İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ ANALİZ ALANINDAKİ ARGÜMANTASYON VE İSPAT SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Muhammet DORUK

Doktora Tezi
İlköğretim Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Abdullah KAPLAN
2016

T.C.

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM BÖLÜMÜ MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ ANALİZ ALANINDAKİ ARGÜMANTASYON VE İSPAT SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

(Investigation of Preservice Elementary Mathematics Teachers' Argumentation and Proof Processes in Domain of Analysis)

DOKTORA TEZİ

Muhammet DORUK

Danışman: Prof. Dr. Abdullah KAPLAN

ERZURUM

Haziran, 2016

KABUL VE ONAY

Prof. Dr. Abdullah KAPLAN danışmanlığında, Muhammet DORUK tarafından hazırlanan "İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Analiz Alanındaki Argümantasyon ve İspat Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı çalışma 23/06/2016 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Nesrin ÖZSOY	İmza: ....
Danışman: Prof. Dr. Abdullah KAPLAN	İmza: ....
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Sare ŞENGÜL	İmza: ....
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Alper Cihan KONYALIOĞLU	İmza: ....
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ	İmza: ....

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

29.06./2016

Prof. Dr. Kemal DOYMUŞ

Enstitü Müdürü

TEZ ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

Doktora Tezi olarak sunduğum "İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Analiz Alanındaki Argümantasyon ve İspat Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve onurumla doğrularım.

Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

29/06/2016

Muhammet DORUK

ÖZET

DOKTORA TEZİ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ ANALİZ ALANINDAKİ ARGÜMANTASYON VE İSPAT SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Muhammet DORUK

2016, 381 Sayfa

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Ayrıca, bu süreçleri ayrıntılı olarak açıklayabilmek için öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri ve analizin temel tanımlarını anlama şekilleri incelenmiştir.

Çalışmanın araştırma grubunu 2013-2014 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında, bir devlet üniversitesinin üçüncü sınıfında öğrenim gören sekiz ilköğretim matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Çalışmanın pilot uygulaması ise 2013-2014 eğitim öğretim yılının güz yarıyılında, aynı üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün son sınıfında öğrenim gören 10 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Araştırma grubu, amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemiyle seçilmiştir.

Nitel araştırma yaklaşımının benimsendiği çalışmanın verileri, Matematiksel İspata Yönelik Görüşme Formu (MİYGF) ve dört adet etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. MİYGF yardımıyla öğretmen adaylarının ispatın anlamı, amacı, önemi, faydaları, başarılı olunan ispatlar, ispatları öğrenme yöntemleri, doğru ispatın özellikleri, kendilerini matematiksel önermelerin doğruluğuna ikna olmak ve başkalarını ikna etmek için kullandıkları gerekçeler hakkında görüşleri alınmıştır. Etkinlik temelli mülakatlar ile öğretmen adaylarının sırasıyla analizin temel konuları olan “fonksiyonlar”, “diziler”, “limit ve süreklilik” ve “türev” konularındaki temel tanımları anlama şekilleri, argümantasyon ve ispat süreçlerine yönelik becerileri incelenmiştir. Her etkinlik temelli mülakatta başkası tarafından yapılan ispatların doğruluğunu değerlendirme, matematiksel önermelerin doğruluğunu belirleme, ispat yapma ve problem çözme etkinlikleri yer almaktadır. Öğretmen adaylarının argümantasyon süreçlerini ortaya çıkarabilmek adına öğretmen adaylarının matematiksel önermelerin doğruluğuna ikna olmak ve matematiksel iddialarını savunmak için ürettikleri tüm argümanlar Toulmin modeline göre analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat süreçlerine yönelik ispat değerlendirme ve ispat/ters örnek üretme becerileri incelenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasındaki ilişki yapısal olarak analiz edilmiştir.

Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının tamamının ispatın anlamı, amacı ve önemine yönelik olumlu görüşlere sahip olmalarına karşın, öğretmen adaylarının bir kısmı öğrendikleri ispatların kendilerine faydalı olmadığı ve ispatların öğretiminin anlamsız olduğunu ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının bir kısmı da matematiksel iddialarının doğruluğuna ikna olmak ve matematiksel iddialarını savunmak için informel yollara başvurduklarını belirtmişlerdir. Bazı öğretmen adayları analizin temel konularındaki tanımları kavramsal olarak anlamakta güçlük yaşamışlardır. Bu güçlüklerin öğretmen adaylarının tanımlarda yer alan topolojik kavramların ve sembollerin anlamını bilmemelerinden ya da yorumlayamamalarından kaynaklandığı belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının argümantasyon süreçlerinde ürettikleri argümanların analizi sonucunda, kendilerini ve başkalarını bir matematiksel önermenin doğruluğuna ikna etmek için kullandıkları gerekçelerin bir sınıflaması elde edilmiştir. Elde edilen bu gerekçelerin dışsal, referanssız, deneysel, görsel ve dedüktif olmak üzere beş ana kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının başkası tarafından yapılan ispatları değerlendirmede, önermelerin doğruluk değerini belirlemede ve ispat veya ters örnek üretmede güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Yaşanılan güçlükler ile ispata yönelik görüşlerin ve analizin temel konularındaki tanımları anlayış şekillerinin ilişkili olduğu ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçleri arasındaki ilişkinin yapısal incelenmesi sonucunda, iki süreç arasındaki yapısal boşluk ve spontane sürekliliğin geçerli bir ispat yapmanın önündeki engellerden biri olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının iki süreci arasındaki yapısal süreklilik ise ispatlama sürecini kolaylaştırmıştır. Ayrıca çalışma sonucunda öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri, analizin temel konularına yönelik kavramsal bilgileri, ilgili derslerden elde ettikleri akademik başarıları, argümantasyon ve ispat süreçleri birbiri ile karşılaştırılarak elde edilen örüntüler sunulmuştur. Çalışma sonunda üniversite düzeyinde analiz derslerinin öğretiminden sorumlu öğretim elemanları ve konu ile ilgilenen araştırmacılar için önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel argümantasyon, matematiksel ispat, argümantasyon ile ispat arasındaki ilişki, Toulmin modeli, matematik eğitimi.

ABSTRACT

DOCTORAL DISSERTATION

INVESTIGATION OF PRESERVICE ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHERS' ARGUMENTATION AND PROOF PROCESSES IN DOMAIN OF ANALYSIS

Muhammet DORUK

2016, 381 pages

In this study, it was aimed to reveal out the preservice elementary mathematics teachers' argumentation and proof processes in the domain of analysis. The views of preservice teachers about proof and their ways of understanding the basic definitions of the domain of analysis were also studied in order to be able to explain these processes in details.

The research group of the study consisted of eight preservice elementary mathematics teachers who were studying their third year in the spring term of the 2013-2014 academic year at the state university. The pilot study was performed with 10 preservice elementary mathematics teachers who were studying their final year in the fall term of the 2013-2014 academic year in the same university. The members of the research group were selected according to the criterion sampling method that is among the purposeful sampling methods.

The data of the study which adopted qualitative research approach were obtained through the Mathematical Proof Interview Form (MPIF) and four task-based clinical interviews. Through the MPIF, information was obtained regarding the preservice teacher' views about the meaning, purpose, significance and benefits of proof, successful proofs, the ways to learn the proofs, characteristics of a valid proof and the warrants they used to get themselves and the others convinced about the accuracy of a mathematical proposition. Task-based interviews were made to study the preservice teachers' ways of understanding the basic definitions in the fields of "functions", "sequences", "limit and continuity" and "derivatives" and to learn about their skills in the argumentation and proof processes. Each task-based interview included the analysis of the proofs asserted by others, assessment of the accuracy of the mathematical propositions, proving and problem solving activities. In order to reveal out the

argumentation processes of the preservice teachers, the Toulmin model was used to analyze the arguments created by the preservice teachers in order to get convinced about the accuracy of the mathematical propositions and to justify their mathematical claims. Proof assessment and generating proof/counterexample skills of the preservice teachers were studied to gain information about their proving processes. Furthermore; the relationship between the argumentation processes and proof processes of the preservice teachers was studied in terms of its structure.

Although all the preservice teachers had positive views on the meaning, purpose and significance of proof at the end of the research, some of them expressed that; the proofs they had learnt had no use for themselves and that, proof teaching was pointless. Some preservice teachers stated that; they were referring to informal methods to get convinced about the accuracy of mathematical propositions and to justify their mathematical propositions. Some preservice teachers had difficulties in understanding the conceptual structure of the definitions of the basic subjects of analysis. These difficulties were found to be arising from the fact that; the preservice teachers either did not know the meanings of the topological concepts and the symbols included in the definitions or they were unable to interpret those. The analysis of the arguments created by preservice teachers during the argumentation processes revealed out a classification of the warrants they were using to get themselves and the others convinced about the accuracy of a mathematical proposition. These warrants were observed to be classified under five basic categories as; external, non-referential, experimental, visual and deductive. Preservice teachers were found to experience difficulties in assessing the proofs made by the others, assessing the accuracy of the propositions and in generating proofs or counterexamples. The difficulties experienced were found to be related to the views about proof and the ways of understanding the definitions of the basic subjects of analysis field. The structural analysis of the relationship between the argumentation and proving processes of the preservice teachers in domain of analysis indicated the structural gap between the two processes and the spontaneous continuity as the obstacles preventing the generating of a valid proof. On the other hand; the structural continuity between the two processes of the preservice teachers facilitated the proof process. At the end of the research, preservice teachers' views about proof, their conceptual knowledge about the basic subjects of analysis, their academic success in relevant lessons, and their argumentation and proof processes were compared with each other, and the resultant patterns were presented. Finally; suggestions were given for the academicians who were lecturing in analysis lessons in the universities and for the researchers who were interested in this subject.

Keywords: Mathematical argumentation, mathematical proof, the relationship between argumentation and proof, Toulmin model, mathematics education.

ÖNSÖZ

Bu araştırmayı yaparken bana yol gösteren, her aşamasında fikirleriyle beni yönlendiren ve bana duyduğu güveni her zaman hissettiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah KAPLAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışmamın her aşamasında bana zaman harcayarak değerli görüşlerini benimle paylaşan ve araştırma konumun seçiminde bana yardımcı olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Gürsel GÜLER'e şükranlarımı sunarım.

Üzerimde emekleri olan ve akademik hayata başlamama vesile olan başta yüksek lisans danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Seyyid SEYYİDOĞLU olmak üzere, Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde görev yapan hocalarıma sevgi ve saygılarımı sunarım.

Çalışmam sırasında her zaman desteğini gördüğüm kıymetli hocalarım Sayın Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ'a, Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN'e, Doç. Dr. Alper Cihan KONYALIOĞLU'na, değerli arkadaşlarım Dr. Yusuf ZORLU ve Dr. Çetin YILDIZ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Beni hayatım boyunca destekleyen, güvenen ve varlıkları ile bana güç veren anneme, babama ve kardeşlerime minnettarım. Özellikle ağabeyim Güven DORUK'a hayatımın her anında bana verdiği maddi ve manevi destek için teşekkür ederim.

Sıkıntılı anlarımda yanımda olan ve beni sabır ile destekleyen sevgili eşim Gül DORUK'a gösterdiği anlayış için teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı tarafından desteklenmiştir. Bu nedenle TÜBİTAK'a desteğinden dolayı teşekkür ederim.

Erzurum-2016 **Muhammet DORUK**

İÇİNDEKİLER

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

KISALTMALAR DİZİNİ

MEB	: Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics
TDK	: Türk Dil Kurumu
MAA	: Mathematical Association of America
AMS	: American Mathematical Society

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

"Geçerli argümanlar ya da ispatlar üretme ve argümanların kritik edilmesi matematik yapmanın ayrılmaz parçalarıdır. Eğer muhakeme becerileri öğrencilere kazandırılmazsa o zaman matematik, bir işlem dizisini takip etmek ve anlamını düşünmeden örnekleri taklit etmek olur (Ross, 1998)."

Matematiğin konusu; sayılar, şekiller, kümeler, fonksiyonlar ve uzaylar gibi soyut kavramlar ve bunların arasındaki işlemlerdir. Matematikçi bu varlıkların yapılarını inceler ve bunlarla ilgili genellemeleri ortaya çıkarır (Altun, 2013a). Genellemelerin üretilmesinde izlenen yol matematiğe hastır ve ispatlama olarak adlandırılır. Bir matematikçi geneli ilgilendiren düşünceyi kanıtlamaya çalışır ve bu düşünce tüm örnekler için geçerli olur (Altun, 2014). İspat, bir yargı sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2014). Matematiksel ispat, ispatı yapan kişinin varsayımlar, aksiyomlar, tanımlar gibi önceki bilgiler ile sunduğu ve arzu edilen sonuca ulaşılıncaya kadar teoemlerin uygulanması ve önceki elde edilen gerçeklerin hatırlanması gibi çıkarım kurallarının uygulanmasının istendiği matematiksel bir aktivitedir (Weber, 2005). Matematiksel ispat bir sonucu doğrulamak, iletişim kurmak ve diğerlerini bu sonuca ikna etmek, bir sonuç keşfetmek ve sonuçları dedüktif bir sistem içine yerleştirmek için kullanılır (Almeida, 2003).

Özel bir problem çözme aktivitesi olan matematiksel ispatlar (Furinghetti ve Morselli, 2009; Shipley, 1999), matematiği daha anlamlı öğrenmenin bir yoludur (Hersh, 1993; Tucker, 1999). Öğrenciler matematiksel önermelerin ispatlarını yaparlarken bir yandan formülleri son halleri ile bilmenin yeterli olmadığını, ulaşılan sonuçların nedenleri ile birlikte açıklanması gerektiğini öğrenirler (Güven, Çelik ve Karataş, 2005). Matematiksel ispatlar bir ifadenin sadece doğru olduğunu değil aynı zamanda neden doğru olduğunu açıklar (Tall, 1998). Ayrıca matematiksel ispatlar, öğrencilerin karşılaştıkları problemlerin çözümü için yöntem, strateji, araç ve kavramlar sunar (Mariotti ve Balacheff, 2008; Rav, 1999). Matematiksel ispatlar bünyesinde barındırdığı fonksiyonlarla, matematiğin sistemli bir bilim olmasına, matematiksel bilgilerin iletilmesine ve yeni sonuçların keşfedilmesine katkı sağlar (Hanna, 2000). Bu açıdan ispat hem matematiğin hem de matematik eğitiminin önemli bir elemanıdır (Güven vd., 2005).

Bir ispat sadece sonuçların doğruluğunu gösterdiği için değil aynı zamanda matematikte geniş olarak uygulanabilen ve yeni matematiksel yollar açan metotlar, araçlar, stratejiler ve kavramlar sunması açısından değerlidir (Hanna ve Barbeau, 2008). İspatların matematikteki bu değerine vurgu yapmak isteyen araştırmacılar, ispatlara değişik anlamlar yüklemişlerdir. Hanna ve Barbeau (2008) ispatların matematiksel iddiaların doğruluğunu ortaya koyduğu için matematiğin merkezinde yer aldığının kabul edildiğini ifade etmişlerdir. Bazı araştırmacılara göre matematiksel ispat, matematiğin (Güven vd., 2005) ve matematik öğreniminin (Coe ve Ruthven, 1994) kalbi, matematiğin ruhu (Schoenfeld, 2009) ve matematiğin özüdür (Ross, 1998).

Üniversite seviyesindeki neredeyse tüm matematik derslerinde ispata merkezi bir yer verilmesine ve matematiğe özel bir bileşen olmasına rağmen birçok çalışma öğrencilerin ispatları anlamada, değer vermede ve üretmede zorluk yaşadıklarını göstermiştir (Jones, 2000; Weber, 2001). İspat okuma ve ispat yazma üniversite matematiğinin karakteristik temel özelliklerinden biridir (Almeida, 2003). Matematik öğretmeni adayları ispat ağırlıklı birçok üst düzey matematik dersleri almalarına karşın ispatla ilgili bu tarz etkinliklerde başarısızlık yaşamaktadırlar (Doruk ve Kaplan, 2015a, 2015b; Riley, 2003; Selden ve Selden, 2003; Zaslavsky ve Peled, 1996). Hem lise hem de üniversite seviyesindeki öğrenciler, sadece ispat yapmada değil aynı zamanda bir ispatın ne olduğunu tanımada bile zorluk çekmektedirler (Chazan, 1993; Moore, 1994).

Üniversite seviyesindeki öğrencilerin matematiksel ispata yönelik başarısızlıklarının sebebini araştıran araştırmacılar, çalışmalarını farklı noktalara odaklanarak yürütmüşlerdir. Bazı araştırmacılar öğrencilerin ispata yönelik görüşlerinin sınırlı olduğunu (Doruk ve Güler, 2014) ve ispata yönelik olumsuz duyguların onların ispat yapma aktivitelerindeki başarılarını etkilediğini (Furinghetti ve Morselli, 2009) belirtmiştir. Bazı araştırmacılar da öğrencilerin bilişsel anlamdaki eksikliklerinin onların ispatlama süreçlerinde karşılaştıkları bir güçlük olduğunu ifade etmişlerdir (Doruk ve Kaplan, 2015b; Güler, 2013; Moore, 1994, Selden ve Selden, 2003; Weber, 2001, 2008). Örneğin Moore (1994) üniversite öğrencilerinin ispata yönelik güçlüklerinin kavram anlayışı, matematiksel dili ve notasyonları kullanma ve ispata başlama olmak üzere üç ana başlık altında toplandığını tespit etmiştir. Bazı araştırmacılar ispatların öğretim yönteminin ispatın doğasına aykırı olduğunu ifade etmişlerdir (Almeida, 2000, 2003; Weber, 2004). Üniversiteki matematik derslerinin işlenişinde kullanılan öğretim yönteminin öğrencileri pasifleştirdiğini (Weber, 2004) ve böylece öğrencilerin ispatla ilgili aktiviteleri yapabilmek için gerekli anlayıştan uzak kaldıkları belirtilmiştir (Alcock ve Weber, 2005; Selden ve Selden, 1995). Öğrencilerin de ispatların öğretim yönteminden kaynaklı olarak, ispatları anlamak yerine ezberleme yöntemini benimsedikleri belirlenmiştir (Baştürk, 2010; Conradie ve Frith, 2000; Doruk ve Kaplan, 2013b).

Son dönemdeki araştırmacıların bazıları da öğrencilerin ispat yapmaya başlamadan önce girdikleri varsayım oluşturma sürecine odaklanmışlardır (Douek, 1999; Garuti, Boero ve Lemut, 1998; Martinez ve Pedemonte, 2014; Nardi, Biza ve Zachariades, 2012; Pedemonte ve Buchbinder, 2011; Pedemonte ve Reid, 2011). Bu süreçte öğrenciler, kendilerinden ispatlanması ya da yanlışlanması istenen önermenin doğruluk değerini bulmak için zihinsel bir sürece girerler. Bu sürecin sonunda öğrenciler kendilerini önermenin doğru ya da yanlış olduğuna ikna ederler. Öğrencilerin bu varsayım üretme sürecine argümantasyon süreci denilmektedir. Argümantasyon sürecinden sonra önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermek, başka bir ifade ile matematiksel bir topluluğu da verdiği karara ikna edebilmek için ürün üretme süreci başlar. Bu ürün üretme sürecine ispat süreci denir. Aslında ispatlar argümantasyonun özel bir halidir (Pedemonte, 2007). Argümantasyon bir ya da birkaç argümanın mantıksal olarak zincirlenmesi ile oluşan bir süreçtir (Douek, 1998). Argüman ise bir kişinin bir şeyin doğru ya da gerçek olduğunu göstermek için kullandığı sebep ya da sebepler olarak tanımlanmıştır (Oxford advenced learner dictionary, 2010). Argümanlar sözel ifadeler, sayısal veriler, çizimler *vb.* içerebilir (Douek, 1998). Buradan da anlaşıldığı gibi argümantasyondaki gerekçelerin ispatlardaki gibi formel, dedüktif bir yapıda olması zorunlu değildir.

Araştırmacılar bir matematiksel önermenin ispatından önceki argümantasyon süreci ile sonrasındaki ispatlama sürecini öncelikle içerik açısından incelemişlerdir (Douek, 1999; Garuti vd., 1998). Bu hipotezi bilişsel bütünlük hipotezi ile adlandırmışlardır. Bilişsel bütünlük hipotezine göre öğrenciler önermelerini ispatlarken daha önceden mantıksal olarak ürettikleri argümanları düzenleyerek kullanırlar (Garuti vd., 1998). Bu hipotezin iki süreç arasındaki ilişkiyi açıklamada yetersiz kaldığını gören araştırmacılar, iki süreç arasındaki ilişkiyi yapısal olarak incelemişlerdir (Inglis Mejia-Ramos ve Simpson, 2007; Knipping, 2008; Martinez ve Pedemonte, 2014; Nardi vd., 2012; Pedemonte, 2008; Pedemonte ve Buchbinder, 2011; Pedemonte ve Reid, 2011). Yapılan araştırmaların sonucunda matematiksel argümantasyon ile ispatın iç içe olduğu ve aralarında sıkı bir ilişki olduğu tespit edilmiştir (Douek, 1999; Garuti vd., 1998; Pedemonte, 2007).

Öğrencilerin karşılaştıkları bu zorlukları anlayabilmek için matematiksel ispatı bir ürün olarak değil bir süreç olarak değerlendirerek bu süreçte neler yaşandığını anlamak gerekmektedir. İspatlama süreci sınıfta üretilen ya da ders kitabında sunulan yazılı metinlerle kavranamaz. Çünkü bu şekildeki son ürün, ispatlama sürecinden hiçbir iz taşımaz (Mariotti ve Balacheff, 2008). Öğrencilerin ispat süreçlerini anlayabilmek için argümantasyon süreçlerinin de dikkate alınması gerekmektedir (Dinçer, 2011).

1.1. Problem Durumu

Matematik, kavramları arasında anlamlı ilişkiler bulunan, kendine özgü sembolleri ve terminolojisi bulunan evrensel bir dildir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013a). Matematiksel kavramlar arasında bulunan ilişkileri araştırıp genellemelere ulaşmak, matematik yapmanın bir parçasıdır. Genellemelerin üretilmesinde izlenen yol matematiğe hastır ve ispatlama olarak adlandırılır (Altun, 2013a). Elde edilen bu genellemeler ile yeni matematiksel bilgilere ulaşılır. Matematikçiler bir matematiksel ifadenin doğru olduğuna ispat yardımıyla karar verirler. Matematiksel sonuçlar ancak dikkatli bir şekilde ispatlandıktan sonra geçerli kabul edilir (Ross, 1998). Çünkü matematikçinin gözünde doğruluğun ölçütü olgusal kanıtta değil mantıksal ispatta aranmalıdır (Yıldırım, 2014).

Doğru matematiksel bilgilere ulaşmak, matematik öğrenimi için de önemli bir durumdur. Matematik öğretimi üzerine etkin iki kuram olan Yapılandırmacı Öğrenme Kuramı ve Gerçekçi Matematik Eğitimi bilgiyi, bireyin kendisinin oluşturduğu düşüncesini benimsemiştir (Altun ve Yılmaz, 2010). Bilişsel Yapısalcı Kuram'a göre bilgi bir adaptasyon süreci sonucunda elde edilir ve bu bilgi edinimi bireyin kendisi tarafından gerçekleştirilir (Altun, 2014). Buna göre, öğrencilerin yeni matematiksel bilgilerini önceki öğrenmeleri ile yapılandırarak elde ettikleri söylenebilir. Çünkü birey yeni öğrendiği bilgiyi zihnindeki şemalara uyarlamakta (özümseme), uyarlayamıyorsa şemaları yenileyip (düzenleme) geliştirmektedir (Altun, 2014). Öğrenciler kendilerine yöneltilen matematiksel iddiaları sorgulamadan doğru kabul ederlerse, yanlış matematiksel bilgileri geçerli bilgiler olarak kabul etmeleri ve zihinlerinde yapılandırmaları muhtemeldir. Yanlış matematiksel bilgilerin üzerine inşa edilecek yeni bilgilerin de sağlıklı bilgiler olamayacağı açıktır. Bu yüzden öğrencilerin doğru matematiksel bilgiye ulaşmak adına matematiksel bilgilerin doğruluğunun nasıl sorgulanacağı konusunda bilgili olmaları gerekmektedir. Çünkü matematik bilme ihtiyacının ürünü, bir düşünme ve doğruyu arama uğraşıdır (Altun, 2013b).

Epistemik açıdan bir kişi, bir önermenin doğruluğu hakkında kendini ya da başkasını ikna etmek istediği zaman argümantasyonlar ve ispatlar ortaya çıkar (Chazan 1993; De Villiers 1999; Healy ve Hoyles 2000). Matematiksel argümantasyonlar ve ispatlar doğrulama aktiviteleridir (Pedemonte, 2007). Argümantasyon matematiksel bir ifadenin doğruluğu üzerindeki şüpheyi azaltırken ispat bu şüpheyi tamamen ortadan kaldırmaktadır (Inglis vd., 2007). Yapılan araştırmalarda matematiksel bir önermenin ispatlanmasından önce önermenin doğruluk değerini belirlemek için geçirilen argümantasyon süreci ile ispat sürecinin birbiri ile ilişkili olduğu tespit edilmiştir (Garuti vd., 1998; Martinez ve Pedemonte, 2014; Nardi vd., 2012; Pedemonte ve Buchbinder, 2011; Pedemonte ve Reid, 2011).

Matematikçiler matematiksel bilgileri oluştururken sezgi, deneme, yanılma, tahmin, varsayım, ispat zincirini takip etmektedirler (Almeida, 2003). Buradan matematikçilerin ispatlama sürecinde argümantasyon sürecine girdikleri söylenebilir. Matematikçilerin izledikleri yöntem argümantasyon sürecini içermesine rağmen özellikle üniversite seviyesindeki matematik derslerinin öğretimi sırasında bu zincirinin sadece son basamağına odaklanıldığı belirtilmiştir (Almeida, 2000). Almeida (2003) matematikçilerin takip ettiği bu zincirin ispat öğretiminde de yer alması gerektiğini ifade etmiş ve böylelikle öğrencilerin ispatların gerekliliğini keşfetme fırsatının olacağını dile getirmiştir. Baykul (2014) da, aksiyomlar ve teoremler halinde verilmiş olan matematikteki prensiplerin, öğrenciler tarafından ilk defa bulunuyormuşçasına görülmesi ve sezilmesinin, matematik öğretiminde matematiğin yapısı yönünden göz önüne alınacak önemli hususlar arasında yer aldığını belirtmiştir. Bu zihinsel süreçler yaşanmaz, ispat öğretimi ders hocasının yaptığı ispatların kopyalanması şeklinde olursa (Alcock ve Weber, 2005; Selden ve Selden, 1995), öğrenciler kendilerine yöneltilen matematiksel iddiaları sorgulamadan kabul ederler ve dolayısıyla otoriter bir öğrenme alışkanlığının kapıları açılmış olur.

Geçerli argümanlar ya da ispatlar üretme ve argümanların kritik edilmesi, matematik yapmanın ayrılmaz parçasıdır. Muhakeme becerileri öğrencilere kazandırılmazsa o zaman matematik bir işlem dizisini takip etmek ve anlamını düşünmeden örnekleri taklit etmek olur (Ross, 1998). Bu aktivitelerin öneminin farkında olan bazı kuruluşlar ortaokuldan üniversite düzeyine kadar tüm öğrencilerin doğru matematiksel bilgilere ulaşmaları için bu süreçlere girmelerini önermiştir (American Mathematical Society [AMS], 2001; Mathematical Association of America [MAA], 2004; MEB, 2013a, 2013b; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Örneğin, MEB (2013a) ortaokul öğrencilerinin "mantıklı çıkarımlarda ve genellemelerde bulunmalarını" ve "çıkarımların doğruluğunu ve geçerliğini savunabilmelerini" istemektedir. Buradan ortaokul öğrencilerinin matematiksel iddiaların doğruluğunu değerlendirebilmeleri ve doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını da savunmalarının istendiği söylenebilir. Ortaokul öğrencilerine bu becerilerin kazandırılmasında hiç şüphesiz ilköğretim matematik öğretmenlerine büyük sorumluluk düşmektedir. İlköğretim matematik öğretmenlerinin öncelikle kendilerinin matematiksel argümanların nasıl değerlendirileceği, matematiksel önermelerin doğruluğunun nasıl belirleneceği ve doğru olduğunu düşündükleri matematiksel önermelerin doğruluğunu nasıl göstereceklerine yönelik bilgili olmaları gerekmektedir. Bu nedenle ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının söz konusu becerilere sahip olup olmadıkları ayrıntılı bir şekilde incelenmelidir. Bu çalışmada da ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç kapsamında öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçleri ayrı ayrı ortaya çıkartılmış, daha sonra iki süreç arasındaki ilişki yapısal olarak analiz edilmiştir. Ayrıca çalışmada, öğretmen adaylarının analizin temel tanımlarını anlayış şekilleri ve ispata yönelik görüşleri incelenerek öğrencilerin argümantasyon ve ispat süreçleri arasındaki örüntüler keşfedilmeye çalışılmıştır.

1.1.1. Problem cümlesi

Bu araştırmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerini inceleyerek bu süreçler arasındaki örüntüleri ortaya çıkarmaktır. Bu amaç doğrultusunda "İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçleri nasıldır?" sorusuna yanıt aranmıştır. Bu genel araştırma sorusunu ayrıntılı bir şekilde cevaplayabilmek için aşağıda belirtilen alt problemlerin yanıtları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

1.1.2. Alt problemler

1. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşleri nasıldır?
2. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analizin temel tanımlarına yönelik anlayışları nasıldır?
3. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon süreçleri nasıldır?
    3.1. İlköğretim matematik öğretmeni adayları, analiz alanındaki önermelerin doğruluğuna ya da yanlışlığına nasıl ikna olmaktadırlar?
    3.2. İlköğretim matematik öğretmeni adayları, analiz alanında doğru olduğunu bildikleri matematiksel iddiaları nasıl savunmaktadırlar?
4. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki ispat süreçleri nasıldır?
    4.1. İlköğretim matematik öğretmeni adayları analiz alanında, başkası tarafından yapılmış ispatları nasıl değerlendirmektedirler?
    4.2. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki ispat ve ters örnek üretme becerileri nasıldır?

5. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ile ispatlama süreçleri arasında nasıl bir ilişki vardır?

1.2. Çalışmanın Amacı ve Önemi

Bu araştırmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanı kapsamında argümantasyon ve ispat süreçlerini inceleyerek bu iki süreç arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmaktır. Ayrıca, öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri ve analizin temel konuları ile ilgili kavramsal bilgileri incelenerek söz konusu süreçler ile olan ilişkisi bütüncül bir şekilde değerlendirilmeye çalışılmıştır. Yapılan literatür incelemesi sonucunda, öğretmen adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerini bütüncül bir şekilde inceleyen bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu anlamda çalışmanın literatüre önemli katkıları olacağı düşünülmektedir. Çalışmanın literatüre yapacağı düşünülen katkılardan bir kaçı aşağıda sıralanmıştır.

❖ Çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel bir iddiaya nasıl ikna oldukları ve matematiksel iddialarını nasıl savundukları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bunun için öğretmen adayları tarafından çalışma boyunca üretilen tüm argümanlar analiz edilmiştir. Analizlerin sonucunda öğretmen adaylarının ürettikleri argümanlarda kullandıkları gerekçelerin "gerekçe tipleri" adı altında bir sınıflandırmasını elde etmek amaçlanmıştır. Inglis ve diğerleri (2007), Harel ve Sowder (1998) tarafından ortaya atılan ispat şemasından yararlanarak "indüktif, dedüktif, yapısal-sezgisel" gerekçe tiplerini belirlemişlerdir. Knipping (2008) ise lokal argümanları kavramsal ve görsel olmak üzere iki gruba ayırmıştır. Bu çalışmada da literatürdeki ispat sınıflandırma çalışmaları (Harel ve Sowder, 1998, 2007; Ko ve Knuth, 2009) dikkate alınarak mevcut gerekçe tiplerini de içine alacak, kullanışlı bir sınıflandırmanın elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu anlamda yapılan çalışmanın yeni bir sınıflandırma üretecek olması alana yenilik getirecektir. Öğrencilere verilen bir argümanın anlaşılması ve öğrencilerin anlayışlarını yansıtan argümanların sunumu üzerine az sayıda çalışma mevcuttur. Bu iki aktivite öğrencilerin ispatlama becerilerinin değerlendirilmesinde iki anahtar aktivitedir (Mejia-Ramos ve Inglis, 2009). Türkiye'de üniversite seviyesindeki öğrencilerin argümantasyon süreçlerini inceleyen sadece bir tane çalışma mevcuttur (Dinçer, 2011). Dinçer (2011) çalışmasında analiz dersinde, sınıf ortamında üretilen argümanların analizine odaklanmıştır. Bu çalışmada ise öğrencilerin bireysel olarak, matematiksel önermelere ikna olmak ve onları savunmak adına girdikleri argümantasyon süreci incelenmiştir. Bu anlamda çalışma, Dinçer (2011) tarafından yapılan çalışmadan ayrılmaktadır.

❖ Çalışmada öğrencilerin analiz alanındaki ispatlama süreçleri incelenmiştir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki ispat süreçleri kapsamında ispata yönelik görüşleri, başkası tarafından yapılan ispatları nasıl değerlendirdikleri, ispat ve ters örnek üretme becerileri incelenmiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispat değerlendirme ve ispat üretme sürecinde ne yaşadıkları ayrıntılı olarak betimlenmeye çalışılmıştır. Bazı araştırmacılar öğrencilerin ispata yönelik görüşlerinin ve kavramsal bilgi eksikliklerinin ispatlama süreçlerini etkilediğini tespit etmişlerdir (Doruk ve Kaplan, 2015a; Furinghetti ve Morselli, 2009; Moore, 1994). Bazı araştırmacılar da farklı düzeyde akademik başarıya sahip öğrencilerin ispatlama süreçlerini incelemişlerdir (Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Weber, 2001, 2009). Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispatlama süreçleri ile ilişkili olduğu belirtilen ispata yönelik görüş, kavramsal bilgi ve akademik başarı faktörleri dikkate alınmıştır. Bu sayede öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde neler yaşadıkları, karşılaştıkları güçlükler ve sebepleri hakkında detaylı bilgi edinilmesi amaçlanmıştır. Bu konuda Weber (2001) öğrencilerin ispat yaparken yaptıkları hataları anlayabilmek için öğrencilerin ispatlama süreçlerinin incelenmesinin gerekli olduğunu ifade etmiştir.

❖ Çalışmada argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişki yapısal olarak incelenmiştir. Mevcut çalışmalara göre argümantasyon ile ispat arasındaki ilişki iki şekilde incelenebilmektedir. Bu incelemelerden ilki bilişsel bütünlük hipotezine dayanmaktadır (Garuti vd., 1998). Bilişsel bütünlük hipotezinin söz konusu ilişkiyi açıklamada yetersiz kaldığını düşünen araştırmacılar iki süreç arasındaki ilişkiyi yapısal olarak analiz etmişlerdir (Pedemonte, 2007). Bu çalışmaların bir kısmı geometri alnındaki (Pedemonte, 2007; Pedemonte ve Reid, 2011), bir kısmı cebir alanındaki (Martinez ve Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2008) bir kısmı da sayılar teorisi alanındaki (Pedemonte ve Buchbinder, 2011) argümantasyon ve ispat arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Analiz alanında yapılan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Yapılan araştırmalarda iki süreç arasındaki yapısal ilişkinin "abdüktif, dedüktif ve indüktif" olmak üzere üç yapı üzerinden analiz edildiği görülmüştür. Çalışmadan elde edilecek yeni gerekçe tipleri ile bu analizlerin daha detaylı yapılabilmesi sağlanacaktır. Bu sayede öğrencilerin argümantasyon ile ispat süreçleri hakkında daha fazla bilgi elde edilebilecektir. Yapılan literatür incelemesi sonucunda Türkiye'de bu alanda herhangi bir çalışma bulunmadığından (Güneş, 2013) çalışmadan elde edilen sonuçlar önemli olacaktır. Ayrıca bu çalışmanın gelecekte yapılacak çalışmalar için referans olması beklenmektedir.

❖ Çalışmada öğretmen adaylarının ürettikleri tüm argümanlar Toulmin modeline göre analiz edilmiştir. Daha önceki çalışmalarda Toulmin modeli, analiz dersinde ortaya çıkan tartışmaların analizinde kullanılmıştır (Dinçer, 2011). Dinçer'in (2011) çalışmasının önemli sonuçlarından biri, Toulmin modelinin matematik lisans derslerindeki ispat sürecinde, tanım kurma sürecinde ve problem çözme sürecinde oluşan argümantasyonların analizinde kullanılabileceğini göstermesidir. Bu doktora tez çalışmasında da öğretmen adaylarının analiz alanında kendini ve başkalarını ikna etmek adına ürettikleri argümanların Toulmin modeline göre nasıl analiz edilebileceği konusunda bilgi sunulmaktadır. Ayrıca çalışmada Toulmin modelinin öğretmen adaylarının kendilerinde bulunan hataların ve kavram yanılgılarının tespit edilmesinde bir araç olarak kullanılacak olması önemlidir.

❖ Çalışma analiz alanına özeldir. Öğretmen adaylarının analizin temel konularında bulunan tanımlara yönelik anlayış şekilleri incelenmiştir. Öğretmen adaylarının analiz alanında yaşadıkları güçlükler ortaya çıkarılmıştır. Bu anlamda çalışmanın analiz dersinden sorumlu olan öğretim elemanlarına ve öğrencilere yardımcı olacağı düşünülmektedir.

❖ Çalışma ispata yönelik farklı görüşleri olan ve akademik başarı düzeyleri farklı olan öğretmen adayları ile yürütülmüştür. Bu çalışma, başarılı olan öğrencilerin matematiksel önermelere nasıl yaklaştığı, ne tür argümanlar ürettikleri, ispatları nasıl değerlendirdikleri ve ispatlarda nasıl başarılı oldukları hakkında bilgiler içermektedir. Bu sayede çalışmanın üniversite öğrencilerinin kendilerini sorgulaması adına yararlı olacağı düşünülmektedir.

1.3. Varsayımlar

Araştırmaya katılan matematik öğretmeni adaylarının veri toplama araçlarını samimi, içten ve dışsal hiçbir faktörün etkisi altında kalmadan cevapladıkları kabul edilmektedir.

1.4. Sınırlılıklar

1. Araştırma, nitel araştırma yaklaşımı benimsenerek Türkiye'nin Doğru Anadolu Bölgesi'nde yer alan bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesinde öğrenimlerine devam eden sekiz ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Öğretmen adayları akademik başarı düzeylerine göre çok başarılı ve orta düzey başarılı olan iki gruptan dörder öğrencidir. Bu sayede öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçlerine yönelik daha zengin ve anlamlı bilgiler elde edilebileceği düşünülmüştür. Öğretmen adayları ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu şekilde daha derinlemesine bilgi elde edileceği düşünülmüştür. Bu çalışmanın sonuçları hem nitel araştırma yaklaşımının kendisinde bulunan sınırlılığından hem de çalışma grubunun özelliklerinde dolayı diğer üniversitelerde öğrenim gören öğretmen adaylarına genellenemez.
2. Araştırmada öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçleri matematiğe özel alanlardan biri olan analiz alanında incelenmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçlar; cebir, sayılar teorisi, geometri gibi diğer alanlarda yapılan çalışmalarla farklılık gösterebilir. Bu anlamda araştırmanın sonuçları analiz alanı ile sınırlıdır.
3. Öğretmen adaylarının argümantasyon süreçlerinin analizi, klinik mülakatlarda yer alan kavramlarla ilgili önermeler ve problemler ile sınırlıdır.
4. Öğretmen adaylarının ispatlama süreçlerinin analizi, klinik mülakatlarda sunulan başkası tarafından yapılan ispatlar ve önermeler ile sınırlıdır.
5. Öğretmen adaylarının argümantasyon ile ispat süreci arasındaki yapısal ilişkinin analizi, mülakatlarda yer alan kavramlar ile ilgili önermeler ile sınırlıdır.

1.5. Tanımlar

İspat: Bir yargı sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2014).

Matematiksel İspat: İspatı yapan kişinin varsayımlar, aksiyomlar, tanımlar gibi önceki bilgiler ile sunduğu ve arzu edilen sonuca ulaşılıncaya kadar teoremlerin uygulanması ve önceki elde edilen gerçeklerin hatırlanması gibi çıkarım kurallarının uygulanmasının istendiği matematiksel bir aktivitedir (Weber, 2005).

Argüman: Bir kişinin, bir şeyin doğru ya da gerçek olduğunu göstermek için kullandığı sebep veya sebepler (Oxford advenced learner's dictionary, 2010).

Argümantasyon: Bir şeyi açıklamak ya da insanları ikna etmek için kullanılan argümanlar dizisi (Cambridge advenced learner's dictionary, 2013).

