. O zaman* $-a > \sqrt{a^2 - 4b}$ *olduğunu kabul etsem… Şu 0'dan büyük olmuş olacak tam tersi olacak. O zaman diğer şeklini kabul edelim. Şu kökün,* $-a + \sqrt{a^2 - 4b} > 0$ *olduğunu kabul edelim. O zaman* $a < \sqrt{a^2 - 4b}$ *. Şimdi böyle kabul edersek tabloyu bu şekilde oluşturabiliriz.*

Mülakatçı: *Çizdiğin şekle mi uydurdun yani. (öğrenci az önce keyfi yerleştirdiği değerlere uygun kabulleri yapmıştır.)*

Leyla: *Evet yani a değerinin nasıl seçilmesi gerektiğini söylüyor ya hocam; hani bu şekilde kabul etsem…*

Mülakatçı: *O zaman sen seçmiş oldun burada kabul ederek. A değeri böyle seçilmeli dedin ya da böyle seçersem olur.*

Leyla: *Böyle seçilirse istediğime uyarsa öyledir dedim ama…*

Mülakatçı: *Devam et bakalım.*

Leyla: *+ - + olsa (tablonun işaretleri) 0'dan büyük olduğu değerler şu değerler oluyor. En geniş… En geniş burası oluyor. Şu arası olsa kısıtlı bir alan oluyor. Geniş olabilmesi için bence a'nın bu şekilde seçilmesi lazım.*

Mülakatçı: *Geniş olması için bir* ∞*'luk olmalı mı diyorsun?*

Leyla: *Yani sonuçta kısıtlı bir alandansa, yani şu ikisinin arasındansa; bu* ∞*'dan bu aralığa, diğer kökten de* $+\infty$ *olan aralık daha geniştir yani.*

Mülakatçı: *Peki genişlik mi önemli yoksa bu tanım kümesinin verilen ifadeye uygun olması mı önemli?*

Leyla: *Evet. Bilmiyorum. (öğrenci sessizce düşünmeye başlar.)*

Mülakatçı: *Kök içine 0'dan büyük olmalı dedin sonra köklere ulaşmak için de Δ'yı kullandın. (öğrenci sessizce düşünmeye devam etmektedir kafasındaki soru işaretleriyle.) Ne hatırlıyorsun bunlarla ilgili?*

Leyla: *Yani daha çok kökleri buluyorduk grup tablosuna yerleştiriyorduk da a değerinin nasıl seçilmesi gerektiği işte onu tam olarak hatırlamıyorum. En geniş tanım kümesini.*

Mülakatçı: *Peki Δ'dan nasıl bir yere varacaktın?*

Leyla: *Hani köklerini bulurum dedim. İşte şu tabloya ulaşabilmek için bu tabloyu kullandım ama dediğiniz gibi yani istediği bu değil gibi.*

Mülakatçı: *Yoo o da olabilir. Benim sözlerimle yönlendirme kendini. Bazen doğru olunca da kafa karıştırmak için sorular soruyorum yaptığınızdan emin misiniz diye.*

Leyla: *Ya işte emin olamıyoruz.*

Mülakatçı: *Var mı başka söyleyeceğin.*

Leyla: *Yok hocam*

Leyla'nın Problem 3'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Leyla'nın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Sayılar ve köklü sayılar kavramı, aritmetik işlemler (transformasyon), bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Leyla problemin çözümüne başlarken köklü sayıların özelliklerinden yola çıkıp, kök içindeki sayının sıfırdan büyük olacağını belirtmiştir. Soru kökünde geçen "gerçek sayılar kümesi" ifadesini fark edince "*doğru gerçek sayılar kümesi i olarak falan da çıkarabiliriz*" demiş ve bir önceki düşüncesiyle çelişkiye düşmüştür. Bu adımdan sonra da Δ ve denklemin köklerini bulan Leyla, bir işaret tablosu çizmesi gerektiğini hatırlamıştır. Kökleri tabloya içgüdüsel olarak yerleştirip, sonuca ulaşmak için matematiksel dayanağı olmayan kabuller varsaymıştır. Son olarak oluşturduğu işaret tablosunda tamamen somut düşünüp, sayısal olarak en geniş aralığı tanım kümesi diye belirlemiştir. Leyla'nın öğrenme çevresinden hatırladıklarıyla oluşturduğu bu çözüm prosedürü ve sayılar kavramı üzerine düşünceleri matematiksel olarak anlamlı değildir. Tüm süreç boyunca derinlemesine tartışma ortamından uzak, yüzeysel bir düşünce sergilemiştir.

S3: Leyla akıl yürütme sürecinde öğrenme çevresinden edindiği yaşantıları kullanmıştır. Konu ile alakalı hafızasında kısmen kalan kavramlar ve algoritmalarla adımlarını atarken herhangi bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. Yaptığı işlem ve uygulamaların, altında yatan nedenleri açıklayamamıştır. Çözüme ulaşmak için hatırladığı Δ algoritmasını, matematiksel dayanağı olmayan kabullerle uygulamıştır. Leyla'nın "*hani grafik yapıyorduk ya hocam, fonksiyon şeyini tabloya yerleştiriyorduk da + - değerler, hani belki öyle bulursam…*" ve "*O zaman şöyle kabul edelim* $a^2 > 4b$ *olsun.*" Şeklindeki ifadeleri, bahsi geçen durumu anlatan örnek ifadelerdir. O halde kavramların derinlemesine özelliklerine hakim olmadan sadece hatırlanan algoritmanın uygulandığı; yüzeysel bir düşüncenin sergilendiği akıl yürütme becerisi türü olan AR, bu sorudaki tür olarak sınıflandırılabilir.

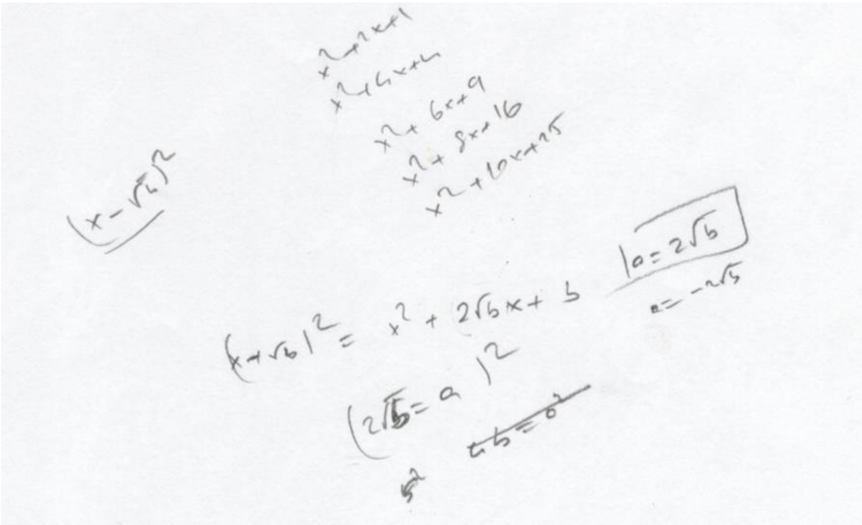
S4: Leyla, öğrenme çevresinde, benzer sorularda kullanılan bir algoritmanın belli kısımlarının hatırlandığı; ne amaçla kullanıldığının bilinmediği; son derece yüzeysel ve somut olarak düşünülen; tüm bunların yanında da ulaşılan sonuçtan emin olunmayan bir akıl yürütme süreci sergilemiştir. Bu durumun altında yatan nedenler arasında kavramların bireyde tam olarak anlamlandırılmaması gösterilebilir. Öğrenci, önceki öğrenme çevresinde bu tarz bir soruyla karşılaşmış ve bir çözüme ulaşıldığını görmüştür. Ancak benzer bir yaşantı ile tekrar karşılaştığında o kavramları veya algoritmayı kullanamamıştır. Bu, o konu üzerindeki hakimiyetsizliğin bir göstergesidir. Öğrencinin, "*Yani daha çok kökleri buluyorduk grup tablosuna yerleştiriyorduk da a değerinin nasıl seçilmesi gerektiği işte onu tam olarak hatırlamıyorum*" ifadeleri anlatılanları ispatlar niteliktedir.

Leyla'nın Problem 3'e Ait Sınıflandırma Kodu

Leyla'nın Problem 3'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.3.5. Önder'in problem 3'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Önder'in Problem 3'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.23, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.23. Önder'in problem 3'e ait çalışma kağıdı

Önder'in Problem 3'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Önder sesli düşünerek çözmeni istiyorum.*

Önder: *Tamam hocam (öğrenci soruyu sesli bir şekilde okudu). Şimdi şu* $x^2 + ax + b$ *'nin bir şeyin tam karesi olması gerekiyor.*

Mülakatçı: *Niçin?*

Önder: *Çünkü, burası pozitif çıkar. x'in tüm değerleri için de pozitif çıktığı için de negatifte versen karesi olacak ya karesi olduktan sonra zaten tanımlı oluyor burası 4. dereceden kök olduğu için. Onun için* $x^2 + ax + b$*'yi bir şeye çevirmek lazım tam kareye çevirmek lazım.*

Mülakatçı: *Kökten çıkarabilesin diye mi?*

Önder: *Aynen öyle. Sonra tanım kümesi, fonksiyon polinom olduğu için reel sayılar olur. Burada onun için ne yapmamız gerekir; mesela* $x^2 + 4x + 4,\ x^2 + 6x + 9,$ $x^2 + 8x + 16$ *bunlar bir tam karedir de bunlar arasındaki bağlantıyı bulup b cinsinden yazmamız gerekiyor. Onun için bir iki tane yazayım* $x^2 + 2x + 1,\ x^2 + 10x + 25$*buradan neyi elde edeceksem acaba. Hıh tamam. O zaman burası b olduğuna göre*

$\sqrt{b}$ olması gerekiyor. $\left(x+\sqrt{b}\right)^2$ sidir bu yani şeklinde yazmamız gerekiyor. O da $x^2+2\sqrt{b}x+b$ diye yazarız. Sonra şu $2\sqrt{b}$ 'yi a'ya eşitlerim. a'ya eşitlediğim de ne olur? Her iki tarafın karesini alırsam $4b=a^2$ olur. Zaten gerek yok ki… a= $2\sqrt{b}$ diye kalır hocam.

***Mülakatçı:** a değeri nasıl seçilmelidir?*

***Önder:** a eğer bu şekilde seçilirse gerçel sayılar reel sayılar kümesi olur bunun tanım kümesi.*

***Mülakatçı:** Tamam bu şekilde düşündün. Daha farklı nasıl olabilir?*

***Önder:** Daha farklı… Bir kere bunun tam kare olması gerektiğini düşünürüm de çünkü eğer burası tek olsaydı zaten hiç fark etmezdi. Negatifte çıkabilirdi buralar. Ama zaten burası kare olduğu için x^2+ax+b'yi $x^2+ax+(\sqrt{b})^2$ cinsinden yazarım. Bir de şöyle olabilir şu $\left(x-\sqrt{b}\right)^2$ olabilir. Yani a=$-2\sqrt{b}$ olur.*

***Mülakatçı:** Peki sadece kökün derecesi çift olunca mı çift katlı kökler tanımlanıyor?*

***Önder:** Yani eğer derecesi çift ise içerisinin de çift olması gerekiyor. çünkü içerisi çift olmazsa negatif çıkma olasılığı var. O zaman da tanımsız oluyor. Reel sayılar da tanımsız oluyor; karmaşık sayılara girersek tanımlı olur da. Mesela 4. Dereceden -5 in tanım kümesini reel sayılara göre tanımlayamazsınız. Karmaşık sayılara göre tabi ki tanımlayabilirsiniz. Eğer buranın derecesi tek olsaydı her türlü çıkardı. Ama çift olduğu için içerisinin de kesinlikle karesi olması gerekir yani pozitif çıksın ki tanımlı olsun. Bu ifadenin de pozitif olması için tam kare olması gerekir. Tam kare olması için de şu formatta yazmamız gerekiyor. Yani $\left(x\pm\sqrt{b}\right)^2$ formatında yazmamız gerekir. Ondan sonra a'yı da $\pm2\sqrt{b}$ şeklinde yazarız.*

***Mülakatçı:** Tamam Önder.*

Önder'in Problem 3'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Önder'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Köklü sayılar kavramı, aritmetik işlemler (transformasyon), sayılar (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Önder çözüm prosedürünü uygularken, soruda verilen köklü sayının derecesinin çift olmasından dolayı, kökün içindeki sayınında çift kuvvete sahip olması gerekliliği düşüncesinden hareket etmiştir. Bu amaçla tam kare şeklinde yazılabilen polinom örnekleri bularak bir algoritma oluşturmaya çalışmıştır. Daha sonra bu algoritmadan hareketle kökün içindeki polinomu $(x+\sqrt{b})^2$ şeklinde yazıp a'yı b'ye bağlı ifade etmiştir. Uyguladığı bu çözüm yolundaki aritmetik işlemler ve sayılar matematiksel olarak anlamlı olsa da; çift dereceli köklü sayı kavramına dair sergilediği düşünce matematiksel açıdan tam olarak anlamlı değildir. Eksikleri vardır. Tek bir kurala odaklandığından yüzeysel olarak düşünmüş, derinlemesine bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. Elde ettiği $a=\pm 2\sqrt{b}$ sonucu da soruda isteneni tam olarak sağlamamaktadır.

S3: Önder, kök kavramıyla ilgili sahip olduğu kavramsal bilgiyi *"x^2+ax+b bir şeyin tam karesi olması gerekiyor*" olarak belirtmiştir. Tam kare elde etmek için kullanacağı algoritmayı da yazdığı örneklerden kendisi çıkarmıştır. Bu durumu da "*mesela* $x^2+4x+4,\ x^2+6x+9,\ x^2+8x+16$ *bunlar bir tam karedir de bunlar arasındaki bağlantıyı bulup b cinsinden yazmamız gerekiyor* " cümlesiyle ifade etmiştir. Sonuç olarak tam kare yazabilme algoritmasını bulup, bu konu ile ilgili derinlemesine tartışmalar sergilememiştir. O halde Önder'in bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir.

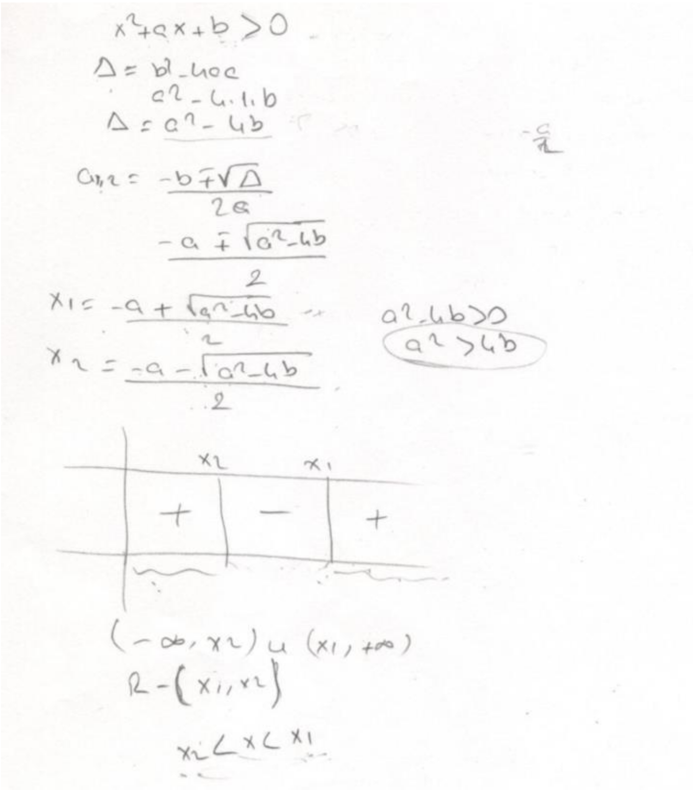
S4: Önder, köklü sayılarla ilgili kavramsal bilgiye sahiptir. Ancak özellikle çift dereceli kökler ile ilgili kavramsal bilgisinde eksiklikler vardır. Kökün derecesi çift olunca, kökün içindeki değerin negatif ise tanımsız; pozitif ise tanımlı olacağından haberdardır. Fakat bunu aşmanın tek yolunu, kökün içinin de çift kuvvete sahip olması gerekliliğine bağlamıştır. Bu düşüncesini "*Yani eğer derecesi çift ise içerisinin de çift olması gerekiyor. Çünkü içerisi çift olmazsa negatif çıkma olasılığı var. O zaman da tanımsız oluyor. Reel sayılar da tanımsız oluyor; karmaşık sayılara girersek tanımlı olur*" şeklinde dile getirmiştir. Yani daha geniş bir özellik olan, çift dereceli köklü sayılarda kökün içinin pozitif olması gerekliliği kuralındansa daha spesifik bir özelliğe odaklanması Önder'in bu soruda zorluk yaşadığı noktadır.

Önder'in Problem 3'e Ait Sınıflandırma Kodu

Önder'in Problem 3'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **$\mathbf{AR_{ogy}}$** olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.3.6. Nurdan'ın problem 3'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nurdan'ın Problem 3'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.24, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.24. Nurdan'ın problem 3'e ait çalışma kağıdı

Nurdan'ın Problem 3'e Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Evet Nurdan yine aynı şekilde sesli düşünerek çözmeni istiyorum.*

Nurdan: *(Öğrenci soruyu okudu içinden). Fonksiyonlarda tanım kümesini bulurken kökün derecesi eğer çiftse kökün içinin sıfırdan büyük olması gerekiyor.*

Mülakatçı: *Neden?*

Nurdan: *Çünkü, çift kuvvetlerde işte negatif olamaz. Ama bu tek olsaydı, tek sayılarda bütün x reel sayıları için diyebilecektik. Önce diyorum ki* $x^2 + ax + b$ *ifadesinin* > 0 *olması gerekiyor. 0 olabilir ama 0'dan küçük değerleri alamıyoruz. Sonra şunun bildiğimiz kök bulma şeyiyle köklerini bulacağım. Ondan sonra 0'dan büyük yerleri alacağım. Diskriminantı kullanıyorum zaten.*

Mülakatçı: *Neden diskriminanta girdin onu bir daha açıkla.*

Nurdan: *Şimdi ıı… nasıl diyeyim, a ve b değerleri belli olmadığı için genel bir ifade bulmam gerekiyor. Eğer a ve b değerleri belli olsaydı basit yöntemlerle çarpanlarına ayırabilirdim. Şu an bilmediğim için en genel ifadeyi kullanıyorum.* $b^2 - 4ac$*'den* $a^2 - 4.1.b$ *'den* $a^2 - 4b$ *benim* Δ*'m. Kökleri bulacağım.* $a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ *idi formülü. Burada* $\frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$ *şimdi* $x_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ $x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ *olur. Şimdi ben diyorum ki ne olacak bunun 0'dan büyük olması gerekiyor dedik. Kökler bunlar kökleri yerine yazayım (yani işaret tablosuna). Zaten şunun da aslında 0'dan büyük olması gerekiyor, iç taraflarının da 0'dan büyük olması gerekiyor. Şunu da kullanabiliriz* $a^2 - 4b > 0$ *olacak* $a^2 > 4b$*. Bu bir dursun bakalım ne işimize yarayacak. Tablo yapabiliriz burada aslında. Kökün içi hiçbir zaman negatif çıkmayacak burası pozitif olacak, önünde negatif olduğu için şu ifade negatif (*x_2*), şu ifade pozitif çıkacak (*x_1*). Şunun şundan büyük olduğunu tam olarak bilmiyorum ama hani yine şu büyük şu küçük olan değerdir.*

Mülakatçı: *Hangisi büyük?*

Nurdan: x_1 *büyük* x_2 *küçük olan değerdir.* x_2*'yi şuraya* x_1*'i şuraya yazıyorum. Iı…İfadem neydi + - +. Bana ne lazım büyük olan taraflar lazım. En geniş tanım kümesinin gerçek sayılar kümesi olabilmesi için a değerlerinin nasıl seçilmesi gerektiğini…*

Mülakatçı: *Nasıl seçeceğiz?*

Nurdan: *Şimdi benim tanım kümesini* $(-\infty, x_2) \cup (x_1, \infty)$ *olarak seçmem gerekiyor. hımm… başka bir yerden bir şey bulamaz mıyız?* > 0 *olması gerekiyor dedik. Köklerini bulduk (öğrenci karışıklık içinde düşünmektedir.)*

Mülakatçı: *Nasıl bir durumla karşılaştın şuan?*

Nurdan: *Hocam şuan hani tanım aralığını buldum ama a değerlerinin ne olabileceğini sormuş ya a değerleri için bir şey bulamadım. Şimdi* $(-\infty, x_2)$ *tamam. Normalde kök* *olmasaydı polinom olduğu için bütün değerler olacaktı, tanım kümesi hepsi olacaktı. Şuan negatif yapan değerleri saymıyorum.*

Mülakatçı: *Δ bize bir şey vermedi mi burada?*

Nurdan: *Δ'yı yazdık şuraya şurası Δ. Δ ne olabilir ki? Şimdi Δ 0'a eşitte olabilir büyükte olabilir. Ben zaten direk büyük aldım. Beynim durdu. (öğrenci yaptıklarını bir daha gözden geçirdi.) şimdi şunu diyemem ki şurası negatif şurası pozitif olsun diye bir şartım olmaz. Öyle bir şartım olsa da bir şey gelmez. a değerlerinin nasıl seçilmesi gerektiğini belirleyiniz?*

Mülakatçı: *a için nasıl bir şey bulman gerekiyor? Soruyu okuyunca öyle bir şey canlandı mı?*

Nurdan: *En geniş tanım kümesinin gerçek sayılar olması için. Gerçek sayılar reel sayılar. Reel sayılar kümesi olabilmesi için a değerlerinin… Yani aslında şu aradaki ifadenin de sağlaması gerektiğini söylüyor (işaret tablosundaki negatif çıkan alandan bahsediyor.). Ben bu ifadeyi çıkarmıştım.*

Mülakatçı: *Neden öyle düşündün?*

Nurdan: *Şimdi bütün gerçek sayılar olacak ya ben de bütün sayılardan şurayı çıkarmış sayılıyorum şuan. Şöyle $R-(x_1,x_2)$ aralığını çıkarmış oldum. İşte diyor ki şu aralığın da dahil olması için a ne olacak. Şöyle desek x değerleri x_1, x_2 değerleri arasında. Ama nasıl olacak?*

Mülakatçı: *Var mı başka bir düşünce yolun?*

Nurdan: *Hocam hiç göremedim. Köklerin toplamı diyeceğim $-\frac{a}{2}$ ama o da bir işime yaramıyor. Aklıma başka bir şey gelmiyor hocam.*

Mülakatçı: *Tamam.*

Nurdan'ın Problem 3'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Nurdan'ın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Köklü sayılar kavramı ve diskriminant kavramı, aritmetik işlemler (transformasyon), bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Nurdan çözüm prosedürüne köklü sayılar kavramını matematiksel olarak anlamlı bir şekilde kullanarak başlamış; sonrasında diskriminantı kullanarak bir sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Bu süreçte diskriminant ile ulaştığı kökler üzerinde doğru yorumlar yapabilmiş ve işaret tablosu oluşturup yerleştirmiştir. Köklü sayıların özellikleri ve işaret tablosunu kullanarak bir tanım kümesi oluşturmuş ancak bundan öteye gidip derinlemesine yorumlar yapamamıştır. Uyguladığı algoritmalardaki aritmetiksel işlemleri matematiksel olarak anlamlı bir şekilde kullanmıştır. Fakat doğru uyguladığı bu algoritmaları, soruda istenilene göre yorumlayamamıştır. Alıştığı şekliyle, $\Delta > 0$ olarak kabul etmiştir. Yüzeysel bir düşünce sergilediği çözüm prosedürü bu sebeplerden dolayı matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Nurdan, akıl yürütme sürecinde öğrenme yaşantılarından edindiği tecrübelerden hareket ederek, " *sonra şunu bildiğimiz kök bulma şeyiyle köklerini bulacağım.*" Şeklinde düşündüğünü ifade etmiştir. Eşitsizlik durumunda diskriminantı uygulayarak direkt olarak $\Delta > 0$ durumunu ele alarak incelemiş; diğer alternatifleri neden seçmediğini veya bu durumu neden seçtiğini açıklayamamıştır. Duruma uygun seçtiği algoritmayı doğru bir şekilde uygulamıştır. Ancak bu algoritmayı kullanarak soruda istenilene yönelik yorum yapamamıştır. Bu durumu da, "*Şimdi* Δ *0'a eşitte olabilir büyükte olabilir. Ben zaten direkt büyük aldım. Beynim durdu.*" Şeklinde ifade etmiştir. O halde açıklanan özelliklerden hareketle Nurdan'ın bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir.

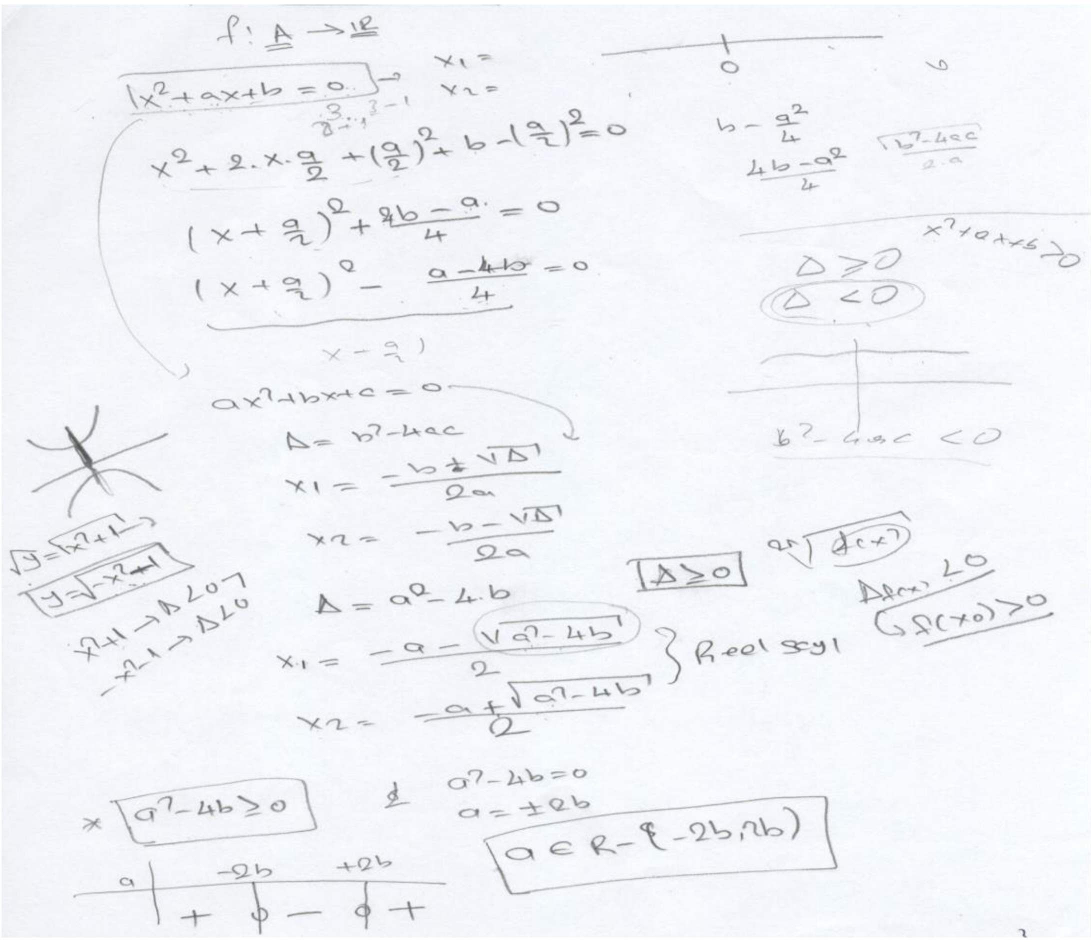
S4: Nurdan için bu soru tipi, öğrenme yaşantısında karşılaştığı soru tiplerinden farklıdır. Çünkü alıştığı soru türlerinde, uyguladığı algoritma ile sonuca varabiliyordu. Eşitsizliklerin reel sayı kökleri oluyordu ve o köklere göre işaret tablosu oluşturup istenen kısımları belirleyebiliyordu. Ancak bu soruda, $\sqrt[4]{x^2 + ax + b}$ fonksiyonu için belli şartı sağlatacak a değerleri sorulmuştur. Algoritmayı doğru bir şekilde uygulayan Nurdan, sorunun bu kısmı için herhangi bir yorumda bulunamamıştır. Ortaya çıkan bu durumun arkasında; diskriminant kavramının tüm boyutlarıyla tam olarak kavranamaması, öğrenme çevresinde rutin olmayan durumlarla karşılaşılmaması neden olarak gösterilebilir.

Nurdan'ın Problem 3'e Ait Sınıflandırma Kodu

Nurdan'ın Problem 3'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.3.7. Harun'un problem 3'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Harun'un Problem 3'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.25, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.25. Harun'un problem 3'e ait çalışma kâğıdı

Harun'un Problem 3'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Evet Harun bir tanım kümesi sorumuz var.*

Harun: *(Öğrenci soruyu kısık sesle okudu.) şimdi hocam bu fonksiyon dediğine göre biz buna bir tanım kümesi bulacağız ki bunu ona göre tanımlayalım. Görüntü kümesiyle işimiz yok buna direk R diye alırsak biz burada A kümesini bulacağız. A kümesi bunu tanımsız yapmayacak. Burada şimdi şey bakarsak bunun kök derecesi çift ya; kök derecesi çift olduğundan içinin pozitif olması gerekiyordu köklü sayılarda ki o karekök tanımından. O zaman* $x^2 + ax + b = 0$ *deyip ilk önce bunun bir işaretini incelersem ben köklerini filan bulup, oradan hareketle bunun tanım aralığını ona göre belirlerim. Şimdi burada da bunun kökünü bulmam için bunun iki tane kökünün çıkması lazım normalde. Biri* x_1*, biri* x_2*. Bunu da tam kare metodundan tam kare yapıyorduk ya. Oradan tam kare yapmaya çalışırsak, şimdi burada ne eksik, birinciyle ikincinin çarpımının iki katıydı. Şöyle yazsak,* $x^2 + 2.x.\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0$ *şimdi bunu tam kare yapacağım ki oradan köklerini daha rahat elde edebileyim. Oradan da köklerini bulduktan sonra zaten eşitsizlik tablosunda bunun işaretini incelersem ona göre belirlerim. Yalnız burada a'nın b'nin durumuna da bir bakayım da. Şimdi şurası ne yaptı* $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4b-a}{4} = 0$ *şimdi bundan sonra* $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a-4b}{4} = 0$ *peki tam kareden başka nasıl kök bulabilirim? Şu b'nin şeyini bulsaydık iki kare farkına ayıracaktık burada (öğrenci sorunu çözmek için derin düşünmektedir).*

Mülakatçı: *Şimdi tam kare yaptın, sonra da işaret tablosuyla inceleyecektin. Sıkıntı mı çıktı?*

Harun: *Şimdi hocam şuradan kök bulmamız lazım bizim ki şu ifadeyi çarpanlarına ayırmamız lazım bizim. Şunu yer değiştirirsem burası eksi olur (tam karede yaptığı işaret değişiminden bahsediyor.). onu yakaladık. Ondan sonra burası neyin karesi olur ki (kareli terimin yanındaki ifade için)? Burası bir şeyin karesi olmadı. Burayı başka nasıl yazarız ki?* $b - \frac{a^2}{4}\frac{4b-a^2}{4}$ *… şimdi buradan bunu tam kare yaparsak işlem hatası mı yapıyoruz bir yerde? (öğrenci yukarıda yaptığı işlemi tekrar gözden geçirir). Bunlar 0 'a eşit o zaman birbirlerine eşit (*$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a-4b}{4}$*). Bunu geri açsak ne yapar ki b'yi öbür tarafa atsak.*

Mülakatçı: *En başta neden 0'a eşitledin?*

Harun: *Şimdi hocam bunu neden 0'a eşitledim şimdi reel sayılar da varya 0 bir geçiş bölgesi. 0'ın işaretini biz şey yapamıyoruz. Bir de burada istediğimiz işlemi rahat* *yapabiliyoruz. Burası 3 olsa mesela burayı bir şeyle çarptığımız zaman burası da değişecek. Veya 3'ü biz parçalayabiliyoruz ya 2+1 gibi mesela ama burada 0 eşitlersek çözerken burada istediğimiz gibi hareket ettirebiliriz. 0 geçiş bölgesi ya o zaman bu tam kök değerinde 0 yapacak zaten. Kök değerinin büyüğünde küçüğünde ona göre işaret değişecek. Ondan 0'ı ayarladık da şimdi bunun kökünü bulmamız lazım. Bunu normal* Δ *formülünden kökünü bulsak olmaz mı?*

Mülakatçı: *Dene bakalım.*

Harun: *Normal* Δ *formülünde şu vardı onu tam hatırlayamadım ama* $b^2 - 4ac$ *vardı. Buradan da* x_1 *şöyle bulunuyordu* $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *tamam birde buluyordu* x_2*'yi de* $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$*. Bu şundaydı* $ax^2 + bx + c$ *için. Buna uydurursak bunun* Δ*'sı* $a^2 - 4b$ *olur a'sı 1 zaten. Ondan sonra buradan kök değerini nasıl buluruz?* $x_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ $x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ *şimdi bunların kök olabilmesi için bunların reel sayı olması lazım. Bunların reel sayı olabilmesi için de bu* Δ*'nın* ≥ 0 *olması lazım. Şimdi aslında bizim yapmak istediğimiz şey şu ifadenin işaretini inceleyeceğiz ona göre tanım kümesini oluşturacağız. Ondan sonra bize burada a ve b'nin durumunu soruyor, a ve b'yi nasıl seçersen bu reel sayı olur diyor. Ona göre de biz şeyi bulacağız şuranın kökünü bulursak* $a^2 - 4b \geq 0$ *ise buradan* $a^2 - 4b = 0$ *olsun.* $a = \pm 2b$ *olur. Bunun işaretini incelersek a'lar varmış burada 2b'ler kökleri buralar 0. 2b'den büyük değerler için pozitif, negatif, pozitif (öğrenci işaret tablosuyla inceleme yapmıştır.). O zaman a'nın aralığı* $R - (-2b, 2b)$*. a bu aralıkta olursa bu kökler reel sayı oluyormuş. Şimdi bu kökler reel sayı oluyormuş da ondan sonra bu aralığa göre bunun da tanım kümesini bulmamız lazım. Bunun da tanım kümesini hesaplayayım mı?*

Mülakatçı: Hangisinin?

Harun: *Şimdi demiş ki en geniş tanım kümesinin reel sayılar olabilmesi için, yani tanım kümesinin reel sayılar olması için a ne olmalıdır? Biz a'nın durumuyla ilgilendik.*

Mülakatçı: *Tanım kümesinin ne olduğunu sormuyor evet.*

Harun: *Tamam o zaman a'yı bu aralıktan seçerim ben. a ile b arasında şöyle bir ilişki olacak.*

Mülakatçı: Peki Harun.

Harun'un Problem 3'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Harun'un akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Köklü sayılar kavramı ve diskriminant kavramı, tam kare yapma iii) Aritmetik işlemler (transformasyon), bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Harun çözüm prosedürüne, verilen fonksiyon için bir tanım kümesi oluşturmakla başlamıştır. Bu amaçla köklü sayıların özelliklerini matematiksel olarak anlamlı bir şekilde kullanıp, bu özellikleri sağlatacak uygun aralığı bulmak istemiştir. Oluşturduğu denklemin köklerini bulmak için önce tam kare yapma, sonra da diskriminant algoritmalarını uygulamıştır. Algoritmaların aritmetik işlemlerini doğru bir şekilde yapmasına rağmen herhangi bir sonuca ulaşamamıştır. Daha sonra soruda verilen "gerçek sayılar kümesi" ifadesinden hareket ederek, $\Delta \geq 0$ iken reel sayı köklerinin var olması durumu ile sorudaki durumun benzer olduğunu kabul ederek bir sonuç elde etmiştir. Bu benzerlik ise matematiksel olarak anlamlı değildir. Yüzeysel bir düşünce sergilemiştir.

S3: Harun akıl yürütme sürecinde, fonksiyonun tanım kümesini elde etmek için iki farklı algoritma kullanmıştır. Ancak bu algoritmaları uyguladıktan sonra istediği sonucu elde edemediğini fark etmiştir. Yani matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce sergilemeden, önceki öğrenme tecrübelerinin ışığında bu algoritmaya karar vermiştir. O halde Harun'un bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR dir Ayrıca bu süreçte birden fazla algoritma kullandığı için akıl yürütme becerisi türü AR'nin bir alt kategorisi olan DAR olarak sınıflandırılabilir.

S4: Harun'un çözüm prosedürünü uygularken kullanmış olduğu algoritmalara hâkimliği dikkat çekmektedir. Aritmetik işlemleri doğru bir şekilde ilerletmiş; üzerinde değişiklikler yapabilmiştir. Ancak bu algoritmalar neticesinde, önceki öğrenme yaşantılarında alıştığı sonuçlara direkt varamamıştır. Algoritmalarda kullandığı kavramlarla doğru yorumlar yapamamıştır. $\Delta \geq 0$ Olduğu durumlarda kökler vardır ve reel sayıdır. Harun bu durumu, "$x_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ *şimdi bunların kök olabilmesi için bunların reel sayı olması lazım. Bunların reel sayı olabilmesi için de bu* Δ*'nın* ≥ 0 *olması lazım.*" Şeklinde doğru olarak belirtmiştir. Ancak bu durumu tanım kümesinin reel sayılar olması ile bütünleştirerek, $\Delta \geq 0$ olduğu şartı altında, soruda istenilen a değeri için bir aralık bulmuştur. Yapılan bu yanlış yorumun nedenleri altında; diskriminant kavramı ile alakalı zayıf kavramsal alt yapı; soruyu daha önceki öğrenme yaşantılarına benzetip derinlemesine düşünememe sebep olarak gösterilebilir.

Harun'un Problem 3'e Ait Sınıflandırma Kodu

Harun'un Problem 3'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{DAR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü DAR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

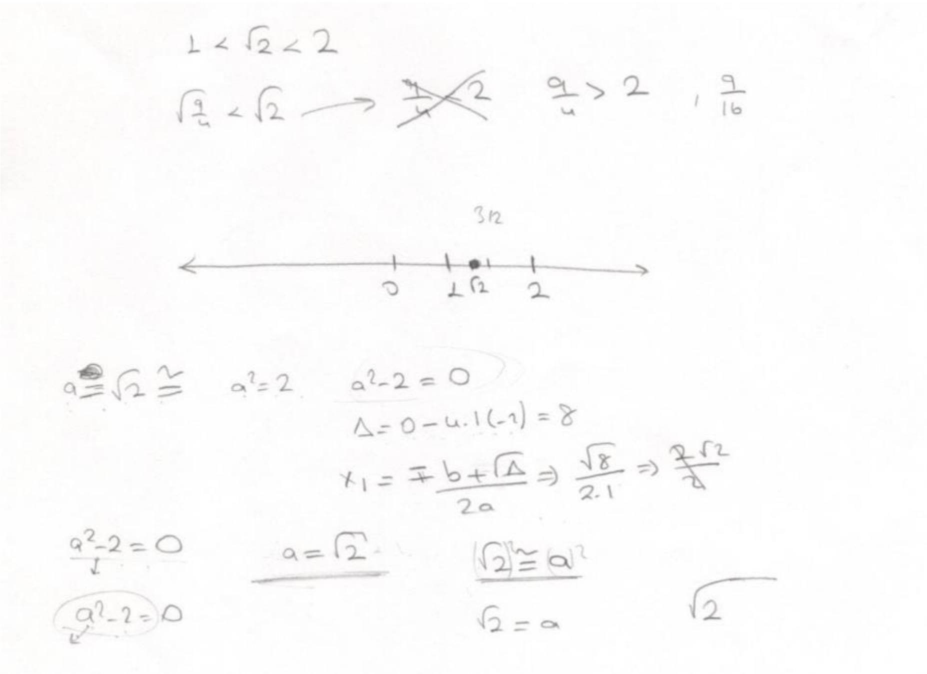
Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 3 için oluşturulan çözüm prosedüründe yedi öğrenci tarafından kullanılmıştır. Katılımcıların çoğu tarafından tercih edilen bu akıl yürütme türü ile tam olarak doğru sonuca ulaşan olmamıştır. Akıl yürütme süreçleri incelenen bu yedi durumda da öğrenciler diskriminantın sıfırdan büyük ya da küçük olması halinde nasıl yorumlandığını ifade etmelerine rağmen bu özellikleri kullanamamışlardır. Öğrenme yaşantılarından genel olarak edindikleri tecrübeleri temel alarak sıfırdan büyük olma durumunu düşünmüşlerdir. Bunun yanında tanım kümesinin reel sayılar olması şeklinde verilen şartı dikkate alarak, diskriminantın reel köklere sahip olduğu > 0 hali ile çözüm sürecine devam etmişlerdir. Belirtilen bu durumlar öğrencilerin kendi kavramsal bilgilerini etkin bir şekilde kullanamadıklarının bir göstergesi olarak görülebilir. Bunların yanında özellikle öğrenme ortamlarında benzer yaşantılara yer verilmesi, öğrencilerin de bu tarz tecrübelerini arttırarak, farklı yolları düşünmelerine engel olduğu söylenebilir.

4.2.4. Problem 4

"$\sqrt{2}$ *sayısının sayı doğrusu üzerindeki kesin yerini çizerek gösteriniz.* "

4.2.4.1. Aylin’in problem 4’e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Aylin’in Problem 4’e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.26, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.26. Aylin’in problem 4’e ait çalışma kâğıdı

Aylin’in Problem 4’e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Aylin: $\sqrt{2}$ *sayısının sayı doğrusu üzerindeki yerini çizerek gösteriniz.* $\sqrt{2}$ *Sayısı bir kere* $1 < \sqrt{2} < 2$ *dir. hımm…*

Mülakatçı: *Sayı doğrusu çizdin ve sayıları yerleştirdin (*$0, 1, \sqrt{2}, 2$*).*

Aylin: *Hıhı evet. Şimdi kesin yerini çizerek gösteriniz diyor hani 1’e mi yakın 2’ye mi yakın onu da bulayım. Mesela* $\frac{3}{2}$ *desek şurada hani tam ortası* $\frac{3}{2}$ *oluyor.* $\frac{3}{2}$*’nin karekökü eşiti* $\sqrt{\frac{9}{4}}$*. O zaman* $\sqrt{\frac{9}{4}}$*, 2’den küçük mü olur büyük mü olur? 2’den küçük olur kökün içinde (*$\sqrt{\frac{9}{4}} < \sqrt{2}$*). Bunu dışarı attım… yok büyük oluyor* $\frac{9}{4} > 2$ *. o zaman biraz daha 1’e yakın oluyor buralarda bir yerde.* $\frac{3}{4}$*’e bakayım birde,* $\frac{9}{16}$ *yok tamam.*

Mülakatçı: *İki yarısını bularak baktın.*

Aylin: *Evet.*

Mülakatçı: *Peki kesin yerini çiziniz diyor ya da gösteriniz. Bulduğun yer kesin yeri mi?*

Aylin: *Yani tam da kesin olmuyor. Kesin yerini nasıl buluruz? Şimdi* $\sqrt{2}$*'nin yaklaşık değerini tam bilemediğim için onu nasıl bulacağız. İşte düşünüyorum ama…* $\sqrt{2}$*'nin yaklaşık değerini biz bir şekilde buluyorduk ama şu anda hatırlamıyorum. Nasıl bulabilirim* $\sqrt{2}$*'nin yaklaşık değerini? Hımm a'ya eşitledim* $a = \sqrt{2}, a^2 = 2, a^2 - 2 = 0$ *bunun köklerini alırsak…*

Mülakatçı: *Nereye varacaksın?*

Aylin: *a'ya. a'ya varırsak yaklaşık değerini de bulmuş olurum. Şimdi kökleri* Δ*'dan alınıyordu.* $\Delta = 0 - 4.1.(-2) = 8$ *çıktı.* $x_1 = \frac{\pm b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$ *geldi. İşte bu iyi olmadı. O zaman buradan gelmedi başka bir şekilde düşünüyorum nasıl bulabilirim a'yı? Şuan polinomları düşünüyorum oradan oluyordu sanki. Polinomlarla böyle karışık ifadeleri çözüyorduk sanki ama şuan hatırlamıyorum. Yani şuradan bir şey bulmamız lazım ama bulamıyorum. Yani biz derslerde* $\sqrt{2}$*'nin yaklaşık değerini bulmayı görmüştük ama hatırlamıyorum. Başka bir şey aklıma gelmiyor hocam.*

Mülakatçı: *Tamam Aylin.*

Aylin'in Problem 4'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Aylin'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Sayı doğrusu, sayılar, fonksiyonlar (nesne) ii) Algoritmalar kümesi bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Aylin öncelikle $\sqrt{2}$ için tahmini yer olan 1 ve 2 arasında bir noktayı sayı doğrusu üzerinde göstermiştir. Kesin noktayı bulabilme sürecinde ilk adım, 1 ve 2 sayılarının tam orta noktası olan $\frac{3}{2}$ nin $\sqrt{2}$ 'ye göre konumunu belirlemek olmuştur. Uyguladığı bu ilk algoritmayla $\sqrt{\frac{9}{4}} > \sqrt{2}$ ifadesine ulaşarak $\sqrt{2}$'yi 1'e daha yakın bulmuştur. Bu yapılanlar matematiksel olarak anlamlıdır. Yeni bir algoritmaya yönelen Aylin $\sqrt{2}$ nin yaklaşık değerini bulabilmek için $a = \sqrt{2}$ denklemini kullanmaya karar vererek, ikinci dereceden denklemde kök bulma adımlarını uygulamış, ancak başarısız olmuştur. Çünkü a zaten $\sqrt{2}$ ye eşittir. Bu algoritmadan sonra yeni bir algoritma düşünmüş, ancak herhangi bir uygulama yapmamıştır. Ortaya konan düşünceler, matematiksel olarak derinlemesine bir şekilde tartışılmadığından yüzeysel kalmıştır.

S3: Aylin, akıl yürütme sürecinde doğru sonuca ulaşabilmek için öğrenme çevresinden edindiği farklı algoritmaları kullanmıştır. Tüm adımlarını doğru bir şekilde takip ettiği algoritmaları uyguladığında ise, varmayı düşündüğü sonuçlara ulaşamamıştır. Uygulama sürecinde matematiksel olarak derin tartışmalara girmemiştir. Bu tipik özellikleri barındırdığı için Aylin'in bu sorudaki akıl yürütme becerisi AR olarak sınıflandırılmaktadır. Algoritmaları kullanırken kendi zihninde barındırdığı algoritma setini kullandığı için bu akıl yürütme türünü DAR olarak alt kategoriye ekleyebiliriz.

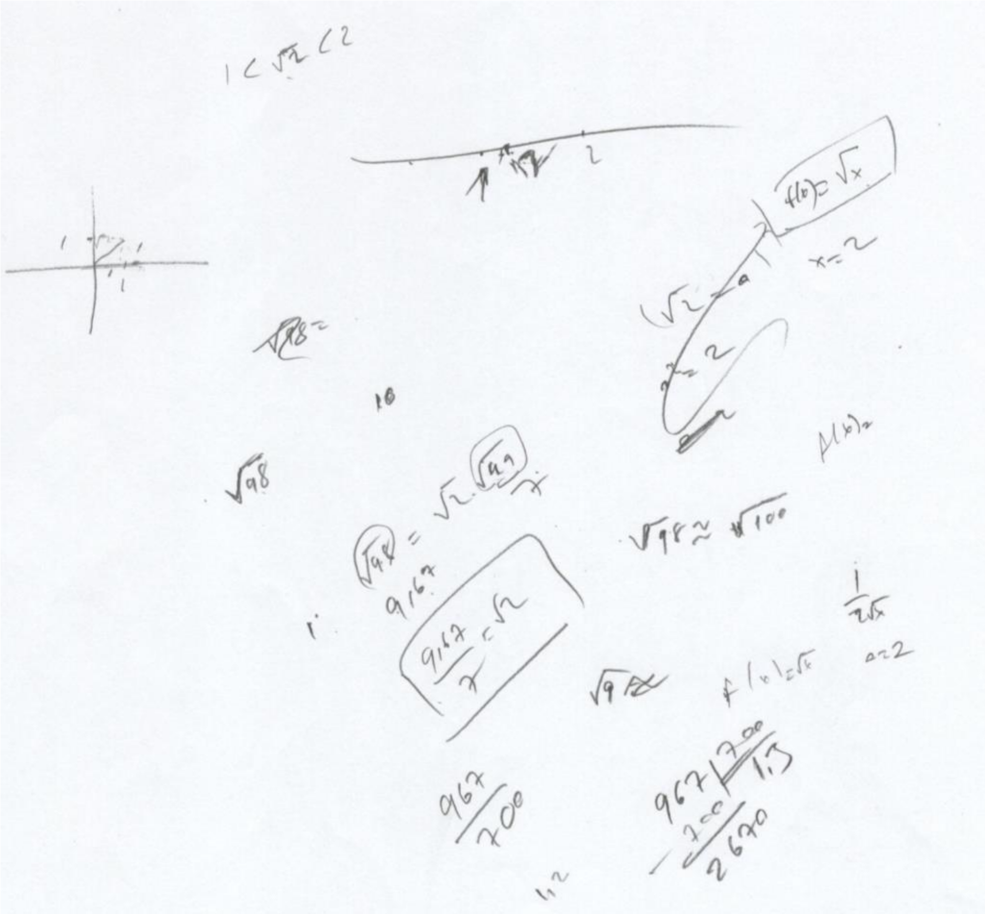
S4: Aylin ortaya koyduğu akıl yürütme sürecinde, uygulamaya karar verdiği algoritmaların basamaklarını doğru uygulamıştır. Ancak bu algoritmalar onu doğru sonuca götürmemiştir. Çünkü soruda $\sqrt{2}$ nin kesin yeri istenmesine rağmen Aylin, yaklaşık yeri bulmaya yönelmiştir. Hatırlayamadığı diğer iki algoritma da aynı duruma hizmet etmektedir. Buradan anlaşılan şu ki; Aylin'in irrasyonel sayılar konusundaki öğrenme yaşantılarında sadece yaklaşık değerler yer almaktadır. Öğrencide oluşturulan bu tek taraflı bakış açısı, onun farklı algoritmalara yönelmesine engel teşkil etmiştir

Aylin'in Problem 4'e Ait Sınıflandırma Kodu

Aylin'in Problem 4'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{DAR_{ogy}}$olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü DAR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.4.2. Önder'in problem 4'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Önder'in Problem 4'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.27, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.27. Önder'in problem 4'e ait çalışma kâğıdı

Önder'in Problem 4'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Önder: $\sqrt{2}$ *sayısının sayı doğrusu üzerindeki kesin yerini çizerek gösteriniz.* $\sqrt{2}$*sayısının öncelikle hangi sayılar arasında olduğuna bakarım. 1 ve 1'den büyüktür* $\sqrt{2}$*; 2'den de küçüktür. Ama hangisine daha yakın kesin olarak belirlememiz için daha açmamız gerekir. Şurası 1 olsun şurası 2 olsun şu arada bir şey* $\sqrt{2}$*. Biz bunu başka bir şeyle yapıyorduk ama neydi… Mesela* $\sqrt{98}$*= bunu unuttum… Şimdi başka bir şekilde yapacağım. Tam kesin derken hocam böyle tam nokta isabet atışını mı bulmak lazım?*
Mülakatçı: *Evet.*
Önder: *Yani tahmini bir değer yok. O zaman önce* $\sqrt{2}$*'nin değerini bulmak lazım.* $\sqrt{2}$*'nin değeri de nasıl bulunur,* $\sqrt{2} = a$ *dersem her iki tarafın karesini alırsam,* $2 = a^2$ *olur* $a^2 - 2$ *yok olmaz saçmaladım.* $\sqrt{2}$*, onun bir fonksiyonu vardı unuttum.*
Mülakatçı: *Önceden yaptığınız bir şey miydi?*

Önder: *Evet önceden yaptığımız bir şeydi. Örneği hatırlıyorum* $\sqrt{98}'$*in yaklaşık değerini bulun tarzında bir soruydu. Sonra burada en yakın neye diyorduk 10'a yakın. Sonra geriye kalan aradaki fark 2 idi. Yok hatırlayamadım formülünü analiz 1 dersinde görmüştük. Sayı doğrusu üzerinde kesin yerini çiziniz. Uğraşsam olur mu hocam biraz?*
Mülakatçı: *Tabiki.(öğrenci işlemler yaparak uğraşmaktadır) ne yapıyorsun?*
Önder: *O örneği hatırlamaya çalışıyorum. Onu hatırlasam zaten sonuca ulaşacağım. Hatta bunu olasılık dersinde mi görmüştük. Hıhh… Bir fonksiyon seçiyorduk önce bu hangisi fonksiyona daha yakın mesela bakıyoruz. Bu* $f(x) = \sqrt{x}$ *olsun. Sonra değerimiz neyi sormuş* $x = 2$ *için mesela… ıı… devamı neydi. Türev filan giriyordu içine. Bulacağım yavaş yavaş.*
Mülakatçı: *Kendin bulmaya çalışsan.*
Önder: *Bulmaya çalışıyorum da hocam 9 için mesela* $\sqrt{9}$*olsun orası 3 ün değerini biliyorum ben. Yaklaşık değeri…neydi* $\sqrt{x}$*'in türevi* $\frac{1}{2\sqrt{x}}$*. Hangisini nereye alayım.*
Mülakatçı: *Aynı yol için mi uğraşıyorsun?*
Önder: *Yok şimdi başka bir şey geldi aklıma.*
Mülakatçı: *Nedir?*
Önder: *Acaba şeyde yapsak olur mu bu* $\sqrt{2}$*'yi İki sayının çarpımı şeklinde yazsak…*
Mülakatçı: *Nereye varacaksın oradan nasıl bir şey düşünüyorsun?*
Önder: *Mesela eskiden şöyle sorular vardır 10 değerini* $\sqrt{2}$ *ve* $\sqrt{5}$*'i kullanarak bulunuz yaklaşık değerini filan diye.* $\sqrt{10}$ *değerini de bilmiyoruz ki. (öğrenci sonra başka işlemlere yönelmiştir)*
Mülakatçı: *Bu yazdıkların nedir?*
Önder: *Burası 7, buranın değeri 967… hatırlıyorum… Bu* $\sqrt{98}$ *'in değeri 9.67 idi yani 677 diye devrediyordu. Sonra bu* $\sqrt{98} = \sqrt{2}.\sqrt{49}$ *diye yazarım.* $\sqrt{49} = 7dir$*. Sonra* $\sqrt{2} = \frac{9,67}{7}$*olur. Yani* $\frac{967}{700}$ *oda hesaplayınca 1.3 küsür gibi bir sayı oluyor. O da 1'e yakın bir noktada olur tam kesin yeri.*
Mülakatçı: *Tamam Önder.*

Önder'in Problem 4'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Önder'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Algoritma kümesi, aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Önder, sorunun çözümü için kullandığı fonksiyonlara ve bu fonksiyonları kullanarak uyguladığı algoritmalara sadece sonuç odaklı düşünerek karar vermiştir. İçinde $\sqrt{2}$ yi barındıran, $\sqrt{2}$ nin değerini bulacağına inandığı algoritmaları kullanmıştır. Ancak bu fonksiyonların ve algoritmaların soruya uygunluğunu dikkate almamıştır. Nihayetinde kullandığı beş farklı yolun dördünde de hiçbir sonuca ulaşamamış ve kendisi de ortaya çıkan garip sonuçlara şaşırmıştır. Bu durum akıl yürütmesini yaparken kullandığı bileşenlerin matematiksel olarak yalnızca yüzeysel özelliklerini göz önüne aldığının göstergesidir. Uyguladığı çözüm prosedürü de matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Önder beş adet strateji seçimi gerçekleştirmiştir. Seçtiği tüm stratejilerde, daha önce benzer durumlarda kullandığı algoritmaları denemiştir. Denemiş olduğu bu algoritmalarla, önceki öğrenmelerinde birçok sorunun çözümüne ulaşmış olabilir. Ancak önceki deneyimleri ile bu soru arasında kurmuş olduğu bağ oldukça zayıftır. Verilen sorunun esas özellikleri üzerine temellenmeyen bu seçimler sebebiyle de sadece yüzeysel özelliklerin göz önüne alındığı söylenebilir. Algoritma uygulamalarına bakıldığında ise basamakların adım adım takip edildiği söylenilebilir. Ancak algoritmanın uygunluğuna yönelik herhangi bir analiz ve değerlendirme yapmamıştır. Bu sebeple işleyişe yönelik bir olumsuzluk ortaya çıktığında Önder hızlıca başka bir algoritma seçimine yönelmiştir. Belirtilen bu beş strateji seçiminden dolayı Önder'in bu soruya yönelik akıl yürütme becerisi AR olarak karakterize edilebilir. Birden fazla algoritmaya yer verildiğinden AR'nin alt kategorisi olan DAR sınıfına da dahil edilebilir.

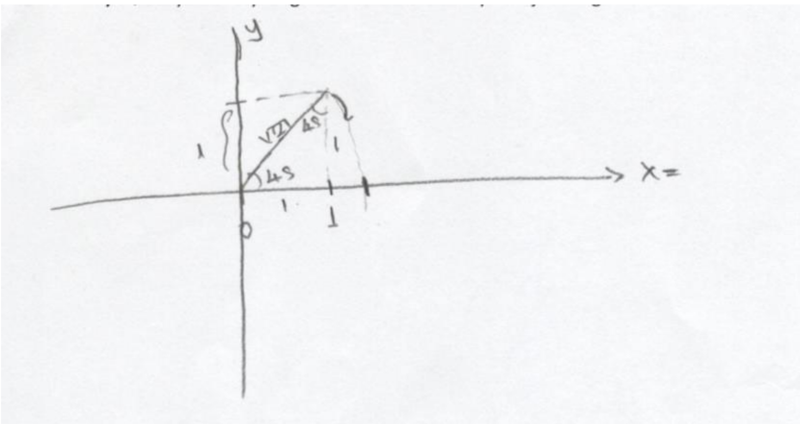
S4: Ortaya koyduğu akıl yürütme sürecinde, Önder'in en çok zorluk yaşadığı durum, seçtiği stratejilerde uygulamaya çalıştığı algoritmalara tam olarak hâkim olamamadır. Stratejileri hangi derste öğrendiğini hatırlayamaması, uygulama sonucu elde ettiği ifadeleri anlamsız bulması, algoritmayı uygulamayı yarıda bırakması ve son stratejide aklında kalan ezber bir sonuçtan algoritmaya devam etmesi belirtilen hakimiyetsizliğin göstergesidir. Yani seçtiği stratejiler için kavramsal anlama düzeyinin zayıflığı, uygun bir çözüm yöntemi bulunmasına veya yeniden yapılandırılamamasına neden olmaktadır.

Önder'in Problem 4'e Ait Sınıflandırma Kodu

Önder'in Problem 4'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{DAR_{xgy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü DAR; doğruluk kategorisinde, problemde herhangi bir sonuca ulaşıldığından x (belirsiz); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.4.3. Harun'un problem 4'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Harun'un Problem 4'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.28, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.28. Harun'un problem 4'e ait çalışma kağıdı

Harun'un Problem 4'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Harun: *Kesin yerini çizerek gösteriniz. Şimdi şöyle bir sayı doğrusu alsak, şurası 0 olsa, şuraya 1 birim alsak. Şimdi hocam bunu sayı doğrusu değil de analitik düzlem mantığıyla düşünsek; şurası x ekseni şurası y ekseni gibi.* $\sqrt{2}$*'yi biz şurada* 45° *lik açı* *alırsak 90, 45, 45 üçgeninden şurada 1 birim, şu boy da 1 birim oluyor. Bura 1 birim, bura 1 birim ise burası $\sqrt{2}$ birim. Şimdi biz bunu buradan çevirip hareket ettirirsek bu açının kolunu, şu boy şöyle hareket ettirilirse şurada bir yerde kesmesi lazım. Şunu pergel olsa ben size çizer gösterirdim bunu. Yani $\sqrt{2}$ yarıçaplı merkezi orijin olan bir çember çizersek $\sqrt{2}$'yi yerleştirmiş oluruz.*

Mülakatçı: *Peki bu şekilde düşünme yolunu daha önce görmüş müydün? Yoksa şuan soruya bakınca kendin mi oluşturdun?*

Harun: *Yani bunu daha önce görmüş müydüm derken, daha önce kavram yanılgısı dersinde filan da biz bunu şey yaptık da; herhangi bir yerde görmedim de öyle şey açıların kolları döndürülüyor filan ya ona göre hareketli olarak öyle şey yaptım orda. Ama bu bilimsel bir şeymiş sonradan fark ettim. Ama ilk kendim fark etmiştim bunu böyle çevirerek yerleştiriyorlar filan.*

Mülakatçı: *Tamam Harun.*

Harun'un Problem 4'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Harun'un akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü, ii) Koordinat düzlemi, $1, 1, \sqrt{2}$ kenarlı dik üçgen (nesne), yay hareketi (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Harun, koordinat sistemini kullanarak kenar uzunlukları $1, 1, \sqrt{2}$ olan bir dik üçgen çizmiştir. Sonrasında $\sqrt{2}$ birim uzunlukta olan kolu hareket ettirerek sayı doğrusuna yerleştirmiştir. İzlediği çözüm prosedüründe kullandığı nesneler ve transformasyonlar matematiksel olarak anlamlı ve kabul edilebilirdir. Çözüm yolunu anlatırken sürece yorum katmıştır. Buda derinlemesine matematiksel özellikleri sürece kattığının göstergesidir.

S3: Harun öğrenme çevresinden edindiği bilgiler ve kendi deneyimleri neticesinde bir çözüm yolu takip etmiştir. Koordinat düzlemindeki uzunlukları hareket ettirerek istediği irrasyonel sayının kesin yerini bulabildiği bu yolu, aldığı derslerin birinde görse de daha önceden kendinin keşfettiğini belirtmiştir. Bunun neticesi olarak da, sorunun çözümünde kullandığı basamakları salt ezberden uzak bir şekilde anlayarak ifade etmiştir. Ancak, çözüm yolunu o an keşfetmemiştir ve kullandığı algoritmaya hakimdir. Bu şekilde ortaya konulan akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir.