Akıl yürütme (Muhakeme): Eldeki bilgilerden hareketle, matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, *vb.*) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, *vb.*) kullanarak yeni bilgiler elde etme sürecidir (MEB, 2013a).

Tümevarım (endüksiyon): Örneklerden ve özel durumlardan hareketle genelleme, ilke ve kanunlara ulaşılması (Baykul, 2014).

Tümdengelim (dedüksiyon): Genelleme, kanun ve ilkelerden yola çıkarak özel durumların elde edilmesi (Baykul, 2014).

Önerme: Doğru ya da yanlış diye bir hüküm bildiren ama aynı zamanda hem doğru hem de yanlış olmayan ifadeler (Karaçay, 2009).

Teorem: Kanıtlanabilen bilimsel önermelerdir. Mantıksal usavurma ile kanıtlanan önermenin ya da özelliğin bildirimidir (Karaçay, 2009).

Aksiyom: İspatsız kabul edilen, başlangıçta doğru olduğu varsayılan önermeler (Irmak, 2008; Karaçay, 2009).

Kavram: Bir nesnenin veya düşüncenin zihindeki soyut ve genel tasarımıdır (Türk Dil Kurumu [TDK], 2015).

Kavram imajı: Verilen bir kavram ile ilgili kişinin zihninde oluşan tüm bilişsel yapılardır (Tall ve Vinner, 1981).

Kavramsal bilgi: Matematiksel kavramları sembolleştirebilme, onları farklı bir biçimde sunabilme, onlar arasında ilişki kurabilme ve gerekli işlemleri yapabilme gibi becerilerin oluşturduğu kavramaya dayalı bir bilgidir (Birgin ve Gürbüz, 2009).

İşlemsel bilgi: Matematik sembollerini ve gösterimlerini tanıma, kural ve formülleri bilme, verilen bir algoritmayı işlem basamaklarına uygun biçimde yürütebilme gibi becerileri gerektiren kavramaya dayanmayan tamamen mekanik bir bilgidir (Birgin ve Gürbüz, 2009).

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Kuramsal Çerçeve

Çalışmanın bu bölümünde araştırmanın üzerine kurulduğu kuramsal çerçeve tanıtılmıştır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçleri incelenerek iki süreç arasındaki ilişki ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu bağlamda ilerleyen bölümlerde sırasıyla, matematiksel ispat, matematiksel argümantasyon ve ispat ile ilişkisi ve Toulmin modeli hakkında bilgiler sunulmuştur.

2.1.1. Matematiksel ispat

"Problem çözme matematiğin kalbi ise ispat da matematiğin ruhudur (Schoenfeld, 2009)."

İspat, bir şeyin doğru olduğunu gösteren bilgi ve dokümanlar, bir iddianın doğru ya da gerçek olup olmadığını test etme süreci (Oxford advenced learner's dictionary, 2010), bir şeyin varlığını ve doğruluğunu gösteren bir gerçek ya da bir kısım bilgi (Cambridge advenced learner's dictionary, 2013) olarak tarif edilmiştir. *Türkçe Süzlük*'te ise ispat, tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma olarak tanımlanmıştır (TDK, 2015). Matematikçiler ve matematik eğitimcileri ispatlara farklı anlamlar yükleyerek ve ispatın farklı özelliklerine vurgu yaparak tanımlamaya çalışmışlardır.

Bazı araştırmacıların yaptıkları ispat tanımlarında ispatın sözlük anlamından farklı olarak, matematiksel ispatın matematiksel bir ifadenin ya da önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek olduğu açıkça vurgulanmıştır. Yıldırım'a (2014) göre ispat, bir yargı sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır. Baki'ye (2014) göre matematiksel ispatların amacı, iddia edilenin doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlamaktır. Bu her durum ve koşulda iddianın doğru olduğunun gösterilmesiyle olur. Başka bir deyişle iddianın, örüntünün bütün şartlarda genellenebilirliğinin gösterilmesiyle ispat tamamlanmış olur. Weber'e (2005) göre matematiksel ispat, ispatı yapan kişinin varsayımlar, aksiyomlar, tanımlar gibi önceki bilgiler ile sunduğu ve arzu edilen sonuca ulaşılıncaya kadar teoremlerin uygulanması ve önceki elde edilen gerçeklerin hatırlanması gibi çıkarım kurallarının uygulanmasının istendiği matematiksel bir aktivitedir. Güven ve diğerleri (2005) matematikçilerin gözünde ispatın, öncülleri de kullanarak mantıksal çıkarımlar yoluyla bir ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlama olarak görülebileceğini ifade etmişlerdir. Fitzgerald'a (1996) göre ise ispat, bir doğrunun veya gerçeğin kanıtlar ışığında kabullenilmesidir (Akt., Güler, 2013).

Bazı araştırmacıların ispat tanımlarında, ispatın matematiksel bilgilerin doğruluğuna önce kendisinin daha sonra başkalarının ikna olma süreçlerini içerdiği vurgulanmıştır. Matematiksel ispatlar sayesinde, matematiksel iddiaların doğruluğu üzerindeki şüphelerin tamamen ortadan kalktığını ifade etmişlerdir. De Villiers (1999) ispatlama düşüncesinin çoğunlukla hem kendisinin hem de diğer kişilerin şüphelerini ortadan kaldırmak için kullanıldığını belirtmiştir. Harel ve Sowder (2007) matematiksel ispatı, bir iddianın doğruluğu hakkındaki şüpheleri ortadan kaldırmak için insanlar tarafından kullanılan bir süreç olarak tanımlamışlardır. Bell (1976) ispatın içsel olarak uygulanabilmesine rağmen hayali bir potansiyel şüpheciye karşı ikna olmayı amaçlayan toplumsal bir aktivite olduğunu ifade etmiştir. İspatlama sürecinin bir iddianın doğruluğuna önce kendini daha sonra başkalarını ikna etme gibi iki alt süreci mevcuttur (Harel ve Sowder, 2007). Stylianou, Chea ve Blanton (2006) da benzer şekilde, ispatın bir kişinin iddiasını doğrulamasını, kendisini ve başkalarını ikna etmeyi sağlayan mantıksal argüman olarak matematikte başrole sahip olduğunun kabul edildiğini ifade etmişlerdir.

Araştırmacıların yaptıkları bazı ispat tanımlarında, ispatların genel anlamda önceden kabul edilen bilgilerin kullanıldığı, mantıksal birtakım çıkarımlar ile ilerlediği, dedüktif yapıdaki muhakemenin bir çeşidi olduğu dikkati çekmektedir. Almeida (2003) matematiksel ispatın bir sonucu doğrulamak, iletişim kurmak ve diğerlerini bu sonuca ikna etmek, bir sonuç keşfetmek ve elde edilen bu sonuçları dedüktif bir sistem içine yerleştirmek için yapıldığını belirtmiştir. Hanna, Bruyn, Sidoli ve Lomas (2004) matematiksel ispatı, aksiyomlar, kabul edilen kurallar ya da önceden ispatlanan sonuçlar gibi açık olarak verilenlerin ele alınarak geçerli dedüktif bir argüman üretmek için kullanılması olarak tanımlamışlardır. Dede ve Karakuş'a (2014) göre matematiksel ispat, bir ifadenin ve önermenin doğruluğunun önceden bilinen bir veya birden fazla önermeyle ilişkilendirilmiş mantıksal birtakım çıkarımlar yardımıyla gösterilmesidir. Esty (1992) matematiksel ispatların dedüktif yapısı gereği argümantasyon sürecindeki gerekçelerin de aksiyomatik yapıda olması gerektiğini ifade etmiştir (Akt., Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014). Griffiths'e (2000) göre matematiksel ispat, bir aksiyomlar kümesi ile başlayan mantıksal adımlarla bir sonuca doğru ilerleyen muhakemenin formel ve mantıksal bir dizisidir. Yıldırım (2014), ispatın önermelerin ya da önerme kalıplarının ilişkisine dayanan mantıksal bir çıkarım olduğunu ifade etmiştir.

Baki (2014) ispatların doğrulama, açıklama ve soyutlama aşamalarından oluştuğunu ifade etmiştir. Doğrulama aşamasında öne sürülen iddianın doğruluğu araştırılır. Açıklama aşamasında, iddianın neden doğru olduğunun açıklaması yapılır. Soyutlama aşamasında ise matematiksel bir dil kullanılarak ve genelleme koşulları kontrol edilerek en kısa yoldan soyutlama yapılır (Baki, 2014). Benzer şekilde Lee (2002), ispat sürecinde üç farklı ve birbiri ile yakından ilişkili süreçlerin olduğunu ifade etmiştir. Bu süreçlerin ispatı yapılacak şeyin araştırılması, ispatın organizasyonu ve ispatın diğer kişilere açıklanması olduğunu belirtmiştir. İspat yapmak için bir matematikçi mevcut problemi, varsayımı ve daha önceki ispatları analiz eder. Varsayımın doğru olup olmadığını ve bilinen teoremlerden ispatı nasıl elde edeceğini araştırır. Bu süreç varsayımın ispatlanması ya da çürütülmesi ile son bulur. Bir önceki aşamayı analizlerin sonuçlarının dedüktif argümanlar ile düzenlenmesi izler (Lee, 2002). Furinghetti ve Morselli (2009) ispatlama sürecinin problem çözmenin özel bir durumu olduğunu ifade etmiş ve ispat yapma sürecinde Polya'nın (1945) problemi anlama, bir plan geliştirme, planı uygulama ve kontrol adımlarının izlenilebileceğini belirtmiştir. Dedüktif bir şekilde düzenlenmiş ispat, konferanslar ya da yayımlama vasıtasıyla diğer insanlara açıklanır (Lee, 2002).

Bazı araştırmacılar ispatın sosyal bir eylem olduğunu ve matematiksel topluluklar tarafından ispat olarak kabul edildikten sonra ispat değeri kazandığını ifade etmişlerdir (Dede, 2013; Edwards, 1997; Stylianides ve Stylianides, 2009). Bir matematiksel bilginin doğruluğunun gösterildiği bir içerik, matematikçiler tarafından geçerli olarak tanımlanırsa bu içerik bir matematiksel ispat olarak kabul edilmektedir (Dede, 2013). Stylianides ve Stylianides (2009) bir önermenin doğruluğunu gösteren bir argümanı ispat olarak nitelendirebilmek için argümanın genel, geçerli ve matematiksel topluluklar tarafından anlaşılabilir olması gerektiğini ifade etmiştir. Genel argüman, kullanılan iddiaların önermenin tanım bölgesindeki tüm durumlara hitap etmesi anlamına gelmektedir. Geçerli terimi ile argümanın dedüktif ve önermenin doğru olduğuna yönelik kesin delilleri sağlaması kastedilmektedir. Edwards (1997) da ispatı, sezgileri ve genellemeleri kesin iddialara dönüştüren, açık ve kesin bir dil ile ifade edilen ve bir matematik topluluğu tarafından kabul edilen süreçlerin bir kümesi olarak tanımlamıştır. Bell (1976) ispatın toplumsal bir aktivite olduğunu ifade etmiştir. Stylianides (2007) ispatın bir matematiksel argüman, matematiksel iddianın doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek için üretilen savların birebiriyle ilişkili olan dizisi olduğunu ifade etmiş ve aşağıdaki karakteristiğe sahip olduğunu belirtmiştir.

1. Sınıfça kabul edilen ifadeler kullanılır (kabul edilen ifadeler kümesi). Bu ifadeler doğrudur ve daha fazla doğrulamaya gerek kalmadan kullanılır.
2. İspatlar muhakeme formlarını kullanır (argümantasyonun bir çeşidi). Bu muhakemeler geçerlidir, öğrenciler tarafından bilinir ya da kavramların içinden ulaşılır.
3. Özel bir ifade şekli ile aktarılır (argüman sunumunun bir şekli). Bu ifade matematik topluluğu tarafından uygundur ya da bilinir.

Tall'a (1998) göre, matematiksel ispatlama sürecinin iki amacı vardır. Biri bir varsayımın mantıklı adımlar zinciri ile bir sonuca ulaştığını göstermektir. Diğeri ise varsayımlardan sonuca nasıl ve neden gidildiğini anlamaktır. Bu iki amaç birbirinden bağımsız olabilir. Yani, mantıklı bir ispat anlaşılır, anlaşılır bir ispat mantıklı olmayabilir. Hanna'ya (2000) göre, en iyi ispatlar aynı zamanda ispatlanan teoremin anlamının anlaşılmasına yardımcı olanlardır. Bu ispatlar teoremin sadece doğru olduğunu değil aynı zamanda neden doğru olduğunu gösterir. Bunun sonucunda ispatlar daha ikna edicidir ve başka keşiflere yol açabilir. Hersh (1993) matematikçilerin bir varsayımın doğru olup olmadığından daha çok onun niçin doğru olduğu ile ilgilendiklerini ifade etmiştir.

Ko (2010) matematikte ispatların ve ters örneklerin birincil amacının bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermek olduğunu belirtmiştir. Ko ve Knuth'a (2009) göre ispatlama ve çürütme, önermelerin doğru ya da yanlış olup olmadığını ve nedeninin gösterilmesine yardımcı olduğundan dolayı ileri matematiksel düşüncede önemli becerilerdir. Buradan da anlaşılacağı gibi matematikte bir önermenin doğrulanması kadar çürütülmesi de önemli bir etkinliktir. Matematiğin gelişmesinde önemli bir yere sahiptir (Lakatos, 1976). Matematiksel önermelerin yanlışlığının gösterilmesi genellikle ters örnekler yardımıyla olur (Altun, 2014; Lampert, 1990; Yasuhiro, 1991). Diğer bilim dallarından farklı olarak matematikte ters örnekler, bir netliğe ve statüye sahiptir (Whiteley, 2009). Yeni ve bilinmeyen bir varsayımın geçerliği test edilirken matematikçiler genellikle sadece ispat yapmaya çalışmazlar, aynı zamanda gizlenmiş çelişkileri, hataları ya da belirtilmemiş kabulleri ortaya çıkarması için ters örnek oluşturmaya çalışırlar. Bu şekilde matematikçiler ters örnekler yardımıyla eski ispatları düzenlerler ve yeni ispatları oluştururlar (De Villiers, 1999). Ters örneklerle yapılan çürütme ya da yanlışlama birçok kaynakta ispatlama yöntemleri arasında gösterilmektedir (Akkaş, Hacısalihoğlu, Özel ve Sabuncuoğlu, 1998; Altun, 2014; Irmak, 2008). Peled ve Zaslavsky (1997) ters örneklerin başlıca amacının önermeyi yanlışlamak olsa da, onların matematiksel kavramların hatırlanmasında ve önermelerdeki mantıksal hataların görülmesinde öğrencilere yardımcı olduğunu ifade etmişlerdir (Akt., Ko, 2010). Ters örnekler varsayımların yeniden düzenlenmesini sağlar ve muhakemenin gelişmesine yardımcı olurlar (Whiteley, 2009). Bir matematiksel ispat tüm durumlar için önermenin doğruluğunu gösterirken (Stylianides ve Stylianides, 2009), bir ters örnek mevcut önermenin yanlış olduğunu gösterir (Akkaş vd., 1998; Irmak, 2008). Benzer şekilde Zaslavsky ve Ron (1998), ters örneklerin diğer örneklerden daha güçlü bir konuma sahip olduğunu belirtmiş, tek bir ters örneğin genel sonuçları bozmak için yeterli iken destekleyici ve doğrulayıcı olarak sunulan birçok örneğin yeterli olmadığını ifade etmişlerdir. Ayrıca bazı öğrencilerin ters örnekleri önermelerin bir istisnası olarak gördüklerini belirtmişlerdir. Araştırmacılar öğrencilerin ortaokul son sınıf itibariyle bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için bir ters örneğin yeterli olduğunu, önermenin birkaç durum için doğrulanmasının önermenin tüm durumlar için doğru olduğu sonucuna ulaşılamayacağını fark etmelerini tavsiye etmektedir (Ross, 1998). Akkaş vd. (1998) matematikte yapılan en önemli işlerden birinin teoremleri ispatlamak olduğunu belirtmişlerdir. Varlık bildiren teoremler ispatlanırken teoremin doğru olduğunu göstermede bir tek örnek vermek yeterli değildir. Çünkü teorem bu örnek için doğrulandığı halde başka bir örnek için doğrulanmış olmayabilir (Akkaş vd., 1998). Tıpkı ispatlar gibi, ters örnekler de matematiksel tartışma sürecinin sosyal bir ürünüdür (Yasuhiro, 1991).

Bell (1976) ispatın matematiksel içeriğinin üç anlam taşıdığını, yani matematikte ispatın üç fonksiyonu olduğunu ifade etmiştir. Bu fonksiyonlardan ilki bir önermenin doğruluğu ile ilgili olan doğrulama fonksiyonudur. İkinci fonksiyon açıklamadır. İyi bir ispat, önermenin niçin doğru olduğuna yönelik bir görüş vermelidir. Bu fonksiyon ispatın geçerliğini etkilemez fakat ispatın içindeki varlığı, estetik bir şekilde planlanmıştır. İspatın üçüncü fonksiyonu, daha çok matematiksel özellik taşıyan sistematikleştirme fonksiyonudur. Sistematikleştirme elde edilen sonuçların, aksiyomlar, temel kavram ve teoremler ve bunlardan türetilen küçük sonuçların dedüktif bir sistemi içerisinde düzenlenmesidir (Bell, 1976). Bell (1976) tarafından belirtilen bu fonksiyonlar zaman içinde bazı araştırmacılar tarafından yeni fonksiyonlar eklenerek genişletilmiştir. Araştırmacılar ispatın matematikte keşif (yeni sonuçlar bulma ya da türetme), iletişim (matematiksel bilginin aktarılması), deneysel bir teorinin oluşturulması, bir tanımın anlamını ya da bir varsayımın sonuçlarını keşfetme ve iyi bilinen bir gerçeği yeni bir çerçeveye dâhil etme ve böylece ona yeni bir gözle bakma, entelektüel durum (ispat yapmaktan kaynaklanan kendini gerçekleştirme/tamamlama durumu) fonksiyonlarının da olduğunu ifade etmişlerdir (De Villiers, 1999; Hanna, 2000).

De Villiers (1999) bu fonksiyonların birbirinden ayrılabilmesine rağmen bazı durumlarda sıklıkla birbiri içine girebildiğini ifade etmiştir. Ayrıca belirttiği ispat fonksiyonlarına yeni fonksiyonların da eklenebileceğini ifade etmiştir. Sınıf içinde yapılan ispatlarda bu fonksiyonların bir şekilde yansıtılması beklenir fakat fonksiyonların hepsi matematik öğrenimiyle aynı derecede ilgili değildir. Bu yüzden öğretim sırasında bu fonksiyonlara aynı oranda ağırlık verilmemelidir (De Villiers, 1999; Hanna, 2000; Hersh, 1993). Hanna (2000) öğretimsel açıdan bakıldığında, sınıf içerisinde en çok sorulan soru olan "Niçin" sorusuna cevap veren açıklama fonksiyonunun ön planda tutulduğunu ifade etmiştir. Bazı ispatların diğerlerinden daha açıklayıcı olduğunu belirterek öğretmenlerin sınıflarında bu tarz ispatları kullanmalarını önermiştir. Ayrıca De Villiers (1999) öğrencilere ispatın fonksiyonları tanıtılırken açıklama→keşif→doğrulama→entelektüel durum→sistematikleştirme zincirinin takip edilmesini önermiştir.

Matematik eğitimcileri matematiksel ispatın öğrenciler üzerinde birçok olumlu katkısı olduğunu ifade etmişlerdir. Matematiksel ispatları matematiksel kavramların anlaşılmasında, matematiksel bilgilerin gelişip olgunlaşmasında önemli bir araç ve ana eleman olarak görmüşlerdir (Knuth, 1999; Ross, 1998; Schoenfeld, 1994, 2009; Stylianides, 2007; Tucker, 1999). Matematiksel ispatlar, matematiği daha anlamlı öğrenmenin bir yoludur (Hersh, 1993; Tucker, 1999). Matematiksel ispatlar öğrencilere karşılaştıkları problemlerin çözümü için stratejiler, yöntemler, araçlar ve kavramlar gibi önemli matematiksel bileşenler sunar (Mariotti ve Balacheff, 2008; Rav, 1999). Problem çözümünde ispatların sağladığı bu yeni matematiksel anlayış, kavramsal ilişkiler ve yöntemler, ispatlara matematiksel önermelerin doğruluğunu göstermekten daha çok değer kazandırır (Hanna ve Barbeau, 2008). Ayrıca, matematiksel ispatlar matematikçilerin yaptıklarının öğrenciler tarafından anlaşılmasını sağlayan bir araçtır (İmamoğlu, 2010; Tucker, 1999). Dede ve Karakuş (2014) ispat yapma sürecinde öğrencilerin denemeler yaparak keşfetme sürecine girdiklerini, matematiğin estetik yönünün fark ettiklerini ve analitik düşünme becerilerini geliştirebileceklerini ifade etmişlerdir. Güven ve diğerleri (2005) de ispatlama etkinlikleri yoluyla, öğrencilerin bir yandan matematiğin aksiyomatik yapısını tanıma fırsatı yakalarken bir yandan da muhakeme becerilerini geliştirebileceklerini dile getirmişlerdir.

Türkiye'de yeni düzenlenen Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı'nda doğrudan ispatlama sürecine yönelik bir beceri bulunmamaktadır. Programda ispatlama süreci ile ilgili becerilere, doğrudan olmasa da matematiksel süreç becerileri başlığı altındaki akıl yürütme becerisi içerisinde yer verilmiştir. Akıl yürütme (muhakeme), eldeki bilgilerden hareketle, matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, *vb.*) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, *vb.*) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci olarak tanımlanmıştır (MEB, 2013a). Öğretim programında öğrencilere akıl yürütme becerisi kazandırılması için dikkate alınması gereken göstergeler arasında "çıkarımların doğruluğunu ve geçerliğini savunma", "mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma" ve "bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanma" gibi beceriler yer almaktadır (MEB, 2013a). Bu beceriler ispatın "doğrulama" ve "açıklama" fonksiyonları ile ilişkili olup ispatlama sürecinin matematiksel bir ifadenin doğru olduğuna önce kendini daha sonra başkalarını ikna etme gibi iki alt süreci olduğu görüşüyle (Harel ve Sowder, 2007) uyumlu olduğu düşünülebilir. Bu nedenle ispat ile akıl yürütme becerisi arasında dolaylı da olsa bir ilişki kurmak mümkündür (Aylar, 2014).

Matematiksel ispatların öğrencilere bilişsel ve duyuşsal anlamda sağladığı faydaları dikkate alan bazı ulusal ve uluslararası kuruluşlar, lise ve üniversite matematik öğrencilerinin ispat ile ilgili aktiviteler yapmalarını doğrudan önermektedirler (AMS, 2001; MAA, 2004; MEB, 2013b; NCTM, 2000). NCTM (2000) öğrencilerin varsayımları değerlendirebilmelerini ve matematiksel ispatı lise sonu itibari ile anlamasını ve üretmesini önermiştir. NCTM (2000) ayrıca, lise öğrencilerinin matematiksel önermelerin doğruluğu ya da yanlışlığı için uğraşacakları fırsatların sunulmasını, ispat ve ters örnek deneyimlerini kazanmalarını desteklemektedir. Türkiye'de de yeni düzenlenen Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda ispat yapma becerilerine doğrudan yer verilmiştir. Matematiksel akıl yürütme ve ispat yapma becerisi, matematiksel süreç becerisi olarak programın öğrencilere kazandırmayı hedeflediği temel beceriler arasında yer almıştır. Öğrencilerin ispat yapabilme becerileri kapsamında "matematiksel doğrulama sürecinde tümevarımı ve tümdengelimi etkin olarak kullanabilme" ve "matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme" becerilerini kazanmaları hedeflenmiştir (MEB, 2013b). Lisans öğrencilerinin öğretim programlarının düzenlenmesinde matematik bölümlerine rehber olmak için öneriler sunan bir topluluk olan Undergraduate Programs and Courses in the Mathematical Sciences: CUPM Curriculum Guide (MAA, 2004), matematik lisans öğrencilerinin varsayımlarının doğruluğunu ya da yanlışlığını belirleyebilmek için çeşitli yolları öğrenmeleri gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca öğrencilerin özel durumları araştırmayı, ters örnekler aramayı ve ispata nasıl başlandığını ve onun nasıl bittiğini nasıl anlayacaklarını bilmeleri gerektiğini belirtmiştir (MAA, 2004). Benzer şekilde the Conference Board of the Mathematical Sciences (AMS, 2001), her seviyedeki matematik öğretmeni adaylarının informel fakat geçerli argümanlarla doğrulama deneyimi yaşamalarını, lise matematik öğretmeni adaylarının da formel bir ispat yazmanın ne anlama geldiği düşüncesinin gelişmesi gerektiğini belirtmiştir.

Araştırmacılar tarafından ispatın matematik ve matematik eğitimi için önemi vurgulanmasına rağmen üniversite öğrencileri ve matematik öğretmenlerinin ispat yapmada (Cusi ve Malara, 2007; Doruk ve Kaplan, 2015b; Ko ve Knuth, 2009; Weber, 2001), ters örnek üretmede (Riley, 2003; Zaslavsky ve Peled, 1996) ve başkaları tarafından yapılan ispatların doğruluğunu değerlendirmede (Alcock ve Weber, 2005; Doruk ve Kaplan, 2013b; Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002; Segal, 2000; Selden ve Selden, 2003; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) başarısız oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin bu başarısızlıklarını tespit eden araştırmacılar, öğrencilerin ispatlama sürecine odaklanmışlardır. Öğrencilerin ispatlama sürecine etki eden faktörleri bulmaya çalışmışlardır. Bu bağlamda Weber (2001) öğrencilerin ispat yaparken yaptıkları hataları anlayabilmek için öğrencilerin ispatlama süreçlerinin incelenmesinin gerekli olduğunu ifade etmiştir.

İspatlar, üniversite matematik derslerinin merkezinde yer almasına rağmen öğrencilerin bazılarının ispatın ne olduğuna yönelik görüşlerinin yetersiz olduğu ve ispatın ne olduğuna yönelik bir görüş birliği sağlayamadıkları tespit edilmiştir (Jones, 2000; Moore; 1994; Raman, 2003). Birçok araştırmacı, matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin oluşmadığı ya da görüşlerinin yetersiz olduğunu tespit etmişlerdir (Jones, 2000; Doruk ve Güler, 2014; Kayagil, 2012; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Moralı ve diğerleri (2006) bu durumun, öğretmen adaylarının ispat yapmanın matematik ve matematik eğitimi açısından önemini bilmediklerini gösterdiğini ifade etmişlerdir. Ayrıca ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoğunun ispatları anlamaya ve yapmaya yönelik özgüvenlerinin düşük olduğu tespit edilmiştir (Doruk ve Kaplan, 2013a; Doruk ve Güler, 2014). Ek olarak, matematik öğretmeni adaylarının ispatın gerekliliğine ve matematiksel anlamda kendilerine sağladığı faydalara yönelik olumsuz görüşlerinin olduğu belirtilmiştir (Doruk ve Kaplan, 2013a, 2015a, 2015b; Moralı vd., 2006). Yapılan araştırmalarda matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşleri ile ispat yapma becerilerinin ilişkili olduğu görülmüştür (Bayazıt, 2009; Doruk ve Kaplan, 2015a; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; İmamoğlu, 2010). Moore (1994) ispat ve matematiğe yönelik algıların öğrencilerin ispat yapma becerileri üzerinde etkili olduğunu belirtmiş, üniversite seviyesindeki öğrencilerin ispat yaparken karşılaştıkları güçlüklerin arasında olduğunu ifade etmiştir. Furinghetti ve Morselli (2009) inançların sadece duygularla ilişkili olduğu için değil, aynı zamanda ispatlama stratejilerinin seçimi, seçilen stratejiden beklentiler ve karşılaşılan zorluklara karşı tepkiler gibi ispatlama yollarını doğrudan etkilediği için önemli olduğunu ifade etmiştir. Bell (1976) öğrencilerin çözümleri için matematiksel olarak yeterli doğrulama sağlamada güçlük yaşadıklarını ve bu güçlüklerin ispatın amacına yönelik eksikliklerinden kaynaklandığını ifade etmiştir.

Lisans öğrencilerinin ispat ve ters örneklerde güçlük yaşamasının sebeplerinden biri ispat ve ters örnekler hakkındaki yanlış algıları ve eksik bilgileridir. Weber'e (2001) göre öğrencilerin ileri matematik konularındaki ispatlarda yaşadıkları güçlüklerden biri, öğrencilerin matematiksel ispatın nelerden oluştuğu ve özellikleri hakkında doğru bir fikre sahip olmamalarıdır. Bazı öğrencilerin genel bir teoremin ispatını, bir ya da birkaç özel örnek ile doğrulanınca (Barkai, Tsamir, Tirosh ve Dreyfus, 2002; Galbraith, 1981; Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002; Weber, 2001) ve geleneksel, ritüel bir formatta (Harel ve Sowder, 1998) olunca kabul ettikleri tespit edilmiştir. Bazı öğrencilerinin ise kendilerine sunulan bir önermenin doğru olup olmadığını belirlemede bile güçlük yaşadıkları ortaya çıkarılmıştır (Gibson, 1998; Goetting, 1995; Ko ve Knuth, 2009; Riley, 2003). Öğrencilerin bir kısmının, bir önerme için üretilen doğru ters örneği, önermenin istisnası olarak gördükleri ve önermenin hala doğru olduğunu düşündükleri belirlenmiştir (Williams, 1979). Benzer şekilde Galbraith (1981), öğrencilerin tek bir ters örneğin, yanlış olan önermeyi çürütmek için yeterli olduğunu bilmediklerini ifade etmiştir. Öğrencilerin ispat değerlendirme süreçlerine yönelik yapılan araştırmalarda da ilginç sonuçlara ulaşılmıştır. Bu çalışmalardaki öğrencilerin bir kısmı, bir önerme için üretilen hem indüktif (tümevarımsal) hem de dedüktif argümanı geçerli ispatlar olarak değerlendirmiştir (Martin ve Harel, 1989). Bazı öğrenciler de bir önerme için üretilen hem doğru ters örneğin hem de yanlış ispatın geçerli olduğunu belirtmişlerdir (Goetting, 1995). Öğrencilerin çoğu dedüktif bir tarzda üretilen yanlış ispatların geçerli olduğunu kabul etmişlerdir (Segal, 2000). Öğrencilerin başkası tarafından yapılan ispatları değerlendirirken yüzeysel bir inceleme yaptıkları, genel mantıksal boşluklara dikkat etmek yerine gereksiz ayrıntılara odaklandıkları ve sonuç odaklı bir yaklaşım sergiledikleri tespit edilmiştir (Doruk ve Kaplan, 2013b; Selden ve Selden, 2003).

Öğrencilerin ispatlardaki başarısızlıklarının kaynaklarından biri de bilişsel anlamdaki eksikliklerdir. Weber'e (2001) göre öğrencilerin ispat yaparken sahip oldukları güçlüklerden biri, öğrencilerin teoremler ya da kavramlar hakkındaki bilgilerinin eksik olması ve onları uygun bir şekilde kullanamamalarıdır. Kişinin gerekli gerçeği ya da teoremi bilmesinin uygun bir ispat yapacağı anlamına gelmediğini belirtmiştir. Öğrencilerin sahip oldukları güçlüklere yönelik yapılan araştırmalarda öğrencilerin, matematiksel tanımları ifade etmede, kavramları anlamada, teoremin ifadesini anlamada, matematiksel dili ve notasyonları kullanmada, uygun ispatlama yöntemi seçmede, tanımlardan hareketle ispat yapısı oluşturmada, düşündüklerini ifade etmede, kümeden eleman seçmede, ispata başlamada güçlük yaşadıkları belirlenmiştir (Doruk ve Kaplan, 2015b; Güler, 2013; Moore, 1994, Selden ve Selden, 2003; Weber, 2001, 2008).

Öğrencilerin ispatlama süreçlerinde başarısızlıklarına yol açan bir diğer etken de ispatları öğrenme şekilleridir. Öğrencilerin bir kısmının ispatların altında yatan anlamları düşünmeden ya da anlamaya çalışmadan ezberleme yolunu tercih ettikleri ortaya çıkmıştır (Baştürk, 2010; Concradie ve Frith, 2000; Doruk ve Kaplan, 2013b). Öğrencilerin ispatlara yönelik bu öğrenim yöntemini benimsemesinin sebepleri arasında ispat ağırlıklı derslerde benimsenen öğretim yöntemleri yer almaktadır. Lisans matematik derslerinde birçok öğrenci, kendileri ispat ve ters örnek üretmek yerine gözlem yaparak pasif bir şekilde not almaktadır (Weber, 2004). Böylece öğrenciler son ürünü kopyaladıkları için ispat ve ters örnekleri değerlendirmek ve üretmek için gerekli anlayıştan uzak olmaktadırlar (Alcock ve Weber, 2005; Selden ve Selden, 1995). İspat ağırlıklı matematik lisans derslerinde yanlış önermelerin çürütülmesine yönelik bir tartışma yapılmadığı, öğrencilere çoğunlukla doğru önermelerin ispatları sunulduğu için (Buchbinder ve Zaslavsky, 2007) öğrencilerin çoğunun, önermeleri ve başkası tarafından yapılan ispatları doğru olduğunu değerlendirme eğiliminde oldukları belirlenmiştir (Smith, 2006). Raman (2003) ispatların içerisinde anahtar düşüncelerin olduğunu, matematikçilerin kendi çalışmalarında bu anahtar düşüncelere önem verirken öğretim sırasında anahtar fikirlere gerekli vurguyu yapmadıklarını ve değerlendirmede de kullanmadıklarını ifade etmiştir. Öğrenciler de formel ispatları ders hocasının beklentilerini karşılamak ve sınavları geçmek için pratik bir zorunluluk olarak görürler (Almeida, 2000). Matematikçilerin ispatlarla uğraşırken genellikle "sezgi-deneme-yanılma-tahmin-varsayım-ispat" zincirini takip etmekte oldukları (Almeida, 2003) fakat ders öğretimi sırasında bu dizinin sadece son basamağına odaklanıldığı için bu durumun öğrencilerin anlamlı öğrenmeleri üzerinde bir engel oluşturduğu ifade edilmiştir (Almeida, 2000). Ayrıca ispat ağırlıklı derslerde yapılan matematik öğretiminde "tanım-teorem-ispat" zincirinin takip edildiği (Almeda, 2000; Weber, 2004) ve bu durumun matematikçilerin ispatlama sürecine aykırı olduğu ifade edilmiştir. Almeida (2003) da üniversite seviyesindeki matematik derslerinin işlenişinin "teorem-ispat-örnekler" şeklinde olduğunu ifade etmiştir. Bu sıranın takip edilmesi yerine teoremin doğruluğunu gösteren iyi seçilmiş örnekler ile "örnekler-teorem-ispat" ya da "örnekler-ispat-teorem" akışının takip edilmesini önermiştir (Almeida, 2003). Öğretimden kaynaklı bu zorlukların üstesinden gelebilmek için birçok araştırmacı, ispatların öğretiminin sadece sunum odaklı olduğunu belirterek (Pedemonte, 2007), ispatları doğrudan kendileri yapmak yerine öğrencilere düşünme ve tartışma fırsatı verilmesini eğitimcilere önermektedir (Balacheff, 1999; Pedemonte, 2008).

2.1.2. Matematiksel argümantasyon ve ispat ile ilişkisi

"Öğrenciler ile ispat arasındaki ilişki formel bir model ile değil, argümantasyon ile alakalıdır (Pedemonte, 2007)."

Matematik eğitimi literatüründe kullanıldığı alanla uyumlu olan fakat sözcük anlamı ile uyuşmak zorunda olmayan terimler vardır (Rumsey, 2012). Bu terimlerden biri olarak argümantasyon kavramı karşımıza çıkmaktadır. Argümantasyon kavramı ile ilgili yapılan araştırmalar incelendiğinde, sınıf ortamında en çok tekrarlanan aktivitelerden biri olmasına rağmen argümantasyonun anlamına yönelik bir mutabakatın olmadığı ortaya çıkmıştır (Pedemonte, 2007). Araştırmacılar argümanlar için matematik eğitiminde hangi niyette kullanıldığına ve ispat ile ilişkisine yönelik farklı görüşler bildirmişlerdir. Çalışmanın bu bölümünde literatürde mevcut olan argüman ve argümantasyona yönelik görüşler sunulmuştur. Bölümün sonunda çalışmada dikkate alınan argüman ve argümantasyon kavramlarına yönelik bakış açısına yer verilmiştir.

Argümantasyon kavramının matematik eğitimi literatüründe bir karşılığı olmadığı için dilsel teorilerden yardım alınarak bu kavram açıklanmaya çalışılmıştır (Pedemonte, 2007). *Türkçe Sözlük*'te argüman kavramı kanıt, iddia, tez, sav olarak tanımlanmaktadır (TDK, 2011). Cambridge sözlüğünde argüman, bir öneri ya da düşünceyi desteklemek veya karşı çıkmak için üretilen sebep ya da sebepler ya da bu sebepleri açıklama süreci olarak tanımlanmıştır (Cambridge advenced learner's dictionary, 2013). Oxford sözlüğünde de argüman; bir kişinin, bir şeyin doğru ya da gerçek olduğunu göstermek için kullandığı sebep ya da sebepler olarak ifade edilmiştir

(Oxford advenced learner’s dictionary, 2010). Argümantasyon kavramının ise *Türkçe Sözlük*’te bir karşılığı bulunmamaktadır. Dinçer (2011) argümantasyon kavramını tartışma kavramı ile eş olarak kullanmıştır. Tartışma kavramı ise “bir konu üzerinde, birbirine ters olan görüş ve inançları karşılıklı savunmak” olarak tanımlanmıştır (TDK, 2011). Uluslararası kaynaklarda argümantasyon kavramı “bir teoriyi, eylemi, düşünceyi desteklemek için kullanılan mantıksal argümanlar (Oxford advenced learner’s dictionary, 2010)” ve “bir şeyi açıklamak ya da insanları ikna etmek için kullanılan argümanlar dizisi (Cambridge advenced learner’s dictionary, 2013) olarak tarif edilmiştir. Douek (1998) argümantasyonu, argüman kavramı ile açıklamıştır. Douek’e göre argümantasyon, bir ya da daha fazla argümanın mantıklı bir şekilde birleşmesiyle oluşan bir süreçtir. Rumsey (2012) argümantasyonun, bir kişiyi doğru olduğuna inanılan bir iddia ya da bir özelliğe geçmiş bilgileri ve doğrulamaları kullanarak ikna etmeyi başlıca amaç edinen sosyal bir tartışma süreci olduğunu ifade etmiştir. Bu tanımdaki geçmiş bilgilerin iddiayı açıklığa kavuşturmak için gerekli olan gerçekler olduğunu, doğrulamanın ise başkasını bir önermenin doğruluğuna ikna etmek için yapılan açıklama olduğunu belirtmiştir. Rumsey argümanı ise, argümantasyon sürecinin yapılandırılmış bir kaydı olarak düşünmüştür. Güneş’e (2013) göre argümantasyon, öğrencilerin verilen bir ifadenin ya da teoremin kanıtını yapmaya başlamadan önce, bireysel olarak ya da bir grup içinde arkadaşları ile birlikte yapılacak kanıt ile ilgili olarak hipotez oluşturdukları, fikir yürüttükleri, sezgilerini paylaştıkları bir süreçtir.

Argümantasyon üzerine yapılan çalışmalar, öğrencilerin sınıf içerisinde ya da bireysel olarak ürettikleri argümanların sınıflandırılması üzerine yoğunlaşmıştır (Inglis vd., 2007; Knipping, 2008; Pedemonte, 2007, Pedemonte ve Reid, 2011). Söz konusu sınıflandırmalarda ispat konusunda yapılan çalışmalardan yararlanılmıştır.

Argümantasyon kelimesi hem öne sürülen bir konu hakkındaki mantıksal bağlantılı bir söylemi hem de bu sürecin ürettiği metni ifade eder (Douek, 1998). Pedemonte (2007), Douek’in (1998) görüşleriyle benzer olarak, argümantasyonda iki safhanın olduğunu ifade etmiştir. Bu safhalar, oluşturmacı argümantasyon (Constructive argumentation) ve yapılandırılmış argümantasyon (Structurant argumentation) safhalarıdır. Bir varsayımın oluşmasına katkı sağlayan safha oluşturmacı argümantasyon safhasıdır. Oluşturmacı argümantasyon, bir önerme ortaya çıkmadan önce yapılır. Yani oluşturmacı argümantasyonun sonucunda bir önermeye ulaşılır. Diğer taraftan, yapılandırılmış argümantasyon bir varsayımı doğrular. Bir gerçeğe ulaşılmadan önce inşa edilir ve gerçek, yapılandırılmış argümantasyon sonrasında elde edilir. Balacheff (1999) benzer şekilde argümantasyon içerisinde hem ikna etme hem de doğrulama aktiviteleri olduğunu belirtmiştir.

Inglis vd. (2007) matematiksel argümanların özellikle problem çözümlerinde hayati bir öneme sahip olduğunu ifade etmişler ve gerekçe tipi kavramını ortaya atmışlardır. Gerekçe, özel bir argümanın parçası olmasına rağmen bir gerekçe tipi benzer özellikteki gerekçelerin bir kümesidir. Gerekçe tipleri büyük oranda Harel ve Sowder'ın (1998) ispatlama şemalarından uyarlanmıştır. Harel ve Sowder'ın ispat şemalarının bir kişinin önermenin doğruluğu üzerindeki şüphesini tamamen ortadan kaldırmasına olanak tanıdığını, bir gerekçe tipinin ise söz konusu belirsizliği sadece azalttığını ifade etmişlerdir. Inglis ve diğerleri yaptıkları araştırma sonucunda tümevarımsal (indüktif), yapısal-sezgisel ve dedüktif gerekçe tiplerini tespit etmişlerdir. Tümevarımsal gerekçe tipi öğrencilerin kendilerini ve başkalarını varsayımın doğruluğunun bir veya birkaç özel durum ile niceliksel olarak değerlendirilmesi olarak tanımlanmıştır. Yapısal-sezgisel gerekçe tipi terimi bir sonuca ikna olmak için görsel veya başka türden olan bazı zihinsel yapı üzerine deney ya da gözlem yapan biri için kullanılmaktadır. Dedüktif gerekçe, öne sürülen argümanın sonucu için formel matematiksel doğrulamaların gerekçe olarak kullanılmasıdır. Bu doğrulamalar; aksiyomlardan elde edilen çıkarımlar, cebirsel manipülasyonlar ya da ters örnek kullanımı dedüktif gerekçe olarak sınıflandırılmıştır. Inglis vd. (2007) bu sınıflamanın dışında da sınıflamaların olabileceğini ifade etmişlerdir.

Knipping (2008) de öğrencilerin sınıf ortamındaki ispatlama sürecinde kullandıkları argümanları sınıflandırmaya çalışmıştır. Argümanları lokal ve global olmak üzere iki ana gruba ayırmıştır. Lokal argümanlar, görsel ve deneysel argümanlardan oluşmaktadır. Görsel argümanlar, kendi içerisinde deneysel-görsel ve kavramsal-görsel argümanlara ayrılmaktadır. Deneysel görsel argümanlar özel bir şekil ve bu şekil üzerindeki ilişkilere odaklanır. Matematiksel özellikler ve ilişkiler bu şekle bağlıdır ve sezgisel bilgi olarak düşünülür. Kavramsal-görsel argümanlarda şekil, bir düşüncenin gösterimidir. Kavramsal argümantasyonlarda gerekçe ve destek bileşeni dedüktif kavramsal argümanlara dayanır. Global argümantasyonlarda ise argümantasyonun bütününe odaklanılır, kaynak yapı ve depo yapı olmak üzere iki gruba ayrılmaktadır (Knipping, 2008).

Pedemonte (2007) argümantasyon ile ispat arasındaki ilişkiyi analiz edebilmek için argümanları yapısal olarak üç kategoriye ayırmıştır. Bu kategoriler dedüktif, tümevarımsal (indüktif) ve abdüktif yapılardır. Dedüktif yapı bir kural ya da veriden başlayarak bir iddianın oluşturulmasına olanak sağlayan çıkarımdır. Toulmin modelinde veri ve gerekçe bizi sonuca götürüyorsa bu bir dedüktif yapıdır. Abdüktif yapı, gözlenen bir gerçekle başlayan bir iddianın oluşmasına izin veren bir çıkarımdır. Abdüktif yapıda iddiayı doğrulayan kuralın sonuca uygulanabilmesi için uygun verilerin aranması söz konusudur. İndüktif yapı ise özel durumlardan genel bir iddianın oluşmasına olanak sağlayan bir çıkarımdır (Pedemonte, 2007). Sonraki çalışmalarda üç tip abdüktif argümantasyon yapısı tespit edilmiştir. Bunlar; alt kodlu (undercoded), üst kodlu (overcoded) ve yaratıcı (creative) abdüksiyondur (Pedemonte ve Reid, 2011). İndüktif argümantasyon yapısı da sonuç-örnek genellemesi ve süreç-örnek genellemesi başlıkları altında araştırılmıştır (Martinez ve Pedemonte, 2014; Pedemonte ve Buchbinder, 2011). Sonuç örnek genellemesi yapılırken ortaya çıkan sonuçların düzenliliği üzerine yoğunlaşırken, süreç örnek genellemesinde ise sürecin düzenliliği üzerine yoğunlaşılmaktadır (Pedemonte, 2007).

Argümantasyon kavramını açıklamaya çalışan araştırmacılar çoğunlukla ispat kavramından yardım almışlardır. İspatla ilgili olan argümantasyon aktivitelerinin neler olduğunu (Boero, 1999; Mejia-Ramos ve Inglis, 2009), ispat ile argümantasyonun farklılıklarını (Duval, 1991) ve ortak özelliklerini (Pedemonte, 2007) açıklamaya çalışmışlardır.

Mejia-Ramos ve Inglis (2009) ispatın özel bir argümantasyon aktivitesi olduğunu belirterek ispatla ilgili olan argümantasyon aktivitelerini belirtmişlerdir. Her matematiksel aktivitenin üretme (making it), anlama (taking it) ve sunma (presenting it) olmak üzere üç alt aktivite içermesinden (Giaquinto, 2005) yola çıkarak ispat ve argümantasyonda da özgün bir argüman üretme, verilen bir argümanı okuma (değerlendirme) ve geçerli bir argümanı sunma olmak üzere üç ana aktivitenin mevcut olduğunu ifade etmişlerdir. Argüman üretme aktivitesi kendi içinde bir problemi keşfetme, bir varsayımın doğruluğunu tahmin etme ve doğru olduğu düşünülen önermeyi doğrulama gibi aktivitelerden oluşmaktadır. Argümanı okuma aktivitesi altında verilen bir argümanı anlama ve birtakım kriterlere göre değerlendirme aktiviteleri yer almaktadır. Geçerli bir argüman sunma aktivitesi de kendi içinde dört alt aktiviteye ayrılmaktadır. Bu alt aktiviteler; muhatabını argümanın iddiasına ikna etme, iddianın neden doğru olduğunu muhatabına açıklamak, muhatabına argümanın geçerli olduğunu göstermek ve bir uzmanın argüman anlayışını yansıtmaktır (Mejia-Ramos ve Inglis, 2009).

Boero (1999) ispatlarla ilgili olan matematiksel argümantasyon aktivitelerinin önemini vurgulayarak bu aktivitelerin birbirinden ayrılamaz ve doğrusal bir sıraya koyulamaz altı aşamasının olduğunu ifade etmiştir. Bu aşamalar aşağıda açıklanmıştır.

- Bir varsayım üretme (problem durumunu keşfetme, üretilen varsayımın uygunluğu için argümanları tanımlama),
- Yazısal geleneklere göre önermelerin düzenlenmesi,
- Varsayımın içeriğinin ve geçerlik sınırlarının keşfedilmesi: Tez ve hipotez ile ilgili heuristik, semantik (bazen formel) ayrıntılar; referans teorisi ile bağlantılı doğrulama için uygun argümanların tanımlanması, bu argümanlar arasındaki muhtemel bağlantıları canlandırma,
- Uygun argümanları seçme ve dedüktif bir sırada birbirine bağlama,
- Birbirine bağlanan argümanların mevcut matematiksel standartlara göre kabul edilebilir bir ispat yapısı içerisinde düzenlenmesi,
- Formel ispata yaklaşma (Boero, 1999).

Boero yukarıdaki aşamaların öğrencilere ispat ile ilgili problemleri çözerken yardımcı olabileceğini belirtmiş fakat iki büyük problem ile karşılaşılabileceğini dile getirmiştir. İlk problem, öğrencilerin doğrulama yapmak için güvendikleri argümanların özelliklerinde gizlidir. Öğrenciler deneysel argümanları, ölçümleri ve görsel delilleri doğrulama yapmak için yeterli görebilirler. Diğer problem ise, öğrencilerin doğrulama yaparken kullandıkları muhakeme şekilleri ile alakalıdır. Öğrenciler doğrulama yapmak için sıklıkla analoji yaparlar, örnekleri kullanırlar ve bunların doğrulama yapmak için yeterli olduğunu düşünürler.

Duval (1991) argümantasyon ile dedüktif muhakeme arasında bilişsel farklılıklar olduğunu ifade etmiştir. Her ne kadar iki muhakeme şekli, benzer dilsel formlar ve önermeye dayalı bağlaçlar kullansalar bile dedüktif muhakemenin argümantasyon gibi işlemediğini belirtmiştir. Bu durumun öğrencilerin ispatların gereksinimlerini anlamamalarının ana sebeplerinden biri olduğunu dile getirmiştir. Duval (1995) ispatı, dedüktif adımların mantıksal bir sıralaması olarak tarif etmiş ve argümantasyon ile ispat arasında bilişsel ve dilsel olarak yapısal bir boşluk olduğunu belirtmiştir (Akt., Pedemonte, 2007).

Barrier, Mathé ve Durand-Guerrier (2009) iki aktivitedeki oyunun kurallarının birbirinden farklı olduğu için her argümantasyon aktivitesinin ispat ile sonuçlanamayacağını belirtmişlerdir. Özellikle geometride, iki etkinlik arasındaki farklı gösterim şekillerinden kaynaklanan boşluk, argümantasyonun ispata yükseltilememesinin sebeplerinden biridir. Argümantasyon ile ispat arasındaki bu boşluk öğrencilerin doğrulama denemelerinde ortaya çıkmaktadır. Özellikle doğrulamanın hemen yapılamadığı durumlarda içerik ile çalışmak önem arz etmektedir (Barrier vd., 2009).

Duval (1991) argümantasyonal muhakemede önermelerin anlamsal içerikleri önemli iken dedüktif muhakemede önermelerin doğrudan içerikleri ile değil işlemsel durumları ile sürece müdahil olduklarını belirtmiştir (Akt., Barrier vd., 2009). Duval iki süreç arasındaki bir diğer farkın muhakemenin ilerleyiş şekillerinde yattığını ifade etmiştir. Duval’e göre dedüktif muhakemenin ilerlemesi basit dedüktif adımların birbiri ardına mantıksal olarak sıralanması ile olurken argümantasyonda farklı bakış açılarından gelen argümanların toplanması ya da yeniden yorumlanması esasına dayanmaktadır (Akt., Balacheff, 2008).

Argümantasyonun yapısından farklı olarak bir ispat veri, iddia ve referans kuralları (tanım, teorem ve aksiyom) olarak üçlü bir diyagram ile tarif edilebilir. İspatın içerisindeki adımlar birbirilerine döngüsel bir süreç ile bağlıdır. Bu durum çıkarımları içerik ile bağlantılı olan argümantasyon için geçerli değildir (Pedemonte, 2007). İspatta kullanılan gerekçeler tanım, teorem ve aksiyomlardır. Destek bileşenleri ise gerekçeyi doğrulayan teorik sistemlerdir. Bir varsayımı destekleyen argümantasyonda ise bu bileşenler teorik bir sisteme ait olmak zorunda değildir (Boero, Douek, Morselli ve Pedemonte, 2010)

Son olarak Duval (1991) dedüktif muhakemenin önermelerin işlemsel değerine bağlı iken epistemik değerlerine (kesinlik ya da verilen bir önermeye ikna olma derecesi) bağlı olmadığını ifade etmiştir (Akt., Balacheff, 2008). Bilindiği gibi matematiksel önermeler sadece bir epistemik değere sahiptir. Argümantasyona dayalı muhakemede ise doğru önermeler aynı epistemik değere sahip olmayabilir. Matematik eğitiminde kullanılan argümanlar ispatların aksine dedüktif yapıda olmak zorunda değildir. Argümantasyonlar sözel argümanlar, sayısal veriler, çizimler, görsel ya da hareketli argümanlar içerebilir (Douek, 1998). Bu yüzden dedüktif muhakeme sonucunda elde edilen sonuç kesinlik belirtirken, argümantasyon sonucunda elde edilen sonuç aynı kesinlikte olmayabilir. Inglis ve diğerleri (2007) argümantasyon ile ispat arasındaki bu farkı vurgulamak için ispatların amacının “belirsizliği ortadan kaldırmak”, argümanların amacının ise “belirsizliği azaltmak” oluğunu belirtmişler ve çalışmalarında iki süreç arasında bu şekilde bir ayırım yapmışlardır.

Duval (1995) argümantasyondaki çıkarımların içerik temelli iken ispatların dedüktif bir temayı takip ettiğini (veri, iddia ve çıkarım kuralları) göstermiştir (Akt., Pedemonte, 2008). Thurston (1994) matematiksel ispat için dedüktif modeli kabul etmekle birlikte ispatlama süreci ile ispatın kontrolü aşamasında takip edilen kriterlerin formel kriterlerden daha çok içerikle ilgili olduğunu ifade etmiştir. Matematiksel güvenirliğin esasında formel argümanları formel bir şekilde değerlendiren matematikçilerden elde edilmediğini, matematiksel düşünce hakkında dikkatli ve eleştirel bir şekilde düşünen matematikçilerden elde edildiğini dile getirmiştir. Rav (1999) ispatın iddiaların bir dizisi olduğunu ve bir iddiadan diğerine geçişin genellikle formel olmadığını ifade etmiştir. Eğitimsel açıdan matematiksel ispatın bir ürün olarak verilen bir model ile uyumlu olması gerektiği doğrudur fakat ispat üretirken içerik elemanlarının öğrenciler tarafından düşünüldüğünü dikkate almak önemlidir. Öğrenciler ile ispat arasındaki ilişki formel bir model ile değil argümantasyon ile alakalıdır (Pedemonte, 2007).

Duval’den farklı olarak Pedemonte (2007) matematiksel argümantasyon kavramını açıklamak için ispat ile olan ilişkisinden yararlanmıştır. Matematiksel argümantasyon ile ispatın fonksiyonel ve yapısal ortak özellikleri olduğunu belirtmiştir. Fonksiyonel ortak özellikler; matematiksel argümantasyon ve ispatın mantıklı doğrulamalar olduğu, matematiksel argümantasyon ile ispatın amacının ikna etmek olduğu, matematikte argümantasyon ve ispatın muhatabının bir evrensel kitle olduğu (matematiksel topluluklar, sınıf, öğretmen, muhatabın kendisi) ve matematiksel argümantasyon ve ispatın bir alana özgü olduğudur. Argümantasyonun fonksiyonel özellikleri argümantasyonun sonucunun kesinliği ve söylem içindeki rolü ile alakalıdır. Argümantasyon ile ispatın yapısal ortak özellikleri, özellikle argümantasyona yapısal bir model sağlar. Bu özellik ispatın matematikte özel bir argümantasyon olarak düşünülmesini ve aralarında karşılaştırma yapmayı mümkün kılmaktadır (Pedemonte, 2007).

Argümantasyon kavramına yönelik yapılan araştırmalar incelendiğinde argüman ve argümantasyon kavramına yönelik farklı görüşlerin olduğu anlaşılmaktadır. Araştırmacılar kendi çalışmalarının amaçlarına göre argümantasyon kavramını değerlendirmişlerdir (Rumsey, 2012). Bu çalışmada da argümantasyon sürecinin önemli bir parçası olan argüman kavramı, bir kişinin kendini ya da başkasını bir önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında ikna etmek için öne sürdüğü sebep ya da sebepler olarak dikkate alınmıştır. Bu anlayış çerçevesinde, öğrencilerin kullandığı gerekçeli ifadelerin tümü argüman olarak değerlendirilmiştir. Gerekçeli ifadeler, bir kimsenin kendini ve başkasını ikna etmek adına yaptığı doğrulamanın neden doğru olduğuna dair cümleleridir. Öğrencilerin gerekçeli ifadelerinde genellikle “çünkü”, “-den dolayı”, “yüzünden” gibi kelimeler yer alır. Bu anlamda çalışmada, öğretmen adaylarının ifadelerinde elindeki verilerden sonuca bir gerekçe ile ulaşma söz konusu ise bu ifade argüman olarak değerlendirilmiştir. Argümantasyon kavramı ise bir ya da birkaç argümanın mantıklı bir şekilde birleşmesi ile oluşan süreç olarak dikkate alınmıştır. Kullanılan argüman kavramında dikkate alınması gereken bir husus da bu tarz doğrulama aktivitelerinin hem kendini hem de başkasını ikna etmek için yapıldığıdır. Bu çalışmada kişinin kendini bir önermenin doğruluna ikna etmesi ve doğru olduğunu düşündüğü bir önermenin doğruluğunu göstermesi ayrı olarak incelenmiştir. Bu amaçla kişinin kendini ikna etmek adına ne tür argümanlar oluşturduğunu ortaya çıkarmak için öğrencilere analizin temel konularında önermeler sunulmuş ve öğretmen adaylarından bu önermeleri doğru ya da yanlış şeklinde değerlendirmesi istenmiştir. Bu aşamada kişinin ikna etmesi gereken muhatabı kendisidir. Kişinin başkasını ikna etmek adına ne tür argümanlar ürettiğini ortaya çıkarmak için öğretmen adaylarına doğrulama gerektiren problemler sorulmuştur. Bu problemlerde doğru önermeler sunulmuş ve öğretmen adaylarından önermelerin doğru olduklarını göstermeleri istenmiştir. Bu aşamada kişinin ikna etmesi gereken başkalarıdır yani matematiksel topluluklardır. Çalışmada dikkate alınan argüman anlayışı Pedemonte'nin (2007) oluşturmacı ve yapılandırılmış argüman ayrımına hem de matematik eğitimi araştırmacılarının çoğunun kullandıkları argümantasyon tanımı olan "bir iddianın ortaya atılması ve bu iddianın savunulması" anlamına uygundur (Douek, 1998; Garuti vd., 1998; Martinez ve Pedemonte, 2014; Nardi vd., 2012; Pedemonte ve Buchbinder, 2011; Pedemonte ve Reid, 2011).

Matematik eğitimi literatüründe argümantasyon kavramı hakkındaki uyuşmazlıkla paralel olarak argümantasyonun ispat ile ilişkisine yönelik de bir uzlaşma yoktur. Bazı araştırmacılar argümantasyonun ispat ile uyuşmadığını ve ispat yapmada yararı olmadığını (Balacheff, 1999; Boero, 1999; Duval, 1991), bazı araştırmacılar iki sürecin ilişkili olduğunu (Hersh, 1993), ispatların öğrenilmesinde yararlı olduğunu (Garuti vd., 1998; Pedemonte, 2007) belirtmişlerdir. Bu bölümde de literatürde bulunan farklı görüşlere yer verilmiştir. Bölüm sonunda çalışmada dikkate alınan bakış açısı sunulmuştur.

Balacheff (1999) sosyo-matematiksel ve epistemolojik açıdan ispatları değerlendirmiş ve argümantasyon ile ispatın arasında farklılığın olduğunu belirtmiştir. Bu farklılığı vurgulamak için argümantasyonun matematiksel ispatların öğreniminin önündeki epistemolojik bir engel olduğunu ifade etmiştir. Duval (1991) özellikle ispatı dedüktif adımların mantıksal zincirlemesi olarak dikkate almıştır. Argümantasyon ile ispat arasında yapısal bir boşluk olduğunu ifade etmiştir. Duval (1991) argümantasyon ile dedüktif adımların mantıksal sıralanması olarak tanımladığı ispat arasında mantıksal ve bilişsel büyük farklılıklar olduğunu ifade etmiştir (Akt. Boero vd., 2010). Boero (1999) argümantasyonun matematiksel ispata yaklaşmada epistemolojik engellerden biri olabileceğini belirtmiştir.

Thurston (1994) matematiksel ispatlar için dedüktif modeli desteklemekle birlikte ispatlama süreci ile ispatların kontrol aşamasında formel kriterlerden daha çok içerik ile ilgili kriterlerin takip edildiğini belirtmiştir. Pedemonte (2007) bu düşünceyi desteklemiş ve öğrenciler ile ispat arasındaki ilişkinin formel bir model ile değil argümantasyon ile ilişkili olduğunu ifade etmiştir. Hersh (1993) matematik uygulamalarında, günlük yaşamdaki matematikte ispatın nitelikli yargılamalarla karar verilen argümana ikna olmak olduğunu ifade ederek argümantasyon ile ispatın ilişkili olduğunu belirtmiştir. Bazı araştırmacılar varsayım nesnelerini belirtme, sağlam bir hipotez öne sürme ya da yeni zayıf bir varsayım oluşturma ile önermeyi ispatlamak için denemeler yapma arasındaki ilişkiye yönelik birçok süreklilik durumu gözlemlemişlerdir (Lakatos, 1976; Thurston, 1994). Harel ve Sowder (1998) da ispat şemalarını oluştururken ispat kelimesini sadece dedüktif ispatlarla sınırlandırmamışlar, deneysel ispatları da şemalarına dâhil etmişlerdir. Bu durum Harel ve Sowder'ın (1998) argümantasyon ile ispatı birbirinden ayrı görmediğini ortaya çıkarmıştır.

Öğrencilerin ispata yönelik karşılaştıkları güçlükleri ortaya çıkarmaya çalışan araştırmacılar argümantasyon ile ispat arasında bir süreklilik olduğunu düşünmüşlerdir. Öğrencilerin ispat yapmada yaşadıkları güçlüğü incelemek için onların ispat yapmadan önce girdikleri düşünce süreçlerine odaklanmışlardır. Bir önerme üretme süreci olan argümantasyon ile bu önermenin doğruluğunu gösterme süreci olan ispat arasında sürekliliğin olduğunu düşünmüşlerdir. Bu süreklilik aynı zamanda bir varsayım oluşturma (conjecturing) ile bu varsayımın ispat edilmesi arasındaki ilişkiyi de tarif etmektedir (Balacheff, 1999; Douek, 1998; Lakatos, 1976; Thurston, 1994). Argümantasyon ile ispat arasındaki ilişki analiz edilmeye ve karşılaştırılmaya çalışılmıştır. Bu karşılaştırmanın temelinde ispatın argümantasyonun özel bir hali olduğu düşüncesi yatmaktadır (Pedemonte, 2008).

Araştırmacılar ilk olarak varsayım oluşturma süreci ile onun ispatı arasındaki ilişkiyi içerik açısından incelemişlerdir (Garuti vd., 1998). İçerik ile kastedilen argümantasyon ve ispatta kullanılan dil, matematiksel teoriler, sezgiler ve çizimlerdir. Daha açık ifade etmek gerekirse içerik ile kastedilen argümantasyon ve ispat sürecinde öğrencinin aklından geçirdiği fikirler, kullandığı teoremler ya da fikirlerini ifade ederken yaptıkları çizimlerdir (Dinçer, 2011). Bazı araştırmacılar öğrencilerin varsayım üretme süreci ile onun ispatı arasında bir süreklilik olduğunu belirtmişlerdir. Bu sürekliliği "bilişsel bütünlük" olarak adlandırmışlardır.

Bilişsel bütünlük hipotezi, bazı durumlarda varsayım oluşturma sürecindeki argümantasyonun öğrenciler tarafından daha önceden üretilen argümanların mantıklı bir şekilde organize edilerek ispat yaparken kullanılmasıdır. Yani argümantasyonda kullanılan bazı kelimeler, çizimler ya da teoremler ispatta da kullanılıyorsa argümantasyon ile ispat arasında içerik anlamında süreklilik vardır denir (Boero vd., 2010; Pedemonte, 2007). Eğer argümantasyon ile ispat süreçleri arasında bilişsel süreklilik var ise öğrenciler için ispata ulaşmak kolaylaşmaktadır. Buna karşın bilişsel bütünlük olmadığı durumda, bilişsel bütünlük düşüncesi öğrencilerin bazı güçlüklerin analiz edilmesi, tahmin edilmesi ve yorumlanmasında kullanılabilmektedir (Garuti vd., 1998; Pedemonte, 2007).

Garuti vd. (1998) bilişsel bütünlük hipotezinin teoremlere bütüncül bir şekilde bakmanın önemini vurgulamak ve öğrencilerin geleneksel ispat yaklaşımında karşılaştıkları güçlükleri yorumlamak için ortaya atıldığını ifade etmişlerdir. Ayrıca önermelerin doğru olup olmadığını belirlemek için gerekli olan keşfetme süreci ile ispatlama süreci arasındaki boşluk arttıkça ispatlama sürecinin öğrencilere daha zor geldiğini söylemişlerdir. Ayrıca, ispat yapmada başarılı olan tüm öğrencilerin önermeyi ispatlamak için kullandıkları varsayımların akla mantığa uygun olup olmadığı konusunda devamlı argümanlar ürettiklerini tespit etmişlerdir. Bu nedenle dinamik keşif aktiviteleri ile akla mantığa uygunluk için argümanlar üretmenin ispat yapmada gerekli olan adımlar olduğunu belirtmişlerdir.

Boero vd. (2010) öğrencilerin argümantasyonları ile ispatları arasındaki bilişsel bütünlüğü açıklamaya çalışmışlardır. Eğer öğrenciler matematiksel argümantasyonlarında gerekçe olarak matematiksel bir kural kullanılıyorsa bu kural ispatta bir teorem ile yer değişeceğinden argümantasyon ile ispat arasında bilişsel anlamda bir süreklilik oluşacağını ifade etmişlerdir. Argümantasyonda kullanılan gerekçe bir kural değil ise üç durum ile karşılaşılır. Birinci durumda öğrenciler ispatı yapamaz. İkinci durumda argümantasyonda kullanılan, doğru olmayan kurala dayanan yanlış bir ispat yapılır (bilişsel bütünlük). Son durumda ise yanlış argümantasyon terkedilir, başka bir argümantasyon inşa edilir ve doğru ispata dönüşür (Bilişsel bütünlük bozulur fakat başarılı bir ispat inşa edilir.) (Boero vd., 2010).

Pedemonte (2007) yaptığı çalışmada bazı öğrencilerin ispat yapmak için gerekli olan teoremleri bilmelerine rağmen ispat yapamadıklarını tespit etmiştir. Bu durum bilişsel bütünlük hipotezi ile uyuşmamıştır. Öğrencilerin argümantasyon ile ispatları arasında bilişsel bütünlüğün olduğu durumda ispat üretmeleri beklenmektedir.

Argümantasyon ile ispat arasında bilişsel bütünlük varsa öğrenciler büyük olasılıkla varsayımı ispatlayabilmektedir (Pedemonte, 2007). Bilişsel bütünlük hipotezinin öğrencilerin ispat yapamadığı durumları açıklamada yetersiz kaldığını ifade etmiştir. Bu sebeple, öğrencilerin argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasındaki ilişkinin daha detaylı incelenmesinin gerekli olduğunu vurgulamıştır. Pedemonte, daha önce dikkate alınmamış yapısal bütünlük hipotezini ortaya atmıştır. Yapı ile kastedilen ifadeler arasındaki mantıksal bilişsel bağlantıdır (Boero vd., 2010). Pedemonte'ye (2007) göre argümantasyon ve ispatın yapıları indüktif, abdüktif ya da dedüktif olabilir. Dedüktif yapı bir kural ya da veriden başlayarak bir iddianın oluşturulmasına olanak sağlayan çıkarımdır. Toulmin modelinde veri ve gerekçe sonuca götürüyorsa bu bir dedüktif yapıdır. Abdüktif yapı, gözlenen bir gerçekle başlayan bir iddianın oluşmasına izin veren bir çıkarımdır. Abdüktif yapıda iddiayı doğrulayan kuralın sonuca uygulanabilmesi için uygun verilerin aranması söz konusudur. İndüktif yapı ise özel durumlardan genel bir iddianın oluşmasına olanak sağlayan bir çıkarımdır (Pedemonte, 2007). Argümantasyon ve ispattaki çıkarım kuralları aynı yapıda ise argümantasyon ile ispat arasında yapısal süreklilik vardır, aynı yapıda değilse iki süreç arasında yapısal boşluk olduğu söylenebilir (Pedemonte, 2008). Yapısal süreklilik, ispat yapmadaki zorluklardan biridir. Bazen öğrenciler kendi argümantasyon yapılarını dedüktif yapıya transfer edemedikleri için ispat yapmada başarılı olamamaktadırlar (Pedemonte, 2007). Pedemonte (2008), öğrencilerin argümantasyon ve ispatları arasındaki yapısal mesafeden dolayı ispat yapamadıklarını belirtmiştir. Pedemonte (2007), argümantasyon ve ispat arasındaki ilişkiyi yapısal olarak Toulmin modeline göre analiz ederek karşılaştırmıştır. Ortaya atılan bu yeni bakış açısı bu konudaki araştırmalara öncülük etmiştir (Inglis vd., 2007; Knipping, 2008; Martinez ve Pedemonte, 2014; Nardi vd., 2012; Pedemonte, 2008; Pedemonte ve Buchbinder, 2011; Pedemonte ve Reid, 2011).

Pedemonte (2007) argümantasyon ile ispat arasındaki ilişkinin analizinde öğrenciler için argümantasyon aşamasının bitip ispat aşamasının nerede başladığını ayırt etmenin önemli olduğunu ifade etmiştir. Bu ayırımı yapabilmek için varsayım ile teorem arasındaki farkın bilinmesinin gerekli olduğunu belirtmiştir. Bir teoremin önerme, ispat ve matematiksel teori bileşenlerinden oluştuğunu belirten Pedemonte, varsayımın önerme, argümantasyon ve düşünceler sistemi olmak üzere üç bileşenden oluştuğunu ifade etmiştir. Bu tanıma göre varsayım, bir önermeye ikna olmayı sağlayan düşünce sistemi olduğu için mevcut olduğu söylenebilir. İspatta ve argümantasyonda kullanılan mantıksal bağlantılar birbirinden farklıdır. İspatın her adımı dedüktif adım olarak tarif edilirken argümantasyonun yapısı dedüktif yapıdan farklı olabilir (Pedemonte, 2007).

Boero vd. (2010) argümantasyon ile ispat arasındaki referans sistemindeki süreklilik ispat yapmayı desteklerse bunun yapısal süreklilik için bir şart olmadığını ifade etmiştir. Yani bilişsel bütünlük hipotezinin var olması yapısal sürekliliğin olmasını gerektirmemektedir. Çünkü argümantasyonun yapısı genel olarak dedüktif değildir (Boero vd., 2010).

Argümantasyonun yapısının ispattan farklı olduğu durumlarda dedüktif bir ispat yapabilmek için abdüktif ve indüktif adımlardan dedüktif adımlara yapısal bir değişikliğe ihtiyaç vardır. Bu değişim öğrenciler için kolay olmamakla birlikte gereklidir. Aksi taktirde ispatın yapısı dedüktif olmayacaktır. Fakat süreklilik durumunda ispatın yapısı nadiren dedüktif olur çünkü bir varsayımı oluşturma ve doğrulamada dedüktif yapıda argümanlar üretmek çok zordur (Pedemonte, 2007).

Argümantasyon ile ispat süreçleri arasında inkâr edilemeyen farklılıklar olmasına rağmen iki süreç arasındaki ilişkiyi dikkate almak önemsenmelidir (Garuti vd., 1998). İspatlar Duval'in (1991) belirttiği gibi formel bir model ile tarif edilebilir fakat ispatların içerisindeki adımlar arası geçişler çoğu zaman içerik ile alakalıdır. İspatların doğruluğunun kontrol aşaması ve ispatların öncesinde gerçekleştirilen teoremin önermesinin keşif aşamasında yoğun argümantasyonal aktiviteler gerçekleşmektedir. Bu bakımdan ispatları sadece son ürün olarak değerlendirmekten ziyade öğrencilerin ispatlarının ve argümanlarının nasıl oluşturulduğuna odaklanmak gerekmektedir (Rice, 2014). İspatların öğretimi sırasında öğrencilere argümanlar üretmeleri için fırsat verilmelidir (Balacheff, 1999). Özellikle öğrencilerin argümanlarını şekillendiren mantığı ve bağlamsal kısıtlamaları anlamak, ispat öğretimindeki çabaların geliştirilmesine yardımcı olacaktır (Knipping, 2008).

Yapılan birçok araştırmada öğrencilerin ispat yapmadan önce geçirdiği varsayım üretme sürecinin dikkate alınması gerektiği ve iki süreç arasındaki bütünlüğün ispat yapma başarısı ile ilişkili olduğu tespit edilmiştir (Garuti vd., 1998; Pedemonte, 2007). İspatların sadece öğrencilere sunulduğu ve öğrencilerin kendilerinin ispatı oluşturmak zorunda olmadığı, tekrarlayarak öğrenmeye dayalı ispat öğretiminin çoğunlukla başarısız olduğu görülmüştür (Pedemonte, 2007). Öğrenciler ders notlarında bulunan ispatları anlamak/ezberlemek için çok fazla zaman harcarlar. Öğrencilerin amacı sınavlarda bu argümanları ya da bir parçasını dersin hocasına sunmaktır (Mejia-Ramos ve Inglis, 2009). Özellikle "ispatlayınız" şeklindeki etkinliklerde varsayım üretme sürecine gerek kalmadığı için iki süreç arasındaki bütünlük bozulur. Bu bütünlük belki de sadece önermeleri yeniden keşfetme sürecinin oluşmasıyla sağlanabilir (Garuti vd., 1998). Varsayım oluşturmanın gerekli olduğu problemler ispat öğrenimi için kullanılabilir (Pedemonte, 2007). Keşfetme, bir varsayım oluşturma, keşfe geri dönme ve onu bir ispat içerisinde düzenlemeyi içeren tüm döngü inşa edilmelidir (Garuti vd., 1998). Öğrencilerin ve matematikçilerin ispat ve argümantasyon anlayışlarını derinlemesine anlamak için öğrencilerin matematik derslerindeki ispatlama aktivitelerinin tiplerini ve öğrencilerin bu tarz aktivitelerde kullandıkları muhakemeler üzerine daha fazla çalışmanın yapılması önerilmektedir (Mejia-Ramos ve Inglis, 2009).

Bu çalışmada, ispatın özel bir argümantasyon aktivitesi olduğu (Pedemonte, 2007) düşüncesine paralel olarak öğrencilerin argümantasyonları ile ispatları arasındaki ilişki yapısal olarak incelenmiştir. Öğrencilerin bir önermenin doğruluğuna ikna olma süreci olan argümantasyon ile bu önermeninin ispatı arasındaki ilişki analiz edilerek karşılaştırılmıştır. Öğrencilerin argümantasyonları ile ispatları arasındaki ilişkiyi analiz edebilmek için analizin temel konularında önermeler sunulmuştur. Öğrencilerin bu önermelerin doğruluğunu değerlendirerek bir karara varmaları istenmiştir. Öğrencilerin bu süreci argümantasyon olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerin önermenin doğru olduğuna karar vermelerinin ardından önermeyi doğrulamaya yani ispatlamaya çalışmışlardır. Öğrencilerin ürün oluşturma süreci, ispatlama süreci olarak dikkate alınmıştır. Çalışmada kullanılan bu yöntem literatürdeki benzeri çalışmalar ile uyumludur (Martinez ve Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2007, 2008; Pedemonte ve Buchbinder, 2011; Pedemonte ve Reid, 2011).

Argüman kavramını ilk ortaya atan informel mantığın kurucularından olan Toulmin'dir. Toulmin bir argümanın sahip olduğu yapı için tanımladığı altı bileşenli bir örüntü zaman içinde Toulmin modeli adını almıştır. Bu çalışmada, öğrencilerin argümantasyon ve ispat süreçlerinin analiz edilmesi ve karşılaştırılmasında Toulmin modeli kullanılmıştır. Toulmin modeli öğrencilerin argüman ve ispatlarının yapılarını tespit etmek, analiz etmek ve karşılaştırmak için verimli bir araçtır (Boero vd., 2010; Pedemonte, 2007, 2008; Rumsey, 2012).

2.1.3. Toulmin modeli

"Toulmin modeli, argümantasyon ile ispat arasındaki referans sistemini ve yapıyı analiz etmek ve karşılaştırmak için kullanılan bir yöntemdir (Boero vd., 2010)."

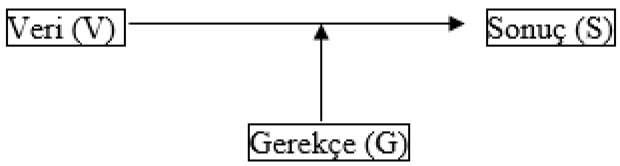
Toulmin, argümanları analiz etmek için var olan formel mantıktan farklı bir yaklaşım sergilemiştir. Toulmin, bir argümanın mantıksal geçerliğinden daha çok argümanların mantıksal içeriğine ve argümanı oluşturan yapılara odaklanmıştır. Böylece 1958 yılında Toulmin'in mantık-karşıtı olan "Argümanın Kullanımları (The Uses of Argument)" kitabı ortaya çıkmıştır. Formel mantık ile farkını vurguladığı için Toulmin'in argümanları analiz yöntemi informel mantık olarak bilinir (Inglis vd., 2007). Toulmin'in öne sürdüğü model büyük ilgi görmüş ve farklı disiplinlerde argümanları belirlemek, oluşturmak ve analiz etmek için kullanılmıştır (Jolliff, 1998; Pedemonte, 2007; Simon, 2008).

Toulmin'e (2003) göre her iyi inşa edilmiş mantıklı bir argümanda birbiri ile ilişkili üç ana eleman bulunur. Bu elemanlar veri, gerekçe ve sonuç/iddia bileşenleridir.

Sonuç/iddia (S) kişinin muhatabını ikna etmek istediği önermesidir. Doğrulanması istenen sonuçtur. Toulmin modelinin bu bileşeni için bazı araştırmacılar sonuç (Inglis vd., 2007; Nardi vd., 2012) kelimesini bazı araştırmacılar da iddia kelimesini (Pedemonte, 2007, 2008) kullanmıştır. Knipping (2008) iddia ile sonuç arasında bir ayırım yapmıştır. Eğer argümanda üç temel bileşen de mevcut ise bu bileşeni sonuç, bileşenlerden en az biri yok ise iddia olarak isimlendirmiştir. Bu çalışmada da bu sınıflandırma takip edilmeye çalışılmıştır. Veri (V) ise, S sonucunu doğrulayan veridir. S sonucunun delilidir. Gerekçe (G), sonuç çıkarma kuralıdır. Bu kural veriden sonuca ulaşmayı sağlar. Sonucun ya da iddianın geçerli olduğunu gösteren ve veri ile sonuç arasında köprü vazifesi gören bileşendir.

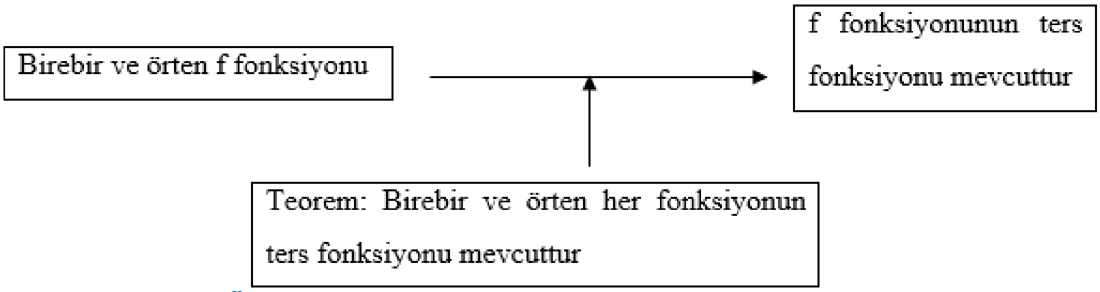
Herhangi bir argümanda ilk adım olarak bir bakış açısı ifade edilmektedir (iddia, görüş). Toulmin terminolojisinde bu bakış açısı iddia ile isimlendirilir. İkinci adım iddiayı doğrulayacak veri üretmektir. Gerekçe ise, veri-iddia ilişkisinin destekleyicisidir. Gerekçe, veriyi kullanarak bir doğrulama sağlar. Gerekçe bir kural, tanım uygulama ya da benzetme olabilir. Konuşma dili ile veri "İlerlemek için elinde ne var? (What have you got to go on)" sorusunun cevabıdır. Gerekçe ise "Oraya nasıl gidiyorsun? (How do you get there?)" sorusunun cevabıdır. Bu çalışmada gerekçe bileşeni genel olarak "Veriden sonuca nasıl ulaştın?" sorusuna karşılık elde edilen, "çünkü, -den dolayı, yüzünden *vb.*" kelimeleri ile başlayan cevaplar olarak ortaya çıkmıştır.