S4: Harun sorunun çözümüne yönelik kullandığı algoritmayı öncelikle kendi başına keşfettiğini, sonrasında ise aldığı derslerden birinde dersin hocası tarafından kullanıldığını ifade etmiştir. Yani kullandığı algoritma zihnine işlenmiştir. Belki de bu sayede soruyu çözüme ulaştırırken zorlanmamış, neyi niçin kullandığını bilerek ve anlayarak ilerlemiştir. Çünkü aldığı ders ve ders hocasının öğrettikleri neticesinde keşfettiği bu yolun bilimsel bir dayanağa sahip olduğunu görmüştür.

Harun'un Problem 4'e Ait Sınıflandırma Kodu

Harun'un Problem 4'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{dgd}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek bir tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 4'in çözüm prosedüründe üç öğrenci tarafından kullanılmıştır. Aylin, Önder ve Harun'un kullandığı bu akıl yürütme türünde yalnızca Harun doğru cevaba ulaşabilmiştir. Diğer iki öğrenci farklı algoritmalar kullanarak çözüm prosedürlerini oluştururken, kullanmış oldukları bu algoritmaları yüzeysel benzerliklerden hareket ederek seçmişlerdir. Dolayısıyla uygulama süreçlerine hakim değillerdir. Problemde $\sqrt{2}$'nin kesin yerini belirleme durumu olmasına rağmen; onlar yine yaklaşık yeri belirlemeye yönelik düşünceler sunmuşlardır. Harun ise daha çok bireysel çalışmaları neticesinde önceden oluşturduğu bu algoritma ile istenilen noktaya ulaşmayı başarabilmiştir. Belirtilen durumlardan hareket ederek, etkili akıl yürütme süreçlerini oluşturabilmek için farklı öğrenme tecrübelerini barındıran ortamların yanında bireysel olarak da düşünme stratejileri geliştirmenin önemli olduğu söylenebilir.

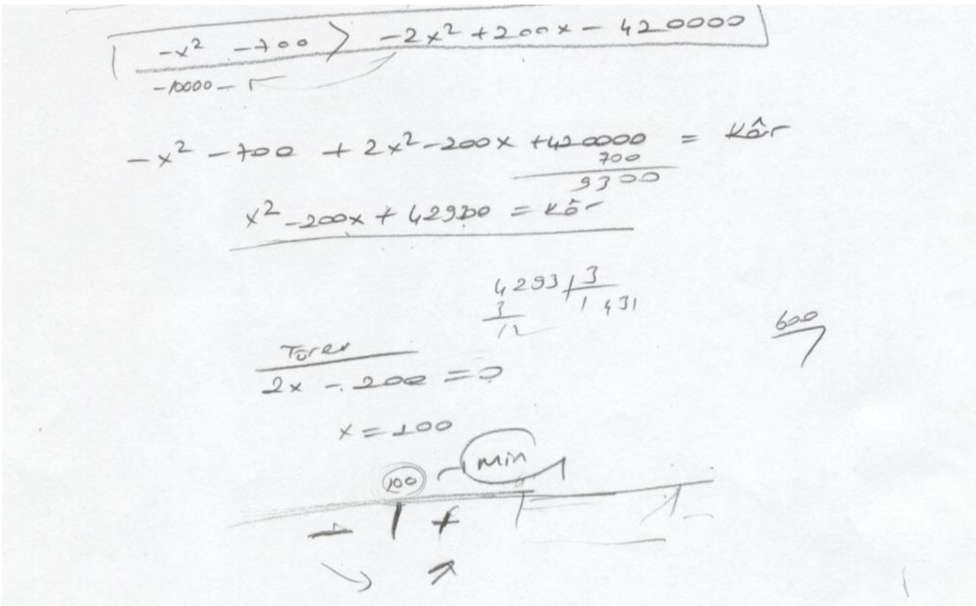
4.2.5. Problem 5

"Bir firma her yıl x birim ürün üretmektedir x, [400,600] arasında olmak üzere). Üretimin maliyeti yaklaşık olarak $-2x^2 + 2000x - 420000\ tl/birim$ *dir. Üretilen*

ürünlerin satış fiyatı ise $-x^2 + 700x\ tl/birim$ *dir. Yıllık karın en fazla olması için her yıl kaç birim üretim yapılmalıdır."*

4.2.5.1. Banu'nun problem 5'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Banu'nun Problem 5'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.29, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.29. Banu'nun problem 5'e ait çalışma kağıdı

Banu'nun Problem 5'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Banu: *(Öğrenci soruyu sesli bir şekilde okumuştur.) O ne kadar çetrefilliymiş. Maliyetimiz bu, satışımız bu. Bu fark bize karı verecek (satış - maliyet), tabi eğer ki maliyetten daha fazla elde ettiysek. O zaman iki tane denklem çıkıyor* $-x^2 + 700 > -2x^2 + 200x - 420000$ *budur. Kar denklemimiz de nedir* $-x^2 - 700 + 2x^2 - 200x + 420000$ *budur. Çıkaracağız bir de* $x^2 - 200x + 42930$*, işte bu bizim karımız (öğrenci yüksek oranda işlem ve dikkatsizlik hataları yapmıştır.). şimdi yıllık karın en fazla olabilmesi için her yıl kaç birim üretim yapılmalıdır? Biz burada nasıl ayıracağız kök bulmak için sayılar çok gıcık. 3'e bölsek…*

Mülakatçı: *Şu an ne yapıyorsun? Karı buldun.*

Banu: *Karı buldum. Yıllık karın en fazla olabilmesi için dediği için x' de yılı gösteriyor. Ama ben türev almadan direk daldım.* $2x - 200 = 0$ *Türevini aldım;* $x = 100$ *geliyor. Bu 100'ü yerine yazıp direk bakıyorum (işaret tablosundan)* $+, -$. *Evet sıkıntı yok. Bu neymiş minimum değerimizmiş. Neydi, bir firma her yıl x birim ürün üretmektedir. Ürünün aralığı buymuş, bu sefer bize aralık vermişler. Üretimin maliyetini veriyor, satışını veriyor, her yıl x kadar birim üretiyor. Her yıl minimum olarak 100 birim üretiyor.*

Mülakatçı: *Karın maksimum olması için kaç birim üretmelidir?*

Banu: *Yıllık karın en fazla olabilmesi için; hım şurada mı yerine koysak… Olmadı bu.*

Mülakatçı: *Ne oldu? Sıkıntı nedir?*

Banu: *Burada ama biz ne yapıyoruz karın meselesine bakıyoruz. Yıllık karın en fazla olması için… Hım ben burada minimumu buldum. Ama bu kadar ürün üretiliyormuş bu aralığa girmedi bu değer. Ben mi yanlış yaptım. Bizim karımız bundan elde ediliyor, karın elde edilebilmesi için de şartımız bu.* $2x - 200$

Mülakatçı: *Peki nasıl bir yol izleyeceksin?*

Banu: *Kesin şu aralıkları kullanmalıyız. Ama nasıl? Kar denkleminde bu değerleri koysak, ne kadar kar elde ettiğimizi düşünsek. Eğer ki bu aralığı dikkate almasak bu kadar minimum değer yapsak demek ki* 400 *ile* 600 *bu tarafta kalıyor. Yani ne oluyor hiçbir şey.*

Mülakatçı: *100'ün sol tarafı neyi gösteriyor?*

Banu: *Ya maksimum değer* $+$ *gösteriyor. Demek ki yüksek bir değer var. O zaman maksimum değeri 600 mü?*

Mülakatçı: *Neden?*

Banu: *Şimdi biz sonuç olarak burayı bulduk. Bu taraf* $-$*, bu taraf* $+$*. Aralığımız buraya düşüyor(yani* $+$ *tarafa). Kapalı aralık verilmiş o yüzden 600 dür. Bu taraf pozitif ya hep demek ki maksimum değerini alır diye düşündüm. Yani mantıklı mı bilemiyorum. Orası sizin kararınıza kalmış bir şey.*

Mülakatçı: *Tamam Banu.*

Banu'nun Problem 5'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Banu'nun akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Aritmetik işlemler (transformasyon), Sayılar ve değerler (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Banu, kâr fonksiyonunu elde etmek için satış fiyatından maliyet fiyatını çıkarmış; "*yıllık kârın en fazla olabilmesi*" şeklinde verilen ifadeden hareketle de bulduğu kâr fonksiyonunun türevini alıp 0'a eşitleme işlemi yapmıştır. Ancak işlemleri yaparken verilen ifadeleri yanlış kullandığından farklı sonuçlara ulaşmıştır. Transformasyonlarda izlenen adımlar matematiksel kurallara uygun olmasına karşın, elde ettiği sonuçlar doğru değildir. İşlemler neticesinde, kâr miktarını 100 olarak bulmuş ancak bu değerin belirtilen aralıklarda olmadığını fark etmiştir. Bu değeri kullanmayarak verilen aralığa odaklanmış ve aralığı kullanabileceği şekilde bir sonuç ortaya çıkarmıştır. Yani matematiksel olarak derinlemesine bir tartışma ortamı oluşturmadan yüzeysel düşünmeyi tercih etmiş ve bir sonuç bulmuştur.

S3: Banu karşılaştığı soruda, öğrenme çevresinden edindiği ve onu sonuca götüreceğine inandığı adımları bire bir uygulamıştır. Satış fiyatından maliyet fiyatını çıkararak, "*yıllık kârın en fazla olabilmesi için*" ifadesinden hareketle bulduğu kâr fonksiyonunun türevini almış ve 0'a eşitlemiştir. Buradaki amacı maksimum kârı bulmaktır. Ancak izlediği yol onu minimum değere götürmüştür. Banu, işlemler sonucu oluşan bu tezatlığın farkına varıp sonucu, verilen aralığa uygun hale getirmiştir. İşte konu üzerinde derinlemesine düşünülmeden bilinen algoritmanın adım adım uygulanması şeklinde tipik bir özelliği olan AR, Banu'nun bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü olarak belirtilebilir.

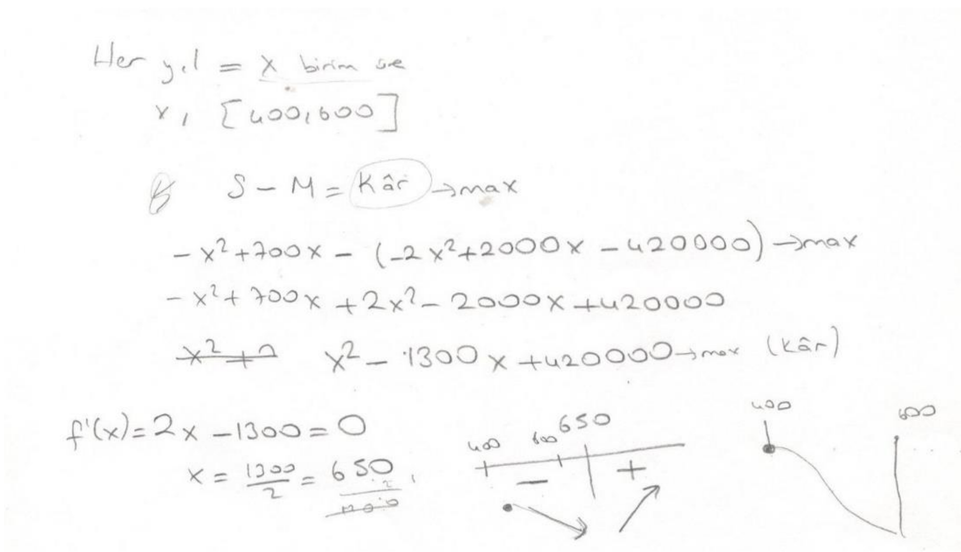
S4: Banu algoritmasını uygulayarak bir sonuç elde etmiş ve yorum yapmıştır. Ancak "*yani mantıklı mı bilemiyorum*" şeklindeki ifadesiyle sonuçtan emin olmadığını belirtmiştir. Çünkü uygulamış olduğu bu algoritma önceki öğrenme yaşantılarında sorunsuz bir şekilde çalışmıştır. Ayrıca "*bu sefer bize aralık vermişler*" ifadesiyle yeni bir durumla karşılaştığını da gösteriyor. İşte konuyla alakalı rutin yaşantılara sahip olması öğrencinin bu soruda yaşadığı zorlukların arkasında yatan neden olarak gösterilebilir.

Banu'nun Problem 5'e Ait Sınıflandırma Kodu

Banu'nun Problem 5'e aitortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.5.2. Aylin'in problem 5'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Aylin'in Problem 5'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.30, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.30. Aylin'in problem 5'e ait çalışma kâğıdı

Aylin'in Problem 5'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Aylin: *(öğrenci sessiz bir şekilde soruyu okumaktadır.) Her yıl* x *birim üretiyor,* x *de* $[400{,}600]$ *arasında. Maliyeti bu; üretilen ürünlerin satış fiyatı bu; yıllık karın en fazla olması için her yıl kaç birim üretim yapılmalıdır. Bir üretim yapacak, satış fiyatı var. Şimdi karı oraya nasıl aktaracağım. Satış – maliyet= kardı. Bunun en fazla olması maksimum olması için her yıl ne kadar üretim yapılmalı yani* x*'i soruyor. Şimdi denklemleri yerine yazarsak ,* $-x^2 + 700x - (-2x^2 + 2000x - 420000)$ *birimleri de aynı zaten. Bize bunun maksimum değerini soruyor. Şuradan dağıtayım* $-x^2 + 700x + 2x^2 - 2000x + 420000$*. Düzenleyeyim* $x^2 - 1300x + 420000$

Mülakatçı: *Bu bulduğun fonksiyon nedir?*

Aylin: *Bu bulduğum fonksiyon, kar. Şimdi maksimum dediği için yine benim aklıma maksimum minimum problemleri geliyor. Hani direkt türevini alıp sıfıra eşitleyeceğim. Biraz şu sayılar büyük geldi yani bunları sadeleştirme de olmaz. Direk türevini alıyorum* $f'(x) = 2x - 1300 = 0$ *dan* $x = \frac{1300}{2} = 650$ *ediyor. Sağlamasını yapayım… evet x 650. Şimdi işaret tablosunu yaparsak, + -. Bu çift katlı bir fonksiyon değil. Burası artan burası azalan bir fonksiyondur. Ama 650 olmaz.*

Mülakatçı: *Neden?*

Aylin: *Bu aralıkta değil çünkü. O yüzden yine… yani şu aralıkta (*$[400,600]$*) olması gerekiyordu. Şu aralık (*$[400,600]$*) aslında da şunla şunun (650' den küçük olan fonksiyonun azalan olduğu aralık) arasına düşüyor da; burada azalan bir fonksiyon olduğu için şu 400 herhalde maksimum olmuş olur. Yani şimdi türevini aldım hani 650'ye eşitledim ama 650 olmadı.*

Mülakatçı: *O zaman maksimum kar nerede?*

Aylin: *Yani 400 de.*

Mülakatçı: *Peki 400 ile 600 arasında daha yüksek bir kar değeri çıkabilir mi?*

Aylin: *Hani şöyle düşünüyorum, eksi (-) çıktıya hocam burada azalan. Bu azalan olduğu için 400, bu da 600. Bunun değerleri hani y eksenindeki değerleri en fazla burada (400'de yani). Şurada (600'de) bundan daha küçük olmuş oluyor diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *O yüzden de 400 diyorsun.*

Aylin: *Evet.*

Mülakatçı: *Tamam Aylin.*

Aylin'in Problem 5'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Aylin'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü, ii) Kâr fonksiyonunu ve kâr fonksiyonunu n. türevini bulma aritmetik işlemleri (transformasyon), sayısal değerler (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Aylin, izlediği çözüm yolunda öncelikle soruda verilenleri kullanarak kâr fonksiyonunu bulmuş; sonrasında da "*maksimum*" kelimesinden dolayı bu fonksiyonun türevini alıp 0'a eşitlemiş ve bir değer elde etmiştir. Daha sonra oluşturduğu artanlık-azalanlık tablosuna göre yorum yapmış ve ulaşmak istediği doğru sonuca ulaşmıştır. Bu süreçte kullandığı sayılar ve algoritmalar, elde ettiği değerler matematiksel olarak anlamlı ve kabul edilebilirdir. Kâr fonksiyonunun türevini alıp maksimum kârı 650 buluncaya kadar izlediği adımlarda sadece algoritmaları uyguladığından matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilemiş; bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. Ancak 650 değerinin verilen aralığın dışında kaldığını fark edince, matematiksel özellikleri kullanarak tartışma ortamı oluşturmuş ve derinlemesine yorumlar yapmıştır. Doğru sonuca da yaptığı bu analizlerle ulaşmıştır.

S3: Aylin verilen soruyu anladıktan sonra, onu sonuca götürecek adımları seri bir şekilde uygulamıştır. Soru cümlesinde geçen "maksimum" kelimesini fark ederek "*maksimum dediği için benim aklıma maksimum minimum problemleri geliyor*" ifadesini kullanmış "*kârın direkt türevini alıp* 0*'a eşitleyeceğim*" şeklinde, kullanacağı algoritmayı belirlemiştir. Bu iki durum Aylin'in bu tarz sorularla öğrenme çevresinde karşılaştığı sonucuna varmamızı sağlamaktadır. O halde mevcut bir algoritmanın direkt olarak kullanıldığı akıl yürütme türü olan AR, Aylin'in bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü olarak sınıflandırılabilir. Anahtar kelime kullandığı için AR'nin alt kategorisi olan FAR olarak özelleştirilebilir.

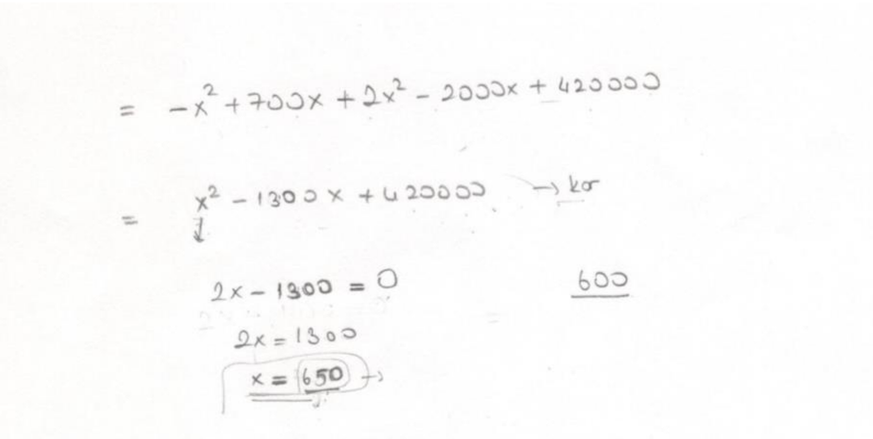
S4: Aylin maksimum kârı 650 birim buluncaya kadar ki uygulamış olduğu algoritmalarda, herhangi bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. Çünkü soruda "*maksimum*" ifadesi vardır. Ve bugüne kadar ki öğrenme çevresinde, türev alıp 0'a eşitlemek her zaman doğru sonuca ulaştırmıştır. Edinmiş olduğu bu deneyim, onun yaptığı işlemleri derinlemesine düşünerek adım atmasına engel olmuştur. Ancak istenilen sonuca ulaşamayınca, elde ettiği kâr fonksiyonunun, verilen aralıktaki değerler arasında nasıl hareket ettiğini anlamlı şekilde analiz etmiş ve yorumlamıştır. Bu durum, Aylin'in fonksiyon davranışları inceleme konusundaki kavramsal anlamayı gerçekleştirdiğinin göstergesidir.

Aylin'in Problem 5'e Ait Sınıflandırma Kodu

Aylin'in Problem 5'e aitortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **FAR$_{\mathbf{dgx}}$** olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü FAR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak hem yüzeysel hem de derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden x (belirsiz) olarak kodlanmıştır.

4.2.5.3. Ece'nin problem 5'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin Problem 5'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.31, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.31. Ece'nin problem 5'e ait çalışma kâğıdı

Ece'nin Problem 5'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Ece: *(Öğrenci soruyu uzun bir süre sessizce okumuştur.) şimdi şu mal ettiği fiyat, şu da satış olarak düşünsek. Bu aradaki karı bir bulsak. Ne kadar kar ediyor.*

Mülakatçı: *Nasıl bulacaksın onu?*

Ece: *Normal bir şekilde düşündüğümüzde 50 TL ye mal ediyor bir ürünü 100 TL ye satıyorsa, 50 tl kar etmiştir. O zaman bunu düşünerek şey desem sattığı fiyat bu; mal ettiği fiyat bu* ($-x^2 + 700x + 2x^2 - 2000x + 420000$)*. Buradan şey gelecek* ($x^2 - 1300x + 420000$) *kar fonksiyonum. Yıllık karın da diyor en fazla olması için her yıl kaç birim üretim yapılmalıdır? Şunun en fazla olmasını istiyor. Bu kar fonksiyonu oldu.* x *bu aralıkta. Ya bu limitle alakalı değil mi? En fazla üretimi istiyor. Şu* x, 400 *ile* 600 *arasında değil mi?*

Mülakatçı: *Evet. Birim sayısını sınırlamış.*

Ece: *En fazla olması için kaç birim üretim yapılmalıdır. Yani bizden en fazla olduğu durumda x'i istiyor değil mi? Ben bunda şey yapsam, bu benim kar fonksiyonum; ben burada ikinci türevi alarak şeye gitsem hani x'in maksimum olduğu noktaya gidemez miyim oradan.*

Mülakatçı: *Dene bakalım.*

Ece: *İkinci türevi değil birinci türevi diyecektim.* $2x - 1400 = 0$ $x = 700$ *geliyor.*

Mülakatçı: *Neyi buldun?*

Ece: *Ben burada neyi buldum… Fonksiyonu ben aslında…*

Mülakatçı: *Bulduğun bu 700 nedir?*

Ece: *Bir dakika; 700 ne. Off ben neyi buldum; birinci türevi 0'a eşitledim 700 buldum. İyide ben yanlış yapmışım ki. Şimdi doğru oldu (öğrenci yaptığı işlem hatasını düzeltti ve $x = 650$ buldu.) x'in ben maksimum değerini buldum diyeceğim ama o zaman da x bu aralıkta değil.*

Mülakatçı: *Hım ne yapacağız o zaman?*

Ece: *(öğrenci sessizce düşünmektedir) bir yer de yanlış mı yaptım yoksa yanlış mı gidiyorum? (yaptıklarını tekrar kontrol etti.)*

Mülakatçı: *Kafanı hangi durum karıştırdı?*

Ece: *Kafamı şunun 650 olması karıştırdı.*

Mülakatçı: *650 bulduğun değer nedir?*

Ece: *650, x'in maksimum değeri mi, bu fonksiyonun maksimum değeri.*

Mülakatçı: *Nasıl karar verdin buna?*

Ece: *Normal fonksiyonlardan, maksimum minimum problemlerinden…*

Mülakatçı: *Yani denklemin türevini alıp, 0'a eşitlediğinde ne sorarsa onu mu buluyorsun?*

Ece: *Evet. Çünkü bu fonksiyon dedim. Fonksiyonun maksimum değerini buldum. Bu da en fazla diyor. Her yıl kaç birim üretim yapılmalıdır. Maksimum değerini bulduktan sonra fonksiyon da yerine yazmam gerekmiyor mu? Yani x'i soruyor, doğru bunu sormuyor onu soruyor. Ama x, 400 ile 600 arasında. Onu geçemiyor. Benim ki niye geçiyor o zaman? Maliyeti bu, satış fiyatı bu; yani bence böyle olması gerekmiyor mu, ama bu aralığı geçiyor. Acaba ben yanlış mı düşünüyorum?*

Mülakatçı: *Emin değil misin yaptığından?*

Ece: *Ya şimdi hiç şunları görmüyorum; satış fiyatım 100, maliyetim 50 ise karım 50'dir, aradaki farktır. Buradan kar fonksiyonu bu çıkıyor bundan eminim yanlış yapmadım, doğru. Sağlamasını da yaptım. Sonra kar fonksiyonunu bulduktan sonra en fazla olması için diyor. Şunun en fazla olmasını istiyor benden (kar fonksiyonu). Bunu en fazla yapan değer de maksimum noktası değil midir? Yani fonksiyonu en fazla yapan değer maksimum noktası desem. Oradan birinci türevini sıfıra eşitledim x, 650 geliyor. Ama bulduğum 650 de burada değil. O zaman desem ki 650 üretim yapamıyorsa bunu bulduğuma göre direk en fazla 600 desem. 650 de maksimum ise 600 deki değerde daha büyük olmaz mı diğerlerine göre. O aralıktaysa en fazla o zaman 600 alsam.*
Mülakatçı: *O zaman fonksiyonu artan olarak mı göz önüne aldın?*
Ece: *Fonksiyonu artan olarak aldım.*
Mülakatçı: *Yani 400 deki değeri mi büyük 600 deki değeri mi?*
Ece: *Hım onu da bilmiyorum değil mi? 650 maksimum değeri fonksiyonun ama o aralıkta artan mı azalan mı onu da bilmiyoruz. O da var. Iı ıı bir şey diyemiyorum.*
Mülakatçı: *Tamam Ece.*

Ece'nin Problem 5'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Ece'nin akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürüii) Aritmetik işlemler (transformasyonlar) ve sayılar (nesneler) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Ece çözüm prosedüründe izleyeceği adımları netleştirmek amacıyla, bir gerçek dünya durumu düşünmüştür. Modelleme özelliğini kullanarak matematiksel bileşenleri göz önünde bulundurup gerçek dünya ile doğru bir ilişkilendirme yapmıştır. 50 TL'ye mal ettiği malı, 100 TL'ye satarak 50 TL kâr edeceği fikrinden hareketle çözümde ulaşmak istediği kâr fonksiyonuna ulaşmıştır. Çözüm yoluna dair bundan sonraki adımlarda ise verilen "en fazla" ifadesinden dolayı ilk olarak limit almayı düşünmüştür. Ancak bundan vazgeçip maksimum minimum problemlerinde kullanılan algoritmaya karar vermiştir. Aritmetik hatalar yaparak bulduğu 700 değerinin anlamının araştırmacı tarafından sorgulanması karşısında, "*off ben neyi buldum*" şeklinde kararsız kalması, bu konuda matematiksel olarak yüzeysel bir akıl yürütme düşüncesi sergilediğinin göstergesidir. Benzer şekilde, üretimin maksimum değeri olarak bulduğu 650 birimi, verilen aralığa göre yorumlayamaması ve 650'ye yakınlığından dolayı 600 birimi doğru cevap olarak belirtmesi yüzeysel bir düşünme örneğidir. Ayrıca bu yorum matematiksel özellikler de taşımamaktadır.

S3: Ece ortaya koyduğu akıl yürütme sürecinde öğrenme çevresinden edindiği bir algoritmayı takip etmiştir. Soruda verilen "*yıllık karın en fazla olması için*" ifadesinden hareketle karar verdiği bu algoritmanın adımlarını, birebir uygulamış ve değerler bulmuştur. Ancak ilk etapta elde ettiği değerin matematiksel olarak ne anlam ifade ettiğinden emin olamamıştır. Aritmetik işlemlerin kontrolü sonucu başka bir değer olan 650'yi bulmuş, fakat bir sonuca ulaşamamıştır. Çünkü verilen aralığa aykırı bir değer elde etmiştir. Bu aşamada ve genel olarak tüm akıl yürütme sürecinde bir tartışma ortamı oluşturamamıştır. Algoritmayı uygulamakla yetinmiş, matematiksel olarak anlamlı yorumlar yapamamıştır. Tüm bu sebeplerden dolayı Ece'nin bu sorudaki akıl yürütme becerisi türü AR'dir.

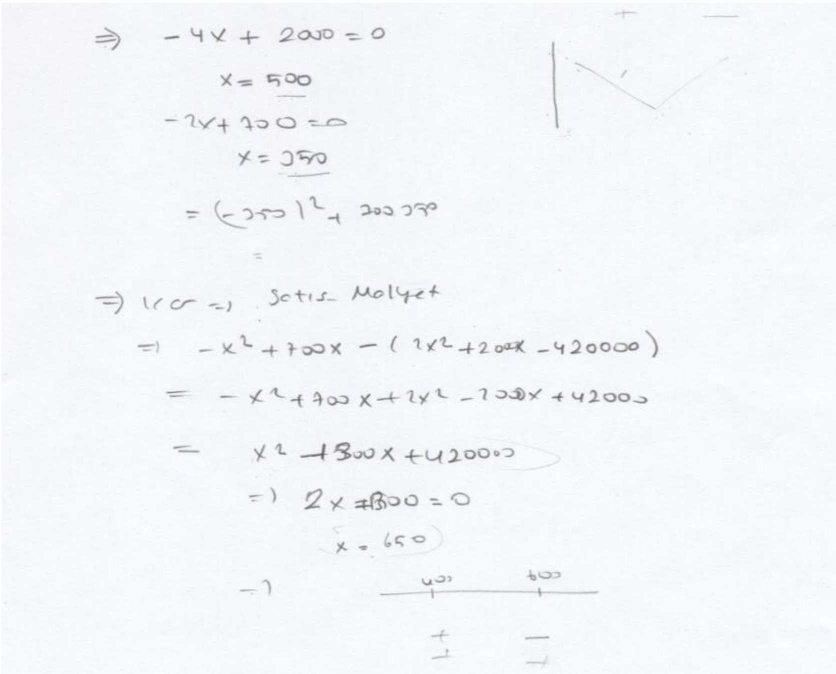
S4: Ece'nin akıl yürütme sürecinde karşılaştığı zorluk; algoritmayı bilmesi ancak konuya hâkim olamamasıdır. Bunun ilk göstergesi, algoritmayı uyguladıktan sonra bulduğu 650 değerinin x'in mi yoksa fonksiyonunun mu maksimum değeri olduğu noktasındaki kararsızlığıdır. Buna karar verdikten sonra bulduğu 650 değerinin belirtilen aralığa uymaması, onu yeni bir karmaşaya sürükleyerek matematiksel olarak anlamlı olmayan bir yorum yapmasına neden olmuştur. Çünkü bugüne kadar ki öğrenme çevresinde bu algoritma her zaman direkt cevaba götürmüştür. Ancak aksi bir durumla karşılaşan Ece, öncelikle yaptıklarını kontrol etmiş, sonrasında da derinlemesine düşünme ve tartışma ortamı oluşturmadan doğruluğundan emin olmadığı içgüdüsel bir sonuca varmıştır.

Ece'nin Problem 5'e Ait Sınıflandırma Kodu

Ece'nin Problem 5'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{ygy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.5.4. Derya'nın problem 5'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Derya'nın Problem 5'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.32, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.32. Derya'nın problem 5'e ait çalışma kağıdı

Derya'nın Problem 5'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Derya: *(öğrenci soruyu içinden sessizce okumuştur.) hocam kar olması için ilk önce, kar zaten bununla bunun arasında ki farktır. Benim elde edebileceğim en büyük fark budur.*

Mülakatçı: *Ne ile ne arasındaki?*

Derya: *Hocam maliyetiyle satış fiyatı arasındaki fark bana karı verir. Hani ben bunu ne kadara mal etmişim ne kadara satmışım buradan elde ettiğim fark benim karımdır. Her yıl kaç birim üretim yapılmalıdır. Hocam ilk önce bunun türevini alsam. En fazla maksimum… Maksimum minimum değil de hocam bu artış azalış galiba. Bunun türevini alayım da hocam ben.*

Mülakatçı: *Hangisinin türevini alıyorsun?*

Derya: *Hocam önce bir maliyetinin türevini alayım.* $-4x + 2000 = 0$ *hocam buradan* $x = 500$ *çıkar. şimdi bir de satış fiyatının türevini de alsam* $-2x + 700 = 0$ *den*

$x = 350$ derim. $x, 400$ ile 600 arasında diyor hocam bana hani x birim ürün üretilmektedir. Hocam işte bunun türevinin grafiğinin artış azalışına göre artışında en fazla değeri bulmam lazım ki, en fazla ne kadar kar yapıldığını söylemem için. Ne demek istediğimi anladınız mı?

Mülakatçı: *Bir daha anlat.*

Derya: *Hocam mesela ben türev aldıktan sonra en fazla değerimi bulmam lazım ki azalıncaya kadar…*

Mülakatçı: *Hangisi için en fazla değeri bulman lazım?*

Derya: *Satış için hocam. …karın ne kadar olduğunu belirleyebileyim. Hocam mesela azaldığı zaman ki değeri zaten en az olan değeridir. O zaman benim üstteki değerim en fazla karımı gösteren değer olacak. x'de bunlar arasında bir değer olacak. Yıllık karın en fazla olabilmesi için… Şimdi hocam burada… tablo… (öğrenci soruyu tekrar okur içinden)*

Mülakatçı: *Tablo mu çizeceksin?*

Derya: *Hocam tablo derken, mesela artış azalışı belirlemek için diye düşünüyorum ama şuan onu doğru mu düşündüğümü bilmiyorum. Hani hocam artış azalışa göre ben kar yapıyorum ya, birinci türevin işaretine de bakarak ben artış azalış diyebiliyorum ya hocam ona göre düşündüm ama ne kadar doğru bilmiyorum şuan. Hocam şimdi bu mesela birinci türevini aldığımda işareti $-$ 'ya… ama işte işareti belirleyemiyorum. Yani $-$'de olduğu için azalacak daha sonra hocam artacak diye düşünüyorum. Hocam hani işaret belirlerken…*

Mülakatçı: *Farklı denklemlerde mi düşünüyorsun?*

Derya: *İşte hocam onu kestiremedim şuan. Maliyette satışta… Karım satışta olması lazım ki kar edebilmem için satışa bakmam lazım ama hocam işte… (soruyu tekrar okur içinden) hocam dediğim gibi burada şeyi tam olarak kestiremedim. Bu şey de değil hani bir türevin grafiğine bakıyorduk ya hani artış azalışı belirleyeceğim. O artış azalışta da en yüksek nokta benim x yılda yaptığım kar miktarını gösterecek. Öyle düşünüyorum hocam ama o noktaya satıştan geleceğimi düşünüyorum. Yani satışıma göre ben karımı belirlerim ya. ama hocam türevde tabloyu nasıl oluşturacağım şuanda kafamı toparlayamadım. Hani mesela ilk önce azalacak mı artacak mı ona göre en fazla noktamı belirlemem lazım ya veya ilk önce azalıp artarsa ya 400 ya 600 ya da 400 ile 600 arasında bir değerdir. Hocam onu bulmam lazım ki eğer artış olduğu zaman en* *yüksek noktaysa* 400*' dür; veya azalmaktan başlıyorsa en yüksek nokta* 600*' dür. O şekilde düşünüyorum. Ama işte hocam tablonun işareti… ama hocam ben bu bulduğum değeri ifadem de yerine yazdığım zaman* $(-350)^2 + 700.350$ *'ya hocam, bu bundan daha büyük bir değer… ama yok zaten pozitif çıkar bu sonucum. Sonucum da artı çıkar (öğrenci bir daha okur soruyu)… Pardon hocam bulduğum değeri maliyette yerine yazarsam sonuç eksi ise zarardayım, artı ise kardayım diye düşünüyorum. ee hocam bunu yerine yazdığım zaman bu zaten negatif çıkar.*

Mülakatçı: *350' yi maliyette mi yerine yazıyorsun?*

Derya: *Evet maliyet denkleminde yerine yazarsam sonuç negatif çıkar hocam. Bu hani başlangıçta artandan azalana giden bir grafik olur. Hani mesela* $+$ *dan* $-$ *ye gider hocam.*

Mülakatçı: *Ona nasıl ulaştın?*

Derya: *İşte hocam ona kök bulmam lazım onu düşünüyorum. Hani başlangıçta bulduğum bir değer sonucunda negatif çıktığı için hocam zarardayım. Zarar da olduğum zaman da* $-$ *olur diye düşünüyorum. Ama başlangıçta bulduğum değer daha fazla olduğu için,* x *zaten* 400 *arasında olduğu için, en fazla olması için…*

Mülakatçı: *Başlangıç dediğin de kastın şu mu;* $x = 350$*'yi satış fiyatında yerine yazdığında pozitif, maliyette yerine yazdığın da negatif o yüzden artıştan azalışa gitmesi mi?*

Derya: *Evet hocam öyle diyorum. Artıştan azalışa gidiyor diyorum ama hocam farklı denklemler de kullandığım için mantıklı gelmedi. Değil mi hocam sonuçta bir denklem kullanmam lazım. Çünkü hocam burada satış fiyatı böyle çıkıyor, alış fiyatında da zarardaymışım gibi oluyor. o yüzden hocam bu değerimin en fazla değeri* 400 *olması lazım. Karın en fazla olması için hocam benim en düşük değeri almam lazım maliyette. Çünkü hocam fazla aldığım zaman aradaki fark daha fazla olacak ve zarara düşer. O yüzden hocam bence en fazla olması için 400 diye düşünüyorum bu değerimi. Ama hocam ne kadar doğru bilmiyorum. Yani hocam* x *bu değerler arasında ise en karlı olabilmesi için* 400 *olması lazım. Çünkü* 600 *olduğunda aradaki fark daha da açılır bu daha da zarar olur. Ama bize en fazla karın olması dediği için…*

Mülakatçı: *Aradaki fark nerede açılıyor?*

Derya: *Hocam mesela bu değeri yerine koyduğumuz zaman negatif oluyor ya, değerler daha negatif olduğu zaman sonucum düşmez mi zarar olmaz mı?*

Mülakatçı: *Yani satışla maliyetin arası mı açılıyor?*

Derya: *Evet hocam.*

Mülakatçı: *Arası açıldıkça kar artmış olmaz mı?*

Derya: *Yok hocam öyle değil. Ben bu bulduğum değer kar değerim ya… bir dakika* 400 *ü burada yazsam… Yok hocam bunun negatife düşme değeri artıyor benim dediğim. Hani daha da küçülüyor. Ben diyorum ya bu kadara satarsam bu kadar kar ederim diye. Ama dediğiniz gibi* 600 *olsa…*

Mülakatçı: *Peki bana maliyet, satış, kar bu kavramların ne demek olduğunu söyler misin? Nasıl bir bağlantı var üçünün arasında?*

Derya: *Maliyet, satış, kar. Hocam ürünün maliyeti bana mal olan fiyatıdır. Benim satış fiyatım ise karını da katarak ürünü sunduğum fiyatımdır. Bu ikisinin arasında satış fiyatı ile maliyet fiyatının arasındaki fark ise benim karımdır. İşte hocam ben diyorum ki bu değerlerin türevlerini alayım, en küçük en büyük değerlerinin neye tekabül edeceğini bulayım, bunları ifade de yerine yazayım, aradaki fark açıldıkça benim karım ve şey oranımı bulayım satış fiyatımı. Eğer fark zaten bu iki değer artıyorsa ben kardayımdır; zaten azalıyorsa ben zarardayımdır.*

Mülakatçı: *Peki burada maliyet ve satışın türevlerini aldın sıfıra eşitledin iki değer buldun. Bunlar maksimum yani en fazla değer mi en küçük değer mi?*

Derya: *Hocam bunlar türevde aldığım değerler… Maksimum minimumluk giriyor… O da değil de hocam aslında…*

Mülakatçı: *Yani dedin ya türevini alırız en fazla mı en düşük mü onu buluruz. Bunlar hangisi?*

Derya: *Hocam mesela bunların ikisi birbirinden farklı bir denklem olduğu için sıfıra eşitlediğim de en yüksek değeridir hocam. En küçük, çünkü bundan daha küçük değerler…(öğrencinin kafası karışmıştır.). Mesela* x 400 600 *arasında bir değer ya, o zaman hocam benim bulduğum değerler bu ifadede ki en küçük değerler dersem* 500*'den büyük olma durumu da var, 350 den büyük olma durumu da var. Ama işte bu değer farklı,* x*'e bulacağımız değerler de farklı. Çünkü benim bulduğum bu değerlerin illa* x*'in arasında olmasına gerek yok değil mi hocam bunlar birbirinden farklılar. Siz sadece* x*'i o aralıkta tanımlamışsınız. Yıllık karın en fazla olabilmesi için… Hocam işte benim kurduğum mantıkla… Ama denklemi kuramıyorum. Hani diyorum ya hocam mesela artmaya azalmaya göre işarete göre… Ben birinci türevi alırım onun işaretine* *bakarım. Artışa azalışa göre, artıştan azalışa varsa…*

Mülakatçı: *İşte bende diyorum ki onu göster bana*

Derya: *İşte hocam onu nasıl yapacağımı tamamen… Normal türevini alamam çünkü o zaman kendimle çelişmiş olurum. Normal türevini zaten almadan işaret belirleyemem. İlk önce bir türevini almam lazım ki birinci türeve göre zaten ben artanlığı azalanlığı belirliyorum ki ona göre işaret belirlemem lazım. O tamam da nasıl işte… Hocam aslında ben kar denklemini satış-maliyet diye bütün denklem yapsam ondan sonra yapsam. Ayrı ayrı denklemler le değil.*

Mülakatçı: *Niye?*

Derya: *Kar değerini bulabilmek için. Ben diyordum ya hocam satış – maliyet karımı verir diye. Ben bu ikisini birbirinden çıkararak kar denklemini bulmak için bir denklem haline getireyim ondan sonra işlemimi yapayım. Şu an öyle bir şey aklıma geldi hocam ne kadar doğru bilmiyorum. Hani tek bir denklem üzerinden hareket edebilmek için de.* $(-x^2 + 700x - (2x^2 + 2000x - 420000$*)). Hocam şimdi böyle bir kar denklemimiz oldu* $(x^2 - 1300x + 420000)$*. Buna kar denklemimiz dersek şimdi de bunun türevini alayım hocam* $2x - 1300 = 0x = 650$ *çıkar. Olmadı. Hocam bunu getirip denklemde yerine yazmam olmaz… Hocam aslında bu bulduğum denklemde ben* 400*'ü yerine yazdığım zaman birinci ifade de pozitif mi negatif mi geldiğini; ikinci ifade de pozitif mi negatif mi geldiğine bakıp ondan sonra grafik oluşturup artanlık azalanlığına bakabilir miyim?*

Mülakatçı: *Dene aklındakileri.*

Derya: *Ama o zaman da* x*'in denklem de nasıl geleceğini bilmiyorum. Uzun ya hani hocam işlemler negatif mi pozitif mi gelir diye.*

Mülakatçı: *Kar denkleminde mi yerine yazacaksın* 400*'ü?*

Derya: *İşte hocam* 400*'ü yerine yazayım diyorum sonra* 600*' ü. İşte o aralıkta eksi mi artı mı veya azalıp artıyor mu ona göre kar değerimi bulayım.*

Mülakatçı: *Peki aradaki değerlerdeki davranışını nasıl belirleyeceksin? Mesela 400 için 100 çıktı, 600 için 200 ama aradaki 500 değeri için de 250 çıkmış olsa. Ona nasıl karar vereceksin?*

Derya: *İşte o yüzden de hocam şeye bakmam lazım. Direk değer de koyamıyorum. Yani türevinden sonra olması lazım ki ben belli bir değer diyeyim artıp azaldığına. Türevde yerine yazsam hocam mesela türevini aldıktan sonra… Ama türevde nasıl yerine* *yazayım ki. Yok hocam dediğim gibi olmadı. Hani o düşündüğüm saçma oldu yani. İşte hocam başta dediğim ifade de ama orda da hangi denklemden gidilecek. Kar olması için ikisinin bir denklem olması lazım. Sonra onun ben türevini alacağım. Bulacağım değer en fazla çıkacağı değerdir. Bu aralıktaki değerlere göre de karı belirleyeceğim. Ama hocam o dediklerimi şeye dökemiyorum. Hangi denklemde yapacağımı şuan işleme şey yapamadım yani.*

Mülakatçı: *Niye dökemiyorsun?*

Derya: *Çünkü hocam ne demek istediğini tam anlamadım.*

Mülakatçı: *Soruda mı?*

Derya: *Soruyu anladım ama dökememe sebebimi şuan şey yapamadım hocam. İşte hocam bu konuları da unutmuş olabilirim üzerinden zaman geçmiş ya.*

Mülakatçı: *Var mı başka düşüncen?*

Derya: *Hocam şimdi 650 değil onu biliyorum. Bu böyle bir yoldu ama dediğim şey işte hocam yerine değerler verdiğim zaman başta düşündüğüm şeydi. Mesela bu ifadeleri yerine yazdığım zaman kar denkleminde ama işte dediğiniz gibi 400 ile 600 arasında 500 de var. Türevini alıp yerine yazdığımda artış azalışı yazacağım. Şuan ki fikrim o. Ama hocam dediğim gibi artış ve azalış noktalarını nasıl belirleyeceğimi bulamıyorum.*

Mülakatçı: *Tamam Derya*

Derya'nın Problem 5'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Derya'nın akıl yürütme süreci; i) Çözüm prodesürü, ii) Türev kavramı, aritmetik işlemler (transformasyonlar), sayılar (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Derya çözüm prosedürünü, belirlediği bir algoritma üzerinden ilerletmeye çalışmıştır. Bu algoritma, fonksiyonun türevini alıp 0'a eşitleme ve çıkan değere göre işaret tablosu oluşturup artanlığa-azalanlığa bakmak şeklindedir. Ancak bu algoritmanın tam olarak nasıl kullanılacağı, hangi durumlarda nasıl yorumlara varılacağı gibi kavramsal konularda karmaşa yaşamıştır. Maliyet ve satış fonksiyonlarına bu algoritmayı uygulamakla başlamış; en büyük kârı, satış fonksiyonundaki artanlık ve azalanlıktan bulmaya çalışmıştır. Ancak kavramları zihninde yerine oturtamadığı için işaret tablosunu oluşturamamış ve yorum yapamamıştır. Ardından satış için türevde bulduğu değeri tekrar satış ve maliyet fonksiyonlarında yerine yazıp sonucun pozitif ya da negatifliğine göre kâr ya da zarar yorumu yapmaya çalışmıştır. Buradan da bir sonuca varamayan Derya, 400 ve 600 değerlerini satış ve maliyet fonksiyonlarında yerine yazarak kâr ile ilgili yorumlara varmıştır. Son olarak kâr fonksiyonunu düşünüp algoritmayı bir de buna uygulamış ve bulduğu 650 değeriyle ilgili bir yorum yapamayarak 400 ve 600 değerlerindeki kâr fonksiyonunun rolünü incelemek istemiştir. Uyguladığı algoritmanın kavramsal olarak ne ifade ettiğinden habersiz olan Derya işlem ve düşünce yoğunluğu içinde kalmıştır. Yaptığı tüm bu uygulamalar ve yorumlar matematiksel olarak anlamlı değildir. Araştırmacının sorusu karşısında kâr ifadesini kavramsal olarak doğru açıklamasına rağmen, kullandığı algoritma ile bu kavramı bağdaştıramamıştır. Matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilemiştir.

S3: Derya akıl yürütme sürecinde, öğrenme çevresindeki tecrübelerle elde ettiği bir algoritmayı, soruda verilen yapılara tek tek uygulayarak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Bu sürece kavramsal olarak hâkim olmadığı için, yerinde ve matematiksel olarak anlamlı yorumlar yapamamış ve istediği sonuca ulaşamamıştır. Uyguladığı algoritmayı ve sonuca ulaşamama sebebini şu şekilde ifade etmiştir: "*kâr olması için ikisinin de bir denklem olması lazım. Sonra onun ben türevini alacağım. Bulacağım değer en fazla çıkacağı değerdir. Bu aralıktaki değerlere göre de kârı belirleyeceğim. Ama hocam o dediklerimi şeye dökemiyorum.*". Derya'nın bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü olarak, bir algoritmanın uygulandığı ancak kavramsal olarak yorumlar ve düşüncelerin derinlemesine bir şekilde sergilenmediği akıl yürütme türü olan AR belirlenebilir.

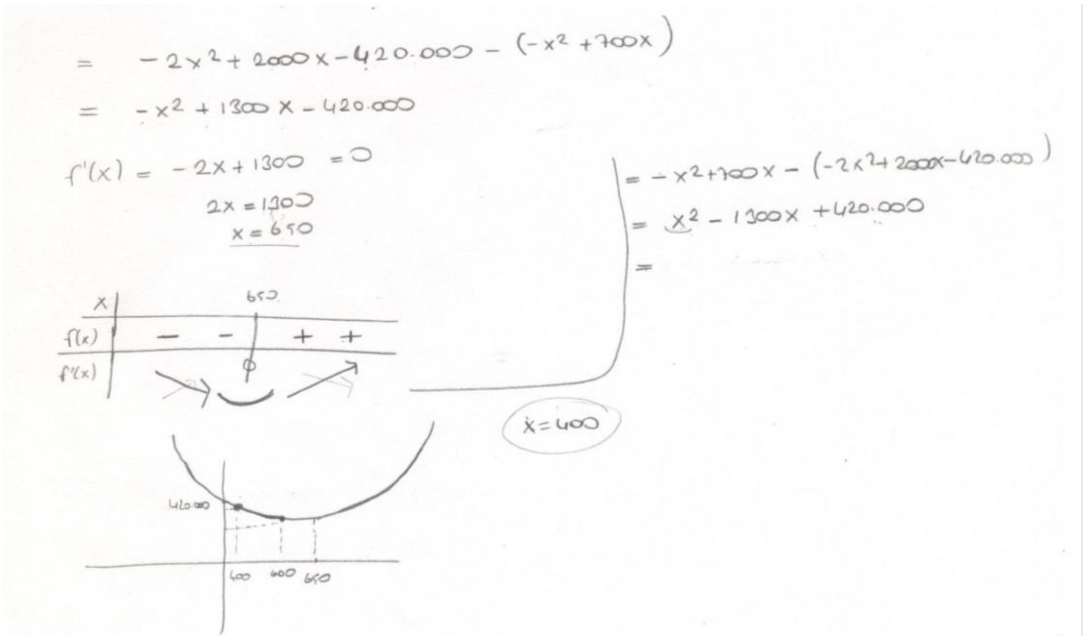
S4: Derya'nın sergilediği akıl yürütme sürecinde; kullandığı matematiksel kavramların temel özelliklerine tam olarak hâkim olmayışı ve öğrenme çevresinden edindiği öğrenme tecrübeleri onun güçlük yaşamasına sebep olan önemli nedenler arasındadır. Örneğin, türevin işlemsel boyutunu uygulamasına rağmen kavramsal boyutunda sıkıntı yaşamıştır. Türev kavramını sadece artanlık-azalanlık kavramına sıkıştırmıştır. Buradan hareketle de etkili yorumlar yapamamıştır. Yine öğrenme çevresinde karşılaştığı sorularda, uyguladığı türev alma algoritmasıyla elde ettiği değer, onu direkt sonuca götürürken; bu soruda beklenen durumla karşılaşmamıştır. Bulduğu 650 değeri verilen aralığa uymamaktadır. Tüm bu durumlar Derya'nın zihinsel karmaşa yaşamasına neden olmuştur. Sonuç olarak da çözüm prosedürünü tamamlayamamıştır.

Derya'nın Problem 5'e Ait Sınıflandırma Kodu

Derya'nın Problem 5'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **AR**$_{\mathbf{xgy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde herhangi bir sonuca ulaşılmadığından x (belirsiz); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.5.5. Leyla'nın problem 5'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Leyla'nın Problem 5'eait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.33, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.33. Leyla'nın problem 5'e ait çalışma kağıdı

Leyla'nın Problem 5'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Leyla: *(öğrenci soruyu sessizce içinden okumuştur.)* $-2x^2 + 2000x - 420000 - (-x^2 + 700x)$

Mülakatçı: *Sorudan ne anladın Leyla?*

Leyla: *Şimdi üretilen ürünlerin satış fiyatını vermiş karı soruyor. Bu kar oranlarında hiç iyi değilimdir ama… Yıllık karın en fazla olabilmesi için her yıl ne kadar üretim yapılmalı. Diyorum ki hocam ben üretimin maliyetiyle satış fiyatını çarpsam bir denklem elde etsem.*

Mülakatçı: *Neden çarpma işlemini kullanıyorsun?*

Leyla: *Hım maliyet… Olmaz yok çarpmam yanlış olur. Ben üretimin sayısı diye düşündüm ilk denklemi ama hayır maliyeti diyor. Satış fiyatı ise bu, o zaman birbirinden farkını çıkarsam. Fark olursa hani satış fiyatı ile maliyet arasındaki fark bize karı verir. İki denklemi birbirinden çıkarsam* $-x^2 + 1300x - 420000$ *yani yaklaşık olarak kar bu. Bu karın en fazla olabilmesi için her yıl kaç birim üretim yapılmalı. Yani bize* x*'in maksimum değerini soruyor gibi. Maksimum değerini de türev alsak, yine fonksiyon tablosu oluşturarak artan azalanlıktan…* $f'(x) = -2x + 1300$ *olur bunu da 0'a eşitlersem* $2x = 1300$ *olur* $x = 650$ *olur.*

Mülakatçı: *Bulduğun bu 650 nedir?*

Leyla: *Şimdi bu 650 ya minimum ya maksimum değerdir. (öğrenci bulduklarını işaret tablosunda yerine yazmaktadır.) burası* $f(x)$ *olsun burası* $f'(x)$ *olsun 650 için fonksiyon şöyle kolları aşağı bir parabol olduğu için… Kökleri? Köklerini de bulamam. Yani şurası* $-$ *olacaktır büyük ihtimal şurası da* $+$.

Mülakatçı: *Karı bulmak için ne yaptın bir daha anlatabilir misin?*

Leyla: *Dedim ki hocam maliyetten satış fiyatını çıkarırsam… Maliyet sattığım fiyat… Hım tam tersini yapmam gerekirdi satış fiyatından maliyeti çıkarmam gerekirdi.*

Mülakatçı: *Neden?*

Leyla: *Çünkü eğer bir kar varsa satış fiyatının daha yüksek olması lazım maliyetten. O zaman bundan bunu çıkarmam gerekir. Tam tersi desem* $-x^2 + 700x - (-2x^2 + 2000x - 420000)$ *'den bu sefer* $x^2 - 1300x + 420000$ *gelir. Yine aynı şeyleri düşünürüm ama bu sefer fonksiyon tablomda negatif ya da pozitif değerler değişir. Buradan* x*'in köklerini zor bulurum. O zaman şurası* $+$ *desem* 650*'den yukarısı* $+$*, diğeri de – olsa; azalandan artana geçecek, yani burası benim minimum değerim olmuş olacak bu sefer. Bence şu aralık önemli…*

Mülakatçı: *Nasıl bir yol izleyeceksin.*

Leyla: *x değeri için şunla şunu (400 ve 600) yerine koysam çünkü 650 bu aralıkta değil. Hangi değer için büyük olan değer bence karın en fazla olması için bizim ihtiyacımız olan değer olur.*

Mülakatçı: *Karda mı yerine koyacaksın?*

Leyla: *Evet. Yıllık karın en fazla olması. Şimdi desem ki ikisini ayrı ayrı yerine koysam hani hangisi küçük hangisi büyükse en fazla olması için bizim büyük değerlere ihtiyacımız vardır. Mesela 400 koyduğumda daha büyük çıkıyorsa x'i 400 alırım. 400 aldığımda bana her yıl kaç birim üretim yapılmalıdır dediği için sonucum o olur herhalde. Çünkü x birimi veriyor zaten.*

Mülakatçı: *Peki aradaki bir değer de daha yüksek çıkmışsa 500 de mesela 520 de. Onu nasıl çözeceğiz hangisinin en büyük olduğuna nasıl karar vereceğiz.*

Leyla: *Aslında o fonksiyonun grafiğiyle alakalı da yani artanlık ya da azalanlığa göre. İşte grafiğin köklerini bulamadığım için.*

Mülakatçı: *Peki bulduğun 650 nedir?*

Leyla: *O fonksiyonun türevinin kökü. 650'de minimum olduğuna göre şöyle bir şey olacaktır aslında. Çünkü x'e 0 verdiğim zaman şurası 420000 olur. Şurası da 650 dir. x değerlerine bakarsam şurası 400 şurası da 600 gibi bir şey olur. Şimdi şurası da azalan bir şey olduğu için o zaman en büyük değeri 400 de alır.*

Mülakatçı: *Emin misin peki 400 de en büyük olduğuna?*

Leyla: *Yani şu aralıkta istediği için. x değerleri için tablo da y değerlerine karşılık gelen değerlere baktığımız zaman yani 400 için daha büyük bir değer olacaktır yani en büyük değer olacaktır. $x = 400$ dür bence.*

Mülakatçı: *Fonksiyon o aralıkta azaldığı için mi?*

Leyla: *Evet fonksiyon azaldığı için en fazla 400 de en az 600 de aralık için düşündüğümüz zaman yıllık kar en fazla olur.*

Mülakatçı: *Tamam Leyla.*

Leyla'nın Problem 5'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Leyla'nın akıl yürütme süreci i) Çözüm prosedürü ii) Aritmetik işlemler (transformasyonlar), sayılar (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Leyla, akıl yürütme sürecinde kullanacağı satış fiyatı, maliyet fiyatı, kâr gibi kavramların anlamlarını kendi zihin süzgecinden geçirerek kullanmıştır. Örneğin kâr fonksiyonunu bulurken yaptığı hatayı yine kendisi düşünerek düzeltmiştir. Uygulamış olduğu algoritma ve sonrasında yaptığı yorumlar matematiksel olarak anlamlı ve kabul edilebilirdir. Leyla maksimum minimum problemleri için kullandığı algoritmadan elde ettiği 650 değerinin maksimum ya da minimum olup olmadığını tablo ile incelemiş; verilen aralığa göre bulduğu değeri yorumlamıştır. Öyle ise 650 değerini bulana kadar ki akıl yürütme sürecinde yüzeysel; sonraki yorumlamalarında ise biraz daha derinlemesine bir düşünce sergilemiştir.

S3: Soru cümlesinde geçen "*kârın en fazla olabilmesi için her yıl kaç birim üretim yapılmalıdır*" ifadesinden hareket eden Leyla, "x′ in maksimum değerini soruyor gibi maksimum değerini de türev alsak." şeklinde düşüncesini belirtmiştir. Bu sebeple verilen soruda çözüm yolu oluştururken kârın en büyük değerini bulabilmek için maksimum minimum problemlerindeki algoritmayı kullanmıştır. Elde ettiği kâr fonksiyonun türevini alıp 0′a eşitleme adımlarını doğru bir şekilde yerine getirmiştir. Ancak bu süreçte bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. O halde bu soru için Leyla'nın akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir.

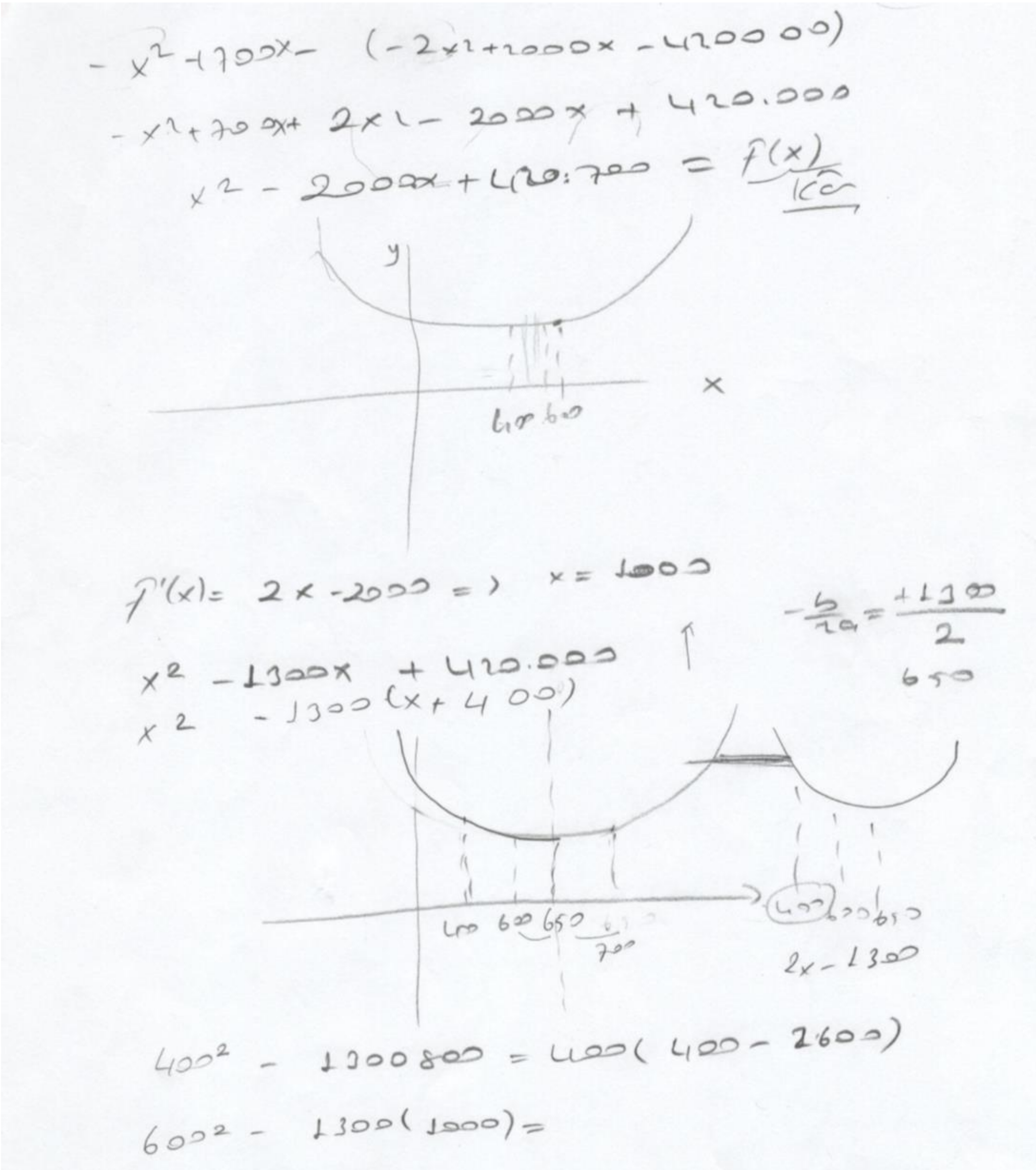
S4: Leyla, bugüne kadar ki öğrenim hayatından edindiği tecrübelerle soruya yaklaşmış ve bu tecrübelerin ışığında bir algoritma hatırlayıp uygulamıştır. Uyguladığı algoritmayla elde ettiği 650 değerinin, onu sonuca götürmemesi bu soruda yaşanılan bir güçlüktür. Bu durumun ardından verilen aralığın uç kısımlarına göre sonuca varmayı düşünmüştür. Ancak o esnada araştırmacı verilen aralıktaki ara değerlerini de düşünmesini sağlayacak bir soru yöneltmiştir. Bu aşamadan sonra elindeki bileşenleri doğru bir şekilde yorumlayan Leyla istediği sonuca ulaşmıştır. Matematiksel olarak anlamlı olan bu yorumlar, Leyla'nın konuyla alakalı kavramsal bilgiye sahip olduğunun göstergesidir.