Toulmin'in veri, sonuç ve gerekçeden oluşan üç bileşenli basit modeli bir argümanı analiz etmek için eğitim literatüründe yeterli görülmüştür. Toulmin'in üçlü basit modeli sınıf ortamındaki matematiksel argümanları (Krummheuer, 2007), temel sayı becerilerini (Evens ve Houssart, 2004), mantıksal çıkarımları (Hoyles ve Küchemann 2002; Weber ve Alcock, 2004), ve genel ispatları (Yackel, 2001) inceleyen çalışmalarda kullanılmıştır. Argümanları incelemek için kullanılabilecek üç bileşenli model aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Toulmin'in üç bileşenli basit argüman modeli

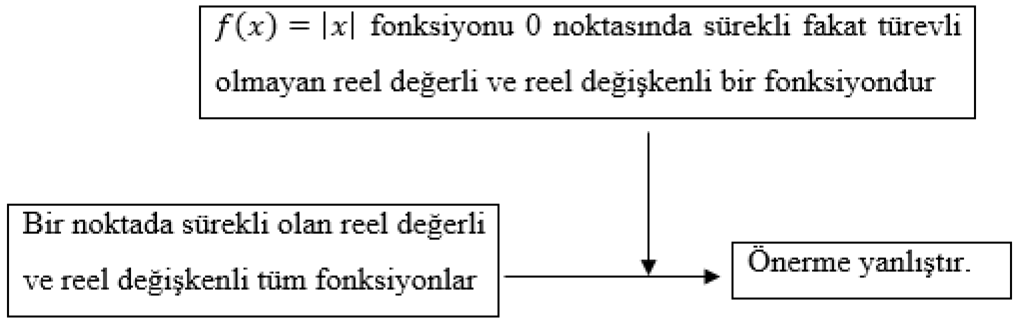
Toulmin'in üç bileşenli basit modelini daha iyi anlamak için bir öğrencinin elinde bulunan birebir ve örten *f* fonksiyonun ters fonksiyonunun mevcut olduğu iddiasını savunmak istediğini düşünelim. Öğrencinin elinde bulunan birebir ve örten *f* fonksiyonu için, "birebir ve örten her fonksiyonun ters fonksiyonu mevcuttur" teoremini gerekçe olarak kullanarak, *f* fonksiyonunun ters fonksiyonunun mevcut olduğu sonucuna ulaşsın. Öğrencinin ürettiği argümanda birebir ve örten *f* fonksiyonu argümanın verisi, *f* fonksiyonunun tersinin mevcut olması argümanın sonucudur. Birebir ve örten her fonksiyonun ters fonksiyonunun mevcut olması teoremi ise veriyi sonuca bağlayan gerekçe bileşenidir. Bu argümanın Toulmin modeline göre analizi aşağıda sunulmuştur.



Şekil 2.2. Üç bileşenli argümanın Toulmin modeline göre analizinin örneği

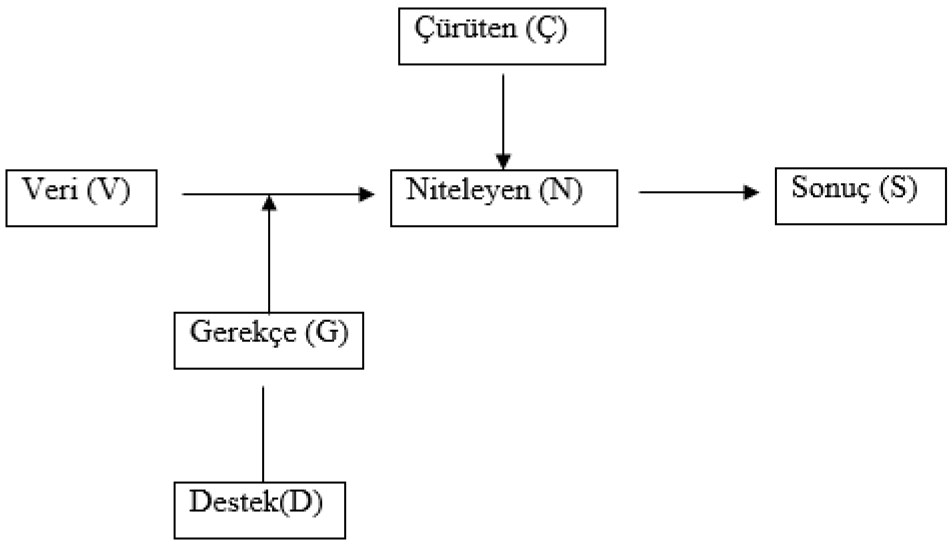
Argümanlara üç yardımcı bileşen daha eklenebilir. Bu bileşenler gerekli olmamakla birlikte iddiayı kuvvetlendirir. Niteleyen (N) bileşeni iddiaya zarflar (kesinlikle, muhtemelen, büyük olasılıkla *vb.*) şeklinde eklenir ve sonucun güvenirlik derecesini belirtir. Destek (D) bileşeni gerekçeyi destekler. Destek bileşeni gerekçenin gücünün ve geçerliğinin açık bir şekilde görülemediği durumda gereklidir. Matematikte gerekçenin desteği genellikle tanımlar, kurallar, teoremler ya da gerekçenin geçerli olduğu alan olabilir (Pedemonte, 2007, 2008; Rumsey, 2012). Çürüten (Ç) bileşeninin sonucun sağlanmadığı ya da geçerli olmadığı durumu ortaya koyarak sonucu çürütme potansiyeli vardır. Matematikte bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için ters örnekler kullanılır. Ters örnekler argümanın geçerli olmadığı durumları belirtmek için çürüten rolünü oynayarak argümanı zayıflatır (Pedemonte ve Buchbinder, 2011). Eğer söz konusu iddia bir önerme şeklinde ise, bu önermeye ait ters örnek bulunması halinde, sonuç olarak önermenin yanlış olduğuna karar verilir.

Matematik formel mantığın güçlü olduğu alanlardan biri olduğu için bu alandaki iddialar genellikle önermeler halinde ortaya çıkar. Örneğin reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için, “bir noktada sürekli olan her fonksiyon aynı noktada türevlidir” önermesinin doğru olup olmadığının tartışıldığını düşünelim. Sıfır noktasındaki $f(x) = |x|$ fonksiyonu bu önerme için ters bir örnektir. Söz konusu fonksiyon sıfır noktasında sürekli fakat türevli olmayan bir fonksiyondur. Bu ters örnek dikkate alınarak önermenin yanlış olduğu sonucuna ulaşılmalı ya da iddia, önermenin değili ile revize edilmelidir. Bu örnek için elde edilen sonucun söz konusu önermenin yanlışlığı olduğunu düşünelim. Argümanların bileşenlerini analiz ettiğimizde, bir noktada sürekli olan reel değerli ve reel değişkenli tüm fonksiyonlar argümanın veri (V) bileşenidir. Sıfır noktasındaki $f(x) = |x|$ fonksiyonu ise önermenin çürüten (Ç) bileşenidir. Çünkü bu fonksiyon, sıfır noktasında sürekli fakat türevli olmayan reel değerli ve reel değişkenli bir fonksiyondur. Çürüten bileşeni dikkate alınarak elde edilen sonuç (S), "bir noktada sürekli olan reel değerli ve reel değişkenli her fonksiyon aynı noktada türevlidir" önermesinin yanlış olduğudur. Elde edilen bu argümanın Toulmin modeline göre analizi aşağıda sunulmuştur.



Şekil 2.3. Çürüten bileşenli argümanın Toulmin modeline göre analizinin örneği

Toulmin modelinde ana bileşenlere yardımcı bileşenlerin de eklenmesiyle altı bileşenli yapıya kavuşulmuştur.



Şekil 2.4. Toulmin modelinin altı bileşenli yapısı (Inglis ve diğerlerinden (2007) uyarlanmıştır)

Eğitim literatüründe Toulmin modeli hem sınıf içinde nasıl bir tartışma ortamının oluşturulduğunu (Wood, 1999) hem de öğrenmenin nasıl ilerlediğini ortaya çıkarmak ve analiz etmek için kullanılmaktadır (Yackel, 2001). Bu model öğrencilerin argümantasyon süreçlerini analiz etmek ve bilişsel, içerik ve yapı bakımından argümantasyon ile ispatı karşılaştırmak için kullanılmaktadır (Dinçer, 2011; Pedemonte, 2007, 2008). Matematikte ispatlar argümantasyonun özel bir şeklidir (Pedemonte, 2007). Çıkarımlar olarak ifade edilen mantıksal doğrulamaların bir kümesidir (Toulmin, 2003). Bu çıkarımlar Toulmin modeli kullanılarak analiz edilir ve karşılaştırılır. Toulmin modeli argümantasyon ve ispatları analiz etmek için kullanılsa da son dönemde yapılan çalışmalar, bu modelin problem çözümünde ve tanımların öğretiminde de kullanılabileceğini göstermiştir (Dinçer, 2011).

Toulmin (2003) kendi argüman yapısını kurmadan önce kuracağı yapının daha iyi anlaşılması için bazı teknik terimler tanımlamıştır. Bunlardan biri tartışmanın "alanı"dır. Alan kavramına dikkat edilmesini öneren Toulmin, argümantasyonun çoklu-formdaki karakterlerini vurgulamıştır. Toulmin, iki argümanın aynı alana sahip olmasını her iki argümanda kullanılan veri ve sonuçların aynı mantıksal tipe sahip olması şeklinde tanımlamıştır. Her iki argümanda kullanılan destek ve sonucun aynı mantıksal tipe sahip olmamasını da argümanların farklı alanlardan gelmesi olarak tanımlamıştır. Toulmin alan görüşüne dikkat edilmesini önermiştir. Bu öneriyi dikkate alan matematik eğitimcileri Toulmin modelini kendi çalışma alanlarına uygun olarak tekrar yapılandırmış ve kullanmışlardır (Knipping, 2008, Pedemonte, 2007). Toulmin'in de belirttiği gibi matematiksel argümantasyon ve ispat bir alana özgüdür. Argümantasyonların anlamının karşılaşılan ya da kullanılan durumlara göre değişebileceği belirtilmektedir. İspat için bahsedilen alanlar cebir, analiz ve geometri gibi teorik alanlardır. Matematikte bir argümantasyonun alanı, kullanılan kriterin geçerliğini sınırlandırır. Örneğin geometrideki bir argümantasyonun geçerliği için kullanılan aksiyomlar, cebirsel argümantasyonda kullanılandan farklı olabilmektedir (Pedemonte, 2007).

Aşağıda Pedemonte'nin (2008) çalışmasından alınan bir soru üzerinden Toulmin modelinin matematikteki argümantasyonları analiz etmek için nasıl kullanıldığı gösterilmiştir.

Bir sınıf ortamında bir öğretmenin (A) öğrencisine (B) “a sıfırdan farklı herhangi bir tamsayı olsun. Bu durumda $-a^2$ hakkında ne söylenebilir? Pozitif mi yoksa negatif midir?” şeklinde bir soru yönelttiğini ve aşağıdaki tartışmanın yapıldığını düşünelim.

A: a sıfırdan farklı herhangi bir tamsayı olsun. Bu durumda $-a^2$ hakkında ne söylenebilir? Pozitif mi yoksa negatif midir?

B: Muhtemelen negatiftir.

A: Neden? Bu sonuca nasıl ulaştın?

B: Çünkü her sayının karesi bir pozitif sayıdır fakat önüne eksi işareti gelince artık o, bir negatif sayıya dönüşür.

A: Peki üs olarak yazılan “2” tüm sayıya ait ise ne olur?

B: Eğer üs olan “2“ sayısı tüm sayıya ait ise $-a^2$ pozitif bir sayı olur.

A: Böyle bir durum mümkün müdür?

B: Böyle bir durum mümkün değildir çünkü $-a^2$ ile $(-a)^2$ farklı şeylerdir.

Bu argümantasyonun Toulmin modelinin bileşenlerine ayrılmış hali aşağıdaki gibidir:

V: $-a^2, a \in Z, a \neq 0$

S: $-a^2 < 0$

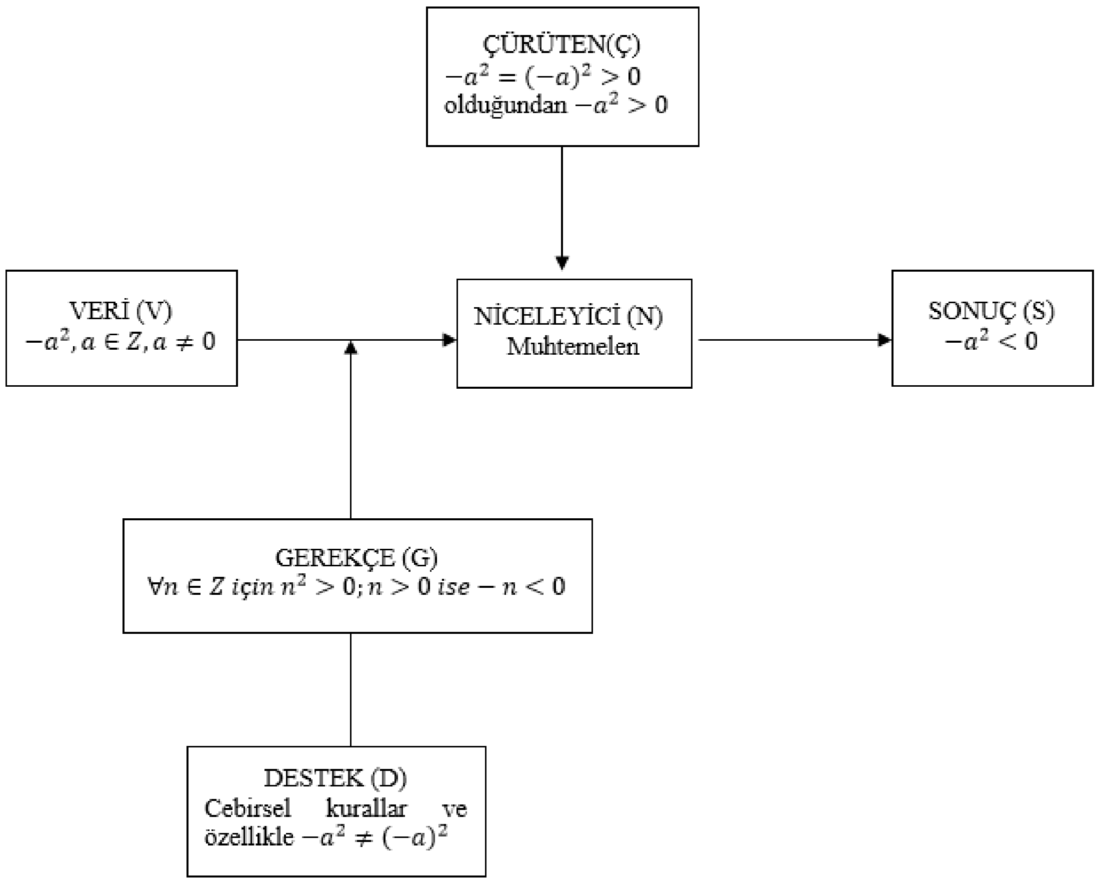
G: $\forall n \in Z\ için, n^2 > 0; n > 0\ ise - n < 0$

Ç: $-a^2 = (-a)^2 > 0$ olduğundan $-a^2 > 0$’dır.

D: Cebirsel kurallar ve özellikle $-a^2 \neq (-a)^2$

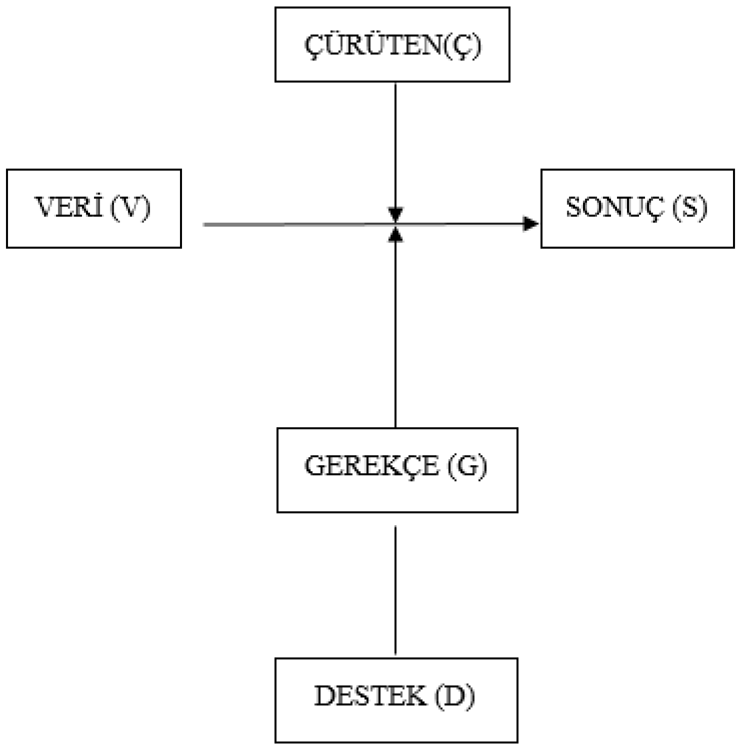
N: Muhtemelen.

Bu argümantasyonun Toulmin diyagramına göre gösterilişi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.5. Altı bileşenli argümanın Toulmin modeline göre analizinin örneği (Pedemonte'nin (2008) çalışmasından uyarlanmıştır)

Bu çalışmada Toulmin modelinin niteleyen bileşeni öğrenciler tarafından genellikle kullanılmadığı için analiz edilmemiştir. Çalışmada Toulmin modelinin beş bileşenli yapısı öğrencilerin argümantasyonlarını analiz etmek için kullanılmasının daha uygun olacağı düşünülmüştür. Yapılan araştırmada çürüten bileşeni, önermeyi çürüten ters örnekler olarak ortaya çıktığı için yardımcı bir bileşenden daha çok Toulmin modelinin ana bileşenlerinden biri olarak dikkate alınmıştır. Aşağıda çalışmada kullanılan Toulmin modelinin şekli sunulmuştur.



Şekil 2.6. Çalışmada kullanılan Toulmin modelinin şekli

2.2. İlgili Araştırmalar

2.2.1. Öğrencilerin matematiksel ispata yönelik görüşleri üzerine yapılan çalışmalar

Bu bölümde çoğunlukla matematik öğretmeni adayları olmak üzere, üniversite öğrencilerinin ispata yönelik görüş, algı ve inançları üzerine yapılan araştırmalar derlenmiştir. Yapılan araştırmaların çoğunluğunda kullanılan ölçme aracının ölçekler olduğu görülmüştür. Bazı araştırmacılar öğrencilerin ispatın anlamına ve önemine yönelik görüşlerinin olumlu olduğu yönünde sonuçlar elde ederken (Baştürk, 2011; Güler ve Dikici, 2012; İskenderoğlu ve Baki, 2011) bazıları da görüşlerin sınırlı olduğunu (Doruk ve Güler, 2014; Kayagil, 2012; Moralı vd., 2006) belirtmişlerdir. Bir kısım araştırmacılar ise öğrencilerin ispatları anlama ve yapmada özgüvenlerinin düşük olduğunu (Doruk ve Kaplan, 2013a) ve ispatları öğrenme biçimlerinin ezber odaklı olduğunu belirtmişlerdir (Baştürk, 2010). Çalışmaların bir kısmı da öğrencilerin ispat algılarını ortaya çıkarmaya ve sınıflandırmaya yöneliktir (Almeida, 2000; Kaplan, Doruk ve Özdemir, 2015; Köğce, 2013). Bazı araştırmalar ise ispata yönelik görüşlerin öğrencilerin cinsiyetlerine, sınıf düzeylerine ve öğrenim gördükleri bölümlere göre farklılaşıp farklılaşmadığı üzerine odaklanmıştır (Anapa ve Şamkar, 2010; Doruk ve Güler, 2014; Kayagil, 2012; Turğut vd., 2013). Sınırlı sayıda da olsa, ispata yönelik görüşler ile ilişkili olabilecek değişkenleri araştıran çalışmalar da mevcuttur (Doruk, Özdemir ve Kaplan, 2015; Güler vd., 2012; İmamoğlu, 2010).

Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere (2006) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşlerinin ne olduğunu ortaya çıkarmaya yönelik çalışma yapmışlardır. Çalışmanın verileri Almeida (2003) tarafından geliştirilen ve türkçeye uyarlanan ölçek yardımıyla toplanmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının büyük kısmının ispat yapmaya yönelik ya görüşlerinin olmadığı ya da görüşlerinin yetersiz olduğu tespit edilmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının ispat yapmanın, matematik ve matematik eğitimi açısından önemini bilmedikleri ve üzerinde düşünmediklerini göstermiştir. Ayrıca ispata yönelik görüşlerin, ispat yapma becerilerine ilişkin varsa sorunların ortaya çıkarılma ve giderilmesi anlamında önemsenmesi gerektiği vurgulanmıştır.

Kayagil (2012) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini belirlemek ve ispata yönelik görüşlerin cinsiyet, mezun olunan lise türü, sınıf ve matematikle ilgili bilimsel bir etkinliğe katılma durumu değişkenlerine göre farklılık gösterip göstermediğini tespit etmek amacıyla çalışma yürütmüştür. Çalışmanın araştırma grubunu ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün farklı sınıf düzeylerinde öğrenim gören toplam 357 öğretmen adayı oluşturmuştur. Veri toplama aracı olarak Moralı vd. (2006) tarafından dilimize uyarlanan ölçek kullanılmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik ne olumlu ne de olumsuz görüşlerinin olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin incelenen değişkenlere göre farklılık göstermediği sonucuna ulaşılmıştır.

Baştürk (2011) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatın matematik ve matematik eğitimindeki yeri hakkında görüşlerini ortaya çıkarmak amacıyla çalışma yapmıştır. Çalışmanın verileri 40 öğretmen adayına, geliştirilen bir anketin uygulanması ve öğretmen adayları arasından seçilen sekiz öğretmen adayı ile görüşme yapılarak elde edilmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adayları matematiksel ispatların bilgilerin kalıcılığı için önemli bir role sahip olduğunu düşündükleri belirtilmiştir. Ayrıca öğretmen adayları, ispatların öğrenmeleri gereken kuralların ve formüllerin altında yatan sezgiyi anlamak için fırsatlar sunduğunu ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları ispatla yapılan öğretimin kendi üniversitelerinde olduğu gibi ezbersiz bir eğitimi garanti etmeyeceğini ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları kendi derslerinde ispatlara kolay, anlaşılabilir ve öğrencilerin istekli ve bilgi seviyesi yeterli olduğu durumlarda yer vereceklerini ifade etmişlerdir.

İskenderoğlu ve Baki (2011) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşlerini belirlemek için farklı sınıf seviyesinden 187 öğretmen adayı ile çalışma yürütmüşlerdir. Lee (1999) tarafından geliştirilen ve araştırmacılar tarafından türkçeye uyarlanan "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin genel olarak olumlu olduğu sonuca ulaşılmıştır. Çalışmanın bu sonucu Moralı vd. (2006) çalışmasının sonuçları ile uyuşmamıştır. Ayrıca ölçeğin alt ölçeklerinden yararlanılarak, öğrencilerin ispata zihinsel olarak olumlu yaklaştıkları, ispata yönelik güvenlerinin ortalama bir düzeyde olduğu, ispatları yaparken sık sık kendilerini gözden geçirip değerlendirme yaptıkları ve ispata yönelik olumlu tutum-inanca sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

Güler ve Dikici (2012) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini ortaya çıkarmak amacıyla nitel araştırma yaklaşımı ile çalışma yürütmüşlerdir. Çalışma 12 ortaöğretim matematik öğretmeni adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmelerle elde edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri ispata yükledikleri anlam, ispatın amacı, ispatın önemi ve ispatlarda başarılı ya da başarısız olmalarını etkileyen faktörler boyutlarında incelenmiştir. Çalışmada öğrencilerin matematiksel ispata yönelik görüşlerinin olumlu olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğretmen adayları ispatlarda başarılarını etkileyen en önemli faktör olarak ispatın yapıldığı ders ya da konu olduğunu, başarılı ve başarısız oldukları ispatlar arasındaki farkın ilgili kavramın iyi öğrenilip öğrenilmemesi ile alakalı olduğunu ifade etmişlerdir. Doruk ve Kaplan (2013a) da yaptıkları benzer bir çalışmada, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşlerini ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Altı öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılarak veriler toplanmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının ispata yönelik olumlu anlamlar yüklemelerine rağmen matematiksel ispatı kendilerine faydasız olarak gördükleri belirlenmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının problem çözme ile ispat arasındaki ilişkiye yönelik yanılgı içinde oldukları, kendilerine göre bir ispatlama yöntemlerinin olmadığı ve ispata karşı öz güven eksikliklerinin olduğu tespit edilmiştir.

Doruk ve Güler (2014) matematiksel ispata yönelik görüşleri farklı boyutlardan ölçebilecek bir ölçek geliştirme çalışması yapmışlardır. Çalışmanın ana uygulaması tüm sınıf düzeylerinden 480 ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Çalışma sonucunda 31 madde ve beş alt ölçekten oluşan beşli likert tarzda bir matematiksel ispata yönelik görüş ölçeği geliştirilmiştir. Ölçeğin boyutları; gereklilik, fayda, özgüven, anlam ve problem çözme ile ispat arasındaki ilişki şeklindedir. Çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik genel görüşlerinde kararsız oldukları tespit edilmiştir. Alt ölçekler incelendiğinde ise, öğretmen adaylarının ispata yükledikleri anlamın olumlu olmasına rağmen ispatları anlamaya ve yapmaya yönelik özgüvenlerinin düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar araştırmacıların daha önce yaptıkları nitel çalışmaları desteklemiştir (Güler ve Dikici, 2012; Doruk ve Kaplan, 2013a). Ayrıca üçüncü sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının birinci ve ikinci sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarına göre ispata yönelik görüşlerinin daha olumsuz olduğu belirtilmiştir.

Baştürk (2010) çalışmasında, birinci sınıfta öğrenim gören ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematik ve matematik eğitiminde ispat hakkındaki görüşlerini ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Çalışmanın verilerini 33 ortaöğretim matematik öğretmeni adayına geliştirdiği anketi uygulayarak ve öğretmen adayları arasından seçilen 10 öğretmen adayı ile görüşülerek elde edilmiştir. Öğrencilerin sınava çalışma yöntemlerinin taklide dayalı bir muhakeme şeklinde olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ders kitabında veya notlarında bulunan ispatları kopyalamakta ya da ispat algoritmasını hatırlamaya çalışmakta olduğu belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat ve ispat yapmada karşılaştıkları güçlüklerin başlıca sebebi olarak lise ve üniversite matematik öğretimi arasındaki fark olduğu ifade edilmiştir.

Almeida (2000) yaptığı çalışmada lisans matematik öğrencilerinin ispat algılarını ortaya çıkarmak için çalışma yürütmüştür. Çalışmanın verileri 473 öğrenciye uygulanan ispat anketi ve 25 öğrenci ile yapılan görüşmelerden elde edilmiştir.

Çalışmada öğrencilerin ispata yönelik algılarına göre dört farklı kategoriye ayrıldıkları tespit edilmiştir. Öğrenciler tip A, tip B, tip C ve tip D olmak üzere dört gruba ayrılmıştır. Aşağıda bu öğrencilerin özellikleri hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tip A: Öğrenci formel ispat ile çalışmanın gerekliliğini kabul eder informel ispatları ret eder. Buna rağmen öğrenci kendi ispat uygulamalarında kesinlik isteklerine ulaşmayı başaramamıştır.

Tip B: Öğrenci formel ispatın gerekli olduğunu kabul eder fakat formel ispatlarda usta olana kadar informel ispatları geçici olarak kullanır.

Tip C: Öğrenci sezgisel ve deneysel argümanları ispat olarak kabul eder. Formel ispatları sınavlardan geçmek için dikkate alır.

Tip D: Öğrenci formel ispatların gerekliliğini kabul eder fakat genel olarak formel ispatları sadece sembolik manipülasyonlar olarak görür. Öğrencideki anlayış eksikliği ispata karşı antipati oluşmasına yol açar.

Çalışma sonucunda öğrencilerin formel ispat görüşünden uzak oldukları ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin ispatlama için informel/görsel metotları kabul etme eğiliminde ya da en azından bu yöntemleri reddetmedikleri görülmüştür. Bu durumun sebebinin öğrencilerin okullardaki geçmiş deneyimlerinde ispatların sonuçların indüktif doğrulaması olarak verilmiş olduğu söylenebilir. Ayrıca bu durumun matematik öğretiminde tercih edilen yöntem ile matematikçilerin matematiği oluşturmalarındaki yöntem arasındaki farkın bir sonucu olduğu ifade edilmiştir. Matematikçilerin ispat sürecinin sezgi (intuition), deneme-yanılma (trial and error), tahmin (speculation), varsayım (conjecture) ve ispat şeklinde olduğu fakat öğretim sırasında bu sürecin son adımı üzerinde yoğunlaştıkları ifade edilmiştir. Jenerik ve görsel argümanların ispatların yapılmasından önce verilmesinin kavramlar ve tanımlar gibi matematiğin farklı bakış açılarındaki araçları kullanmada, öğrencileri cesaretlendirmede yararlı olacağı düşünülmektedir. Kavram imajlarını güçlendirmenin öğrencilerin ispatta karşılaştıkları güçlüklerin üstesinden gelmede etkili olacağı ifade edilmiştir.

Köğce (2013), birinci sınıfta öğrenim gören 99 ilköğretim matematik öğretmeni adayının ispat yapmanın matematik öğretimine katkısı ile ilgili görüşlerini ve ispat düzeylerini belirlemeye çalışmıştır. Çalışmanın verileri, içerisinde üç adet açık uçlu soru bulunan anket formu kullanılarak elde edilmiştir. Birinci soru öğretmen adaylarının ispatın matematik öğretimine katkısını ortaya çıkarmak için sorulmuştur. İkinci soru öğretmen adaylarının ispat düzeylerini ortaya çıkarabilecek senaryo tipinde hazırlanmış bir açık uçlu sorudur. Üçüncü soru ise ikinci soruda ispat olmadığını belirten öğretmen adaylarının görüşlerini almak için sorulmuştur. Çalışmada öğretmen adaylarının ispat düzeylerini belirlemek için Miyazaki (2000) tarafından oluşturulan sınıflandırma kullanılmıştır. Miyazaki ispatı; ispat A, ispat B, ispat C ve ispat D olarak dört gruba ayırmıştır. İspat A dedüktif muhakeme gerektiren ve ispat yapılırken fonksiyonel dilin kullanıldığı ispat türüdür. İspat B dedüktif muhakeme gerektiren fakat ispatta diğer dil, çizimler veya hareket edebilen objelerin kullanıldığı ispatlardır. İspat C ispatta tümevarımsal muhakeme gerektiren ve ispatlar yapılırken diğer dil, çizimler veya hareket edebilen objeler kullanılır. İspat D ise tümevarımsal muhakeme gerektiren ve ispatlarda fonksiyonel dilin kullanıldığı ispat tipidir. İspat A en avantajlı, ispat C ise en dezavantajlı ispat tipidir. İspat B ve ispat D, ispat A ve ispat C arasından ortalama bir düzeydedir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının en çok ispat A türündeki ispatları tercih ettikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının çoğunun ispatların matematik eğitimine katkı sağlayacaklarına inandıkları ortaya çıkmıştır.

Kaplan, Doruk ve Özdemir (2015) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat ile problem çözme arasındaki ilişkiye yönelik görüşlerine odaklanmışlardır. Yaptıkları çalışmada tüm sınıf düzeyinden toplam 158 ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile nitel bir araştırma yürütmüşlerdir. Çalışmanın verileri, ispat ve problem çözme ile ilgili altı açık uçlu soruya verilen yazılı yanıtlardan elde edilmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının problemi çözüm bekleyen ifade, problem çözmeyi zorlukların üstesinden gelme olarak değerlendirdikleri tespit edilmiştir. İspatı doğrulama/yanlışlama veya açıklama, ispat yapmayı da benzer olarak doğrulama/yanlışlama yapma veya açıklama yapma olarak ifade ettikleri ortaya çıkmıştır. Öğretmen adayları problem çözme ile ispat arasındaki en temel farkın ispatın bir doğrulma, problem çözmenin sonuca ulaşma aktivitesi olduğunu ifade etmişlerdir. İspat ile problem çözme arasındaki ilişkiye yönelik görüşlerinin ise belirgin bir şekilde oluşmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Turğut, Yenilmez ve Uygan (2013) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşlerini karşılaştırmalı olarak ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Araştırmanın çalışma grubunu fen edebiyat fakültesinin pedagojik formasyon programına devam eden 79 ortaöğretim ve ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün son sınıfında öğrenim görmekte olan 98 ilköğretim matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Çalışmanın veri toplama aracı Moralı vd. (2006) tarafından uyarlanan ispata yönelik görüş ölçeğidir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının öğrenim gördükleri bölümlere ve cinsiyetlerine göre ispata yönelik görüşlerinin farklılaşmadığı tespit edilmiştir. Ölçeğin bazı alt ölçeklerinde ise farklılaşmaların olduğu belirtilmiştir.

Anapa ve Şamkar (2010) yaptıkları çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile fen edebiyat fakültesi matematik ve bilgisayar bölümünde öğrenim gören öğrencilerin ispata yönelik görüşlerini incelemişlerdir. Çalışmada Moralı vd. (2006) tarafından uyarlanan ispata yönelik görüş ölçeği uygulanmıştır. İspata yönelik görüş ölçeği 173 ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerine ve 271 matematik ve bilgisayar bölümü öğrencilerine uygulanmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin ispata yönelik görüşlerinin öğrenim gördükleri bölümlere göre farklılık göstermediği tespit edilmiştir.

İmamoğlu (2010) doktora tez çalışmasında matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispata yönelik görüşleri ile ispatlama aktivitelerindeki performanslarını araştırmıştır. Araştırma grubu birinci ve son sınıflarda öğrenim gören ilköğretim, ortaöğretim matematik öğretmeni adayları ve matematik bölümü öğrencileridir. Çalışmanın veri toplama aracı olarak araştırmacı tarafından geliştirilen Tutum ve İnanç Ölçeği (TİÖ), İspat Sınavı (İS) ve İspat Değerlendirme Sınavı (İDS) kullanılmıştır. TİÖ'nün alt yapı, tutum, özyeterlik ve inanç şeklinde dört boyutu vardır. İS'ye verilen yanıtlar, kullanılan ispat tiplerine ve muhakeme şekillerine göre puanlanmıştır. İDS'de verilen argümanlar için öğretmen adaylarından "önermenin tüm durumlar için doğru olduğunu gösterir", "önermenin bazı durumlar için doğru olduğunu gösterir" veya "yanlıştır (önermeyi ispatlamaz)" seçeneklerini seçmeleri ve nedenini belirtmeleri istenmiştir. Yapılan değerlendirmeler yanıtların tutarlılığına göre puanlandırılmıştır. Birinci sınıftaki öğrencilerin altyapı puanlarının dördüncü sınıftakilerden daha yüksek olduğu, diğer boyutlarda ise dördüncü sınıftaki öğrencilerin puanlarının anlamlı bir şekilde daha yüksek olduğu tespit edilmiştir. Son sınıf öğrencilerinin İS'den elde ettikleri puanların daha yüksek olduğu belirlenmiştir. Farklı programlarda öğrenim gören birinci sınıf öğrencilerinin TİÖ ve İS'den elde ettikleri puanların farklılaşmadığı ortaya çıkmıştır. Son sınıflarda ise İS, İDS ve TİÖ'nün bazı boyutlarının anlamlı bir şekilde farklılaştığı tespit edilmiştir. Matematik bölümü öğrencilerinin İS ve İDS'den aldıkları puanların diğer öğrencilere göre daha yüksek olduğu bulunmuştur. Birinci sınıfların daha çok tümevarımsal akıl yürütme kullanma eğiliminde oldukları, son sınıf öğrencilerinin ise çoğunlukla genelleme ihtiyacı hissederek dedüktif yöntemler kullanmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Buna rağmen son sınıf öğrencilerinin ispat yapma ve değerlendirmede hala güçlük yaşadıkları ifade edilmiştir. Ayrıca, öğrencilerin TİÖ ile İS ve İS ile İDS puanları arasında pozitif ilişkinin olduğu ortaya çıkmıştır.

Güler, Özdemir ve Dikici (2012) yaptıkları çalışmada, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarımsal ispat yöntemiyle ispat yapabilme becerileri ve ispata yönelik görüşlerini araştırmışlardır. Araştırmanın verileri ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün üçüncü ve dördüncü sınıflarında öğrenim gören 151 öğretmen adayına İspat Görüş Anketi, Matematiksel Tümevarım Bilgi Testi'nin (MTBT) uygulanması ve yarı yapılandırılmış mülakatlar ile elde edilmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin düşük olduğu ve ispata yönelik görüşlerinin oluşmadığı tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının tümevarım yöntemi ile ispat yapabilme becerileri ile ispata yönelik görüşleri arasında pozitif yönlü ve anlamlı bir ilişkinin olduğu belirlenmiştir.

Doruk, Özdemir ve Kaplan (2015) matematiksel ispata yönelik görüşler ile ilişkili olabileceğini düşündükleri duyuşsal değişken olarak matematiğe karşı özyeterlik algısını incelemişlerdir. Çalışma ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 76 son sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Çalışmada matematiğe karşı özyeterlik algısının matematiksel ispata yönelik görüşleri yordayıp yordamadığı sınanmıştır. Çalışma sonucunda, matematiğe karşı öz-yeterlik algısının ispat yapmaya yönelik görüşlerin anlamlı bir yordayıcısı olduğu ve ispat yapmaya yönelik görüşlere ilişkin toplam varyansın %39'unun matematiğe karşı özyeterlik algısı ile açıklanabildiği belirlenmiştir.

2.2.2. Analizin temel kavramlarına yönelik yapılan çalışmalar

Lisans matematik müfredatının en önemli derslerinden biri analiz dersidir (Hartter, 1995). Bu bölümde, çalışmada analizin temel kavramları olarak nitelendirilen sırasıyla fonksiyonlar, diziler, limit, süreklilik ve türev kavramlarına yönelik yapılan çalışmaların bir derlemesine yer verilmiştir.

Sofronas, Defranco, Vinsonhaler, Gorgievski, Schroeder ve Hamelin (2011) analiz alanında 24 otoritenin ilk yıl öğretimi yapılan analiz dersinin amaçları ve öğrencilerin sahip olması gereken becerilere yönelik görüşlerini almışlardır. Otoritelerin görüşlerinin dört kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Bu kategoriler; analizin temel konuları ve becerileri, beceriler ve kavramların içindeki ve aralarındaki ilişkili yapıları, kullanılan beceriler ve analiz dersinin amaçlarıdır. Uzmanların analizin en temel kavramlarının sırasıyla türev, integral, limit, diziler, seriler ve yaklaşma kavramları olduğunu ifade etmişlerdir. Kavramlar ve beceriler arasındaki ve içindeki yapılar olarak, analiz dersinde analizin temel teoreminin, limitin, kavram ve beceriler arasındaki ilişkilerin önemli bir yer tuttuğunu dile getirmişlerdir. Analiz dersinde kullanılan becerilerin problem çözme ve modelleme becerileri olduğu ifade edilmiştir.

Literatür incelendiğinde, fonksiyon kavramına yönelik çeşitli çalışmaların yapıldığı görülmüştür. Bu çalışmalarda öğrencilerin fonksiyon kavramına yönelik kavram yanılgıları, kavramsal bilgileri ve kavram imajları araştırılmıştır.

Abdullah (2010) lise öğrencilerinin fonksiyon kavramına yönelik güçlüklerini ortaya çıkarmak amacıyla çalışma yapmıştır. Çalışmasında klinik mülakatlarda öğrencilere fonksiyon kavramı ile ilgili problemler sorulmuş ve alınan cevaplar analiz edilmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin $f(x)$ sembolünün kullanımı ile ilgili, $f(x)$ görüntüsünün kartezyen koordinatlarda gösterimiyle ilgili ve fonksiyonun formel tanımı ile ilgili güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir.

Hatısaru ve Erbaş (2010) çalışmalarında 11 meslek lisesi öğrencisinin fonksiyon kavramına yönelik algılarını araştırmışlardır. Çalışmada farklı şekillerde temsil edilen örneklerin fonksiyon olup olmadıkları öğrencilere sorulmuştur. Çalışma sonucunda öğrencilerin çoğunun fonksiyonları belirlemekte zorlandıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin fonksiyonların şema ile gösterimini (Venn Şeması ile gösterim), sıralı ikililerin kümesi şeklindeki gösterimini (liste yöntemi ile gösterim), denklem ile verilen fonksiyonları ve grafik ile gösterilen fonksiyonları algılamakta ve bu tarz gösterimlerin fonksiyon olup olmadığını belirlemede sıkıntı çektikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin verdikleri kararlarının gerekçeleri incelendiğinde, fonksiyon tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin yetersiz olduğu ve fonksiyon kavramına yönelik kavram imajlarının fonksiyon kavramı ile uyuşmadığı anlaşılmıştır.