Leyla'nın Problem 5'e Ait Sınıflandırma Kodu

Leyla'nın Problem 5'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{dgx}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak hem yüzeysel hem de derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden x (belirsiz) olarak kodlanmıştır.

4.2.5.6. Hikmet'in problem 5'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hikmet'in Problem 5'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.34, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.34. Hikmet'in problem 5'e ait çalışma kağıdı

Hikmet'in Problem 5'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Bir günlük hayat sorusu Hikmet sesli düşünerek çözmeni istiyorum.*

Hikmet: *(Öğrenci sessizce soruyu okudu.) en fazla karı sormuş. Satış fiyatı fark maliyet desek ortaya bir fiyat çıkacak da, buradan da verilen ifade bir parabol olacak. Parabol olduğu içinde negatif değerli olduğu için aşağı doğru olacak, tepe noktası da bize en büyük değerini verecek. Oradan da bulabiliriz. Yani direk şöyle yapsak;* $-x^2 + 700x - (-2x^2 + 2000x - 420000)$.

Mülakatçı: *Neye ulaşacaksın bu işlemle?*

Hikmet: *(Öğrenci tekrar soruyu okur) ya buradan hani karı biz bir parabol olarak bulacağız da buradan hareket etmemiz lazım. Kafamı karıştıran şey şu, sonuçta verilen bir parabol olacak ama burada* $+2x^2$ *buradan* $-x^2$ *gelecek ve + bir parabol olacak. + olduğu zaman da yukarı doğru bir parabol olacak ki tepe noktasını bulduğum zaman ben en küçük değerini bulmuş olurum. Yani benim düşündüğüm ters bir paraboldü. O yüzden şey yapamadım…*

Mülakatçı: *Devam et bakalım belki başka şeyler çıkar.*

Hikmet:$-x^2 + 700x + 2x^2 - 2000x + 420000$ *Buradan da* $x^2 - 2000x + 420700 = f(x)$ *bir ifade gelecek.*

Mülakatçı: *Bu nedir?*

Hikmet: *Bu bulduğumuz kar miktarı olması lazım da… En fazla olması için… Şöyle bir ifade olacak (öğrenci parabolü çizer). Bize bu kar fonksiyonu veriyor. Kar fonksiyonunun en büyük değerini istiyor. Bunun en büyük değerini nasıl bulabiliriz? Hım burada maksimumu filan yapabiliriz sanki. Türevini alsak* $f'(x) = 2x - 2000 \rightarrow x = 1000$ *anlamına gelir.*

Mülakatçı: $x = 1000$ *Buldun. Bulduğun bu değer nedir?*

Hikmet: *Bu kritik noktası da buradan bir şeyler yapmaya çalışıyorum ama… Yani şu bize verdiği kar, her yıl en fazla olması için kaç birim üretim yapılmalıdır diyor. Ya belki fonksiyonumuzda bir sorun olabilir şöyle ki; verilen fonksiyon kar üzerine bir fonksiyon ama bize diyor ki kar var ama bunun her yıl kaç birim üretim yapılarak elde edilmesi gerekiyor diyor da yani onu çıkaramadım tam olarak. (Öğrenci soruyu tekrar tekrar okuyup düşünmektedir) hım tam tersini yapacağız galiba çünkü üretilen ürünlerin satış fiyatı diyor. Zaten bizim bulduğumuz şuranın apsisi, yani minimum değeri. Hım şurayı yanlış yapmışız, pek bir şey değişmez ama* $x^2 - 1300x + 420000$.

Şimdi buradan da pek bir şey değişmez ki. Yani benim aklımı karıştıran şey parabolün yukarı doğru gelmesi ki buda tepe değeri bulduğumuzda minimuma ulaştırır bizi.

Mülakatçı: *Maksimuma nasıl ulaşılır… Peki* x *için bir aralık vermiş onu gördün mü?*

Hikmet: *Evet. Ya buradan zaten türev aldığınız zaman* 650 *çıkıyor.*

Mülakatçı: *Bu* 650 *yine minimum mu?*

Hikmet: *Yine minimum çıkıyor çünkü parabol yukarı doğru. Şimdi* 650 *dediğiniz gibi şey yapmıyor* 400 600 *arası olduğu için sağlamıyor.(öğrenci sessizce düşünür.) Şuan* 400 600 *'ü kullanmaya çalışıyorum ama onu da nerede kullanacağımı bulamadım. En fazla olması için diyor. Yani bunun en fazla olması lazım da o nasıl olacak. Çünkü bir parabol var. Şöyle düşünelim hatta şurası 400 olacak şurası 600 yine dışarıda kalacak. Yani aslında bulmaya çalıştığımız değer 400 ile 600 arasında olması lazım. Bir yerde hata yaptık ama nerede.*

Mülakatçı: *Yaptığınız sorular da genel de nasıl oluyordu?*

Hikmet: *Ya yaptığımız sorularda mesela tek bir miktar çıkıyordu veya şurası – oluyordu. Öyle bir alışkanlık olduğu için belki ondan olabilir yani. Yani şöyle de diyebiliriz aslında. Sonuç olarak 400 ile 600 arasında verildiği için fabrika kar edecek sonuçta 600 diyebiliriz* x*'e de bütün işlemler boşa gider yani.*

Mülakatçı: *Neden?*

Hikmet: *Yani en fazla 600 değerini alıyor ya zaten bizim bulduğumuz minimumda 600'lerde bir şey*

Mülakatçı: *Ona en yakın değer mi diyorsun?*

Hikmet: *Yani öyle düşündüm ama… Şimdi bir de aralık verildiği için bu aralıklardan herhangi biri minimum ya da maksimum da olabilir. Öyle bir şey de yapabiliriz. Mesela burada 600 yazıp ya da burada 600 yazıp deneyebiliriz de yani.*

Mülakatçı: *Maliyet ve satışta mı?*

Hikmet: *Evet. Öyle bir şey de yapabiliriz yani.(öğrenci işlemler yapmaktadır sessizce)*

Mülakatçı: *Maliyet ve satışın arasını açmaya mı çalışıyorsun değerler vererek?*

Hikmet: *Evet. Mesela burada 600'ün karesi desek burası 600.700 gelecek burası pozitif olacak (satış).*

Mülakatçı: *Peki arada bir değer de daha büyük olup olmayacağını kesin biliyor musun? Mesela 500 de…*

Hikmet: *Yani şöyle, mesela bunun en büyük değerine baktığımız zaman* $2x + 700$*'den 350 yapıyor galiba..*

Mülakatçı: *Satış fiyatının en büyük değeri mi?*

Hikmet: *Evet. En büyük değerini 350'de alıyor o zaman ama burada yine 350'yi desteklemiyor. Aynı şekilde buna baktığımızda ne yapıyor 4250 yapıyor o da. Zaten burada da maliyetin en az, satışın en fazla olması lazım. Ki benim bulduğum 350'de satışın fazla olduğu çıkıyor ama bu maliyeti destekler mi bilmiyorum.*

Mülakatçı: *Kar grafiğinden gitsen bir şeyler görür müsün acaba?*

Hikmet: $\frac{-b}{2a}$ *'dan* $\frac{1300}{2} = 650$ *oluyor. yani 650 aldığı zaman en küçük değerini alacak. Ama bizden istenen dilim 400 ile 600 arasındaki dilim. Ya kritik noktasına baktığımız da 650 türevinin, ama desteklemediği için şu şeylere bakalım mesela 400 ile 600 'e bakalım. Arada en büyük değeri alıyorsa o zaman işimize yarayacak diyebiliriz yani. Oda zor olacak biraz ama (öğrenci kar fonksiyonunda 400 ve 600 değerlerini yazıp hesaplamaktadır.).*

Mülakatçı: *400 ile 600'ü yerine koyup sonuçlarını mı karşılaştıracaksın? Peki aradaki değerler nasıl olacak?*

Hikmet: *Evet hocam öyle yapmayı düşünüyorum. Aradaki değerlerden ziyade zaten tek bir kritik noktası var. O da 650. 650'de de minimum alır. Zaten beklenen de o dur çünkü parabol. Parabol olduğu için tepe değeri var. Mesela ters olsaydı en büyük değeri için yani maksimum için konuşacaktık. Ama şuan minimum değeri 650 oluyor. Bir de 600'e bakalım…*

Mülakatçı: *Yani 400 ile 600 arasındaki bir değer de daha büyük çıkma ihtimali var mı?*

Hikmet: *Yok diyebiliriz herhalde. Onu tam bilmiyorum ama. Çünkü şöyle bir şey diyeceğim ama onu da diyemem…*

Mülakatçı: *Peki şöyle bir şey desem sana çizdiğin parabolün özelliği nedir?*

Hikmet: *Parabolün özelliği derken?*

Mülakatçı: *Yani 650 minimum dedin 650'nin sağında solunda nasıl davranır?*

Hikmet: *Hım o şekilde yani simetrik diyebiliriz yani aynı özelliği gösterir diyebiliriz. Yani simetri eksenidir burası evet hım… Simetri ekseni yani parabol şöyle gidiyor o zaman şöyle düşüneceğiz. Şöyle gittiği için 400 de en büyük değerini alır.*

Mülakatçı: *Neden?*

Hikmet: *Ya çünkü şöyle kavisli gideceği için parabol mesela şurası 650 ise şurası 600 şurası 400. Sonuçta şurası artıyor yani. Şurası azalmasına rağmen burası gitgide artıyor yani. 400'e doğru arttığı için 400 diyebiliriz.*

Mülakatçı: *Yani parabol azalan… Başta bunu göremedin ama neden sence?*

Hikmet: *Başta bocaladım hocam. Yani görememe sebebim belki şey olabilir yani böyle soru tipinden ziyade aynı sorulara çalıştığım için. Mesela veriyordu soruyu, benim aradığım da zaten maksimum noktaydı. Maksimum nokta ilk işlemle hemen çıktığı için bende işaretliyordum. Belki ondan olabilir.*

Mülakatçı: *Tamam Hikmet.*

Hikmet'in Problem 5'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Hikmet'in akıl yürütme süreci:i) Çözüm prosedürü, ii) Maksimum-minimum soru tipi kavramı, aritmetik işlemler (transformasyon), sayılar (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Hikmet çözüm prosedürüne başlarken, maliyet ve satış fonksiyonlarının farkından yararlanarak kâr fonksiyonunu aklında oluşturmuştur. Fonksiyonun bir parabol oluşturacağını ve negatif değerli olacağından dolayı kolların aşağı doğru olacağını belirtmiştir. Bu sayede kâr için maksimum değeri rahatlıkla bulabileceğini düşünmüştür. Ancak yaptığı aritmetik işlemlerin ardından parabolün pozitif değeri olacağını fark etmiş, buradan da sadece minimum noktayı elde edebileceği sonucuna varmıştır. Ulaştığı bu sonuç nedeniyle çözüm prosedürü için atacağı adımlarda endişeyle ilerlemiştir. Yaptığı işlemleri tekrar tekrar kontrol etme ihtiyacı duymuştur. Kâr fonksiyonunun türevini alıp 0'a eşitleme matematiksel olarak anlamlı iken; sırf verilen aralığa uygun cevaba ulaşmak için yaptığı uygulamalar matematiksel olarak anlamlı değildir. Bunlar; 400 ve 600 değerleri satış, maliyet ve kâr fonksiyonlarında yerine yazma, bulduğu minimum nokta olan 650'ye yakın diye 600 değerini alma uygulamalarıdır ve yüzeysel bir düşünce tarzını barındırmaktadır. Son olarak araştırmacının rehberliğiyle kendi çizmiş olduğu grafiği yorumlayan Hikmet, doğru sonuca ulaşmış ve bu aşamada derinlemesine bir düşünce tarzı sergilemiştir.

S3: Hikmet akıl yürütme sürecinde, önceki öğrenme yaşantılarından edindiği tecrübelerin ışığında bir algoritma belirlemiştir. Bu algoritmaya göre elde edeceği kâr fonksiyonunun grafiğinden yararlanacak ve sonuca ulaşacaktır. Ancak karşılaştığı soru, bu tecrübeye ters sonuçlar ortaya çıkarmıştır. Bu aşamadan sonra bir kargaşa yaşayan Hikmet matematiksel olarak anlamlı olmayan başka uygulamalara yönelmiştir. İçinde bulunduğu durumu da " *ya yaptığımız sorularda mesela tek bir miktar çıkıyordu veya şurası (fonksiyonun işareti) eksi oluyordu*" şeklinde ifade etmiştir. Derinlemesine bir tartışma ortamı oluşturamamıştır. Bu sebeple ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir. Son aşamada araştırmacının rehberliği ışığında sonuca ulaşmıştır. Bu durum da AR'nin alt türlerinden olan Person-GAR için bir örnektir.

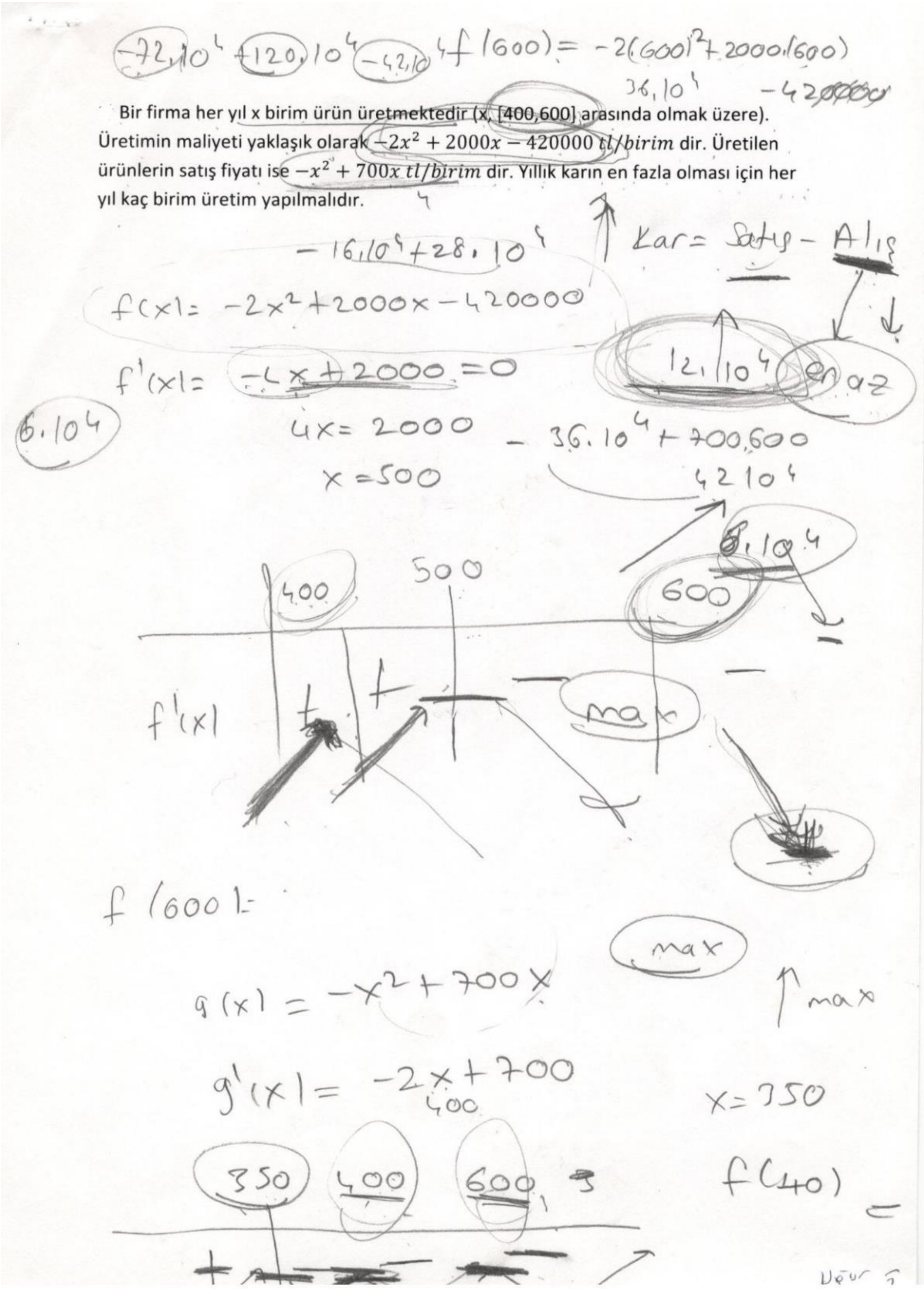
S4: Çözüm sürecinde Hikmet'in sergilediği kendinden emin yorumlarla, konulara hâkim olduğu anlaşılmaktadır. Ancak zorluk yaşadığı nokta öğrenme tecrübeleriyle uymayan bir soru ile karşılaşmasıdır. Oysaki öğrenme çevresinde sürekli karşılaştığı soru tiplerini hiç takılmadan sonuca ulaştırabilmektedir.Bu durum ise tartışma ortamı oluşturup derinlemesine yorumlar yapmasına engel olmuştur. Fakat araştırmacının rehberliği neticesinde grafiği kullanarak derinlemesine yorumlar yapabilmiştir. Hikmet'in "*Başta bocaladım hocam. Yani görememe sebebim belki şey olabilir yani böyle soru tipinden ziyade aynı sorulara çalıştığım için. Mesela veriyordu soruyu, benim aradığım da zaten maksimum noktaydı. Maksimum nokta ilk işlemle hemen çıktığı için bende işaretliyordum. Belki ondan olabilir.*" ifadeleri bu durumu özetler niteliktedir.

Hikmet'in Problem 5'e Ait Sınıflandırma Kodu

Hikmet'in Problem 5'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **Person $\mathbf{GAR}_{\mathbf{dgx}}$**olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü Person GAR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak hem yüzeysel hem de derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden x (belirsiz) olarak kodlanmıştır.

4.2.5.7. Umut’un problem 5’e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Umut’un Problem 5’e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.35, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.35. Umut’un problem 5’e ait çalışma kağıdı

Umut'un Problem 5'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Umut: *(öğrenci soruyu sesli bir şekilde okumuştur.) kar oranı = satış – alış. Yine en fazla kar olabilmesi için bu denklemin* $f(x) = -2x^2 + 2000x - 420000$ *bunun maksimum noktasına bakmamız gerekir.*

Mülakatçı: *Neyin maliyetin mi?*

Umut: *Bir dakika… Maliyetin en az olması lazım minimum noktasına bakmamız gerekir. Çünkü kar oranının artması için bunun azalması lazım ki artsın veya satışın artması lazım mantıksal olarak baktığımızda. Maliyetin en az olabilmesi için de bunun minimum noktasını bulmamız gerekir ilk önce. Türevini aldığım da* $f'(x) = -4x + 2000 = 0$ *diyorum kökünü buluyorum* $4x = 2000x = 500$ *olur. Yani tabloda* 500*'deki değere baktığımda,* $f'(x)$ *e bakıyorum,* 500*'den fazla olan değerler de negatif olacaktır. Gerçi en büyük derecenin katsayısına da bakabilirsiniz veya 501 diyebilirsin negatif olduğunu bulursun. Burası da artı olur. Yani artanlıktan azalanlığa geçti; burada bir yanlış yaptık ama.* 500 *Maksimum nokta oldu. Ama şunu da düşünelim 4*00 *uç noktalar, kapalı aralık olduğu için uç noktalar da önemli. Yani nasıl diyebilirim. Bundan sonra 600'den sonra maksimuma geçer mi acaba? 600 verdiğimde ne olacaktır azalacaktır yine. Yani aslında 600 bir minimum nokta olacaktır. 400 verdiğim de artacaktır yine maksimum olacaktır.*

Mülakatçı: *400 deki değerle 600 deki değeri nasıl karşılaştırdın?*

Umut: *Onu mesela 400 verdiğimde* f' *için burası pozitif olur yani artarak devam eder, yani 400 deki değer uç noktadır yani artıyor azalma durumu yok. Ama 600 verdiğimde mesela azalacaktır. Yani bu bir minimumdur azalma da minimuma doğru geliyor. Yani ok işaretlerine baktığımızda bunda bir artma bunda da bir azalma oluyor. Uç noktalarda ekstremum oluyordu ya kapalı olduğu için; açık olsaydı diyemezdik öyle bir şey. O zaman fonksiyonun 600'deki değeri benim için önemli olacak. Yani ,* $f(600)$ *için yazdığım değer, benim maliyetimin en az olduğu değerdir. Buda benim karımın en fazla olduğunu gösterir.*

Mülakatçı: *Satışı sabitledin mi?*

Umut: *Satış hakkında… Soruda evet oda* $-x^2 + 700x$ *olarak verilmiş doğru. Satışı mesela arttırabilirsin. Bu yüzden de* $g(x)$ *fonksiyonuna bu sefer bakmamız gerekir. Yani* $g(x) = -x^2 + 700x$*. Yani bunun türevini aldığımız zaman… Bu sefer de neyi* *arıyorum bunun maksimum olmasını arıyorum.* $g'(x) = -2x + 700$ *Buradan* $x = 350$. *(işaret tablosunu çizmiştir)* $350, 400, 600$ *diye yerleştirelim.* 350*'den büyük değerler için bu ifade negatif olacaktır; küçük değerler için de pozitif olacaktır. Artanlıktan azalanlığa yani istediğim nokta* 350 *noktasıdır.*

Mülakatçı: $350, x$*'in değerleri arasında değil.*

Umut: *Hıh onlar da var doğru. O zaman bunlara da bakalım.* 400 *Verdiğimde mesela ne olur negatif olur.* 600*'de de yine negatif olur. Artanlıktan sürekli azalanlığa geçecek. Yani şuralar da bir artma gibi düşünebilirsin yani* 400 *veya* 600*'de. Yani azalma varken artmadan aslında azalma oluyor. Çünkü artmadan azalmanın olmayacağını söyleyebiliriz. Yani bir fonksiyon eğer azalıyorsa veya sürekli azalan da olabilir aslında da, maksimum minimum değerler de maksimum noktayı yakalamam için azalmadan artmaya geçmesi gerekir; minimumu yakalamam için mutlaka bir azalmanın olması lazım ki minimumu yakalayayım. Maksimumu yakalamam için mutlaka bir artmanın olması gerekir. Yani artanlıktan azalanlığa veya azalanlıktan artanlığa… Yani burada dediniz ya hocam nasıl kestirdin artan olduğunu. Yani burada artması gerekir ki bir değere karşılık gelebilsin maksimum ya da minimum olarak veya azalma olması gerekir ki bir minimum ya da maksimumdan bahsedebilelim. Yani burada da aynı şekilde azalan olması için artan olması lazım. artan olup sonra azalması lazım. Yani bu noktalar yani maksimum noktalardır* 400 *ile* 600*. Yani sağlar ikisi de denklemi. Bunları fonksiyonda yerine yazacağız* 400 *ve* $600'$*ü. Hangisi büyükse onu alacağız.* 400*'ün karesi 16,* 100*'ün karesi* 10^4*; yani* $-16.10^4 + 28.10^4 = 12.10^4$ *gelir.* 600 *Yazsak,* $-36.10^4 + 42.10^4 = 6.10^4$*olur. Burada baktığımız da* 12.10^4 *daha büyük bir değerdir. O halde* $f(400)$ *(aslında g fonksiyonu olacak) de satış olarak en büyük değerini alır.*

Mülakatçı: *Peki, hangisini alacağız? Diğerinde de* 600*'ü buldun.*

Umut: *Hım maliyeti alınca da* 600*'ü bulduk. Onda da yazalım yerine. Acaba iki tane farklı değer mi çıkıyor.* $f(600)$ *için* $-72.10^4 + 120.10^4 - 42.10^4 = 6.10^4$ *gelir. Burada da* 6.10^4 *geliyor. O zaman* 12.10^4*'ü alıyorum. Yani* 400*'deki değerini alıyorum. Yani satışın maksimum olması gerekir.*

Mülakatçı: *Peki, maliyet için her iki değeri de denedin ama satış için tek değeri yerine yazdın. Nasıl karar verdin buna?*

Umut: *Mesela hocam azalanlığa geçmesi için bir artma olması lazım. Yani buradaki artma burada da devam ediyor. O yüzden burası bir minimum noktası olamayacağı için sadece burada* $600'$*ü aldım (maliyetin işaret tablosunda 400 artan kısımda. Minimum değeri aradığı için sadece 600 e baktı). Ama burada mesela artanlıktan azalanlığa geçiyor. Her iki tarafta da azalanlığa geçtiği için, her iki tarafta da bir minimum vardır. Yani burada* 400*'ü almıyorum birinci denklem de* $f(x)$*'de; burada da hem* 400*'ü hem de* 600*'ü* $g(x)'$*de yerine koyuyorum. Sonuç satış fiyatının maksimum olması gerekir. Yani* 400*' de olur bu.*
Mülakatçı: *Tamam Umut.*

Umut'un Problem 5'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Umut'un akıl yürütme süreci; $i)$ Çözüm prosedürü, ii) Aritmetik işlemler (transformasyon), sayılar (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Umut uyguladığı çözüm prosedüründe öncelikle kâr fonksiyonunun ne anlama geldiğini ifade etmiştir. Sonrasında, kâr değerinin en büyük olması için maliyet fiyatının en küçük, satış fiyatının ise en büyük değerini bulması gerektiğini belirtmiştir. Bu amaçla her iki fonksiyona da maksimum ya da minimum noktayı bulmayı sağlayan algoritmayı uygulamıştır. Aritmetiksel işlemleri doğru bir şekilde yapmış; işaret tablosunu oluşturup artanlık ve azalanlık durumlarını inceleyerek en büyük ya da en küçük değerleri bulmuştur. Uyguladığı çözüm yolu, yaptığı işlemler matematiksel olarak anlamlıdır. İşaret tablolarını yorumlarken derinlemesine bir tartışma ortamı oluşturmasına rağmen uyguladığı algoritmalarda derin tartışmalar sergilememiştir. Ayrıca, satış fiyatında bulduğu en büyük ürün miktarı olan x'i, maliyet için tam olarak kontrol etmemiştir. Bu durum yüzeysel bir düşünce sergilediğinin göstergesidir.

S3: Umut akıl yürütme sürecinde, öğrenme çevresinde edindiği bir algoritmayı uygulamayı amaçlamıştır. Bu süreçte, kullandığı algoritmanın doğruluğundan ve doğru sonuçlara ulaşacağından emin bir şekilde ilerlemiştir. Kullanmış olduğu matematiksel kavramlara hâkimdir. Ancak algoritmanın dışında farklı ve matematiksel olarak derin tartışma ortamlarını oluşturmamıştır. Bu sebeple Umut'un bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabilir.

S4: Umut akıl yürütme sürecini akıcı ve kendinden emin bir şekilde ilerletmiştir. Özellikle işaret tablolarında kullanacağı değere karar verirken derinlemesine açıklamalarda bulunmuştur. Bu durum özellikle artanlık-azalanlık kavramlarına hâkim olduğunun göstergesidir. Tablo incelendikten sonra, satış fiyatı için 400 ve 600 değerlerini yerine yazıp en büyük sonuca ulaştıran 400 değerini belirlerken; maliyet fiyatı için ise tabloya uygun olan 600 değerini belirlemiştir. Oluşan bu ikiliğe araştırmacı dikkat çekince, 600 değerini de maliyet fonksiyonunda yerine yazıp, satış fonksiyonunun 600'deki değeri ile aynı olduğunu görmüştür. Tüm bu sebeplerden dolayı, sonucun 400 olması gerektiğini belirtmiştir. Oysaki maliyet fonksiyonunun 400'deki değerini düşünmemiştir. Belirtilen bu durum kavramları tüm boyutuyla bütüncül düşünememenin bir sonucu olarak ifade edilebilir.

Umut'un Problem 5'e Ait Sınıflandırma Kodu

Umut'un Problem 5'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{dgx}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak hem yüzeysel hem de derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden x (belirsiz) olarak kodlanmıştır.

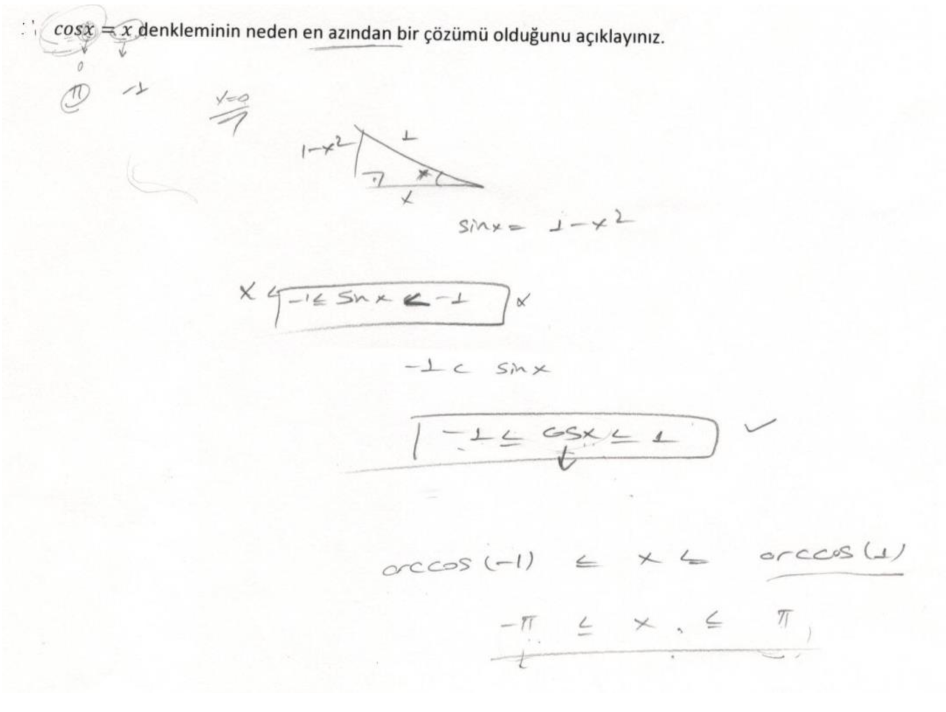
Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 5'in çözüm prosedüründe yedi öğrenci tarafından kullanılmıştır. Kullanılan bu akıl yürütme türü ile dört kişi doğru sonuca; iki kişi yanlış, bir kişi de herhangi bir sonuca ulaşamamıştır. Çözüm prosedürleri incelenen bu yedi öğrenci de en çok dikkat çeken nokta "*en fazla üretim*" ifadesinden hareket ederek belirledikleri algoritmayı uygulamaktır. Ancak öğrenme tecrübelerinde her zaman direkt doğru sonuca ulaştıran bu algoritmanın, verilen problemde işe yaramaması öğrencilerin zihinlerinin karışmasına neden olmaktadır. Bu aşamadan sonra kendi düşünce güçlerini kullanabilenler etkili yorumlar yaparak doğru sonuca ulaşabilmişlerdir. Sahip oldukları kavramsal bilgi birikimini bütüncül bir şekilde kullanamayan öğrenciler ise yüzeysel düşünceler ve varsayımlarla bir sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının çoğu tarafından algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünün tercih edilmesi, mevcut bir algoritmanın uygulanabileceği durumla karşılaşan öğrencilerin, derinlemesine düşünme yapıları sergilemektense, algoritma uygulamayı ilk etapta seçtiklerini düşündürmektedir.

4.2.6. Problem 6

"*$cosx = x$ denkleminin neden en az bir çözümü olduğunu açıklayınız.*"

4.2.6.1. Banu'nun problem 6'ya ait matematiksel akıl yürütme durumu

Banu'nun Problem 6'ya ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.36, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.36. Banu'nun problem 6'ya ait çalışma kâğıdı

Banu'nun Problem 6'ya Ait Klinik Mülakat Transkripti

Banu: *(Öğrenci soruyu sessiz okur.)şimdi çok mantıksız olacak ama x yerine direk 0 yazsak $cos0$ olur ama $cos0 = 1$ olmadı. Bu x ile bu x aynı mı?*

Mülakatçı: *Evet.*

Banu: *x'ler aynı. $cosx = x$… $cosx$'in karesini alsak bir fayda olmaz. Şimdi genel bir şey mi elde edeceğiz buna bir şeyler uygulamak gibi acaba? Nasıl diyeyim karesini almaktır, bir şey eklemektir. Hani bir şeyden yola çıkarak bunu elde ettik, bunun bu şekilde olduğu için en az bir çözüme sahiptir demek.*

Mülakatçı: *İspat gibi yani…*

Banu: *Hıhı… evet. Hani çünkü değer vermek biraz saçma oluyor, zaten de olmadı. Bir de şöyle bir durum var sonuç olarak burada ki dereceyle alakalı buradaki belli bir değere gidecek. Yani ne kadar doğru bir düşünce bilmiyorum ya da radyan olarak alacağım π olarak $cos\pi = -1$ dir. Ama buradaki x ile buradaki x'in aynı olma düşüncesi… diye düşündüm ama pek bir şey elde edemedim. Şöyle düşünsek $cosx$ yani açı olarak düşündüğümüz de $cosx$ nedir, komşu bölü hipotenüs. Komşumuz x, burası 1, $1 - x^2$ (bir dik üçgen çizdi) desek. Mesela buradan $sinx = 1 - x^2$ geldi. Ya da $sinx$ neydi, $-1 < sinx < 1$ arasında değer alıyordu. Tanımsız olma durumu yok zaten illaki bir değer alıyor. O yüzden illaki bir çözüme sahiptir, bulunur yani. Genel durum nedir, $-1 \leq cosx \leq 1$. Bu aralıkta değer alır. $tanx$ ya da $cotx$ denilseydi belki böyle bir şey diyemezdik. Neden, tanımsızlık olduğu durumlar var. O yüzden böyle bir şeye varamazdık. Ama her durumda ne oluyor, değer alıyor.*

Mülakatçı: *Orada herhangi bir değer x'i yakalayacak mı?*

Banu: *Evet. Yani illaki yakalar yani bence bu şekilde düşündüğümüz de. Ama $tanx$ veya $cotx$ yapılsaydı bu şekilde yapamazdık. En azından bir çözümü vardır.*

Mülakatçı: *Peki kesin yakalar mı?*

Banu: *Kesin yakalar mı? Imm… bence yakalar. Yani bu kadar, bu aralıkta bütün değerleri aldığına göre $cosx$, x'e eşit olması gerekiyor mu? Şuan ben şeyi açıkladım herhalde $cosx$ illaki bir değer alıyor ama bu x'e eşit mi onu soruyorsunuz siz değil mi? Hım tersini mi alsak, $arccosx$ desek. Ne olacak ki öyle.*

Mülakatçı: *Mesela iki farklı fonksiyonun var. Bu iki farklı fonksiyonun en az bir çözümünün olması ne demek?*

Banu: *İki farklı fonksiyonum var, en az bir çözümüm var… $f(x)$ eşittir bu, $g(x)$eşittir bu biz bunları eşitliyoruz buradan ortak bir x değeri buluyoruz ortak. Bunu nasıl açıklayacağız şimdi (sorulan soruyu)…*

Mülakatçı: *Var mı aklına gelen bir yol?*

Banu: *Aklıma gelen bir yol yani şuan için yok. Sadece şu aklıma geldi illaki bir değer gelecek buradan. Bu değeri ama ona nasıl eşitlendiğini nasıl söyleyeceğiz. Buradan* $arccosx$*'i alsak bunun tersi (*$-1 \leq cosx \leq 1$ *için)... O zaman* $arccos(-1) \leq x \leq arccos(1)$ *olur.* cos *'ün 1 olduğu aralık ne!* $-\pi < x < \pi$ *aralığında. Aralıklar bunlardan ibaret. Bu aralık bu aralığın içine düşüyor. Yani bu aralık bu aralığın düşüyorsa o zaman vardır mı diyeceğiz?*
Mülakatçı: *O aralığın, o aralığa düştüğüne nasıl karar verdin?*
Banu: *Yani* π*'nin gerçek değerini düşünsek doğru olur mu? Bilemiyorum. Şimdi dereceleri ifade etmek için ne yapıyorduk radyanı ortaya çıkardılar. Bu da radyan cinsinden; bu radyan, normal reel sayılar gibi düşünülür mü orasını bilemiyorum. Hani 3 küsuratlı olarak düşünsek bu bunun içine düşüyor(ikinci yazdığı aralık birinci yazdığı aralığı kapsıyor.)*
Mülakatçı: *Orada da bir çözümü vardır diyorsun.*
Banu: *Yani evet. Nasıl diyeyim ortak çözüm bulmak kesişim meselesi olduğundan; hem bir kesişimleri var. Zaten* $arccosx$ *bu aralıkta değer alıyor. Hani ben böyle düşündüm. Ne kadar doğru bilemiyorum.*
Mülakatçı: *Tamam Banu.*

Banu'nun Problem 6'ya Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Banu'nun akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Algoritmalar kümesi bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Banu çözüm prosedürüne, $cosx = x$ denklemindeki $x = 0$ için değer vererek başlamayı tercih etmiştir. Verdiği değerlerden bir sonuca ulaşamayacağını anlayınca, aklındaki algoritmaları sırasıyla uygulamaya karar vermiştir. Aslında, "*şimdi genel bir şey mi elde edeceğiz. Buna bir şeyler uygulamak gibi acaba?*" ifadesinden de anlaşılacağı gibi yapması gerekenleri tam olarak netleştirememiştir. Önce denklemin karesini almayı düşünmüş; sonra bir dar açısı x olan dik üçgen çizerek $sinx$ değerini bulmuş; $cosx$ için genel olan $-1 \leq cosx \leq 1$ eşitsizliğinin varlığını belirtmiş; araştırmacı tarafından sunulan ipucunu da kullanamamıştır. Son olarak, ters trigonometrik fonksiyonlardan hareket edip $\arccos(-1) \leq x \leq \arccos(1)$ eşitsizliği ile $-\pi \leq x \leq \pi$ eşitsizliğini karşılaştırmıştır. İkinci eşitsizliği cos'ün 1 olduğu aralıktan hareketle bulmuştur ve bu aralığın ters trigonometrik fonksiyonları barındıran aralığı kapsadığını belirterek bunun bir çözüm olduğunu savunmuştur. Yüzeysel düşünce yapısının hakim olduğu bu süreç matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Banu akıl yürütme sürecinde, uyguladığı seri algoritmalar neticesinde elde ettiği sonuçlar için herhangi bir tartışma ortamı oluşturamamıştır. Denklemin en az bir çözümünün varlığını belirttikten sonra bu duruma dair bir açıklama istendiğinde ise, kavramsal olarak izah edememiştir. Hatta kendisinin bile sonucun doğruluğu noktasında tereddütlü olduğu görülmüştür. Matematiksel kavram temellerine oturtulmadan uygulanan seri algoritmalarla bir sonuca varmayı barındıran bu akıl yürütme süreci AR türünün özelliklerini göstermektedir. Ayrıca bir algoritma setinin içerisinden seçilenlerle yürütüldüğü için AR'nin alt kategorisi olan DAR sınıfında düşünmek mümkündür.

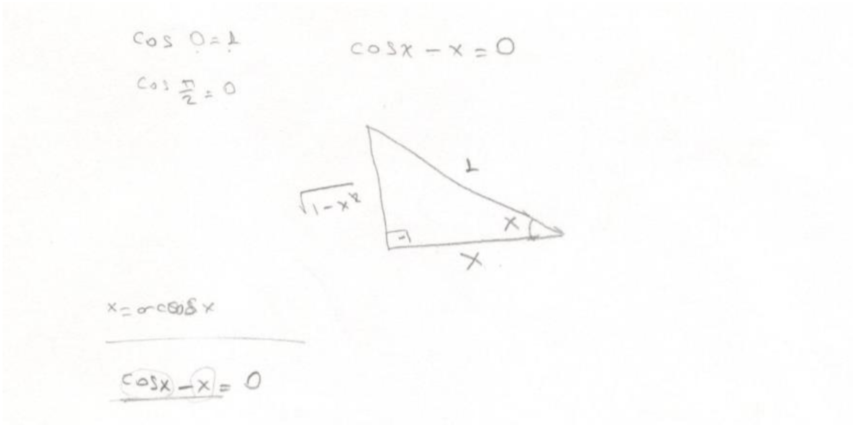
S4: Banu akıl yürütme sürecinin son aşamasında $\arccos(-1) \leq x \leq \arccos(1)$ eşitsizliği ile $-\pi \leq x \leq \pi$ eşitsizliği karşılaştırmış ve ikinci eşitsizliğin birinciyi kapsadığını belirterek buradan en az bir çözümün sağlandığını savunmuştur. Bu durumun kesin gösterimi sorgulandığında ise "*Şimdi dereceleri ifade etmek için ne yapıyorduk radyanı ortaya çıkardılar. Bu da radyan cinsinden; bu radyan, normal reel sayılar gibi düşünülür mü orasını bilemiyorum. Hani 3 küsüratlı olarak düşünsek bu bunun içine düşüyor.*" şeklinde bir açıklama yapmıştır. Oysaki iki eşitsizlik birbirinin aynısıdır ve Banu bunun farkında değildir. Yüzeysel akıl yürütmelerin sergilendiği çözüm prosedüründe, trigonometrik kavramlarla alakalı bilgi eksiklikleri ve yanlış öğrenmeler, süreçte bu tarz zorlukların yaşanmasına neden olabilir.

Banu'nun Problem 6'ya Ait Sınıflandırma Kodu

Banu'nun Problem 6'ya ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{DAR_{ygy}}$olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü DAR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.6.2. Aylin'in problem 6'ya ait matematiksel akıl yürütme durumu

Aylin'in Problem 6'ya ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.37, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.37. Aylin'in problem 6'ya ait çalışma kâğıdı

Aylin'in Problem 6'ya Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Aylin yine sesli düşünerek soruyu çözmeni istiyorum.*

Aylin: *En azından bir çözümü, yani bir çözümü varmış. Şimdi* 0 *diye düşündüm ama* $cos0 = 1$ *oluyor o olmuyor. Yani düşüncelerimi yazayım.* $cos\frac{\pi}{2} = 0$ *Şeklinde düşündüm, o da olmadı.* 2π *veya* $\frac{3\pi}{2}$ *olur mu, olmaz. O zaman şöyle yapayım* $cosx - x = 0$ *diyeyim. Hım, bir üçgen çizeyim* $x, 1$ *burası da* $\sqrt{1 - x^2}$

Mülakatçı: *Bir dik üçgen çizdin. Çizdiğin üçgenden* $cosx = x$ *geliyor.*

Aylin: *Bunu işte nasıl çözeceğiz.* arc*'ını alsam şunun.*

Mülakatçı: *Neden?*

Aylin: *Deniyorum hocam. Belki buralardan bir şeyler çıkar diye.* $x = arccosx$*. Buradan da bir şey çıkmaz herhalde. Türevini alsam olur mu? Yani bunu pek... ne yapabilirim ki* $cosx - x = 0$*. Şimdi biz denklemi çözerken* x*'i buluyoruz. Şimdi burada* x*'i nasıl bulacağız.*

Mülakatçı: *Zaten senden* x*'i istemiyor, hangi değerde sağlandığını sormuyor. İkisinin ortak çözümü olduğunu nasıl gösteririz diye soruyor?*

Aylin: *Evet tam olarak x'i sormuyor. Ama nasıl gösteririz? O zaman tersinden mi gitsek?*

Mülakatçı: *Nasıl tersinden?*

Aylin: *Yani çözümü olmadığını düşünüp bunu mesela ispatlasak. Ama nasıl deneyeceğiz bunu. Mesela bunun çözümünün olmadığını kabul etsem. Yok, öyle de olmuyor ki çok ilginç. En azından bir çözümü vardır, yani şu sağlanacak tanımsız olmayacak. Hocam ben buna pek yorum getiremeyeceğim.*

Mülakatçı: *Neden peki Aylin?*

Aylin: *Çünkü hiç karşılaşmadım böyle bir şeyle, böyle bir soruyla.*

Mülakatçı: *Tamam Aylin.*

Aylin'in Problem 6'ya Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Aylin'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Algoritma kümesi, aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Aylin çözüm prosedüründe, sonuca dair bir ipucu elde edebilmek için birkaç algoritma denemiştir. Özellikle cos'ün bilinen $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{3\pi}{2}$ gibi değerlerini düşünerek $cosx = x$ olacak bir durum yakalamaya çalışmıştır. Daha sonra bir dar açısı x derece olan dik üçgen çizmiş; $arccosx$ değerini düşünmüş; türev almayı düşünmüş ancak hiçbir yoldan çıkış bulamamıştır. Son olarak olmayana ergi yöntemiyle ispatı denemiş fakat bu süreçlerin hiçbirinde derinlemesine bir düşünce sergileyememiştir. Uygulamış olduğu bu çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Aylin akıl yürütme sürecinde, öğrenme yaşantısı neticesiyle edindiği algoritma setinden farklı algoritmaları seçerek uygulamayı tercih etmiştir. Bu algoritmaları uygularken herhangi bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. Derinlemesine bir düşünce yapısı sergilememiştir. Sürecin barındırdığı bu özellikler AR için tipik özellikler kabul edilmektedir. Dolayısıyla Aylin'in bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılabildiği gibi; AR'nin alt kategorisinden, ise DAR olarak belirtmek mümkündür.

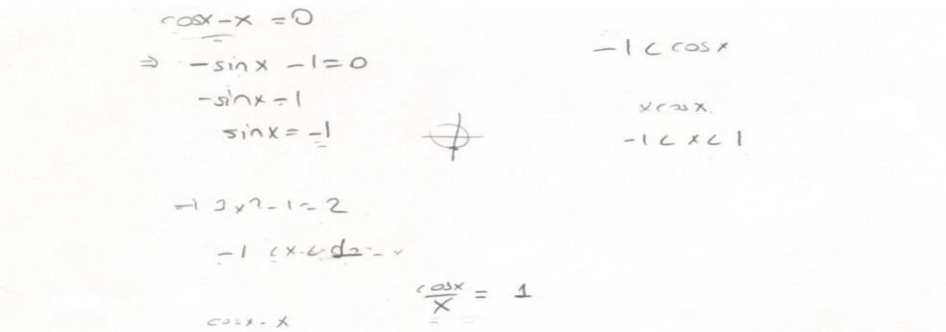
S4: Aylin soruyu okuduktan sonra herhangi bir çözüm yolu geliştirememiştir. Konuyla ilgili algoritmaları uygulayarak bir çözüm yolu elde etmeyi umut etmiştir. Ancak algoritmaları uygulamasına rağmen herhangi bir kavramsal yorumda da bulunamamıştır. Bu durumun sebebi sorulduğunda ise "*çünkü hiç karşılaşmadım böyle bir şeyle, böyle bir soruyla*" ifadesini kullanmıştır. Aylin'in konuyla ilgili kavramsal alt yapı zayıflığı ve öğrenme yaşantılarındaki eksikliği bu durumun altında yatan nedenler olarak gösterilebilir.

Aylin'in Problem 6'ya Ait Sınıflandırma Kodu

Aylin'in Problem 6'ya ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{DAR}_{\mathbf{xgy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü DAR; doğruluk kategorisinde, problemde herhangi bir sonuca ulaşıldığından x (belirsiz); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.6.3. Derya'nın problem 6'ya ait matematiksel akıl yürütme durumu

Derya'nın Problem 6'ya ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.38, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.36. Banu'nun problem 6'ya ait çalışma kağıdı

Derya'nın Problem 6'ya Ait Klinik Mülakat Transkripti

Derya: *(Öğrenci soruyu sesli okumuştur) hocam şimdi* $\cos -1$ *ile* 1 *arasında değerler alır. Ama hocam* $\cos$ *ün* 0 *değeri* 1*'dir fakat bu buna eşit değildir. Ben öyle bir şey* *vermem lazım ki x verdiğim zaman sonucu da aynı çıksın. Ama bu değer de $\cos$'ün değer aralığında olması lazım. En az bir çözümü olduğunu… Ama soru farklı.*

Mülakatçı: *Evet. Sana o değeri sormuyor. Zaten bir çözümü var diyor.*

Derya: *Hocam bu denklemde karşıya atsam $\cos$ ü… Ama neden en azından bir çözümü olduğunu… Hocam sonuçta bu ifade tanımsız değildir. Tanımsız olmadığına göre bir değeri vardır. Bu da herhangi bir x değerine eşit olabilir. O yüzden bu değeri bulmak için bir çözüm yaparız yani biz. Öyle düşünüyorum ama hocam.*

Mülakatçı: *Yani diyorsun ki $\cos x = x$ i sağlayan bir değer vardır elbet.*

Derya: *Yani diyorum ki hocam evet bir değer vardır ve bu değeri bulmak için de bir çözüm yapmam lazım; bir denklem olur, bir çözüm kurarım veya başka bir şey olur. Bu denklemde mesela paydayı 0 yapan, ya da $\cos$'ü tanımsız yapan veya karşıda başka bir değer olsaydı belki çözümde sıkıntı yaşardım. Ama $\cos$'ün herhangi bir değeri olabilir, o değer de bu aralıkta herhangi bir x değerine eşit olabilir. O yüzden bir çözümü olur diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Peki diyelim ki sen bunu birine anlatıyorsun. Sana soruyor bu nasıl böyle oluyor diye. O kişi şuan senin söylediğini hayal edemedi. Ona nasıl anlatacaksın?*

Derya: *Hocam mesela karelerini alsam ya da bir şeyler ekleyip çıkarsam bir şey değişmez galiba. Yani hocam ben öyle bir şey yapacağım ki $\cos x = x$ şeklinde bir çözüme ulaşacağım değil mi? Denklem kuracağım öyle bir şey elde edeceğim.*

Mülakatçı: *Yani bunların ikisinin beraber sağlanabildiğini göstereceksin. Neden sağlandığını göstereceksin.*

Derya: *Bunların ikisinin beraber sağlanabildiğini göstereceğim. Hocam mesela biz $\cos x$'in değer aralığını… Ondan da değil işte en azından bir çözümü… Bir değerle mesela herhangi bir $\cos$ değeriyle çarpsam $\cos^2$ oluyor (öğrenci farklı yollar denemektedir alçak sesle düşünerek) aynı şey oluyor… Hocam mesela şöyle bir şey düşündüm ama bunu hep türeve bağlayınca saçma oluyor galiba. Mesela hocam bunu x'e göre türev alsam dedim. Mesela $-\sin x - 1 = 0$ oluyor ya $-\sin x = 1$, $\sin x = -1$. Burada $\sin x$'i 1 yapan tek değer vardır ya o zaman x değerini oradan bulurum, bir çözümünün olduğunu görebilirim. Öyle düşündüm.*

Mülakatçı: *Yazıya dök istersen.*

Derya: *Hocam mesela $\cos x - x = 0$'ın türevini aldım x' e göre. $-\sin x = 1$ dedim $\sin x = -1$. Hani $\sin x$'de aynı şekilde $-1,1$ aralığında olur. $\sin x$'i -1 yapan değer* *nedir benim* $\frac{3\pi}{2}$*.* x*, mesela* $\frac{3\pi}{2}$ *değerinde sağlar. Ama işte burada olmuyor. Burada sağlıyor ama ilki için sağlamıyor kökü yoktur. Sonsuza giderken mesela hocam, onda da bir şey olmaz. Yani hocam neden en az bir çözümü olduğu dediğim gibi ama onu anlatmak nasıl işte, onu anlatamıyorum. Hani bir değeri zaten vardır bunun. Bunun da* x*'e karşılık gelen bir değeri zaten olacaktır ama çözümü nasıl yapabileceğimi…*

Mülakatçı: *Peki. Mesela şöyle düşün. İki tane farklı fonksiyonun var senin. Diyorum ki ben de sana bunların ortak bir çözümü var. Bunu nasıl gösterirsin, bu ne demek?*

Derya: *İki fonksiyonum var hocam, bunların ortak çözümü var. Bunu nasıl gösteririm. Mesela hocam hani biz denklem diyoruz ya* $3x^2 - 1 = 2$*. Burada* x*'i karşıya atarız çözümü yaparız* $x = \pm 1$ *bir çözümdür bunun. Bunun da aynı şekilde bir çözümü olduğunu açıklayın diyorsunuz ya hocam mesela* $cosx - x = 0$ *ama bundan sonra nasıl çözsem, ne değerini elde ederim ki onu şey yapamadım. Mesela* $cosx$*, bunu yarım açı tam açı işte… Mesela hocam her tarafı* x*'e bölsem yine aynı şey yani.*

Mülakatçı: *Aklındaki tüm yolları gözden geçiriyorsun herhalde.*

Derya: *Evet, hocam şuan ne varsa düşünüyorum acaba ne uygulayabilirim diye de… Hocam mesela böyle desem* $cosx$ *için* $-1 < cosx$*… Yok hocam. Hani hocam* x'*le çarpardık ya biz mesela, ne derdim* $xcosx$ *olduğu zaman ben* cos *değerine* $-1 < x < 1$ *derdim sonra her tarafı* x*'le çarpardım…*

Mülakatçı: *Bu bir kural mı?*

Derya: *Hıhı evet hocam hani bir şey vardı ya mesela, bu değeri* $-1 < x < 1$ *derdim mesela sonra bunu* cos*'le çarpardım sonra çıkarırdım her iki taraftan da istediğim değerleri çıkarırdım. O aralığı bulmayı hatırlıyorum*

Mülakatçı: *Eşitsizlik sorularındaki gibi…*

Derya: *Evet işte ama oradan bu olmaz galiba… Başka ne yapabilirim ki yani şuan* $cosx - x$ *dediğim gibi olsa… Mesela hocam her tarafı* x*'e bölsem yani… ıı ama* x *sonsuza giderken limit değerinde… Acaba diyorum ki limitle bir alakası var mıdır ama o da olmaz herhalde. Hani hocam* $\frac{a}{b}$ *oranında* 1 *oluyordu ya limit* x *sonsuza giderken* $\frac{a}{b}$*,* cos *ile ifadeleri aynıysa… Ama işte orada da mantıklı bir yol değil. Yani şuan nasıl çözebileceğimi kestiremedim hocam. Yani hocam çözümü var ama nasıl bir çözümü var bende onu anlayamadım. Sonuçta* cos*'ün bir ifade olacak ki bu bunu sağlayan bir* *değer olacak. Ama bunu izafi olarak değil de bir gösterimi vardır, yolu, nerden ne geldiği nasıl yapıldığı. Ama hocam onu şuan ben çıkaramadım.*

Mülakatçı: *Peki, sence neden çıkaramadın?*

Derya: *Neden çıkaramadım, eksiğim var galiba hocam. Nerede ne yapmam gerektiği konusunda. Düşünemiyorum hocam galiba geniş düşünemiyorum.*

Mülakatçı: *Peki böyle olmanın sebebi nedir sence? Mesela sistemsel bir sıkıntı mı?*

Derya: *Hocam sistemsel değil mesela biz nasıl çalışıyoruz, sınav odaklı çalışıyoruz. En azından ben kendi adıma konuşayım; mesela vizeler de finaller de ne yapıyorum ben genelde gördüğüm konuları problem olarak çözmeye çalışıyorum. Düşünmüyorum geniş, eğer böyle bir ifade kaşıma gelirse ben ne yaparım. Veya daha doğrusu boş zamanlarımda uğraşmıyorum böyle sorular çıkar mı karşıma diye. Açayım eski konulara bir bakayım diye. Bunlar da biraz pratik istiyor hocam, düşünme istiyor, görünce çözmek istiyor. O yüzden biz biraz işlem odaklı, pratik odaklı bir şeyler yapmaya çalışıyoruz. Düşünmemekten kaynaklanıyor hocam.*

Mülakatçı: *Tamam Derya.*

Derya'nın Problem 6'ya Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Derya'nın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Algoritmalar kümesi, aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Derya çözüm prosedürüne, x için değerler vererek başlamıştır. Sonuç elde edemeyince, denklemi tanımsız yapan herhangi bir noktanın olmadığını ve illaki bir nokta da bu denklemin sağlandığını ifade etmiştir. Düşüncesinin daha açık şekilde gösterilmesi istendiğinde ise bir açıklama getirememiştir. Başka çözüm yolları bulmak için konuyla ilgili aklına gelen algoritmaları tek tek deneyerek $cosx = x$ i sağlatmaya çalışmıştır. Karesini alma, x'e göre türev alma, $cosx$ ile çarpma, her tarafı x'e bölme, limit alma gibi algoritmaları uygulamıştır. Herhangi bir sonuca varamayınca baştaki düşüncesini yinelemiş ama bunu nasıl göstereceğini bulamamıştır. Kendi ifadeleriyle "*…bunu izafi olarak değil de bir gösterimi vardır, yolu, nerden ne geldiği nasıl yapıldığı. Ama hocam onu şuan ben çıkaramadım*." şeklinde belirtmiştir. Yüzeysel bir akıl yürütme sürecinin hâkim olduğu çözüm prosedürü, matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Derya karşılaştığı problem durumuyla ilgili bildiği ve azda olsa ilgisi olduğuna inandığı yolları tek tek deneyerek, aklındaki düşünceyi ispatlayacak durumu araştırmıştır. Ancak uygulamış olduğu bu algoritmaları mantıksal temellere oturtarak seçmemiştir. Konu ile bağlantısını derinlemesine değil yüzeysel düşünmüştür. Dolayısıyla da düşüncelerini savunacağı bir tartışma ortamı oluşmamış; kullandığı kavramların özelliklerini açıklamamıştır. Süreç sonunda da belirli bir cevaba ulaşamamıştır. Algoritmaların yüzeysel bağlantılar kurularak uygulandığı akıl yürütme becerisi türü olan AR, Derya'nın bu sorudaki akıl yürütme becerisi türü olarak sınıflandırılabilir. Birden fazla algoritmaya yer verildiğinden AR'nin alt kategorisi olan DAR olarak da özelleştirilebilir.

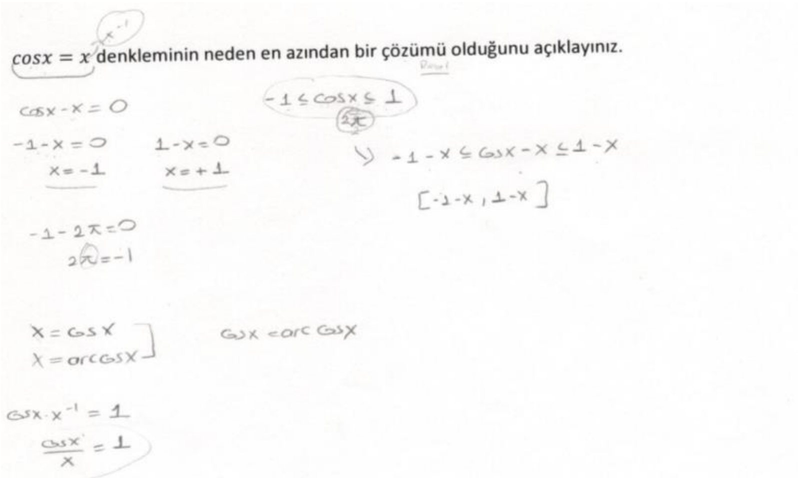
S4: Derya çözüm prosedüründe ilgili ilgisiz birçok algoritma ile hareket etmiş ancak düşünmek istediğini kanıtlayacak bir ipucu bulamamıştır. Süreç sonunda da pes ederek uygulama yapmayı bırakmıştır. Bu durum kullanmış olduğu matematiksel kavramlar hakkında zayıf bir alt yapısı olduğunun göstergesidir. Bu nedenle çözüm için gereken bağları kurmakta zorlanmıştır. Ortaya konan bu akıl yürütme sürecinin neden bu şekilde ilerlediğine dair soru sorulduğunda ise *"…eksiğim var galiba hocam. Nerede ne yapmam gerektiği konusunda. Düşünemiyorum hocam galiba geniş düşünemiyorum*." şeklinde verdiği cevap, savunulan durumu kanıtlar niteliktedir. Ayrıca, "…*biz biraz işlem odaklı, pratik odaklı bir şeyler yapmaya çalışıyoruz. Düşünmemekten kaynaklanıyor hocam*." İfadesi de mevcut durumun sebeplerine ışık tutar niteliktedir.