Akkoç (2003) doktora tez çalışmasında lise öğrencilerinin fonksiyonlar konusunda zorlanmalarının sebeplerini araştırmıştır. Çalışmada 114 lise öğrencisine anket uygulanmış, araştırma grubu arasından seçilen dokuz öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilere ankette ve mülakat formunda şema yöntemi, liste yöntemi, grafik ve denklem ile verilen örneklerin fonksiyon olup olmadığı sorulmuştur. Çalışmada öğrencilerin şema ve liste yönteminde, grafik ve denklemle gösterime göre daha başarılı oldukları tespit edilmiştir. Çok az öğrenci kendi tanımını kullanmıştır. Ayrıca öğrencilerin çoğunluğu şema ve liste yöntemiyle ilgili sorularda kendi tanımlarını kullanmışlardır. Yapılan görüşmelerde öğrencilerin çoğunun şema ve liste yöntemiyle ilgili sorularda tanımsal özellikleri kullandıkları ortaya çıkmıştır. Diğer yandan, grafik ve denklemle gösterimin tanımsal özellikler bakımından birçok güçlüğe sebep olduğu tespit edilmiştir. Bu öğrenciler kavram ile tutarlı olmayan kavram imajlarını kullanmışlardır. Başarılı öğrencilerin fonksiyonların tüm gösterimlerinde kendi tanımları ile tanımsal özelliklere odaklandıkları tespit edilmiştir. Daha az başarı gösteren öğrencilerin sadece şema ve liste yönteminde kendi tanımlarını kullandıkları, fonksiyonların diğer gösterim şekillerinde ise anlaşılması zor cevaplar verdikleri belirlenmiştir. Başarısız öğrencilerin fonksiyonların hiçbir gösterim şeklinde tanımsal özellikleri kullanamadıkları görülmüştür.

Bayazıt (2008) öğrencilerin fonksiyon kavramına yönelik zorlukları ve kavram yanılgıları üzerine literatürde yapılan çalışmaları derlemiştir. Öğrencilerin karşılaştıkları zorlukları fonksiyonu birebir eşleme yapan bir bağıntı olarak görme, liste biçiminde yazımlara ilişkin zorluklar, fonksiyon grafiklerine ilişkin zorluklar, cebirsel ifadelere ilişkin zorluklar, kullanılan sembol ve simgelere ilişkin zorluklar, fonksiyonların alt kavramlarına ilişkin zorluklar, fonksiyonların temsilleri arasındaki anlamsal ilişkilere yönelik zorluklar olarak gruplandırmıştır.

Tall ve Bakar (1992) matematik lisans öğrencileri tarafından geliştirilen fonksiyon kavramını araştırmıştır. Öğrencilerin fonksiyonları matematikteki uygulamalarda kullanabiliyor iken fonksiyonun teorik anlamı konusundaki kavrayışlarının çok zayıf ve tutarsız olabileceğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin fonksiyon kavramını anlayışlarında, fonksiyon tanımının özelliklerinden ziyade prototip örnekler ailesinin özelliklerine güvendiklerini belirtmişlerdir. Çalışmada ayrıca çok anlamlı bir kavram yanılgısı ortaya çıkmıştır. Örneğin, üniversite matematik dersi almaya başlayan öğrencilerin %75'i hem cebirsel hem de grafiksel olarak belirtilen sabit fonksiyonu bir fonksiyon olarak kabul etmediklerini bildirmişlerdir. Benzer olarak öğrencilerin %75'inin çemberi bir fonksiyon olarak kabul ettikleri ortaya çıkmıştır. Bu durum öğretildiği düşünülen kavram ile öğrencilerin gerçekten öğrendiği kavram arasında büyük bir uçurum olduğunu gösterdiği şeklinde yorumlanmıştır.

Polat ve Şahiner (2007) sınıf öğretmenliği bölümü öğrencilerinin fonksiyonlar konusunda sahip oldukları yaygın hataların belirlenmesi ve giderilmesi üzerine iki aşamalı bir çalışma yürütmüşlerdir. Çalışmanın ilk aşamasında 190 birinci sınıf öğrencisi üzerine çalışma yapılarak öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgılarını belirlemişlerdir. Öğrencilerin fonksiyon konusunda sahip oldukları kavram yanılgıları bağıntının özellikleri, bağıntı ile fonksiyon arasındaki ilişki, fonksiyon tanımı, birebir fonksiyon, örten fonksiyon ve sabit fonksiyon ana başlıkları altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin fonksiyon tanımına yönelik kavram yanılgılarının "bağıntı fonksiyon olması için birebir ve örten olmalıdır", "birebir eşlenen bağıntılardır", "görüntü ve tanım kümesinden oluşan sıralı ikililerdir", "karşılığı olan bağıntılara fonksiyon denir" ve "yansıma, simetri ve ters simetri ve geçişme özelliğine sahip bağıntıdır" şeklinde olduğu belirtilmiştir. Ayrıca öğrencilerin birebir ve örten fonksiyonu birbiri ile karıştırdığı tespit edilmiştir. Çalışmanın ikinci kısmında 97 birinci sınıf öğrencisine kavram yanılgılarını gidermeye yönelik öğretim yapılmıştır. Öğretim sonucunda öğrencilerdeki kavram yanılgılarının büyük oranda düştüğü fakat bazı kavram yanılgılarının ise devam ettiği tespit edilmiştir.

Vinner (1983) çalışmasında 10. ve 11. sınıflarda öğrenim gören lise öğrencilerinin fonksiyon kavramına yönelik algılarını araştırmıştır. Öğrencilerin fonksiyon kavramına yönelik algılarını incelemek için kavram resmi, kavram tanımı ve kavram imajı tanımlarını ortaya atmıştır. Kavram tanımı ve kavram imajına dayalı bir model ile öğrencilerin fonksiyon kavramına yönelik süreçlerini analiz etmiştir. Kavram resmini bir kişinin o kavram ile ilgili sahip olduğu tüm görüntülerin kümesi olarak tanımlamıştır. Kavram tanımı ile geriye dönmeden (yardım almadan) kavramı doğru bir şekilde açıklayan sözlü tanımı kastetmektedir. Kavram imajını ise kavram resmi ile beraber kavrama ait özelliklerin kümesi olarak tanımlamıştır. Çalışmasının veri toplama aracında öğrencilere dört adet bağıntı tanımlanmış ve öğrencilerden bu örneklerin fonksiyon olup olmadığını belirlemeleri istenmiştir. Beşinci ve son soru olarak öğrencilere size göre bir fonksiyon nedir? sorusu yöneltilmiştir. Son soru öğrencilerin kavram tanımını ortaya çıkarmak için sorulmuştur. İlk dört soru ise kavram imajlarını belirlemeye yöneliktir. Öğrencilerin kavram tanımlarının dört ana kategoriye ayrıldığı görülmüştür. Bu kategoriler; kavram imajı karışmış ders kitabındaki tanımlar, fonksiyon benzerlik kuralıdır, fonksiyon cebirsel terim, formül, denklem, aritmetik manipülasyondur ve tanım olarak alınmış bazı zihinsel görüntülerdir. Öğrencilerin kavram imajlarının; fonksiyon tek bir kural ile verilir, fonksiyonlar resmi olarak sadece matematikçiler tarafından kabul edilirler, fonksiyonun grafiği akla yatkın olmalı (düzgün, sürekli, devamlı artan ya da azalan *vb.*), fonksiyon örten olmalı ve fonksiyon birebir olmalı şeklindedir. Çalışma sonucunda öğrencilerin %57'sinin kavram tanımlarının ders kitabındaki tanımla uyumlu olduğu, kitaptaki tanımı veren öğrencilerin %20'sinin tanımın gereğini yaptığı, kitaptaki tanımı vermeyen öğrencilerin %34'ünün tanımın gereğini yaptığı ve öğrencilerin ortalama olarak %52'sinin fonksiyonları belirlemede doğru cevaplar verdiği tespit edilmiştir.

Vinner ve Dreyfus (1989) çalışmalarında farklı bölümlerde öğrenim gören 271 üniversite öğrencisi ve 36 lise matematik öğretmeninin fonksiyon kavramına yönelik kavram tanımlarını ve kavram imajlarını incelemişlerdir. Çalışma sonucunda fonksiyon kavramını eşleme (Dirichlet-Bourbaki tanımı), bağımlı ilişki, kural, işlem, formül ve gösterim olarak altı kategori altında tanımladıkları belirlenmiştir. Fonksiyon kavramına yönelik kavram imajlarının ise tek değerlilik, süreksizlik, ayrık tanım kümesi ve istisnai nokta kategorileri altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Tek değerlilik kategorisinde eğer tanım kümesindeki her elaman sadece bir değer ile eşleniyorsa fonksiyondur, değilse fonksiyon değildir. Süreksizlik kategorisinde grafik bir boşluğa sahiptir. Eşleme, tanım kümesindeki bir noktada süreksizdir. Ayrık tanım kümesi kategorisinde eşlemenin tanım kümesi alt tanım kümelerine ayrılır. Her alt tanım kümesi için eşleme kuralı değişir. Yani eşlemenin grafiğinin karakteri bir alt kümeden diğerine değişebilir. İstisnai nokta kategorisinde verilen bir eşlemede istisnai noktalar vardır. Bir nokta eşlemenin genel kuralına uymaz. Çalışmada aynı kavram imajlarına sahip öğrencilerin bazen birbirine zıt kararlar verdikleri belirtilmiştir.

Literatür incelendiğinde lisans öğrencilerinin yakınsak dizi kavramına yönelik yapılan çalışmaların oldukça sınırlı olduğu tespit edilmiştir. Yapılan çalışmalar öğrencilerin yakınsak dizi kavramını anlamaları üzerine ve sahip oldukları imajlara yöneliktir. Çalışmaların sonuçları öğrencilerin yakınsak dizi tanımını anlamada ve doğru bir kavram imajı geliştirmede güçlük yaşadıkları yönündedir (Doruk ve Kaplan, 2015a; Mamona-Downs, 2001; Roh, 2008).

Roh (2008) çalışmasında öğrencilerin sahip oldukları imajların, limit kavramını öğrenmeleri üzerine etkisine yönelik birçok çalışma yapıldığını ifade etmiştir. Çalışmada analiz öğrencilerinin yakınsak dizi imajlarının, onların yakınsak dizi tanımını anlamalarına nasıl etki ettiği araştırılmıştır. Çalışmanın verileri bir dizi etkinlik temelli mülakatlarla toplanmıştır. Mülakatlarda öğrencilerden yakınsak diziyi tarif eden ifadeleri değerlendirmeleri istenmiştir. Öğrencilerin asimptot, yığılma noktası ve gerçek limit noktası imajlarının yakınsak dizi tanımını anlamaları üzerinde nasıl etki ettiğini ortaya çıkarmıştır. Öğrenciler, dizinin terimlerinin limit noktasını asla geçemeyeceğini (asimptot), dizinin yığılma notalarının limitleri olduğunu (yığılma noktası) ve dizinin terimlerinin limit noktasına yaklaştığını ya da limit değerini alabileceğini ve limit değerinin tek olması gerektiğini (gerçek limit noktası) belirtmişlerdir. Çalışmada bazı öğrencilerin yakınsak dizi tanımını anlamada ve doğru yakınsak dizi tanımını belirlemede güçlük yaşadıkları belirlenmiştir.

Mamona-Downs (2001) yaptığı çalışmada, öğretici bir yaklaşım ile yakınsak dizinin formel tanımının anlaşılması üzerine teorik bir çalışma yapmıştır. Çalışmada yakınsak dizi tanımının içerisindeki ifadeler ayrıntılı bir şekilde açıklanmaya çalışılmıştır. Bu çalışmada öğrencilerin yakınsak dizi ile ilgili ilk anlamalarını, sezgilerini oluşturan tipik kaynaklar olarak kabul edilebilecek bazı etkinlikler sunulmuştur. Çalışmanın diğer bölümünde öğrencilerin yakınsak dizi tanımı ile sıkı bir şekilde uyumlu kavram imajı oluşmasını sağlayan, tanımın içerisindeki her simgenin işlevi belirtilerek yakınsak dizi tanımı analiz edilmiştir. Çalışmanın son aşamasında bu kavram imajlarının bazı sezgisel inançların yeniden analiz edilmesinde nasıl kullanılabileceği tarif edilmiştir. Öğrencilerin çok azının yakınsak dizinin formel tanımını tam anlamıyla kavrayabildiğini ifade etmiştir. Öğrencilerin çoğunun tanımı anlamakta zorlandıkları dile getirilmiştir. Öğrencilerin tanımda yer alan ve bazı pozitif tamsayıları temsil eden n_0 kesme noktasının işlevini anlamakta güçlük yaşadıklarını ifade etmiştir. Araştırmacıya göre bu terim öğrenciler için kafa karıştırıcıdır ve tanımın anlaşılmasını gerçekte olduğundan daha zor hale getirmektedir. Öğrencilerin bu terimi anlamada huzursuz olmasının iki sebebi vardır. Birincisi bu terimin yakınsak dizi tanımında yer alan eşitsizlik gibi ilk anda odaklanılan ana özellik olmadığıdır. Öğretim sırasında ikinci derecede ilgilenilen özellik olarak, kesme noktasının rolü açıklanmaktadır. İkinci sebep ise bu terimin anlamından daha çok nasıl bulunacağının araştırılması üzerinde yoğunlaşılmasıdır. Öğrencilerin matematik geçmişleri algoritmik temellere dayandığı için bu terimin tanımdaki rolünü belirlemede başarısız olmuşlardır.

Doruk ve Kaplan (2015a) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşleri, yakınsak dizi kavramına yönelik kavramsal bilgileri ve ispat yapma becerileri arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Çalışmadan elde edilen sonuçlardan biri, öğrencilerin yakınsak dizi tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin oldukça düşük seviyede olduğudur. Özellikle öğrencilerin çoğunun, tanımda yer alan n_0 teriminin işlevini bilmedikleri ortaya çıkmıştır.

Analiz denilince akla dört temel kavram gelmektedir. Bunlar; limit, süreklilik, türev ve integraldir. Ancak bu kavramlar arasından en temel nitelikte olan kavram limittir. Çünkü diğer üç kavram limit yardımıyla tanımlanmaktadır (Arslan ve Çelik, 2013). Buradan hareketle, analizin bu temel kavramlarını anlayabilmek için öncelikle limit kavramına yönelik doğru anlayışların geliştirilmesinin gerektiğini söylemek mümkündür. Yapılan literatür incelemesi sonucunda, öğrencilerin analizin önemli kavramlarından olan limit ve limit kavramı ile doğrudan ilişkili olan süreklilik kavramını anlamada güçlük çektikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin bu konulara yönelik birçok kavram yanılgısına sahip oldukları tespit edilmiştir. Yapılan araştırmalar öğrenciler arasında limit kavramının tam olarak anlaşılmasının çok nadir bir durum olduğunu ortaya çıkarmıştır (Tall ve Vinner, 1981; Williams, 1991).

Williams (1991) çalışmasında 341 üniversite öğrencisine limit kavramına yönelik sahip oldukları modelleri belirlemek için anket uygulamıştır. Ankette öğrencilerin limit tanımına yönelik altı farklı modelde oldukları ortaya çıkmıştır. Bu modeller; x bir noktaya gittikçe fonksiyonun nasıl hareket edeceği (dinamik-teorik), limit bir sayı ya da noktadır, fonksiyon onu geçemez (sınır), x değerlerinin sınırlandırılmasıyla fonksiyonun y değerlerinin rastgele limit değerine yaklaşması (formel), limit bir nokta ya da değerdir, fonksiyon ona yaklaşır fakat asla ulaşamaz (ulaşılmaz), limit istenildiği kadar kesin yapılabilecek bir yaklaşmadır (yaklaşma) ve limit verilen bir sayıya yakın değerler verilerek belirlenir (dinamik-pratik) modelleridir. Anket sonuçlarının analizinin ardından, seçilen 10 üniversite öğrencisinin limit kavramını anlamaları ve bu anlayışın değişmesine etki eden faktörleri araştırılmıştır. 10 öğrenciden genel informel modeller elde edilmiştir. Daha sonra, bu öğrencilere alternatif limit modelleri ve alışık olunmayan problemler sunulmuştur. Bu problemler öğrencilerin kendi modellerini daha formel algılara dönüşmesini sağlayacak şekilde oluşturulmuştur. Öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgılarına aykırı örnekler hazırlanmış ve öğrencilerin kavram yanılgıları ile yüzleşmeleri sağlanmıştır. Bireysel modeller, önceki modelleri benzer olan öğrenciler arasında bile birçok değişikliğe yol açmıştır. Dinamik modellere sahip olan öğrenciler değişime oldukça direnmişlerdir. Bu direnç, grafiklerle ilgili önceki inanışlarından, basit fonksiyonların grafikleri üzerindeki deneyimlerinden, kavramsal olarak basit ve pratik olarak kullanışlı modellere değer vermelerinden ve aykırı problemleri bir istisna olarak kabul etme eğiliminde olma durumlarından etkilenmektedir. Williams'a göre öğrencilerin limit kavramının kavramsal yapısından çok limitin kolay, pratik uygulama modellerini tercih etmelerinin sebebi, bu modellerin derslerde ve testlerde yöneltilen soruları kavramsal bilgiye ihtiyaç duymadan çözmede yeterli olmasıdır.

Tall ve Vinner (1981) üniversite matematik öğrencilerin limit ve süreklilik konularındaki kavram imajlarını araştırmışlardır. Çalışmalarında kavram imajını, verilen bir kavram ile ilgili kişinin zihninde oluşan tüm bilişsel yapılar olarak tanımlamıştır. Kavram imajının genel olarak uygun olmayan ve formel tanımdan oldukça farklı özelliklere sahip olabileceğini ifade etmişlerdir. Kavram tanımını ise kişisel ve formel olarak iki kategoriye ayırmışlardır. Formel tanım matematiksel topluluklar tarafından kabul edilendir. Kişisel kavram tanımında ise, birey kendi özel tanımını oluşturur. Öğrencilerin limitin formel tanımını yazmada güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin bir kısmı yakınsak dizi tanımındaki notasyonlarla fonksiyonların limiti tanımındaki notasyonları birbirine karıştırmıştır. Bir kısmı da tanımı dinamik bir yaklaşım ile "yaklaşma" kelimesini kullanarak tarif etmeye çalışmışlardır. Bazıları da başka limit süreçleri ile karıştırmıştır. Öğrencilerin limit için yaklaşma kelimesine benzer kelimeler kullanmasının, fonksiyonun limit değerine asla ulaşamayacağını kabul etmesine yol açabileceğini belirtmiştir. Öğrencilerin süreklilik için genellikle fonksiyonun grafiğinde kopukluk olmamasını algıladıklarını ve bu durumun çelişkiye düşme potansiyeli olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin çoğunun sürekli fonksiyonun tek bir formül ile ifade edilebileceğini ve grafiğinin tek parçadan oluşması gerektiğini belirtmişlerdir.

Bezuidenhout (2001) birinci sınıf üniversite öğrencilerinin analizin temel kavramlarından olan limit, süreklilik ve türev kavramlarını anlamaları üzerine araştırma yapmıştır. Çalışmasında öğrencilerin limit, süreklilik ve türev kavramlarına yönelik birçok kavram yanılgısına sahip olduğunu ortaya çıkarmıştır. Örneğin, öğrencilerin bir kısmı fonksiyonun bir noktada limiti var ise süreklidir, bir fonksiyonun limiti o noktadaki değeridir, fonksiyon limitinin mevcut olduğu noktada türevlidir, fonksiyon bir noktada sürekli ise türevlidir ve fonksiyon bir noktada sürekli ve limiti var ise türevlidir gibi kavram yanılgılarının mevcut olduğu sonucuna ulaşmıştır. Öğrencilerin limit, süreklilik ve türev kavramlarına yönelik prosedürel anlamalara sahip oldukları, bu kavramların arasındaki ilişkiye yönelik kavramsal bilgilerinin ise yetersiz olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durumun analiz derslerinin öğrenimi ve öğretiminden kaynakladığını düşünmüştür. Analiz derslerinin prosedürel bir şekilde işlendiğini, analizin kavramsal temellerinin ihmal edildiğini ifade etmiştir. Analiz derslerinde analiz kavramlarının arasındaki ilişkileri anlamayı sağlayan yaklaşım yerine, klasik alıştırmaların sunulduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerin limit, süreklilik ve türev kavramlarını kavramsal olarak anlayabilmeleri için manipülatif becerilerin gelişmesinin gerekli olduğunu dile getirmiştir. Analiz öğretiminin bu gelişmeyi sağlaması gerektiğini bildirmiştir. Ayrıca, analiz dersinin öğrencilerin matematiksel içeriklere yönelik kavramsal anlamaları sağlamasının manipülatif beceriler kadar önemli olduğunu ifade etmiştir. Kullanılan öğretim yaklaşımları ve etkinliklerin matematiksel sembollerin anlamlar taşıdığını, bu sembolleri yorumlamanın ve kavramları belirtmede kullanmanın önemli olduğunu, cebirsel işlemleri manipüle ederek limit, türev, integral bulma becerisinin sembollerin anlamlarını bilme anlamına gelmediğini fark etmeleri ve deneyim yaşayacakları şekilde olmasını önermektedir. Analiz dersinin öğretiminden sorumlu olan öğretim elemanlarının öğrenci anlayışlarının kaynağı ve muhtemel kavram yanılgılarının farkında olmalarını önermiştir.

Öğrencilerin, limit ve fonksiyon kavramlarını içinde barındıran türev kavramını nasıl anladıkları araştırmacıların ilgisini çeken analiz konularından biri olmuştur. Yapılan araştırmalarda çoğunlukla, analiz dersine devam eden öğrencilerin türev kavramına yönelik imajları merak konusu olmuştur. Aşağıda bu araştırmalardan birkaçı sunulmuştur.

Bingölbali ve Monoghan (2008) makine mühendisliği ve matematik bölümü birinci sınıflarında öğrenim gören öğrencilerin türev kavramına yönelik kavram imajlarının analiz dersi ile nasıl değiştiğini araştırmıştır. Veri toplama aracı, analiz dersinden önce ön test, analiz dersinden sonra son test ve kalıcılık testi olarak uygulanmıştır. Analiz derslerinden önce öğrencilerin kavram imajlarının değişim oranı, tanjant (eğri üzerindeki bir noktada çizilen teğetin eğimi) ve hem değişim oranı hem de tanjant şeklinde olduğu tespit edilmiştir. Başlangıçta matematik öğrencilerinin daha fazla değişim oranı imajında, makine mühendisliği öğrencilerinin ise tanjant imajında olduğu görülmüştür. Analiz dersi sonunda da matematik bölümü öğrencilerinin tanjant imajını benimsediği, makine mühendisliği öğrencilerinin değişim oranı imajı yönünde geliştiğini belirtilmiştir.

Habre ve Abboud (2006) Analiz-I dersine katılan öğrencilerin fonksiyon ve türev kavramlarını anlama düzeylerini belirlemeye yönelik bir araştırma yapmışlardır. Araştırmacılar tarafından Analiz dersi iki dönemde görsel temsillerin sıklıkla kullanıldığı farklı bir yaklaşım ile işlenmiştir. Yapılan araştırma sonucunda öğrencilerin çoğunluğunun analiz dersinde benimsenen öğretim yöntemini sevmedikleri, bir kısmının da öğretimin faydalı olduğunu düşündüğü ortaya çıkmıştır. Öğrencilerle yapılan görüşmeler ve birçok farklı sınav sorularını çözmeleri üzerine yapılan çalışmaların sonucunda, çoğu öğrencide bir fonksiyonun cebirsel gösteriminin hala baskın düşünce biçimleri olmasına rağmen neredeyse tam bir türev anlayışına sahip oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin özellikle anlık değişim oranı ve bir noktadaki eğrinin eğimi düşüncesinde oldukları görülmüştür. Öğrencilerin çoğunun türevin formel tanımını ifade etmede ve kullanmada başarısız olduklarını belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin bir kısmının da türevi bulmak için mekanik metotları kullandıkları belirlenmiştir.

Hartter (1995) doktora tez çalışmasında öğrencilerin türeve yönelik kavram imajı ile kavram tanımının ne ölçüde uyuştuğunu araştırmıştır. Birçok ders kitabında türevin formel tanımının fonksiyon ve limit kavramlarına dayandığından öğrencilerin fonksiyon ve limit ile ilgili önceki öğrenmelerini araştırmıştır. Fonksiyon ve limit konusundaki önceki anlayışların türev kavramı ile ilgili kavram imajı ve kavram tanımına ne ölçüde uyumlu olduğu ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Ayrıca bu çalışmada, öğrencilerin türev ile ilgili kullandıkları çoklu temsiller ile kavram imajları arasındaki ilişki tespit edilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmada türev anlayışı gelişmiş, giriş niteliğindeki Analiz dersine devam eden sekiz öğrenci üzerine yoğunlaşılmıştır. Çalışmanın verileri gözlem, test ve mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. İlk anket ve mülakatlar, öğrencilerin fonksiyon ve limit konularındaki önceki bilgilerini kategorize etmek için yapılmıştır. Öğretimden sonra öğrencilerin türev ile ilgili kavramsal ve işlemsel bilgileri analiz edilmiştir. Veriler, türevi fonksiyonun değişim oranı olarak algılayan öğrencilerin bir kısmının türev ile ilgili kavramsal anlamalarını geliştirdiğini göstermiştir. Genel olarak fonksiyonlara yönelik kararlı bir anlayışı olan öğrencilerin kavram tanımları ile kavram imajlarının güçlü bir şekilde eşleştiği ortaya çıkmıştır. Ayrıca bulgular, fonksiyonlara yönelik güçlü grafiksel anlamanın bu gelişimin en kritik elemanlarından biri olabileceğini göstermiştir. Ek olarak, öğrenciler orantı, grafik yorumlama ve nümerik tablolar içeren alıştırmalar yaptıkça, çoklu gösterimlerin daha eksiksiz kavram imajı geliştirmelerine yol açtığını belirtmiştir.

2.2.3. İspat ve ters örnek değerlendirme çalışmaları

Bu bölümde lisans öğrencilerinin matematiksel ispatların ve ters örneklerin doğruluğunu değerlendirmeleri, bu değerlendirmelerinde kullandıkları stratejiler ve bu sürecin ispata yönelik görüşler ile ilişkisi için yapılan araştırmalardan bir kısmı sunulmuştur.

Goetting (1995) doktora tez çalışmasında lisans öğrencilerinin ispat anlayışları ve ikna edici, geçerli ispat olarak kabul ettikleri argümanları incelemiştir. Bu iki durum arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Sınıf öğretmenliği bölümü, ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü ve ileri seviyede matematik dersleri alan 40 lisans öğrencisi ile çalışmıştır. Çalışmanın verileri öğrencilerle görüşülerek elde edilmiştir. Görüşmelerde öğrencilere argümanlar ve önermeler sunulmuştur. Onlara önermelerinin doğruluk dereceleri ve argümanların geçerli bir matematiksel ispat olma derecesi sorulmuştur. Öğrencilere genellemeyi desteklemek için indüktif ve dedüktif argümanlar, genellemeye ulaşmak için ters örnekler, mevcut olduğunu desteklemek için örnekler, olmayana ergi ve çelişki bulma yöntemiyle yapılan ispatlar sunulmuştur. Çalışma sonucunda öğrencilerde üç tip ispat anlayışının olduğu ortaya çıkmıştır. Birinci grup öğrenciler (öncelikle sınıf öğretmenliği bölümü öğrencileri) ispatı kesin olması gerekmeyen destekleyici argüman olarak anlamışlardır. Bu öğrenciler bir genellemenin geçerli ispatı olarak deneysel argümanları kabul etmişlerdir. Bir önermenin doğru olduğuna ikna olma dereceleri matematiksel ispat olarak kabul ettikleri argümanlarla yakından alakalıdır. İkinci grup öğrenciler ispatı bir varsayımı kesin olarak doğrulayan bir araç olarak görürler. Bu öğrenciler bir genellemenin geçerli ispatı için deneysel delilleri reddederler fakat birşeyin var olduğuna ikna olmak için ters örnekleri ve örnekleri kabul ederler. Üçüncü gruptaki öğrenciler (çoğunlukla ortaöğretim öğrencileri) ispatı açıklama ya da kesin bir doğrulamanın gerekli olduğu fakat bazen yeterli olmadığı sınıf aktiviteleri olarak anlamışlardır. Bu öğrenciler argümanları genelleştirmediği için birşeyin varlığını göstermede örnekleri ve ters örnekleri geçerli bir ispat olarak kabul etmezler. Bu öğrenciler için bir argüman önermeyi geçerli bir ispat olmaksızın ispatlayabilir. Ayrıca öğrencilerin %15'inin aynı önerme için hem doğru ters örneği hem de yanlış ispatı kabul ettiği tespit edilmiştir.

Knuth (2002) 16 ortaöğretim matematik öğretmeninin ispat algılarını ortaya çıkarmak amacıyla çalışma yapmıştır. Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış mülakatlarla elde edilmiştir. Çalışmada öğretmenlerin ispatın matematik ve matematik eğitimindeki rolü, ispatın nelerden oluştuğu ve ne tür argümanları ikna edici bulduklarına yönelik görüşlerine odaklanılmıştır. Çalışma sonucunda öğretmenlerin ispatın matematikteki rolüne yönelik birçok görüş belirtmelerine rağmen (doğrulama, açıklama, iletişim, keşfetme, sistemizasyon) ispatın matematik öğretimindeki rolüne yönelik görüş bildirmemişlerdir. Öğretmenlerin geçerli ispat olan argümanları belirleme becerileri yüksek bulunmuştur (%93). Öğretmenler ispat olmayan sekiz argümandan en azından bir tanesinin doğru ispat olduğunu belirtmişlerdir. 11 öğretmen ise birden fazla ispat olmayan argümanı geçerli ispat olarak seçmiştir. Öğretmelerin çoğunluğu ifadenin karşıtının ispatlanmasını doğru ispat olarak değerlendirmiştir. Öğretmenlerin çoğunlukla görsel ve özel örneklerin kullanıldığı ve daha önceden yapmış oldukları ispatlara benzeyen argümanları ikna edici buldukları tespit edilmiştir. Ayrıca sayıca az da olsa öğretmenler genellemenin olduğu, yeterli detayların sunulduğu, nedeninin gösterildiği ve geçerli yöntemin kullanıldığı argümanları doğru ispat olarak görmüşlerdir. Öğretmenler ispatları değerlendirirken geçerli metodun kullanılması, matematiksel görünmesi, bilgiyle ilişkili olması ve yeterli detayın olması kriterlerine göre ispatları değerlendirmişlerdir. Öğretmenlerin matematiksel ispatın doğasına yönelik sınırlı görüşlere sahip oldukları ve ispatta nelerin bulunması gerektiğine yönelik sınırlı anlayışa sahip oldukları ortaya çıkmıştır.

Martin ve Harel (1989) ikinci sınıfta öğrenim gören 101 sınıf öğretmenliği bölümü öğrencilerinin indüktif ve dedüktif argümanların doğruluğu hakkında verdikleri kararları incelemişlerdir. Öğrencilerin yarısından çoğunun indüktif argümanları geçerli bir matematiksel ispat olarak kabul ettikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin %60’tan fazlası doğru dedüktif argümanı geçerli bir ispat olarak değerlendirmişlerdir. Öğretmen adaylarının sırasıyla %38 ve %52’si kendilerine tanıdık ve tanıdık gelmeyen önermeler için üretilen yanlış dedüktif argümanların matematiksel olarak doğru olduklarını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin %33’ü bir matematiksel önermenin hem indüktif hem de doğru dedüktif argümanların matematiksel olarak geçerli olduğunu belirtmişlerdir.

Morris (2002) çalışmasında lisans öğrencilerinin indüktif ve dedüktif argümanları ayırt edebilme becerilerini araştırmıştır. Çalışmanın örneklemi 320 lisans öğrencisinden oluşmuştur. Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Mülakatlarda öğrencilere iki probleme ait birçok indüktif ve dedüktif argümanlar sunulmuş ve değerlendirme yapmaları istenmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin sadece %30’unun argümanların dedüktif ve indüktif formlarını ayırt edebildiğini ve dedüktif olarak elde edilen sonuçların gerekli olduğunu, indüktif sonuçların belirsiz olduğunu bildikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin %40’ı indüktif ve dedüktif formları ayırt etmede başarısız olmuşlardır. Bu öğrenciler hem dedüktif hem de indüktif yollarla üretilen sonuçların gerekli olduğunu düşünmüşlerdir. Öğrencilerin kalan %30'u ise indüktif ve dedüktif formları ayırt etmiş fakat her iki yolla elde edilen sonuçların şüpheli olacağını ifade etmişlerdir. Ayrıca çalışmada, öğrencilerin ispatları değerlendirirken yüzeysel bir inceleme yaptıkları vurgulanmıştır.

Segal (2000) lisans matematik öğrencileri ile yaptığı çalışmada, öğrencilerin ispat algılarını incelemiş ve bu algıların bir sene boyunca nasıl değiştiğini araştırmıştır. Çalışmada "diagonal matrislerin çarpımı diagonaldir" önermesine ait deneysel ve dedüktif argümanlar sunulmuştur. Öğrencilerden önerme için üretilen argümanların ikna edici ve geçerli bir ispat olup olmadığını belirtmeleri istenmiştir. Bu veri toplama aracı, öğrenciler birinci sınıfa başlarken, birinci sınıfın ortasında ve son olarak ikinci sınıfın başında olmak üzere üç kez uygulanmıştır. Öğrencilerin deneysel argüman ve dedüktif argümana yönelik değerlendirmeleri üzerine yoğunlaşılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin çoğunun dedüktif argümanı yanlış olsa bile geçerli ispat olarak kabul ettikleri ifade edilmiştir. Öğrenciler dedüktif argümanları doğru olup olmamasına bakmaksızın geçerli kabul etme eğiliminde olmuşlardır. Öğrencilerin yarısının doğru ve yanlış dedüktif önermeleri ayırt edebildikleri tespit edilmiştir. Bu durumun geçen zaman periyoduna göre anlamlı bir şekilde değişmediği tespit edilmiştir. Öğrencilerin deneysel argümanlara yönelik kabul edilebilir cevaplarının zaman geçtikçe arttığı gözlemlenmiştir. Deneysel argümanları geçersiz ispat olarak değerlendiren öğretmen adaylarının sayısında bir artma görünmesine rağmen bu artış istatistiksel olarak anlamlı bulunmamıştır.

Selden ve Selden (2003) çalışmalarında dört matematik ve dört ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü lisans öğrencisinin ispat değerlendirme becerilerini araştırmışlardır. Lisans öğrencilerine, öğrenciler tarafından yapılan bir teoremin dört farklı ispatı sunulmuştur. Öğretmen adaylarından teorem için üretilen bu argümanların doğruluğu hakkında bir değerlendirme yapmaları istenmiştir. Çalışmanın verileri öğretmen adaylarıyla yapılan, dört aşamadan oluşan görüşmeler yardımıyla toplanmıştır. Çalışmada öğrencilerin yaklaşık yarısının ilk görüşmelerde ispatları doğru bir şekilde belirleyebildikleri tespit edilmiştir. Çalışmanın sonuçları öğrencilerin verilen bir ispatı değerlendirme hakkında sınırlı anlayışa sahip olduklarını göstermiştir. Öğrencilerin ispatları değerlendirirken önermenin karşıtının ispatlanması ve argüman içindeki temel boşluklar gibi genel hatalara dikkat etmek yerine, cebirsel ifadeler ve sembolik manipülasyonlar gibi yüzeysel hatalara odaklandıkları ortaya çıkmıştır.

Alcock ve Weber (2005) yaptıkları çalışmada benzer sonuçlara ulaşmışlardır. Çalışmada 13 lisans öğrencisinin reel analiz alanında verilen bir ispatın geçerli olup olmadığını değerlendirme becerileri araştırılmıştır. Çalışmada sonuç satırı doğru fakat diğer satırları uygun bir şekilde ilerlemeyen geçersiz bir ispat sunulmuştur. Altı öğretmen adayı verilen argümanın geçersiz olduğunu belirtirken bu öğretmen adaylarından sadece iki tanesi uygun bir matematiksel sebep sunmuştur. Araştırmacılar ispatlar değerlendirilirken her satırın doğru olup olmadığını kontrol etmenin yanında, bir satırın bir önceki ve sonraki satırla olan bağlantısını kontrol etmenin gerekli olduğunu ifade etmişlerdir. Yani ispatın satırları arasındaki bağlantıyı sağlayan argümanların gerekçelerinin sorgulanmasını tavsiye etmişlerdir. Ayrıca 10 öğretmen adayının araştırmacıların yönlendirmesi ile argümanın geçersiz bir ispat olduğunu keşfedebildikleri tespit edilmiştir.

Weber (2008) çalışmasında sekiz matematik profesörünün kendilerine sunulan ispatları nasıl değerlendirdiklerini ve ispata yönelik görüşlerini ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Çalışma sonucunda matematikçilerin ispatları değerlendirirken birçok muhakeme şeklinin ortaya çıktığı tespit edilmiştir. Matematikçiler ispatları değerlendirirken formel muhakeme, ispatlar yapma, informel dedüktif muhakeme ve örnek temelli muhakeme yaptıkları ortaya çıkmıştır. Çalışmada kavramsal bilginin ispat değerlendirme sürecinde önemli bir role sahip olduğu belirtilmiştir. Öğrencilerin veya matematikçilerin ispat değerlendirme aktivitelerindeki performanslarının ilgili ispatı yapıp yapamamaları ve ispatın hangi matematiksel alanda olduğuyla ilişkili olduğu vurgulanmışlardır.

Ko (2010) da doktora tez çalışmasında 16 lisans matematik öğrencisinin matematiğin farklı alanlarında, kendilerine sunulan argümanların doğru ispat ya da ters örnek olarak doğrulamaları, matematiksel önermelerin doğruluğunu değerlendirmeleri ve önermeler hakkında verdikleri karara göre ispat ya da ters örnek üretme becerileri üzerine odaklanmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin ispat ve ters örnekleri değerlendirmede ve üretmede sıkıntı çektikleri ortaya çıkmıştır. Ayrıca öğrencilerin ispat değerlendirme ve üretmek için yeterli bilgiye sahip olmadıkları belirlenmiştir.

Benzer olarak, öğrencilerin ispatın ve ters örneğin ne olduğu konusunda bilgilerinin yeterli olmadığı ifade edilmiştir. Öğrencilerin ispatları ve ters örnekleri değerlendirirken kullandıkları stratejilerin; ispat/ters örnek yöntemine dikkat etme, satır satır inceleme ve örnek temelli olarak satır satır inceleme olduğu ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin önermelerin doğruluğunu değerlendirirken kullandıkları stratejilerin; örnek temelli muhakeme, karışık muhakeme, ilkel (Naive) muhakeme ve sofistike muhakeme olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin ispat ve ters örnek üretmek için kullandıkları stratejilerin; deneysel delillere güvenme, kopyalamak için benzer problemleri hatırlama ve kavramsal bilgileri arama olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerin ispat ve ters örnek değerlendirme ve üretme becerileri ile ispat ve ters örneklere yönelik anlayışlarının geliştirilmesi tavsiye edilmiştir.

Doruk ve Kaplan (2013b) yaptıkları çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin yakınsak dizi konusundaki ispat değerlendirme becerilerini incelemişlerdir. Çalışmada öğrencilerin yakınsak dizi konusunda yanlış bir dedüktif ispatı değerlendirmeleri istenmiştir. Araştırmanın sonucunda öğretmen adaylarının ispat değerlendirmede başarısız oldukları tespit edilmiştir. Bunun sebebinin öğrencilerin ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmemeleri ve ispatları öğrenmek için düşünce sürecine girmek yerine sadece ispatları ezberleme yoluna gitmeleri olduğu anlaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerin ispatları değerlendirirken sonuç odaklı bir stratejiye sahip oldukları belirlenmiştir.

Uygan, Tanışlı ve Köse (2014) çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün son sınıfında öğrenim gören ve genel ağırlıklı not ortalamaları 2.50-3.00 arasında değişen üç öğretmen adayı ile çalışmışlardır. Öğretmen adaylarının ispata yönelik inançları, ispat yapma ve ispat değerlendirme becerileri incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini ortaya çıkarmak için öğretmen adaylarından Öklid Teoremi'ni ispatlamaları istenmiştir. İspat değerlendirme becerilerini ortaya çıkarabilmek için üçgenin iç açıları toplamının 180^0 olduğuna yönelik biri deneysel, diğeri yanlış ve dedüktif olan iki argüman kullanılmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının ispatın tümdengelimli, sonucu genellenebilir ve anlaşılabilir olması gerektiğini vurguladıkları anlaşılmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat yapmada başarılı iken ispat değerlendirmede başarısız oldukları tespit edilmiştir.

Öğretmen adaylarının çoğu deneysel argümanları ve yanlış dedüktif argümanları ispat olarak değerlendirmişlerdir.

2.2.4. İspat ve ters örnek üretme çalışmaları

Bu bölümde üniversite öğrencilerinin ispat ve ters örnek üretme becerileri üzerine yapılan çalışmalar derlenmiştir. Çalışmalara genel olarak bakıldığında, öğrencilerin ispatlarının sınıflandırılmasına ve ispat yaparken yaşadıkları güçlüklere odaklanıldığı görülmüştür.

Harel ve Sowder (1998) yaptıkları çalışmada ispatın, kişinin kendini ve başkalarını ikna etme süreçlerini içerdiğini belirtmiş ve ispat şeması kavramını ortaya atmışlardır. Bir kişinin ispat şeması, kendini ve başkalarını nasıl ikna ettiği ile ilgilidir. Öğrencilerin yaptıkları ispatlar dışsal, deneysel ve dedüktif (analitik) olmak üzere üç şemaya ayrılmıştır (Harel ve Sowder, 2007). Dışsal ispat şeması otoriter, ritüel ve referanssız-sembolik ispat şemalarından oluşmaktadır. Otoriter ispatta kişi, bir kitap ya da öğretmen gibi bir otoriteye dayalı olarak ikna olur. Ritüel ispatta kişi, argümanın içeriğinden çok görüntüsüne dayalı olarak ikna olur. Referanssız-sembolik ispat şemasına sahip kişi, referansı olmayan sembolik manipülasyonlara bağlı olarak ikna olur. Deneysel ispat şeması indüktif (tümevarımsal) ve algısal ispat şemalarından oluşur. İndüktif ispat şemasına sahip öğrenciler, bir iddianın doğru olduğuna kendini ve diğerlerini ikna etmek için bir ya da birkaç özel durumda iddianın doğruluğunu niceliksel olarak değerlendirirler. İndüktif ispat şemasındaki bir öğrenci iddianın doğru olduğunu bir ya da birkaç örneğin sonuçlarını değerlendirerek karar verir ya da cebirsel bir ifadenin doğruluğunu birkaç özel sayıyı ifadede yerine yazarak elde edilen sonuçlara göre ikna olur. Algısal ispat şemasına sahip öğrenci, ikna olmak için gelişmemiş zihinsel imajlarını kullanır. Gelişmemiş zihinsel imajın en önemli özelliği, nesneler üzerindeki dönüşümlerin ihmal edilmesi ya da dönüşümlerin sonuçlarının tam olarak ve doğru bir şekilde tahmin etmede başarısız olunmasıdır. Dedüktif ispat şeması kısaca bir varsayımın mantıksal çıkarımlar vasıtasıyla geçerliğinin gösterilmesidir (Harel ve Sowder, 1998). Dedüktif ispat şeması dönüşümsel ve aksiyomatik ispat şemalarından oluşmaktadır. Dönüşümsel ispat şemasına sahip kişiler argümanın tüm durumlar için geçerli olması gerektiğine, işlemsel düşüncenin mevcut olmasına ve mantıksal çıkarımlara dayalı olmasına dikkat ederler. Aksiyomatik ispat şeması, dönüşümsel ispat şemasının özelliklerine sahiptir. Bu şemanın özelliklerine sahip kişiler, matematiksel doğrulamanın temelde tanımsız terimler ve aksiyomlardan başladığını fark ederler (Harel ve Sowder, 1998, 2007; Sarı vd., 2007).

Weber (2005) çalışmasında, öğrencilerin üniversite matematik derslerinde ispat yapmak için kullandıkları farklı muhakeme tiplerini ve problem çözme süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır. Öğrencilerin ispatları üç farklı şekilde yapabildiklerini belirtmiş ve bu ispat tiplerini tanıtmıştır. Öğrencilerin ispatlarının prosedürel, sentaktik ve semantik ispatlar olduğunu belirtmiştir. Prosedürel ispatlarda öğrencilerin, bir önermenin ispatını yaparken benzer formdaki ya da mevcut olan ispatları şablon olarak kullandıklarını ifade etmiştir. Bu ispatlara prosedürel demesinin sebebi, yeni bir ispat yapmak için gerekli olan prosedürü dışsal bir kaynaktan elde etmesidir. Sentaktik ispatlarda ise öğrenciler, ispatlardaki matematiksel kavramların sezgisel anlamlarını işe koşmadan matematiksel ifadeleri mantıklı bir şekilde manipüle ederler. Prosedürel ispatlar ile sentaktik ispatlar arasındaki en temel farkın, prosedürel ispatlara bir alıştırma olarak bakılırken, sentaktik ispatlara bir problem gözüyle bakılması olduğunu ifade etmiştir. Semantik ispatlarda öğrenciler, ispatlarını yaparken ispatlanan ifadenin neden doğru olduğunu görmek için ilgili kavramların informel ve sezgisel gösterimlerini dikkate alırlar. Bu öğrenciler, yapacakları formel çalışmalara yönlendirmesi için informel gösterimleri kullanırlar.

Raman (2003) yaptığı çalışmada üniversite seviyesindeki öğrencilerin ve öğretmenlerin ispata yönelik görüşlerini ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Bu amacını gerçekleştirebilmek için daha önceki çalışmasının verilerini kullanmıştır (Raman, 2001). Çalışmasının verileri, üniversite öğrencilerinin ve öğretmenlerinin "çift bir fonksiyonun türevi tek fonksiyondur" önermesinin ispatına yönelik görüşlerinden elde edilmiştir. Çalışmada ispatın "özel" ve "genel" yönü vurgulanmıştır. Raman (2003) ispatın hem özel hem de genel argümanlar içerdiğini ifade etmiştir. Özel argüman ile anlamaya yol açan argümanlar kastedilmektedir. Genel argümanlar ile de özel bir matematiksel topluluk için yeterli kesinlikteki argümalardan söz edilmektedir. Öne sürülen bu özel ve genel argüman ayırımı, Harel ve Sowder'ın (2007) ispatlama sürecinin, önce kendini daha sonra başkalarını ikna etme gibi iki alt süreci olduğu görüşleri ile paralellik göstermektedir. Çoğu öğrencinin ispatları yaparken örneklere bakarak ispat yapmaya çalıştıklarını, türevin formel tanımını yazdıklarını ve ispatlarda sıkışıp kaldıklarını ifade etmiştir. Üniversite öğrencileri ve öğretmenlerinin ispatlarını yaparlarken heuristik, prosedürel ve anahtar olmak üzere üç düşünce tipine sahip olduklarını belirtmiştir. Heuristik düşünce deneysel verilere güvenme ve çizim ile gösterme gibi informel anlamalara dayanır. Bu düşünce fikir verici olabilir fakat formel bir ispata götürmez. Anlama hissi verir fakat ikna hissi vermez. Birşeyin doğru olması gerektiği hissini verir. Prosedürel düşünce informel anlamalar ile bağlantı kurmadan formel bir ispata götüren mantıksal ve formel manipülasyonlara dayanır. İkna hissi verir ama anlama hissi vermez, birşeyin doğru olduğu gösterilir. Anahtar düşünce ise kesinlik hissi ile formel bir ispata götüren heuristik düşüncedir. Özel ve genel boyutları birbirine bağlar ve böylece anlama ve ikna hissi verir. Anahtar düşünce özel bir iddianın neden doğru olduğunu gösterir. Heuristik düşünce esasen özel, prosedürel düşünce ise geneldir. Anahtar düşünce iki düşünce arasındaki bağlantıyı sağlar (Raman, 2003).

Sarı, Altun ve Aşkar (2007) çalışmalarında lisans matematik öğrencilerinin ispata yönelik görüşleri ve ispatlama süreçlerini incelemişlerdir. Çalışmanın katılımcılarını Analize Giriş II dersinden düşük, orta ve yüksek başarı gösteren matematik öğretmenliği bölümünün birinci sınıfında öğrenim gören üç öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmada öğrencilere "f: [a,b]→ R türevlenebilir bir fonksiyon olsun f'nin monoton artan olması için gerekli ve yeterli koşul $x \in [a.b]$ için $f'(x) \geq 0$ olmasıdır" teoremi yöneltilmiş ve ispatlamaları istenmiştir. Öğrencilerin teoremi ispatlarken sahip oldukları ispat şemaları Weber (2005) ve Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemaları kullanılarak tespit edilmiştir. Çalışma sonucunda, başarılı olan öğrencinin tanımları açma ve sembolleri ilerletmeye dayalı olan sentaktik şema ile tanım ve teoremleri kullanarak ispat yapma olan dönüşümsel şemaya sahip olduğu ve geçerli bir ispat yapabildiği tespit edilmiştir. Orta seviyede başarılı olan öğrencinin zihnindeki daha önceden oluşmuş yöntemi takip etme yaklaşımı olan prosedürel yaklaşıma, özel örnekleri kullanarak ispat yapma olan tümevarımsal şemaya ve tanım ve teoremlerden hareketle ispat yapma olan dönüşümsel şemaya sahip olduğu belirlenmiştir. Bu öğrenci kendi başına geçerli bir ispat oluşturamamış fakat araştırmacıların yönlendirmesiyle geçerli bir ispat elde etmiştir. Düşük başarıya sahip olan öğrenci ise prosedürel yaklaşıma, öğretmenin gösterdiği ya da kitapta bulunan ispatları hatırlamaya çalışarak ispat yapma olan otoriter şemaya ve yetersiz zihinsel gösterimler kullanılarak ispat yapma olan algısal şemaya sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Bu katılımcı geçerli bir ispat yapısına ulaşamamıştır. Araştırmacılar öğrencinin geçerli bir ispat yapabilmesi için yönlendirme yapmış fakat yine de geçerli bir ispata ulaşılamamıştır.

Moore (1994) çalışmasında üniversite öğrencilerinin formel matematiksel ispatları öğrenme deneyimleri sırasında karşılaştıkları bilişsel güçlükleri araştırmıştır. Bu çalışma için ana uygulama ile beraber iki ön araştırma Georgia Üniversitesi'nin lisans matematik dersinde gerçekleşmiştir. Çalışmanın verileri katılımcı olmayan sınıf gözlemleri, öğrencilerle yapılan eğitim toplantıları ve öğrenci ve dersin hocası ile yapılan görüşmelerden elde edilmiştir. Yapılan araştırma sonucunda öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerin üç ana kaynağının olduğu ortaya çıkmıştır. Bunlar; kavram anlayışı, matematiksel dil ve notasyon, ispata başlamadır. Ayrıca öğrencilerin matematik ve ispata yönelik algılarının ispat yapmalarını etkilediği ifade edilmiştir. Çalışmada öğrencilerin sahip oldukları güçlükler yedi kategori altında ayrıntılı olarak belirtilmiştir. Bu güçlükler aşağıda sıralanmıştır.

1. Öğrenciler, tanımları bilmemekte, yani tanımları ifade edememektedirler.
2. Öğrenciler, kavramlara yönelik çok az sezgisel anlamaya sahiptirler.
3. Öğrencilerin kavram imajları ispat yapmak için yeterli değildir.
4. Öğrenciler kendi örneklerini üretme ve kullanmada başarısız ya da isteksizdirler.
5. Öğrenciler ispat yapısı elde etmek için tanımların nasıl kullanılacağını bilmemektedirler.
6. Öğrenciler matematiksel dili ve notasyonları anlama ve kullanmada başarısızdırlar.
7. Öğrenciler ispatlara nasıl başlayacaklarını bilmemektedirler.

Moore (1994) çalışmasında kavram anlayışı üzerine yoğunlaşmıştır. Öğrencilerin kavram anlayışının kavram tanımı, kavram imajı ve kavram kullanımı bileşenlerinden oluştuğunu belirtmiştir. Kavram tanımı ilgili kavramı kesin bir şekilde belirten, matematiksel topluluklar tarafından kabul edilen ve genellikle matematik kitaplarında yer alan kelime ve semboller bütünü olarak dikkate alınabilir (Moore, 1994; Tall ve Viner, 1981). Kavram imajı bir kavram ile ilgili özellikleri ve oluşumları ihtiva eden, tüm zihinsel görüntüleri içeren bilişsel yapıların bütünüdür (Tall ve Viner, 1981). Kavram kullanımı ise ispat yaparken, örnek üretirken ve örnekleri kullanırken kavramları kullanmadır (Moore, 1994). Ayrıca çalışmada öğrencilerin matematiksel bilgileri ile kavram imajlarının yeterli olmadığı durumlarda ispata nasıl başlayacaklarını belirlemede güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin "kavram imajı→kavram tanımı→kavram kullanımı" zincirini takip etmesinin yararlı olacağını ifade etmiştir. "kavram imajı→kavram kullanımı" zincirinin takip edilmesi durumunda ise, öğrencilerin iyi bir kavram imajına sahip olsalar bile formel ispat yapmada güçlük yaşayabileceklerini belirtmiştir.

Weber (2001) çalışmasında dört lisans ve dört doktora seviyesinde olmak üzere sekiz öğrencinin ispat yapma performanslarını incelemiştir. Lisans öğrencilerinin ispat yapmak için gerekli olan doğru bilgileri bilmelerine ve önermeyi ispatlayabilmek için uygulayabilmelerine rağmen ispat yapmada başarısız olduklarını belirlemiştir. İspatlardaki bu başarısızlığın sebebinin, öğrencilerin sahip oldukları sentaktik bilgileri ispat yaparken kullanamamaları olduğunu ifade etmiştir. Sentaktik bilgi, ispat yapmak için tanımları açarak ve sembolleri işe koşarak mantıksal manipülasyonlar yapma olarak tanımlanabilir (Weber, 2001). Sentaktik bilginin önemli olmasına rağmen tek başına geçerli bir ispat yapabilmek için yeterli olmadığı ifade edilmiştir. Öğrencilerin ayrıca stratejik bilgiye sahip olmaları gerektiği ifade edilmiştir. Stratejik bilgi, ispatta uygulanacak olan hangi gerçek ya da teoremin nasıl seçileceğine yönelik bilgidir. Stratejik bilgiye sahip bireyler kendilerine yararlı olma ihtimali yüksek olan eylemleri kullanabilir ya da birçok alternatif arasından uygun eylemi seçerler (Weber, 2001). Doktora öğrencileri ile lisans öğrencilerini birbiri ile karşılaştırdığında, doktora öğrencilerinin yapabildiği fakat lisans öğrencilerinin yapmakta zorlandığı dört stratejik bilginin olduğunu tespit etmiştir. Bu bilgiler; soyut cebirde kullanılan güçlü ispatlama yöntemlerinin neler olduğu, en önemli teoremin hangisi olduğu, özel teorem ya da gerçeklerin ne zaman kullanılacağı ve bir kişinin ne zaman teoremi ispatlamak için sembolik manipülasyonları deneyeceği yani sentaktik bilginin ne zaman kullanılıp kullanılmayacağı bilgisidir.

Ko ve Knuth (2009) yaptıkları çalışmada, uygun örnekleme yöntemi ile seçilen 36 lisans öğrencisinin sürekli fonksiyonlar konusu ile ilgili ispat ve ters örnek üretme becerilerini incelemişlerdir. Öğrencilere üçü doğru ve ikisi yanlış olmak üzere beş önerme sunularak önermelerin doğruluğu hakkında bir değerlendirme yapmaları istenmiştir. Öğrenciler verdikleri karara göre ispat ya da ters örnek üretmişlerdir.

Öğrencilerin ürettikleri ürünler yazılı olarak alınmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin hiçbirinin doğru önermeler için geçerli bir ispat üretemediği belirlenmiştir. Öğrencilerin doğru önerme için ürettikleri ürünlerin yanıt yok, yeniden ifade etme, ters örnek, deneysel, referanssız sembolik ve yapısal kategorileri altında toplandığı tespit edilmiştir. Öğrencilere yöneltilen iki yanlış önerme için doğru ters örnek üreten öğrencilerin sayısı sadece dokuz ve yedi olmuştur. Öğrencilerin yanlış önermeler için ürettikleri ürünler cevap yok, ispat, doğrulama, yetersiz, tamamlanmamış ve yeterli kategorileri altında değerlendirilmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin süreklilik, süreksizlik ve örten fonksiyon kavramlarına yönelik kısmi anlamalarının olduğu ve istenen seviyede olmadığı tespit edilmiştir. Bu durumun öğrencilerin önermeyi yanlış bir şekilde doğrulamalarına yol açtığını belirtmişlerdir.

Cusi ve Malara (2007) farklı bölümlerde öğrenim gören 54 lisans öğrencisinin sayılar teorisi alanında önermenin ispatını yapmayı gerektiren bir problemin çözümündeki davranışlarını sınıflamayı amaçlamıştır. Araştırmada öğrencilerin ürünleri Harel ve Sowder (1998) tarafından belirtilen ispat şemalarına göre sınıflandırılmıştır. Ayrıca öğrencilerin karşılaştıkları güçlükler incelenmiştir. Öğrencilerin karşılaştıkları güçlükleri; ispatlardaki sözel ve cebirsel ifadeler arasındaki koordinasyonla alakalı problemler, bileşik önermeleri formelize edememe, sentaktik dönüşümlerden elde edilen sonuçları yorumlayamama ve zihinsel engellerin varlığı kategorileri altında değerlendirmişlerdir. Çalışma sonucunda matematik ve fizik öğrencilerinin en çok sembolik-dönüşümsel ve sembolik ispat şemasında oldukları ve diğer öğrencilere göre daha başarılı oldukları tespit edilmiştir. Diğer öğrencilerin tümevarımsal ve sembolik ispat şemasında oldukları görülmüştür. Matematik ve fizik lisans öğrencileri sayıların özelliklerine yönelik bilgi eksikliklerinden dolayı sözel ifadelerini cebirsel dile dönüştürememişler ve formel ifadelere ulaşmada ve onları yorumlamada güçlük yaşamışlardır. Diğer bölümdeki öğrenciler problem cümlesindeki ifadeleri yorumlamada ve hipotezle ilgili özelliklere yönelik çıkarımda bulunmada güçlük yaşamışlardır. Ayrıca bu öğrencilerin ispatlamanın gerçekten ne olduğunu bilmediklerini ve formel muhakeme becerilerinin zayıf olduğu ortaya çıkmıştır.

Zaslavsky ve Peled (1996) çalışmalarında, 36 matematik öğretmeni ve 67 matematik öğretmeni adayının ters örnek üretme sürecini araştırmışlardır. Öğretmen adaylarına “Değişme özelliği olan her işlemin aynı zamanda birleşme özelliği de vardır” yanlış önermesinin doğru olup olmadığı sorulmuş, daha sonra verdikleri kararları doğrulamaları istenmiştir. Çalışmanın verileri bu önerme için üretilen ürünlerin değerlendirilmesi sonucu elde edilmiştir. Öğretmen adaylarının ürettikleri ters örnekler doğruluk, üretkenlik, matematiksel alan ve karşılaşılan güçlükler boyutunda analiz edilmiştir. Çalışmada iki grup arasındaki farklılıklar ve benzerlikler vurgulanmıştır. Her iki gruptaki öğretmen adaylarının çoğunun (%60) doğru bir ters örnek üretemedikleri ortaya çıkmıştır. Ters örnek üretme sürecinde matematik öğretmenlerinin matematik öğretmeni adaylarından daha başarılı olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının birleşme özelliği ile ilgili güçlüklerinin formel tanımı yanlış ifade etme, aşırı genelleme ve gereksiz şartlar ekleme olduğu belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının değişme özelliğine yönelik olarak, işlemin işareti ile sayıların işaretini birbiri ile karıştırdıkları belirlenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ikili işlem kavramı ile ilgili güçlüğe sahip oldukları ifade edilmiştir. Öğretmen adaylarının güçlüklerinden bir tanesi de bir özelliğin sağlayıp sağlamadığını özel örneklerle deneyerek göstermeleridir.

Weber ve Alcock (2004) çalışmalarında grup teorisi ve reel analiz alanında yapılan birbirinden bağımsız iki açıklayıcı çalışmayı birleştirmişlerdir. Öğrencilerin ispatları yapabilecekleri iki yöntem olan sentaktik ve semantik ispatları birbirinden belirgin şekilde ayırmayı amaçlamışlardır. Sentaktik ispatlarda ispatlayıcı, mantığın izin verdiği şekilde sembolik formülleri manipüle ederek çıkarımlarda bulunur. Semantik ispatlarda ise ispatlayıcı, yaptığı formel çıkarımlarına rehberlik etmesi için matematiksel kavramların örneklerinden yararlanır. Sentaktik ispat yapabilmek için kavramla ilgili önemli teorem ya da gerçeklerin hatırlanması kadar kavramın tanımının ezbere bilinmesi gerekmektedir. Sentaktik ispat yapan kişinin kavramların tanımından ya da ilgili gerçeklerden geçerli çıkarımları da yapabilmelidir. Semantik ispat ise biraz daha karmaşıktır. Semantik ispat yapabilmek için birtakım beceriler gereklidir. Bunlar; ilgili kavramı örneklendirebilmeli, örneklendirmeler birinin çıkarım yapabileceği kadar zengin olmalı, örneklendirmeler sunulan kavram ve nesneyi doğru bir şekilde yansıtmalı ve sebepleri ile birlikte kavramın formel tanımı örneklendirme ile bağlantılı olmalıdır. Sentaktik ispatın birtakım dezavantajlarının olduğu dile getirilmiştir. Araştırmacılara göre özel bir alanda sadece sentaktik ispat yapılırsa önermenin kapsamı oldukça daralır ya da sentaktik ispat yapan kişi ispatı anlamayabilir.

Doruk ve Kaplan (2015a) ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile yaptıkları çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşleri, ispat yapma becerileri ve ispatın yapıldığı konu üzerindeki kavramsal bilgileri arasında nasıl bir ilişki olduğunu araştırmışlardır. Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış görüşmeler yardımıyla elde edilmiştir. Görüşmelerde öncelikle yakınsak dizi tanımı verilmiş ve öğretmen adaylarının yakınsak dizi tanımına yönelik kavramsal bilgileri ortaya çıkarılmıştır. Öğretmen adaylarından yakınsak dizi konusundaki bir teoremi ispatlamaları istenmiştir. Ayrıca görüşmeler boyunca öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri alınmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının yakınsak dizi konusundaki ispat yapma becerileri, kavramsal bilgileri ve ispata yönelik görüşleri arasında bir ilişkinin olduğu tespit edilmiştir. İspata yönelik görüşleri olumsuz olan ve yakınsak dizi tanımına yönelik kavramsal bilgileri yeterli düzeyde olmayan öğretmen adaylarının ispat yapmada başarısız oldukları ortaya çıkmıştır. İspat yapmada başarılı olan katılımcının ise ispata yönelik olumlu görüşler beslediği ve yakınsak dizi tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin yeterli düzeyde olduğu belirlenmiştir. Ayrıca ispat yapmada başarılı olan katılımcının ispatını yaparken problem çözme adımlarına benzer adımları takip ederek kendine has bir yöntemi olduğu göze çarpmıştır.

Doruk ve Kaplan (2015b) çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma becerilerini, ispat yaparken yaşadıkları güçlükleri ve öğretmen adaylarına göre bu güçlüklerin sebeplerini araştırmışlardır. Çalışmanın verileri üç aşamada toplanmıştır. Çalışmanın ilk aşamasında 121 öğretmen adayına bir teorem yöneltilerek öğretmen adaylarının ispatları doğruluk bakımından incelenmiştir. İkinci aşamada geçersiz olarak değerlendirilen ispatlar incelenerek öğrencilerin sahip oldukları güçlükler belirlenmiştir. Son aşamada ise öğretmen adayları arasından tespit edilen her bir güçlüğü temsil eden yedi öğretmen adayı ile görüşmeler yapılmıştır. Görüşmelerde öğretmen adaylarının sahip oldukları güçlüğün sebepleri hakkında görüşleri alınmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerinin oldukça düşük olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat yaparken sahip olduğu güçlüklerin başında tanımları ifade etmenin geldiği tespit edilmiştir. Bu güçlüğü sırasıyla teoremin ifadesini anlama, matematiksel dil ve notasyonları anlama, uygun ispatlama stratejisi ve yöntemi seçme, kavramları karıştırma, tanımlardan ispat yapısı oluşturma ve düşündüklerini ifade etme güçlüklerinin izlediği belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının kendilerinde bulunan güçlüklerin farkında oldukları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adayları kendilerinde bulunun bu güçlüklerin sebebi olarak ispata karşı beslenen olumsuz duyguları, ispatların öğreniminde ve öğretimindeki eksiklikleri gördükleri tespit edilmiştir.

Bayazıt (2009) doktora tez çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematik, ispat ve matematiksel tanımlar hakkındaki algılarını incelemiştir. Çalışmasında öğretmen adaylarının ispat yapma yaklaşımlarını, ispat değerlendirme süreçlerini ve matematiksel tanımları kullanma durumlarını da araştırmıştır. Çalışmanın verileri, dört adet yarı yapılandırılmış görüşme formunun üç ilköğretim matematik öğretmeni adayına uygulanması ile elde edilmiştir. İlk görüşme öğretmen adaylarının ispat, matematik ve matematiksel tanımlar hakkındaki algılarını ortaya çıkarmak amacıyla yapılmıştır. Sonraki üç etkinlik temelli mülakat öğretmenlerin geometri, kümeler kuramı ve lineer cebir alanlarındaki basit problemlerde tanım kullanımını, ispat yapma ve değerlendirme becerisini incelemek için yapılmıştır. Öğretmen adaylarının matematiğe yönelik Enstrümentalist ve Platonist olmak üzere iki görüşe sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının matematiğe bakış açılarının onların ispat yapma yaklaşımı hakkında bilgi verdiği iddia edilmiştir. Enstrümentalist bakış açısına sahip öğretmen adaylarının ispatlarında sezgisel yaklaşım sergiledikleri, Platonist bakış açısına sahip öğretmen adaylarının ise prosedürel bir yaklaşım sergiledikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin ispat algısının çoğunlukla doğrulama, bazen açıklama olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlara yönelik sahip oldukları bu sınırlı algıların onların ispat değerlendirme kriterlerini oluşturduğunu dile getirmiştir. Öğrencilerin sahip oldukları kavram imajları ile sonuçlara ulaştıkça kavram tanımını göz ardı ettikleri belirlenmiştir.

Weber (2009) çok başarılı bir lisans matematik öğrencisi ile çalışma yürütmüştür. Sentaktik muhakeme şekline sahip bu öğrencinin matematiksel bir kavramı nasıl öğrendiğini, verilen matematiksel önermenin doğru ya da yanlış olduğuna nasıl karar verdiğini ve örnekleri nasıl kullandığını araştırmıştır. Bu öğrencinin yeni matematiksel kavramı öğrendiği ve tüm alıştırmaları başarı ile tamamladığı gözlemlenmiştir. Öğrenci matematiksel bir önermenin doğru olup olmadığına ikna olmak için öncelikle ispat yapmaya çalışmıştır. İspatının herhangi bir yerinde tıkanıp tıkanmayacağını dikkate almıştır. Yanlış olduğunu düşündüğü önerme için ters örnek bulmaya çalışmıştır. Önermelerin doğruluğunu değerlendirirken ispat ve ters örnek üretme dışında hiçbir strateji uygulamamıştır. Örneğin, çalışma sürecindeki etkinliklerin hiçbirinde örnekleri kullanmamıştır. Önermenin yanlış olduğunu göstermek için sadece ters örnekleri kullanmıştır.

Riley (2003), 23 ortaöğretim matematik öğretmeni adayı ile yaptığı çalışmasında öğretmen adaylarının ispat algılarını ve ispat yapma becerilerini araştırmıştır. Öğrencilerin ispat yapma becerileri kapsamında doğrudan ve dolaylı ispatlara ve ters örnekle yapılan yanlışlamalara odaklanmıştır. Öğretmen adaylarının sadece %30'unun ispatın mantıksal dayanaklarına yönelik 12 maddeden dokuzuna doğru bir şekilde cevap verebildiklerini belirtmiştir. Çalışmanın sonuçları öğrencilerin koşullu önermeler ve onunla ilgili matematiksel ifadeler hakkında zayıf anlayışlara sahip olduklarını göstermiştir. Öğretmen adaylarının %57'sinin doğrudan ispatlama yöntemi barındıran geçerli bir ispat yapabildikleri belirlenmiştir. Dolaylı ispatlama yöntemi ile yapılan ispatları yapma oranının ise sadece %39 olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının %44'ü yanlış matematiksel önermeleri seçebilirken %39'u bu önermelere yönelik geçerli ters örnekler üretebilmişlerdir.

2.2.5. Matematiksel önermelerin doğruluğunu değerlendirme çalışmaları

Literatür incelendiğinde bu konudaki yapılan çalışmaların sınırlı sayıda olduğu görülmüştür. Çalışmalarda öğrencilerin doğru ve yanlış önermeleri belirlemede güçlük yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin özellikle yanlış önermeleri belirlemede daha başarısız oldukları göze çarpmıştır.

Ko (2010) doktora tez çalışmasında lisans matematik öğrencilerine ikisi yanlış, dördü doğru olan altı önermenin doğruluğunu değerlendirmelerini istemiştir. Öğrencilerin yanlış önermeleri belirleme oranı yaklaşık %15 iken doğru önermeleri belirleyebilme oranının yaklaşık %93 olduğu ortaya çıkmıştır. Goetting 40 lisans öğrencisinin yarısına yakınının sayılar teorisi alanında sorulan yanlış önermeyi doğru olarak kabul ettiğini ifade etmiştir. Öğrencilerin yanlış önermeyi değerlendirirken en çok örneklerle deneme ya da geçmiş bilgilerine güvenme eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin doğru önermeleri belirleme becerisinin ise yüksek olduğu tespit edilmiştir. Benzer şekilde Riley (2003) 23 matematik öğretmeni adayının

%56'sının geometrideki yanlış önermenin doğru olduğuna inandıklarını belirtmiştir. Ko ve Knuth (2009) da benzer sonuçlara ulaşmışlardır. Lisans matematik öğrencilerine sürekli fonksiyon konusunda iki yanlış önerme sunulmuştur. İlk önerme için 36 öğrenciden 14'ünün, ikinci önerme için ise altı öğrencinin önermenin doğru olduğunu düşündükleri belirlenmiştir. Öğrencilerin önermenin yanlış olduğunu göstermek için ürettikleri ters örneklerin sadece dokuzu ve yedisi yeterli ters örnek olarak değerlendirilmiştir. Buna göre öğrencilerin yaklaşık %27'sinin bu önermelerin doğru olduğunu belirttikleri anlaşılmıştır.

Sınırlı olsa da öğretmenlerin matematiksel önermelerin doğruluğunu değerlendirmede başarılı oldukları çalışmalar da mevcuttur. Tsamir, Tirosh, Dreyfus, Barkai ve Tabach (2009) basit sayılar teorisi alanında bir matematik öğretmenine yöneltilen altı matematiksel önermenin doğruluğunu başarılı bir şekilde belirleyebildiğini ifade etmişlerdir.

Öğrencilerin önermenin doğruluğunu değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelendiğinde, öğrencilerin çoğunlukla örnek temelli muhakeme yöntemini kullanma eğiliminde oldukları ortaya çıkmıştır.

Gibson (1998) lisans öğrencilerinin bazılarının önermelerin doğruluğunu değerlendirirken şekiller çizdiklerini belirtmiştir. Goetting (1995) öğrencilerin bir kısmının kendilerine yöneltilen tanıdık olmayan önermelerin doğruluğunu değerlendirirken sayılarla deneme eğiliminde olduklarını ifade etmiştir. Galbraith (1981) çalışmasında bazı öğrencilerin matematiksel bir önermenin doğruluğunu belirlerken en küçük ve en büyük sayıları deneyerek karar verdiklerini belirtmiştir. Ayrıca lise öğrencilerinin bir kısmının bir önermeyi yanlışlamak için birden fazla ters örneğe ihtiyaç olduğunu düşündüklerini belirtmiştir. Weber (2009) başarılı bir lisans matematik öğrencisinin önermeyi değerlendirirken ilk önce ispatlamaya çalıştığında, ispatta sıkıştığında ters örnek aramaya başladığını ifade etmiştir. Goetting (1995) öğrencilerin sayılar teorisi alanında kendilerine tanıdık gelen önermeleri değerlendirirken geçmiş bilgilerine güvendiklerini ve geometri alanında önermelerin doğruluğuna karar vermek için ispat yapmaya çalıştıklarını belirtmiştir. Ko (2010) öğrencilerin önermelerin doğruluğunu değerlendirirken kullandıkları stratejileri; örnek temelli muhakeme, karışık muhakeme, ilkel (Naive) muhakeme ve sofistike muhakeme kategorilerinde incelemiştir. Örnek temelli muhakemede öğrencilerin önermeleri doğrulamak için sayılar ya da şekillere güvendiklerini ortaya koymuştur. Karışık muhakemede öğrenciler hem ilgili yapıyı veya örüntüyü belirlemek için örnekleri kullanır hem de doğru tanım, teorem ve özellikleri manipüle ederek önermeyi ispatlayan ya da yanlışlayan örnekleri tespit etmeye çalışırlar. İlkel muhakemede öğrenciler önermeyi doğrulamak için sezgisel anlamalarından ya da geçmiş deneyimlerinden gelen kısmen doğru tanımları, özellikleri ve teoremleri kullanırlar. Sofistike muhakemede ise öğrenciler önermeyi ispatlamak ya da yanlışlamak için doğru tanımları, özellikleri, teoremleri manipüle etmeye çalışırlar. Öğrencilerin genel olarak en çok karışık muhakemeyi, daha sonra da sofistike muhakemeyi benimsedikleri tespit edilmiştir. Özel olarak analiz alanındaki doğru önermeyi belirlemek için karışık muhakemenin, yanlış önermeyi belirlemek için ise sofistike muhakemenin kullanıldığı belirlenmiştir.

2.2.6. Matematiksel argümantasyon ve ispat ile arasındaki ilişkiye yönelik yapılan araştırmalar

Matematik eğitimi alanında öğrencilerin ve öğretmenlerin ürettikleri argümanlar Toulmin modeline göre sıklıkla analiz edilmiştir. Bazı araştırmacılar sınıf ortamında üretilen argümanların Toulmin modeline göre nasıl analiz edileceğine (Dinçer, 2011; Fukowa-conelly, 2014), öğrencilerin ve öğretmenlerin ürettikleri ya da sınıf ortamında oluşan argümanları sınıflandırmaya (Inglis vd., 2007; Kinipping, 2008; Nardi vd., 2012) ve argümantasyon süreci ile ispat süreci arasındaki ilişkiye odaklanmışlardır (Douek, 1999; Martinez ve Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2007, 2008; Pedemonte ve Buchbinder, 2011; Pedemonte ve Reid, 2011). Bu bölümde ilgili alanda yapılan çalışmaların bir derlemesi sunulmuştur.

Inglis vd. (2007) başarılı lisansüstü öğrencileri ile sayılar teorisi konusundaki argümantasyon süreçlerini incelemişlerdir. Çalışmada özel sayıların tanımları verilmiş ve yedi önerme için önermelerin doğruluğu hakkında değerlendirme yapmaları istenmiştir. Çalışmanın verileri etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. İspat şemalarından yararlanarak gerekçe tipleri kavramını ortaya atmışlardır. Tümevarımsal (inductive), dedüktif (deductive) ve yapısal-sezgisel (structural-intiutive) olmak üzere üç çeşit gerekçe tipi önermişlerdir. Tümevarımsal gerekçe tipini, bir argümanın sonucu üzerindeki belirsizliği azaltmak için Harel ve

Sowder'ın (1998) tümevarımsal ispat şemasını kullanarak açıklamışlardır. Tümevarımsal ispat şeması öğrencilerin kendilerini ve başkalarını varsayımın doğruluğunu bir veya birkaç özel durum ile niceliksel olarak değerlendirilmesi olarak tanımlanmıştır. Yapısal-sezgisel gerekçe tipi terimi bir sonuca ikna olmak için görsel veya başka türden olan bazı zihinsel yapı üzerine deney ya da gözlem yapan biri için kullanılmaktadır. Sıklıkla fakat her zaman olmamakla birlikte, bu gerekçe tipinde yapılan muhakeme sezgisel tip olarak görülür. Dedüktif gerekçe tipini Harel'in (2001) en etkili ispat şeması olarak belirlediği dedüktif-modern-aksiyomatik ispat şemasına göre tanımlamışlardır. Dedüktif gerekçe, öne sürülen argümanın sonucu için formel matematiksel doğrulamaların gerekçe olarak kullanılmasıdır. Bu doğrulamalar; aksiyomlardan elde edilen çıkarımlar, cebirsel manipülasyonlar ya da ters örnek kullanımı dedüktif gerekçe olarak sınıflandırılmıştır. Inglis vd. (2007) bu sınıflamanın dışında da sınıflamaların olabileceğini ifade etmişlerdir. Çalışma sonucunda, matematiksel argümantasyonlarda Toulmin modelindeki niteleyen bileşeninin önemli bir role sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin sahip oldukları gerekçe tipleri ile kullandıkları niteleyen bileşenini eşleştirme becerilerinin gelişmesi gerektiğini savunmuşlardır.

Knipping (2008) sınıf ortamındaki ispatlama sürecinde ortaya çıkan argümanların yapısını incelemiştir. Çalışmanın katılımcılarını dokuzuncu sınıfta öğrenim gören Fransız ve Alman öğrenciler oluşturmuştur. Pisagor teoreminin öğretimi sırasında oluşan argümantasyon süreci Toulmin modeline göre analiz edilmiştir. Çalışma sonucunda argümantasyonları lokal ve global olmak üzere iki sınıfa ayırmıştır. Bir argümanın başından sonuna kadar, bir bütün olarak ele alınan yapısına global argüman ya da ispatlama sürecinin argümantasyon yapısı denir. Lokal argümanları ise kavramsal ve görsel olarak iki gruba ayırmış ve açıklamıştır. Kavramsal argümantasyonlarda gerekçe ve destek bileşeni dedüktif kavramsal argümanlara dayanır. Bu gerekçe ve destek bileşenlerinde matematiksel kavramlar, kavramlar arasındaki matematiksel ilişkiler, teoremler, tanımlar, aksiyomlar ve mantık kuralları kullanılır. Görsel argümantasyonlarda şekilleri referans almak ön plandadır. Deneysel-görsel (empirical-visual) ve kavramsal-görsel (conceptual-visual) olmak üzere iki düzeydedir. Deneysel-görsel düzeydeki argümanlar özel bir şekil ve bu şekildeki belirgin ilişkiler ile ilgili olan argümanlardır. Matematiksel özellikler ve ilişkiler şekil ile bağlantılı olmak zorundadır ve sezgiler ile ulaşılabilen bilgi olarak tartışılır. Kavramsal-görsel düzeyde ise şekiller bir düşüncenin gösterimi olarak ele alınır. Global argümantasyonda kaynak-yapı (source-structure) ve depo-yapı (reservoir-structure) olmak üzere iki gruba ayrılmıştır. Kaynak-yapı ispatlama sürecinde oluşan argümanlar ve düşünceler, birçok kaynaktan fışkıran su gibi birçok kökten meydana gelir. Depo-yapıdaki argümantasyon ara sonuçlara doğru ilerler. Argümantasyonu oluşturan ve birbirinden ayrı olan parçalar suyu bir sonraki aşamaya geçmesinden önce tutan ve temizleyen depolar gibidir.

Nardi vd. (2012) lise matematik öğretmenlerinin analiz ve cebir alanındaki klasik sınıf senaryolarında öğrenci cevaplarını değerlendirmeleri üzerine bir çalışma yapmıştır. Çalışmada öğretmenlerin ürettikleri argümanlarda kullandıkları gerekçe tiplerinin ortaya çıkarılması hedeflenmiştir. Çalışmanın verileri yazılı dönütler ve mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. Çalışma sonucunda Freeman (2005) tarafından yapılan gerekçe tipleri sınıflaması revize edilmiştir. Çalışmada öğretmenlerin kullandıkları gerekçelerin öncelikli (Priori), geleneksel (Institutional), deneysel (Empirical) ve değerlendiren (Evaluative) olmak üzere dört kategoriye ayrıldığı belirlenmiştir. Öncelikli gerekçede matematiksel teoremlere veya tanımlara (öncelikli-epistemolojik) ya da pedagojik prensiplere başvurulur (öncelikli-pedagojik). Geleneksel gerekçe, ders kitabında mevcut olan ya da tavsiye edilenlerden kaynaklanan seçimlerin bir doğrulaması (Geleneksel-müfredat) veya matematiksel toplulukların standart uygulamalarının bir yansımasıdır (Geleneksel-epistemolojik). Deneysel gerekçede, öğretmenin öğretim deneyimine bağlı olarak sınıfta sıklıkla tekrarlanan olaylara atıf yapılır (Deneysel-profesyonel) ya da matematik alanındaki bireysel öğrenme deneyimine başvurulur (Deneysel-kişisel). Değerlendiren gerekçede ise kişisel görüş, inanç ve değerlerden kaynaklanan pedagojik tercihlerin doğrulaması yer alır.