Derya'nın Problem 6'ya Ait Sınıflandırma Kodu

Derya'nın Problem 6'ya ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{DAR_{xgy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü DAR; doğruluk kategorisinde, problemde herhangi bir sonuca ulaşıldığından x (belirsiz); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır

4.2.6.4. Leyla'nın problem 6'ya ait matematiksel akıl yürütme durumu

Leyla'nın Problem 6'ya aitolan çalışma kâğıdı Şekil 4.39, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.39. Leyla'nın problem 6'ya ait çalışma kâğıdı

Leyla'nın Problem 6'ya Ait Klinik Mülakat Transkripti

Leyla: *(Öğrenci soruyu sesli bir şekilde okur.) hım* $cosx - x = 0$ *desem.* $cosx$*,* $-1 \leq cosx \leq 1$ *aralığındaydı, bunu düşünsem.* -1 *ile* 1 *arasında bundan* x*'i çıkaracağım ve* 0 *olacak. Minimum* -1 *versem* $-1 - x = 0$ *den* $x = -1$ *olur. Maksimum da* 1 *versem* $1 - x = 0$ *dan* $x = 1$ *olur. Bu iki değer arasında yani herhangi bir değer alabileceği için* x*'in mutlaka bir çözümü vardır. En azından bir tane çözümü vardır.*

Mülakatçı: *Yani izafi olarak mı vardır? Nasıl düşünüyorsun?* $cosx$ *deki* x*'e hangi değerleri verdin?*

Leyla: *Evet. Hım burada* $x = 0$ *için olur işte mesela* $cos0 = 1$*dir. Hım denklem sağlanmıyor.* $cos0$*'da* 2π *desek* x*'e (öğrenci ortaya çıkan çelişkiyi bir müddet düşünmüştür). Burada sadece hani şuradaki* x*'i değerlendirmesek bu şekilde en az bir tane çözümünün olduğu görülüyor ama acaba şuradaki hani* $cosx$ *değerini düşünmek gerekiyor mu aynı* x *olduğu için.*

Mülakatçı: *Hangi yönden? Bir daha ifade eder misin?*

Leyla: *Yani mesela hocam $cosx$'in 1 olduğu değer x'in 2π veya 0 olduğu değerdir ya hani buradaki x ile şuradaki x aynı olduğu için denklem de bir de buradaki x yerine 2πmi yazmam gerekir? $1-2\pi$ diye. O zaman da π'li bir değer çıkar. Yani x'in her halükarda bir değeri vardır. Düşünmediğim bir yerler mi var acaba. Yorum yapın hocam ☺*

Mülakatçı: *Mesela iki farklı fonksiyonun ortak bir çözümü var diyorum sana. Bunu nasıl düşünebilirsin ya da ne demektir bu?*

Leyla: *Bu çözüm yani herhangi bir reel sayı olmak zorunda değil mi?*

Mülakatçı: *Tabi.*

Leyla: *Yani yine buradan gitsem $-1-x \leq cosx - x \leq 1-x$ olur. Yani bu denklemi burada görebilmek için yaptım. Yani burada bu fonksiyon $[-1-x, 1-x]$ de herhangi bir değer alabilir.*

Mülakatçı: *Burada senden şöyle bir şey isteniyor; evet bunların bir ortak çözümü var ama bunu nasıl gösteririz?*

Leyla: *(öğrenci bir müddet sessiz düşünür oflanır.) ya da şöyle desem $x = cosx$. Buranın arc 'ını alsam ve buradaki x'i yalnız bırakmaya çalışsam bu sefer de $x = arccosx$ olur. Bu iki değer birbirine eşittir. $cosx = arccosx$.*

Mülakatçı: *Tersi kendisine eşit yani, buradan nasıl bir şey düşünebilirsin?*

Leyla: *Evet. Şimdi bunların bir tanesi açı verir bir tanesi reel sayı verir. Başka da bir şey gelmiyor aklıma. Gelmiyor hocam ya mesela şurada bir şekilde bir yeri yalnız bırakarak eşleniğiyle çarpsam ama yine olmuyor.*

Mülakatçı: *Neyin eşleniğiyle çarpacaksın?*

Leyla: *x'in yani x^{-1} ile (öğrenci yine sessiz düşünür) o da $\frac{cosx}{x} = 1$ olur. Bir şey vermez bana. Limiti hatırlatıyor ama oradan da bir yere gidemem. Yok hocam.*

Mülakatçı: *Tamam Leyla.*

Leyla'nın Problem 6'ya Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Leyla'nın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Algoritmalar kümesi, aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Leyla, çözüm prosedürüne $cosx$'in sınırlarını belirleyip x'i de bu sınırlarda kabul ederek başlamıştır. Ancak belirtmiş olduğu bu düşüncesini açıklaması istendiğinde ise etkili bir açıklamada bulunamayıp kendisi de karışıklık yaşamıştır. Bu aşamadan sonra ise eldeki veriler üzerine algoritmalar uygulamıştır. $cosx - x$ ifadesini, $-1 \leq cosx \leq 1$eşitsizliğinde oluşturarak "*burada sağlayan bir değer vardır*" şeklinde matematiksel temellere sağlam oturmayan bir açıklamada bulunmuştur. Son olarak ters trigonometrik fonksiyona yönelmiş; denklemi x^{-1} ile çarpmış ancak her iki algoritmadan da bir sonuca ulaşamamıştır. Yapmış olduğu uygulamalarda yüzeysel bir düşünce yapısı sergilemiştir. İzlediği çözüm prosedürü de matematiksel açıdan anlamlı değildir.

S3: Leyla, bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme sürecinde amaçsızca uygulanan algoritmalar ile bir ipucu yakalamaya çalışmıştır. Bunun yanında matematiksel olarak etkili bir açıklamada bulunulmayan ve varsayım ağırlıklı cevaplara yer vermiştir. Tüm bu nedenler göz önüne alındığında, Leyla'nın akıl yürütme becerisi türünün AR özellik gösterdiği ortaya çıkmaktadır. Ayrıca bu süreçte birden fazla algoritmaya yer verildiğinden AR'nin alt kategorisi olan DAR olarak sınıflandırmak mümkündür.

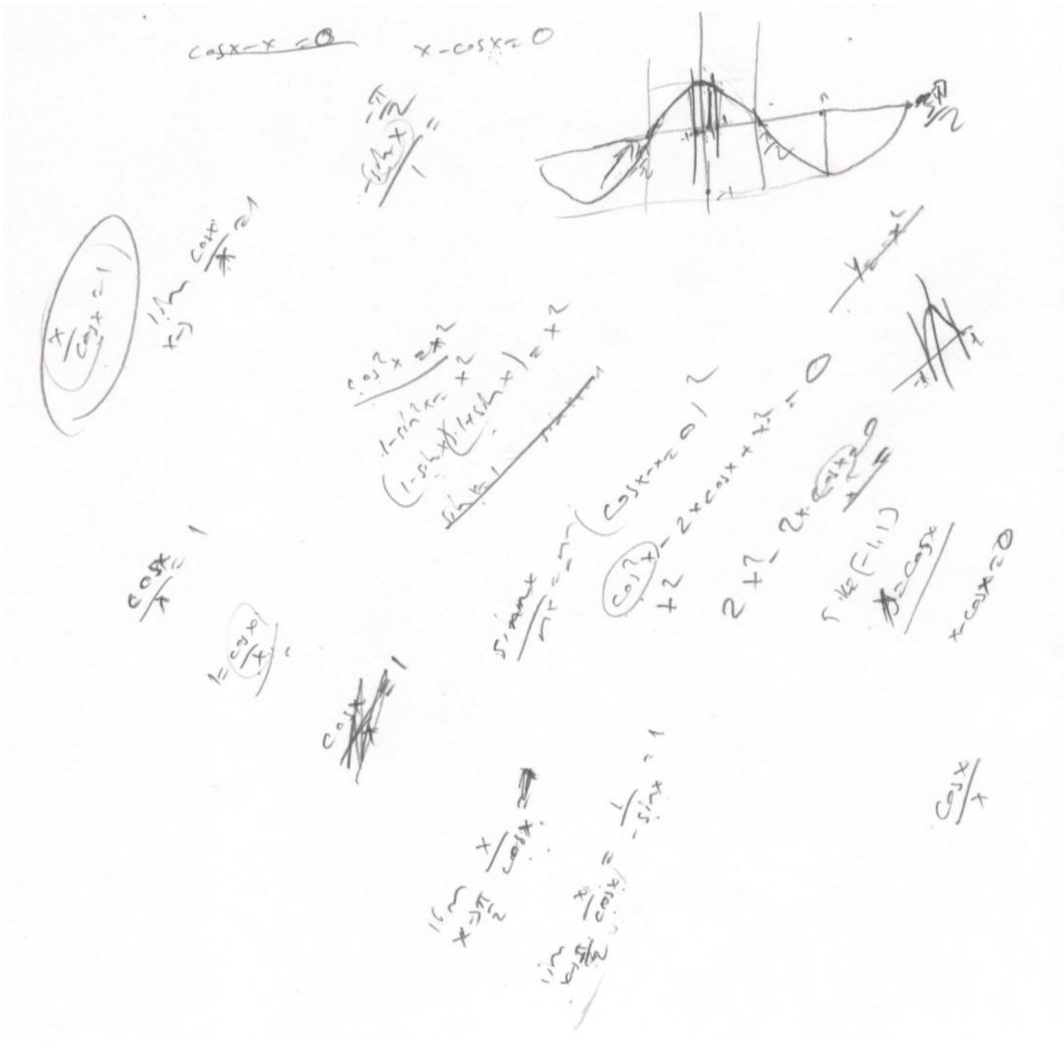
S4: Leyla'nın sergilemiş olduğu akıl yürütme sürecinin temelinde, kendinde var olan bilgileri bütüncül olarak kullanamaması yatmaktadır. Her bir bilgiden bir parça vardır ancak bunları senkronize bir şekilde kullanmak, daha güçlü bir kavramsal alt yapıyla mümkündür. Örneğin Leyla, süreçte iki kere sonuca ulaştığını belirtmiştir. Ancak, bunu karşı tarafa kabul ettirecek şekilde savunamamıştır. Yani tartışma ortamı oluşturup kavramları etkili bir şekilde açıklayamamıştır.

Leyla'nın Problem 6'ya Ait Sınıflandırma Kodu

Leyla'nın Problem 6'ya ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **DAR_{xgy}** olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü DAR; doğruluk kategorisinde, problemde herhangi bir sonuca ulaşıldığından x (belirsiz); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.6.5. Önder'in problem 6'ya ait matematiksel akıl yürütme durumu

Önder'in Problem 6'ya ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.40, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.40. Önder'in problem 6'ya ait çalışma kâğıdı

Önder'in Problem 6'ya Ait Klinik Mülakat Transkripti

Önder: *(Öğrenci sesli bir şekilde soruyu okumuştur) yani bu denklemi sağlayan en az bir x değeri vardır diyor. $cosx$'in aldığı aralık $[-1,1]$ aralığı. Şimdi $cosx - x = 0$ bu denklemin çözümü… $x - cosx = 0$ Denkleminin en azından bir çözümünün olduğunu açıklayınız diyor yani bu… Tablo vardı hocam, tabloda her x değerine karşılık bir $cosx$ değeri oluyordu.*

Mülakatçı: *Hangi tablo?*

Önder: *Trigonometrik cetvel deniyordu herhalde adına. O cetvelde mesela* 5 *için değeri* 7 *için* $cos7$ *değeri filan; aynı zaman da bu küsuratlı olur mu olur herhalde. Hocam şuraya bir* $cosx$*'in grafiğini çizebilir miyim?* 0 *için* 1*'dir;* $\frac{\pi}{2}$ *için* 0*'dır; sonra* $cos2\pi$*için* -1*'dir;* $cosx$*'in grafiği nasıldı ya* $-\frac{\pi}{2}$*'den* $\frac{\pi}{2}$*'ye* 0*; şurası* π *için* -1*. Grafik böyle salınım gösteriyor. Alabileceği değer de* $[-1,1]$ *arasındadır. Şimdi buradan bir* x *değeri için sağlaması gerekiyor, mesela* $cos5 = 5$ *gibi bir şey olması gerekiyor. Ama* $[-1,1]$ *aralığında da olması gerekiyor. Hım şey bir kere şu* x*'in kesinlikle* $[-1,1]$ *arasında olması gerekir. Çünkü* $cosx$*'in değeri her zaman* $[-1,1]$ *arasındadır. Yani* $cosx$ *in* $[-1,1]$ *arasında olması gerekir; e* $cosx$*'in* $[-1,1]$ *arasında olması için de* $cosx$*'in* $[-1,1]$ *arasında bir değer alması gerekir. Buradan bir fonksiyona bakarız* $[-1,1]$ *arasında. Ama şöyle* x *eksenindeki* $[-1,1]$ *arasından bahsediyorum. Mesela şuradaki* x *eksenindeki* $[-1,1]$ *aralığından bahsediyorum şurada,* x *eksenindeki* $[-1,1]$ *aralığının* y *'deki değeri mutlaka vardır çünkü fonksiyon grafiği süreklidir burada. Yani illaki bir aldığı değer vardır yani.*

Mülakatçı: x*, kesinlikle* $[-1,1]$ *aralığında mı?*

Önder: x*, kesinlikle* $[-1,1]$ *arasında mı;* $cos90 = 1$ *dir… Hocam* $cosx = x$ *olduğuna göre denklem sistemi olduğuna göre, her iki taraftaki* x *eşit olduğuna göre illaki şu* x*' lerin birbirine eşit olması lazım. Bizim bir de bildiğimiz bir şey var* $cosx$ *in alacağı değer* $[-1,1]$ *arasındadır. O zaman* $cosx = x$ *'in sağ yanındaki* x *'de* $[-1,1]$ *arasında bir şey olması gerekir.* $[-1,1]$ *arasında olması için de* $cosx$*'in* $[-1,1]$ *arasında sürekli olması gerekir. Sürekli olduğunda fonksiyonun alabileceği bir değer illaki vardır.*

Mülakatçı: *Hım o aralıkta düşününce…*

Önder: *Evet. Yani* $[-1,1]$ *arasında illaki… Mesela şöyle olsun* x *için* 0.5*, ama bir de şöyle çıkması lazım eşit olması lazım. Evet şimdi aklıma geldi.* $[-1,1]$ *arasında olup bir de birbirine eşit olması gerekiyor. Şöyle bir şey* $cosx$*' deki* x*'in değeri* $0,\frac{\pi}{2}$ *arasında arttıkça* $cosx$*'in değeri azalıyordu. Bu şekilde düşünecek olursak* 0 *ile* 1 *arasında bu fonksiyonun grafiği zaten azalandı, şurada* 0 *için* 1 *değerini alıyor… Ama bizim* $y = x$ *gibi bir grafik bulmamız lazım.*

Mülakatçı: $y = x$ *ne için lazım?*

Önder: *Yani mesela aynı şeyi vermesi için; illaki* $y = x$ *değil.* $[-1,1]$ *aralığında ve birbirine eşit… hocam şöyle ben her iki tarafın da karesini alsam* $cos^2x = x^2$ *olur ve buradan başka bir şeyler çıkar mı acaba? Şuraya* cos^2x *gördüğüm yere mesela* $1 - sin^2x = x^2$ *yazsam, sonra* $(1 - sinx).(1 + sinx) = x^2$*, sonra* $sinx = -1$ *ve* $sinx = 1$*yazsam yok olmaz.* $(cosx - x = 0)^2$ *her iki tarafın karesini alsam;* $cos^2x - 2xcosx + x^2 = 0$ *evet* $cos^2x = x^2$ *idi. Buradan* $2x^2 - 2xcosx = 0$*;* $0 = 0$

Mülakatçı: *Demek ki denklem doğruymuş.*

Önder: *Evet. Denklem doğru sağlamasını yapmış olduk. Yani illa ki* $[-1,1]$ *arasında bir değeri var da sürekli olduğundan dolayı. Ama mesela şurada aldığımız bir* 0.5 *değeri için* $cos0.5 = 0.5$ *olması gerekiyor ama işte oradan da…*

Mülakatçı: *O nasıl gösterilir?*

Önder: *Bir tane fonksiyon yazarsın buradan* $y =$*bilmem ne bir şey yazarsın. Sonra* x *gördüğün yere* 0.5 *yazarsın* y *değeri de* 0.5 *olursa bu denklem sağlanır diyebiliriz de ben bunu buradan nasıl çıkaracağım yani* y *fonksiyonunu nasıl çıkaracağımızı düşünüyorum şu anda.* $\frac{\pi}{2}$*, yani şu fonksiyonu şuradan sınırlandırsak şu grafik bir şey verir mi acaba?*

Mülakatçı: *Ne çizdin?*

Önder: *Bu bir tane fonksiyon illa ki elde etmem lazım, onun için* $[-1,1]$ *arasında bir tane grafik çizdim. Yani grafik dediğim* $cosx$*'in* $[-1,1]$ *arasındaki şeyini çizdim. Şöyle bir şey olacak bunu* y*' ye benzetebileceğim başka bir şey olur mu diye düşünüyorum da ki o da zor. İlla ki* cos *cinsinden olması gerekiyor.* $y = cosx$ *mesela fonksiyon. (öğrenci çaresiz düşünmeye devam eder) işte hocam kavram hatasına düşüyoruz.*

Mülakatçı: *Niye kavram hatasına düşüyorsun?*

Önder: *Yani illa ki* y*' li bir şey olacak ki fonksiyon olsun gibisinden düşünüyoruz ya. Bunu fonksiyon biçimine nasıl çevireceğiz onu düşünüyorum. Her iki tarafı* x*'e bölünce* $\frac{cosx}{x}$ *mi hocam. Bunda da limit durumuna bakarız.* $limx$ *hangi değer için bu olur… Evet. Bir dakika.*

Mülakatçı: *Ama burada sana hangi değer için sorulmuyor.*

Önder: *Yani illa ki bir tane olduğunu göstereceğiz. Evet ben bu aralığı bulmaya çalışıyorum işte,* $\frac{\pi}{2}$ *olmaz,* $-\frac{sinx}{1}$*… hım hocam* $lim_{x\to\infty}\frac{cosx}{x}$*için olmuyor değil mi?*

Burası 0 *olur.* $\frac{cosx}{x} = 1$ *buradan gideceğiz herhalde. Ne yapabiliriz buradan? Ya ben bunu bir türlü dilime dökemedim aslında şey yaptım da buldum da.*

Mülakatçı: *Oradan bir değer mi bulacaksın?*

Önder: *Bir değer değil hocam zaten bunun değerini gösteremem imkânsız gibi bir şey cetvel olmadan. Yani illa ki bu* x *sayısı* $[0,1]$ *arasında. Mesela bu* $0.76..$ *bilmem ne gibi bir sayı çıkar. Yani bunu bulmam imkânsız da en azından bir tane çözümünün olduğunu göstereceğim. Bu* $\frac{cosx}{x}$*'in* 1 *olduğu duruma bakıyorum şuan yani* $\frac{cosx}{x}$*'in illa ki* 1 *olacak yani değer var da. Bunu limit durumunda düşünecektik ya. Hıh* $lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{cosx} = 1$*' dir. Yani her tarafı* $cosx$*'e böldüm* $\frac{x}{cosx} = 1$ *geliyor. Ve ben bu* $\frac{x}{cosx}$ *in* 1 *olduğunu göstereceğim. Yani* $lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{cosx}$ *eşittir nedir bu duruma bakacağım. Burada türev alırsam çünkü* $\frac{\pi}{2}$ *yazınca sayı bölü sıfır belirsizliği olduğu için her iki tarafın türevini alırsam* $\frac{1}{-sinx}$ *olur o halde* $lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{cosx} = \frac{1}{-sinx} = 1$ *olur. Zaten bende denklem de* $\frac{x}{cosx}$ *in* 1 *olmasını göstermeye çalışıyordum. Buda şu durumda sağlanıyor işte* $lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{x}{cosx}$ *durumunda bu sağlanır.*

Mülakatçı: $x, -\frac{\pi}{2}$ *'ye giderken; yani şuradan yaklaşırken mi?*

Önder: *Evet. Aynen şöyle* $-\frac{\pi}{2}$ *'den yaklaşırken değerimiz de nereye gidiyor,* 1 *olmak zorunda. Yani şu fonksiyona şuradan yaklaşırken* $\frac{x}{cosx}$, $\frac{sayı}{0}$ *belirsizliği burada bir türev daha alınır ve* $\frac{1}{-sinx}$ *de yerine yazılınca* 1 *gelir diye düşünüyorum hocam.*

Mülakatçı: *Peki bu limit durumunun* 1 *olduğunu göstermen bu denklemin çözümünün olduğunu gösteriyor mu?*

Önder: *Yani bu soruda demek istediği yani şunla şu aynı şey* $\frac{x}{cosx} = 1$ *denkleminin neden en az bir çözümü olduğunu gösterin diyor. Ben bunu* $-\frac{\pi}{2}$ *ye götürürsem çözüm çıkar mı? Ama* $-\frac{\pi}{2}$ *olmaz ki değil mi hocam. Başka da bir şey diyemiyorum.*

Mülakatçı: *Tamam Önder.*

Önder'in Problem 6'ya Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Önder'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Fonksiyon grafiği, algoritmalar, aritmetik işlemler (transformasyonlar) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Önder, çözüm prosedürüne öncelikle her değerin yer aldığı trigonometrik cetveli hatırlayarak sonrasında da $cosx$ için fonksiyon grafiği çizerek başlamıştır. Tüm değerleri düşünerek yerleştirdiği grafik çizimini ezbere yapmamıştır. Bu aşamanın ardından $cosx$ in $[-1,1]$ aralığında olması gerektiğini belirterek x değerinin de bu aralıkta olacağı durumları düşünmüştür: $cosx$ fonksiyonun sürekli olduğuna vurgu yaparak, illaki bir x değeri için bu denklemin sağlanacağını belirten Önder, bu durumu gösterebileceği algoritmaların arayışına başlamıştır. Denklemin karelerini alma; her iki tarafı x'e bölme; limit durumlarını düşünme; türev alma gibi birçok yol denemiş ancak düşüncesini ispatlayacak bir çıkış yolu bulamayarak çözüm prosedürüne son vermiştir. Çözüm prosedüründe birçok düşünce dile getirse de tam manasıyla derinlemesine bir düşünce tarzı sergileyememiştir. Bu düşünceleri matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Önder akıl yürütme sürecinde yoğun bir görüş aktarımı gerçekleştirmiştir. Ancak süreç derinlemesine incelendiğinde, genel olarak düşüncelerini tekrar ettiği görülmektedir. Sorunun çözümüne dair zihninde oluşan yapıyı bir türlü aktaramadığını belirterek, bunu aktarmak amacıyla birçok algoritma uygulamasına yönelmiştir. Ancak bu algoritmalar, matematiksel özelliklere uygunluğu açısından değil, benzerliklerden hareketle uygulanmıştır. Bir sonuç elde etme umudu taşımaktadır. Hatta son uygulanan limit algoritmasında sonuca uyacak değerler seçilmiştir. Ancak bu durumun matematiksel bir alt yapısı yoktur. Bu sebeple Önder'in bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılmaktadır. Birden fazla algoritmaya yer verildiği için, belirtilen türün daha özel hali olan DAR, bu sürecin sınıfını oluşturmaktadır.

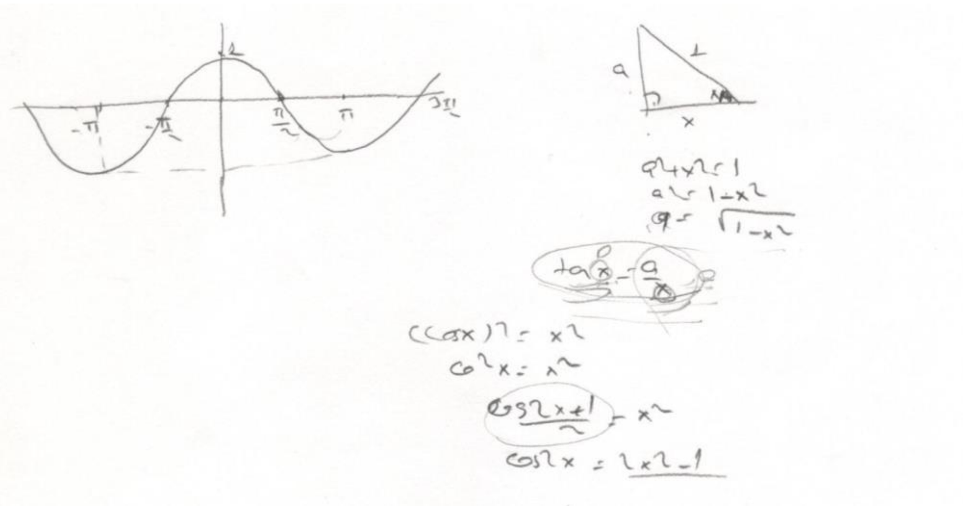
S4: Önder, çözüm sürecinde kullandığı algoritmalar ile konu ile alakalı birçok bilgiye sahip olduğunu göstermiştir. Ancak bu bilgiler arasında bağlantı kurma ve senkronize düşünme noktasında yaşanan eksiklikler nedeniyle bir sonuca ulaşılamamıştır. Kendi zihninde bir çözüm oluşturduğunu iddia edip bu çözümü açıklayamaması da bu durumun bir başka göstergesidir. Kavramsal bilgilere ait alt yapının daha sağlam oluşturulması, bilgi birikimine olan güven ve daha etkili düşünmelerin gerçekleştirilmesiyle bu durumun aşılabileceği savunulabilir.

Önder'in Problem 6'ya Ait Sınıflandırma Kodu

Önder'in Problem 6'ya ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{DAR_{xgy}}$olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü DAR; doğruluk kategorisinde, problemde herhangi bir sonuca ulaşıldığından x (belirsiz); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.6.6. Nurdan'ın problem 6'ya ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nurdan'ın Problem 6'ya ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.41, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.41. Nurdan'ın problem 6'ya ait çalışma kâğıdı

Nurdan'ın Problem 6'ya Ait Klinik Mülakat Transkripti

Nurdan: *(öğrenci soruyu sesli bir şekilde okumuştur) soruyu şuan da anlamadım. (bir daha okumuştur soruyu)* $cosx$*'in grafiğini çizsek, herhangi bir* x *değeri alacağız biz. Bir grafiğini çizeyim o zaman.* 0*'da* 1*'di,* $\frac{\pi}{2}$*'de* 0*'dı,* π*' de… Şöyle mi olacak, şurası da* $\frac{3\pi}{2}$ *olacak tamam şöyle (değerleri yerine yazarak grafiği oluşturmuştur). Şimdi en az* *bir çözümü olduğunu açıklayınız.* 2π*' de* 1. *Bir denklem oluşturacağım da… Şöyle yapsak şuraya* $cosx$ *dersek karşısı bölü işte* $\frac{x}{1}$ *desem şurası* a *olur* a*'yı bulurum (dik üçgen çizerek dar açıyı* x *yapmıştır ve* $cosx$ *i kullanmıştır.). Bu da bana ne verir… Şunu yazayım da (*a*'yı)… Bu da bir şey vermez ki. Mesela bu denklemi sağlayan bir değer bulsam.*

Mülakatçı: *Senden zaten o değeri istemiyor. En az bir çözümü olmasının sebebini istiyor.*

Nurdan: *İşte onu nasıl bulacağım?* tan *değerinden yola çıksak, tanımsız yapmayacak desek.*

Mülakatçı: *Dik üçgenden mi düşünüyorsun.*

Nurdan: *Evet.* $tanx = \frac{a}{x}$ *desem,* x*' e* 0 *versem* $tan0,1$ *dir ama öbür taraf tanımsız olacak. Ama* $tan0$ *tanımsızdır bu tarafta tanımsız olacak. Öyle bir şey desem? Yani şu eşitliği sağladım hani şunu elde edebiliyorum ya (yazdığı* tan *eşitliğini) şurası tanımsızsa şurası da tanımsız. Hani değerleri de oradan aldım.*

Mülakatçı: *Neredeki değerleri kullandın?*

Nurdan: *Hani şu* cos*' den aldım değerleri (dik üçgenden).* $tanx$ *dedim* $\frac{a}{x}$ *olsun dedim. Bunu tanımsız yapan değer şuraya* 0 *verirsek tanımsız oluyor; buraya da aynı değeri verdiğim için tanımsız oluyor. Burada bir eşitlik sağlandığı için diyeceğim ama…*

Mülakatçı: *Böyle bir şey sağlandığı için* $cosx = x$ *vardır mı diyorsun?*

Nurdan: *Evet. Başka bir şey gelmiyor gerçekten aklıma.*

Mülakatçı: *Peki şöyle desem sana, iki tane farklı fonksiyonun var, onlarında grafikleri var. Sana bu iki farklı fonksiyonun ortak çözümü var desem aklına ne gelir?*

Nurdan: *Kesişim gelir. Buradan neyi kesiştirebilirim ki? Mesela* $(cosx)^2$ *desem ne olur* $(cosx)^2 = x^2$ *olur.* $sinx$*'den gidelim, yine bir şey gelmez ki. sadece verileri yazmış olurum. Bunu da şöyle yazabilirim aslında* $\frac{cos2x+1}{2} = x^2$ *olur ama ne çıkacak buradan* $cos2x = 2x^2 - 1$. *Bir de böyle bir denklem geldi. Yani başka bir şey diyemeyeceğim.*

Mülakatçı: *Peki, daha önce böyle bir soruyla karşılaşmış mıydın?*

Nurdan: *Hayır. Hiç görmemiştim.*

Mülakatçı: *Sence sonuca varamama sebebin nedir?*

Nurdan: *Var değil mi bunun bir açıklaması?*

Mülakatçı: *Evet.*

Nurdan: *Bilmiyorum ki hocam daha önce hiç görmemiştim.*
Mülakatçı: *Tamam Nurdan.*

Nurdan'ın Problem 6'ya Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Nurdan'ın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Algoritmalar kümesi, aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Nurdan çözüm prosedürüne $cosx$ fonksiyonunun grafiğini çizerek başlamıştır. Kesim noktalarını tek tek düşünerek oluşturduğu bu grafikten herhangi bir yoruma ulaşamamıştır. Bu aşamadan sonra içinde bulunduğu kararsız durumdan, aklındaki $cosx$ ile ilgili algoritmaları deneyerek çıkmayı amaçlamıştır. Bu amaçla dar açısı x, dik kenarları a ve x, hipotenüsü 1 olan bir dik üçgen çizip Pisagor bağıntısını yazmış; aynı üçgenden yararlanarak $tanx = \frac{a}{x}$ olan değeri düşünmüş ancak bir sonuca ulaşamamıştır. Araştırmacının çözüme dair verdiği ipuçlarını da kullanmayan Nurdan, başka herhangi bir yorumda bulunamamıştır. Sadece aritmetik işlemlerin göz önünde bulundurularak, yüzeysel bir düşünce yapısının hakim olduğu bu çözüm prosedürü, matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Nurdan akıl yürütme sürecinde $cosx$ ile ilgili öğrenme yaşantılarıyla edindiği birkaç algoritmayı uygulayarak çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Ancak uyguladığı algoritmalarda kullanılan ifadelerin kavramsal özelliklerine odaklanmamıştır. Amacı $cosx = x$ 'e ulaştıracak x değerlerini bulmaktır. Bunu nasıl sağlayacağına dair herhangi bir tartışma ortamı oluşturup düşünmemiştir. Bu sebeple akıl yürütme sürecinde, işlemsel özelliklerin ağır bastığı, derinlemesine düşünmenin sergilenmediği, tartışma ortamının oluşturulmadığı AR, Nurdan'ın bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü olarak belirlenmiştir. Bir algoritma kümesinin içerisinden seçim yaptığı için AR'nin alt kategorisi olan DAR sınıfına da dahil etmek mümkündür.

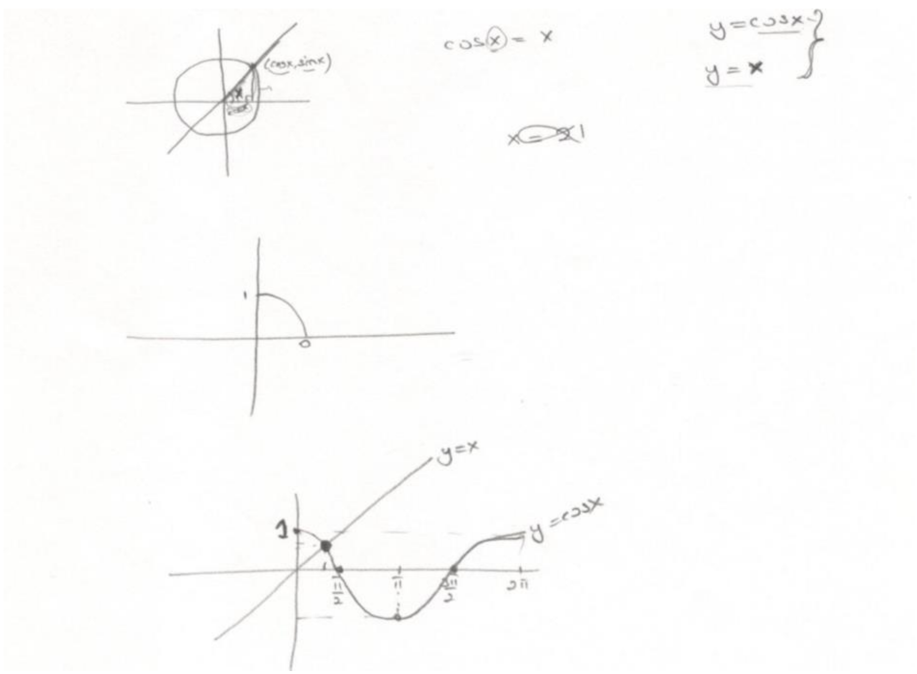
S4: Nurdan'ın ortaya koyduğu akıl yürütme sürecine bütüncül olarak bakınca, özellikle soruda sorulmak istenileni anlamadığı; sonrasında ise buna bağlı olarak kavramsal yorumlardan ziyade işlemsel ifadelere ağırlık verdiği görülmektedir. Araştırmacının, "*iki farklı fonksiyon grafiğinin ortak çözümü var denildiğinde ne anlıyorsun?*" şeklinde yönelttiği ipucuna "kesişim" olarak cevap vermiştir. Bu durum aslında onu çözüme götürmeye yetebilirdi. Ancak Nurdan, "*daha önce hiç görmemiştim*" sebebinin arkasına saklanarak etkili bir düşünce yapısı sergileyememiştir. O halde, öncelikle zengin kavramsal alt yapıya sahip olma, sonrasında da öğrenme tecrübelerinin derinlemesine düşünme de etkili olduğu savunulabilir.

Nurdan'ın Problem 6'ya Ait Sınıflandırma Kodu

Nurdan'ın Problem 6'ya ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **DAR**$_{\mathbf{xgy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü DAR; doğruluk kategorisinde, problemde herhangi bir sonuca ulaşıldığından x (belirsiz); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

4.2.6.7. Ece'nin problem 6'ya ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin Problem 6'ya ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.42, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.42. Ece'nin problem 6'ya ait çalışma kağıdı

Ece'nin Problem 6'ya Ait Klinik Mülakat Transkripti

Ece: *(Öğrenci soruyu sesli okumuştur) soruyu anlamadım. Neden en azından bir çözümü olduğunu açıklayınız. Yani bu eşitliğin doğru olduğunu mu göstermem gerekiyor?*

Mülakatçı: *Yani bu denklemi sağlayan en az bir değer var. Fakat bunu nasıl gösteririz. Sağladığı değeri değil yalnız çözümün olduğunu nasıl gösteririz.*

Ece: *En azından bir çözümü olduğunu açıklayınız. Bir değeri var ama onu nasıl bulduğumuzu mu açıklayacağız.*

Mülakatçı: *Evet.*

Ece: $cosx$ *(öğrenci burada bir koordinat düzlemi ve birim çember çizer). Kökleri… $2k\pi$ bir dakika…*

Mülakatçı: *Ne yapmayı düşünüyorsun tam olarak?*

Ece: *Bunu çözmeyi. Önce denklemi bulup onun nasıl olduğunu oradan gitsek.*

Mülakatçı: *Yeni bir şey yapmak istiyorsan üzerini çizip devam edebilirsin.*

Ece: *Düşünebilsem yapacağım da… Nasıl yapıyorduk onları ki…*

Mülakatçı: *Neyi hatırlamaya çalışıyorsun?*

Ece: *Köklerini, hani değerleri $2k\pi$ şeklinde yazıyorduk ya. Neden en azından bir çözümü var. Ben niye düşünemiyorum ki şimdi? (öğrenci düşünür sessizce) ne yapmam gerekiyor ki. $cosx = x$…*

Mülakatçı: *Mesela iki farklı fonksiyon düşün $y = \cdots$ gibi. Diyorum ki ben sana bu fonksiyonların ortak bir çözümü var. Bunu nasıl gösteririz? Ne olunca bunların ortak çözümü olur?*

Ece: *Bu ikisinin ortak çözümü ne durumda olur… Ayrı ayrı o zaman düşünsek bunları. Bunların ortak bir çözümü var ve birbirine eşit. Hangi durumda olur. $y = cosx$, $y = x$ buradan ne olabilir ki. Hangi durumda… Düşünemiyorum.*

Mülakatçı: *Neden düşünemiyorsun?*

Ece: *Neden düşünemiyorum, aslında zor bir şey değil de şimdi… $y = cosx$ in ortak çözümü... Bir şeyler geliyor gidiyor. (sessizce düşünür) grafikten gitmek istiyorum ama (ilk çizdiği birim çemberden)... Bunların ortak bir çözümü varsa bunları aynı yapan bir değer vardır. Onunda yeri önemli değil neden böyle olduğu… $cosx = x$ birbirine eşit* *yapan bir değer var. Yok hocam aklıma bir şey gelmiyor. Düşünüyorum yani, bu iki farklı denklem üzerinden de düşünüyorum. Ortak çözümü var diyoruz ya hani onu dememizin sebebini düşünüyorum. (öğrenci uzun sessiz zamanlar geçirmektedir.)*

Mülakatçı: *Peki sana $cosx$ in grafiğini çiz desem.*

Ece: *$cos0$ da 1, $\frac{\pi}{2}$'de 0. Ne yaptım ben. π' de -1.*

Mülakatçı: *Tamam bir de $y = x$'i çiz desem.*

Ece: *$y = x$'i. Bunların kesişim noktası neresi, herhangi bir şekilde çizsem (bu iki fonksiyonun grafiğini çizmiştir.)*

Mülakatçı: *Buradan bir şey görebilir misin?*

Ece: *Bunların bir kesişim noktası olduğu için mi ortak bir çözümü var?*

Mülakatçı: *Neden?*

Ece: *Kesişim noktası ikisini de aynı yapan bir değer var demek değil mi. Doğruları ayrı ayrı düşündüğümüzde ikisi bir noktada kesişiyorlar. Kesişmelerinin imkanı yok, kesiştiklerine göre de buradaki değer ikisini de sağlıyor. Bundan başka bir nedeni daha mı olmalı.*

Mülakatçı: *Bu işte nedeni…*

Ece: *Bu mu nedeni oluyor o zaman doğrudur.*

Mülakatçı: *Peki bu neden aklına gelmedi sence.*

Ece: *Ben bunu çizdim bunu niye çizmedim onu düşünüyorum şimdi. Grafik aklıma geldi ama neden buradan düşünemedim. Bilmiyorum. Kesişim noktaları olduğu için ortak çözümleri var.*

Mülakatçı: *Tamam Ece.*

Ece'nin Problem 6'ya Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Ece'nin akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Fonksiyon grafikleri bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Ece, problem durumunu okuduktan sonra bir çözüm prosedürü oluşturmakta oldukça zorlanmıştır. Öncelikle soruyu anlamadığını ifade etmiş; sonrasında da bir birim çember çizip, soruyla ilgili olduğunu düşündüğü bir kuralı hatırlamak için uğraşmıştır. Ancak matematiksel açıdan anlamlı herhangi bir yorumda bulunamayarak, "*ben neden düşünemiyorum*" şeklinde serzenişlerde bulunmuştur. Ece'nin süreçte herhangi bir ilerleme göstermemesi üzerine araştırmacı ipucu vermeye başlamıştır. Ortak çözümü olan iki farklı fonksiyondan hareket edebileceği ipuçlarına rağmen Ece herhangi bir düşünce oluşturamamış ve "*aklıma bir şey gelmiyor*" diyerek çözümü bırakmıştır. Sonrasında araştırmacı iki farklı fonksiyonun grafiğini çizdirmiş ve sonuca ulaştırmaya çalışmıştır. Ancak bu sürecin sonunda da prosedürü etkili bir şekilde anlamamıştır. Dolayısıyla oldukça yüzeysel bir düşüncenin hâkim olduğu çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Ece'nin akıl yürütme süreci, derinlemesine matematiksel düşüncelerden oldukça uzak bir şekilde ilerlemiştir. Verilen soruya dair kendi bilgi birikimini kullanacağı hiçbir ortam oluşmamıştır. Çözüm prosedürünün başında, birim çember ve $(cosx, sinx)$ noktasını çizmiş; ardından belirlediği bir algoritmayı hatırlamaya çalışmış ancak başarılı olamamıştır. Araştırmacı rehberliğinde bir çözüm oluşturup cevaba ulaşmıştır. Fakat ulaştığı bu cevabın da istenen cevap olduğunun farkına varamamıştır. Dolayısıyla matematiksel açıdan anlamlı ve derinlemesine hiçbir düşüncenin yer almadığı bu süreçteki akıl yürütme becerisi türü Person GAR olarak sınıflandırılabilir.

S4: Ece'nin, çözüm prosedürüne başlarken soruda sorulmak istenileni anlamaması nedeniyle, yorum yapma gücünün azaldığı düşünülmektedir. Ardından araştırmacının soruyu açıklamasına rağmen, Ece'den çözüme dair bir yorum gelmemesi bu düşüncenin etkisini azaltmıştır. Matematiksel açıdan oldukça sığ bir şekilde gelişen bu akıl yürütme sürecine odaklandığımızda; trigonometrik kavramlarla ilgili zayıf kavramsal alt yapı karşımıza çıkmaktadır. Çözümün araştırmacı tarafından buldurulması; Ece'nin bu durumu fark etmemesi, bahsi geçen konuyu ispatlar niteliktedir. Süreç sonunda araştırmacı destekli ilerleyen yolu, kendisinin neden düşünemediği sorulduğunda ise, "*Ben bunu çizdim bunu niye çizmedim onu düşünüyorum şimdi. Grafik aklıma geldi ama neden buradan düşünemedim. Bilmiyorum.*" şeklinde yanıtlamıştır. Yani Ece bu süreçte kendi eksikliklerinin farkında değildir.

Ece'nin Problem 6'ya Ait Sınıflandırma Kodu

Ece'nin Problem 6'ya ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **Person-GAR$_{\mathbf{dgy}}$**olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü Person-GAR;

doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak kodlanmıştır.

Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 6'nın çözüm prosedüründe yedi öğrenci tarafından kullanılmıştır. Çözüm prosedürleri incelenen bu yedi kişiden altısı da algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütmenin alt kategorisi olan sınırlandırılmış algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü (DAR) kullanmış; beş kişi de herhangi bir sonuca ulaşamamıştır. Analiz edilen akıl yürütme süreçlerinde en çok dikkati çeken nokta, öğrencilerin çözüm prosedürü oluşturmada yaşadıkları zorluktur. Bu zorluk neticesinde, amaçsızca ilgili veya ilgisiz algoritma uygulamaya yönelmişlerdir. Problem ile algoritma arasında kurulan bağlar oldukça yüzeysel kalmıştır. Zihinlerinde çözüme ulaştıklarına inansalar bile bunu dile getirecek şekilde açıklama yapamamışlardır. Sergilenen bu durumun, özellikle trigonometrik kavramlara yönelik kavramsal alt yapının zayıflığına işaret ettiği düşünülebilir. Ayrıca öğrencilerden birinin bu tarz soruyla hiç karşılaşmadığını ifade etmesi, akıl yürütme çalışmalarında öğrenme tecrübelerinin önemine bir kez daha işaret etmektedir.

4.3. Öğretmen Adaylarının Yaratıcılığa Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular

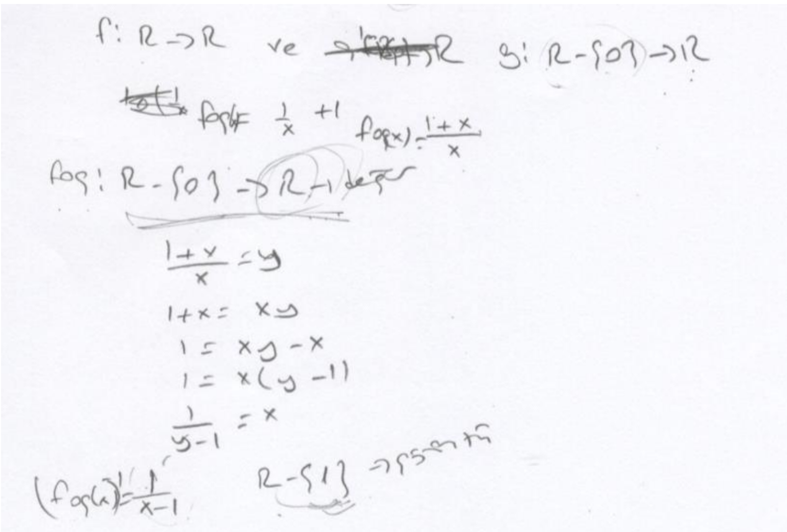
Yaratıcılığa dayalımatematiksel akıl yürütme sürecinde öğrenci, karşılaştığı problem durumuna ait çözüm yolunu tamamen kendi bilgi birikimi ile yapılandırarak sonuca ulaşır. Bu süreçte kullanmış olduğu matematiksel kavramlara dair açıklamalar yapar, sürece hâkimdir, tartışma ortamları oluşturarak uygulamış olduğu çözüm prosedürünü tartışır. Veri toplama aracında yer alan tüm problemler için, araştırmaya katılan öğrencilerin bazıları tarafından yaratıcılığa dayalımatematiksel akıl yürütme türü kullanılmıştır. Bunların dağılımı: Problem 1 için dört öğrenci; Problem 2 için, dört öğrenci; Problem 3 için, iki öğrenci; Problem 4 için, bir öğrenci; Problem 5 için, üç öğrenci; Problem 6 için, üç öğrenci şeklinde olmuştur. Akıl yürütme türünün uygulandığı problem durumu, öğrencinin çalışma kâğıdında yapmış oldukları, klinik mülakatın metin hali ve belirtilen yazılı dokümanlar ışığında araştırmacının yapmış olduğu analizler aşağıda sunulmuştur. Ayrıca sınıflandırma kodu ile öğrencinin sergilediği akıl yürütme süreci özetlenmiştir. Bu sayede tüm verilerin bütüncül olarak düşünülmesi sağlanarak, akıl yürütme becerilerine dair daha geçerli ve güvenilir sonuçlara ve yorumlara ulaşılacağı düşünülmektedir.

4.3.1. Problem 1

"$f(x) = x + 1$ $g(x) = \frac{1}{x}$ ise fog fonksiyonu için görüntü kümesini bulunuz."

4.3.1.1. Nurdan'ın problem 1'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nurdan'ın Problem 1'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.43, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.43. Nurdan'ın problem 1'e ait çalışma kağıdı

Nurdan'ın Problem 1'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Evet Nurdan ilk sorumuz fonksiyonlarla ilgili.*

Nurdan: *Görüntü kümesini bulacağız. Tamam şimdi f ve g verilmemişse biz R den R ye olduğunu kabul ediyoruz. f için R den R ye ve g için de işte R den R ye kabul ediyorum. Şey R den sıfırı çıkartacağım şuradan ($R - \{0\}$ dan R ye yazdı). Eğer bir şart* *verilmemişse en genel kümeyi alabiliyorduk biz. Tamam, kesişimleri önemliydi* fog *u yazmamız için tanım kümesi değer kümesini. Bir tane eleman bile ortak olursa yazabiliyorduk biz. Zaten bunda oluyor. O zaman yazabilirim. İşte* g *yi yazacam, yani* f *de* g *yi yazacağım. O zaman şöyle yazayım* $fog(x) = (1/x) + 1 = (1 + x)/x$. *Tamam, bunun görüntü kümesini bulacağım. Biz buraya hangi değerleri verirsek verelim… ha birde şunun hangi değerlerde olduğunu söyleyeyim. Ne yazdık önce* g *yi yazdık (burada* f *ve* g *nin tanım ve değer kümelerine bakarak yorum yapıyor.).* R *den* R *ye değil mi hocam? Gerçi ben size sormayacaktım* f *de* g *yi yazdık ilk elemanları* g *den aldı R geldi tamam. O zaman şöyle* $fogR - \{0\}$ *dan R ye gidecek. Görüntü kümesi, sıfır vermeyeceğiz zaten buraya. Eşittir y diyorum* $((1 + x)/x = y)$*. Tersini bulayım* $1 = xy - x$, $1 = x(y - 1)$, $x = 1/(y - 1)$ *o zaman görüntü kümesi… şurayı tekrardan düzenlersem* $fog^{-1}(x) = 1/(x - 1)$ *hani şuranın tanım kümesi (tersinin) onun görüntü kümesi oluyordu tersin daha doğrusu. O zaman diyorum ki işte* 1 *dahil değil bütün değerler için sağlanabilir.*

Mülakatçı: *Peki buradaki R nedir (ilk başta yazdığı* $fogR - \{0\}$ *dan R ye için).*

Nurdan: *Buradaki değer kümesi. İşleme başlamadan önce şey yaptık. Değer kümesi hani en geniş kümeydi. Görüntü kümesi* 1 *hariç hepsi olabilir* $(R - \{1\})$.

Mülakatçı: *Peki tanım kümesi neresi?*

Nurdan: *Tanım kümesi bu* $(R - \{0\})$. *Tanım kümesi değer kümesi diye başladık.*

Mülakatçı: *Değer kümesi ne demek?*

Nurdan: *Değer kümesi fonksiyonda* x *e verdiğimiz bütün değerler için işte en geniş kümeydi. Hani mesela reel sayılar kümesini elde ettik en geniş kümemiz. Ama reel sayılar içinde de* 1 *e giden eleman yok. Orası da görüntü kümesi olacak.*

Mülakatçı: *Tamam.*

Nurdan'ın Problem 1'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Nurdan'ın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Tanım, değer ve görüntü kümesi kavramları iii) Fonksiyon girdi çıktıları (nesne), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Nurdan çözüm prosedüründe ilerlerken attığı her bir adımı, matematiksel temellere oturtmaya çalışmıştır. Öncelikle verilen fonksiyonların tanım ve değer kümelerini bulmuş; sonra da bu kümeleri kullanarak bir bileşke fonksiyonunun yazılıp yazılamayacağını kontrol etmiştir. Kümelerdeki kesişim özelliğinden faydalanıp bileşke fonksiyonunun yazılabileceğini gösterdikten sonra bileşke fonksiyonunu ve tersini ifade etmiştir. Buradan hareketle de görüntü kümesini doğru olarak belirtmiştir. Çözüm prosedüründe kullandığı tanım, değer ve görüntü kümesi kavramlarına da matematiksel olarak anlamlı açıklamalarda bulunmuştur. Tüm bu süreç göz önüne alındığında, Nurdan'ın matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce yapısı ortaya koyduğu ve akıl yürütme süreci bileşenlerinin matematiksel olarak anlamlı olduğu görülmektedir.

S3: Nurdan, ortaya koyduğu akıl yürütme sürecinde zaman zaman algoritmalar uygulamış zaman zaman da tartışma ortamı oluşturmuştur. Fonksiyonların bileşke halini bulma ve bulduğu bileşke fonksiyonunun tersini elde etme aşamalarında algoritma uygulamıştır. Sorunsuz şekilde ilerlettiği bu algoritmalarda herhangi bir yorum yapmamıştır. Dolayısıyla akıl yürütme sürecinin bu aşaması AR özellik göstermektedir. Ancak gerek fonksiyonların tanım ve değer kümelerini belirlerken; gerekse de bileşke fonksiyonunun tanım, değer ve görüntü kümelerini belirlerken yapmış olduğu kendinden emin yorumlardan dolayı akıl yürütme sürecinin bu aşaması CR özellik göstermektedir.

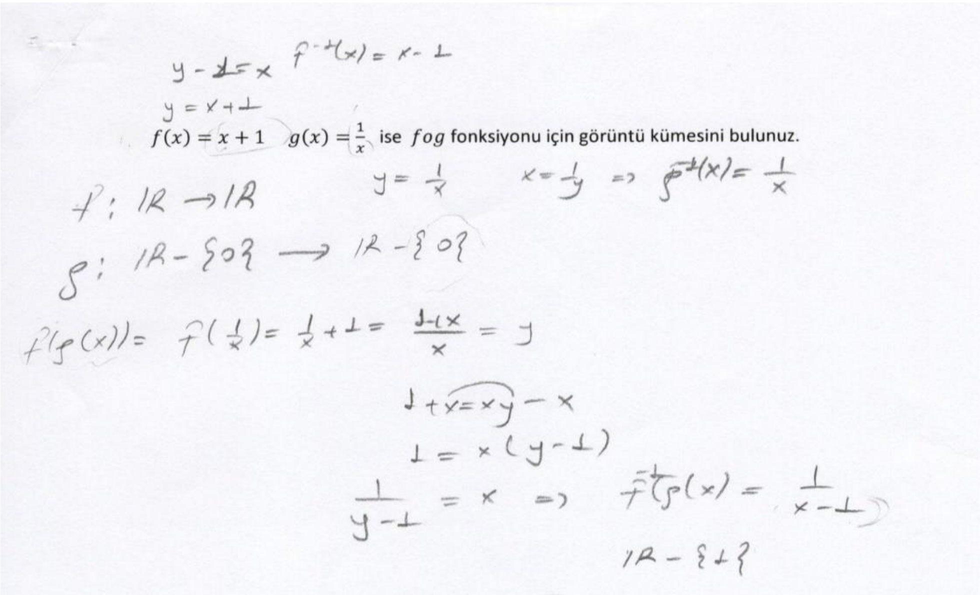
S4: Nurdan'ın akıl yürütme sürecinde kullandığı kavramlara, matematiksel olarak hakim olması onu doğru sonuca götüren önemli etkenler arasındadır. Tanım kümesi, değer kümesi ve görüntü kümesinin ifade ettiği anlamları bilmesi neticesinde bir tartışma ortamı oluşturmuş ve yorumlar yapabilmiştir. Ancak sahip olduğu bu kavramsal alt yapıyı öğrenme çevresindeki tecrübeleriyle mi yoksa bireysel çalışmayla mı oluşturduğuna dair herhangi bir yorum yapılamamaktadır. Çünkü bu konu ile alakalı bir açıklama ya da ifade görüşmede yer almamaktadır.

Nurdan'ın Problem 1'e Ait Sınıflandırma Kodu

Nurdan'ın Problem 1'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dld}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki farklı tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

4.3.1.2. Hikmet'in problem 1'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hikmet'in Problem 1'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.44, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.44. Hikmet'in problem 1'e ait çalışma kağıdı

Hikmet'in Problem 1'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Hikmet: *Tamam şimdi önce fonksiyonlar verildiği için fonksiyonun tanım kümesi görüntü kümesi verilmemiş. Bunu da verilen fonksiyon üzerinden belirleyeceğiz. Mesela* $f(x)$ *fonksiyonu için tanım kümesine baktığımızda bunu tanımsız yapan bir nokta yok o yüzden reel sayılardan, hani şuraya y desek fonksiyonun tersini alsak* $y = x + 1$, $y - 1 = x$ *oluyor. Bu fonksiyonun tersini veriyordu. Buda* $f^{-1}(x) = x - 1$ *yapıyor. Burada da yine fonksiyonu tanımsız yapan değer yok o yüzden reel sayılardan reel sayılara oluyor.*

Mülakatçı: *Tamam*

Hikmet: *Bu fonksiyona baktığımız zaman* g *fonksiyonunda da tanım kümesine baktığımızda tanımsız yapan bir nokta var. Oda* 0 *sıfır noktası. Onun dışında tanımsız yapan bir nokta yok. O yüzden reel sayılardan sıfırın çıkarılmış halidir* $(R - \{0\})$. *Görüntü kümesini incelediğimiz de* $y = 1/x$ *yapacak tersini incelediğimiz de* $x = 1/y$ *olur. Yani buda* $g^{-1}(x) = 1/x$ *i verir. Yine burada da reel sayılardan sıfır çıkarmak zorunda kalacağız* $(R - \{0\})$. *Şimdi fonksiyon* f *altında* g *fonksiyonu* $f(g(x))$ *evet bunun görüntü kümesini soruyor bize. Bunu nasıl bulacağız (öğrenci düşünmektedir). Şöyle yapabiliriz yine fonksiyonda yerine yazabiliriz yani* $f\ (1/x) = (1/x) + 1$ *olur. Buradan da* $(1 + x)/x$ *şeklinde gelir buda yine y ye eşittir. Burada* x *i yalnız bırakıp tersini bulacağız.* $1 + x = xy$ *yapar* $1 = x(y - 1)$ *olur buradan da* $1/(y - 1) = x$ *olur. Dolayısıyla verilen fonksiyonun tersini* $1/(x - 1)$ *olarak buluruz. Buradan da burayı tanımsız yapan bir değer vardır o da* 1 *dir. O yüzden görüntü kümesi olarak baktığımızda görüntü kümesi reel sayılardan* 1 *in çıkarılmış halidir* $(R - \{1\})$.

Mülakatçı: *Daha önce böyle sorularla karşılaştın mı?*

Hikmet: *Yani karşılaştım da hani ilk önce şöyle düşünmüştüm biraz önce de düşünmüştüm ama hani dedim direk sonuçta bunun görüntü kümesi bunun tanım kümesi olacak. Oradan gideyim dedim ama oradan zorlanacaktım çünkü bunu yerine yazdığım zaman birde bunun tersini aldığım zaman farklı bir fonksiyon ortaya çıkacak ama burada yazdığımız zaman farklı bir fonksiyon ortaya çıkmıyor. Hani tanım kümesi olarak direkt bu geliyor. Buna bağlı bir görüntü kümesi bulacağız oda biraz işimizi zorlaştıracak.*

Mülakatçı: *Öyle tek tek düşününce, tamam.*

Hikmet'in Problem 1'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Hikmet'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Tanım ve görüntü kümesi kavramları iii) Fonksiyon girdi çıktıları (nesne), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Hikmet uyguladığı çözüm prosedüründe izlediği adımları açıklayıcı bir yol kullanmıştır. Öncelikle verilen her bir fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini belirlemekle işe başlamıştır. Tanım kümelerine nasıl ulaştığını belirttikten sonra fonksiyonların terslerinden hareketle görüntü kümelerini de oluşturmuştur. Bu adımların ardından bileşke fonksiyonunu oluşturup yine ters fonksiyon özelliğinden görüntü kümesini ortaya çıkarmıştır. İzlemiş olduğu bu çözüm prosedürü ve süreçte yer verdiği kavramları matematiksel olarak anlamlı kullanmıştır. Yine matematiksel olarak derinlemesine özellikleri göz önünde bulunduran bir düşünce sergilemiştir.

S3: Hikmet akıl yürütme sürecinde hem algoritmadan faydalanmış, hem de matematiksel olarak derinlemesine düşünceler sergilemiştir. Fonksiyonların görüntü kümelerini bulma ve bileşke fonksiyonu oluşturma aşamasında algoritmaları kullanarak sonuca ulaşmıştır. Algoritmaları uygulama esnasında ise herhangi bir açıklamada bulunmamıştır. Bu sebeple belirtilen kısımlardaki akıl yürütme becerisi türü AR'dir. Verilen f ve g fonksiyonları ile fog fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulma aşamalarında ise kavramlarla ilgili yorumlar yaparak ilerlemiş ve sonuca ulaşmıştır. Oluşturduğu tartışma ortamlarından dolayı belirtilen bu kısımlardaki akıl yürütme becerisi türü ise CR özelliklerini taşımaktadır.

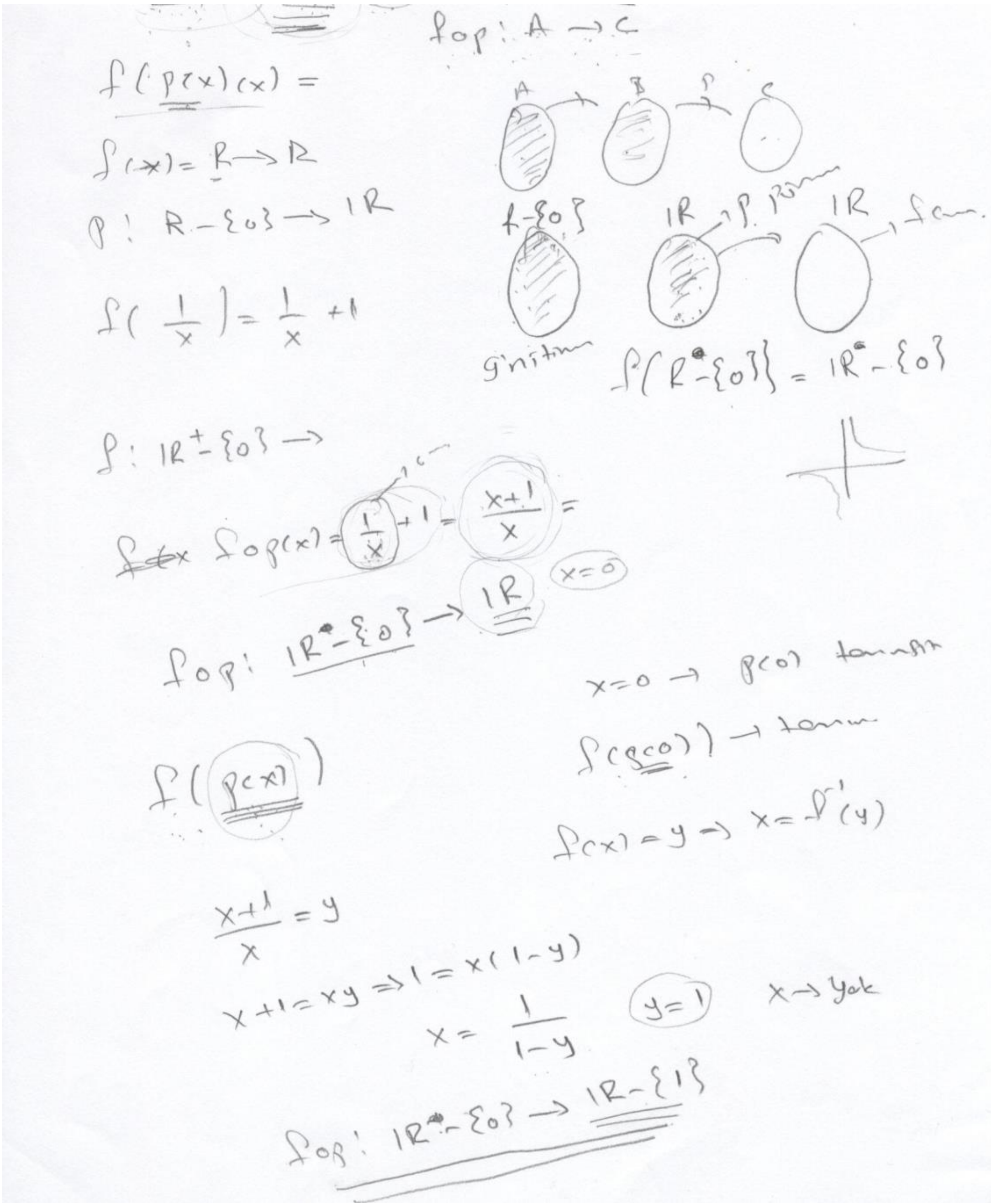
S4: Hikmet'in bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme süreci incelendiğinde, kullandığı kavramlara hâkim olduğu anlaşılmaktadır. Uygulamış olduğu çözüm prosedürünün dışında farklı bir çözüm prosedürünü de zihninden geçirdiğini görüşmenin son kısmındaki *"… oradan gideyim dedim ama oradan zorlanacaktım…"* ifadesinden anlıyoruz. Yani Hikmet'in, birden fazla yolu düşünebildiği anlaşılmaktadır. Bu durum ise sağlam bir kavramsal alt yapı ile mümkün olabilir. O halde Hikmet'in sergilemiş olduğu bu sürecin altında sağlam bir kavramsal alt yapının varlığından söz edebiliriz.

Hikmet'in Problem 1'e Ait Sınıflandırma Kodu

Hikmet'in Problem 1'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dld}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki farklı tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

4.3.1.3. Harun’un problem 1’e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Harun’un Problem 1’eait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.45, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.45. Harun’un problem 1’e ait çalışma kağıdı

Harun'un Problem 1'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Harun: *Şimdi hocam bu fonksiyon sorusunda bize şey yapıyor ya,* fog *üzerinden işlem yapmış. Burada genelde bizim yaptığımız işlem direkt, şu mantıkta yazıyoruz ya bu işlem boyutu olarak burası doğru ama bunun birde* fog *nin tanım kümesi var. İşte A'dan C'ye filan. Bu boyutta teorik boyutta genelde sıkıntı yaşanıyor. Onun için bunun şey yapacağız görüntü kümesi tanım kümesi filan belirlerken ayrı ayrı bunları belirleyeceğiz. Ondan sonra işte fonksiyonu tanımladığımızda ona göre tanımladığımızda bu ikisinin de ortak ara kesişimi filan ona göre görüntü kümesini tespit etmek gerekecek. Şimdi burada* $f(x)$ *fonksiyonunun tanım kümesi şöyle yazayım R'den R'ye bu tamam zaten bunda sıkıntı yok doğrusal fonksiyon.* $g(x)$ *e bakarsak,* $g(x)$*' de buda yine* $R-\{0\}$ *dan* R *ye hareket eder. Burada baktığımız zaman şimdi bunu kümesel olarak birleştirip A B C mantığında f fonksiyonu buraya taşıyor g fonksiyonu buraya taşıyor. Yani o zaman bizim ilk önce şu tanım kümesini belirlerken* fog *yi A'dan C'ye diyoruz ama burada mesela şunun tanım kümesine tüm reel sayılardaki ifade var. Biz eğer bunu* R *den* R *ye hareketle şey yaparsak burada sıfır çıkan ifade olacak burada sıfırı şu fonksiyonda yerine yazarsam sıkıntı olacak. Onları ayarlamak gerek görüntü kümesinin tespiti için şimdi bunu çözümde oluşturmaya çalışırsak burada* fog *den C ye. Biz ne yapmaya çalışıyoruz* f *lerin içine* g *leri yazıyoruz. O zaman şöyle mi yapacağız. Şurası* $R-\{0\}$ *olacak bu* R *ye tanımlı burdan da yine* R *ye tanımlı. Bunları şimdi ayarlarız.* fog *de de şunu yazacağız.* $f(x)$ *de* f *yerine* $1/x$ *oda* $(1/x)+1$*. Şimdi burda (öğrenci düşünür). Buradan baktığımız zaman* $R-\{0\}$ *ları bu hep alacak bunu* R *ye taşıyacak ama şimdi bu şey şöyle gösterirsek şu kümeyi* $R-\{0\}$*'ın görüntüsü diye burada* 0 *dan farklı reel sayıları üretebilme şansımız var mı diye düşünüyorum. Bunun görüntü kümesi şu* g *fonksiyonunun görüntü kümesi yine* $R-\{0\}$ *ı üretecek. Bunu grafikselde düşünelim. Bunun grafiği böyle bunun grafiği böyle sıfır alamıyor. Evet ondan sonra buradan* g *lerde bunu bu tarafa götürecek.* f *fonksiyonu da o zaman* $R-\{0\}$ *dan alacak nereye taşıyacak oradan* fog *fonksiyonunu bulursak x gördüğümüz yere* $1/x$ *yazarsak* fog *ne yapacak (1/x)+1 oda (x+1)/x. Şimdi bunun da görüntüsüne bakarsak bunun sıfır olma şansı da var. Negatif olma şansı da var. Şunun işaretini bir incelesem mi. Buda aynı mantık yapar. Grafiksel* *olarak negatif değer de alır pozitif değer de alır. xeşittir* -1 *için* 0 *da alır. O zaman biz* fog*'yi* $R-\{0\}$ *dan* R *ye tanımlarız.*

Mülakatçı: *Karşılıklarını tek tek düşündün karşısındaki değerleri mi yazdın?*

Harun: *Şimdi burada ne yaptım toparlayacak olursak. Şeyden hareketle gittim. Şimdi ben* fog *fonksiyonunu bulmam lazım ama benim burada neyi şey yapmam lazım. ıı şu şekilde yazıyorum ya* $f(g(x))$*'ler yazıyor. Aslında benim* f *'nin içine yazdığım* $g(x)$*'ler.* $g(x)$*'leri üreten elemanları biz şu küme mantığından düşünürsek şurası* g*'nin tanım kümesi (A kümesini taradı) burası* g*'nin görüntü kümesi (B kümesini taradı) bir değer kümesi görüntü kümesi olayı. Burası da* fog*'nin işte* $f(x)$*'in görüntü kümesi. Aslında buradaki mantıkta* g*'nin görüntü kümesi* f*'nin değer kümesi şey tanım kümesi olmuş oluyor. O yüzden bizim burada şey yakalayabilmemiz lazım. Küme olarak mesela burayı tanımsız yapan değerler varya, o tanımsız değerleri alırsak burda* $f(x)$ *de problem yaratacak ıı buraya yazdığımız zaman. Mesela şurada diyelim ki sıfırı aldık.* g *nin tanım kümesinde* $x=0$ *ı düşünürsek* $g(0)$ *tanımsız. Bu durumda biz eğer bu* $g(0)$ *ı burda bu şekilde almazda* R *den* R *ye düşünürsek burada* $f(g(0))$ *olacak. İçerisi tanımsız olduğu için burda da yine bir sıkıntı yaratacak.* fog *nin de tanımı yapılamayacak. Buda tanımsız olacak. O zaman burada şeyi seçmemiz lazım işte tanımsız yapan görüntüleri. Hareket noktamız* $g(x)$ *üzerinden olmalı ki çünkü biz* $g(x)$ *in üzerine hareket ediyoruz. Birinci belirleyici noktamız burası. O zaman şu* $g(x)$ *i tanımsız yapanları bulup seçmemiz lazım. ondan sonra eğer* $f(x)$ *de de tanımsız yapanlar olsaydı* $g(x)$ *inkileri seçtikten sonra* $g(x)$ *in görüntü kümesinden de onların arakesitini alacaktık. Ama şimdi* $g(x)$ *in görüntü kümesiyle* $f(x)$*in normalde ayrı ayrı düşününce oluşan tanım kümesinin arakesiti de zaten direk* $g(x)$ *in görüntü kümesini verdiği için biz o şekilde burda direkt şey yaptık. Yani bununda mesela reel sayılar çıktı görüntüsü biz burada* f *de tanım kümesi diye kabul ettik. fnin normaldeki tanım kümesi de pozitif reel sayılar olsaydı mesela burası pozitif reel sayılardan hareketle öbür tarafa tanımlanacaktı.*

Mülakatçı: *Peki şimdi bu bulduğun küme nedir?*

Harun: *Şimdi şurası tanım kümesi olacak* fog *nin (*fog *nin tanım kümesi* $R-0$*). Şimdi bir de görüntü kümesi bulmamız lazım. görüntü kümesini de şeye göre bulabiliriz. İki farklı şekilde de bulabiliriz. Şu fonksiyonun tersini bulabilirsek (*fog *nin) o tersinin de şimdi…*

Mülakatçı: *Tanım kümesi gibi düşünüp…*

Harun: *Tanım kümesi gibi düşünüp tersini tanımsız yapmayan değerleri, orada karşılığında en az bir x değerleri olması lazım oradan hareketle onu da buluruz. $(x+1)/x=y$ şeklinde düşünürsek; şunu biliyoruz zaten $f(x)=y$ ise $x=f^{-1}(y)$ mantığından hareketle buradan $x+1=xy$ 1 eşittir x parantezine alırsak $1-y$ şimdi burdan da x i çekersek $1/(1-y)$ olacak. Şimdi biz burda $y=1$ değeri için burada x yok tanımsız. O halde biz şu ifadenin de görüntü kümesini üretebilmek için fog yi $R-\{0\}$ dan $R-\{1\}$ e tanımlarsak bir sıkıntı olmaz diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Peki burada mesela önce tek tek düşündün R ye yazdın.fog yi $R-\{0\}$ dan R ye yazdın hangisi doğru.*

Harun: *Şimdi orada tek tek düşünüp fog için $R-\{0\}$ dan R ye dedim (öğrenci tekrar ederek düşünüyor). Tersinden baktığım zaman bunu bulduk. Tersini tanımsız yapıyor. Tersini tanımsız yapıyorsa… Burası R olsa burayı tanımsız yapan değer ne ki $x=0$ tanımsız yapar bunu. Buradan sıfır gelebilir. 1 çıkma şansı var mı bunun ($(x+1)/x$ in). Şimdi şu doğru hocam (son bulduğunu çizerek). Niye bu doğru çünkü şu ya bunun 1 çıkma şansı yok. Şurda hata yaptık biraz. Bunun 1 çıkması için şu kısmının sıfır çıkması lazım ($(1/x)+1$ ifadesi için yorum yapıyor). Buranın 0 olabilmesi içinde 1/x in görüntüsünde biz zaten 0 ı çıkardık. Bunu 0 yapacak değer yok. Bunu sıfır yapacak değer olmadığından şu son hali doğru. Şurayı hatalı yaptık.*

Mülakatçı: *Tamam.*

Harun'un Problem 1'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Harun'un akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Tanım kümesi, görüntü kümesi ve bileşke fonksiyon kavramları iii) Fonksiyon girdi çıktıları (nesne), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Harun çözüm prosedürüne başlarken, bileşke fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerini belirleme aşamalarında yapılabilecek hataların farkında olduğunu belirtmiştir. Bu sebeple adım adım ilerlemek gerektiğini ifade ederek verilen her iki küme için de tanım ve görüntü kümelerini oluşturmaya çalışmıştır. Kümeleri oluştururken oldukça ayrıntılı açıklamalarda bulunarak, matematiksel açıdan derinlemesine bir düşünce şekli ortaya koymuştur. Düşüncelerini şekilsel ve grafiksel olarak farklı yollarla da ifade etmiştir. "*Küme olarak mesela burayı tanımsız yapan değerler varsa, o tanımsız değerleri alırsak burada* $f(x)$*'de problem yaratacak.*" şeklinde neden belirterek yapmış olduğu açıklamalarla bileşke fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesine ulaşmıştır. Takip ettiği tüm bu adımlar, kavramlara yönelik açıklamalar ve uyguladığı aritmetik işlemler matematiksel olarak anlamlıdır.

S3: Harun akıl yürütme sürecinde ezberden bir bilgi, hatırladığı bir soru ya da anlamını bilmeden kullandığı bir algoritmaya yer vermemiştir. Kullandığı her bir kavramın matematiksel olarak ifade ettiği anlamı belirtebilmiş, o anlama uygun yorumlarda bulunmuş ve uyguladığı çözüm prosedürüne hâkim bir tablo çizmiştir. Sonuç olarak da doğru bir cevaba ulaşmıştır. Akıl yürütme sürecinin belli kısımlarında, örneğin ters fonksiyonu bulma gibi, bir algoritma kullanmasına rağmen, bu kısımlarda açıklayıcı notlar belirtmiştir. Harun'un matematiksel açıdan oldukça derinlemesine bir düşünce yapısının hâkim olduğu akıl yürütme becerisi türü, belirtilen sebeplerden dolayı CR olarak sınıflandırılabilir.

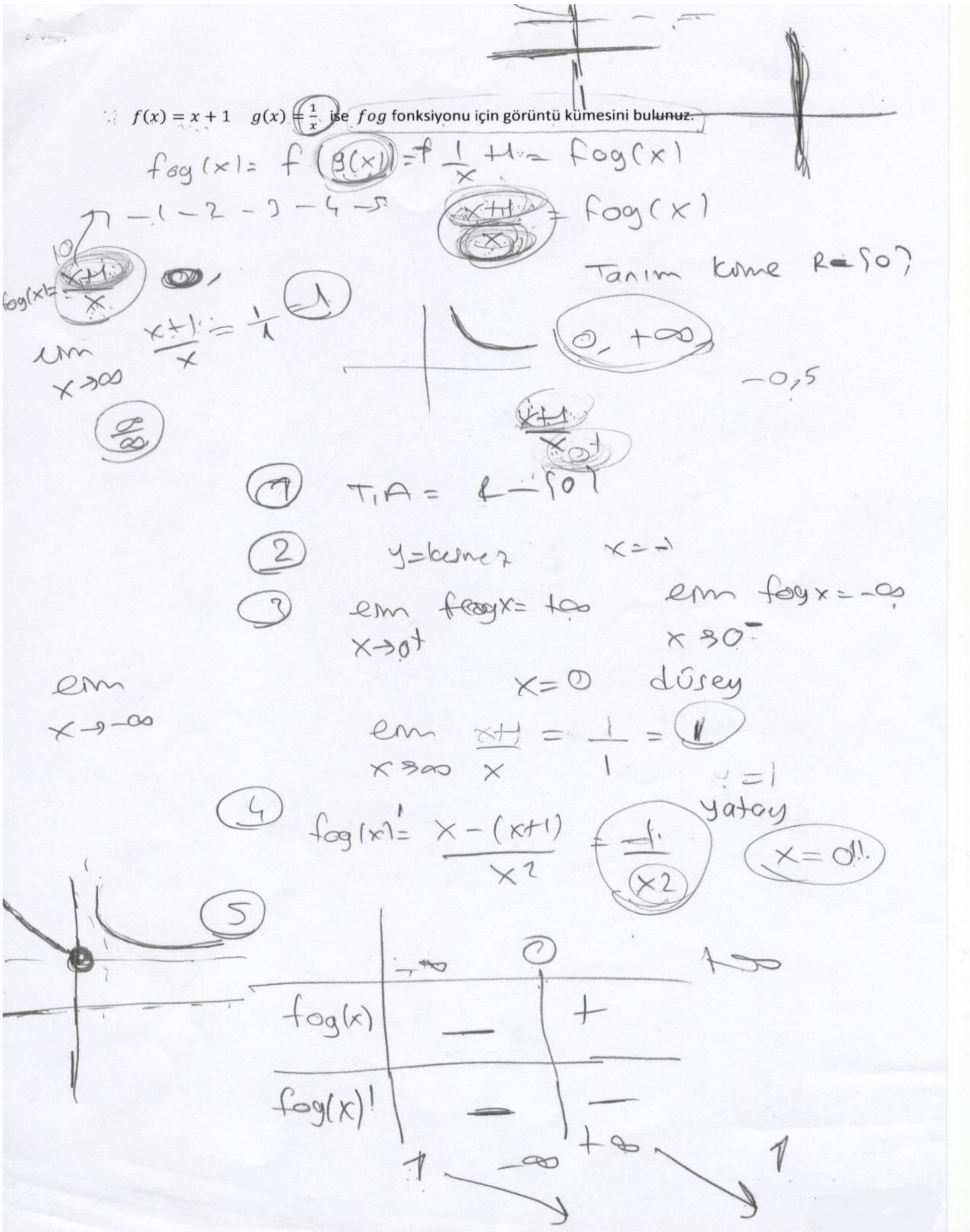
S4: Harun çözüm prosedürünü uygularken tıpkı bir öğretmen gibi davranmıştır. İzlediği yolu açıklamalarla zenginleştirip, onu dinleyen insanın zihninde soru işareti bırakmamacasına bir anlatım sunmuştur. " *Bu boyutta teorik boyutta genelde sıkıntı yaşanıyor. Onun için bunu şey yapacağız, görüntü kümesi tanım kümesi belirlerken ayrı ayrı bunları belirleyeceğiz.*" Şeklindeki ifadesinden de anlaşıldığı üzere kavramsal olarak yaşanabilecek sorunların farkında olduğunu belirtip; bu sorunları gidermeye yönelik bir yol takip etmiştir. Sunmuş olduğu bakış açısıyla matematiksel akıl yürütme sürecini ilerletirken sağlam bir kavramsal alt yapı kullanmıştır.

Harun'un Problem 1'e Ait Sınıflandırma Kodu

Harun'un Problem 1'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dgd}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek bir tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

4.3.1.4. Umut'un problem 1'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Umut'un Problem 1'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.46, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.46. Umut'un problem 1'e ait çalışma kağıdı

Umut'un Problem 1'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Evet Umut şimdi ilk sorumuz. Sesli düşünerek nasıl yaptığını anlatmanı istiyorum.*
Umut: *Çalışmadığım yerden gelmedi hocam.*
Mülakatçı: *Az çok aklındadır.*
Umut: Fog *fonksiyonunun görüntü kümesini bulurken bileşke fonksiyonlarında her zaman ilk yaptığımız hocam* f *de* $g(x)$*i bulurken bileşkeyi dağıtıyoruz açıyoruz. Sonra* $g(x)$ *in tanım kümesinden yola çıkarak* fog *fonksiyonunun görüntü kümesini bulmaya çalışıyoruz. Ama burada parçalı bir fonksiyon verildiği için tamam yazalım.* x *gördüğüm yere* $1/x$ *yazıyorum.* $f(g(x))(1/x)+1$ *oluyor fonksiyon. Bu* fog *fonksiyonu oluyor. şunu da düzenlediğimiz de* $(x+1)/x$ *in fonksiyonu olur. Bunun tanım kümesini bulursak tanım kümesi reel sayılardan sıfırı çıkartıyoruz* $(R-0)$*. Çünkü paydayı sıfır tanımsız yaptığı için tanım kümesinde olmuyor. Eee* $(x+1)/x$ *yani* $(1/x)+1\ .x$ *in ıı öylemi yapsam.* $1/x$ *in grafiği normalde söyle bişey (öğrenci grafik çizmiştir).* $+1$ *birim diyor bir birim de öteleme yapabiliyor muyduk bunlarda. Veya şeyden yapabiliriz hocam* x *in alabileceği değerleri bularak. Yani* x *sıfır alamayacaktır.* x *in – değerleri için ifade* $-3,-4,-5$ *için payda negatif, payı da negatif pozitif olacaktır +sonsuz oluyor. En küçük aldığı değer burada* -1 *için sıfır alır.* 0 *ile +sonsuz arasında olur görüntü kümesi. Yani* $(x+1)/x$ *in görüntü kümesi bulunursa aldığı değerler en küçük değer* 0 *olur en büyük değer de +sonsuz olur. Diye düşünüyorum ama.*
Mülakatçı: *Tam olarak nasıl karar verdin orayı bir daha açıkla bana.*
Umut: $(x+1)/x$ *ya fonksiyonum* $fog(x)$ *ilk önce tanım kümesi.*
Mülakatçı: *Nasıl buluyorsun tanım kümesini.*
Umut: *Hı görüntü kümesi* x *in azalan değerlerine karşılık yani* $-1,-2,-3,-4,-5$ *için mesela şunun* $((x+1)/x)$ *maksimum alabileceği değer* 0 *dır.* -1 *için 0dır. Çünkü diğer değerlerde burası her zaman negatif olacaktır, payda da negatif olacaktır. Negatifin negatife oranı pozitif olacağından* $+$ *bir değer alabilir. En büyük değer de yani bu yaklaşırsak limit olarak, yani limit alırsak* x *sonsuza giderken* $(x+1)/x$ *in en büyük değeri de şey olur…*
Mülakatçı: *Limit alma sebebin ne?*

Umut: *Gerçi limit aldığın zaman bunun yığılma noktasının* 1 *de toplandığını söyleyebilirsin. En büyük aldığı değeri yani +sonsuz versek mesela sonsuz bölü sonsuz belirsizliği olur. Yani* $+$ *sonsuzdaki bir değerini düşünsek sonsuz bölü sonsuz bir belirsizlik çeşidi olur. Belirsizliği ortadan kaldırmak için limit almak lazım. limiti de aldığımızda* $(x+1)/x$ *in bilmiyorum yanlış mı düşünüyorum hocam.*

Mülakatçı: *Düşündüklerini yaz.*

Umut: $1/1$ *gelir mesela. En büyük değeri de* 1 olur.

Mülakatçı: *Peki senden en büyük değer mi isteniyor yoksa görüntü kümesi mi? Görüntü kümesi nedir?*

Umut: *Görüntü kümesi yani fonksiyonun tanım kümesindeki elemanlarına karşılık elde edilen sonuç. Yani bir sabit sayı gibi bir şey, sabit sayı. Oradan mesela değer vererek bulsak hocam nasıl oluyor.* 10 *desek* $11/10$ *ya da* 11 *desek* $12/11$ *yani bu dizinin alabileceği bir sürü değer vardır. + sonsuza doğru gider mi acaba.*

Mülakatçı: *Görüntü kümesi diyorum sana.*

Umut: *Hocam illa yani grafiğini çizdireceksiniz bana.*

Mülakatçı: *Tamam çiz.*

Umut: *Çizelim. Tanım aralığı reel sayılardan sıfırı çıkartıyorum* $(R-0)$. *Eksenleri kesen noktalar* $x=0$ *için* y *yi kesmez.* $y=0$ *için* $x=-1$ *dir. Limit x sıfırın sağından yaklaştığında sıfırdan büyük değerlerle yaklaştığında nereye gidecektir sıfırdan büyük değer verdiğimiz zaman, yukarısı pozitif aşağısı sıfırın sağı artı sonsuz olacaktır.* fog *x diyorum hocam artı sonsuz (* $lim_{x\to 0^+}(fog)(x) = +\infty$ *). Limit x sıfırın solundan yaklaştığında yukarısı yine pozitif olacaktır, aşağısı sıfırın solu olacaktır. Fog x bu sefer eksi sonsuz olacaktır. Yani* $x=0$ *düşey asimptot olacaktır (* $lim_{x\to 0^-}(fog)(x) = -\infty$*). Sonra limit sonsuza giderken* $(x+1)/x$ *i yazdığımızda* ∞/∞ *belirsizliği gelecektir. Onun da limitini alırsak* $1/1$ *den 1 gelecektir L-hospital kuralını uyguladığımızda. Yani* $y=1$ *de yatay asimptot olur. Zaten payın derecesi paydanın derecesine eşit olduğundan eğik ya da eğri onlardan bahsedemiyoruz. Türevini aldığımızda* $\frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$ *gelir. Yani bunun x=0 için mesela sıfırda çift katlı kökü vardır.* 0*, düşey asimptottu. Yani ikinci türevine bakmaya gerek yok. Son olarak sıfırdaki durumunu inceleriz fonksiyonun. Hangi fonksiyonun* $fog(x)$ *fonksiyonunun ve türevinin. Fonksiyona sıfırın sağından bir değer versem pozitif olur. Sıfırın solundan bir değer verdiğimde mesela*

-0.5 *bu pozitif olur. Burası da negatif olur. Pozitifin negatife oranı negatif olur. Türevinde verdiğimde sıfırdan büyük burası pozitiftir ama yukarısı negatif olduğundan negatif negatif olacaktır. Sıfırın sağında + sonsuza gidecektir. Sıfırın solunda da - sonsuza gidecektir. Bir de limit artı sonsuz ve eksi sonsuzdaki durumlara bakıyordum. O da her zaman 1 olacaktır. Yani eksi sonsuz ve artı sonsuzdaki durumları* 1 *e gidecektir. Yani 1 den – sonsuza azalan bir grafik; + sonsuzdan da* 1 *e azalan bir grafik. Grafiğini de çizersek* $x = 0$ *düşey asimptot. Yani* y *ekseni.* $y = 1$ *de benim yatay asimptotumdur. – sonsuzdan 1 e geliyorum azalarak yaklaşıyorum..*

Mülakatçı: *Grafiğini çizince oradan görüntü kümesini nasıl bulacaksın?*

Umut: *Yani grafikle en büyük aldığı değeri ve en küçük aldığı değeri bulabiliriz.* $x - \infty y$ *si bir. – sonsuza* 1 *den geliyor. Şöyle bir şey olacak sıfır için de 1 değerini almayacaktır. Sonra + sonsuzdan 1 e doğru azalıma geçecektir. Böyle bir şey çıktı ama. Garip bişey çıktı.*

Mülakatçı: *Tamam peki görüntü kümesi?*

Umut: *Görüntü kümesine bakarsak bu grafiğe göre şurada mesela* 1 *e yaklaşıyor. Şuradan + sonsuz değerini alabiliyor. Yani en büyük değeri* $+\infty$ *gibi görünüyor. En küçük değeri de mesela 0 oluyor yani. En küçük değeri 0 mı oluyor hocam? Bir düşüneyim şunu da alır mı?* 1 *için, yani en küçük değeri 0 olur her zaman en büyük değeri de grafikten anlaşıldığı üzere* $+\infty$ *olduğunu söylüyorum ama bilmiyorum hocam.*

Mülakatçı: *Tamam.*

Umut'un Problem 1'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Umut'un akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Tanım kümesi ve görüntü kümesi kavramları iii) Algoritmalar (limit alma, değer verme, grafik çizme) Fonksiyon girdi çıktıları (nesne), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Umut çözüm prosedürüne, bileşke fonksiyonunu bulmak için kullanılan algoritma ile başlamış ve istediği sonuca ulaşmıştır. Bu aşamadan sonra bulduğu bileşke fonksiyonunu tanımsız yapan noktaları reel sayılardan çıkararak tanım kümesini oluşturmuştur. Bu adımlar anlamlıdır. Görüntü kümesini bulmak için ise farklı algoritmalar denemiştir. Umut görüntü kümesi kavramını, tanım kümesindeki tüm x değerlerine karşılık fonksiyonun aldığı maksimum, minimum ve arasındaki değerler olarak ifade etmiştir. Bu sebeple $fog = \frac{x+1}{x}$ bileşke fonksiyonunun görüntü kümesini $(0, \infty)$ olarak bulmuş; limit alma, değer verme, grafiğini çizme gibi farklı algoritmalarla da bu durumu yeniden göstermeye çalışmıştır. Burada grafik çizme süreci matematiksel olarak anlamlı iken; x için belirlediği birkaç değere göre görüntü kümesine karar verme işlemi matematiksel olarak anlamlı değildir.

S3: Umut akıl yürütme sürecinde bileşke fonksiyonunu ve tanım kümesini algoritma takip ederek bulmuştur. Görüntü kümesinde ise x'in alabileceği değerleri düşünüp bu sınırlı sayıdaki değer ile bir aralık belirlemiştir. Bu yüzeysel bir düşüncedir. Sonrasında en büyük değeri bulmak için x'in ∞'daki halini limit alarak belirlemeye çalışmış ancak sonuçtan emin olamamıştır. Bileşke fonksiyonunun grafiğini çizip, oradaki y değerlerini görüntü kümesi olarak belirtmek ise derinlemesine bir düşünce tarzını barındırmaktadır. Grafik çizmek için attığı adımları ise ayrıntılı bir şekilde açıklayabilmiştir. İstediği doğru sonuca ulaşamasa da bir algoritma takip etmeyip farklı ve derinlemesine düşünmüştür. Bu sebeplerden dolayı Umut'un bu soruda ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü ilk aşamada AR; son grafik aşamasında ise CR özellik göstermektedir.

S4: Umut'un görüntü kümesini bulmak için düşünebildiği birbirinden farklı yollar, bu süreçte kullandığı kavramlardan haberdar olması bir bilgi birikimine sahip olmasıyla yakından ilgilidir. Çünkü bir limit kavramıyla ilişki kurmak, yorum yapabilmek, fonksiyon grafiğini çizebilmek zengin bir kavramsal alt yapıyla mümkündür. Sergilemiş olduğu bu girift düşüncelerle Umut bu durumun açık bir örneğidir.

Umut'un Problem 1'e Ait Sınıflandırma Kodu

Umut'un Problem 1'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{ylx}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde yanlış bir sonuca ulaşıldığından y (yanlış); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki farklı tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak hem yüzeysel hem de derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden x (belirsiz) olarak kodlanmıştır.

Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 1'in çözüm prosedüründe dört öğrenci tarafından kullanılmıştır. Öğrencilerin üçü tarafından doğru bir sonuca varılan bu çözüm prosedürleri incelendiğinde, kullanılan matematiksel kavramlar hakkında derinlemesine düşünülmüş ortamlarla karşılaşılmıştır. Algoritmalar kullanılsa bile gerekli açıklamalarda bulunulup, cevaba ulaşılmıştır. Gerek öğrenme çevrelerinden edinilen tecrübeler, gerekse de bireysel çalışma sonucu elde edilen bilgiler bütüncül düşünülerek bu akıl yürütme türü sergilenmiştir. Öğrencilerin bu şekilde kapsamlı düşünebilmelerinin, öğretim sürecindeki etkililik için oldukça önemli olduğu düşünülmektedir.

4.3.2. Problem 2

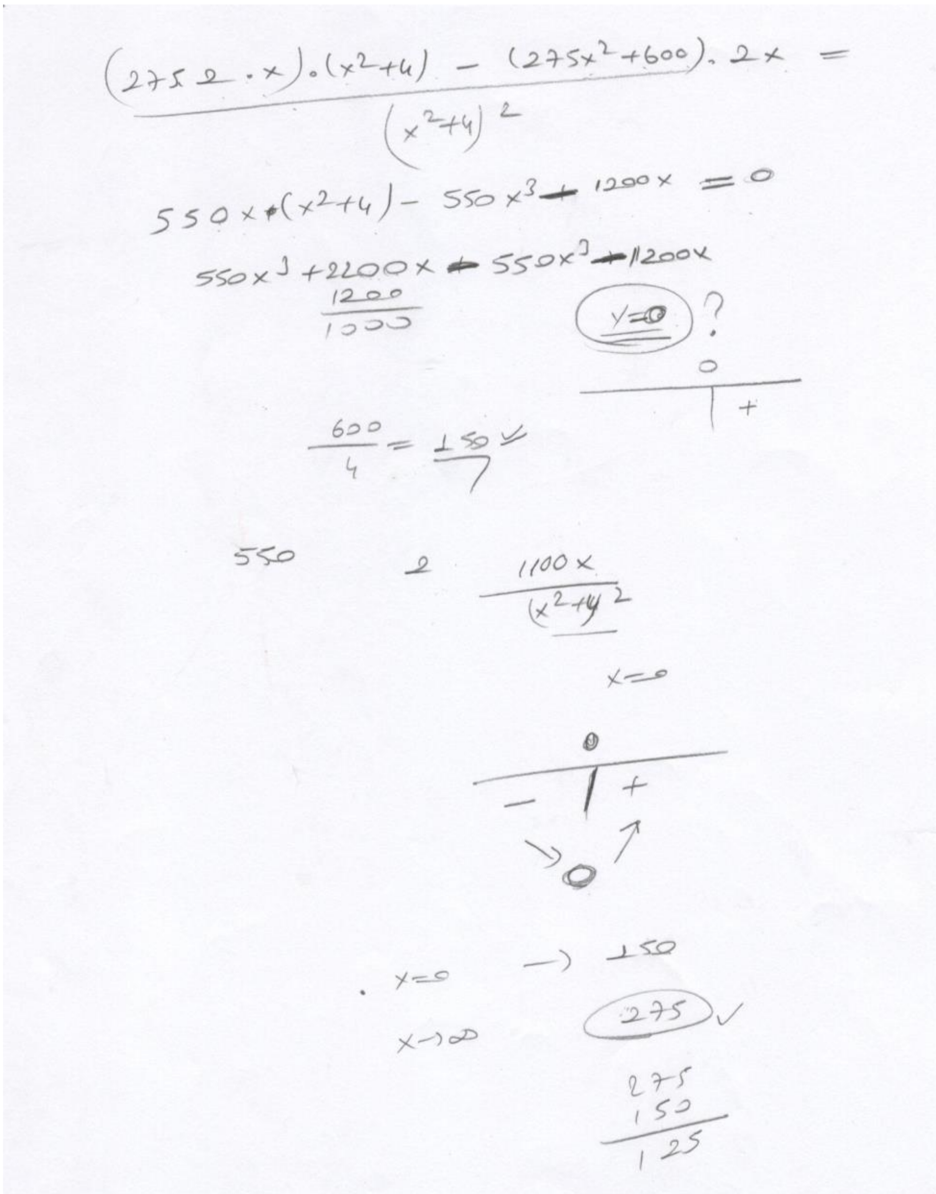
"Bir işletmenin yöneticileri, x *yılı göstermek üzere, ton cinsinden üretimi veren bağıntıyı* $D(x) = \frac{275x^2+600}{x^2+4}$ *biçiminde modelliyorlar. Buna göre uzun yıllar sonra yaklaşık olarak*

a) Bu fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir?

b) Bu fabrika üretimi en fazla ne kadar arttırabilir?"

4.3.2.1. Banu'nun problem 2'ye ait matematiksel akıl yürütme durumu

Banu'nun Problem 2'ye ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.47, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.47. Banu’nun problem 2’ye ait çalışma kağıdı

Banu’nun Problem 2’ye Ait Klinik Mülakat Transkripti

Banu: *(Öğrenci soruyu içinden okumaktadır.) x yılı göstermekte. Elde edilen veri buna mı denk? Fonksiyon bu oluyor. Fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir. Maksimum minimum problemi herhalde.*

Mülakatçı: *Neden?*

Banu: *En fazla ne kadar olabilir ya da arttırılabilir meselesi var. Türev söz konusu. Hani ilk akla gelen maksimum minimum problemi söz konusu oluyor. o yüzden biz şimdi x i yıl olarak seçmiş değişkeni. x değişkenini yıl olarak gösteriyor ve yılı yerine* *koyduğumuzda o değeri koyduğumuzda üretimi elde edilecek. O şekilde bu x i burada maksimum minimum problemi yani türevini almalıyız. Ondan sonra yapayım mı?*

Mülakatçı: *Evet yaz.*

Banu: *O zaman ne yapacağız* $\frac{(275.2.x)(x^2+4)-(275x^2+600).2x}{(x^2+4)^2}$ *bayağı büyük.(öğrenci aşağıdaki işlemlere devam eder)* $550x(x^2+4)-550x^3-1200x=0$ *sıfıra eşitlediğimiz de aşağısı gidiyor. Şuradan da* $550x^3+2200x-550x^3-1200x$ *Buradan x sıfır geliyor ama olmadı. Bu doğru yöntem değil.*

Mülakatçı: *Ne demek x in sıfır gelmesi?*

Banu: *O zaman x yıl için ton cinsinden üretimi veren… Hiçbir yıl geçmediğini mi gösteriyor. Yani $x=0$ elde ediliyor. O zaman biz yanlış yere gittik.*

Mülakatçı: *$x=0$ çıktı bu cevap olamaz mı sence? Neden cevap olamaz dedin?*

Banu: *Şimdi $x=0$; x yılı gösteriyor. Hani ellerinde belli bir üretim, hani madde olsa diyorum başlangıçta bir başlangıç noktası olur ya elde bir şey mi var acaba. Hani o olsa derim ki hani $x=0$ mantıklıdır. O zaman hiç üretim yapmayacak daha çok zarara mı gidiyor yani yıllar geçtikçe? O yüzden üretim en fazla kaç olabilir diyor. Ya da tam yılı tamamlamadığı için mi sıfır alıyoruz? En fazla ne kadar arttırılabilir konusu ayrı bir muamma. Bu $D(x)$ direk fonksiyon mu türev şeyi mi? Bir de o var. (öğrenci bu süreçlerde düşünmektedir)*

Mülakatçı: *Yok fonksiyon.*

Banu: *Normal bağıntı şeyi değil mi? O zaman bu fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir. Ya x i bulduk burada yerine yazacağız elde ettiğimiz değer üretim olacak sonuç olarak. 0 alsak $600/4$ den 150 yapar.*

Mülakatçı: *Maksimum üretim mi?*

Banu: *Evet. O zaman şimdi bu fabrika üretimi en fazla ne kadar arttırabilir. Maksimum değeri 150 elde ettik. O zaman minimumu alsak ne kadar fazla elde ettiğimizi buluruz hani en fazla ne kadar arttırılabilir onu buluruz. O zaman minimum değeri nasıl bulacağız. Bu arada bizim maksimum mu çıktı ona da bakmadım ama. Biz direk 0 a eşitledik sonuç olarak yerel maksimum minimum noktalarına bakmadık. Şuradan köklere bakarsak altta ne olacak 550 gitti $2200-1200=1000$ geldi. $1000x\ /\ x2+4$ zaten payda sıfır olur. Buradan zaten kök gelmiyor. $x=0$ geldi. 0 seçtiğimizde + - (Köklerin tablosunu inceliyor) azalıyor. Ama burada minimum geldi. En fazla ne kadar arttırılabilir? Şimdi benim sadece bu sorum mu kaldı.*

Mülakatçı: *Evet.* $x = 0$ *ne buldun işaret tablosundan?*

Banu: *Yani yerel minimum gözüküyor. O zaman buda mı hataya giriyor. Demek ki en fazla üretim değil yerel minimum noktası. Yani demek ki birinci sorunun cevabı da yanlış. Yani türevi yazınca mı yanlışlık yaptık (Yaptığı türev işlemini kontrol ediyor içinden).*

Mülakatçı: *Hata var mı türevde?*

Banu: *Türevde hata yok gibi gözüküyor.* x^3 *ler gidiyor sadece x ler kalıyor oradan x=0 geliyor. Köklerimiz de 0. Demek ki bu minimum noktaymış. Bizim maksimumla ilgili bir şey… Bunun grafiğini çizmeye çalışsam o da olmaz. Acaba* x *i sonsuza mı yollasak?*

Mülakatçı: *Niçin?*

Banu: *Yani şimdi şöyle düşünsek fabrika her defasında üretimi en fazla hani belli bir değer yok. Sonuç olarak biz bunu minimum bulduk. Minimum noktamız ney x=0. Ne kadar değer alıyormuş 150. Eğer ki biz x i sonsuza yolladığımızda ıı ne olur fonksiyon değeri bağıntı onu veriyordu 275. O zaman maksimum değeri 275 olacak. 275-150 den de en fazla ne kadar arttırabilmiş. O zaman diyecez ki 125.*

Mülakatçı: x *i sonsuza götürmeyi nereden buldun?*

Banu: *Çünkü burada ilk başta ben ne yaptım direk 0 a eşitledim. Hani kavram yanılgılarında da öğrenmiştik biz direk 0 a eşitliyoruz. İşte nedir burada en fazla soruyor düz mantık dedik ki maksimum noktadır. Daha sonra ikinci soruya bakınca ne oldu; dedik ki en fazla ne kadar arttırılabilir? Dedim ki demek ki minimum değer lazım. Tek değer geldi. İşaret tablosuna bakmadan direk dedim ki maksimum ama yanlış minimum değer çıktı. Eee maksimum değeri nasıl elde edeceğiz? Elimizde başka bir değer yok türevini aldığımızda. Demek ki diğer önemli konu ne? Limit.* x *yılını bilmiyoruz. Sonsuza yolladım oradan* 275 *demek ki en fazla olacak değer. Oradan farktan da ne kadar arttırdığını buldum.*

Mülakatçı: *Tamam Banu.*

Banu'nun Problem 2'ye Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Banu'nun akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Türev uygulamaları kavramı, limit kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyonlar), fonksiyon girdi-çıktıları (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Banu soruyu okuduktan sonra "*Türev söz konusu. Hani ilk akla gelen maksimum minimum problemi söz konusu oluyor*." şeklinde ifade kullanarak tereddütsüz bir şekilde algoritmayı uygulamaya koyulmuştur. Birinci türevini alıp sıfıra eşitlediği fonksiyonun kökünü 0 bulunca durumu şaşkınlıkla karşılamıştır. Çünkü herhangi bir inceleme yapmadan elde ettiği bu sonucun maksimum nokta olması gerektiğine inanmıştır. Böyle bir sonuçtan sonra mantığını devreye katarak düşünmeye başlayan Banu öncelikle bulduğu bu noktanın minimum değer olduğunu; sonrasında da en fazla üretimi bulmak için x değişkenini sonsuz arttırması gerektiğini düşünebilmiştir. Tartışma ortamı oluşturarak bu düşüncesini tartışmıştır. Uygulamış olduğu çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlıdır.

S3: Banu akıl yürütme sürecinin ilk başlarında, soruyla kurduğu yüzeysel bağlar nedeniyle bir algoritma uygulamaya karar vermiştir. Bu süreçte herhangi bir açıklama yapma ya da tartışma ortamı oluşturmaktan uzak durmuştur. Sorunsuz şekilde algoritmasını uygulayarak direkt sonuca ulaşmayı amaçlamıştır. Ortaya koyduğu bu akıl yürütme becerisi türü tipik bir FAR örneğidir. Ancak bu süreçten sonra yaşadığı uyanmayla, mantık ve matematiksel doğrular ışığında açıklamalarda bulunup; x'i neden sonsuza götürerek limit aldığını ya da $x = 0$ değerinin ne anlama geldiğini açıklayabilmiştir. Akıl yürütme sürecinin bu kısmı ise CR özellik gösterdiğinden bu türde sınıflandırılmıştır.

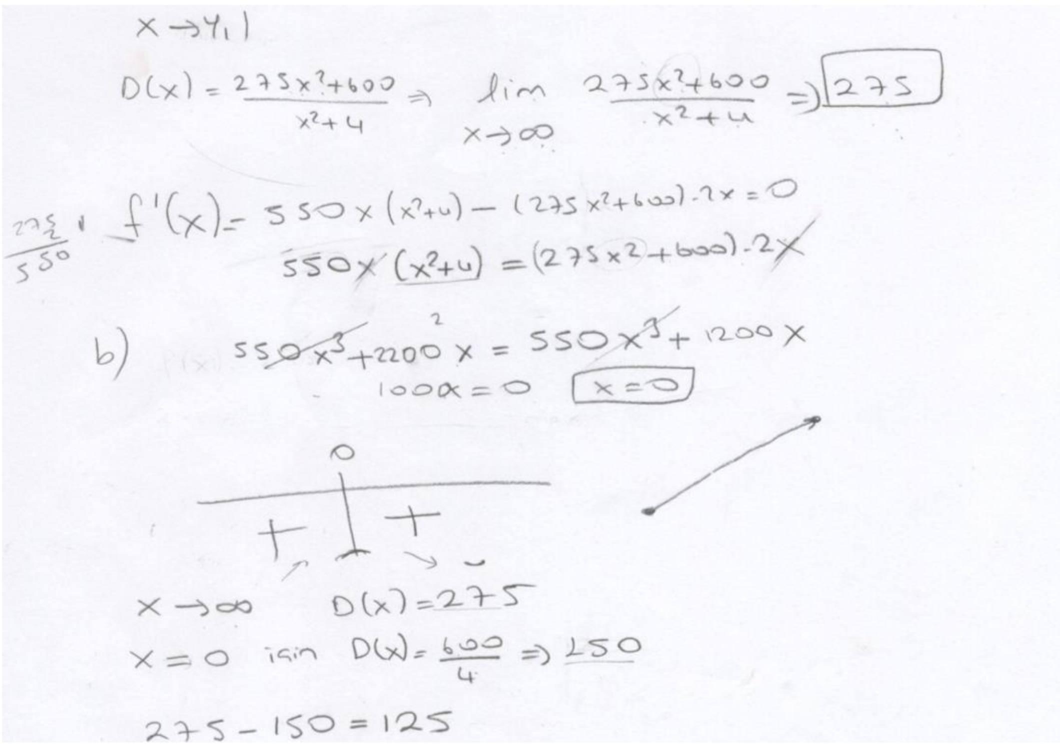
S4: Banu'nun önceki öğrenme yaşantılarından edindiği tecrübelerin, onun matematiksel olarak daha derin bir şekilde düşünmesine engel olduğu söylenebilir. Çünkü ortaya koyduğu akıl yürütme süreci incelendiğinde kavramsal bilgiye sahip olduğu görülmektedir. Ancak çözüm prosedürüne başlarken bu kavramsal bilgileri göz ardı ederek, her zaman onu doğru sonuca götürdüğüne inandığı algoritmayı uygulamıştır. Beklenmedik bir durumla karşılaşması sonucu kendi bilgi birikimini ve düşünce gücünü sürece katmıştır. Ayrıca " *Hani kavram yanılgılarında da öğrenmiştik biz; direkt sıfıra eşitliyoruz işte nedir burada en fazla soruyor. Düz mantık dedik ki maksimum nokta*" şeklindeki ifadesiyle, düşünmeye yönelik alınan derslerin, yapılan yanlışları fark etmeyi kolaylaştırdığı görülmüştür.

Banu’nun Problem 2’ye Ait Sınıflandırma Kodu

Banu’nun Problem 2’ye ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **CR$_{\mathbf{dlx}}$** olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki farklı tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak hem yüzeysel hem de derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden x (belirsiz) olarak kodlanmıştır.

4.3.2.2. Aylin’in problem 2’ye ait matematiksel akıl yürütme durumu

Aylin’in Problem 2’ye ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.48, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.48. Aylin’in problem 2’ye ait çalışma kağıdı

Aylin'in Problem 2'ye Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Soruyu dikkatlice oku anlayarak.*

Aylin: *Sesli mi okuyayım.*

Mülakatçı: *Nasıl istersen.*

Aylin: *Yöneticileri, x yılmış. Ton cinsinden üretimi veren bağıntı* $D(x) = \frac{275x^2+600}{x^2+4}$ *şimdi x mesela bir yılda ne kadar ton ürettiğini gösteriyor bu ifade. Bu fabrikanın üretimi en fazla… uzun yıllar sonra yaklaşık olarak… O zaman limit mi olmuş oluyor. fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir?*

Mülakatçı: *Nereden vardın bu kanıya?*

Aylin: *Yani limit ya da türev olabilir. Çünkü şey diyor üretimi en fazla kaç olabilir; maksimum. Yani direk benim aklıma maksimum minimum problemleri geldi.*

Mülakatçı: *O en fazla kelimesinden dolayı mı?*

Aylin: *Evet.*

Mülakatçı: *Tamam nasıl bir çözüm yaparsın?*

Aylin: *Bir de şurada "yaklaşık" diyor. Oradan da limit olabilir mi? Hani uzun yıllar sonra. Yani x sonsuza giderken uzun yıllar sonra dediği için. Yaklaşık değer de limit bir yaklaşık değer olduğu için. Yani limit ya da türev şeklinde diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Hangisi sence.*

Aylin: *İlk önce limiti yaparım herhalde bir bakarım.* $lim_{x\to\infty} \frac{275x^2+600}{x^2+4}$ *buradan sonsuza gittiğinde hani şu şey vardı. Buradan 275 gelir.*

Mülakatçı: *Nedir bu bulduğun 275?*

Aylin: *Bu ıı x yıllar sonra yani çok uzun yıllar sonraki yani x sonsuza giderken daha doğrusu ifadenin eşiti. Yani aslında en fazla üretim. Bir de türevden belki deneyebilirim.*

Mülakatçı: *Hangisi kafana yatıyorsa onu yap.*

Aylin: *Ben yani ikisini de yaparım da. Bir de onu yapayım derim.*

Mülakatçı: *Tamam.*

Aylin: *Türevde… (Öğrenci aşağıdaki türev işlemini yapar)* $f'(x) = 550x.(x^2+4) - (275x^2+600).2x = 0$ *burayı sıfıra eşitleyeceğiz. Şimdi karşıya atayım* $550x.(x^2+4) = (275x^2+600).2x$ *paydayı yazmadım. x ler giderse… Burada şey oldu aslında x ler gitmez değil mi? x' ler 0 a eşit olabilir. Yani bu biraz uzun oldu. Pek mantıklı gelmedi bana. Sonuç diğeri sanırım.*

Mülakatçı: *Sonuç o diyorsun. Peki b şıkkı?*

Aylin: *b şıkkı… Bu fabrika üretimi en fazla ne kadar arttırabilir?*

Mülakatçı: *Nasıl bir şey düşünebiliriz burada?*

Aylin: *Burada yani bir kat oranı var mesela birinci yıl şu kadarsa ikinci yıl bu kadarsa bundan bunun çıkarılması ne kadar arttığını gösterir. Bunun maksimum değerini istiyor. Bu da sanki bir maksimum minimum problemi de olabilir. Mesela iki yıl seçsek.* $x = a$ *yılı ve* $x = b$ *yılı diye seçersek. Iımm.. ama öylede olmaz…*$275(b2 - a2)$*… bunun maksimumunu soruyor. (öğrenci sessizleşir)*

Mülakatçı: *Maksimum artışı soruyor demek ki her yıl belli bir artış yaşanıyor bu fabrikada.*

Aylin: *Evet artış yaşanıyor ama nasıl. Hımm şöyle de olabilir. Mesela uzun yıllar sonra yani illa aralarında iki yıl filan gibi bir şey fark olmasına gerek yok değil mi? Bir yıl filan.*

Mülakatçı: *Yani her yıl bir artış var. Bu artış en fazla ne kadardır.*

Aylin: *Bu o zaman şöyle de olur mesela x sonsuza giderken hani uzun yıllar sonra büyük ihtimalle; zaten artan bir fonksiyon herhalde. önce* x *sonsuza giderken buluruz, sonra x in minimum değerini bulur çıkardığımızda da ne kadar artış olduğunu buluruz. Aslında bu görüntü kümesinin maksimum değeriyle minimum değerini bulup öyle de olabilir. Yani ikisi de olabilir.*

Mülakatçı: *Dene bakalım.*

Aylin: *x sonsuza giderken… bence yine maksimum minimum değerlerini görüntü kümesi olarak bulup çıkarmamız daha şey olur sanki. Neyse direk türevini alayım.*

Mülakatçı: *Türevini yukarda alıyordun zaten.*

Aylin: *A evet.*

Mülakatçı: *Peki bulduğun bu değer neydi (275)?*

Aylin: *Bu en fazla üretim yaptığı yani uzun yıllar sonra yaklaşık olarak en fazla değeri. Aslında bu* x *leri götürsem daha iyi olur ama* x *ler gitmeyebilir o yüzden mecburen dağıtıyorum. Bir de gitse* x^2 *ler eksili ifade geliyor o da yanlış oluyor. Olmadı. Bunlar gider mi? Buradan x 0 geliyor. Bunlar gider* $(550x3 + 2200x = 550x3 + 1200x)$ $1000x = 0$ *oluyor.* $x = 0$ *oluyor. 0 değerinde işaret tablosu yaparsak x 0 dan büyük değerler için + küçük değerler için de + oluyor. çünkü çift kat kök oluyor.*

Mülakatçı: *Bir yere varabildin mi?*

Aylin: *Yok varamadım herhalde. İşlem hatası yaptım mı diye bakıyorum ama yok herhalde. x e küçükte ifade versen yine artı büyükte versen yine artı. Bu zaten artan bir fonksiyon olduğu için sürekli artıyor. Buradan pek bir yere varılmadı çünkü minimum değerini filan bulamadık. O yüzden x sonsuza giderken ki değerini…*

Mülakatçı: *Bulacağın minimum değer yıl değeri mi yoksa ton değeri mi? Hangi yılda mı en az üretiliyor yoksa en az üretilen değer mi?*

Aylin: x *i buluyoruz dolayısıyla yılı bulmuş oluyoruz. Ama çok doğru olmuş olmuyor bu sefer. Yani aslında şöyle bir şey* $f(x)$ *türevini alırken şu ifadenin maksimum minimum değerini bulmaya çalışıyoruz. Yani türev alınınca sıfıra eşitlediğimizde x değerlerini bulup işaret tablosundan artan azalan artan azalan …orada hani burda maksimum değeri alır mesela artansa şöyle bir şekil alır. Burada maksimum değerini alır burada minimum değerini alır deyip yerine yazıp buradan buluyoruz. Ama x i işte bulamadık işaret olarak. Bir de sanırım fonksiyon sürekli artan. Dolayısıyla minimum maksimum değeri artan olduğu için şurası maksimum olur en son kısmı. En ilk kısmı da minimum değeri olur. O yüzden* x *sonsuza giderken bulmuştuk zaten 275. Bir de* x *in en küçük aldığı değeri bulmamız gerekiyor.*

Mülakatçı: x *ne zaman en küçük?*

Aylin: x *bence 0 olunca en küçük değeri oluyor. Ama 0 yılda üretim yapmak oluyor. 0 yıl oluyor. 0 yılda yani hiçbir yıl geçmeden… aslında ellerindeki üretim mi olmuş oluyor. Dolayısıyla x=0 için de* $D(x) = \frac{600}{4} = 150$. *Şimdi maksimum bu oldu minimum bu. İkisini birbirinden çıkarırsak* $275 - 150 = 125$.

Mülakatçı: *Ne kadar arttırabilir en fazla?*

Aylin: *125 arttırır.*

Mülakatçı: *Tamam, buna benzer bir soruyla karşılaşmış mıydın?*

Aylin: *Yani hani belki karşılaşmışımdır bilmiyorum ama ne kadar arttırabilir tarzında hani karşılaşmamıştım. Belki üretimin en fazla kaç olur. Mesela üretimin en fazla olduğu sorularda da biz mesela maksimum minimum problemlerinden çözüyorduk hani ama limit olarak yani hiç yapmamıştım.*

Aylin'in Problem 2'ye Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Aylin'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Limit kavramı, maksimum minimum problemi kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyonlar), fonksiyon girdi-çıktıları (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Aylin, çözüm prosedürüne soru kökünde geçen *"yaklaşık", "uzun yıllar sonra", "en fazla"* kelimelerinden hareket ederek karar vermiştir. Limit kavramının bir yaklaşma olduğunu türev uygulamasının kullanıldığı maksimum minimum problemlerinin ise *"en fazla"* ifadesiyle aklına geldiğini belirtmiştir. Her iki algoritmayı da uygulayıp matematiksel açıdan anlamlı bir açıklama yapmadan limit yardımıyla bulduğu cevaba karar vermiştir. Sorunun b şıkkında ise *"en fazla*" kelimesi yine maksimum minimum problemlerini kullanmasına sebep olmuştur. Artışı bulabilmek için en fazla üretimden en düşük üretimi çıkarmayı düşünmüştür. Uygun algoritmayı doğru bir şekilde uygulamış ancak önceki öğrenme tecrübelerinde alışmış olduğu direkt olarak sonuca ulaşmayı burada elde edememiştir. Oluşturduğu işaret tablosunda x için bir minimum değer bulamayan Aylin, bu süreçten sonra derinlemesine düşünebilmeyi başarabilmiştir. Verilen fonksiyonun sürekli artan olduğunu belirleyip, bir önceki şıkla bağlantı kurarak doğru sonuca ulaşabilmiştir. Yapmış olduğu aritmetik işlemler ve yorumlar matematiksel açıdan anlamlıdır.

S3: Aylin akıl yürütme sürecinde, verilen sorunun a şıkkı için kullandığı algoritmalar ile soru arasında anahtar kelimeden faydalanarak yüzeysel bağlantılar kurmuştur. Bu bağlantılar neticesinde iki farklı algoritmayı uygulayıp "*uzun oldu, mantıklı gelmedi*" şeklinde yüzeysel bir ifadeyle ilk algoritmaya karar vermiştir. Herhangi bir tartışma ortamı oluşturmamıştır. Burada ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü FAR olarak sınıflandırılabilir. b şıkkında ise a şıkkında yaptığı benzer yüzeyler bağlantılar neticesinde birkaç algoritma düşünüp, türev alıp, işaret tablosu oluşturmuştur. Ancak direkt sonuç elde edemeyince matematiksel olarak derinlemesine düşünmüş, fonksiyonun artan olduğunu belirtip, x için en küçük değeri bularak sonuca ulaşmıştır. Akıl yürütme sürecinin b şıkkı ilk kısımlarda FAR; son kısımlarda ise CR akıl yürütme türüne ait özellikler barındırmaktadır.

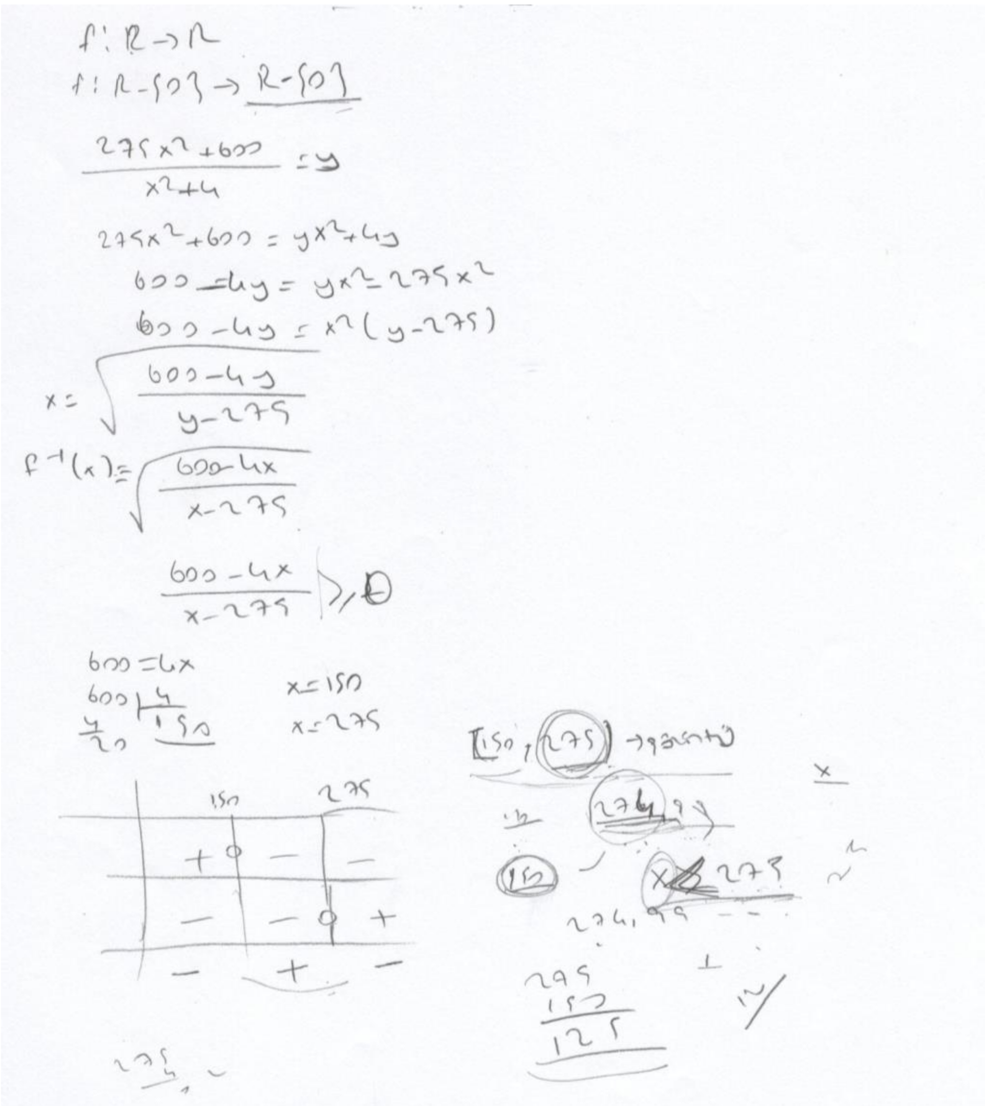
S4: Aylin'in bu soruda zorlandığı en önemli nokta, öğrenme çevresinde edindiği tecrübelerin belirli kalıplar üzerine inşa edilmiş olmasıdır. Örneğin *"en fazla"* ya da *"en az"* ifadelerini içeren soruların, her zaman maksimum minimum problemlerindeki algoritmalarla sonuçlanmasıdır. Bu durum neticesinde benzer bir yapıyla karşılaşan Aylin'in aklında farklı bir çözüm prosedürünün oluşması da güçleşmektedir. Kendisinin de "*mesela üretimin en fazla olduğu sorularda da biz mesela maksimum minimum problemlerinden çözüyorduk hani ama limit olarak yani hiç yapmamıştım*" şeklindeki ifadesi mevcut duruma ışık tutmaktadır.

Aylin'in Problem 2'ye Ait Sınıflandırma Kodu

Aylin'in Problem 2'ye ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dlx}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde her iki şıkkı için de doğru birer sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak hem yüzeysel hem de derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden x (belirsiz) olarak kodlanmıştır.