Bazı araştırmacılar üniversite seviyesindeki matematik derslerinde sınıf ortamında oluşan argümantasyon sürecini incelemeye yönelmişlerdir. Literatür incelendiğinde, bu anlamda Türkiye'de matematiksel argümantasyon üzerine yapılan uygulamaya dönük ilk ve tek çalışmanın Dinçer (2011) tarafından yapıldığı görülmektedir. Bu çalışmada matematik lisans derslerinde geliştirilen tartışmalarda öğrencilerin attıkları adımların yapısını özellikle, yaptıkları muhakemeleri, birbirleriyle ve öğretmenleriyle olan etkileşimleri incelenmiş ve Toulmin tarafından alandan bağımsız olarak önerilen modelin söz konusu tartışmaların yapısını incelemek için nasıl kullanılacağı araştırılmıştır. Araştırmada veri toplama aracı olarak katılımcı olmayan gözlem kullanılmıştır. Çalışma sonucunda Toulmin modeline eklenebilecek yeni bileşenler bulunmuştur. Bu bileşenler rehber desteği ve rehber yönlendirmesidir. Rehber desteği, onay rehber desteği ve sonlandırıcı rehber desteği olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Ayrıca kullanılan gerekçelerin dedüktif ve referans olmak üzere iki sınıfa ayrıldığı tespit edilmiştir. Toulmin modelinin matematik lisans derslerindeki ispat sürecinde, tanım kurma sürecinde ve problem çözme sürecinde oluşan argümantasyonların analizinde kullanılabileceğini göstermesi çalışmanın önemli sonuçlarından biridir. Fukowa-conelly (2013) yaptığı çalışmada Dinçer'i (2011) desteklemiştir. Fukowa-conelly (2013) çalışmasında, bir öğretim elemanının soyut matematik dersini izlemiştir. Soyut matematik dersinde yapılan ispatlar Toulmin modeline göre analiz edilmiştir. Çalışma sonucunda Toulmin modelinin sınıf içinde yapılan ispatların analizinde kullanılabileceğini ifade etmiştir.

Literatür incelendiğinde araştırmacıların argümantasyon ile ispat arasındaki ilişkiye yoğunlaşmaya başladıkları dikkati çekmiştir. Bu kapsamda yapılan çalışmaların sınırlı sayıda olduğu tespit edilmiştir. Yapılan çalışmalarda bir önermenin doğruluğu hakkında ikna olma süreci olan argümantasyon süreci ile söz konusu önermenin doğru olduğunu gösterme adına ürün üretme süreci olan ispat süreci arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Bu çalışmaların geometri (Pedemonte, 2007; Pedemonte ve Reid, 2011), cebir (Martinez ve Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2008) sayılar teorisi alanındaki (Pedemonte ve Buchbinder, 2011) argümantasyon ve ispat süreçleri arasındaki ilişkiye odaklandıkları tespit edilmiştir.

Douek (1999) bilişsel bütünlük hipotezini dikkate alarak 43 üniversite son sınıf öğrencisinin argümantasyon ve ispat süreçleri arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Çalışmanın verileri "İki ardışık tek sayının toplamı dört ile bölünebilir" önermesi için verilen yanıtlardan yararlanarak toplanmıştır. Toplam 43 yazılı performanstan 14'ü analiz edilmiştir. Bu çalışma, argümantasyon ile formel ispat arasında inkâr edilemez epistemolojik ve bilişsel uzaklık olmasına rağmen argümantasyon ile olağan matematiksel ispat arasında hem süreçler hem de ürünler bağlamında birçok ortak özeliğin olduğu düşüncesini desteklemek için yapılmıştır. Öğrencilerin cevapları "öğrencilerin tüm varsayım ve ispatları", "öğrencilerin argümantasyonlarında destek aldığı gizli ve açık referans bilgisi (içerik referans bilgisi ve meta-matematiksel bilgi)", "cebirsel-sentaktik ve semantik temelli muhakeme adımları" ve "ispat süreci ve ürünü" açılarından incelenmiştir. Çalışma sonucunda, aşikâr referans bilgisinin standardı olmayan, uygun gösteriminin öğrenci performanslarında önemli bir rolünün olduğu görülmüştür. Öğrencilerin ürün ürütme sürecinde sentaktik argümanları yeterli bulduğu ve böylece semantik temelli argümanların kritik olduğu görülmüştür. Son ürün olarak ispatın formel gereksinimlerini ispatlama sürecinden daha önemli görmenin negatif sonuçlarına yönelik bazı deliller elde edilmiştir. Formel ispatın varsayım oluşturma ve ispatlamanın verimli aktivitelerinden oldukça uzak olduğu belirtilmiştir. Bu durumun üniversite matematik öğrencileri için bile geçerli olduğu vurgulanmıştır. Ayrıca, bu aktivitelerin verimliliğinin ispatlamadan çok, argümantasyon aktiviteleri boyunca bile tamamen gelişen zihinsel niteliklere bağlı olduğunu belirtmiştir.

Pedemonte (2007) yaptığı çalışma ile argümantasyon ile ispat arasındaki ilişkinin yapısal olarak nasıl analiz edilebileceği konusunda öncü bir çalışma yaparak alana yeni bir bakış açısı sunmuştur. Çalışmada 12 ve 13. sınıflarda öğrenim gören toplam 102 öğrencinin geometri alanındaki iddia oluşturma süreçleri ile bu sürecin sonunda ortaya çıkan ürün olan ispat incelenmiştir. Çalışmada varsayım oluşturma süreci olan argümantasyon ile bu varsayımın doğruluğunu gösterme süreci olan ispat süreci arasındaki ilişki yapısal olarak incelenmiştir. Pedemonte, çalışmasında daha önceki bakış açısı olan bilişsel bütünlük hipotezinin bu süreci tam anlamıyla betimlemede yetersiz kaldığını düşünmüştür. Argümantasyon ile ispatı yapısal olarak karşılaştırabilmek için öğrencilerin kullandıkları argümantasyonları üç yapıya ayırmış ve analizlerinde kullanmıştır. Bu argüman yapıları dedüktif, abdüktif ve indüktif (tümevarımsal) yapılardır. Pedemonte (2007), Harel'in (2001) belirttiği iki tip genelleme olan sonuç örnek genellemesi (result pattern generalisation) ve süreç örnek genellemesine (process pattern generalisation) analizlerinde yer vermiştir. Sonuç örnek genellemesinin ortaya çıkan sonuçların düzenliliği üzerine, süreç örnek genellemesinin ise sürecin düzenliliği üzerine yoğunlaştığını ifade etmiştir. Çalışma sonucunda argümantasyon ile ispat süreci arasında yapısal sürekliliğin (structural continuity), yapısal mesafenin (structural distance) ve spontane sürekliliğin (spontaneous continuity) ortaya çıktığını belirtmiştir. Argümantasyon aktivitelerinin ispat yapmayı kolaylaştırdığını ve bilişsel bütünlük hipotezinin, özel olarak içeriğe dayalı bir incelemenin iki süreç arasındaki bilişsel ilişkiyi analiz etmede yeterli olmadığını ifade etmiştir. Yapısal analizin Toulmin modeli ile yapılabileceğini belirtmiştir. Spontane sürekliliğin öğrencilerin doğru ispat yapmalarını engellediği için bir güçlük olduğunu, abdüktif argümantasyondan dedüktif ispata geçişin zor olduğunu dile getirmiştir. Doğru ispat yapabilmek için yapısal mesafenin kapatılmasının gerekli olduğunu vurgulamıştır. Öğrencilerin tümevarımsal ispat yapabilmeleri için süreç örnek genellemesini yapmalarının şart olduğunu ve sonuç örnek genellemesinin tümevarımsal ispat yapmanın önündeki güçlüklerden olduğunu ifade etmiştir. Argümantasyon sürecine girmeyi gerektiren açık uçlu problemlerin kullanımının ispat yapmayı kolaylaştırabileceğini belirtmiştir.

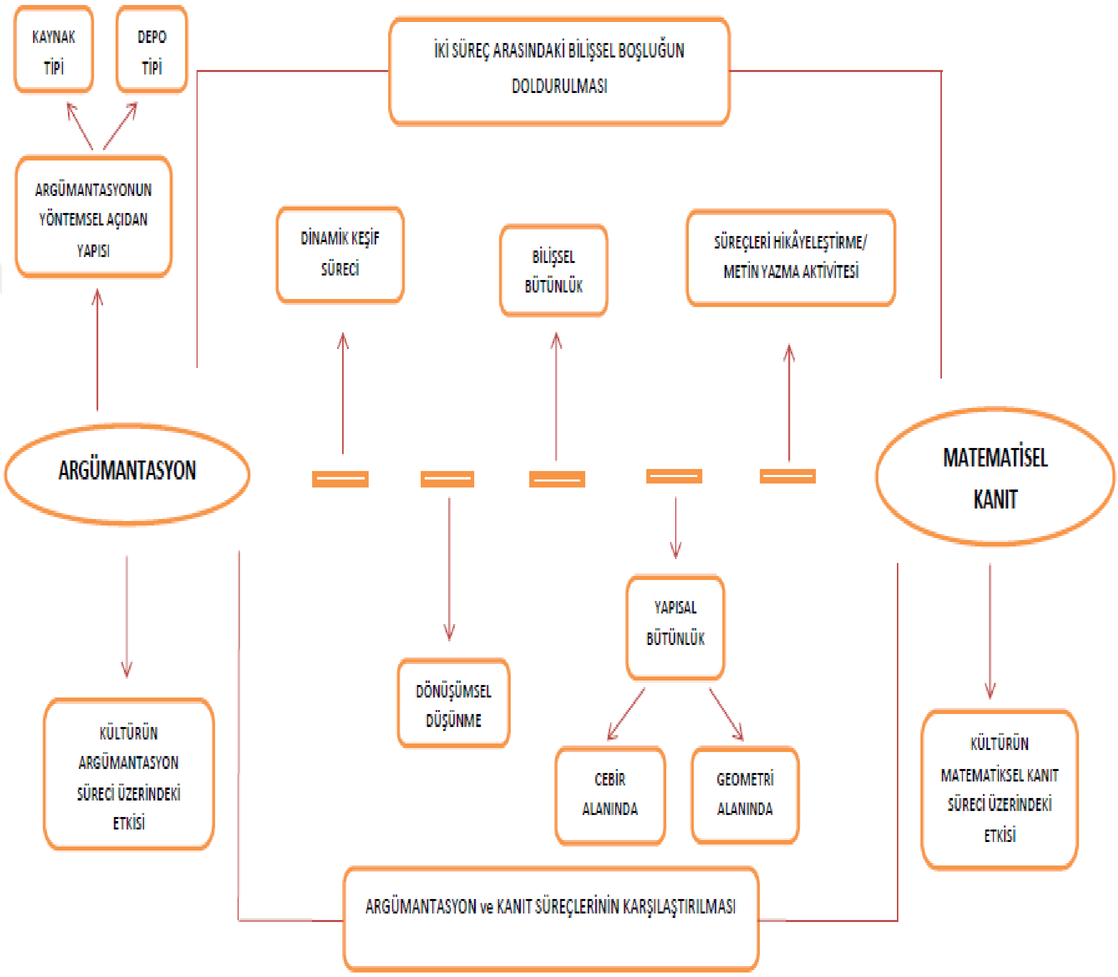
Pedemonte (2008) bir sonraki çalışmasında geometri alanındaki ispatlardan farklı olarak argümantasyon ile cebirsel ispat arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmayı hedeflemiştir. Çalışmanın amacı geometriden farklı olarak, abdüktif argümantasyon ile dedüktif ispat arasındaki yapısal mesafenin varsayım üretme ve daha sonra bu varsayımı doğrulamayı gerektiren açık uçlu problemlerin çözümünde karşılaşılabilecek zorluklardan biri olmadığını ortaya çıkarmaktır. Çalışmanın verileri sayıların özelliklerini içeren iki açık uçlu problemin 14 sınıf öğretmeni adayına yöneltilerek elde edilmiştir. Bu çalışmada argümantasyon süreci oluşturmacı (Constructive) ve yapılandırılmış (Structurant) argümantasyon olmak üzere iki safhaya ayrılmıştır. Oluşturmacı argümantasyon bir varsayımın oluşturulmasına katkı sağlar ve önermeden hemen önce gelir. Yapılandırılmış argümantasyon bir varsayımı doğrular, bir gerçeğin elde edilmesinin öncesinde inşa edilir. Böylece gerçek yapılandırılmış argümantasyondan sonra ortaya çıkar. Argümantasyon ve ispat süreci Ck₵ modeli ile birleştirilmiş Toulmin modeli ile analiz edilmiştir. Argümantasyon ve ispat hem yapısal hem de referans sistemi bakımından incelenmiştir. Referans sistemi gösterim sistemi (dil, çizim, sezgi) ve bilgi sisteminden (kavramlar, teoremler) oluşur. Çalışma sonucunda cebirsel ispatlar güçlü dedüktif yapıya sahip olduklarından, argümantasyondaki abdüktif adımların argümantasyonun aritmetik alanındaki sayılar ile cebirsel ispatta kullanılan harfler arasında bağlantı kurduğundan dolayı yararlı olduğu tespit edilmiştir. İspat yapmada başarılı öğrencilerin yapılandırılmış argümantasyonlarında abdüktif adımlara yer verdiği ve bu adımların argümantasyondaki aritmetik alan ile ispattaki cebirsel alan arasındaki yapısal mesafeyi kısalttığını ifade etmiştir. İspat yapmada başarısız olan öğrencilerin ise yapılandırılmış argümantasyonlarında abdüktif adımlara rastlanılmadığını belirtmiştir.

Pedemonte cebirsel alanda yapılan ispatlarda abdüktif argümantasyonların önemini ortaya çıkarmıştır (Pedemonte, 2008). Bu çalışmanın ardından abdüktif adımlar üzerine yoğunlaşmıştır. Bu amaçla Pedemonte ve Reid (2011) geometri alanındaki ispatlarda abdüktif argümantasyonun rolünü ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Bu amaçla 12 ve 13. sınıflarda öğrenim gören Fransız ve İtalyan öğrencilerin geometri alanındaki argümantasyon ve ispat süreçleri incelenmiştir. Ayrıca çalışmada abdüktif argümantasyonun bir sınıflandırılması yapılmıştır. Çalışmada üç tip abdüktif argümantasyon göz önüne alınmıştır. Bunlar; alt kodlu (undercoded), üst kodlu (overcoded) ve yaratıcı (creative) abdüksiyondur. Üst kodlu abdüksiyonda bir argümanın sonuç, gerekçe ve destek bileşeni belli iken veri bileşeni aranmaktadır. Alt kodlu abdüksiyon iki çeşittir. Birinci çeşit alt kodlu abdüksiyonda argümanın gerekçesi olarak birçok kuraldan birinin seçilmesi söz konusudur ve zor bir durumdur. İkinci çeşitte ise argümanın hem gerekçe hem de destek bileşeni birçok kural arasından seçilir. Birinci çeşide göre daha zordur. Yaratıcı abdüksiyonda ise argümanın gerekçesi mevcut kurallar arasından seçilmez, kuralların oluşturulması gerekmektedir. Öğrencilerin yapması en zor olanıdır. Çalışma sonucunda, argümantasyonlarında üst kodlu ya da en azından birinci çeşit alt kodlu abdüksiyon kullanan öğrencilerin ispatı yapması, ikinci çeşit alt kodlu ve yaratıcı abdüksiyon kullanan öğrencilere göre daha olası görünmesine rağmen genel olarak düşünüldüğünde abdüktif argümantasyon ile dedüktif ispat arasında aşikâr bir ilişkiye rastlanmamıştır.

Pedemonte ve Buchbinder (2011) yaptıkları çalışmada ispatlama sürecinde örneklerin rolünü incelemişlerdir. 12 lise son sınıf öğrencisi ile çalışmışlar, farklı durumları temsil eden dört öğrencinin bulgularını sunmuşlardır. Çalışmada Harel (2001) tarafından tanımlanan genelleme tipleri olan süreç örnek genellemesi ve sonuç örnek genellemesi dikkate alınmıştır. Çalışma sonucunda örneklerin, argümantasyon ve ispat arasındaki bilişsel bütünlüğü ve yapısal sürekliliği desteklediği durumlarda ispat yapmada etkili olduğu ortaya çıkmıştır. Yapısal sürekliliğin ancak süreç örnek genellemesinin mevcut olduğu indüktif argümantasyon ile gerçekleştiği belirlenmiştir. Ayrıca süreç örnek genellemesinin, argümantasyon ile ispat arasındaki bilişsel bütünlük ve yapısal sürekliliğin gelişmesine yol açan jenerik (generic) örneklerin üretilmesine katkı sağladığı ifade edilmiştir. Çalışmada sonuç örnek genellemesinin, örnekler arasındaki bağlantıya dikkat etmeden ya da örneklerin yapılarına dikkat etmeden bir varsayım oluşturmak için yeterli olabileceği fakat ispat yapmak için yeterli olmayacağı sonucuna ulaşmışlardır. Argümantasyon ile ispat arasında yapısal süreklilik olan öğrencilerin ispat yapmada başarılı olduklarını belirtmişlerdir. İçerisinde sonuç örnek genellemesi bulunduran indüktif yapıdaki yapılandırılmış argümantasyonların ispat yapmada başarı getirmediği ifade edilmiştir. Bu durumun aksine, içerisinde jenerik örnek barındıran dedüktif yapıdaki yapılandırılmış argümantasyonlar doğru dedüktif ispat yapmayı sağlamıştır. Bu durumda jenerik örneklerin argümantasyon ile ispat arasında bir köprü vazifesi yaptığı belirtilmiştir.

Bu çalışmalara ek olarak Martinez ve Pedemonte (2014) aritmetik indüktif argümantasyon ile cebirsel dedüktif ispat arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Çalışmanın verileri Takvim Cebiri dersi öğretimi sırasında toplanmıştır. İlgili derste öğrencilere 17 adet problem sunulmuştur. Takvim Cebiri dersinin ilk dört dersinden elde edilen veriler analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarına bu derste sorulan üç problem üzerinde durulmuştur. Ayrıca, üç dokuzuncu ve onuncu sınıf öğrencisi ile görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerin iki türlü güçlük yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bunlardan birincisi aritmetik alandan cebirsel alana geçiş, diğeri ise indüktif argümantasyondan dedüktif ispat yapısına geçiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin hepsinin aritmetik alanda ve indüktif olarak doğru varsayımlar ürettikleri belirlenmiştir. Tüm öğrenciler bilişsel mesafenin üstesinden gelmeyi öğrenmişlerdir. Bu güçlüklerin üstesinden gelebilmek için öğretmen müdahaleleri ve verilerin yeniden düzenlenmesi önemli adımlar olmuştur. Çalışmada indüktif argümantasyonlarında süreç örnek genellemesi yapan öğrencilerin dedüktif ispatlara ulaşabildikleri ortaya çıkmıştır.

Güneş (2013), yüksek lisans tez çalışmasında argümantasyon ve matematiksel ispat süreçlerini karşılaştıran ve bu iki süreç arasındaki ilişki ya da ilişkileri Toulmin modeline göre analiz eden çalışmaları derlemiştir. Çalışması kapsamında incelediği argümantasyon ile matematiksel ispat çalışmalarının sonuçlarını Şekil 2.7'de özetlemiştir. Çalışmanın sonucunda Türkiye'de matematik eğitiminde doğrudan bu konu ile ilgili yapılmış, argümantasyon ile matematiksel ispat arasındaki ilişkiyi ya da ilişkileri analiz eden ve bu ilişkileri karşılaştıran bir çalışmaya rastlanmadığını ifade etmiştir. Öğrencilerin argümantasyon ile ispat arasındaki mesafayi kapatmak, bu bilişsel köprüyü kuvvetlendirmeleri ve daha kolay yoldan matematiksel ispata ulaşabilmeleri adına argümantasyon ile matematiksel ispat arasındaki ilişkilerin analiz edildiği çalışmaların artırılmasının gerekli olduğunu dile getirmiştir. Yapılacak bu tür çalışmalar ile öğrencilerin matematiksel ispat yaparken yaşadıkları başka olası olumsuzlukların saptanmasının mümkün olacağını vurgulamıştır.



Şekil 2.7. Argümantasyon ile matematiksel ispat süreçleri arasındaki ilişkiler (Güneş, 2013)

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM

“Nitel araştırma ile yapılan inceleme sırasında, araştırma yapılan kişilerin oluşturdukları ve kullandıkları dil, anlamlar ve kavramlar üzerinde durup onları anlamak ve bunların araştırılan kişiler için ne anlam ifade ettiğini ortaya çıkarmaya çalışmak, önemli bir çalışma stratejisidir (Ekiz, 2009).”

3.1. Araştırmanın Modeli

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı esas alınmıştır. Çünkü nitel araştırmaların en temel özelliği, üzerinde araştırma yapılan kişilerin bakış açılarıyla araştırılan olay, olgu, norm ve değerleri incelemeye çalışmasıdır (Ekiz, 2009). Nitel araştırmalar insanların bireysel ya da toplu olarak sosyal eylemlerini, düşüncelerini, inançlarını ve algılarını analiz eder ve betimler. Nitel araştırmacılar da olguları insanların onlara yükledikleri anlamlar vasıtasıyla yorumlarlar (Mcmillan ve Schumacher, 2001). Nitel araştırmada temel vurgu süreç, anlayış ve anlam üzerinedir; süreç tümevarımsaldır; ürün etraflı ve zengin betimlemedir (Merriam, 2013). Her ne kadar nitel araştırmanın bir tanımını yapmak güç olsa da nitel araştırma: gözlem, görüşme, doküman analizi gibi nitel veri toplama araçlarının kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Veri toplama aracı olarak araştırmacıya bağlı olması, çoklu veri toplama yöntemlerinin kullanılması, hem tümevarımsal hem de tümdengelimli olması, katılımcıların anlamalarına dayalı olması ve araştırmacının derinlemesine düşünmesi ve bütüncül bakışa sahip olması nitel araştırmaların önemli özellikleridir (Creswell, 2014). Bu özellikler çerçevesinde kullanılacak en uygun nitel araştırma deseninin durum çalışması olduğu sonucuna varılmıştır. Durum çalışmalarında araştırılan olay ya da durum kendi doğal kapsamında yer ve zamanla sınırlı olarak araştırılır (Kaleli Yılmaz, 2015). Diğer bir deyişle, sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesidir (Merriam, 2013). Creswell’e (2013) göre, araştırmacının gerçek yaşam, güncel sınırlı bir sistem (bir durum) ya da belli bir zaman içerisindeki çoklu sınırlandırılmış sistemler (durumlar) hakkında çoklu bilgi kaynakları (örneğin gözlemler, mülakatlar, görsel-işitsel materyaller, dokümanlar ve raporlar) aracılığı ile detaylı ve derinlemesine bilgi topladığı, bir durum betimlemesi ya da durum temaları ortaya koyduğu nitel bir yaklaşımdır.

Bu çalışma, durum çalışması desenlerinden bütüncül çoklu durum deseninin bir örneğidir. Çünkü bu desende, birden fazla kendi başına bütüncül olarak algılanabilecek durum söz konusudur. Her bir durum kendi içinde bütüncül olarak ele alınır ve daha sonra birbiriyle karşılaştırılır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Çoklu ya da karşılaştırmalı durum çalışmaları birçok durumdan veri toplamayı ve analiz etmeyi gerektirir (Merriam, 2013). Kollektif durum çalışmaları karşılaştırmalı durum çalışmaları olarak da bilinir. Bir sorunu anlamak için çoklu durumları karşılaştırır. Amacı, durumların ortak özelliklerini incelemenin yanı sıra bireysel özellikleri de incelemektir (Kaleli Yılmaz, 2015). Bu çalışmada da matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşleri, analizin temel tanımlarına yönelik kavramsal bilgileri, analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçleri incelenmiş ve bu bölümler bütüncül bir şekilde ele alınarak birbiriyle karşılaştırılmaya çalışılmıştır.

3.2. Araştırma Grubu

Bu çalışmanın katılımcılarını 2013-2014 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında, Doğu Anadolu Bölgesi’nde yer alan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü sınıfında öğrenim gören toplam sekiz matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Ayrıca çalışmanın pilot uygulaması 2013-2014 eğitim öğretim yılının güz yarıyılında, yine aynı üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün son sınıfında öğrenim gören toplam 10 öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Araştırma grubunun seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Ölçüt örnekleme yönteminde temel anlayış önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan durumların çalışılmasıdır. Burada sözü edilen ölçüt veya ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da daha önceden hazırlanmış bir ölçüt listesi kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Ölçüt örneklemenin mantığı da, daha önceden belirlenmiş bazı önem ölçütlerini karşılayan tüm durumları çalışma ve gözden geçirmedir (Patton, 2014). Bu çalışmanın katılımcıları da öğretmen adaylarından belirli ölçütleri taşıyanlar arasından tamamen gönüllülük esasına göre seçilmiştir. Araştırmada öğretmen adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerini ortaya çıkarmak hedeflenmiştir. Bu bakımdan araştırma grubu seçiminde, öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ne olduğu, nasıl yapıldığı, bir argümanın nasıl savunulması gerektiği ya da matematikte "çürüten" yani ters örneklerin varlığı ve kullanımı hakkında bilgi sahibi oldukları Soyut Matematik dersi ile analiz konularının öğretiminin yapıldığı Genel Matematik, Analiz-I, Analiz-II ve Analiz-III derslerini almış ve başarı ile geçmiş olmaları dikkate alınmıştır. Araştırma grubunun seçilmesinde daha ayrıntılı bilgi elde edebilmek için öğrencilerin hazırlanan etkinliklerin ilgili olduğu derslerdeki başarıları (Analiz-I, Analiz-III, Soyut Matematik) ve ağırlıklı genel not ortalamaları (AGNO) incelenmiştir. Araştırma grubunun seçiminde öğrencilerin danışman hocalarından yardım alınmıştır.

Yapılan değerlendirmeler sonucunda öğrenciler ilgili derslerdeki başarıları ve AGNO'larına göre iki gruba ayrılmıştır. İlk grup ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerdir. Ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerin arasından gönüllülük esasına ve kolay ulaşılabilme olanağı olan dört öğrenci seçilmiştir. Bu öğrencilerin AGNO'ları 2.5/4 ile 3.0/4 arasındadır. Ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerin bir kısmı araştırma etkinliklerinin ilgili olduğu dersleri (Soyut Matematik, Analiz-I, Analiz-III) ilk seferinde, bir kısmı da bu dersleri tekrara düşerek ortalama bir başarı ile geçmişlerdir. Çalışmanın yürütüldüğü diğer grup başarı düzeyi yüksek öğrencilerden oluşmuştur. Bu gruptaki öğrencilerin AGNO'ları 3.0/4 ile 4.0/4 arasında ve ilgili dersleri ilk seferinde yüksek bir başarı ile geçmişlerdir. Bu grup arasından da gönüllü olmaları ve kolay ulaşılabilmeleri göz önünde tutularak dört öğrenci araştırma grubuna dâhil edilmiştir. Bu gruptaki öğrenciler öğrenim gördükleri bölümlerin en başarılı öğrencileridir. Örneğin, bu gruptaki öğrenciler arasında ilgili derslerin hepsini alabileceği en yüksek harf notu (AA) ile geçen ve öğrenim gördüğü dört yıllık bölümü üç senede başarılı bir şekilde bitiren öğrenciler bulunmaktadır.

Çalışmada başarı düzeyi farklı iki grubun incelenmesinin sebebi, başarılı öğrencilerin diğerlerine göre argümantasyon ve ispata nasıl yaklaştıklarını belirlemektir. Ayrıca çalışmada olabildiğince farklı başarı düzeyinden katılımcı seçilerek farklı görüşlerin elde edilmesini sağlamaktır. Bu sayede öğretmen adaylarından araştırılan konuya yönelik çeşitli ve derinlemesine bilgi alınabileceği düşünülmüştür. Amaçlı örneklem seçiminde de mantık, araştırmanın daha derinlemesine yapılabilmesi için bilgi açısından zengin durumları seçmektir. Bilgi açısından zengin durumlar, araştırmacının araştırmanın amacı açısından mümkün olduğunca fazla bilgi elde edebileceği durumlardır. Bilgi açısından zengin durumları çalışma, ampirik genellemelerden ziyade derinlemesine anlama imkânı sağlar (Patton, 2014). Ayrıca amaçlı örnekleme yöntemiyle katılımcı seçmek, ayrıntılı betimlemeyle beraber nitel çalışmaların aktarılabilirliğini (dış geçerlik) önemli ölçüde artırmaktadır (Yıldırm ve Şimsek, 2011). Belirli ölçütlere göre farklı başarı düzeylerinden öğrenci grupları ile çalışma, ilgili literatürde sıklıkla karşılaşılan bir durumdur (Sarı vd., 2007; Weber, 2001, 2008, 2009). Araştırmacılar özel öğrencilerin derinlemesine ve zengin bilgi verebileceğini ifade etmişlerdir. Dryfus ve Tsamir (2004) bu çalışmada olduğu gibi çok başarılı özel bir öğrenci ile çalışmıştır. Bu öğrencinin çalışma boyunca kendini rahat hissettiği, konuşkan ve bahsedilen durumlarla ilgili açıklama yapmaya gönüllü olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencinin kendi düşüncesini açık bir şekilde ifade edebildiği ve sonuçlara nasıl ulaştığını açıkladığı vurgulanmıştır. Ayrıca öğrenci, şüpheye düştüğünde bunu araştırmacı ile paylaştığı ve bir karara nasıl vardığını açıklayabilmektedir. Buna göre araştırmalarda bu tarz çok başarılı özel öğrencilerin durumlarının analiz edilmesinin, araştırmacının anlamaya ve göstermeye çalıştığı öğrenme ve muhakeme sürecini açık bir şekilde gösterdikleri için yararlı olabileceği düşünülmüştür. Çalışmada başarı düzeyi düşük öğrencilerin araştırmaya dâhil edilmemesinin sebeplerinden biri de pilot uygulamada bu tarz öğrencilerin veri toplama araçlarındaki etkinlikleri boş bırakma ya da analizi kolay olmayan ifadeler kullanma eğiliminde olmalarıdır.

Araştırma grubu olarak dördüncü sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının seçilmemesinin sebebi ise öğretmen adaylarından kaynaklanan dışsal faktörlerin (gelecek kaygısı, KPSS *vb.*) araştırma sürecini olumsuz yönde etkileme olasılığının üçüncü sınıftaki öğretmen adaylarına göre daha fazla olmasıdır. Bu durum dördüncü sınıf öğrencileri ile yapılan pilot çalışmada açık bir şekilde görülmüştür. Öğrencilerin üniversitedeki dersleri, KPSS kursları ve deneme sınavları nedeniyle pilot çalışmaya zaman ayırmakta zorlanmışlardır. Bu nedenle öğrencilerin çalışmaya odaklanma konusunda güçlük yaşadıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca dördüncü sınıfın ikinci dönemi itibarıyla analiz derslerinin öğretiminin üzerinden bir yıl gibi uzun bir sürenin geçecek olması ilgili kavramların unutulmuş olma olasılığını doğuracaktır. Araştırmada, özellikle argümantasyon sürecinde, öğrencilerin analiz konuları kapsamında matematiksel iddialarını savunurken mantıklı gerekçeler sunabilmesi için belli bir düzeyde analiz bilgilerinin olması gereklidir. Üçüncü sınıftaki öğretmen adaylarının analiz bilgilerini hatırlama düzeylerinin dördüncü sınıftakilerden daha fazla olabileceği düşüncesiyle araştırma, üçüncü sınıftaki öğretmen adayları ile yürütülmüştür.

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının gerçek isimlerinin yerine takma isimler kullanılmıştır. İlk grup olan ortalama düzeyde akademik başarıya sahip öğretmen adaylarının takma isimleri başarı sırasına göre Barış, Belma, Bilge ve Buse'dir. Başarı düzeyi yüksek öğretmen adaylarının takma isimleri başarı sırasına göre Adem, Ahu, Aysun ve Aziz'dir

3.3. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmanın başlıca veri toplama araçları yarı yapılandırılmış etkinlik temelli klinik mülakatlardır. Bu mülakatların amacı öğretmen adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin ortaya çıkarılmasıdır. Ayrıca, öğretmen adaylarının ispatlama süreçlerinin önemli bileşeni olan ispata yönelik görüşleri araştırılarak ayrıntılı bir çalışma yapmak istenmiştir. Bu amaçla öğrencilerin ispata yönelik görüşlerini ortaya çıkarabilmek için araştırmacı tarafından geliştirilen "Matematiksel İspata Yönelik Görüşme Formu" (MİYGF) kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki kavramsal bilgilerini, argümantasyon ve ispat süreçlerini ortaya çıkarabilmek için dört adet etkinlik temelli klinik mülakat hazırlanmıştır. Bu veri toplama araçları kullanılarak öğrenciler ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşme en az iki kişi arasında sözlü olarak sürdürülen, araştırmada cevabı aranan soru ya da konu hakkında derinlemesine bilgi sağlayan bir iletişim sürecidir (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2012).

Öğretmen adayları ile yapılan klinik mülakatlar sayesinde onlarla uzun süreli etkileşime girilmiştir. Bu etkileşim vasıtasıyla öğretmen adayları araştırmacıya alışmış ve süreç içinde sadece çalışmaya odaklanabilmişlerdir. Araştırmacı da öğretmen adayları ile uzun süre görüşerek süreç sonunda öğretmen adaylarının çalışılan konu ile ilgili davranışlarının doygunluğa ulaşıp ulaşmadığını sınama fırsatı elde etmiştir. Aşağıda çalışmada kullanılan veri toplama araçları hakkında bilgiler sunulmuştur.

3.3.1. Matematiksel ispata yönelik görüşme formu

Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini ortaya çıkarabilmek için "Matematiksel İspata Yönelik Görüşme Formu" geliştirilmiştir (Ek 1). MİYGF'de bulunan 10 açık uçlu soru ve detaylı bilgi elde edebilmek için hazırlanan sondalar yardımıyla öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri birçok boyutta ortaya çıkarılmak istenmiştir. Bu boyutlar kısaca "algı", "matematikte ispat", "öğretimde ispat" ve "ikna" olarak isimlendirilebilir.

Algı boyutunda öğretmen adaylarının ispata yükledikleri anlamı ve doğru yapılmış bir ispatta bulunması gereken özelliklere yönelik görüşlerini belirlemeye yönelik iki açık uçlu soru yer almıştır. Öğretmen adaylarından elde edilecek yanıtlarla, ispata yükledikleri anlamın yanında başkası tarafından yapılan ispatların doğru olup olmadığına nasıl karar verdikleri hakkında bilgi edinilmesi amaçlanmıştır. Matematikte ispat boyutunda, öğretmen adaylarının ispatların matematikteki önemi ve amacına yönelik görüşlerini ortaya çıkarabilmek için iki açık uçlu soru yer almıştır. Öğretimde ispat boyutunda, öğretmen adaylarının ispatların neden öğretildiği, kendilerine yararı olup olmadığı, başarılı oldukları ispatlar ve ispatlarda başarılı olabilmek için yapılması gerekenlere yönelik görüşlerini almak için dört açık uçlu soruya yer verilmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının bu boyutta bulunan sorulara verdikleri yanıtlar ile matematiksel ispata yönelik olumsuz görüşlere sahip olup olmadıkları sınanmıştır. İkna boyutunda bulunan iki açık uçlu soru ile öğretmen adaylarının matematiksel önermelerin doğru olup olmadığına kendilerini ve başkalarını nasıl ikna ettiklerine yönelik görüşlerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. MİYGF'de bulunan ikna boyutu dışındaki soruların hazırlanmasında daha önce yapılan araştırmalardan yararlanılmıştır (Doruk ve Kaplan, 2013a; Güler, 2013; Güler ve Dikici, 2012; İmamoğlu, 2010; İskenderoğlu ve Baki, 2011; Moralı vd., 2006). İkna boyutunda yer alan iki açık uçlu sorunun mülakat formunda yer almasında Harel ve Sowder'ın (2007) görüşlerinden esinlenilmiştir. Harel ve Sowder (2007), ispatlama sürecinde bir iddianın doğruluğuna önce kendini daha sonra başkalarını ikna etme gibi iki alt sürecin mevcut olduğunu ifade etmişlerdir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının bu alt süreçlerdeki davranışlarına yönelik görüşlerin ne olduğu merak edilmiştir.

3.3.2. Etkinlik temelli klinik mülakatlar

Öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçleri, analizin temel konularında hazırlanan etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla incelenmiştir. Öğretmen adaylarının analizin temel konularından olan “fonksiyonlar”, “diziler”, “limit ve süreklilik” ve “türev” konularındaki argümantasyon ve ispat süreçlerini ortaya çıkarabilmek için “Fonksiyon Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu” (EK 2), “Dizi Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu” (EK 3), “Limit ve Süreklilik Kavramlarına Yönelik Klinik Mülakat Formu” (EK 4) ve “Türev Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu” (EK 5) geliştirilmiştir.

Mülakat formları dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, etkinliklerde kullanılan kavramların formel tanımları yer almıştır. Bu tanımların sunulmasının amacı, öğretmen adaylarının bu tanımlara yönelik anlayışlarını ortaya çıkarmaktır. Ayrıca öğretmen adaylarına, ihtiyaç duymaları halinde bu tanımları kullanabilecekleri belirtilmiştir. Bu sayede, öğretmen adaylarının tanımları hatırlama güçlüğünün önüne geçilmesi sağlanmıştır. Öğretmen adaylarının tanımları anlama ve kullanabilme becerileri üzerine odaklanılmıştır. İkinci bölüm başkası tarafından çeşitli tiplerde oluşturulan argümanlardan oluşmaktadır. Bu bölümde doğrudan, çelişki bulma, olmayana ergi ve ters örnek gösterme ispatlama yöntemleriyle yapılmış geçerli ispatların yanında, doğrudan ispatlama yöntemiyle yapılmış geçersiz ispat, tümevarımsal argüman ve yanlış bir önerme için üretilen dedüktif argüman olmak üzere toplam yedi adet ispat değerlendirme aktivitesi yer almaktadır. Bu etkinliklerle öğretmen adaylarının ispat süreci kapsamında, başkası tarafından yapılan ispatların doğruluğunu ya da yanlışlığını nasıl değerlendirdikleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Üçüncü bölümde öğretmen adaylarının doğruluğunu değerlendirmeleri için matematiksel önermeler yer almıştır. Her etkinlik temelli mülakatta biri yanlış, diğeri doğru olan iki önerme mevcuttur. Bu etkinlikler yardımıyla, öğretmen adaylarının ispat yapmadan önce geçirdikleri ikna olma süreci olan argümantasyon ve ispat süreçleri incelenmiştir. Bu etkinliklerle ayrıca, argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişki yapısal olarak ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Son bölümde ise her mülakatta birer tane olmak üzere toplam dört problem bulunmaktadır. Problemlerde matematiksel bir iddianın doğru olduğu belirtilip öğretmen adaylarından bu iddianın doğruluğunu göstermeleri istenmiştir. Bu problemler vasıtasıyla, argümantasyon süreci kapsamında, öğretmen adaylarının doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını nasıl savundukları tespit edilmeye çalışılmıştır.

3.3.3. Etkinlik temelli klinik mülakatların hazırlanma süreci

Etkinlik temelli mülakatların hazırlanma sürecinden önce üzerinde tartışılan ilk konu, öğretmen adaylarının analiz alanındaki ispat ve argümantasyon süreçlerini ortaya çıkarabilecek analiz konularının belirlenmesi olmuştur. İspat ve argümantasyon süreçlerinin inceleneceği konuların öğrencilerin yorum yapıp akıl yürütebileceği analizin temel konularından seçilmesine gayret edilmiştir. Yukarıda bahsedilen durumların tartışılmasından sonra üzerinde çalışma yapılacak analiz konularının "fonksiyonlar", "diziler", "limit ve süreklilik" ve "türev" konuları olmasının uygun olacağı kararına varılmıştır. Bu konuların analizin temel konuları olması münasebetiyle öğretmen adaylarının diğer konulara göre fikirlerini daha rahat savunabilecekleri düşünülmüştür. Çalışmada bu konulara yönelik etkinlik temelli klinik mülakat formların hazırlanmasına karar verilmiştir. Öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki tanımları anlayış biçimlerini ortaya çıkarabilmek için etkinliklerde kullanılan tanımlar mülakatlara eklenmiştir. Bu işlemlerin ardından mülakat formlarında kullanılacak olan argümantasyon ve ispat aktivitelerinin belirlenmesi aşamasına geçilmiştir. Etkinlik temelli mülakatların hazırlanmasında aşağıdaki hususlar dikkate alınmıştır;

1. Literatürde yer alan çalışmalar ve kaynak kitaplar incelenmiştir (Akkaş vd., 1998; Balcı, 1999; Kadıoğlu ve Kamali, 2003; Ko, 2010; Ko ve Knuth, 2009; Musayev, Alp ve Mustafayev, 2007; Raman, 2003; Sarı vd., 2007; Selden ve Selden, 2003; Yalçınkaya, 2012).
2. Etkinliklerin öğretmen adaylarının seviyelerine ve öğrenim programlarına uygun olmasına dikkat edilmiştir.
3. Etkinliklerin açık, anlaşılır ve öğrencilerin sesli düşünerek fikir yürütebilecek düzeyde olmaları amaçlanmıştır.
4. Argümantasyon aktivitelerinin birden fazla gerekçe kullanılarak doğruluğunu gösterilebilme imkânının olmasına özen gösterilmiştir.