4.3.2.3. Nurdan'ın problem 2'ye ait matematiksel akıl yürütme durumu:

Nurdan'ın Problem 2'ye ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.49, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.49. Nurdan'ın problem 2'ye ait çalışma kâğıdı

Nurdan'ın Problem 2'ye Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Soruyu iyice anla Nurdan.*

Nurdan: *(öğrenci soruyu okumaktadır.). aslında bu fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir değer kümesini bulmak gibi bir şey olacak. Bu fabrikanın üretimi en fazla… yani değer kümesine ulaşmak için işte görüntü kümesini aslında bulacağız burada. Değer kümesine ulaşmak için ne kadar eleman lazım gibisinden mi acaba. Üretimi en fazla kaç olabilir? En fazla, değer kümesidir yani bütün ifadeler. Yani hani soruyu düşünüyorum da* x y *değerleri cinsinden.*

Mülakatçı: *Nasıl buluruz o zaman o değer kümesini?*

Nurdan: *Şimdi hocam bize fonksiyonun yine aralığı verilmiş… Aslında ben bunu fonksiyon olarak düşünsem zaten tanım ve görüntü şeklinde bulacağım. Yine ona benzer bir soru. Mesela ben işte desem ki; şuna direk fonksiyon desem* f *desem. Şurayı tanımsız yapan hiçbir değer yoktur. O zaman R* den *R ye alabilirim. Bütün R değerleri oluşabilecek.*

Mülakatçı: *Buradaki R neyin değeri?*

Nurdan: x *yılı göstermek üzere. Hani R yılı gösterecek ya işte 0 dan… Gerçi sıfır yıl diye bir şey olamaz. O zaman R den 0 ı çıkartabiliriz.* Tamam. Verilen ton cinsinden 0 ton da olamaz *aslında. Hiç elde edememe şansı var mı? Öyle bir şansı var mı* bilmiyorum ki. x *yılı göstermek üzere ton cinsinden üretimi… Hiç üretim yapmaması olamaz galiba. Yine de en geniş kümeyi alalım biz R* diyelim *ama büyük ihtimal olamadığı için buradan da sıfırı çıkaracağız en genişi bu olur o zaman. Şimdi bunun görüntü kümesini bulacağım* $\frac{275x^2+600}{x^2+4} = y$ *diyeyim* $275x^2 + 600 = yx^2 + 4y$ *y'leri bir tarafa toplayayım.* $600 - 4y = yx^2 - 275x^2$ *olur* $600 - 4y = x^2(y - 275) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{600-4y}{y-275}}$ *buradan işte tersi* $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{600-4x}{x-275}}$ *şeklinde gelir. Bunun tanım kümesi de bizim değer kümesini verecek. Tanım kümesi için de ifadenin içinin şöyle… 0 mıydı 1 miydi? Hı 0 dı* $\frac{600-4x}{x-275} \geq 0$ *bu şekilde olması gerekir. Çünkü negatif sayıları alamayacağız içi için. O zaman iki denklem şeklinde çözeceğim işte. Imm* $600 = 4x$ *buradan neyse uzun yapayım (600 ü bölme işlemiyle 4 e böldü)* 150. *Şurayı da* $x = 275$ *şeklinde köklerini buldum. Yani normal denklem şey yapacağım (öğrenci işaret tablosu çizerek bulduğu bu değerlerin işaretlerini incelemektedir). İlki için şura ikincisi için şura… eksi eksi artı. Ne demiş büyük olan demiş yani şu aralık. Gerçi o belliydi görüntü kümesi için (*150 *ile* 275 *arası). Yalnız şurası kapalı şurası açık aralık* $[150,275)$ *. burası bizim görüntü kümemiz. Şimdi üretim o zaman en fazla kaç olabilir bu fabrikanın üretimi? En fazla ne kadar arttırılabilir?*

Mülakatçı: *Bu bulduğun sayılar tam olarak nedir?*

Nurdan: *Hocam şimdi bu görüntü kümesi fabrika diyor ki bu aralıkta üretim yapmaktadır diyor. Yalnız hocam şimdi en fazla kaç olabilir en fazla* 276 olabilir. *Bu fabrika üretimi en fazla ne kadar arttırabilir?*

Mülakatçı: 276 *mı?*

Nurdan: *Şey pardon* 274 *yanlış gördüm. En fazla bu olabilir. Hani buna onu dersek bu fabrika üretimini en fazla ne kadar arttırabilir sorusuna… o zaman demek ki elimizde bir değer var biz hani şu değere ulaşması için ne kadar yapacağız. O var. O değere nasıl ulaşacağız? Demek ki elimiz de bir değer var. Peki şöyle yapsak*

Mülakatçı: *Başlangıç değeri mi var?*

Nurdan: *Aynen. Çünkü arttırmasını sormuş ya. Şimdi en fazla kaç olabilir en fazla bu kadar olabilir (*275*).*

Mülakatçı: *En az ne kadar olabilir?*

Nurdan: *En az da 150. Mesela bütün reel sayılar demiştik ya biz, gerçi onu değer kümesi için demiştik bize lazım olan görüntü kümesi. Peki orası onun katı mıdır? Değildir. Hani diyeceğim oradan ilk bir değer bulsak sonra ne kadar arttırabileceğimi söylesek. O zaman şey diyebiliriz. Şimdi bu fabrika en az* 150 *üretebilir en fazla da buysa aradaki değer de ne kadar arttırdığını verecektir. Çünkü elimizde başka veri yok şuan için. Eğer başlangıçta bir miktar bilseydik ya da bir x değerini filan bilseydik işlem yapabilirdik.*

Mülakatçı: *Peki o zaman en fazla?*

Nurdan: *En fazla* 274 *üretim sağlayacaktır.*

Mülakatçı: *İlla tam sayı mı olması gerekiyor.*

Nurdan: *Hı öyle bir şey yok değil mi. O zaman en fazla diyorum* $x < 275$ *şeklinde diyebilirim o zaman yani küsüratlı bulgularda gelebilir. Doğru öyle bir şart yok şuan. Bir de hani mesela ilk şu kadar üretmiş gibi bir şartta yok. O zaman ben en az şartı alırım* 150 *dir. En fazla ne kadar arttırabilir… ama yine tam sayıya girmiş olacak. Peki yok değil mi başlangıç değeri filan.* x *yılı göstermek üzere ton cinsinden üretimi vermiş. Uzun yıllar sonra yaklaşık olarak, zaten yaklaşık değer… bu fabrikanın üretimi en fazla kaç olabilir? Tamam üretimi en fazla işte* 275 *den en yakın değeri. Ama hocam şöyle bir şey yaklaşık olarak dediği için direk aslında bunu da alabiliriz hani. En son yaklaşacağı değer budur yaklaşık değer sormuş ya limit anlamında düşünürsek. Evet mesela şunu sonsuza götürürsek yani o zaman en fazla alabileceği değer bu olur. Direk söyleyebiliriz.*

Mülakatçı: *Nerden vardın ona?*

Nurdan: *Yaklaşık olarak vermiş çünkü çok uzun yıllar sonra yaklaşık olarak. Küsüratlı gittiğini düşünürsek hani en sonda limit değerinde… zaten şuraya limit ifadesini* *yazarsam limitte 275 olduğunu görürüm. İşte bu fabrika üretimini en fazla ne kadar arttırabilir? O zaman en az değerini alacağım en fazla değeri o kadar arttırır. Aradaki mesafedir.* $275 - 150 = 125$

Mülakatçı: *Son olarak bunu söylüyorsun.*

Nurdan: *Aslında kararsızım ama büyük ihtimal budur başka bir veri yok kullanabileceğim. Birde yaklaşık değer sorduğu için direk tam sayı değeri verebiliyorum.*

Mülakatçı: *Tamam Nurdan.*

Nurdan'ın Problem 2'ye Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Nurdan'ın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Tanım, değer ve görüntü kümeleri kavramı, limit kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyonlar), bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Nurdan, çözüm prosedüründe, fabrika üretimini veren ifadeyi bir fonksiyon gibi düşünerek bu fonksiyonun görüntü kümesine ulaşmayı amaçlamıştır. Böylece istenen çözüme ulaşabileceğini belirtmiştir. Belirlemiş olduğu bu farklı çözüm yolunda uyguladığı her bir aşamayı açıklamıştır. Ters fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkları bulmak için tablo oluşturup bir aralık elde ederek, görüntü kümesine ulaşmıştır. Görüntü kümesinden faydalanarak da en az, en fazla üretimi ve artış miktarını belirlemiştir. Bu aşamada limit kavramına da girerek, belirlemiş olduğu aralıkta alacağı değerleri seçme sebeplerini güçlendirmiştir. Çözüm prosedüründe kullandığı tanım, değer, görüntü kümesi kavramlarını ve limit kavramını matematiksel olarak anlamlı bir şekilde ifade etmiştir. Derinlemesine ve çok yönlü olarak düşünebildiği bu süreçte, uyguladığı çözüm prosedürü de matematiksel olarak anlamlıdır.

S3: Nurdan akıl yürütme sürecinde uygulamayı planladığı her bir adımı sebepleriyle beraber tek tek anlatmıştır. Bu süreçte aklına takılan sorulara yine kendi bulduğu kavramsal açıklamalar yapabilmiştir. Kalıp düşünceler ve ezber bilgiler kullanmamıştır. Tartışma ortamı oluşturup, matematiksel açıdan derinlemesine düşünerek bir sonuç ortaya koyabilmiştir. Sergilemiş olduğu bu akıl yürütme süreci, barındırdığı özelliklerden dolayı CR olarak sınıflandırılabilir.

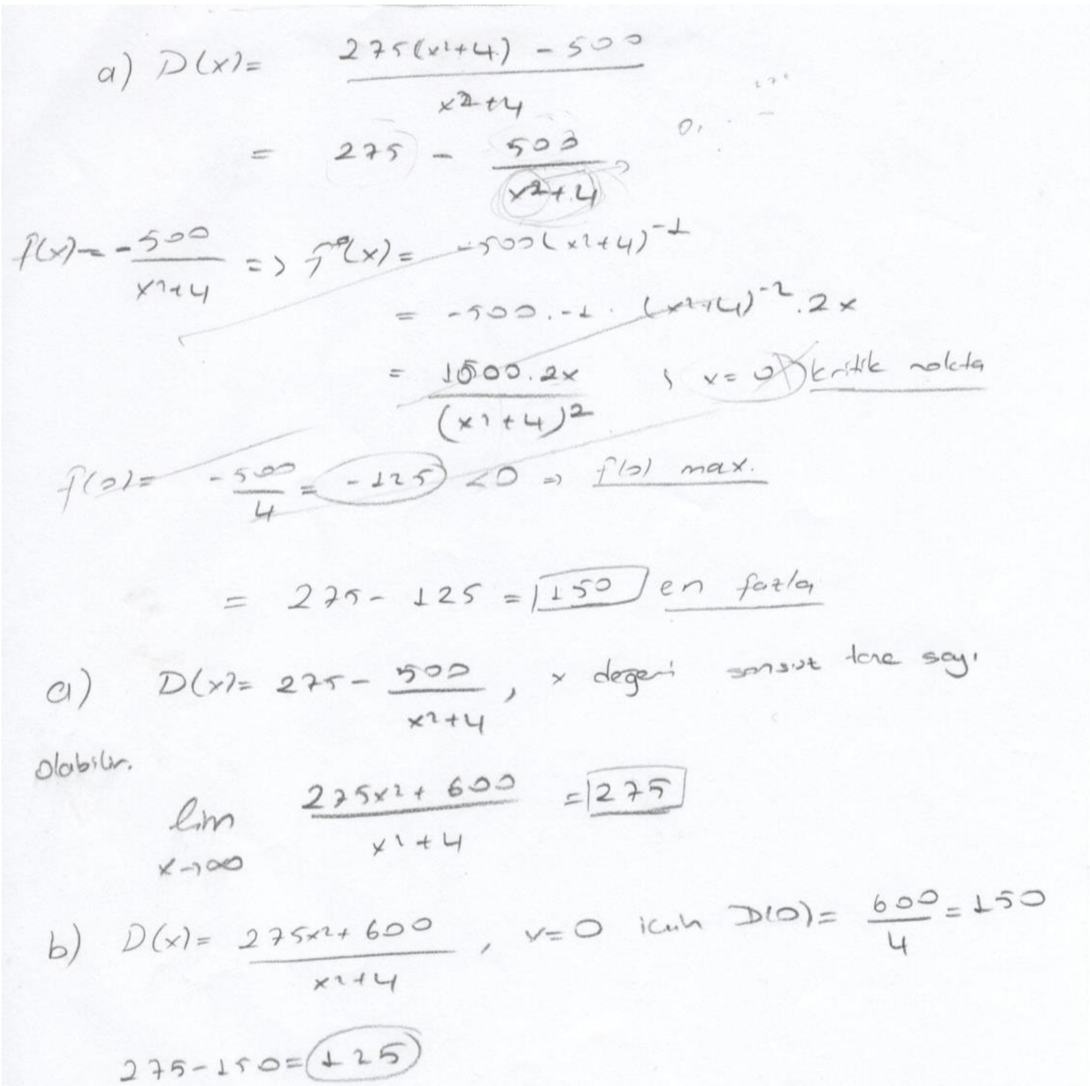
S4: Nurdan akıl yürütme sürecinde farklı düşünebilmiş, düşüncelerini savunabilmiş ve gerekli açıklamaları yerinde yaparak uyguladığı sürece hâkimiyetini göstermiştir. Öğrenme yaşantılarından edindiği hazır ve onu direkt sonuca götürecek uygulamaları tercih etmeyip; kendi düşünce gücünü sürece katmıştır. Karşılaştığı soruya yönelik sergilemiş olduğu düşünce şekli, kullandığı kavramlar arasında yaptığı geçişler, sahip olduğu zengin kavramsal alt yapının göstergesidir.

Nurdan'ın Problem 2'ye Ait Sınıflandırma Kodu

Nurdan'ın Problem 2 'ye ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dgd}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek bir tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

4.3.2.4. Hikmet'in problem 2'ye ait matematiksel akıl yürütme durumu:

Hikmet'in Problem 2'ye ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.50, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.50. Hikmet'in problem 2'ye ait çalışma kağıdı

Hikmet'in Problem 2'ye Ait Klinik Mülakat Transkripti

Hikmet: *Üretim en fazla kaç olabilir dediği için verilen fonksiyonun en büyük değerini soruyor. Yani* $D(x)$ *in en büyük değerini bulacağız.* $(x^2+4\ )$ *desek buradan ne yapacak* $275.4 = 1100$ *mü yapıyor evet. Demek ki 500 çıkaracağız. Bu durumda* $D(x) = \frac{275(x^2+4)-500}{x^2+4}$ *diyeceğiz. Buradan* $275 - \frac{500}{x^2+4}$ *gelecek. Şimdi bu en küçük değeri aldığı zaman, bu fonksiyonu en küçük değere böldüğümüzde burası şey çıkar negatif olarak en büyük değer çıkar. Ama burası en büyük değer çıktığı zaman negatif olduğu için buranın en küçük değerini bulmuş oluruz(burada öğrenci* x^2+4 *ün en büyük değerini göz önüne almaktadır.). Iı onun dışında ne yapabiliriz?...(öğrenci* *düşünmektedir). Türev anlamında düşünsek hani fonksiyonu şöyle alsak* $f(x) = -\frac{500}{x^2+4}$ *şeklinde fonksiyonu yazsak…*

Mülakatçı: *Bulduğun ikinci kısmın en küçük değerini mi bulmaya çalışıyorsun?*

Hikmet: *Evet. Şöyle yazsak* $f(x) = -500(x^2+4)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -500.(-1).(x^2+4)^{-2}.2x$ *yani buradan* $\frac{1000.2x}{(x^2+4)^2}$ *olarak gelecek. Şimdi verilen fonksiyonu sıfır yapan tek bir nokta var o da x=0 noktası. Yani kritik noktası 0. Şimdi bunu yerine koysak mesela* $f(0) = -\frac{500}{4} = -125$ *yapıyor. 0'dan küçük olduğu için şey diyeceğiz herhalde maksimum mu diyorduk? Öyle yapıyorduk herhalde tam hatırlamıyorum ama. Maksimum desek…(öğrenci bir sorun oluşmuş şekilde cevabı düşünmektedir.)*

Mülakatçı: *Sorun ne?*

Hikmet: *Sorun ne hocam, unuttum gibi. Maksimumu nasıl buluyorduk. Şurası kritik noktada. Şöyle düşünsek* $275 - 125$ *dememiz lazım. Oradan ne geliyor 150 geliyor. Korkuyorum yanlıştır diye.*

Mülakatçı: *Bildiğin gibi yap. Yanlışlık doğruluk önemli değil. 150 en az olacak şey mi yoksa en fazla üretim mi?*

Hikmet: *Yani en fazla olması lazım. Çünkü… en fazla doğru değil mi hocam yanlış değil?*

Mülakatçı: *Doğrusu yanlışı yok sen kesin bir şey söyleyeceksin.*

Hikmet: *Tamam. En fazla ne kadar arttırabilir diyor.*

Mülakatçı: *Ne düşünüyorsun ne yapabilirsin?*

Hikmet: *Ya verilen fonksiyon zaten artan bir fonksiyon, yani hiçbir zaman negatif olmayan bir fonksiyon. Zaten üretimi verdiği için negatif olması şey değil, mümkün değil.*

Mülakatçı: *Ne kadar arttırabilir şeklinde soruyor.*

Hikmet: *(öğrenci sessizce düşünmektedir.) yani şu aslında yanlış oldu gibi (Yaptığı çözümü göstererek).*

Mülakatçı: *Neden?*

Hikmet: *Çünkü hani yılı gösterdiği için 0 yıl diye bir şey diyemeyiz. Çünkü dediğim gibi hep artan bir şey olduğu için. Yani* 275 *den büyük bir şey de çıkartabiliriz. Onu da şöyle yapabiliriz aslında. Yani* x *e* 0 *vermekten ziyade mesela, sonuçta bize verilen ifadeyi işte tam olarak ton cinsinden üretimi verilen bağıntı diyor ya. Orada üretimi işte* *tam sayıdır demiyor. Ya da işte doğal sayıdır demiyor, yanlış olmasın. O yüzden mesela* x *i sadece 0 değil de mesela 500 ü yakalayacak bir değer alabiliriz şurada. Öyle bir şey yapabiliriz. Ve arttıracak bir değer de alabilir. Çünkü sonuç olarak mesela 500 ü geçen bir değer olabilir burası.* 500 *ü geçen bir değer olduğu zaman işte ıı burası ne olur mesela 0 dan küçük bir şey çıkar. Buda mesela* 275 *e çok yakın bir değer elde etmemizi sağlar. Verilen yılda belirli bir değer değil ve sonsuza kadar gidebilir. Sonsuza kadar gidebildiği için de limit anlamında sonsuza götürürsek* 275 *çıkar. O zaman yukarıyı çizelim o yanlış oldu. Açıklamaya gerek yok değil mi?*

Mülakatçı: *Bir daha sözlü anlatabilirsin neden limite karar verdiğini.*

Hikmet: *Tamam. Şimdi verilen x değeri sonsuz değer alabiliyor, sonsuz sayı olabiliyor. Sonsuz tane sayı olabildiği için de yani net olarak şu kadar yılda şu olur diyemiyoruz. Biz burada* x *i sonsuza götürdüğümüzde limit zaten yaklaşma değeri olduğu için yani en fazla alabileceği değer limit anlamında:* $lim_{x\to\infty}\frac{275x^2+600}{x^2+4} = 275$ *geliyor. Bu limit anlamında bir değer. Yani tam olarak* 275 *değil. Çünkü hiçbir zaman x dediğimiz sayı* ∞ *olmuyor. Sonsuz zaten bir sayı değil. Limit anlamında* 275 *e gidiyor diyebiliriz yani. Şimdi alttakine gelelim onu nasıl yapacağız bilmiyorum.*

Mülakatçı: *Tamam. Bu fabrika en fazla ne kadar üretimi arttırabilir?*

(öğrenci sessizce soruyu okuyup düşünmektedir.)

Mülakatçı: *Nasıl bir şey geçiyor aklından sesli düşünebilirsin.*

Hikmet: *Şöyle bir şey düşünüyorum da mesela ilk başladığı yılı düşünsek. Yani ondan yine sonsuza giden bir değer olacak. Öyle bir şey düşünebiliriz yani. İlk başta* 125 *üretecek ama en son yani sonsuzda* 275 *kadarını üretecek. O zaman aradaki farktan da* 150 *diyebiliriz yani en fazla üretecek.*

Mülakatçı: *Başladığı yılı* 1 *olarak mı aldın?* 1 *için mi* 125 *dedin?*

Hikmet: *Yoo* 1 *almadım da 0 düşündüm. Hani ilk başladığı yıl. Ya çünkü fonksiyon cevap veriyor 0 a. O yüzden hani 0 olarak alabiliriz diye düşündüm (öğrenci* $D(0) = \frac{600}{4} = 150$ *şeklinde işlem yazmıştır). Şimdi en fazla alacağı değer* 275 *demiştik. O zaman şöyle diyebiliriz* $275 - 150$ *den* 125 *diyebiliriz.*

Mülakatçı: *Tamam Hikmet.*

Hikmet'in Problem 2'ye Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Hikmet'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Limit kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyonlar), fonksiyon girdi-çıktıları (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Hikmet çözüm prosedüründe ilk olarak, üretim için verilen ifadeyi en büyük yapan değeri belirlemekle başlamıştır. Bunun için fonksiyonu $275 - \frac{500}{x^2+4}$ şeklinde düzenleyip, önce $x^2 + 4$ için büyük bir değer; sonra da $-\frac{500}{x^2+4}$ için en küçük değerini türev alarak bulmak istemiştir. Ancak uygulamayı düşündüğü algoritmayı tam olarak hatırlayamadığından kendi düşünceleriyle ilerlemeye çalışmıştır. Soruyu yeniden okuyup daha derinlemesine düşününce işine yarayacak ipuçlarına ulaşmış ve ikinci çözüm prosedürünü geliştirmiştir. Yılı gösteren x değerinin herhangi bir kısıtlaması olmadığını fark edip verilen ifadenin $x \to \infty$ durumundaki limitini incelemeye karar vermiştir. Burada limitin ne anlama geldiğini kavramsal açıdan anlamlı bir şekilde açıklamıştır. Yine aynı düşünceden hareketle de b şıkkını yorumlayarak istenilen sonuca ulaşmıştır. Her iki çözüm prosedüründe de yaptığı aritmetik işlemler ve uyguladığı çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlıdır.

S3: Hikmet akıl yürütme sürecinin her basamağında öncelikle kendi bilgi birikimini ve yorumlama gücünü kullanmayı başarabilmiştir. Beklenmedik bir sorunla karşılaşınca panikleyip çözümü bırakmamış, sorunun üzerine gitmiştir. Yaptığı tüm işlemleri kendi bilgi süzgecinden geçirdiğinden, kullandığı kavramların her birine ait uygun açıklamalarda bulunarak zihinlerde oluşabilecek soru işaretlerini kaldırmıştır. Algoritmayı unutsa bile farklı bir çıkış yolu bulabilmiştir. Derinlemesine düşünce yapısı ve tartışma ortamının hâkim olduğu bu akıl yürütme becerisi türü CR olarak sınıflandırılabilir.

S4: Hikmet'in ortaya koyduğu bu akıl yürütme sürecinin altında öncelikle kendisine ve bilgisine olan güven yer almaktadır. Bu güven ise kavramların özünde bulunan anlamlara hâkim olmakla oluşmaktadır. Örneğin Hikmet bu soruda limitin ifade ettiği anlama tam olarak hakim olmasaydı belirttiği yorumları yapmakta zorlanabilir; algoritmayı hatırlayamayınca çözümü yarıda bırakabilirdi. Ama o çözüme devam ederek farklı yollar bulabilmiştir. Bu sebeple öğrenme yaşantıları oluşturulurken farklı çözüm yollarıyla karşılaşmak ne kadar önemliyse; sağlam bir kavramsal alt yapıya sahip olmakta o kadar önem kazanmaktadır.

Hikmet'in Problem 2'ye Ait Sınıflandırma Kodu

Hikmet'in Problem 2'ye ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dgd}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

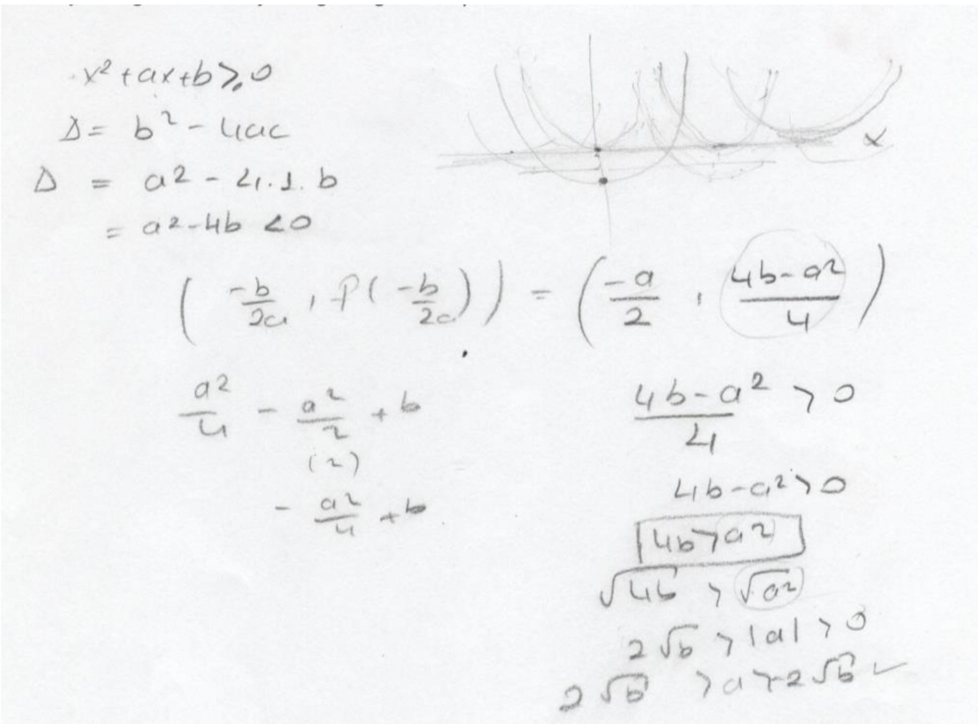
Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 2'nin çözüm prosedürü için dört öğrenci tarafından kullanılmıştır. Akıl yürütme süreçleri sonunda dört öğrenci de doğru sonuca ulaşmayı başarmıştır. Problemin soru cümlesinde geçen ve öğrencilerin direkt olarak bir algoritma uygulamasına sebep olan ifadeler, bu akıl yürütme türünü sergileyen öğrencileri de etkilemiştir. Ancak beklenen durumdan farklı bir sonuçla karşılaştıklarını anladıklarında düşünce güçlerini devreye katarak etkili akıl yürütmeler ortaya koymuşlardır. Sadece Nurdan belirli bir algoritma kullanmadan farklı bir düşünce tarzı sergileyerek fonksiyonlardan yardım almıştır. Bu tarz farklı düşünebilme süreçleri, kullanılan kavramlara yüksek hakimiyetin sonucudur.

4.3.3. Problem 3

"$y = \sqrt[4]{x^2 + ax + b}$ *fonksiyonunun en geniş tanım kümesinin gerçek sayılar kümesi olabilmesi için* a *değerinin nasıl seçilmesi gerektiğini belirleyiniz."*

4.3.3.1. Hikmet'in problem 3'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hikmet'in Problem 3'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.51, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.51. Hikmet'in problem 3'e ait çalışma kağıdı

Hikmet'in Problem 3'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Evet Hikmet yine aynı şekilde sesli düşünerek çözmeni istiyorum.*

Hikmet: *Şimdi kökün derecesi 4 olduğu için içerisi negatif çıkmayacak yani her zaman sıfırdan büyük olacak negatif olamaz. Yani burası tek olsaydı 4 değil de 3 olsaydı negatif çıkabiliyordu. O yüzden mesela $x^2 + ax + b$ ifadesi her zaman ≥ 0 olacak.*

Mülakatçı: *Neden?*

Hikmet: *Çünkü 4. dereceden kök olduğu için her zaman içerisi pozitif olmak zorunda. Çünkü negatif bir sayı kök dışına çıkamaz. Kök dışında da olamaz zaten tanımsızlık olur. Tanımlı olmasından dolayı o şekilde olacak. Şimdi bunun da her zaman pozitif çıkması için verilen ifadenin Δ'sına bakacağız yani diskriminantına bakacağız ki diskriminantı sıfırdan küçük olacak. Sıfırdan küçük olursa herhangi bir kök olmaz kök olmadığı içinde her zaman pozitif bir değer olur.*

Mülakatçı: *Neden?*

Hikmet: *Çünkü x^2'nin önünde + var. Yani her zaman ı parabol yukarıya doğru olur. O şekilde bir şey düşünebiliriz. $\Delta = b^2 - 4ac$ den $\Delta = a^2 - 4.1.b$ yani $a^2 - 4b < 0$ olmalı. Şimdi…*

Mülakatçı: $\Delta < 0$ *olmalı dedin. Onun sebebini bir daha açıklayabilir misin?*

Hikmet: *Yani şöyle düşündüm, eğer kök olmazsa ifade her zaman pozitif bir değer olarak çıkacak diye düşündüm de ama şöyle bir şey de var; mesela verilen parabol şöyle bir şey de olabilir. Yani sonuç olarak burası bunun tepe noktası. Yani tepe noktası en iyi ihtimalle şurada olmalı (y=0 olan noktalarda). Burada olursa her zaman ama her zaman pozitif değerler alır. x değerleri negatif olsa da verilen parabol pozitif değerler alır.*

Mülakatçı: *Sıfırın üzerinde olursa yani…*

Hikmet: *Hıhı evet. Şöyle diyebiliriz o zaman, bunun tepe noktasını da şöyle buluyorduk* $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$*şeklinde koordinat edebiliyorduk.* $\frac{-b}{2a}$ *dediğimiz* $\frac{-a}{2}$*, şurası da ne yapacak* $\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b$ *buradan da* $\frac{4b-a^2}{4}$ *gelir.(öğrenci sessiz kalmıştır.)*

Mülakatçı: *Ne düşünüyorsun? Bir sıkıntı mı oluştu?*

Hikmet: *Yani şöyle düşünüyorum da burada olabilir, burada olabilir, şurada olabilir. Ama her zaman burada olması lazım yani her zaman eksen üzerinde en küçük ihtimalle eksen üzerinde olması lazım x ekseni üzerinde olması lazım ki pozitif çıksın. Şöyle bir şey olabilir tam eksen üzerinde yani. Ancak aşağı indimi bu ifadeyi sağlamaz negatif olur parabolün alacağı değerler* x *değerleri için. Burada nasıl düşünürüz…*

Mülakatçı: $\Delta < 0$*' den farklı bir şey mi düşünüyorsun şimdi?*

Hikmet: *Yani şeyi düşünüyorum da bunu buraya nasıl taşıyacağız yani sözel olarak ifade de parabol yukarıda olmalı ama yani noktasal olarak tepeleri yukarıda olduğu zaman bahsedebiliriz yani. Çünkü* x^2*, + olduğu için parabolün kolları yukarıda. Orada bir sıkıntı yokta sadece bu tepe noktasında bir sıkıntı var. Tepe noktası eğer eksen altında olursa negatif değerler de alabiliyor anlamına geliyor. Bu da sağlamayacağı anlamına geliyor. Ama eksen üzerlerinde veya eksenin tam üstünde olursa sağlıyor. Hı o zaman şöyle bir şey diyebiliriz; şu ifade her zaman sıfırdan büyük olmalı diyebiliriz (*$\frac{4b-a^2}{4} > 0$*). Çünkü eksen altında kaldığı zaman y'si her zaman negatif olur. Bizim istemediğimiz zaten y'nin negatif olmaması. Buradan da ne diyebiliriz* $4b - a^2 > 0$ *diyebiliriz.* $4b > a^2$ *diyebiliriz. Şimdi bu şartlar altında* Δ'*nın böyle olması lazım. Çünkü verilen parabol zaten ne olacak pozitif olacak. Pozitif olacağı için, ıı ama şöyle bir şey düşünebilir miyiz? hı pozitif olacağı için bu sağlayan tek değer olabilir o da teğet olabilir. Peki bu* a *yı* b *ye bağlı olarak mı belirleyeceğiz.*

Mülakatçı: *Evet.*

Hikmet: *Tamam.* a^2 *olduğu için her iki tarafın karekökünü alırsak şuna dönecek o zaman* $\sqrt{4b} > \sqrt{a^2}$ *karekök olduğu mutlak değer olarak çıkacak* $|a|$*; bunu nasıl düşünebiliriz şöyle* $2\sqrt{b}$ *desek nasıl olur (*$2\sqrt{b} > |a|$*)*

Mülakatçı: $2\sqrt{b} > |a|$

Hikmet: *Hıhı öyle bir şey düşündüm de şuan tam tersi olabilir mi diye düşünüyorum. Böyle olursa* $2\sqrt{b} > |a| > -2\sqrt{b}$ *olacakta kuralı hatırlamaya çalışıyorum (öğrenci sessizce düşünmektedir yarım dakika kadar). Böyle yaparsak* a*'yı sınırlandırmış mı oluyoruz? (yine düşünmektedir)*

Mülakatçı: *Sorun ne tam olarak?*

Hikmet: *Yani şu aralığı belirleyemedim nasıl yapacağız onu belirleyemedim. Yani şu mu olacak yoksa şöyle mi? (*$2\sqrt{b} > |a| > 0$ *diğeri* $2\sqrt{b} > a > -2\sqrt{b}$*)*

Mülakatçı: *Kuralını mı hatırlayamadın yoksa mantığına mı oturmadı?*

Hikmet: *Yani tam olarak kuralı hatırlayamadım.*

Mülakatçı: *Sence hangisi peki?*

Hikmet: *Yani şu alttaki olur çünkü şöyle düşünürsek yani böyle yaptığımız zaman a'yı sınırlandırmış oluruz ama a herhangi bir şey olabilir yani. Bizim işimiz a ile değil de daha çok tepe noktasıyla yani tepelerle olduğu için yani a ile pek bir işimiz yok. Çünkü a dediğimiz ifade, tepe değerin apsisi yani* $\frac{-q}{2}$ *zaten a ya gidiyor. Yani burada da olabilir burada da yani a'yı pozitif alırsak burası işte negatif alırsak burası olur. Yani her türlü a ile ilgili işlem yapabiliriz. Yani a'yı negatif olarak sınırlandırmanın bir anlamı yok. O yüzden bence şudur (*$2\sqrt{b} > a > -2\sqrt{b}$*) diyorum.*

Mülakatçı: *Tamam Hikmet.*

Hikmet'in Problem 3'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Hikmet'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Köklü sayılar kavramı ve diskriminant kavramı, tepe noktası kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyon), fonksiyonlar (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Hikmet, çözüm prosedürünü ilerletirken kullandığı her bir kavramı açıklayabilmiştir. Öncelikle köklü sayıların özelliklerini kullanıp, kök içinin neden ≥ 0 olması gerektiğini belirtmiştir. Sorudaki şartı sağlatmak için diskriminanta başvurmuş ve $\Delta < 0$ olmalıdır demiştir. Yine bu durumu da parabol ve tepe noktası kavramlarıyla açıklamıştır. Hikmet, bu süreçte aklına takılan noktaları tartışma ortamı oluşturarak, kendi bilgi birikimiyle tartışıp sonuca bağlamıştır. Matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce yapısı sergileyerek tepe noktası kavramıyla bütünleşik yorumlar yapabilmiştir. Tüm bu süreçte kullandığı matematiksel kavramlar, aritmetik işlemler ve genel olarak oluşturduğu çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlı ve kabul edilebilirdir.

S3: Hikmet akıl yürütme sürecinde, öğrenme çevresinden hatırladığı benzer sorular ya da algoritmalarla değil; oluşturduğu bilgi birikimiyle hareket etmiştir. Bu durumun en belirgin göstergesi, süreç boyunca aklına takılan ve cevap bulamadığı soruları yine kendi bilgisine yönelerek cevap aramaya çalışmasıdır. Matematiksel kavramlar üzerindeki hakimiyeti neticesinde bu karmaşıklıktan kolayca sıyrılıp, bir sonraki adıma geçebilmiştir. Derinlemesine düşünce yapısı sergileyerek, kullanılan kavramların özelliklerine hakim olmayı temel alan, ezber ve hazır bilgilerin yer almadığı akıl yürütme becerisi türü olan CR, Hikmet'in bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü olarak belirlenebilir.

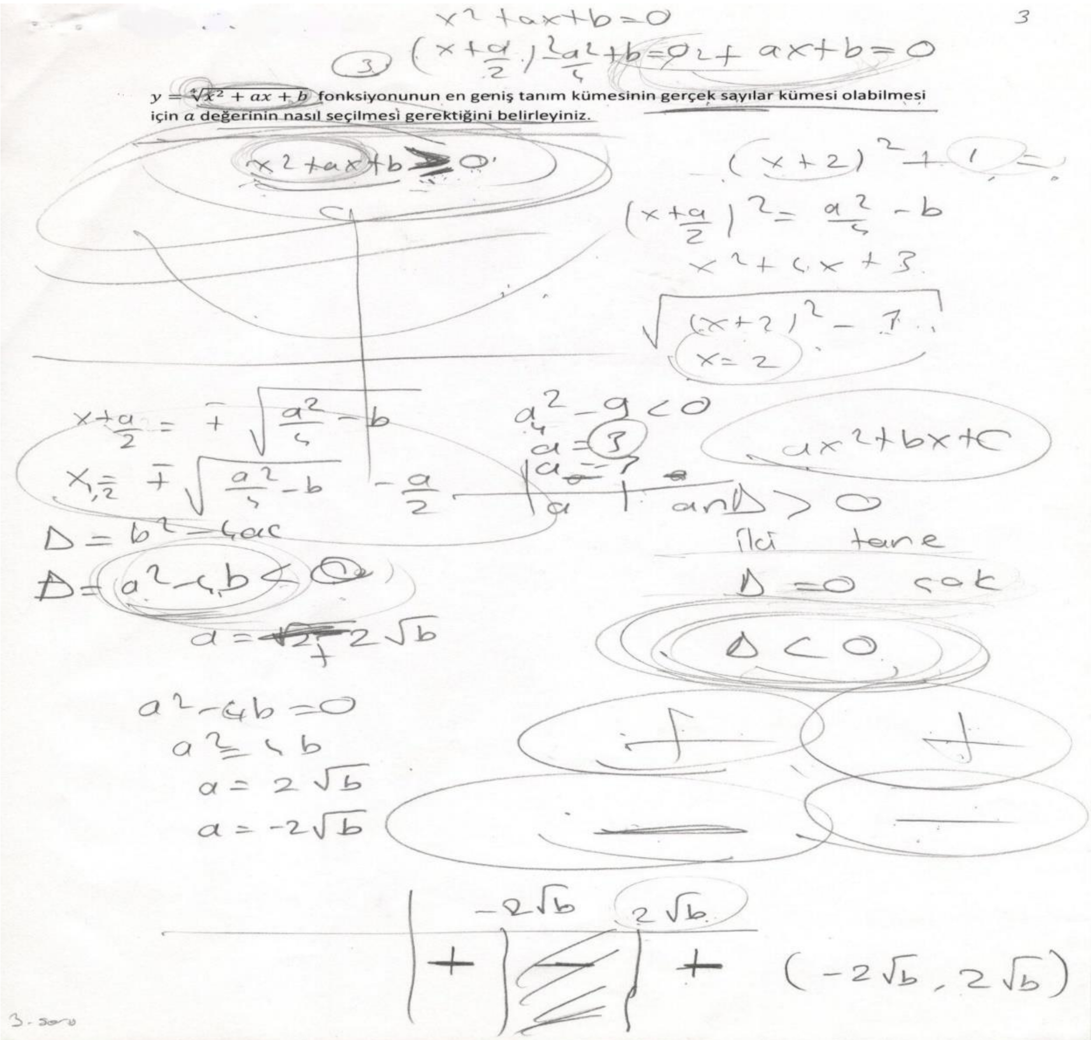
S4: Hikmet çözüm prosedürünü uygularken mücadeleci bir tavır sergilemiştir. Karşılaştığı sorunlardan korkmamış, göz ardı etmemiş, onlar üzerinde derinlemesine ve çok yönlü olarak düşünmüştür. Örneğin süreç sonunda, $2\sqrt{b} > |a|$ şeklindeki ifade için iki farklı eşitsizlik oluşturmuştur. Mutlak değerli eşitsizliklerin kuralını hatırlayamamasına rağmen cevap aramayı orada bırakmamış; a sayısının nasıl davranabileceğini grafik üzerinde düşünerek yorumlamıştır. Bu durum, Hikmet'in kullandığı kavramlarla ilgili kavramsal alt yapısının güçlü olduğunun göstergesidir. İfade ettiği $\Delta = a^2 - 4b < 0$ sayısını tepe noktası kullanarak yeniden bulabilmesi de yine matematiksel alt yapıdaki gücünü ispatlamaktadır. Ancak Hikmet $2\sqrt{b} = a$ olduğu durumunu gözden kaçırmış çözüme ilave etmemiştir.

Hikmet'in Problem 3'e Ait Sınıflandırma Kodu

Hikmet'in Problem 3'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{ogd}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek bir tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

4.3.3.2. Umut’un problem 3’e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Umut’un Problem 3’e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.52, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.52. Umut’un problem 3’e ait çalışma kağıdı

Umut'un Problem 3'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *Umut sesli düşünerek çözmeni istiyorum.*

Umut: *Şimdi hocam bir fonksiyonun en geniş tanım kümesini bulurken önce kuvvete göre hareket ediyoruz. Kuvvet burada eğer 4 değil de 3 yani tek sayıysa kuvvet direk yani tüm reel sayıları alabiliyor diyoruz. Yani kökün önemi yok ama çift kuvvet olduğu zaman en geniş tanım kümesine bakarken* $x^2 + ax + b \geq 0$ *olma durumunu inceliyoruz.*

Mülakatçı: *Neden çift kuvvette böyle?*

Umut: *Çiftte neden böyle çünkü karekökün içi her zaman pozitiftir. Yani kuvveti aldığın zaman pozitif çıkması gerekir. Yani negatif olamayacağı için en kötü ihtimalle bunun alabileceği değer 0'dır. Hani tam kareye tamamlayıp x + bilmem neyin karesine tamamlıyoruz ya bunun alabileceği en küçük değer bu ifadelerin 0 olması durumunda gerçekleşir. Yani bu ifadenin en küçük alabileceği değer 0'dır. Ondan sonra da 0'dan büyük alabileceği değerler vardır.*

Mülakatçı: *Peki her zaman kuvvet çift olunca içi tam kare ifade mi olmalıdır?*

Umut: *Her zaman tam kare değildir ama şurayı her zaman tam kare yapabilirsin yani. Sonra da ekleyip çıkarma yapabilirsin mesela.* $x^2 + 4x + 3$ *desek mesela onu* $\sqrt{(x+2)^2 - 1}$ *şeklinde yazabiliriz. Burada mesela x yerine* -2 *versek* -1 *olur. Buda bu değeri almaz yani burada 0 olmaz yani en küçük değer. Yani her zaman sağlamaz yani ama biz burada genel tüm şartları göz önünde bulundurarak bunu söylüyoruz* ≥ 0 *durumunu.*

Mülakatçı: *Tamam*

Umut: *Sonra, fonksiyonun en geniş tanım kümesinin gerçek sayılar olması için a değeri nasıl seçilmelidir? Burada* ≥ 0 *yani bu denklemi daima 0'dan büyük olabilmesi için* Δ*'ya bakmamız lazım.*

Mülakatçı: *Neden?*

Umut: *Çünkü mesela* $ax^2 + bx + c$ *de mesela kök durumları vardı ya* Δ *durumları. Eğer* $\Delta > 0$ *ise denklemin iki tane kökü vardır;* $\Delta = 0$ *ise çakışık kökü vardır;* $\Delta < 0$ *ise + ise + dır, - ise – dir Ben burada daima artanlığa baktığım için + + durumunda* $\Delta < 0$ *daima azalanlık olsaydı yine* $\Delta < 0$*'a bakacaktım. Çünkü a'nın işaretinin aynısı, a'nın işaretinin aynısı. Yani burada inceleyeceğim durum* $\Delta < 0$ *olmak zorunda. Yani diyoruz ya hocam mesela köklerini bulduk bunlar kökler oluyor, a'nın işaretinin aynısı. Burada* *artan bir fonksiyon sürekli artan olduğu için* Δ*'ya bakmak gerekiyor. O yüzden* Δ*'ya bakalım.* $b^2 - 4ac$*. b burada a olmuş* $a^2 - 4b < 0$*. Bunu sağlamalı. Buradan* $a = \pm 2\sqrt{b}$ *mi geliyor? Bunu 0'a eşitlesek köklerini bulsak* $a^2 - 4b = 0, a^2 = 4b, a = 2\sqrt{b}, a = -2\sqrt{b}$ *olur. Ondan sonra eşitsizliği çözersek…*

Mülakatçı: *Peki burada önce küçük dedin sonra eşittir dedin.*

Umut: *Hı kök bulurken hani denklem sistemini eşitliyoruz ya hocam onun için. (öğrenci işaret tablosunu oluşturmuştur ve sırasıyla* $-2\sqrt{b}$ *ve* $2\sqrt{b}$ *sayılarını yerleştirmiştir.) sonra bakıyorum mesela* $2\sqrt{b}$*'den büyük değerler için mesela* $a^2 - 9$ *de mesela hocam* < 0 *'ya. Bunu sağlayan ne 3 bir de -3. 3 den büyük değer için mesela 4 için daima pozitif olacak yani pozitifle başlayacaktır. Burada da mesela* $2\sqrt{b}$ *için denklemi buna indirdiğimde pozitifle başlayacaktır, burada negatif olacaktır köke geldiği için sonra pozitif olacaktır. Yani bu* < 0 *'ı sağlayan nokta neresidir* $(-2\sqrt{b}, 2\sqrt{b})$ *dir.*

Mülakatçı: *Aralığı mı?*

Umut: *Aralığı. Çünkü* < 0*'ya hocam burada eşitlik filan da yok. Düşüncem bu.*

Mülakatçı: *Tamam Umut. Peki böyle bir düşünce anlattın bize. Bu düşüncelere nasıl ulaştın? Daha önce görmüş müydün; yoksa kendi içinde mi oturtturdun tüm bunları?*

Umut: *Aslında analiz konularına çalışırken birden fazla kaynaktan yararlanıyorum. Gerek Youtube'dan Calculus yayınları olsun, gerek aşağıdaki eski kaynaklardan olsun (kütüphane) yani çok kaynağa birden fazla kaynağa bakıyorum sadece ders kitaplarıyla yetinmiyorum, hiçbir zaman da yetinmeyeceğim. Yani o yüzden çalışıyorum konu olarak. Ama yani bu düşünceleri derslerde de uyguladığım noktalar oluyor yani. Bazılarını kendim uyguluyorum yani unutmuyorum ama bazılarını da başkalarından gördüğüm oluyor tabi. Bu yani benim görüşüm* $\Delta > 0$ *iki tane kökü,* $\Delta = 0$ *çakışık kökü vardır ,* $\Delta < 0$ *olma durumu a'nın işaretinin aynısıdır. Burada* > 0 *dediği için daima 0'dan büyük olduğu için pozitif olduğu için buna bakmam gerekiyor. daima 0'dan küçük deseydi yine buna bakmam gerekiyordu. Yani buradan yola çıktık bilmiyorum ne kadar doğru yaptık.*

Mülakatçı: *Peki 0'a eşitlik?*

Umut: *0'a eşitlik olduğu zaman çakışık olduğunu kullanacağız.*

Mülakatçı: *Yoo şurası için (verilen fonksiyonu* ≥ 0 *şeklinde belirlemişti. Büyüklüğü gösterdi eşitliği soruyorum)*

Umut: $x^2 + ax + b = 0$ *ise hocam tek kökü vardır mı diyeceğiz. Yani bir iki katlı polinomun 0'a eşit olma durumu. Ama burada geniş tanım kümesi diyor ya hocam. Yani siz şimdi farklı soru mu soruyorsunuz hocam (öğrenci böyle bir soru beklemiyordu o yüzden biraz durakladı)*

Mülakatçı: *Hani diyorsun ya 0'dan küçük olsa a şöyle olurdu, büyük olsa şöyle olurdu. Peki 0'a eşit olsa ne olur a?*

Umut: *0'a eşit olduğu zaman da* $\Delta = 0$ *çakışık olduğu duruma bakmıyor muyduk hocam? İşte orayı 0 yapan değer de diskriminant değeri olmuyor mu hocam yani denklemin kökü oluyor x kökleri oluyor. 0 yaptığı için direk. Yani buradan x i çekmemiz gerekiyor. size x i bulayım hocam. Şimdi* $x^2 + ax + b = 0$ *ise hocam x'i çekeriz buradan.* $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0$ *olur. Buradan* $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$ *olur karşı tarafa atınca. Buradan* $x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ *karşıya atayım.* $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} - \frac{a}{2}$ *Denklemi sağlar. Buradan da direk kök buluruz diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Tamam Umut.*

Umut'un Problem 3'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Umut'un akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Köklü sayılar kavramı ve diskriminant kavramı iii) Aritmetik işlemler (transformasyon), fonksiyonlar (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Umut çözüm prosedürünün başında "*bir fonksiyonun en geniş tanım kümesini bulurken önce kuvvete göre hareket ediyoruz*" şeklinde ifade kullanarak köklü sayıların özelliğinden hareket etmiştir. Kök içerisindeki ifadenin ≥ 0 olması gerektiğini; bu şartı sağlayan durumların da Δ ile bulunabileceğini belirtmiştir. Diskriminant kavramı ile ilgili gerekli işlemleri ve yorumlamaları yaparak bir sonuca ulaşmıştır. Bu süreçte kullanılan kavramlar, uygulanan aritmetik işlemler ve dolayısıyla takip edilen çözüm prosedürü matematiksel olarak anlamlıdır. Umut, derinlemesine bir düşünce yapısı ile sürece matematiksel olarak hakim bir durum sergilemiştir.

S3: Umut, akıl yürütme sürecinde köklü sayıların özelliği yardımıyla diskriminanta ulaşmış; sonra diskriminant için geçerli algoritmaları tek tek açıklamıştır. Bunlar ışığında da ilgili olanını seçip kullanmış, Δ'nın eşitini bulmuş ve sağlaması gereken şartı belirtmiştir. Bu aşamaya kadar ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü, AR'nin tipik özelliklerini göstermektedir. Sonraki aşamada ise Δ'yı işaret tablosunda incelemiştir. Bir algoritma takip etmektense derinlemesine düşünüp, örnekler vererek tartışma ortamı oluşturmuş ve işaret tablosundaki işaretleri belirlemiştir. Akıl yürütme sürecinin bu kısmı ise CR türünün özelliklerini taşımaktadır.

S4: Umut, çözüm prosedürü esnasında gerek kullandığı kavramların matematiksel özelliklerini açıklayabilmesi; gerekse de takıldığı noktalarda düşünerek bir sonuca ulaşabilmesiyle kavramsal olarak güçlü bir alt yapıya sahip olduğunu göstermektedir. Umut'un "*Gerek Youtube'dan Calculus yayınları olsun, gerek aşağıdaki eski kaynaklardan olsun (kütüphane) yani çok kaynağa birden fazla kaynağa bakıyorum sadece ders kitaplarıyla yetinmiyorum*." şeklindeki ifadesi de bu alt yapıya nasıl sahip olduğunu bize anlatmaktadır. Ancak sorunun çözüm kısmında $\Delta = 0$ olduğu durumda da istenilen şartın sağlandığını gözden kaçırmıştır. Bununla ilgili yaptığı açıklama ve ulaşılan sonuç doğru bilgiyi yansıtmamaktadır.

Umut'un Problem 3'e Ait Sınıflandırma Kodu

Umut'un Problem 3'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{old}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır

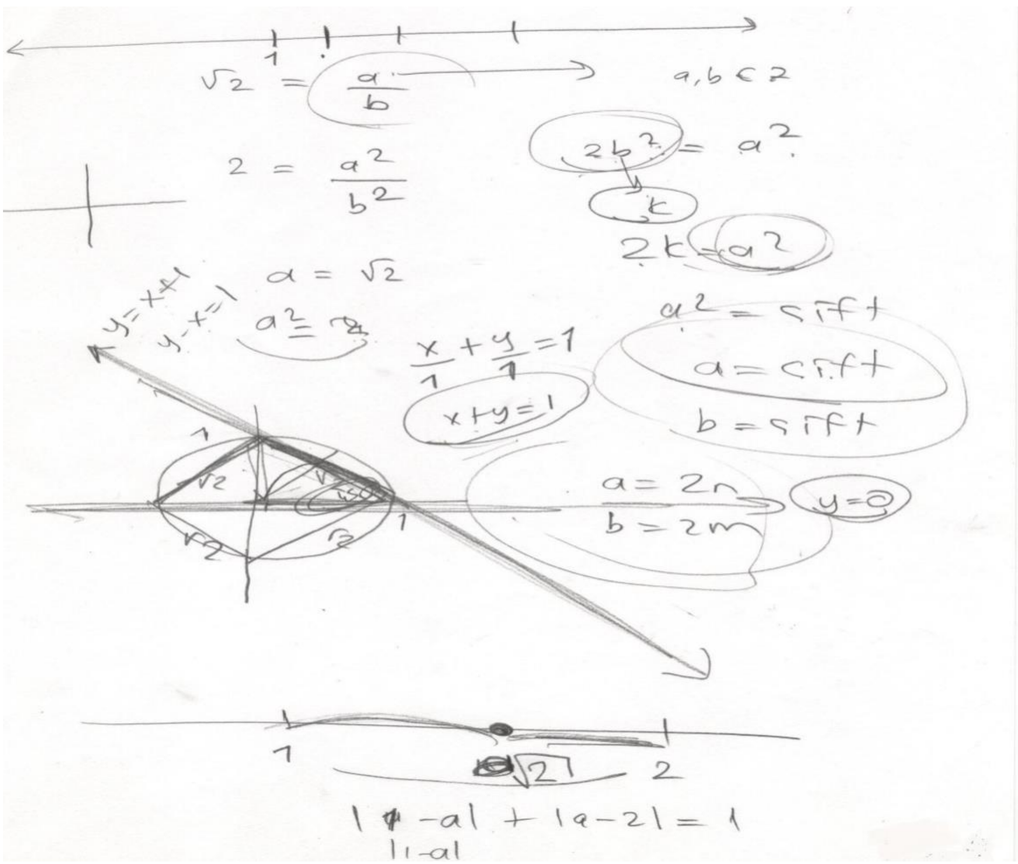
Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 3'ün çözüm prosedüründe Hikmet ve Umut tarafından kullanılmıştır. Bu akıl yürütme türünün özelliklerini içerisinde barındıran çözüm prosedürleri ile tam doğru cevaba ulaşılmasa da oldukça yaklaşılmıştır. Hikmet tüm süreci tamamen yapılandırmacı bir tavırla devam ettirirken; Umut algoritmalara başvurmuştur. Araştırmaya katılan diğer öğrencilere göre farklı bir tür akıl yürütme becerisi sergilemeleri, bu problemdeki kavramlara yönelik sahip oldukları zengin kavramsal alt yapının göstergesidir. Kişi sayısı az da olsa bu tarz derinlemesine düşünebilen, tartışma ortamları oluşturabilen öğrencilerin varlığı, uygun şartlar sağlandığı takdirde etkili matematiksel akıl yürütmeler yapılabildiğinin de bir göstergesidir.

4.3.4. Problem 4

"$\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki kesin yerini çizerek gösteriniz. **"**

4.3.4.1. Umut'un problem 4'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Umut'un Problem 4'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.53, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.53. Umut'un problem 4'e ait çalışma kağıdı

Umut'un Problem 4'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Umut: *$\sqrt{2}$ Sayısının sayı doğrusu üzerindeki kesin yerini çizerek gösteriniz. Yani $\sqrt{2}$ irrasyonel bir sayı. Onun ispatı da var. Şimdi soru bana basit geldi ama niye. Sadece gösterecek miyim?*

Mülakatçı: *Evet. Kesin yerini göstermeni istiyorum.*

Umut: *$\sqrt{2}$ Mesela $\frac{a}{b}$ gibi bir sayı olsa, a ve b tamsayı. Her iki tarafın karesini alsam $2 = \frac{a^2}{b^2}$ olur çarptığımda $2b^2 = a^2$olur. b^2'ye k gibi bir sayı karşılık getirsem… yani öylemi yapıyorduk… $2k = a^2$ Olur ve a^2 çift sayı olur. Eee bunun olması için de a'nın kesinlikle ve kesinlikle çift bir sayı olması lazım. a çift ise yerine yazdığımızda $2b^2$ çift olur. O halde b^2 çift olur buradan b de çift olur. Yani a ve b 2'nin bir katı olur. Biri 2n biri 2m ise buradan rasyonel olmadığını gösterebiliriz. Ama kesin yer olarak nasıl bir şey diyebiliriz onu düşünüyorum. $\sqrt{2}$ yaklaşık olarak 1.3 gibi bir sayı. Şuralarda bir yer de hocam ama kesin yer olarak nasıl…*

Mülakatçı: *Düşün bakalım nasıl olabilir.*

Umut: *$a = \sqrt{2}$ olsun mesela $2 = a^2$ olur. Karesi 2 olan bir sayıyı bulmam lazım o zaman sayı doğrusunda.*

Mülakatçı: *Yani $\sqrt{2}$*

Umut: *Evet. Zor bir soru geldi hocam çalışmadığım yerden çıktı. Bunun kesin yerini gösterebilir miyiz ki acaba? π'nin filan gösterebiliyoruz da kesin yerini. Bir daha düşünelim bakalım (öğrenci sessizce düşünmektedir.).*

Mülakatçı: *Ne düşünüyorsun?*

Umut: *Acaba birim çemberden mi çıkaracağız diye düşünüyorum da saçmalıyor muyum acaba?*

Mülakatçı: *Dene bakalım. Nasıl bir şeye varacaksın birim çemberden?*

Umut: *Şimdi 1'e 1 bir dik üçgen oluşturmaya çalışıyorum da; ama onunla alakası olur mu ki.*

Mülakatçı: *Ne yapmayı düşünüyorsun o dik üçgenle?*

Umut: *Hani şurası $\sqrt{2}$ birim ya, 1'e 1 ise $\sqrt{2}$. Dik üçgenler yardımıyla. Gerçi burada kare oluşturursun. Şurası $\sqrt{2}$ 'de hocam bunu genelleştirip çizebilir miyim acaba? Yani 1'e 1'den geçen bir doğrudur. Oda $y = x - 1$ mi olur $x + 1$ mi olur. Şöyle yapalım*

$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, *buradan* $x+y=1$ *doğrusu bu. Ee bunun da normu* $\sqrt{2}$ *olur öyle diyebilirim. Ondan sonrasını çıkaramadım hocam. Yani aslında yaklaşık olarak söyleyebilirim de kesin olarak nasıl göstereceğimi bilmiyorum açıkçası. Belki de biliyorumdur aklıma gelmiyor o da olabilir. İpucu verme şansımız var mı hocam?*

Mülakatçı: *Senin düşünmeni istiyorum.*

Umut: *Birim çemberden bir şeyler çıkarmaya çalıştım da…*

Mülakatçı: *Birim çember nasıl aklına geldi?*

Umut: *Yani 1'e 1'den* $\sqrt{2}$*'yi oluşturmak aklıma geldi. Yani oradan da bir doğru boyunca yaklaşımını görmek istedim. Doğrunun normu da bana* $\sqrt{2}$*'yi verdi. Söylediklerim doğru ama bunların sayı doğrusunda ki gösterim de ne işe yarayacak. Yani acaba döndürüp mü yapacağız, belli bir açıyla mı döndüreceğiz.*

Mülakatçı: *Nasıl döndürebilirsin?*

Umut: *Şurası 1, 1, 45 oluyor ya acaba bunu tam sayı doğrusuna mı çakıştıracağız.*

Mülakatçı: *Nasıl çakıştırabilirsin onu?*

Umut: 45° *Döndüreceğim. Döndürdüğüm zaman şuraya doğru, üzerine çakışır mı tam acaba. Onu söyleyebilir miyiz? Yani* $x+y=1$ *doğrusunun* y*'si 0 olan bir doğru boyunca yani* x *ekseni boyunca yerleştirebilir miyim diye düşünüyorum da. Ama o zaman öteleme mi olur acaba biraz. Tam olarak yerini noktasal olarak mı istiyorsunuz hocam?*

Mülakatçı: *Yani evet.*

Umut: *Acaba mutlak değerden mi gideceğiz ki?*

Mülakatçı: *Niye mutlak değer?*

Umut: *Yani şöyle bir nokta da olduğunu düşünsek* $\sqrt{2}$*'nin a noktası olarak. Şunun şuna uzaklığı* $|1-a|$*; şunun şuna uzaklığı da* $|a-2|$*; şunun şuna uzaklığı da 1 (*$|1-a|+|a-2|=1$*). Yok buradan da köklü bir şey gelmez. Ya tam şurada bir noktada desem* $\sqrt{2}$*… bilmiyorum ki nereden gideceğiz. Güzel bir soru aslında. Ben pes etmeyi sevmiyorum ama nasıl çıkartacağız. Yok hocam bulamıyorum.*

Mülakatçı: *Tamam Umut.*

Umut'un Problem 4'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Umut'un akıl yürütme süreci; $i)$ Çözüm prosedürü, $ii)$ Sayı doğrusu, koordinat düzlemi, kenar uzunlukları $1, 1, \sqrt{2}$ birim olan dik üçgen (nesne) iii) Nesneler kullanarak yapılan işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Umut çözüm prosedüründe, öncelikle $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonelliğini ispatlamış, sonrasında da $\sqrt{2}$' nin kesin yerini bulabileceğini düşündüğü adımları denemiştir. Önceki öğrenme yaşantısında yer almayan bu soruda kendi bilgisi ve yorumlarıyla hareket etmiştir. Bir tartışma ortamı oluşturmuş ve o doğrultuda ilerlemiştir. Yaptığı ispatı, sonrasında kullandığı koordinat düzlemini, koordinat düzlemi üzerine yerleştirdiği dik üçgeni matematiksel olarak anlamlı bir şekilde kullanmıştır. İki noktadan geçen doğrunun denklemini bulması transformasyondur. Bu yaptığı işlem de matematiksel olarak anlamlıdır. $x + y = 1$ doğrusunun $\sqrt{2}$ olan normundan hareket etmesi, doğruyu 45° döndürme işlemini tartışması, ortaya koyduğu akıl yürütme sürecinde, matematiksel olarak derinlemesine düşündüğünün birer göstergesidir.

S3: Umut akıl yürütme sürecinde tartışma ortamı oluşturup kendi bilgi birikimi ışığında adımlar atmaya çalışmıştır. Varmak istediği doğru sonuca varamasa da, bu yolda mantıklı ve matematiğe uygun yorumlar yapabilmiştir. İlk etapta "$\sqrt{2}$ *bir irrasyonel sayı. Onun ispat var.*" şeklinde bir ifade kullanmış ve ispatı birebir anlatmıştır. Bu akıl yürütme MR sınıflandırması için tipik bir örnektir. Sonraki aşamada ise kendi yorumları ile koordinat düzleminde $\sqrt{2}$ sayısının kesin yerini bulmaya yönelik izlediği adımlarda, matematiksel özellikleri derinlemesine kullanmış ve tartışma ortamı oluşturmuştur. Bu tip akıl yürütme becerisi CR olarak sınıflandırılmaktadır. Akıl yürütme süreci boyunca salt CR kullanılmaması MR özelliklerinin de barındırılması çeşitlilik açısından CR'nin lokal özellik göstermesine sebep olmuştur.

S4: Umut'un akıl yürütme sürecinde yer verdiği matematiksel kavramlara dair hâkimiyeti dikkat çekmektedir. Bu hâkimiyet sayesinde, farklı bakış açıları sergileyerek farklı matematiksel yapıları bütüncül olarak düşünebilmiştir. İki noktadan geçen doğru oluşturma, norm alma, döndürme, öteleme ve mutlak değer kavramı gibi yapıları bir arada yorumlayabilmesi bu durumun göstergesidir. Umut'un kullandığı "*Pes etmeyi sevmiyorum.*" şeklindeki ifadeyle güçlü bir matematiksel alt yapıya sahip olma çabası içinde olduğunun yorumunu yapabiliriz. Ancak tüm çabalarına rağmen soruda aradığı doğru cevaba ulaşamaması, bu alt yapının oluşumundaki öğrenme çevresi etkisini düşündürmektedir.

Umut'un Problem 4'e Ait Sınıflandırma Kodu

Umut'un Problem 4'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{old}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır

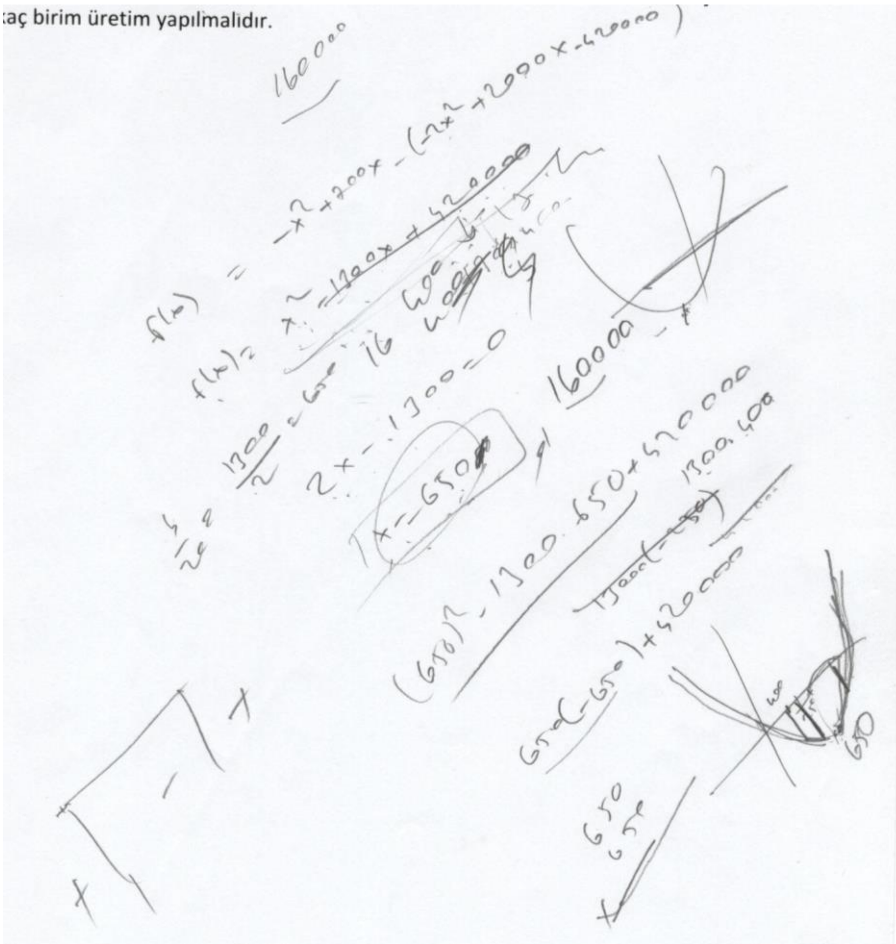
Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 4'ün çözüm prosedüründe sadece Umut tarafından kullanılmıştır.Araştırmaya katılan diğer dokuz öğrencinin genel olarak ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türü kullandığı bu problemde, Umut'un daha derinlemesine düşünceler kullanması onun problemdeki kavramlar ile alakalı zengin bilgi birikimini göstermektedir. Öğretim ortamlarında düşünme türleri açısından zengin bir ortamın oluşturulmasının yanında bireysel gayretinde önemi bu problemde etkili bir şekilde görülebilir.

4.3.5. Problem 5

"Bir firma her yıl x birim ürün üretmektedir (x, [400,600] arasında olmak üzere). Üretimin maliyeti yaklaşık olarak $-2x^2 + 2000x - 420000\ tl/birim\ \ dir.$ *Üretilen ürünlerin satış fiyatı ise* $-x^2 + 700x\ tl/birim$ *dir. Yıllık karın en fazla olması için her yıl kaç birim üretim yapılmalıdır."*

4.3.5.1. Önder'in problem 5'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Önder'in Problem 5'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.54, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.54. Önder'in problem 5'e ait çalışma kağıdı

Önder'in Problem 5'e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Mülakatçı: *(öğrenci sesli bir şekilde soruyu okumuştur ardından bir kere de sessiz okumuştur) soruyu anlayabildin mi ne isteniyor soru da?*

Önder: *Üretimin maliyeti yani bu maliyet fiyatı herhalde hocam yani birim başına bu kadar maliyeti varmış. Üretilen ürünlerin satış fiyatı ise* $-x^2 + 700x$ *miş. Hım şimdi anladım hocam anlatırken daha iyi anlıyorum herhalde. Şimdi hocam bu maliyeti en düşük almamız gerekiyor; satış fiyatını da en yüksek alacağız ki yıllık karın en fazla olması gerekiyor. Satış fiyatını en yüksek maliyeti de en düşük alacağız. Ama* x *'lerin iki değerde de aynı olması gerekiyor. Onun içindir ki…*

Mülakatçı: *Senden ne isteniyor?*

Önder: *Kar. Yani kar nedir satış fiyatı eksi maliyet fiyatıdır. Şöyle bir şey yapsak* $-x^2 + 700x - (-2x^2 + 2000x - 420000)$ *yazsam. Bu da birim başına düşen kar olsun. Buna* $f(x)$ *desem* $f(x) = x^2 - 1300x + 420000$. *Hocam sonra burada en fazla* *dediği için bu fonksiyonun alabileceği en büyük değere bakacağız. Bu fonksiyonun alabileceği en büyük değer de, x'i bulduktan sonra, $-x^2 + 700x$ ' de yerine yazmamız gerekiyor. Şu fonksiyonun alabileceği en büyük değeri bulabilmek için ne yapmamız gerekiyor… Parabolün kolları yukarı, en aşağı değerini buluruz en yüksek olmaz ki. Acaba en düşük değerini mi bulacağız. En düşük değerini bulsak… Evet en düşük değerini bulacağız herhalde. $f'(x) = 2x - 1300$ şu fonksiyonun birinci türevini aldım sıfıra eşitleyince $x = 650$ çıktı. Sonra x'in bu 650 değerini de şu $-x^2 + 700x$ de yerine yazarsak… Ama negatif çıkar… Doğru ya bunun yerine yazacağız hıh… Hocam bu $f(x) = x^2 - 1300x + 420000$ de en küçük değerini bulduk. Yani burada minimum nokta var. Çünkü parabolün kolları yukarı doğru olduğu için minimum nokta var. Minimum noktası da birinci türevini aldığımızdan dolayı 650'dir. Sonra 650'yi fonksiyonda yerine yazarsak değer çıkar da şunu da şöyle yazabilir miyiz bunun cinsinden, yazılmaz.$650^2 - 1300.650 + 420000$ şu 420000'i de ben 1300.400 diye yazarım. Sonra şurayı yazarım $650(-650) + 420000$. Geriye 650 ile 650'yi çarpmak kalıyor.*

Mülakatçı: *Peki sana bir şey söylesem. Soruda başta ne diyor $x400$ ile 600 arasında.*

Önder: *Tabii ki. Biz 650 değerini buluyoruz. O zaman buradan çözemeyiz imkânsız (öğrenci sessiz biraz düşünür). Hocam bu fonksiyon artan fonksiyon mu azalan fonksiyon mu ona bakmamız gerekmiyor mu? Eğer artan fonksiyonsa zaten burada en büyük değerini veririm; eğer azalan fonksiyon ise en küçük değerini verip en büyük değerine ulaşmaya çalışırım. Onun için bu fonksiyonun artan fonksiyon mu azalan fonksiyon mu olduğuna bakarım önce. Artan bir fonksiyon olduğu açık mıdır acaba?*

Mülakatçı: *Parabol şekli çizdin. Onu neden çizdin?*

Önder: *Ya bunu hocam temsili olarak çizdim. Parabolün kolları yukarı ya en aşağı noktası yani minimum noktasını göstermek için çizdim.*

Mülakatçı: *x'i 650 buldun birinci türeve göre maksimum mu minimum mu?*

Önder: *Minimum nokta. En aşağıda olduğu için minimum nokta. Ya bu $\frac{b}{2a}$'dan da çıkar. Yine aynı $\frac{1300}{2} = 650$ yani tepe noktasının apsisi. Sonra 650 çıkmıyor çünkü şeyden dolayı bu değeri veremeyiz çünkü 400 ile 600 değeri arasında vermiş. Benim demek istediğim şey şu da; bu fonksiyonun artan mı azalan mı olduğunu bulsak, sonra eğer artansa x'in her değeri için artacak ya bu fonksiyon o zaman şu aralıktaki en yüksek* *değeri alırız. Sonra da yerine yazarsak o bizim en fazla yani birim başına üretilen en fazla kar olur da bu fonksiyonun artan mı azalan mı olduğunu nereden buluyorduk onu hatırlayamıyorum. Hocam hani tablo oluşturma vardı. Ben bunun tam değerini yazamayacağım ama a b şeklinde yazsak ama o da yazılmaz ki. Bunun tablosunu oluşturacaktım mesela, şurada bulacağım iki tane değer şeklinde, sonra* $+$ *ile başlar* $+, -, +$ *diye gider mesela bu.*

Mülakatçı: *Köklerini bulup yani…*

Önder: *Köklerini bulmak evet ama bunun köklerini bulmak bayağı zor. Gerçi şu sayılar negatif olmak zorunda (yani kökler) ama hangi iki sayı işte.* 420000 *Acaba şunda bir şey var mı* 13.4 *de. Şu fonksiyonun artan mı azalan mı olduğunu bir bulabilsem…*

Mülakatçı: *Peki bunu grafikten anlayabilir misin? Aşağıya grafiğini çizdin.*

Önder: *Grafiğinden anlarım. Neydi bir tabir vardı; karıncayı bırakırsın eğer karınca yokuş aşağı iniyorsa o fonksiyon azalan olur, eğer yukarı çıkarsa… Zaten belli fonksiyonun ne olduğu da… 400 ile 600 arasında ki değer…* 650 *şurası olduğuna göre* 400 *ve* 600 *değerleri hep şuradadır.* 400 *değeri şurada olsa şurası* 250 *birimlik bir fark. Şurası da fonksiyon üzerinde olması gerekir 600 mesela. Gerçi şöyle bir şey, zaten* 0*'dan* $650'$*ye kadar bu fonksiyon azalandır;* 650*'den yukarıda da artandır.* 650*' ye kadar azalan olduğuna göre bu aralıkta da* 400 *ve* 600 *ü kapsadığına göre fonksiyon azalandır bu aralıkta. Bu aralıkta azalan olduğu için biz* 400 *değerini vermemiz lazım.* 400 *değerini verdiğimiz de* x *fonksiyonu ne çıkar, zaten şuralar birbirini götürür.* 400*'ün karesi ne yapar* 160000.

Mülakatçı: *Mesela genelde sorularda neyle karşılaşıyordun bu soru nasıl oldu?*

Önder: *Bu sorularda genellikle işte en fazla olması demesi burada bir maksimum minimumluk bir şey var. Bir de burada zaten maliyet ve satışı verdikten sonra bizim burada şey bulmamız normal, mesela nasıl diyeyim takım elbisenin maliyeti 250 lira ise satış fiyatı 500 lira olsun bunun karı 250dir. Aynı burada fonksiyon vermiş. Fonksiyondan fonksiyonu çıkardığımız da yine elimiz de bir fonksiyon geliyor. Yani bu fonksiyondan sonra yapmamız gereken şey şu fonksiyonun alabileceği en büyük değer. Alabileceği en büyük değer bulabilmek için de yani tepe noktası veya minimum maksimum noktalardan çıkar yani iki yoldan da çıkıyor. Yani bizim bulduğumuz 160000 değeri de kar fonksiyonun tepe noktasının ordinatı aynı zaman da*

Mülakatçı: *Tamam Önder.*

Önder’in Problem 5’e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Önder’in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü, ii) Grafik yorumlama kavramı, aritmetik işlemler (transformasyon), sayılar (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Önder, çözüm prosedürünü uygularken, satış ve maliyet fonksiyonlarının farkından kâr fonksiyonuna ulaşmış; sonraki algoritmayı da “*burada en fazla dediği için bu fonksiyonun alabileceği en büyük değere bakacağız*” ifadesinden yararlanarak uygulamıştır. Önder kâr fonksiyonunun temsili grafiğini oluşturarak, bulacağı değerin aslında minimum değer olacağını fark etmiş ve bu değeri 650 bulmuştur. Soruda verilen aralığın araştırmacı tarafından hatırlatılması üzerine, fonksiyonun artanlık-azalanlık özelliklerine bakılması gerektiğini belirtmiştir. “*Bu fonksiyonun artan mı azalan mı olduğunu nereden buluyorduk onu hatırlamıyorum hocam.. hani tablo oluşturma vardı.*” şeklinde ifade etmesine rağmen, derinlemesine bir düşünce ortaya koyarak, çizdiği grafikten yararlanıp yorumlamalar yapmış ve doğru sonuca ulaşmıştır. Önder’in çözüm prosedüründe uyguladığı adımlar, aritmetik işlemler ve yorumlar matematiksel olarak anlamlıdır. Süreçte derinlemesine bir düşünce şekli sergilemiştir.

S3: Önder ortaya koyduğu akıl yürütme sürecinin ilk adımında maksimum minimum problemlerinde kullanılan algoritmayı hatırlayarak uygulamayı düşünmüştür. Bunun için de kâr fonksiyonunun türevini alıp, bu değeri 0’a eşitlemiştir. Bulduğu 650 değerinden sonraki adımlarda ise, aklındaki algoritmayı hatırlayamadığını ifade etmiş, ancak çizdiği grafik üzerinde yorumlamalar yaparak algoritmaya ihtiyaç duymadan sonuca varabilmiştir. Bu sebeple Önder 'in bu soru için sahip olduğu akıl yürütme becerisi türü ilk aşamada AR’dir. Grafiğin kollarına göre fonksiyonun artan ya da azalanlığına karar vererek, soruda istenen aralığa göre yorum yapıp sonuca vardığı kısım ise CR olarak sınıflandırılabilir.

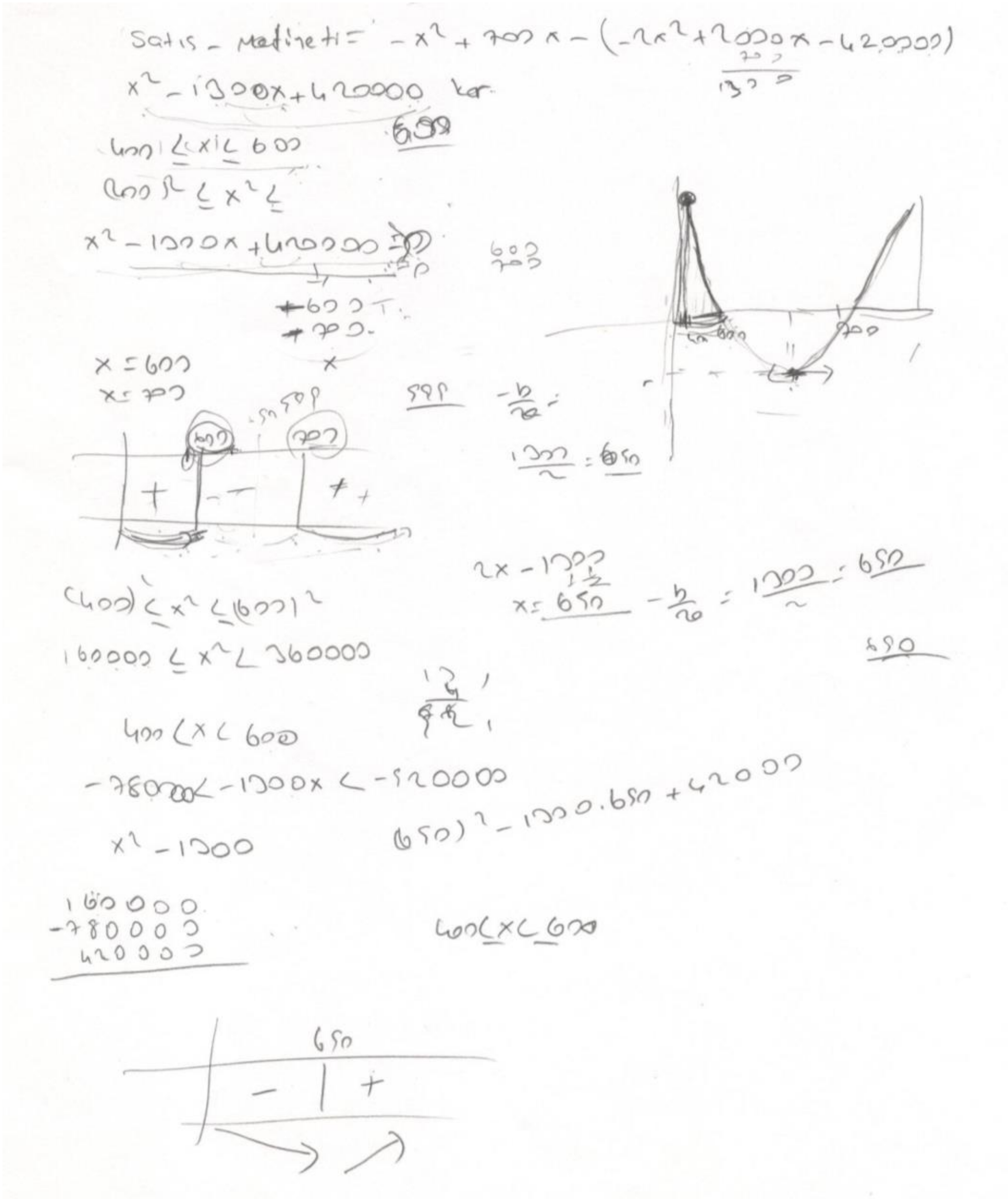
S4: Önder çözüm prosedürünü uygularken, öğrenme çevresinden edindiği tecrübelerle, sorunun ilk kısmında akıcı bir şekilde ilerlemiştir. Kullandığı algoritmanın dışında kâr fonksiyonunun grafiğini de çizmesi ve onun üzerinde yorumlar yapması konu ile ilgili temel bilgilere sahip olduğunu göstermektedir. Kâr fonksiyonunun artan ya da azalan olduğu aralıkları belirlerken ise zorluk yaşamıştır. Bu zorluğu ancak tek bir yolla aşacağını düşünmüş; işaret tablosunu oluşturacağını belirtmiştir. Araştırmacının çizilen grafiği hatırlatması neticesinde, bu duruma bütüncül olarak bakabilmiştir. Matematiksel olarak anlamlı yorumlar yaparak sonuca ulaşmıştır. Sürecin bu şekilde yaşanması matematiksel yapılara kavramsal olarak hâkim olmasıyla mümkündür.

Önder'in Problem 5'e Ait Sınıflandırma Kodu

Önder'in Problem 5'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dld}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki farklı tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

4.3.5.2. Nurdan'ın problem 5'e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nurdan'ın Problem 5'e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.55, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.55. Nurdan’ın problem 5’e ait çalışma kağıdı

Nurdan’ın Problem 5’e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Nurdan: *(Öğrenci soruyu sesli bir şekilde okumuştur) şimdi* $x, 400$ *ile* 600 *arasında bir değer. Birim, ürün… Hocam o zaman küsuratlı olmayacak. Mesela 5.5 tane ayakkabı değil 5 ayakkabı üretecekler. Tamam. O mantıkta düşüneceğiz. Şu aralıkta bulacağım; bu aralıkta en büyük değeri bulmaya çalışacağım. Şimdi satıştan maliyeti çıkarırsak benim karım olacak.* $-x^2 + 700x - (-2x^2 + 2000x - 420000)$ *Birimler aynı.* $x^2 - 1300x + 420000$ *Buda benim karım. Yıllık karın en fazla olabilmesi için… Bu* *karın en fazla olması için diyor. Şimdi* x *değerini bana* $400 < x < 600$ *arasında vermiş. Küsuratlı bir değer de değil. Ben aslında* x^2 *yi bulup sonra şunu bulup sonra bunu bulup toplasam yanlış olmaz galiba. O bunlarda mıydı?*

Mülakatçı: *Hangisi için söylüyorsun?*

Nurdan: *Hani şimdi bunların hepsi tam sayı ya küsuratlı bir şey yok. Diyorum ki şimdi şu aralıkta ya ben bu aralıkta* x^2*'yi bulsam her iki tarafın karesini alsam yanlış olmayacak zaten hepsi pozitif (*$400 < x < 600$ *ifadesi için düşünüyor.). sonra şu değeri bulup sonra şu değeri bulsam (kar fonksiyonunu elde etmek istiyor). Aslında hocam 600 ü yerine yazsak en büyük değeri bulamayacak mıyız?*

Mülakatçı: *600'den başka değerde büyük olamaz mı?*

Nurdan: *İşte onu düşünüyorum. O zaman ben şunun önce bir tanım aralığını bulayım, en azından garanti olsun ama hocam bu nasıl olacak. Önce bunun bir aralığını bulayım.*

Mülakatçı: *Hangi aralığını?*

Nurdan: *Hangi aralıkta artıyor azalıyor onu bulayım (*$x^2 - 1300x + 420000 > 0$ *şeklinde belirlemiştir)*

Mülakatçı: *Nasıl bulacaksın onu?*

Nurdan: *İşte çarpanlarını bulacağım. Ne olur ki bu çarpımları bu olan toplamları bu olan.* 600.700 *olmaz mı? 600 ile 700 çarparsam bunu verir toplarsam bunu ikisi de eksi.* $x = 600, x = 700$ *benim* x*'im bunların arasında çıkıyor ama. Şimdi hocam ben bunun çarpanlarını bulacağım ya bunu bir çizeyim. Burası 600 burası 700 artı, eksi, artı (işaret tablosu oluşturmuştur.) şey kökleri 600, 700. Benim* > 0 *almam lazım.*

Mülakatçı: *Neden* > 0*?*

Nurdan: *Çünkü karı bulacağım ya o yüzden en büyük olacak e zaten tam noktalar. Hocam şu aralıkta artacak, şu aralıkta değer verirsem azalacak, şu aralıkta değer verirsem yine artacak. O zaman en çok arttığı yer bu nokta, şurayı zaten vermemiş (700 ve sonrasını), 600'e kadar sınır koymuşsa en yüksek 600. 600'ü yerine yazarsak ama 0 çıkıyor. 600'de 0 yaptı, o zaman en yakın değeri 599'u mu vereceğiz? Şimdi maksimumluk minimumluk…*

Mülakatçı: *Karın fonksiyonunu buldun şimdi sana neyi soruyor?*

Nurdan: *Bana diyor ki karın yani bunun en fazla olması için yani maksimum minimum en fazla değerini soruyor. En fazla olması için yıllık kaç birim üretim yapılmalıdır* *diyor. Yani bana diyor ki şu işte* x *birim üretim yapılmaktaydı ya en fazla kar için ne kadar üretim yapman lazım diyor. Hocam mesela şuan fonksiyonu çizebiliriz. Fonksiyonu çizsek 600 olsun şurası, şurada 700 olsun* $\frac{-b}{2a}$ *tepeyi bulacağım.* $\frac{1300}{2} = 650.$ 650*'yi de yerine yazalım negatif bir şey gelir. Şöyle bir yerden geçer. Şimdi 650 negatif bir değer gelir. O yüzden alta indim direk. Yerine yazmadım uzun olur diye. Eee 650'yi vermemiş zaten en fazla şu aralıkta diyor üretim yapıyor. Tam 600'de 0 olacaksa 599 o zaman hocam.*

Mülakatçı: *Peki ondan önceki değerlerde nasıl olur?*

Nurdan: *Şimdi artarak geldiğini düşünürsek evet bir de o değerler var… Peki o zaman yerine yazayım* x^2*'yi alayım.* $400^2 \leq x^2 \leq 600^2$ *karelerini alsak* $160000 \leq x^2 \leq 360000$*; sonra* $400 < x < 600$ *arasında* $-780000 < -1300x < -520000$*…*

Mülakatçı: *Ne yapıyorsun Nurdan?*

Nurdan: *Hocam şu kar fonksiyonundaki ifadeyi bulmaya çalışıyorum da bakalım nasıl çıkacak. Şunları toplayayım* $160000 + (-780000) + 420000$*…aslında bu bize şeyi vermeyecek bu karın en fazla olduğu şeyi gösterecek, yani fonksiyonun aslında değerini verecek. Bana gerekli olan* x *değeri nedir. İşte onu yapmam pek… O zaman benim maksimum noktayı bulmam lazım. Yıllık kar en fazla olması için her yıl kaç birim üretim yapılmaktadır. Eee maksimum nokta* $\frac{-b}{2a}$ *dan 650. Bir yerde hata yapmıyorum ama… 650 yi fonksiyonda yerine yazacağız artık, bir saattir ondan kaçıyorum ama.*

Mülakatçı: *O neyi verecek peki yerine yazınca?*

Nurdan: *En küçük değer mi en büyük değeri mi?...*

Mülakatçı: *Peki* x *kaç birim olmalı?*

Nurdan: *İşte hocam 650 çıkıyor* x*. Ama* x*'in aralığı var 650 değil* x*, ona karar veremedim. Diğer fonksiyonları da sağlaması gerekiyor. Hocam şimdi o kadar büyük sayılar ki verdiğim değerlerin şunları da sağlaması gerekiyor. Bilhassa o değerlerle uğraşmak istemiyorum.*

Mülakatçı: *Şimdi kar fonksiyonunu yazdın, onun tepe değerini* $\frac{-b}{2a}$*'dan buldun, o değer de* $\frac{-b}{2a}$*'in aralığında çıkmadı, sana o aralıkta ki değerini soruyor. Buradan bir yere varabilecek misin?*

Nurdan: *Ya işlem yapılmaz herhalde ama artık yorum yapacağım. Şimdi 650 o aralıkta değil. Benden istediği aralık 600 ile 400 arasında. Şuraya 400 dersem istediği aralık şu aralıkta gidiyor. Grafiğim böyle. Eee o zaman 400 mü diyeceğiz?*

Mülakatçı: *Neden?*

Nurdan: *Yani ilk başta 400 den azalarak geliyor ya şu aralıkta hani verdiği aralığa bakınca 400 ile 600 arasında, mesela 400 şuraysa ondan sonra azalarak gelecek.*

Mülakatçı: *Peki burada 400 ile 600 arasını artan buldun şimdi azalan diyorsun.*

Nurdan: *Ay evet niye öyle bir şey bulduk biz. Aslında fonksiyonun türevinde artanlığa azalanlığa bakmak gerekiyordu. Ben direk fonksiyonda artan demişim. Yani şu tanım aralığım şura ve şurası olması gerekiyor (işaret tablosunda + olarak belirttiği yerler). Bana verilen bu bölge (0 ile 600 arası). 400 o zaman.*

Mülakatçı: *Peki tablo yanlışsa grafiği nasıl çizdin?*

Nurdan: *Yok tablo yanlış değil. Benim yorumlamam yanlış. Tablo doğru aslında bana diyor ki şu aralıktaki değerler ile şu aralıktaki değerler senin istediğin değerler. Yani bunu büyük yapan değerler. Tam şu noktalar da 0 yapan değerler. Benim artan azalan demem için türevini almam gerekiyordu. Türevinde onu söylemem gerekiyordu. Türevini alırsam…* $x = 650$. *650'ye kadar azalandır, ondan sonra artandır. Türevin tablosunu ayrı çizebiliriz. Burası azalan burası artan. Grafiği yanlış yorumlamışız. Şu doğru ki zaten grafikte şuraya kadar azalarak geliyor şuradan sonra artıyor. O zaman en büyük değeri 400 de sağlayacağız.*

Mülakatçı: *Tamam Nurdan.*

Nurdan'ın Problem 5'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Nurdan'ın akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü, ii) Sayılar (nesne) ve aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Nurdan, satış ve maliyet fonksiyonlarını kullanarak elde ettiği kâr fonksiyonunun en büyük değerini bulurken, her adımda matematiksel olarak anlamlı ifadeler kullanmıştır. Kâr elde edebilmek için bulduğu fonksiyonun pozitif olduğu aralıkları belirlemiştir. Bu aralıkları ve soruda verilen aralığı bir arada düşünerek uygun bir çözüme varmıştır. Çözüme ulaşırken; çarpanlara ayırma, bir fonksiyonun grafiğini oluşturma, eşitsizlik, artanlık-azalanlık gibi kavramları yerinde ve matematiksel alt yapısına uygun bir şekilde yorumlamış ve kullanmıştır. Uyguladığı işlemlerin ne ifade ettiğinden ve nereye varacağından haberdar olarak adımlar atmıştır. Bu durum araştırmacı tarafından süreç içinde sorulan sorulara, Nurdan'ın verdiği cevaplardan anlaşılmaktadır.

S3: Nurdan ortaya koyduğu akıl yürütme sürecinde, mevcut soruya doğru bir çözüm bulabilmek için matematiksel olarak derinlemesine bir tartışma ortamı oluşturulmuştur. Çözüm yolunda ilerlerken öğrenme çevresinden edindiği ezber yapıları ya da hazır algoritmaları kullanmamıştır. Bunlar yerine her adımda karşılaştığı soruna bir strateji geliştirerek matematiksel kavramları doğru bir şekilde kullanmıştır. Oluşturduğu fonksiyon grafiği, işaret tablosu, artanlık-azalanlık tablosu, kâr fonksiyonunun en küçük değeri ve soruda verilen aralığı gibi farklı bileşenleri bütüncül bir şekilde düşünüp yorumlamıştır. Sonuç olarak da mantıklı açıklamalarla 400 değerini bulmuştur. O halde Nurdan'ın bu soru için akıl yürütme becerisi türü CR'dir. Bu türün özelliklerini de sürecin tümünde göstermiştir.

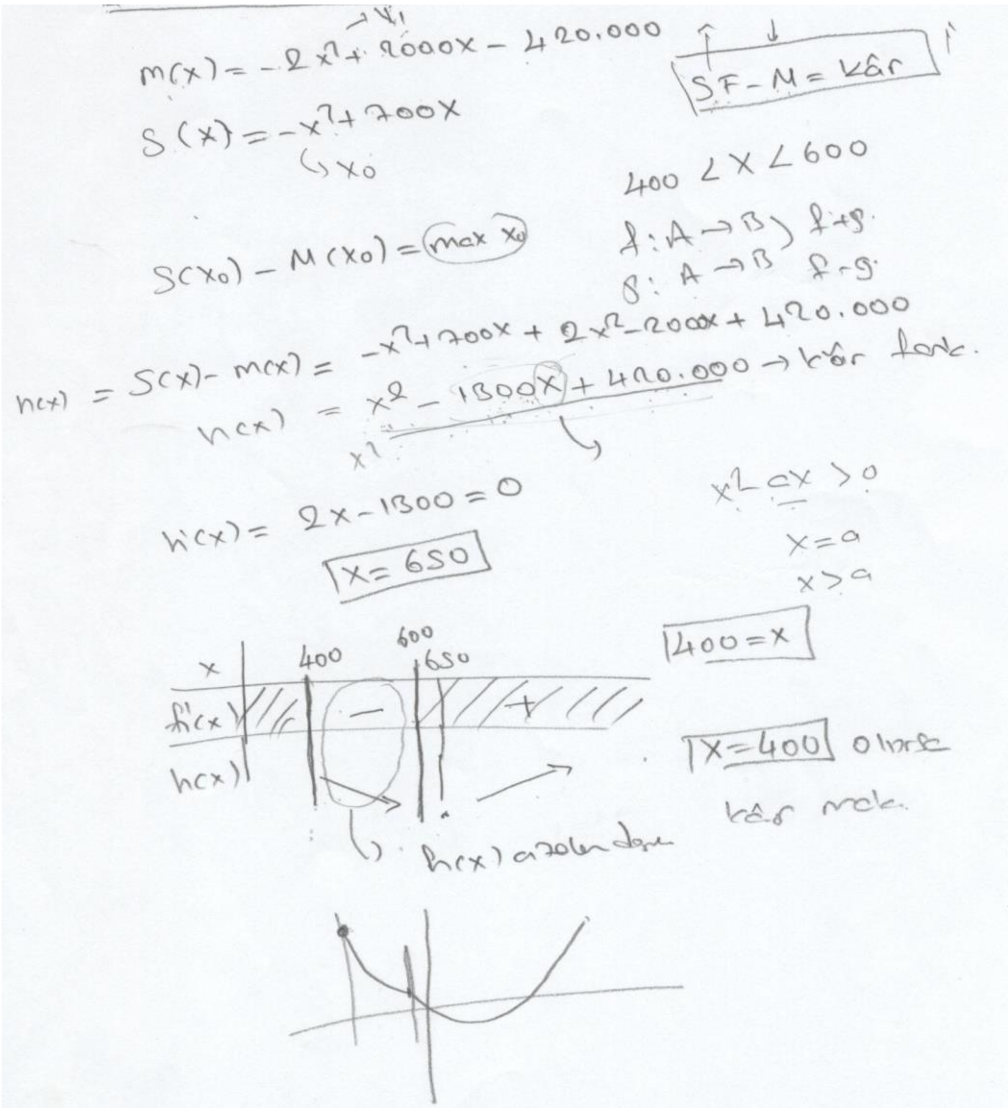
S4: Nurdan'ın verilen soruda kullandığı matematiksel yapılara kavramsal olarak hâkim olması, karşılaştığı zorlukları kolay bir şekilde aşmasını sağlamıştır. Örneğin ilk etapta oluşturduğu işaret tablosunda 600'den küçük değerler için "+" işareti yer almıştır. Ancak bunu artanlık olarak almamıştır. Artanlık için türevinin işaret tablosuna bakılması gerektiğini belirtmiştir. Zira fonksiyon 650 değerine kadar artmayıp azalmaktadır. Bu durum belirtilen hâkimiyetin göstergesidir. Belirtilen bu hâkimiyetle, kârın en büyük değerini bulurken hazır algoritma olan maksimum minimum problemlerini kullanmayıp kendi düşünce yapısıyla sonuca ulaşmıştır.

Nurdan'ın Problem 5'e Ait Sınıflandırma Kodu

Nurdan'ın Problem 5'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dgd}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek bir tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

4.3.5.3. Harun’un problem 5’e ait matematiksel akıl yürütme durumu

Harun’un Problem 5’e ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.56, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.56. Harun’un problem 5’e ait çalışma kağıdı

Harun’un Problem 5’e Ait Klinik Mülakat Transkripti

Harun: *(öğrenci soruyu sesli okur.) maliyetin fonksiyonu şuymuş* $m(x) = -2x^2 + 2000x - 420000$*. Üretilen ürünün satış fiyatı ise* $s(x) = -x^2 + 700x$*. Yıllık karın en fazla olabilmesi için her yıl kaç birim ürün yapılabilmelidir. Şimdi şu maliyet;* $s(x) -$

$m(x)$ *karımız oluyor. Şimdi burada ikisi de polinom fonksiyonu zaten bunların. Tanım kümesi de şöyleymiş* $400 < x < 600$. *Şimdi aklıma gelenlerden ilki şu oldu;* $f(x)$ *fonksiyonunu tanımladığımız zaman,* $g(x)$ *fonksiyonu da aynı kümede tanımlıysa biz burada* $f + g$ *den* $f - g$ *den bahsedebiliyorduk. Şimdi burada bunu bu şekilde bir fonksiyon olarak tanımladıysa, bunu da bir fonksiyon olarak tanımlamış; biz eğer, bu ikisinin ortak bir tanım kümesi varsa veya tanım kümelerinin bir arakesiti varsa orada bu fonksiyonların toplamını veya farkını tanımlayabiliyoruz. Şimdi oradan düşündüğüm zaman yani mantıklı mı bilmiyorum da; şimdi normal şeyi de biliyorum satış fiyatından maliyeti çıkarınca karı elde edeceğimi biliyorum arada herhangi bir değişken yoksa başka. Şimdi buradan da şu iki fonksiyonun farkını alsam, ondan sonra yıllık karın en fazla olabilmesi için o fonksiyonun maksimum minimum değerini tekrar inceleyesim geliyor da şurası aklımı karıştırıyor; bu her yıl ne demeye çalışmış burada. Yani bu sorunun bize sormak istediği aslında şu mu; diyor ki karının maksimum olduğu… Hım tamam. Şimdi herhangi bir yılda yapılan üretim miktarı da zaten değişkenmiş. Diyor ki* x*'i ben belli bir değere sabitlersem, ne zaman maksimum olur. Bize onu şey yapıyor. O zaman şimdi burada yalnız şu da aklıma geliyor; tamam bu, şekilde de; bunun en büyük olabilmesi için şunun en büyük (*$s(x)$*), bunun en küçük (*$m(x)$*) değerini bulup işlem yapmakta mantıklı geliyor. Ama orda da şöyle bir problem çıkıyor; burada bunun en büyük değeri* x_0*'da, bunun en büyük değeri mesela* x_1*'de çıkıyorsa ikisi aynı anda üretim yapamaz. Bir fabrika aynı yılda hem 3 ton hem 1 ton üretim yapamaz o mantıksız. Onu bir defa eledim kendi aklımda. O zaman ikisinin de aynı değerde şeyini yakalamam benim. Aslında şunu yakalamam lazım* $s(x_0) - m(x_0) = max\ x_0$ *olduğu maksimum* x_0 *değerini bulmam lazım benim. O zaman şuradaki olay geliyor aklıma. Bunun farkını alırsam* $h(x) = s(x) - m(x) = -x^2 + 700x + 2x^2 - 2000x + 420000$ *buradan* $h(x) = x^2 - 1300x + 420000$ *oldu. Bu bizim aslında kar fonksiyonumuz. Şimdi bu kar fonksiyonun ben karının maksimum olduğunu düşünüyorsam, o zaman maksimum minimum problemi geliyor aklıma benim. Buradan da bunun birinci türevini alırsam* $h'(x) = 2x - 1300$*olur. Bunu da 0'a eşitlersem ne bulurum* $x = 650$ *yapar. Bu* 650*'nin de işaretini incelersem; şurası 650 olsun, burada* $h'(x)$*'ler var burada* $h(x)$*'ler var. Türevin işareti burada neymiş pozitif, burada negatifmiş. O zaman fonksiyon burada artan burada azalan davranıyormuş (650'nin solunda azalan, sağında artan).*

Mülakatçı: *Ne buldun burada?*

Harun: *Burada minimum buldum ama (650 noktası için). Başka ne yapabilirim ki? Türevini aldım bu türevin işaretini incelersem bu her zaman artan çıktı. Şimdi zaten bunun değeri de… Bunun o zaman yerel maksimumu olmaz ki. Zaten şu fonksiyonun da yerel maksimumu olmaz bize göre. Zaten şu bir sayı sabit, burası da bir sabit bir sayı, biz burada x'in karesini eğer 1300'den daha büyük değerlere hareket ettirsek şurası büyük çıkar her zaman, o zaman bu negatiflik zaten şey yapar. Bu ikisinin toplamı devamlı artacak, fonksiyon artan. Artanlıktan azalanlığa geçtiği yerde bu minimum değeri var. Buradan çıkmadı.*

Mülakatçı: *x içinde bir aralık vermiş.*

Harun: *Şimdi x için de bir aralık vermişse… Yeni farkına vardım gibi. Şurası 400, şurası 600. Buralar yasak bölge buralarla işimiz yok, şurasıyla ilgilenmemiz lazım (400 ile 600 arası). Burada da ispat ettik ki $h(x)$ fonksiyonu azalan. Bizim 400'ümüz de tanım kümesinde olduğundan $x = 400$ olabilir. O zaman burada fonksiyonun salınımına bakarsak şöyle bir salınım yapacak burada tahmini olarak. Şimdi bir excel olsa bunların hepsini hesaplarım size. (şekli tarat)*

Mülakatçı: *Excelle mi yapıyorsun?*

Harun: *Yani excel bu değerleri hesaplıyor ya fonksiyonun hareketini hesaplardım. Burada sürekli azalıyor bu, azalıyorsa bunun en küçük x değerinde aldığı maksimum. O zaman ben burada x'i 400 olarak seçerdim yani.*

Mülakatçı: *Orada kar da maksimum mu?*

Harun: *Böyle olursa kar maksimum olur. Ama bu aralığı vermezse o zaman diğer tarafta değeri daha büyük çıkar $1300'den$ daha büyük seçtiğimiz zaman. Çünkü şurası mesela $x^2 - ax > 0$ birbirine eşitlediğim zaman $x = a$ iken bu 0 yapar, $x > a$ olduğu zaman burası 0'dan büyük olmaya başlar. O zaman burası sürekli artan davranır fonksiyon buradan sonra. Burada azalan olması şu aralığa sınırlandırdığı için bizim fonksiyonumuz şöyle azalan bir salınım yapar. Artık kesecek ama nerede keser nasıl yapar… Biz şurayla ilgileniyoruz. Sonuçta şu olur diye düşünüyorum. Ama yani sorularınız böyle işletmeci sorusu hocam.*

Mülakatçı: *Tamam Harun.*

Harun'un Problem 5'e Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Harun'un akıl yürütme süreci: $i)$ Çözüm prosedürü, $ii)$ Fonksiyonlar (nesne), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Harun, soruda verilen ifadeleri öncelikle matematiksel yapılar halinde düşünerek fonksiyon olarak göstermiştir. Fonksiyonlarda toplama çıkarma işleminin hangi şartlarda tanımlı olabileceğini; kâr fonksiyonunu bulmak için kullanacağı yolun mantıksal açıklamasını; bu süreçte aklına takılan soruları bir tartışma ortamı oluşturarak açıklığa kavuşturmuştur. Kâr fonksiyonunu bulduktan sonra algoritma kullanmış ve bir değere ulaşmıştır. Çözüm prosedürünün sonraki adımlarında bu değerden hareketle işaret tablosu oluşturmuş ve verilen aralığa göre yorumlar yaparak doğru sonuca ulaşmıştır. Harun'un tüm bu aşamalarda yaptığı işlemler ve yorumlar; matematiksel olarak anlamlı, kabul edilebilirdir. Yani matematiksel olarak derinlemesine özellikler göz önüne alan bir düşünce yapısı sergilemiştir.

S3: Harun ortaya koyduğu akıl yürütme sürecinin her adımını, matematiksel temeller ışığında açıklamıştır. Süreç içerisinde zihninde oluşan sorulara da kendi oluşturduğu tartışma ortamıyla yine cevap bulmuştur. Örneğin, maksimum kâr için; satışın en büyük, maliyetin en küçük değerlerini düşünmüş ancak farklı x değerleri elde edileceğini ve bu durumun fabrika üretimi açısından mantıklı olmayacağını belirtmiştir. Elde ettiği 650 değerinden 400 değerine ulaşma aşamalarını da matematiksel olarak anlamlı şekilde ifade etmiş ve yorumlamıştır. Tüm bu tipik özellikler, Harun'un bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türünün CR olduğunun göstergesidir. Ancak sürecin belirli bir kısmında "*... kârının maksimum olduğunu düşünüyorsam, o zaman maksimum minimum problemleri aklıma geliyor benim*" şeklinde ifade kullanan Harun belirli bir algoritmayı hatırlayarak işlem yapmıştır. Sürecin bu kısmı AR olarak sınıflandırılmaktadır. Bu durum tüm akıl yürütme sürecine hâkim olan CR'nin hakimiyetini bozmaz. Sadece çeşitliliğini lokal hale getirir.

S4: Harun, çözüm prosedürünü uygularken matematiksel olarak sağlam adımlar atmıştır. Yaptığı hiçbir yorumu boş bir şekilde içini doldurmadan ortaya atmamıştır. İşlemlerin görsellerini Excel programında gösterebileceğini ve bu konuda daha ayrıntılı bilgi sunabileceğini belirtmiştir. Bu durum, onun öğrenme çevresinde edindiği bilgileri kavramsal temellere oturttuğunun da bir göstergesi olarak algılanabilir.

Harun'un Problem 5'e Ait Sınıflandırma Kodu

Harun'un Problem 5'e ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dld}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki farklı tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

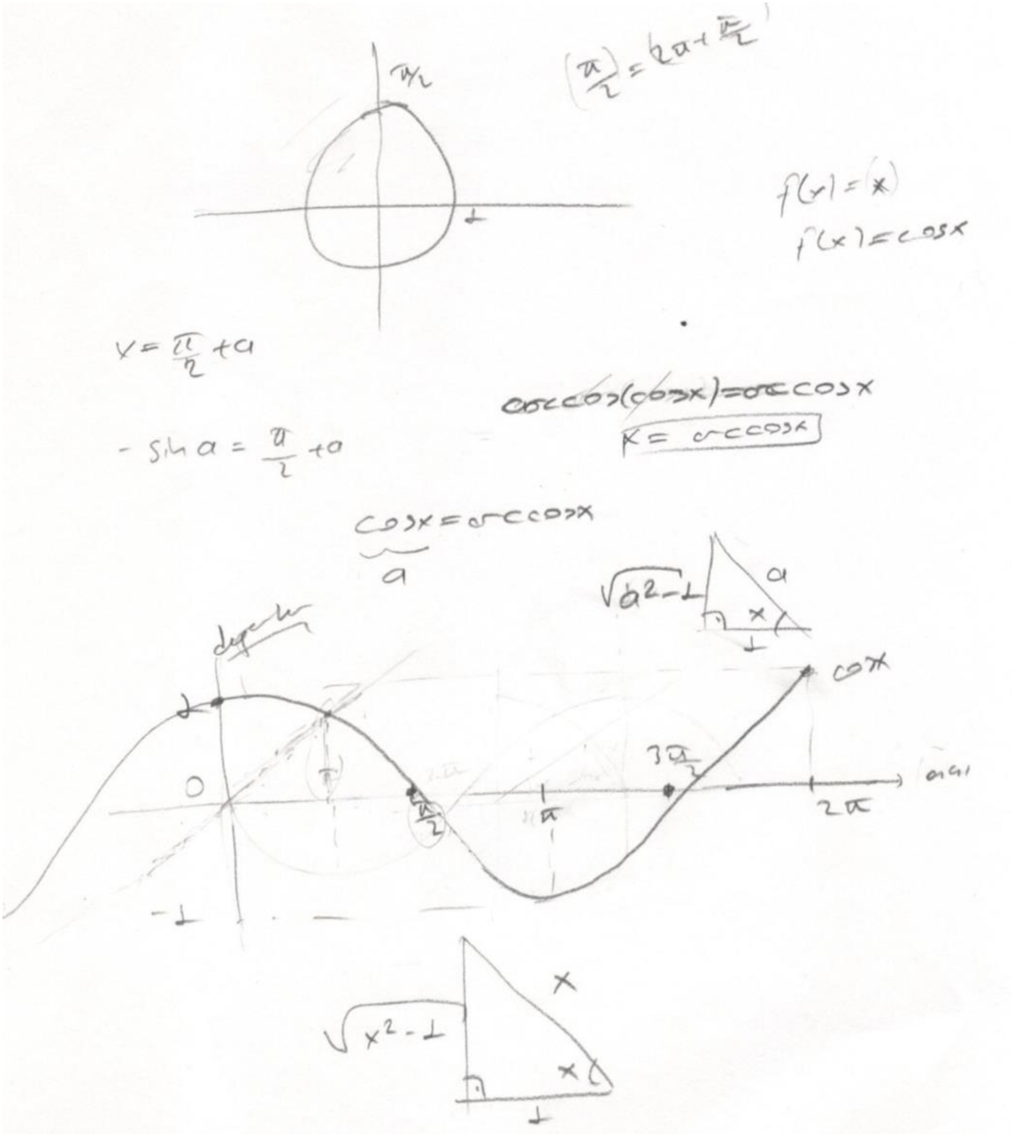
Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 5'in çözüm prosedürü için üç öğrenci tarafından kullanılmıştır. Kullanılan bu akıl yürütme türü ile doğru sonuca ulaşan Önder, Nurdan ve Harun tüm süreç boyunca derinlemesine bir düşünme yapısı sergilemişlerdir. Araştırmaya katılan diğer öğrenciler genel olarak bir algoritma takip etmelerine karşın, bu üç öğrenci kendi bilgi birikimlerine güvenerek, bütüncül düşünebilmeyi başarabilmiş; bu sayede tartışma ortamları oluşturup kendi sorularına da cevap bulabilmişlerdir. Belirtilen bu durumdan hareketle, etkili matematiksel akıl yürütme yapabilmenin bir diğer koşulunun da öğrencinin kendi bilgi birikimine güvenmesi olduğu söylenebilir.

4.3.6. Problem 6

"$cosx = x$ *denkleminin neden en az bir çözümü olduğunu açıklayınız."*

4.3.6.1. Hikmet'in problem 6'ya ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hikmet'in Problem 6'ya ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.57, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.57. Hikmet'in problem 6'ya ait çalışma kağıdı

Hikmet'in Problem 6'ya Ait Klinik Mülakat Transkripti

Hikmet: *(öğrenci soruyu sessiz bir şekilde okumuştur) şöyle bir şey düşünüyorum da neden en az bir çözümü olduğunu açıklayınız derken ne kastettiğini tam olarak anlamadım o yüzden. Yani şeyi sormuyor değil mi çözüm nedir demiyor, niye en azından bir çözümü vardır diye soruyor.*

Mülakatçı: *Evet.*

Hikmet: *Yani şey düşünebiliriz o zaman çözüm sormuyorsa eğer, mesela birim çember aldığımızda, Birim çember üzerinde düşündüğümüzde işte* $\frac{\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ *diyebiliriz yani. Tabi bu* $\sin$ *ve* $\cos$ *içerisinde olmak üzere çünkü* 2π*'de ne yapıyordu devir yapıyordu.*

Devir yaptığı için aynı yere geliyor diye düşünebiliriz yani 360*'la* 0 *aynı diyebiliriz. Başka ne düşünebiliriz (öğrenci bir müddet sessiz düşünmüştür.)*

Mülakatçı: *Nasıl bir şey düşünüyorsun?*

Hikmet: *Düşündüğüm şey hani bu* x*'i sağlayan yani bu ifadeyi sağlayan* x *ne mesela. Yani neden böyle bir soru sorulmuş ki?* x*'i bulmamız lazım ki onun üzerinden bir yorum yapayım. Onun için düşündüm birazcık (öğrenci sessiz düşünmeye devam etmektedir).*

Mülakatçı: *Ne yapabiliriz başka?*

Hikmet: *Mesela* x*'i dönüştürebiliriz* $\frac{\pi}{2}+a$ *desek mesela öyle bir şey yapsak belki bir şey çıkar. tam olarak kavrayamadım da soruyu. İşte* $\frac{\pi}{2}+a$ *dediğimiz zaman buraya düşecek (ikinci bölgeye); buraya düştüğü zaman da* cos *negatif olacak, yani* $-sina$ *olacak o da* $-sina=\frac{\pi}{2}+a$ *olur. Benim burada kavrayamadığım şey şu; mesela* $sinx=x$ *desek mesela* 0*'da sağlıyor veya işte nerede sağlıyor ımm* 2π*'de sağlanıyor diyebilir miyiz diyemeyiz. Çünkü* 2π *'de* $sin0$ *olur ama öbür taraf* 2π *kalır. Yani orada sağlar ama burada sağlama şansı pek yok gibi yani. Çünkü* cos *de* 0 *bazında düşünürsek bunu sağlayan iki yer var* $\frac{\pi}{2}$ *veya* $\frac{3\pi}{2}$*. Yalnız* x *burada* $\frac{\pi}{2}$ *veya* $\frac{3\pi}{2}$ *olacağından yani bir derece olacağından ifade olarak çıkmaz yani. Onu kavrayamadım.*

Mülakatçı: *Genelde bildik noktalara bakıyorsun aradaki bir değer de çıkamaz mı?*

Hikmet: *Hım çıkabilir evet. Şimdi* arc *düşündüm de* $arccosx$ *desek* $x=arccosx$ *olacak. Yani* x *hem* $cosx$ *e hem de* $arccosx$ *e eşit olmuş olacak. Oradan bir şeyler düşündüm ama* $arccosx(cosx)=arccosx$ *ters fonksiyon oldukları için birbirlerini götürürler* $x=arccosx$ *olur. O zaman* $cosx=arccosx$ *yazabiliriz. Aslında* $cosx=a$ *olsa. Bu şeye mi dayanıyor yoksa bir ispat vardı hani şey diyorduk ya* $\frac{x}{sinx}$ *işte* $tanx$ *filan gibi bir şeyler vardı ya. Hani şöyle bir şey vardı şöyle çiziyorduk, şuraya* x *demiştik (orada bir dik üçgen çizerek* $cosx=a$ *olacak şekilde yerleştirdi). Ama bir şey gelmez buradan.* $cosx$*' in grafiğine baksak mesela şöyle bir şey olacak; şurası* 0 *şurası* π *(*$cosx$ *in grafiğini çizmiştir büyük bir şekilde değerlerin yerlerini düşünerek). Böyle bir ifade geliyor ama bu da ne kadar doğru (tekrar bir dik üçgen çizerek dar açılardan birini* x *olarak almıştır). Benim burada anlamadığım şey yani burada* $cosx$*'deki* x*'i biz açı olarak ama diğer* x*'i de sayı olarak ifade ediyoruz. Yani onu anlamadım tam olarak.*

Mülakatçı: *Peki şöyle bir şey desem sana iki farklı fonksiyon grafiğin var, bu iki farklı fonksiyonun ortak bir çözümü var desem nasıl bir şey düşünürsün?*

Hikmet: *Şimdi mesela şunun gibi mi $f(x) = x$ veya $f(x) = cosx$. Hım evet böyle bir şey düşünebiliriz aslında ama burada da aynı şeyi yapacağız birbirine eşitleyeceğiz (öğrenci yine sessiz düşünür). Yani işte şunu şey yapamıyorum burada açı var işte burada değerler var. Ama yani mesela $y = x$ veya $x = y$ doğrusunun buradan geçmesi gerekiyor da burada nasıl geçecek (çizdiği cosx grafiğinde π değerleri olduğundan $y = x$ doğrusunun oradan geçemeyeceğini söylüyor). O zaman x'leri derece cinsine çevirmemiz gerekiyor yani. Yazalım ki burada kesiştiği noktayı bulup ona göre yaparız yani. Hım en azından bir çözümü olduğunu da şöyle açıklayabiliriz; mesela benim burada çizdiğim ifade 0'la 2π arasında. Ama biz bunu 0'la 2π değil de -2π'yle 2π arasında çizebiliriz. Yani oradan mesela çizdiğimiz zaman şunun simetriği olacak mesela şuradan geçecek olabilir yani (($y = x$) doğrusu). O yüzden en azından bir demesi, $y = x$ in tam olarak şöyle bir noktadan geçmesi ve bunun dışında da şöyle bir noktadan (simetrik olan taraftan) geçebilme ihtimalinin olması olarak diyebilirim yani.*

Mülakatçı: *Tekrar açıklayabilir misin?*

Hikmet: *Şimdi şöyle $y = x$ dediği için, yani denklemin çözümünü sormuyor bize neden en az bir çözümünün olduğunu soruyor $y = x$ dediği için $y = x$ 'deki x değerleri bizim bildiğimiz sayılardır. Yani mesela 1 için y'de 1'dir. Ama burada baktığımız zaman biz öyle bir koordinat sistemi almışız ki bir tarafında açı var, diğer tarafında da bu açıya denk gelen mesela 0 veya 1 şeklinde değerler var ki bunlar da $cosx$'in aldığı değerler o da $[0,1]$ arasındaki kapalı aralık mesela. İşte buna nazaran mesela $y = x$'deki yazdığımız sayıları dereceye çevirebiliriz. Çünkü bunlar $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ şeklinde sayılar. Bunları çevirip o şekilde noktalar bulabiliriz. Ve buradan da $y = x$'i çizdiğimiz zaman kesinlikle yani $y = x$ doğrusu, $cosx$ fonksiyonunu $(0,\frac{\pi}{2})$ aralığında kesiyor. En azından demesinin nedeni de eksenin sol tarafında kalan yani $(-2\pi, 0)$ arasındaki $cosx$ grafiğindeki işte şu tarafta ki yani bunun simetriği olan kısımda ki şeyi kesebilecek olmasıdır. Böyle bir şey düşündüm ama.*

Mülakatçı: *Tamam Hikmet.*

Hikmet'in Problem 6'ya Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Hikmet'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Birim çember, ters trigonometrik fonksiyon, fonksiyon grafiği kavramları iii) Algoritmalar bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Hikmet uygulayacağı çözüm prosedürüne, soruyu zihninde anlamlandırmaya çalışarak başlamıştır. Verilenleri ve istenenleri belirleyerek ulaşmak istediği yöne odaklanmıştır. Öncelikle birim çember çizip noktaların $2k\pi$ artmış hallerini düşünmüştür. Buradan sonuç elde edemeyince, öğrenme yaşantılarından benzer bir ispatı hatırlamaya çalışmış ancak oradan da devam etmemiştir. Hikmet'in süreçte en çok takıldığı nokta $cosx$ değerindeki x ile, eşitliğin karşısındaki x'in türüdür. Araştırmacının verdiği ipucundan hareket ederek gerekli derinlemesine düşünmeleri uygulamış ve sonucu mantıklı bir şekilde açıklayabilmiştir. Süreçte kullandığı algoritmalar ve çözüm prosedürü matematiksel açıdan anlamlıdır.

S3: Hikmet akıl yürütme sürecinin ilk kısımlarında amaçladığı noktaya ulaşabilmek için algoritmalar denemiştir. Ancak bu algoritmaları yüzeysel düşünceler yardımıyla değil daha mantıklı temellere oturtarak seçmiştir. Herhangi bir çıkış yolu bulamaması ve x değerlerinin türünün ne olduğuna dair aklında gelişen soruyu yanıtlayamaması üzerine, araştırmacı tarafından verilen ipucunu mantıklı bir şekilde kullanmayı başarmıştır. Bu süreçten sonra tartışma ortamının oluştuğu, kullandığı kavramların anlamlarını açıklayabildiği ve derinlemesine düşündüğü bir akıl yürütme süreci sergilemiştir. O halde ortaya konan akıl yürütme sürecindeki akıl yürütme becerisi türü, ilk aşamalarda AR özellik gösterirken; son aşamalarda CR özelliğe sahip olduğu söylenebilir.

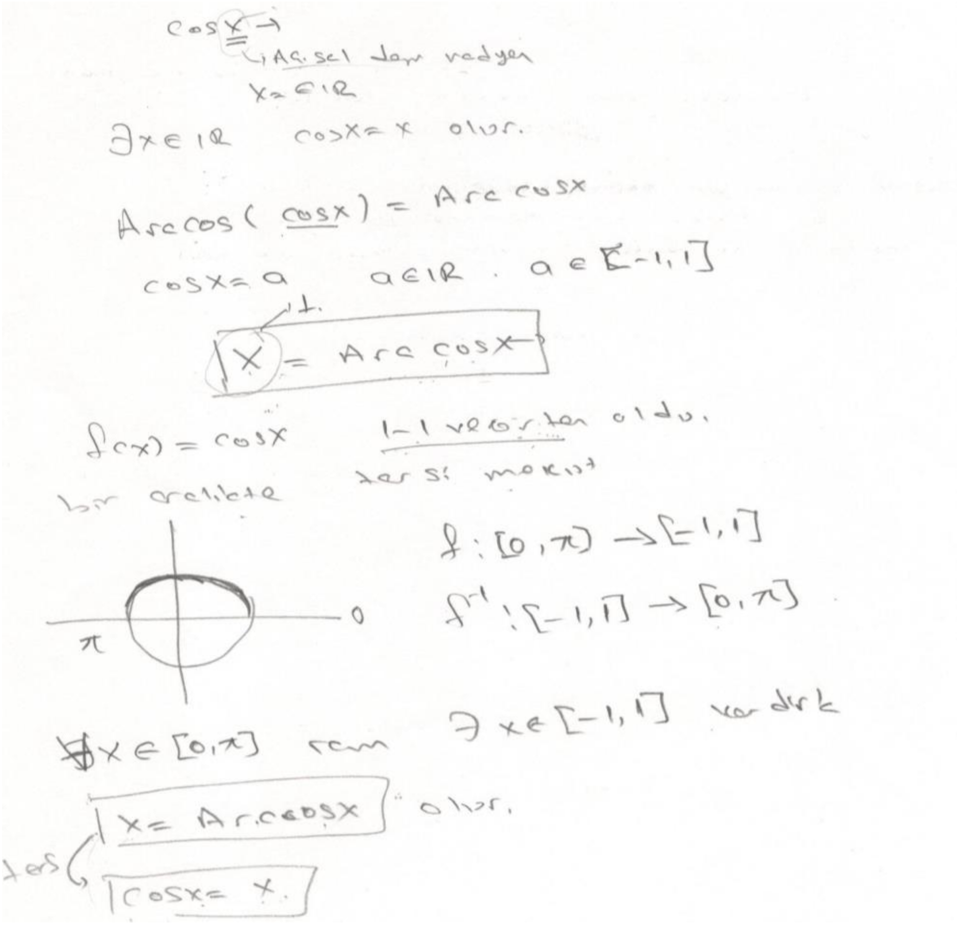
S4: Hikmet çözüm prosedürünü gerçekleştirirken birden fazla algoritmaya yer vermiştir. Ancak algoritmaların her birinde kullanmış olduğu kavramları rastgele bir şekilde değil, barındırdığı özelliklere göre yer verdiği görülmektedir. Ayrıca kavramlar arasındaki geçişleri matematiksel olarak uygun bir şekilde gerçekleştirmiştir. Yine oluşturduğu tartışma ortamlarıyla aklına takılan sorulara kendisi cevap bulmaya çalışmış bunda da başarılı olmuştur. Tüm bunlar Hikmet'in konuyla ilgili sağlam bir kavramsal alt yapıya sahip olduğunun ve bilgi gücüne güvendiğinin göstergesidir.

Hikmet’in Problem 6’ya Ait Sınıflandırma Kodu

Hikmet’in Problem 6’ya ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak **CR$_{dld}$** olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki farklı tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

4.3.6.2. Harun’un problem 6’ya ait matematiksel akıl yürütme durumu

Harun’un Problem 6’ya ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.58, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.58. Harun’un problem 6’ya ait çalışma kağıdı

Harun'un Problem 6'ya Ait Klinik Mülakat Transkripti

Harun: *(öğrenci soruyu sesli bir şekilde okudu) şimdi hocam bu denklem de; şimdi biz* $cosx$ *ifadesine baktığımız zaman buradaki* x *değeri ile şuradaki* x *değeri aslında ama şey elemanı olarak aynı şey değil bunlar. Yani şuradaki* x *açısal değerin radyan cinsi, buradaki* x *normal bilinen reel sayıdır. Şimdi bunu bu tarafa geçirsek (öğrenci bir müddet sessiz düşünür).*

Mülakatçı: *Nasıl bir şey düşünüyorsun Harun?*

Harun: *Yani şimdi düşündüklerimden, aklıma gelenlerden bir tanesi şu oldu, şimdi buradaki* x *değeri açısal bir değer, diğer* x *değeri bir reel sayı. Bu iki denklemi çözerken buradaki* x*'ler denklem mantığında tüm* x*'ler aynı olmak zorunda. Ama buradaki açıyı da şimdi biz şeye eşitledik aslında* π*'yi kullanarak o açı yay uzunluğu ölçüsü filan var, radyan cinsinden aslında o dereceyi reel sayıya eşitledik* π*'yi kullanarak. İkisini aynı anda sağlayan bir* x*… En azından bir çözümü olduğunu açıklayınız… En azından bir çözümü…*

Mülakatçı: *Ne demek en azından bir çözümü olması?*

Harun: *Yani diyor ki en az bir* x *eleman* R *vardır ki (*$\exists x \in R$*) denklemi sağlıyor* $cosx = x$ *oluyor. Şimdi buradan bi neden olabilir onun şeyine bakalım.* x'*ler aynı* x*'ler. Şimdi hocam bunun tersini alsak iki tarafa da* $arccos$ *'ü uygulasak* $arccos(cosx) = arccosx$ *fonksiyonu olur ya. Şimdi burada* $cosx = a$ *gibi bir değer olduğunu düşünürsek* $a \in R$ *bu* a*'nın aralığını da* $a \in [-1,1]$ *alsak. Şimdi o zaman buradan* $arccosa$ *yapar bu direk* xi *verir bize şurası. Buda* $x = arccosx$ *olur. Bunu yakaladık buradan. Şimdi şurada görmede sıkıntı olabilir de biz şeyi de biliyoruz ki* $f(x) = cosx$ *fonksiyonunun birebir ve örten olduğu bir aralıkta tersi mevcuttu. O halde bu fonksiyon olma şartından dolayı da bu sağlanır da; biz burada şeyden de birebir ve örten olmasından dolayı da bunun şey olduğunu gösterebiliriz yani ikisinin birbirine şey denklemin sağlayan bir değer olduğunu.*

Mülakatçı: *Peki hangi aralıkta birebir ve örten.*

Harun: *Şimdi bunu şöyle çizersek birim çember üzerinde şu kısmı kullanarak (birinci ve ikinci bölgede kalan kısmı) biz diyorduk ki burası* 0*'a* $\in \pi$ *aralığıydı; biz* $f: [0, \pi] \to [-1,1]$ *e tanımlarsak kapalı aralıktan, buradan* f^{-1} *i yani* $arccos$*'ü de* $f^{-1}: [-1,1] \to [0, \pi]$ *şeklinde tanımlanır diye düşünürdüm yani. Buradan da ondan sonra şunu derdim* *yani bu birebir ve örten ya, birebir ve örten olduğundan dolayı derdim ki burada en az bir şu* x *için; buna 1 numaralı* x *buradakine başka şey dersek;* $(x = arccosx\ birinciyi\ 1\ numaralı\ olarak\ adlandırdı)$ *derdim ki* $\forall x \in [0, \pi]$ *aralığı için* $\exists x \in [-1,1]$ *aralığı da vardır ki* $x = arccosx$ *olsun. Niye çünkü birebir ve örtendi. Yani bunu birebirlikten dolayı değil de örtenlikten dolayı yazdım aslında en az bir* x *var. O halde şunu da derim bundan dolayı sağlanıyorsa bu ifade bunun da tekrar tersini uygularsam, burada tersini tekrar alabilirim çünkü birebir ve örtenlikten* $cosx = x$ *ifadesini yakalarım buradan geri ters uyguladığımda. O zaman da bu ifadeyi elde etmiş olurum. Yani bu ikisi aslında birbirine denk ifadeler olduğundan dolayı da en az bir çözümü vardır diye düşünüyorum*

Mülakatçı: *Tamam Harun.*

Harun'un Problem 6'ya Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Harun'un akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Ters trigonometrik fonksiyon, fonksiyonlarda birebir ve örtenlik kavramları iii) Aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Harun, çözüm prosedürüne $cosx = x$ denklemindeki x ifadesinin barındırdığı anlamları açıklamakla başlamıştır. Sonrasında ters trigonometrik fonksiyonları kullanarak fonksiyonun tersini almış; ardından fonksiyonların özelliği olan birebir ve örtenlik kavramlarını da çözüm prosedürüne dahil etmiştir. $cosx$ fonksiyonunun grafiği ile ters fonksiyon kavramlarını da bütüncül düşünerek denklemin en az bir çözümü olduğunu açıklamıştır. Kavramsal açıklamalar yaparak derinlemesine düşünce yapısı sergilediği bu çözüm prosedürünü matematiksel olarak anlamlı bir şekilde ifade etmiştir.

S3: Harun akıl yürütme sürecinde hazır bilgileri, yapıları ya da algoritmaları kullanmadan; kendi bilgi birikimiyle hareket edip yorumlarda bulunmuştur. Kullanmış olduğu matematiksel yapıları amacına uygun olarak işleme katmıştır. Tartışma ortamı oluşturarak birebir ve örtenlik özelliklerini nasıl kullandığını açıklamıştır. Sürece hakim olarak çözüm prosedürünü sonlandırmıştır. Belirtilen özelliklerinden dolayı, Harun'un bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü CR olarak sınıflandırılabilir.

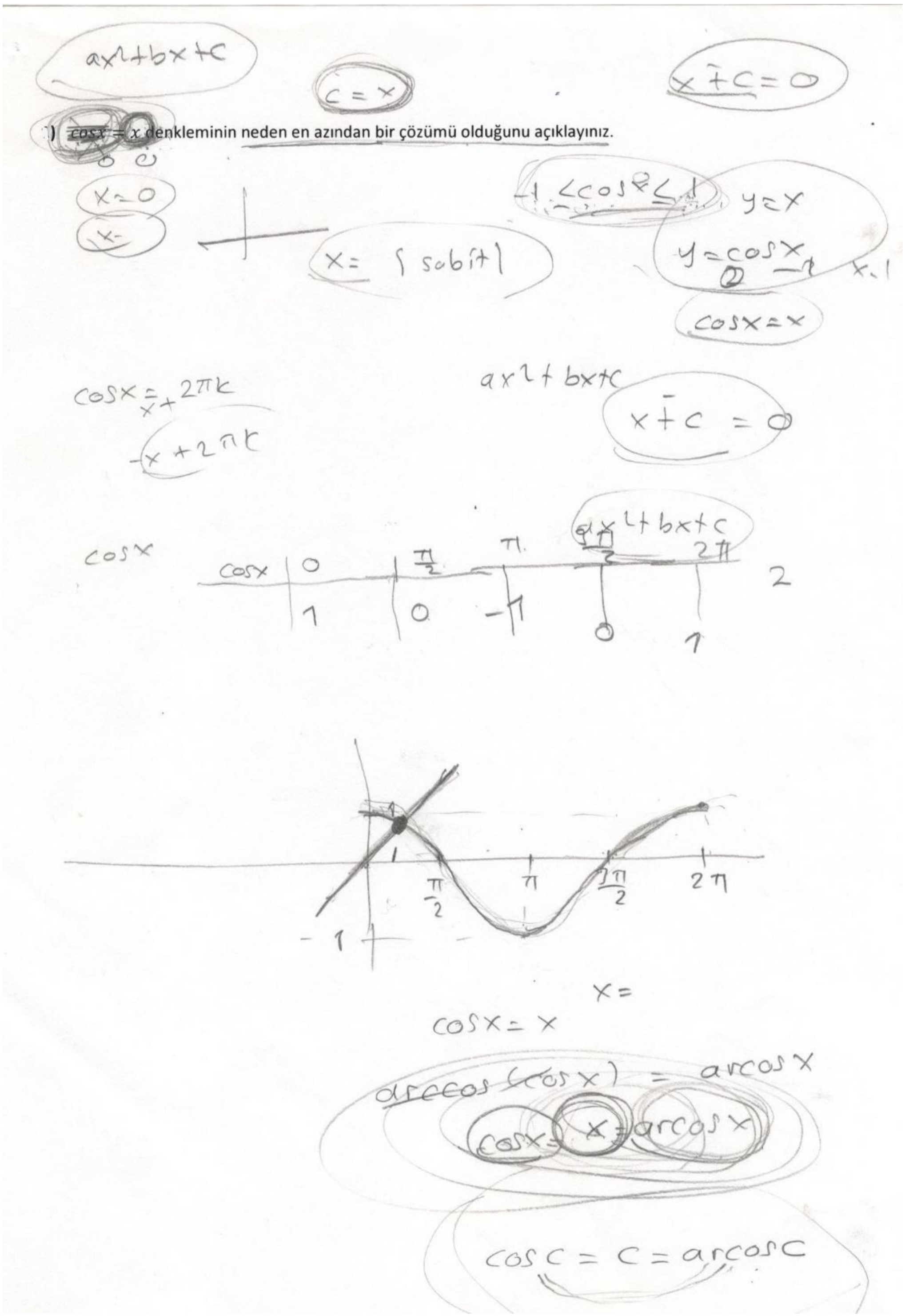
S4: Harun çözüm prosedürünü, kullandığı kavramlar hakkında karşısındaki kişiyi bilgilendirecek şekilde sunmuştur. Denklemde yer alan x'lerin ifade ettiği anlamları, ters trigonometrik fonksiyonu almayı, fonksiyonların birebir ve örtenliği gibi kavramlara getirdiği açıklamalar, belirtilen durumun örnekleridir. Harun'un konuyla ilgili sahip olduğu zengin kavramsal alt yapı ise gerekli bağlantıları kurarak derinlemesine açıklama yapabilmenin ön koşulları arasında yer almaktadır. Bu sayede önceki öğrenme yaşantılarında hiç karşılaşılmayan bir durumla yüzleşince bile, sahip olduğu bilgi birikimini etkili bir şekilde bir araya getirerek derinlemesine düşünce sergileme şansı yükselmektedir.

Harun'un Problem 6'ya Ait Sınıflandırma Kodu

Harun'un Problem 6'ya ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dgd}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek bir tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

4.3.6.3. Umut'un problem 6'ya ait matematiksel akıl yürütme durumu

Umut'un Problem 6'ya ait olan çalışma kâğıdı Şekil 4.59, klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.59. Umut'un problem 6'ya ait çalışma kağıdı

Umut'un Problem 6'ya Ait Klinik Mülakat Transkripti

Umut: *(Öğrenci soruyu sesli bir şekilde okumuştur) şimdi* $cosx$*'in alabileceği değerler* -1 *ile* 1 *arasındaydı (*$-1 \leq cosx \leq 1$*). Bu denklemde* $cosx$*'in alacağı sabit değerler* *var* -1 *ile* 1 *arasında. Yani bu eşittir* $x = 2$ *ya da bilmem ne doğrusu gibi. Gerçi* 2 *olmaz* cos*'ün aldığı değerlere göre.* $x = 0, x = -1, x = 1$ *yani bir doğru olur,* x *doğrusu olur. Yani en azından* $ax^2 + bx + c$ *şeklinde değil de* $x \pm c = 0$ *şeklinde doğrusal bir denklem olur her zaman için. Çünkü yani* $cosx$*'in alacağı değerler* -1 *ile* 1 *arasındadır her zaman için. Yani bu yüzden en azından bir çözümü vardır deriz.*

Mülakatçı: *Tekrar anlatabilir misin?*

Umut: *Şimdi hocam,* $cosx, -1$ *ile* 1 *arasında değer alır. Burada katsayımız* x*, birinci dereceden bir denklem. Yani ikinci dereceden bir denklem değil. İkinci dereceden bir denklem olsaydı,* $ax^2 + bx + c$ *şeklinde olsaydı bunun en fazla iki tane kökü olacaktı, en az bir tane olacaktı çakışık olacaktı veya kök olmama durumu da olabilir. Yani burada da aynı şeyi söyleyebiliriz. Yani hiç kökü de olmayabilir, bir kök de olabilir en azından bir kökü olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü birinci dereceden bir denklem; bir de* $cosx$ *sabit bir şey oluyor* $-1,0,1$ *yani bir çözümü olduğunu söyleyebiliriz büyük ihtimalle. Mesela* $x = 0$ *olabilir,* $x =$*...*

Mülakatçı: $x = 0$ *da* $cos0$ *ile eşitlenir mi?*

Umut: *Onu da işte deneyeceğiz işte hangisinde eşleneceğini. Şu* $cosx$ *denklemini çözerken* 2π*'nin katları mıydı hocam;* 2π*'nin katlarıydı herhalde.* $x + 2\pi$ *'nin (düzelterek + yapmıştır) katları bir de* $-x + 2\pi$*'nin katları şeklinde gidecek. Burada denklemi çözersek, yani benim demek istediğim aslında değerlerden daha çok hani* $cosx$*'i görmeyip, onu sabit bir sayı olarak görüp yani* -1 *ile* 1 *arasında;* $x =$*bilmem ne yani diğer tarafa attığında sabit sayıyı c gibi bir sayı olsun* $x \pm c = 0$ *şeklinde birinci dereceden bir denklem olacağı için en azından bir çözümü vardır. Mantık olarak öyle diyorum.*

Mülakatçı: *Peki bana bunu göster desem.*

Umut: *İşte hocam mesela nasıl göstereyim...* $0'$*da sağlamaz doğru çünkü* $cos0 = 1$*.* 0*'dan farklıdır. Bu gösterim olarak nasıl göstereceğiz, güzel soru.* $cosx;$ 0*'da alacağı değer* 1*,* $\frac{\pi}{2}$ *'de alacağı değer* 0*,* π*'de alacağı değer* -1*,* $\frac{3\pi}{2}$*'de alacağı değer* 0*,* 2π*'de alacağı değer* 1 *(şeklinde tabloda gösterir). (Öğrenci bu yazdıkları koordinat düzleminde yerine yazar)* 0*'da* 1*,* $\frac{\pi}{2}$ *'de* 0*,* π*'de* -1*,* $\frac{3\pi}{2}$*'de* 0*,* 2π*'de* 1*. Şöyle geliyor, grafik olarak şöyle bir grafik. Bunun da hocam şöyle* x*'e eşit olma durumu. Yani* 0*'da* 1 *oluyor,* $\frac{\pi}{2}$ *'de* 0 *oluyor,* π*'de* -1 *oluyor,* $\frac{3\pi}{2}$*'de* 0 *oluyor,* 2π*'de* 1 *oluyor. Yani burada* *dediğim mantıktan yola çıktım ama burada grafiği çizerken de mesela hiçbir zaman x'e eşit olmayacakmış gibi duruyor şuan. Hani x'in değerlerine karşılık, mesela $x = 0$ için $cos 0 0$'a eşit olmaz.*

Mülakatçı: *Tam değerler de olmuyor ama aralardaki değerlerde olamaz mı?*

Umut: *Aralardaki değerlerde… $\frac{\pi}{4}$ için…*

Mülakatçı: *Yalnızca karşılığını kesin bildiğin radyan değerlerini düşünme bilmediğin değerlerde de olabilir.*

Umut: *Hım doğru karşılığı olarak bilmediğimiz değerler için doğru olabilir. Anca öyle olabilir zaten. Çünkü diğer türlü bunun çözümü olmaz yani. Çünkü $\frac{\pi}{2}$, π karşılık gelmiyor x'i sağlamıyor genelde. Ama yani bilmediğim bir değerde de bunlar eşit olabilir. Ama benim düşündüğüm mantık şuydu yani $cosx$ yeri için sabit bir sayı düşündüm; $x = c$ şeklinde. Hani $ax^2 + bx + c$ de mesela genel olarak en kötü iki ihtimal var ya yani iki kökü bulunabilir mantığıyla. Yani burada da en kötü bir çözümü olduğunu düşündüm.*

Mülakatçı: *$x = c$ olunca peki o c'yi sağlayan bir x vardır diye mi düşündün?*

Umut: *Evet. o c'yi sağlayan bir x vardır. Veya da şöyle bir şey yapsak olur mu? $cos = x$ ya her tarafın arc' ını alsak, $arccos(cosx) = arccosx$ olur. $x = arccosx$. Yani öyle bir şey ki x hem $arccosx$'e eşit hem de $x = cosx$. Yani bunun ikisini sağlayan elbet bir çözüm vardır diye düşünüyorum ben.*

Mülakatçı: *Elbet vardır ama nasıldır?*

Umut: *Yani hocam yani bir x değeri düşünelim hem $cosx'i$ sağlayacak hem tersini sağlayacak. Yani bunların ikisini birden sağlayacak bir çözüm olur diye düşünüyorum ben. Yani $x = cosx$, $x = arccosx$. Bu neye benziyor aynı nasıl açıklayayım… Yani x, c gibi bir sayı da sağlarsa mesela $cosc$'si c'ye eşit; aynı zamanda $arccosc$'ye eşit yani şuradan $cosc = arccosc$'ye eşit, geçişme özelliğinden. Yani yine aynı şeye dönüyor buradan dönersek de… Yani benim düşündüğüm şey hocam bu soruda $cosx$'in -1 ile 1 arasında bir değer aldığı; buradan da x'in alabileceği bir değerler olabilecektir diye düşünüyorum. Yani x bir ihtimalle en kötü bir ihtimalle bir değer alacaktır. Yani dediğiniz gibi buradaki tam değerlere karşılık almasa da bilmediğimiz bir sayıya karşılık olabilir. Yani $y = x$ gibi bir şey düşünsek şunu şöyle bir noktada alır alacağı değeri (grafikte $y = x$ noktasını kesiştirerek göstermiştir).*

Mülakatçı: *Niye böyle bir nokta?*

Umut: *Hani kesişimlerini yapıyorduk ya bazen ortak çözüm olarak alıyorduk. Yani şunda da şunu ayrıca $y = x$ gibi ayrı düşünürsek; bir de $y = cosx$ düşünürsek bunları birbirine eşitlediğimde şu noktada bir çözümü olacaktır. Kesiştiği için bir çözüm vardır muhakkak. Şimdi daha doğru oldu sanki.*

Mülakatçı: *Tamam Umut.*

Umut'un Problem 6'ya Ait Matematiksel Akıl Yürütme Analizi

S1: Umut'un akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Fonksiyon grafiği, ters trigonometrik fonksiyon kavramı bileşenlerinden oluşmaktadır.

S2: Umut çözüm prosedürünün daha en başında aslında kendi zihninde sonuca ulaşmıştır. Ancak araştırmacının Umut'un bu sonucu daha ayrıntılı anlatmasını istemesi üzerine Umut'da farklı yollar kullanarak kendi zihnindeki bu düşünceleri karşıya aktarmayı başarabilmiştir. Öncelikle $cosx$'in değer aldığı aralıktan hareket ederek x değerinin bir doğru belirttiğini savunmuş ve bu durumu sağlayan en az bir değerin varlığından bahsetmiştir. Ardından $cosx$ fonksiyonunun grafiğini tek tek değerleri düşünerek çizmiştir. Grafikteki aşina olunan değerleri düşününce kafası karışmış ardından ters trigonometrik fonksiyonlara başvurmuştur. Tersi kendisine eşit yapacak bir noktanın varlığından bahsederken $y = x$ ve $y = cosx$ grafiklerinin bir noktada kesiştiğini göstererek, ilk baştaki düşüncesini görselleştirmiştir. Uygulamış olduğu çözüm prosedüründeki adımlar matematiksel olarak anlamlıdır ve derinlemesine bir düşünce şekli sergilemiştir.

S3: Umut, akıl yürütme sürecinde oluşturduğu tartışma ortamıyla, süreç başında ulaştığı sonucu açıklamayı başarabilmiştir. Amaçsız, bir sonuca ulaşıp ulaşmayacağı meçhul olan algoritmaları kullanmamış bunun yerine düşünce gücünü etkin hale getirerek açıklamak istediği noktalara işaret etmiştir. Matematiksel kavramların amacına uygun olarak yerinde kullanıldığı bu akıl yürütme süreci derinlemesine düşünceleri barındırmaktadır. Bu sebeplerden dolayı Umut'un ortaya koymuş olduğu akıl yürütme becerisi türü CR özellik göstermektedir.

S4: Umut trigonometrik fonksiyonlarla ilgili herkes tarafından temel olarak bilinmesi gereken özelliklere hakimdir. Onu bu süreçte başarılı kılan ise bu kavramların özelliklerini bilmenin yanında bu özellikleri kullanabilmesidir. Örneğin $cosx$fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığında değer aldığını hemen hemen çoğu öğrenci bilmektedir. Ancak bu aralık neticesiyle $cosx$'in aldığı değerin sabit sayı olacağını ve bu durum neticesinde x'in bir doğru belirteceğini düşünebilen kişi sayısı azdır. İşte bu durum sahip olunan bilgileri anlamlı bir şekilde zihne kodlamakla mümkündür. Önemli olan bilgi yığınına sahip olmak değil bu bilgi parçaları arasındaki bağı etkili kurabilmektir. Belirtilen bu durum da etkili akıl yürütme süreçleri oluşturmaya zemin hazırlamaktadır.

Umut'un Problem 6'ya Ait Sınıflandırma Kodu

Umut'un Problem 6'ya ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dgd}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek bir tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Problem 6'nın çözüm prosedürü için üç öğrenci tarafından kullanılmıştır. Öğrencilerin üçü de doğru cevaba ulaşırken, bu akıl yürütme türünün özelliklerini oldukça etkili bir şekilde çözüm prosedürlerinde göstermişlerdir. Özellikle belirli bir algoritma kullanmadan kendi bilgi birikimleriyle yaptıkları yorumlar, konuyla alakalı sahip oldukları kavramsal alt yapıyı ispatlar niteliktedir. Araştırmaya katılan diğer öğrencilerin amaçsızca algoritmalar denemelerinin aksine bu akıl yürütme türüyle sonuca ulaşanlar kendilerinden oldukça emin adımlar atmışlardır. Bu tarz düşünebilen bireylerin varlığı, etkili matematiksel akıl yürütme sürecinin gerekli şartlar sağlandığında diğer öğrenciler tarafından da uygulanabileceğini düşündürmektedir. Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütebilen öğretmen sayısındaki artış ise bu kültürde yetişen öğrenci sayısının artmasına zemin oluşturacaktır. Sonuç olarak da öğretim kalitesinin artması yadsınamaz bir gerçektir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Matematiksel akıl yürütebilmek için belli bir matematiksel alt yapının varlığı gereklidir. Bu sebepten dolayı araştırmaya katılımcı seçilirken belli şartlara uyan amaçlı örneklem yolu tercih edilmiştir. Çünkü öğrencinin matematiksel alt yapısı olmadığı sürece, matematiksel yorumlar yapması da oldukça zorlaşmaktadır Araştırmaya katılan öğrencilerin veri toplama aracıyla sunulan problem durumlarına karşı sergilemiş oldukları akıl yürütme türleri Tablo 5.1'de sunulmuştur.

Tablo 5.1.

Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Problem Durumlarına Yönelik Sergiledikleri Matematiksel Akıl Yürütme Becerisi Türleri

	Problem 1	**Problem 2**	**Problem 3**	**Problem 4**	**Problem 5**	**Problem 6**
Aylin	AR_{ygy}	CR_{dlx}	AR_{ogd}	DAR_{ogy}	FAR_{dgx}	DAR_{xgy}
Banu	AR_{dgy}	CR_{dlx}	AR_{ygy}	MR_{xgy}	AR_{ygy}	DAR_{ygy}
Derya	AR_{ygy}	AR_{ygy}	DAR_{ygy}	MR_{ogy}	AR_{xgy}	DAR_{xgy}
Ece	AR_{ygy}	XX_{xxy}	MR_{ygy}	MR_{ogy}	AR_{ygy}	Person GAR_{dgy}
Harun	CR_{dgd}	FAR_{ygx}	DAR_{ygy}	AR_{dgd}	CR_{dld}	CR_{dgd}
Hikmet	CR_{dld}	CR_{dgd}	CR_{ogd}	MR_{dgy}	Person GAR_{dgx}	CR_{dld}
Leyla	AR_{ygy}	Person GAR_{xgy}	AR_{ygy}	MR_{dgy}	AR_{dgx}	DAR_{xgy}
Nurdan	CR_{dld}	CR_{dgd}	AR_{ygy}	MR_{ogy}	CR_{dgd}	DAR_{xgy}
Önder	AR_{dgy}	MR_{xgy}	AR_{ogy}	DAR_{xgy}	CR_{dld}	DAR_{xgy}
Umut	CR_{ylx}	FAR_{ygy}	CR_{old}	CR_{old}	AR_{dgx}	CR_{dgd}

Tablo 5.1 incelendiğinde ise hemen hemen her öğrenci karşılaştığı problem durumuna dair yorumlarda bulunarak bir akıl yürütme süreci sergilediği görülmektedir.

Ortaya konulan bu akıl yürütme türlerinde problem durumunun özelliği de oldukça önemli olduğundan; veri toplama aracı oluşturulurken problemlere dair birçok eleme gerçekleştirilmiş; en fazla çözüm yolunu bünyesinde barındıran problemlerin seçilmesi sağlanmıştır. Zira bir problem durumuna dair, katılımcıların birden fazla akıl yürütme türünü kullanarak çözüm prosedürü oluşturmaları yapılan seçimin göstergesidir. Bu aşamadan sonra ise öğrencilerin sergilemiş oldukları matematiksel akıl yürütme türlerine bireysel olarak bakıldığında, benzetmeye dayalı (MR, AR) matematiksel akıl yürütme türünün yoğunluğu dikkat çekmektedir. Bazı öğrencilerin yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türünü birkaç kez kullandığı görülmektedir. Bu öğrencilerin mevcut akademik durumları ve süreçte onlarla gerçekleştirilen görüşmeler göz önüne alındığında ise bireysel çalışmaya önem vermeleri yanında akademik başarılarının yüksek olmasınında bunun üzerinde etkili olduğu düşünülmektedir. O halde öğrencilere etkili matematiksel akıl yürütme becerisi kazandıracak olan ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarını seçerken bu kriterleri göz önüne almak önem kazanmaktadır. Araştırmaya katılan öğrencilerden biri ise Problem 2 için oluşturmaya çalıştığı çözüm prosedüründe, matematiksel olarak herhangi bir yorum, açıklama ya da fikir sunmamıştır. Bu sebeple verilen probleme ait herhangi bir matematiksel akıl yürütme becerisi türü de sergilememiştir. Sınıflandırma kodu da XX_{xxy} şeklinde bu duruma uygun olarak belirtilmiştir.

Bu bölümde, elde edilen araştırma sonuçları alt problemler doğrultusunda özetlenmiş, literatürdeki araştırma sonuçlarıyla tartışılmış ve sonuçlar doğrultusunda belirlenen önerilere yer verilmiştir.

5.1. Öğretmen Adaylarının Ezbere Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Sonuçlar, Tartışma ve Öneriler

Araştırmaya katılan ortaöğretim matematik öğretmeni adayları, veri toplama aracında yer alan altı problemden üçünün çözüm prosedürünü oluştururken, ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türüne ait özelliklerin barındığı süreçleri sergilemişlerdir. Her problem için öğrenci sayıları değişmekle birlikte Problem 2, 3 ve 4'ün çözüm prosedürlerinde bu akıl yürütme türü tespit edilmiştir.

Bir fabrikanın yıllık üretimini ton cinsinden veren fonksiyon ışığında, uzun yıllar sonra bu fabrikanın en fazla üretimini ve üretimindeki artışı sorgulayan Problem 2 için uygulanan çözüm prosedürlerinde, sadece bir öğrencinin (Önder) ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türü kullandığı tespit edilmiştir. Bu öğrencinin, çözüm sürecinde öğrenme çevresinden edindiği hazır ve ezber bilgilere odaklanması, onun derinlemesine düşünme süreçleri geliştirmesine engel olmuştur. Zihnindeki prosedürü hatırlayamayınca da uygulama yapmaktan vazgeçmek istemiştir. Yani öğrenci, belli bir matematiksel alt yapıya sahip olsa bile, kendi bilgi birikimine güvenememektedir. Ezber bilgiler, düşünme süreçlerini baskı altına aldığından dolayı, aynı matematiksel işlemleri uygulamış olsa da öğrencinin farklı algılamasına neden olmaktadır. Önder süreç sonunda probleme herhangi bir cevap oluşturamamıştır.

Verilen $y = \sqrt[4]{x^2 + ax + b}$ fonksiyonu için en geniş tanım kümesini elde etmede kullanılacak a değerlerinin sorgulandığı Problem 3'e ait çözüm prosedürlerinde ise yalnızca bir öğrenci(Ece) tarafından ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türü kullanılmıştır. Bu öğrenci, çözüm için diskriminant kavramını kullanacağını belirtip $\Delta > 0$ olduğu durumu göz önüne almıştır. Ancak süreçte yaptığı seçimler ezbere dayalı olduğu için mantıksal açıklamalar oluşturamamış, onu çözüme götürecek yorumlar yapamamıştır. Konu ile alakalı kavramsal alt yapısının olmaması, ezbere yönelmesine neden olmuştur. Sonuç olarak da etkili düşünce süreçleri ve akıl yürütmeler sergileyememiş; doğru bir cevaba da ulaşamamıştır. Böylece ezber bilgi ile düşünsel açıdan ilerlemenin zorluğu ortaya çıkmıştır.

$\sqrt{2}$ sayısı için sayı doğrusundaki kesin yerinin sorgulandığı Problem 4'e ait çözüm prosedürlerinde, altı öğrenci (Aylin, Banu, Leyla, Ece, Nurdan ve Hikmet)tarafından ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türü kullanılmıştır. Bu akıl yürütme türünü kullanan öğrencilerin verilen soru için ortaya koydukları akıl yürütme süreçleri incelendiğinde, öğrencilerin bu soruya ait öğrenme tecrübelerinin var olduğu ve öğrenme tecrübelerinden hatırladıkları kadarıyla bir çözüm prosedürü oluşturdukları görülmüştür. Kullandıkları matematiksel kavramların ifade ettiği anlamları açıklamadan, yüzeysel düşünceler belirterek, hatırladıkları bilgileri kullanmaya çalışmışlardır. Bu problemin çözümüne yönelik hazır bilgiye sahip olan öğrenciler arasında yalnızca iki kişi tarafından doğru sonuca ulaşılmıştır. Diğer dört öğrenci ise ellerindeki ezber bilgiyi kullanamayarak, $\sqrt{2}$ için sadece yaklaşık bir yer belirtmişlerdir. Mevcut duruma ilişkin sebepler sorgulandığında ise öğrenciler, irrasyonel sayıların kesin yerinin olmadığı, kareköklü sayılardan ziyade daha çok tam sayılarla işlemler yaptıkları şeklinde gerekçeler sunmuşlardır. Probleme doğru cevap verebilen öğrencilerden çözümüne dair kendi bilgi birikimlerini kullanarak bir cevap aramaları istendiğinde ise; eğer bu tarz bir çözüm yolu öğrenilmeseydi $\sqrt{2}$'nin yalnızca yaklaşık yerini belirleyebileceklerini ifade etmiştirlerdir. O halde ezbere dayalı öğretim ortamının düşünme süreçlerini etkilemesi gibi dezavantajı yanında öğrencilerin farklı tecrübeler edinmesi gibi yararları olduğu düşünülebilir.

Ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türü, araştırmada incelenen durumlar arasında en az sergilenen akıl yürütme türüdür. Soruların çözümünde ezber bilgilerin kullanılması buna bağlı olarak da kavramsal açıklamalara yer verilmemesi Akkuş Çıkla ve Duatepe (2002) çalışmasının sonuçlarıyla paralellik göstermektedir. Öğrenciler, verilen problemle ilgili herhangi bir düşünce yapısı oluşturamayınca, öğrenme tecrübelerine yönelerek ezber bilgilerle bir çıkış yolu aramayı tercih etmişlerdir. Ancak etkili bir matematiksel akıl yürütme süreci de sergileyememişlerdir. Bu sonuç Lithner (2000a) tarafından araştırılan ve öğrencilerin daha çok benzer bilgileri hatırlamaya çalışmaları onların yeni uygulamalar yapmasına engel olduğu sonucuna ulaştığı çalışması ile paralellik göstermektedir. Yine bu sonuç, ezber bilgilerin matematiksel kaygıya neden olarak akıl yürütme yeteneğini geliştirmesine engel olduğunu ifade eden Steen (1999), Umay (2003), ve Umay ve Kaf (2005)'ın çalışmaları tarafından da desteklenmektedir. Yine bu sonuçlar, özellikle rutin bir öğretim ortamında öğrencilerin yaratıcılığa dayalı fikirler sunmadıklarını ve sessiz kaldıklarını dile getiren Berqvist ve Lithner (2005) ile de tutarlılık göstermektedir. Diğer akıl yürütme türlerinde olduğu gibi bu akıl yürütme türünün kullanılmasını etkileyen birçok faktör vardır. Öğrencinin matematik konuları ile ilgili kavramsal bilgi düzeyinin düşük olması, problem durumunun öğrenciye göre rutin olup olmaması, öğrenme tecrübeleri ve öğrenme ortamları bu faktörlerin temelini oluşturmaktadır. Her ne kadar en alt seviyedeki akıl yürütme türü gibi görünse de, bir problem durumu karşısında öğrencinin herhangi bir yorum yapmamasına göre ezberden bir şeyler söyleyebilmesi daha çok tercih edilir. Yani öğrenme ortamlarındaki farklı deneyimlerin bir akıl yürütme süreci başlattığı sonucuna varılabilir. Benzer durum, öğrenme ortamlarında karşılaşılan farklı etkinliklerin öğrencilerin akıl yürütme ve düşünme becerilerini olumlu etkilediğini savunan Apaydın ve Taş (2010) ile; etkileşimli öğrenme ortamlarının matematiksel akıl yürütmeye katkı sağladığını belirten Zembat (2006)'ın sonuçlarıyla de tutarlılık göstermektedir.

Matematiksel akıl yürütme yeteneğinin öğretmenlere kazandırılmasında etkin rol oynayan lisans eğitimi programlarında okutulan derslerin işleniş biçimleri değiştirilerek aktif düşünme ortamlarının oluşturulması önerilmektedir. Bu sayede, kavramsal bilgiye sahip olan öğrencinin bu kavramsal bilgiyi etkin kullanabileceği durumlar sağlanacaktır. Ayrıca öğrencilerin yapmış oldukları yorumlardan hareketle kavramsal bilgide oluşan hatalarında önüne geçilebilecektir. Özellikle matematik eğitimcilerinin matematiksel açıdan rutin olmayan durumlarla öğrencileri yüzleştirmesi önerilmektedir.

5.2. Öğretmen Adaylarının Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Sonuçlar, Tartışma ve Öneriler

Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü, öğrenciler tarafından veri toplama aracındaki tüm sorular için en fazla başvurulan türdür.

İki farklı fonksiyon verilerek, bu fonksiyonlardan oluşan bileşke fonksiyonunun görüntü kümesinin sorgulandığı Problem 1'de, altı öğrenci algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü kullanarak çözüm prosedürlerini oluşturmuşlardır. Öğrencilerden ikisi doğru cevaba; dördü ise kullandıkları algoritmalara rağmen yanlış cevaba ulaşmışlardır. Bileşke fonksiyonunu elde etmek için kullandıkları algoritma, en çok kullanılan algoritmadır. Öğrenciler bu algoritmayı kullanarak herhangi bir açıklama yapmadan bileşke fonksiyonunu elde etmişlerdir. Bu aşamadan sonra en çok takip edilen algoritma ise; bileşke fonksiyonun tanım kümesini belirleyen algoritmadır. Ancak öğrenciler, sergilemiş oldukları bu süreçte herhangi bir düşünme aktivitesi gerçekleştirmediklerinden, ulaştıkları kümenin görüntü kümesi olduğunu ifade etmişlerdir. Araştırmacının tanım kümesini sorması üzerine yaptıklarını o an için düşünen öğrenciler, görüntü kümesini bulmaya yönelmişlerdir. Görüntü kümesini bulurken de genel olarak, tanım kümesindeki değerler tek tek düşünülüp görüntü kümesi oluşturmaya çalışmışlardır. Konuya ait yeterli seviyede bilgi birikimi olmasına rağmen, hazır algoritmalar ile oluşturulan çözüm süreçlerinde matematiksel düşünmelerin ikinci plana atıldığı mevcut durumdan anlaşılmaktadır.

Bir fabrikanın ton cinsinden yıllık üretimini veren fonksiyon vasıtasıyla, uzun yıllar sonra bu fabrikanın en fazla üretimini ve üretimindeki artışı sorgulayan Problem 2'de, dört öğrenci algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü kullanarak çözüm prosedürünü oluşturmuşlardır. Problem cümlesinde geçen "*en fazla*" kelimesini okuyan öğrenciler sorunun bir maksimum minimum problemi olduğunu düşünerek, farklı bir fikir belirtmeden gerekli algoritmaları uygulamaya yönelmişlerdir. Soruya uygun olduğunu düşündükleri bu hazır algoritmaya rağmen, öğrencilerin hiç biri doğru bir cevap elde edememişlerdir. Çünkü öğrenciler önceki öğrenme ortamlarında, *"en fazla"* kelimesi geçen her soru için bu algoritma ile doğru sonuca ulaşarak tecrübe edinmişlerdir. Dolayısıyla bu problemde de derinlemesine bir düşünce sergilemeye ihtiyaç duymamışlardır. Öğrenme ortamlarında karşılaşılan rutin olmayan durumlar ile öğrenci sürekli aktif bir şekilde düşündürülerek, belli bir algoritmaya olan inancın ortadan kalkması sağlanabilir.

$y = \sqrt[4]{x^2 + ax + b}$ fonksiyonu için en geniş tanım kümesini elde etmede kullanılacak a değerlerinin sorgulandığı Problem 3'de yedi öğrenci algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü kullanarak çözüm prosedürlerini oluşturmuşlardır. Öğrenciler bu problemde genel olarak diskriminant kavramını kullanarak kökler elde edip, köklerin işaretlerine göre yorum yaptıkları bir algoritmayı kullanmışlardır. Yüzeysel bir düşünce ile desteklenen algoritma uygulama sürecinde öğrenciler, $\Delta > 0$ olduğu durumu göz önüne alarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Bu akıl yürütme türünü kullanan her bir öğrenci uygulanan tüm algoritmalara rağmen, doğru sonuç elde edememişlerdir. Ortaya çıkan bu tablo, üzerinde çalışılan problem durumuna özel bir düşünce sergilemeksizin, benzer algoritmalar ile sonuca gitmenin zorluğunu bir kez daha ortaya çıkarmıştır. Ancak öğretim ortamlarında benzer öğrenme durumlarına sıkça yer verilmesi sonucu, öğrenciler düşünme süreçlerini göz ardı ederek onları direkt sonuca götürecek algoritmalara odaklanmışlardır

$\sqrt{2}$ sayısı için sayı doğrusundaki kesin yerinin sorgulandığı Problem 4'de üç öğrenci algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü kullanarak çözüm prosedürünü oluşturmuştur. Araştırmaya katılan diğer öğrencilerin çoğunluğu tarafından ezbere dayalı olarak ilerletilen çözüm prosedüründe, bu üç öğrenci çözüme uygun olduğunu düşündükleri farklı algoritmaları denemişlerdir. İkisi yanlış bir sonuca ulaşırken, biri ise önceden kendi geliştirdiği algoritma ile doğru sonuca ulaşabilmiştir. Kullanılan algoritmalarda oldukça yüzeysel düşünen öğrenciler, verilen irrasyonel sayının kesin yerine dair herhangi bir yorum yapamamış, sadece yaklaşık yerini söyleyebilmişlerdir. Kendi oluşturduğu algoritma ile doğru sonuca ulaşan Harun ise tartışma ortamları oluşturmayı başarabilmiştir. Bu durum ise etkili akıl yürütmelerin sağlanmasında öğretim ortamlarının yanında bireysel gayretinde önemli olduğu sonucuna varmamızı sağlamaktadır.

Yıllık x birim üretimin, belirli bir aralıkta tutulduğu; maliyet ve satış fiyatlarının verilerek en fazla kar için üretilmesi gereken ürünün miktarını sorgulayan Problem 5'te yedi öğrenci algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü kullanarak çözüm prosedürünü oluşturmuştur. Verilen problemde yıllık karın en fazla olması şartı, öğrencileri direkt olarak algoritma kullanmaya sürüklemiştir. Genel olarak izlenen algoritma kar fonksiyonunu bulup, türev alarak bu türevi sıfıra eşitlemek şeklinde ilerlemiştir. Elde edilen sonuç, istenen aralığın dışında kaldığı için de öğrencilerin zihinleri oldukça karışmıştır. Bu aşamadan sonra konu ile alakalı kavramsal bilgi altyapısı zengin olan Aylin, Leyla, Harun ve Umut derinlemesine düşünmeyi başararak doğru sonuca ulaşabilmişlerdir. Sadece algoritmayı hatırlayan Banu, Derya ve Ece ise ya algoritmanın nasıl yapıldığını hatırlayamamış ya da algoritma ile bir değer bulsa bile bu değer hakkında anlamlı yorumlar yapamamışlardır.

Bir trigonometri sorusu olan ve $cosx = x$ denkleminin en az bir çözümü olmasına dair nedeninin sorgulandığı Problem 6'da ise araştırmaya katılan yedi öğrenci algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü kullanarak çözüm prosedürünü oluşturmuşlardır. Bu türü kullanan katılımcıların hemen hepsi birden fazla algoritma ile cevaba ulaşmaya çalışmışlardır. Öğrenme yaşantılarında, problemdeki duruma benzer bir tecrübe ile karşılaşmadıklarını belirten öğrenciler, ilgili ya da ilgisiz birçok algoritma uygulamışlardır. Ancak hiç biri herhangi bir cevap dahi bulamamıştır. Genel olarak $cosx = x$ denkleminde bir çözümün varlığını göstermektense, bu denklemi sağlayacak x değerini bulmaya yönelik algoritmalar uygulamışlardır. Yalnızca bir öğrenci (Ece) araştırmacının verdiği ipuçlarını değerlendirmeyi başarabilmiştir. Fakat yine de etkili şekilde düşünemediğinden ulaştığı sonucun istenen çözüm olduğunu anlayamamıştır. Ortaya çıkan bu tablo etkili akıl yürütme durumları için öğrenme yaşantılarının önemini gözler önüne sermektedir.

Araştırmaya katılan ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının, verilen problem durumları karşısında sergilemiş oldukları matematiksel akıl yürütme durumları incelendiğinde en fazla tercih edilen akıl yürütme türünün AR olduğu görülmektedir. Elde edilen bu sonuç ilgili alan yazındaki çalışmaların (Lithner 2000a; Lithner 2000b; Lithner 2003; Lithner 2004; Boesen, Lithner ve Palm, 2010; Karakoca, 2011) sonuçlarıyla da tutarlıdır. Bu akıl yürütme türünün bu kadar fazla tercih edilmesinin sebepleri arasında, öğrenciyi en kısa yoldan sonuca götürmesinin etkisi büyüktür. Özellikle bugüne kadar öğrenme çevrelerinde edindikleri tecrübelerden hareketle kullanılan bu akıl yürütme türü sayesinde, öğrenci hem zamandan kazanırken hem de düşünsel anlamda yorulmamaktadır. Ayrıca yine öğrenme tecrübeleri ile sabit olan bir durum vardır ki seçilen algoritmaların her durumda çalışıyor olmasıdır. Öğrenme ortamlarında sıkça karşılaşılan benzer problem durumları bu alt yapıyı hazırlamaktadır. Farklı kademelerde görev yapan matematik öğretmenlerinin ders sunumlarını dinleyerek daha çok belirli bir algoritmaya yönelik problem durumlarına yer verdiklerini belirten Bergqvist ve Lithner (2005, 2012) çalışmaları, bu sonuçları destekler niteliktedir. Ayrıca araştırmadaki problemlerde, alışılagelmiş bu durumla karşılaşmayan öğrencilerin, şaşkınlık ve zihinsel karmaşıklık yaşadıkları görülmüştür. Yaşanılan bu karmaşıklığın ardından kendi düşünme güçlerini devreye katabilenler başarılı bir şekilde süreci sonlandırabilmişlerdir.

Öğrenme ortamlarında dikkat edilmesi gereken, algoritma alışkanlığı kazandırılırken bu alışkanlığa düşünme gücünü de ekleyebilmektir. Bu sayede, düşünmeden salt algoritma uygulayan değil, bunları bütüncül bir şekilde kullanarak etkili akıl yürütmeler ortaya koyabilen öğrenciler yetiştirmeye zemin hazırlanabilir. Bunun yanında özellikle de lisans programlarında yalnızca algoritma ile sonuca gidilebilen problem durumlarına sıkça yer verilmekten kaçınılmalıdır. Öğrencilerde oluşan matematiksel kavramların anlamları öğrenme ortamlarında sürekli bir şekilde sorgulanmalıdır. Sorunların olması halinde anında müdahale edilmesi önerilmektedir.

5.3. Öğretmen Adaylarının Yaratıcılığa Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Sonuçlar, Tartışma ve Öneriler

Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türü, araştırmaya katılan öğrenciler tarafından sergilenen diğer bir akıl yürütme türüdür.

İki farklı fonksiyon verilerek, bu fonksiyonlardan oluşan bileşke fonksiyonunun görüntü kümesinin sorgulandığı Problem 1'de dört öğrenci tarafından yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türü kullanılarak çözüm prosedürü oluşturulmuştur. Öğrencilerden yalnızca Harun bu akıl yürütme türünü global şekilde, yani tamamen kendi özellikleri çerçevesinde sergilemiştir. Diğer üç öğrenci ise sürece algoritma uygulamalarını da eklemiştir. Ancak dört öğrencinin her biri de fonksiyon ve bileşke fonksiyon konuları ile ilgili derinlemesine düşünceler ve yorumlar sunabilmeyi başarmışlardır. Umut'ta görüntü kümesi kavramına sunduğu farklı bakış açısıyla dikkat çekmiştir. Doğru sonuca ulaşamasa da görüntü kümesinin fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri arasındaki elemanlar olduğunu ifade etmiştir. Matematiksel kavramlara farklı bakış açıları sunabilmenin, söz konusu olan bu akıl yürütme türünü kullanmayı da kolaylaştırdığı söylenebilir.

Bir fabrikanın ton cinsinden yıllık üretimini veren fonksiyon vasıtasıyla, uzun yıllar sonra bu fabrikanın en fazla üretimini ve üretimindeki artışı sorgulayan Problem 2'de, dört öğrenci tarafından yaratıcılığa dayalı akıl yürütme türünü kullanılarak çözüm prosedürü oluşturulmuştur. Nurdan, fonksiyonlarda tanım ve görüntü kümesi kavramlarını kullanarak görüntü kümesinin en düşük ve en fazla terimlerinden hareket ettiği çözüm prosedürüyle; bu akıl yürütme türünü global bir şekilde sergilemiştir. Diğer üç öğrenci ise sürece algoritma uygulayarak başlamıştır. Ancak, bu şekilde direkt sonuca ulaşamayınca farklı düşünme yolları geliştirerek etkili ve anlamlı akıl yürütmeler oluşturabilmişlerdir.

$y = \sqrt[4]{x^2 + ax + b}$ fonksiyonu için en geniş tanım kümesini elde etmede kullanılacak a değerlerinin sorgulandığı Problem 3'te iki öğrenci tarafından bu akıl yürütme türü kullanılarak çözüm prosedürleri oluşturulmuştur. Hikmet global bir şekilde bu akıl yürütme türünü kullanırken, Umut sürece algoritmayı da eklemiştir. Hikmet'in parabol ve tepe noktası kavramlarını kullanarak yaptığı yorumlar, karşılaştığı sorunlardan korkmayarak çözüme devam etmesi, kendi zihninde oluşan sorulara yine kendinin yanıt bulması matematiksel kavramlar üzerindeki hakimiyetinin bir göstergesidir. Araştırmaya katılan diğer öğrencilerin hem algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme kullanmaları, hem de doğru ya da olası sonuca ulaşanların azlığı; bu iki öğrencinin daha derinlemesine düşünce sergileyebildiklerinin ispatıdır.

$\sqrt{2}$ sayısı için sayı doğrusundaki kesin yerinin sorgulandığı Problem 4'te bir öğrenci tarafından bu akıl yürütme türü kullanılarak çözüm prosedürü oluşturulmuştur. Yalnızca Umut tarafından ortaya konulan bu akıl yürütme sürecinde, hiçbir hazır algoritma kullanılmadan derinlemesine düşünme ve matematiksel kavramları yerinde kullanma söz konusudur. Umut çözüm prosedüründe $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonelliğini ispatlamış, bunun yanında analitik düzlemde doğruları döndürme süreçlerini anlatmıştır. Akıl yürütme sürecinin sonunda doğru bir sonuca ulaşamasa da oldukça etkili düşünerek cevaba çok yaklaşmıştır. Araştırmaya katılan diğer öğrencilerin büyük çoğunluğu ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme ile bir prosedür oluştururken; Umut'un bu yolu tercih etmesi kavramsal alt yapısına olan güveni göstermektedir.

Yıllık x birim üretimin, belirli bir aralıkta tutulduğu; maliyet ve satış fiyatlarının verilerek en fazla kar için üretilmesi gereken ürünün miktarını sorgulayan Problem 5'te üç öğrenci tarafından yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türü kullanılarak çözüm prosedürü oluşturulmuştur. Bu üç öğrenci de ortaya koydukları akıl yürütme süreçleri ile problem için doğru bir sonuca ulaşmayı başarmışlardır. Umut ve Harun uyguladıkları algoritmalardaki adımları sebep sonuç ilişkisi kurarak açıklayabilmişlerdir. Maksimum minimum problemlerin de kullanılan en fazla değer bulma algoritması ile direkt sonuç elde edemeyince, verilen aralığı anlamlı bir şekilde yorumlamayı başarabilmişlerdir. Nurdan ise bu algoritmaya başvurmadan kar fonksiyonunun grafiğinden yola çıkmış ve tam manasıyla yaratıcılığa dayalı akıl yürütme süreci sergilemiştir.

Bir trigonometri sorusu olan ve $cosx = x$ denkleminin en az bir çözümü olmasına dair nedeninin sorgulandığı Problem 6'da üç öğrenci tarafından yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türü kullanılarak çözüm prosedürü oluşturulmuştur. Hikmet, verilen probleme algoritmalar deneyerek başlamış ancak araştırmacının verdiği ipuçlarını akılcı bir şekilde kullanarak derinlemesine düşünmeyi başarabilmiştir. Umut $cosx$ değerinin bir sabit sayı olacağını dolayısıyla karşı tarafın bir doğru belirteceğini;

Harun ise birebir ve örtenlik özelliklerini kullanarak en az bir çözüm olduğunu düşünmüştür. Böylece farklı düşünebilmeyi başarmış ve tam manasıyla bu akıl yürütme türüne örnek oluşturmuşlardır. Araştırmaya katılan diğer yedi öğrencinin çoğu tarafından cevap dahi bulunamayan bu probleme, algoritma kullanmadan derinlemesine düşünerek çözüm yolu oluşturan bu öğrencilerin, ilgili konudaki kavramsal altyapılarının zenginliğini göstermektedir.

Araştırmaya katılan ortaöğretim matematik öğretmeni adayları, derinlemesine düşünüp, kavramlar arasında bağlar kurarak olaylara bütüncül olarak bakabildiği akıl yürütmeler gerçekleştirmişlerdir. Bu tarz düşünebilen bireylerin varlığı, gerekli şartlar sağlandığı takdirde etkili matematiksel akıl yürütme sürecinin öğrenciler tarafından uygulanabileceği sonucunu doğurmaktadır. Zira sorgulama, doğrulama gibi üstbiliş stratejilerinin kullanıldığı ders ortamlarında matematiksel muhakeme becerilerinin arttığını belirten Pilten (2008)'in çalışmasının sonuçları da bu durumu destekler niteliktedir. Öğrenme ortamlarının öğrenmeye açık, tartışma durumlarının sıkça oluşturulduğu, herkesin düşüncelerini rahatça ifade edebildiği şekilde tasarlamak belirtilen şartları sağlatmada önemli adımlardır. İlgili alan yazında yer alan çalışmalar da (Yankelewitz, 2009; Başaran, 2011; Tıraşoğlu, 2013; Erdem, 2015) bu tarz etkileşimli ortamların öğrencilerdeki matematiksel akıl yürütme becerisini geliştirmeye olumlu yönde katkı sağladığı sonuçlarına ulaşılmıştır. Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütebilen öğretmen adayı sayısındaki artış ise bu kültürde yetişen öğrenci sayısının artışını da sağlayacaktır.Devam eden bu zincir ile de öğretim kalitesinin yükseleceği yadsınamaz bir gerçektir.

Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütebilme becerisinin gelişimi öncelikle matematiksel açıdan zengin bir kavramsal alt yapının oluşturulmasına bağlıdır. Bu sebeple özellikle lisans eğitiminde yer alan kavramsal bilginin ağır bastığı derslerin, öğrencilerde kavram yanılgılarını en aza indirecek şekilde yeniden tasarlanarak etkili bir öğretim sağlatılması önerilmektedir. Bu derslerde görevli öğretim üyelerinin, yaratıcılığa dayalı durumlardan haberdar olması ve derslerinde bu durumlara sık sık yer vererek sınıf içinde düşünme ortamlarını oluşturmaları önerilmektedir. Öğrencilere bu tarz akıl yürütebilmenin önemi hissettirilmelidir.

KAYNAKÇA

Akkuş Çıkla, O. ve Duatepe, A. (2002). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerileri üzerine niteliksel bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23, 32-40.

Aladağ, A. ve Artut, P. D. (2012). Examination of students' problem-solving skills of proportional reasoning problems and realistic problems.*elementary. Education Online*, *11*(4), 995-1009.

Alkan, H. ve Güzel, E. B. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *25* (3), 221-236

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, *6*(21), 25-37.

Apaydın, Z. ve Taş, E. (2010). Farklı etkinlik tiplerinin öğretmen adaylarının akıl yürütme becerileri üzerindeki etkileri. *Türk Fen Eğitimi Dergisi*, *7*(4), 172-188.

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi.* (3. Basım). Trabzon: Derya Kitabevi.

Baki, A., Karataş, İ. ve Güven, B. (2002). *Klinik mülâkat yöntemi ıle problem çözme becerilerinin değerlendirilmesi.* V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, ODTÜ, Ankara: 15-18 Eylül, 2002, Bildiriler, Cilt II, 1043-1049.

Ball, D., and Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, G. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Başaran, S. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerileriyle ilgili duyuşsal ve demografik etmenlerin araştırılması.* Yayınlanmamış doktora tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Bergqvist, T., and Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *Journal of Mathematical Behavior*, 31, 252-269.

Bergqvist, T., Lithner, J., and Sumpter, L. (2008). Upper secondary students task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39, 1–12.

Boesen, J., Lithner, J., and Palm T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*. 75, 89-105.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. New York: Springer.

Burton, L. (1999). Mathematicians and their epistemologies – and the learning of mathematics. In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I* (pp. 87-102). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Castro, B. (2004). Pre-service teachers‘ mathematical reasoning as an imperative for codified conceptual pedagogy in algebra: A case study in teacher education. *Asia Pacific Education Review*, *5*(2), 157-166.

Courant, R. and Robbins, H. (1996).*What is mathematics?*. New York: Oxford University Press.

Creswell, J. W. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri - beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni* (Çev. Ed: Bütün, M. ve Demir, S. B.) Ankara: Siyasal Kitabevi.

Çoban, H. (2010). *Öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme becerileri ile bilişötesi öğrenme stratejilerini kullanma düzeyleri arasındaki ilişki*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Gaziosmanpaşa Üniversitesi Sosyal Bilimleri Enstitüsü, Tokat.

Dreyfus, T. and Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 271–300.

Duatepe, A., Akkuş-Çıkla, O. ve Kayhan, M. (2005). Orantısal akıl yürütme gerektiren sorularda öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejilerinin soru türlerine göre değişiminin incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 73-81.

Erdem, E. (2011). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel ve olasılıksal muhakeme becerilerinin incelenmesi. Yayınlanmamış y*üksek lisans tezi, Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman.

Erdem, E. (2015). *Matematiksel muhakemeyi geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortaminin etkileri.* Yayınlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Ersoy, E. ve Başer, N. (2013). Matematiksel düşünme ölçeğinin geliştirilmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 21*(4), 1471-1486.

Ferri, R.B. (2003), Mathematical thinking styles - an empirical study, *European Research in Mathematics Education III, CERME-3*. http://www.dm.unipi.it/cluster-pages/didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_BorromeoFerri_cerme3.pdf adresinden 25 Ağustos 2015'te alınmıştır.

Gerring, J. (2007). *Case study research principles and practices*. New York: Cambridge University Pres.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 4-11.

Gülşen, İ. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütme durumlarının incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Işıksal, M., Koç, Y. ve Osmanoğlu, A. (2010). A study on investigating 8th Grade students reasoning skills on measurement: the case of cylinder. *Education and Science, 35*(156), 61-70.

Karakoca, A. (2011). *Altıncı sınıf öğrencilerinin problem çözmede matematiksel düşünmeyi kullanma durumları*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Karataş, İ. ve Güven, B. (2003). Problem çözme davranışlarının değerlendirilmesinde kullanılan yöntemler: Klinik mülakatın potansiyeli. *İlköğretim-Online, 2*(2), 9.

Karatoprak, R. (2014). *Matematik öğretmen adaylarının istatistiksel akıl yürütmesinin ölçülmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Kehle, P. (1999). Shifting our focus from ends to means: Mathematical reasoning [Review of the book *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images,* by L. D. English]. *Journal for Research in Mathematics Educ, 30*(4), 468-474.

Küpçü, A. R. (2008). *Etkinlik temelli öğretim yaklaşımlarının orantısal akıl yürütmeye dayalı problem çözme başarısına etkisi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Lee, W. I. (1999). *The relationship between students' proof writing ability and Van Hiele Levels of geometric thought in a college geometric course*. Unpublished doctoral dissertation, University of Northern Colorado, Greeley, Colorado, USA

Lithner, J. (2000a). Mathematical reasoning and familiar procedures. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,31*(1), 83–95.

Lithner, J. (2000b). Mathematical reasoning in school tasks. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165–190.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), 29– 55.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercise. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(4), 371–496.

Lithner, J. (2006). A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning. Research Reports in Mathematics Education (In Press), Department of Mathematics, Ume˚a University.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67* (3), 255–276.

Mason, J. (2001). *Questions about mathematical reasoning and proof in schools*. Opening address to QCA Conference, UK.

McMillan, J. H. and Schumacger, S. (2001). *Research in education*. (5. Edition). New York: Longman.

Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber*. (Çev. Ed: Turan, S.) Ankara: Nobel Yayınevi.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınevi.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *14*(1), 147–160.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Pilten, P. (2008). *Üstbiliş stratejileri öğretiminin ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakeme becerilerine etkisi.* Yayınlanmamış doktora tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Sevgen, B. (2002), *Matematiksel düşünce yapısı ve gelişimi*, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulan bildiri, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Steen, L. A. (1999). Twenty question about mathematical reasoning. L. V. Stiff, F. R. Curcio. (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 yearbook* (pp. 270-285). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tıraşoğlu, N. B. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme bağlamında matematik zihin alışkanlıklarının belirlenmesi.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Türk Dil Kurumu. (2015). Güncel Türkçe sözlük. http://tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GTS.561aacf2c2edb2.86003170 adresinden 01 Eylül 2015'te alınmıştır.

Umay, A. (1996). Matematik eğitimi ve ölçülmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 12, 145-149.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.

Umay, A. ve Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 188-195.

Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 28, 200–208.

Yankelewitz, D. (2009). *The development of mathematical reasoning in elementary school students' exploration of fraction ideas*. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers, The State University of New Jersey, New Brunswick.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. B. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, *40*(1), 181–213.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (2012). *Matematiksel düşünme.* (8. Basım). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Zembat, I. O. (2008). Pre-service teachers' use of different types of mathematical reasoning in paper-and-pencil versus technology-supported environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*,*39*(2), 143–160.

EKLER

EK 1. Veri Toplama Aracında Yer Alan Problemler

Problem 1: $f(x) = x + 1$ $g(x) = \frac{1}{x}$ ise fog fonksiyonu için görüntü kümesini bulunuz.

Problem 2: Bir işletmenin yöneticileri, x yılı göstermek üzere, ton cinsinden üretimi veren bağıntıyı $D(x) = \frac{275x^2+600}{x^2+4}$ biçiminde modelliyorlar. Buna göre uzun yıllar sonra yaklaşık olarak

a) Bu fabrikanın üretimi en fazla kaç ton olabilir?

b) Bu fabrika üretimi en fazla ne kadar arttırabilir?

Problem 3: $y = \sqrt[4]{x^2 + ax + b}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesinin gerçek sayılar kümesi olabilmesi için a değerinin nasıl seçilmesi gerektiğini belirleyiniz.

Problem 4: $\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki kesin yerini çizerek gösteriniz.

Problem 5: Bir firma her yıl x birim ürün üretmektedir (x, [400,600] arasında olmak üzere). Üretimin maliyeti yaklaşık olarak $-2x^2 + 2000x - 420000\ tl/birim$ dir. Üretilen ürünlerin satış fiyatı ise $-x^2 + 700x\ tl/birim$ dir. Yıllık karın en fazla olması için her yıl kaç birim üretim yapılmalıdır.

Problem 6: cosx = x denkleminin neden en az bir çözümü olduğunu açıklayınız.

EK 2. Gönüllülük Sözleşmesi

Değerli Öğretmen Adayları:

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalında doktora öğrencisiyim. Danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN ile birlikte doktora tez konum olan "Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi" başlıklı çalışmasıyı yürütmekteyiz.

Doktora tez çalışmamın hedefine ulaşabilmesi için Analiz I ve Analiz II derslerini alan gönüllü öğretmen adaylarına ihtiyacımız vardır. Çalışmada katılımcılar araştırmacı ile beraber mülakatlara katılacak ve yapılan mülakatlar ses kaydı ile kayıt altına alınacaktır. Mülakatlar sırasında ve mülakatlar devam ederken katılımcılar çalışmaya devam edip etmeme konusunda özgür olacaklardır. Çalışmaya başlayıp daha sonra ayrılan katılımcılar hakkında kötü niyet beslenmeyecek ve öğrencilerin bölümlerindeki durumlarında herhangi bir olumsuzluk oluşturmayacaktır. Mülakatlar süresince katılımcılar hiçbir riskle veya olumsuz bir durumla karşılaşmayacaklardır. Eğer herhangi bir olumsuzluk veya risk durumu ortaya çıkarsa mülakatlara ara verilecektir. Araştırmada toplanan veriler asla katılımcıların özelini yansıtmayacaktır. Katılımcıların isimleri gizli tutulacak ve araştırma raporlaştırılırken kod isimler kullanılacaktır.

Eğer araştırma ile ilgili bir sorunuz olursa bana 0442 231 4250 numaralı telefondan veya zbayrakdar@atauni.edu.tr adresinden ulaşabilirsiniz.

Saygılarımla,
Zeynep ÇİFTCİ

Yukarıdaki araştırmaya katılmaya gönüllüyüm.

Adı-Soyadı: Tarih: İmza:

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2009 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl Erzurum Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalında doktora eğitimine başladı. Ağustos 2011'den beri Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.