Yukarıdaki ölçütler dikkate alınarak dört adet etkinlik temelli klinik mülakat formu taslak olarak geliştirilmiştir. Bu veri toplama araçları “Fonksiyon Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu”, “Dizi Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu”, “Limit ve Süreklilik Kavramlarına Yönelik Klinik Mülakat Formu” ve “Türev Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu” olarak isimlendirilmiştir.

3.3.4. Uzmanların veri toplama araçları hakkındaki görüşleri

Veri toplama araçlarının taslak olarak hazırlanmasının ardından veri toplama araçlarının geçerlik çalışmaları kapsamında altı uzman akademisyenin görüşüne başvurulmuştur. Bu uzmanlar bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik ve ortaöğretim fen ve matematik alanları eğitimi alanında doçent ve yardımcı doçent olarak görev yapmaktadırlar. Uzmanlar hem analiz ve fonksiyonlar teorisi anabilim dalında hem de nitel araştırma konusunda uzman akademisyenlerdir. Uzmanlardan alınan görüşler doğrultusunda formlarda bulunan yazım hataları ve matematiksel hatalar düzeltilmiştir. Uzmanların bir kısmı taslak etkinlik temelli mülakatlarda bulunan aktivitelerin sayısının fazla olduğunu belirtmişlerdir. Bazı uzmanlar da limit ve süreklilik ile türev kavramlarına yönelik ispatlama aktivitelerinin bazılarının zorluk düzeyinin yüksek olduğunu belirtmişlerdir. Uzmanların tavsiyeleri dikkate alınarak Dizi Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu’nda bulunan bir argümantasyon aktivitesi formdan çıkarılmıştır. Limit ve Süreklilik Kavramlarına Yönelik Klinik Mülakat Formu’nda bulunan bir argümantasyon aktivitesi çalışmadan çıkartılmış ve ispatlama aktivitelerinde değişikliğe gidilmiştir. Türev Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu’nda da birer ispat ve argümantasyon aktivitesi ölçme aracından çıkarılmıştır. Veri toplama araçları uzman görüşleri çerçevesinde düzenlendikten sonra pilot uygulama için öğretmen adaylarının seçimine geçilmiştir.

3.3.5. Pilot uygulama için katılımcı seçimi ve pilot uygulamanın yapılması

Pilot çalışma gerçek araştırma ölçeğinde uygulanabilecek süreçlerin sınanması ve uygulanması amacıyla yapılan ön deneme uygulamasıdır. İdeal olarak pilot çalışmanın katılımcıları, araştırmanın hedef katılımcıları arasından seçilir (Glesne, 2013). Çalışmanın pilot uygulaması, araştırmaya gönüllü olarak katılmak isteyen ilköğretim matematik öğretmenliği dördüncü sınıfında öğrenim gören toplam 10 matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Pilot uygulamanın yapılmasının amacı, ana uygulama öncesinde veri toplama araçlarının çalışmanın amacına hizmet edip edemeyeceğini sınamaktadır. Ayrıca, pilot uygulama sayesinde çalışma sürecinde karşılaşılabilecek aksaklıkların ve olası sonuçların önceden görülmesi açısından ana çalışmaya ışık tutacağı düşünülmektedir. Pilot uygulamanın araştırmacı tarafından beş hafta sürmesi planlanmıştır fakat öğretmen adaylarının KPSS kursları ve yaklaşan final sınavları nedeniyle görüşmeler üç hafta içinde gerçekleşmiştir. Bu süre içerisinde öğretmen adayları ile toplam 50 görüşme yapılmıştır. Görüşmeler ortalama 45 dakika sürmüştür. Öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerin kamera yardımıyla kayıt altına alınacağı belirtilmiş ve öğretmen adaylarının bu konudaki izinleri alınmıştır. Öğretmen adayları ile yapılan ilk görüşmelerde kamera karşısında tedirgin oldukları gözlenmiş ve diğer görüşmelerin kayıt işlemi ses kayıt cihazı yardımıyla yapılmıştır. Pilot uygulamaya katılan öğretmen adaylarına mülakat saatlerini ve günlerini gösteren bir program hazırlanarak dağıtılmıştır. Bu sayede çalışmanın pilot uygulamasının planlı ve düzenli bir şekilde yapılması sağlanmıştır. Tablo 3.1'de öğretmen adaylarının çalışma programı sunulmuştur.

Tablo 3.1.

Pilot Çalışmaya Katılan Öğretmen Adaylarının Çalışma Programı

Öğretmen adayı	**Mülakat 1**	**Mülakat 2**	**Mülakat 3**	**Mülakat 4**	**Mülakat 5**
ÖA1	13.01.2014 13-14	15.01.2014 11-12	20.01.2014 13-14	22.01.2014 11-12	27.01.2014 13-14
ÖA2	13.01.2014 15-16	17.01.2014 15-16	20.01.2014 15-16	21.01.2014 15-16	27.01.2014 15-16
ÖA3	13.01.2014 16-17	15.01.2014 16-17	20.01.2014 16-17	22.01.2014 16-17	27.01.2014 16-17
ÖA4	13.01.2014 18-19	17.01.2014 14-15	20.01.2014 18-19	22.01.2014 14-15	27.01.2014 18-19
ÖA5	15.01.2014 13-14	17.01.2014 11-12	22.01.2014 13-14	24.01.2014 11-12	29.01.2014 13-14
ÖA6	15.01.2014 18-19	17.01.2014 18-19	22.01.2014 18-19	24.01.2014 18-19	29.01.2014 18-19
ÖA7	14.01.2014 8-9	16.01.2014 8-9	21.01.2014 8-9	23.01.2014 8-9	28.01.2014 8-9
ÖA8	14.01.2014 9-10	16.01.2014 9-10	21.01.2014 9-10	23.01.2014 9-10	28.01.2014 9-10
ÖA9	14.01.2014 10-11	16.01.2014 14-15	21.01.2014 10-11	23.01.2014 14-15	28.01.2014 10-11
ÖA10	14.01.2014 11-12	16.01.2014 15-16	21.01.2014 11-12	23.01.2014 15-16	28.01.2014 11-12

ÖA=Öğretmen adayı

Pilot uygulamadan elde edilen bilgiler doğrultusunda veri toplama araçlarında bulunan görüşme soruları ve etkinlikler tekrar gözden geçirilmiştir. Limit ve Süreklilik Kavramlarına Yönelik Klinik Mülakat Formu'nda bulunan bir ispat değerlendirme aktivitesi yeterince seçici olmadığı düşüncesiyle veri toplama aracından çıkarılmıştır. Pilot uygulamaya katılan bazı öğretmen adaylarının veri toplama aracında bulunan etkinlikleri boş bırakma eğiliminde oldukları, analizi mümkün olmayan ifadeler kullandıkları ve düşüncelerini ifade etmeye istekli olmadıkları gözlemlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının akademik geçmişleri danışman hocasından yardım alınarak araştırılmıştır. Yapılan araştırma sonucunda bu öğrencilerin çalışmanın ilgili olduğu derslere yönelik başarılarının düşük olduğu tespit edilmiştir. Bu durum, çalışmanın belli bir düzeyde analiz ve ispat bilgisine sahip öğretmen adayları ile yapılmasının yararlı olacağı düşüncesini desteklemiştir. Ayrıca pilot uygulama sayesinde, araştırmacı deneyim kazanmış ve araştırmacı olarak üstleneceği rolü değerlendirme imkânı bulmuştur.

3.3.6. Araştırma grubunun seçilmesi ve ana uygulamanın yapılması

Çalışmanın pilot uygulamanın yapılmasının ardından veri toplama araçlarına son şekli verilmiştir. Veri toplama araçlarının kararlı hallerini almalarının ardından araştırma grubunun seçimine geçilmiştir. Araştırma grubunu ilköğretim matematik öğretmenliği üçüncü sınıfında öğrenim gören toplam sekiz öğretmen adayı oluşturmuştur. Mülakatlara başlamadan önce araştırma grubuna çalışma programı dağıtılmıştır. Çalışmanın verileri, çalışma programına bağlı kalınarak toplanmıştır. Tablo 3.2'de araştırma grubunun çalışma programı ve mülakat süreleri sunulmuştur.

Tablo 3.2.

Öğretmen Adaylarının Çalışma Programı

Öğretmen adayı	Mülakat 1	Mülakat 2	Mülakat 3	Mülakat 4	Mülakat 5
Ahu	18.03.2014 17-18 [34dk 33sn]	25.03.2014 17-18 [1s 02dk 1sn]	01.04.2014 17-18 [1s 10dk 9sn]	08.04.2014 17-18 [46dk 36sn]	15.04.2014 17-18 [39dk 56sn]
Adem	21.03.2014 15-16 [24dk 35sn]	28.03.2014 15-16 [1s 20dk]	04.04.2014 15-16 [1s 11sn]	11.04.2014 15-16 [31dk 2sn]	18.04.2014 15-16 [46dk 22sn]
Aziz	21.03.2014 17-18 [20dk 8sn]	28.03.2014 17-18 [1s 28dk 56sn]	04.04.2014 17-18 [1s 28dk 33sn]	11.04.2014 17-18 [45dk 22sn]	18.04.2014 17-18 [35dk 53sn]
Aysun	21.03.2014 13-14 [35dk 12sn]	28.03.2014 13-14 [1s 15dk 8sn]	04.04.2014 13-14 [1s 28dk 57sn]	11.04.2014 13-14 [1s 25dk 58sn]	18.04.2014 13-14 [1s 3dk 43sn]
Barış	17.03.2014 15-16 [21dk 41sn]	24.03.2014 15-16 [1s 19dk 49sn]	31.03.2014 15-16 [1s 6dk 4sn]	07.04.2014 15-16 [42dk 40sn]	14.04.2014 15-16 [38dk 51sn]
Bilge	17.03.2014 09-10 [32dk15sn]	24.03.2014 09-10 [1s 28dk 33sn]	31.03.2014 09-10 [1s 4dk 57sn]	07.04.2014 09-10 [46dk 42sn]	14.04.2014 09-10 [44dk 55sn]
Buse	17.03.2014 11-12 [24dk 38sn]	24.03.2014 11-12 [1s 5dk 19sn]	31.03.2014 11-12 [58dk 30sn]	07.04.2014 11-12 [34dk 33sn]	14.03.2014 11-12 [39dk 36sn]
Belma	18.03.2014 11-12 [16dk]	25.03.2014 11-12 [40dk 43sn]	01.04.2014 11-12 [47dk 53sn]	08.04.2014 11-12 [30dk 15sn]	15.04.2014 11-12 [36dk 52sn]

3.4. Verilerin Toplanması

Çalışmanın verileri klinik mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. Öğretmen adaylarına görüşmelere başlamadan önce çalışma hakkında gerekli bilgiler verilmiştir. Çalışmanın gönüllülük esasına göre yürütüleceği ve istedikleri zaman çalışmadan ayrılabilecekleri ifade edilmiştir. Öğretmen adaylarının isimlerinin gizli tutulacağı ve takma isimlerin kullanılacağı belirtilmiştir. Çalışmanın video kaydı altına alınması planlanmış fakat pilot uygulamadan elde edilen bilgiler doğrultusunda, öğretmen adaylarının bu durumdan tedirgin olacakları ve dikkatlerini çalışmaya veremeyecekleri düşüncesiyle çalışma ses kaydı altına alınmıştır. Katılımcılardan bu konuda gerekli izinler alınmıştır.

Çalışmanın ilk haftasında öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini ortaya çıkarmak için MİYGF uygulanmıştır. İkinci haftada öğretmen adaylarına "Fonksiyon Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu" uygulanmıştır. Üçüncü haftada öğretmen adaylarının diziler konusundaki argümantasyon ve ispat süreçlerini incelemek için “Dizi Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu” uygulanmıştır. Öğretmen adaylarına bu formda yer alan etkinliklerin reel sayı dizileri için geçerli olduğu ifade edilmiştir. Çalışmanın dördüncü ve son haftasında öğretmen adaylarına “Limit ve Süreklilik Kavramlarına Yönelik Klinik Mülakat Formu” ve “Türev Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu” uygulanmıştır. Bu formlarda bulunan etkinliklerin de reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için geçerli olduğu vurgulanmıştır.

Görüşmeler araştırmacı ile öğretmen adaylarının dışsal faktörlerden etkilenmeyeceğine inanılan bir ortamda gerçekleşmiştir. Öğretmen adaylarından görüşmeler sırasında sesli düşünmeleri rica edilmiştir. Öğretmen adayları da genellikle düşüncelerini sesli olarak ifade etmişlerdir. Görüşmeler sırasında araştırmacı, öğretmen adaylarını yönlendirici davranışlardan kaçınmaya çalışmıştır. Öğretmen adaylarının düşüncelerini anlamak için sıklıkla sorular sorulmuştur. Görüşmelere başlamadan önce araştırmacı tarafından sorulacak olan soruların onların ne düşündüklerini anlamak için olduğu, kesinlikle yönlendirici bir nitelik taşımadığı belirtilmiştir. Öğretmen adaylarına da araştırmacıdan bir onay beklememeleri ve buna yönelik soru sormamaları istenmiştir.

3.5. Verilerin Analizi

Veri analizi, somut veri parçaları ve soyut kavramlar, tümevarım ve tümdengelim arasında ileri geri adım atmayı içeren karmaşık bir süreçtir (Merriam, 2013). Nitel araştırmada veri analizi, analiz için verilerin hazırlanması ve organizasyonunu, sonra verileri kodlamayı ve kodların bir araya getirilmesiyle temalara indirgemeyi ve son olarak veriyi şekiller, tablolar veya bir tartışma halinde sunmayı içermektedir (Creswell, 2013).

Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden elde edilen verilerin çözümlenmesinde içerik analizi kullanılmıştır. Nitel verilerin analizinde genellikle içerik analizi yapılmakta ve toplanan verilerin düzenlenmesi, özetlenmesi ve yorumlanması analizin temel süreçleri arasında yer almaktadır (Büyüköztürk vd., 2012). İçerik analizi toplanan verilerin derinlemesine analiz edilmesini gerektirir ve önceden belirgin olmayan temaların ve boyutların ortaya çıkarılmasına olanak tanır (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Öğretmen adaylarının argümantasyon süreçlerini ortaya çıkarmak için ürettikleri tüm argümanlar Toulmin modeline göre analiz edilmiştir. Toulmin modeli bilişsel açıdan, argümantasyon ve ispatı hem içerik hem de yapısal olarak analiz etmeye ve karşılaştırmaya olanak sağlayan bir modeldir (Pedemonte, 2007).

Çalışmada ilk olarak ses kayıtları yazıya dökülmüştür. Veriler yazıya dökülürken anlaşılamayan ve ifadelerden çıkartılan yorumlar için öğretmen adaylarıyla görüşülerek anlaşılmayan ifadeler aydınlatılmış ve ifadelerden çıkartılan yorumlardan onay alınmıştır. Mülakat verilerinin yazıya dökülmesi işleminin ardından araştırmacı tarafından ham verilerden kod ve kategoriler oluşturulmuştur. Kod ve kategoriler belirlenirken öğretmen adaylarının yazılı ve sözlü beyanları ortak olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının yazılı ifadeleri ile araştırmacı ile aralarında geçen diyaloglar sıklıkla üzerinde değişiklik yapılmadan, betimsel olarak sunulmaya çalışılmıştır. Bu sayede araştırma verilerinin güvenilirliğinin artırılması hedeflenmiştir. Çalışmada elde edilen kategoriler iki uzman akademisyenin kontrolünden geçmiştir.

Çalışmadan elde edilen verilerin değerlendirilmesinde hem durum içi analizler hem de çapraz durum analizleri yapılmıştır. Creswell (2013), çoklu durumlar seçildiğinde önce her durumun ve durumlar içindeki temaların betimlenmesi olan durum içi analizin daha sonra da durumun anlamının yorumlanması ya da çıkarımların yanı sıra çapraz durum analizi olarak adlandırılan, durumlar arasında karşılaştırmalı tematik analizin yapıldığını ifade etmiştir.

3.6. Çalışmada Kullanılan Kategoriler

Bu bölümde etkinlik temelli mülakatlardan elde edilen verilerin içerik analizi yöntemiyle çözümlenmesinin ardından elde edilen kategoriler hakkında açıklayıcı bilgiler sunulmuştur.

3.6.1. Öğretmen adaylarının analizin temel tanımlarını anlayış şekilleri

Öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki tanımları nasıl anladıklarını ortaya çıkarmak için çalışma yürütülmüştür. Öğretmen adaylarına fonksiyonlar, diziler, limit, süreklilik ve türev konularındaki formel tanımlar yazılı olarak verilmiştir. Kendilerine verilen tanımlardan ne anladıklarını, kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının söz konusu temel tanımlara yönelik anlayışlarının ortaya çıkarılması hedeflenmiştir. Yapılan analizler sonucunda öğretmen adaylarının tanımlara yönelik anlayışlarının dört kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Bu kategoriler sembolik anlama, hatalı anlama, kavram karmaşası ve kavramsal anlama kategorileridir. Bu kategorilere ait bilgiler Tablo 3.5'te sunulmuştur.

Tablo 3.3.

Öğretmen Adaylarının Analizin Temel Tanımlarını Anlayış Şekilleri

Anlayışlar	*Göstergeler*
Sembolik anlama	*Öğretmen adayları kendilerine formel bir şekilde verilen tanımı kendi cümleleri ile ifade edemezler. Tanımda bulunan ifadeleri tekrarlarlar. Bu öğretmen adaylarında söz konusu tanıma yönelik bir kavramsal anlama belirtisi bulunmamaktadır.*
Hatalı anlama	*Bu anlayışa sahip öğretmen adayları kendilerine formel bir şekilde verilen tanımı, kendi cümleleri ifade etmelerine rağmen açıklamalarında eksiklikler ve hatalar mevcuttur. Bu kategorideki öğretmen adayları, tanımların altında yatan sezgisel anlamaları doğru bir şekilde ifade edememektedirler.*
Kavram karmaşası	*Öğretmen adayları tanımları kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışmaktadırlar. Öğretmen adaylarının açıklamalarına bakıldığında, hatalı anlayışa sahip öğretmen adayları gibi tanımları doğru bir şekilde açıklayamadığı görülmüştür. Hatalı anlayışa sahip olan öğretmen adaylarından farklı olarak, bu öğretmen adaylarının açıklamalarında söz konusu tanıma ait değil de, farklı tanımlara ait ifadeler göze çarpmaktadır. Öğretmen adaylarının ifadelerinden farklı bir kavramın tarif edildiği hissi uyanmaktadır. Öğretmen adaylarının söz konusu tanımı başka tanımlar ile karıştırdığı ya da yapılan açıklamaların farklı kavramları çağrıştırdığı söylenebilir.*
Kavramsal anlama	*Öğretmen adayları tanımları kendi cümleleri ile ve matematiksel olarak doğru bir şekilde ifade edebilmektedirler. Öğretmen adaylarının ifadelerinden, tanımların altında yatan sezgisel anlamaların farkında oldukları göze çarpmaktadır. Bu kategorideki öğretmen adaylarının söz konusu tanımlara yönelik kavramsal anlamaya sahip olduklarını söylemek mümkündür.*

3.6.2. Öğretmen adaylarının matematiksel önermelerin doğruluğuna ikna olmak için kullandıkları stratejiler

Öğretmen adaylarının analiz alanındaki matematiksel önermelerin doğru ya da yanlış olduğuna nasıl karar verdiklerini ortaya çıkarmak hedeflenmiştir. Bu amaçla öğretmen adaylarının doğruluğunu değerlendirmesi için, her etkinlik temelli mülakatta biri doğru, diğeri yanlış olan iki önerme sunulmuştur. Öğretmen adaylarının kendilerini ikna etmek adına ürettikleri tüm argümanlar Toulmin modeline göre analiz edilerek ortaya çıkarılmıştır. Öğretmen adaylarının yazılı ve sözlü ifadeleri ortak olarak değerlendirilmiştir. Tespit edilen argümanlara içerik analizi uygulanarak öğretmen adaylarının matematiksel önermelerin doğruluğunu değerlendirirken kullandıkları stratejiler bağlamında kategoriler elde edilmiştir. Tablo 3.6'da bu kategoriler hakkındaki bilgilere yer verilmiştir.

Tablo 3.4.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Önermelerin Doğruluğuna İkna Olmak İçin Kullandıkları Stratejiler

Stratejiler	*Göstergeler*
Sezgisel düşünme	*Öğretmen adayları matematiksel önermeye ikna olmak için önermenin içeriğinden çok görünüşü ile ilgilenirler. Mantıktan çok sezgiler ön plandadır. Onlara göre önermenin doğru olması kulağa mantıklı veya doğru gelmesi ile ilgilidir.*
Geçmiş bilgi	*Öğretmen adayları matematiksel bir önermenin doğruluğuna ikna olurken geçmişte elde ettikleri bilgilerine güvenirler. Bilgiler sorgulanmaz. Öğretmen adayının ikna olması için önermeyi ders kitabında veya defterinde görmesi, hocası ya da arkadaşı tarafından söylenmesi yeterlidir.*
Örnek kullanma	*Öğretmen adayları genel bir önermenin doğru olduğuna bir ya da birkaç özel örnek üzerinden deneme yaparak ikna olurlar. Önermelerin doğruluğunu bozabilecek ters örneklerin mevcut olma ihtimalini göz ardı ederler.*
Tanımlar üzerinden muhakeme	*Öğretmen adayları matematiksel önermenin doğru olduğuna kendilerine verilen formel tanımlardaki sembolik ifadeleri manipüle ederek ikna olmaya çalışırlar. Tanımların altında yatan kavramsal özellikleri genellikle göz ardı ederler. Çoğunlukla, anlamını bilmeden matematiksel ifadeleri birbirine benzetmeye çalışarak kendilerini önermenin doğru olduğuna ikna ederler.*
Kavramlar üzerinden muhakeme	*Öğretmen adayları önermenin doğru olduğuna ikna olabilmek için önermelerde bulunan tanımlara yönelik kavramsal bilgilerini işe koşarlar. Çoğunlukla, tanımlarla uyumlu olan kavram imajlarını kullanarak önermelerin hipotezleri ile hükmü arasında bağlantı kurmaya çalışırlar.*

Tablo 3.4. (Devamı)

Ters örnek arama	*Öğretmen adayları matematiksel önermenin yanlış olduğuna ikna olmak için genellemeyi bozan bir ters örnek bulmaya çalışırlar. Ters örnek bulmaları halinde şüphe duymadan önermenin yanlış olduğuna ikna olurlar.*
İspatını düşünme	*Öğretmen adayları önermenin doğru olduğuna ikna olmak için zihinlerinden önermenin ispatını düşünürler. Bu öğretmen adayları ya benzer bir ispatı hatırlamaya ya da kendileri kurgulamaya çalışırlar. Öğretmen adayları çoğunlukla ispatın tamamını düşünmek yerine bazı parçalarını düşünerek ispatın yapılabilirliğini test ederler. İspatın yapılabilir olduğunu düşünürlerse önermenin doğru olduğuna ikna olurlar.*
İspat yapma	*Öğretmen adayları matematiksel bir önermenin doğru olduğuna sadece önermenin ispatını yapmaları halinde ikna olurlar. İspatını yapmadan karar vermezler. İspatı düşünerek karar veren öğretmen adaylarından bu şekilde ayrılırlar. İspatı düşünerek ikna olan öğretmen adayları için ispata yönelik birşey hatırlamaları ya da ispatın yapılabilir olduğuna kanaat getirmeleri önermenin doğru olduğuna karar verebilmeleri için yeterlidir. İkna olmak için ispatı yapmalarına gerek yoktur. Bu kategorideki öğretmen adayları ise, ispat ürettiklerinde matematiksel önermenin doğru olduğuna karar verirler.*

3.6.3. Öğretmen adaylarının doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını savunurken kullandıkları gerekçeler

Öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri kapsamında matematiksel önermelerin doğruluğuna nasıl ikna olduklarının incelenmesinin ardından doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını nasıl savundukları ortaya çıkarılmak istenmiştir. Bu amaç doğrultusunda her etkinlik temelli mülakatta birer tane doğrulama gerektiren problem sorulmuştur. Öğretmen adaylarının çözümlerinde ürettikleri argümanların tümü Toulmin modeline göre analiz edilmiştir. Üretilen argümanlarda kullanılan gerekçelere içerik analizi uygulanarak kod ve kategoriler elde edilmiştir. Öğretmen adaylarının kullandıkları gerekçelerin toplam altı kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Bazı öğretmen adaylarının sadece bir kategoride çözümler yaparken bazılarının ise birden çok kategoride çözümler sundukları belirlenmiştir. Tablo 3.7'de öğretmen adaylarının ürettikleri argümanlarda kullandıkları gerekçelere yönelik bilgiler verilmiştir.

Tablo 3.5.

Öğretmen Adaylarının Doğru Olduğunu Düşündükleri Matematiksel İddialarını Savunurken Kullandıkları Gerekçeler

Gerekçeler	*Göstergeler*
Otoriter gerekçe	*Öğretmen adayları iddialarını savunmak için ürettikleri argümanlarda daha önce hocası, arkadaşları ve ders kitabı gibi otoritelerden elde ettikleri, çoğunlukla doğru olmayan bilgileri gerekçe olarak kullanırlar. Bu gerekçeler öğretmen adayları tarafından sorgulanmadan kabul edilmiştir.*
Referanssız gerekçe	*Öğretmen adayları iddialarını savunmak için ürettikleri argümanlarda kendi zihinlerinde yapılandırdıkları, hiçbir matematiksel ve mantıksal temele dayanmayan bilgilerini gerekçe olarak kullanırlar. Bu bilgiler yanlış öğrenilen bir tanım, teorem ve aksiyom olabileceği gibi hesaplamalar sonucunda elde edilen doğru olmayan sonuçlar da olabilmektedir.*
Tümevarımsal gerekçe	*Öğretmen adayları iddialarını savunurken ürettikleri argümanlarda bir ya da birkaç özel durumun dikkate alınması ile elde edilen sonuçları gerekçe olarak kullanırlar. İddialarının birkaç özel durum için sağlanması genelleme yapmak için yeterlidir.*
Algısal gerekçe	*Öğretmen adayları iddialarını savunmak için ürettikleri argümanlarda yetersiz zihinsel gösterimleri gerekçe olarak kullanırlar. Bu öğretmen adayları çoğunlukla şekiller ve grafikler üzerinden gösterim yapmaya çalışırlar fakat bu gösterim ikna etmek için yeterli değildir. Bazen de kullanılan gerekçe doğru olsa bile ikna edici bir gösterim yapılamamaktadır.*
Görsel gerekçe	*Öğretmen adayları iddialarını savunmak için ürettikleri argümanlarında görsel objeleri gerekçe olarak kullanırlar. Bu bir şekil, grafik vb. olabilir. Bu objeler yardımıyla yapılan doğrulama ikna olmak için yeterlidir. Algısal gerekçeden farkı, yapılan zihinsel gösterimin ikna olmak için yeterli olmasıdır.*
Dönüşümsel gerekçe	*Öğretmen adayları iddialarını savunmak için ürettikleri argümanlara gerekçe olarak tanım, teorem ve aksiyomları kullanırlar. Tanımları açarak ilerlerler. Teoremler ve aksiyomları kullanarak düşünceler arasında bağlantı kurarlar. Yaptıkları işlemlerin sonuçları üzerinden ve kavramlar arasındaki bağlantıları muhakeme ederek sonuca ulaşırlar. Üst düzey başarıya sahip öğrencilerin kullandıkları gerekçe tipidir. Bu tip öğretmen adayları argümanlarında informel gösterimlerden kaçınırlar.*

3.6.4. Öğretmen adaylarının başkası tarafından yapılan ispatları değerlendirirken kullandıkları stratejiler

Öğretmen adaylarının başkası tarafından yapılan ispatların doğru olup olmadığına nasıl ikna olduklarını ortaya çıkarmak amacıyla çalışma yürütülmüştür. Öğretmen adaylarına analizin farklı konularında ve farklı tiplerde ispatlar sunulmuştur. Klinik mülakatlarda öğretmen adaylarının değerlendirmeleri için yedi adet ispat kullanılmıştır. Bu ispatlar; doğrudan, çelişki bulma ve olmayana ergi ispatlama yöntemleri ile yapılan geçerli ispatlar, ters örnek ile yapılan ispat, geçersiz dedüktif ispat, geçersiz dedüktif argüman ve tümevarımsal argümandır. Bu ispatlardan üçü doğrudan, çelişki bulma ve olmayana ergi ispatlama yöntemleri ile yapılan geçerli ispatlardır. Bu ispatlar yardımıyla öğretmen adayların doğru ispatları nasıl inceledikleri ve ispatlama yöntemleri hakkındaki bilgileri açığa çıkarılmak istenmiştir. Ayrıca farklı ispatlama yöntemleri ile yapılan ispatlar kullanılarak olabildiğince çeşitlilik sağlamak amaçlanmıştır. Tümevarımsal ispat yöntemi ile yapılmış ispatlara yer verilmemesinin sebebi, tümevarımsal ispat yönteminin kendine has adımları sebebiyle fark edilmesinin kolay olmasıdır. Bu yüzden tümevarımsal ispat yöntemiyle yapılan ispatlarda detaylı inceleme yapmadan, sadece ispatın görüntüsüne bakarak kullanılan ispatlama yönteminin belirlenme ihtimali yüksektir. Mülakatlarda kullanılan etkinliklerin bir tanesi, ters örnek yardımıyla yapılan bir ispattır. Genel bir önermenin yanlışlığı ters örnek üretilerek gösterilmiştir. Bu etkinliğin amacı da öğrencilerin ters örnekler ile yapılan ispatları nasıl değerlendirdiklerini ortaya çıkarmaktır. Ayrıca bu etkinlik yardımıyla öğretmen adaylarının ters örneklere yönelik bilgileri sorgulanmıştır. Mülakatlarda yer alan ispatlardan bir tanesinde, ispatta yer alan kilit ifade ispatın geçerliğini bozacak bir şekilde değiştirilmiştir. Yanlış yapılan bu ispat ile öğretmen adaylarının ispatlardaki kilit ifadelere dikkat edip etmedikleri sınanmak istenmiştir. Mülakatlarda yanlış bir önerme için üretilen dedüktif tarzda bir argüman oluşturulmuştur. Bu etkinliğin amacı da öğretmen adaylarının dedüktif argümanlara bakış açılarını ortaya çıkarmaktır. Son olarak mülakatlarda öğretmen adaylarına önermenin doğruluğu için tümevarımsal bir argüman sunulmuştur. Önermenin doğru olduğuna yönelik bir örnek kullanılmıştır. Buradaki amaç, öğretmen adaylarının tümevarımsal argümanlara nasıl yaklaştıklarını ortaya çıkarmaktır.

Öğretmen adaylarından başkası tarafından yapılan ispatları değerlendirmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarından değerlendirme yaparken sesli düşünmeleri rica edilmiştir. Araştırmacı gerekli yerlerde öğretmen adaylarına sorular sorarak düşüncelerini açığa çıkarmaya çalışmıştır. Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirmelerinin ardından doğru, kısmen doğru ve yanlış seçeneklerinden biri ile belirtmeleri ve verdikleri kararların gerekçelerini yazmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken sesli düşünceleri, araştırmacının sorularına verdikleri yanıtlar ve yazdıkları gerekçeler dikkate alınarak öğretmen adaylarının başkası tarafından yapılan ispatları değerlendirirken kullandıkları stratejiler belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken çoğunlukla birden çok strateji kullandıkları tespit edilmiştir. Kullanılan stratejilerin genel olarak argüman incelemesi, yapısal inceleme ve otoriter inceleme olmak üzere üç kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Ayrıca bu kategorilerin altında birçok alt kategori tespit edilmiştir. Tablo 3.6'da öğretmen adaylarının başkası tarafından yapılan ispatları değerlendirirken kullandıkları stratejiler sunulmuştur.

Tablo 3.6.

Öğretmen Adaylarının Başkası Tarafından Yapılan İspatları Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler

Stratejiler	*Göstergeler*
Argüman incelemesi	*Öğretmen adayları ispatları satır satır incelerler. İspatların içerisindeki lokal argümanlara odaklanırlar. İspatların satırları içerisinde işlemsel bir hatanın mevcut olup olmadığını, bir ifadeden diğerine geçilirken kullanılan gerekçelerin doğruluğunu kontrol ederler. İspatlarda önemli bir yere sahip olan ve teoremin hipotezlerinden elde edilen verileri bir sonraki aşamaya taşımayı sağlayan kilit ifadelere dikkat ederler. Kilit ifadeler sayesinde teoremin hipotezinden elde edilen bilgiler, kavramsal anlayışlar işe koşularak teoremin hükmüne ulaşmada kullanılabilmesi için hazır hale getirilir.*
Yapısal inceleme	*Öğretmen adayları ispatları, ispatın içeriğine girmeden, ispatın basamaklarının doğruluğunu ya da basamaklar arasındaki ilişkiyi sorgulamadan incelerler. İspatın doğruluğuna dışarıdan bakarak yapısal özelliklerine göre karar verirler. Yapısal inceleme stratejisini yüzeysel inceleme ve ispatlama yöntemi olarak iki gruba ayırmak mümkündür. Yüzeysel inceleme yapan öğretmen adayları tanımların ve teoremin hipotezlerinin kullanılıp kullanılmamasına dikkat ederler. Ayrıca ispata nasıl başlandığı ve teoremin hükmüne ulaşılıp ulaşılamamasına odaklanarak başlangıç ve sonuç odaklı bir yaklaşım sergilerler. Bazı durumlarda, öğretmen adayları ispatları incelerken kullanılan ispatlama yönteminin uygunluğuna ya da argümanların yapılarına dikkat ederler. Örneğin bazı öğretmen adayları tümevarımsal argümanları ispat olarak kabul ederken bazıları da öğrendiği ispatlama yönteminden farklı bir ispatlama yöntemi ile yapılmış ispatları kabul etmezler.*
Otoriter inceleme	*Öğretmen adayları ispatları incelerken ispatlardaki argümanları sorgulamaz ya da ispatları yapısal olarak incelemeye çalışmazlar. Sorulan ispat daha önce ezberledikleri ya da kendilerine tanıdık gelen bir ispat ise ispatı hatırlamaya çalışırlar. Öğrendiği ispata benzer semboller ya da ifadeler ararlar. Bazı öğretmen adayları da ispatları değerlendirirken bildikleri farklı ispatları düşünerek incelemekte olduğu ispata uyarlamaya çalışırlar. Öğretmen adaylarının ispatın doğruluğu için verdikleri kararlar, daha önce hocalarının yaptığı ya da kendilerinin ezberledikleri ispatları hatırlama durumları ile yakından alakalıdır.*

3.6.5. Öğretmen adaylarının ispat yapma durumları

Öğretmen adaylarının doğru olduğunu düşündükleri önermeler için ne tür ispatlar ürettiklerini ortaya çıkarmak amacıyla çalışma yapılmıştır. Öğretmen adaylarına her mülakatta bir adet doğru önerme sunulmuş ve verdikleri kararları savunmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının doğru önermeler için ürettikleri ispatlar incelenmiştir. Öğretmen adayları ürünlerini yazılı olarak vermişlerdir. Gerekli görüldüğü durumlarda öğretmen adaylarına soru sorularak ispatlarını nasıl yaptıkları hakkında bilgiler alınmıştır. Öğretmen adaylarının ürettikleri ispatlar özelliklerine göre içerik analizi uygulanarak gruplara ayrılmıştır. Yapılan inceleme sonucunda öğretmen adaylarının ispatlarının özelliklerine göre dokuz kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 3.7'de öğretmen adaylarının ürettikleri ispatların özellikleri hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 3.7.

Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Durumları

İspatlar	*Göstergeler*
Doğru ispat	*Doğru ispatlarda tanımlar ifade edilip açılarak teoremin hipotezinden hükmüne ulaşılır. İspatta bir bütünlük vardır. Matematiksel olarak doğru ifadeler kullanılır. İspatlar matematiksel ve mantıksal olarak olarak genel, doğru ve ikna edicidir.*
Kısmen doğru ispat	*Kısmen doğru ispatlar, doğru ispatlar gibi bir bütünlük içerisinde matematiksel olarak ifade edilmiştir. İspatın genelliğini ya da matematiksel olarak doğruluğunu temsil eden ifadeler açıkça belirtilmemiştir. İspatta bulunan bu kilit ifadeler bulunmadığı için ispatın geçerli olup olmadığı hakkında bir sonuca varılamamaktadır. Bu tür ispatlarda eksikliklerin olduğu söylenebilir.*
Geçersiz ispat	*Geçersiz ispatlar doğru ispatlar gibi bütünlük içerisinde matematiksel olarak yazılan ispatlardır. Bu ispatların içerisinde bulunan bazı yanlış ifadeler ispatın genelliğini bozmaktadır. Uygun bir ters örnek yardımıyla bu ifadelerin doğruluğu çürütülebilir. Yazım yanlışlığının dışındaki, bilinçli olarak yapılan, önemli matematiksel notasyonel hataları bulunan ispatlar bu gruba girer.*
Açıklama	*Bu ispatlar da bir bütünlük içerisinde tamamlanmış ispatlardır. Kullanılan dil geneldir. Matematiksel kavramların altında yatan sezgisel düşünceler kullanılarak açıklama yapılır. İspatın neden doğru olması gerektiği ifade edilir. Kullanılan ifadeler matematiksel ya da dedüktif tarzda değil günlük konuşma dilindedir.*

Tablo 3.7. (Devamı)

Örnekle doğrulama	*Bu ispatlarda önermenin doğru olduğu, bir örnek üzerinden gösterilir. Önermeyi doğrulayan bir ya da birkaç durum göz önünde bulundurularak doğrulama yapılmaya çalışılır. Kullanılan argümanlar, tümevarımsal argümanlardır. Bu şekilde yapılan ispatlar bütünlük içinde, matematiksel olarak doğru ifadeler kullanılsa bile genel argüman olmaktan uzaktır.*
Tanımları manipüle etme	*Bu ispatlar da bir bütünlük içerinde tamamlanmış ispatlardır. İspatlar incelendiğinde öğretmen adayları kendilerine verilen formel tanımların anlamlarını bilmeden kullanıldığı görülmektedir. Tanımlarda bulunan sembolik ifadeleri çoğu zaman matematiksel temeli olmayan bir şekilde değiştirerek arzu edilen sonuca ulaşılmaya çalışılır.*
Tanımları kopyalama	*Bu ispatlarda öğretmen adayları, kendilerine verilen formel tanımları ispatlarına kopyalayarak ispat yapmaya çalışırlar. Tanımları manipüle eden öğretmen adaylarından farklı olarak tanımları açarak ilerletmeye çalışmazlar. İfadeler arasında derin mantıksal boşluklar vardır.*
Tamamlanmamış ispat	*Bu ispatlarda tanımlar kullanılarak ilerlemeye çalışılmış fakat ispatta ileriye gidilemeyerek yarım bırakılmıştır.*
Hipotezi yazma	*Bu ispatlarda sadece ispatlanmak istenen teoremin hipotezi tekrar yazılmış ve öylece bırakılmıştır.*

3.6.6. Öğretmen adaylarının ters örnek üretme durumları

Öğretmen adaylarının yanlış önermeler için ne tür ürünler ürettiklerini incelemek amacıyla mülakatlarda dört adet yanlış önerme sunulmuştur. Öğretmen adaylarının yanlış önermeler için ürettikleri ürünler incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ürettikleri ürünleri yazılı olarak alınmış, gerekli görüldüğü yerlerde sorular sorularak bilgi alınmıştır. Öğretmen adaylarının yanlış önerme için ürettikleri ters örneklerin özellikleri bakımından toplam sekiz kategoriye ayrıldığı belirlenmiştir. Tablo 3.8'de bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 3.8.

Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Üretme Durumları

Ters örnekler	*Göstergeler*
Doğru ters örnek	*Öğretmen adayları önermeyi yanlışlayan geçerli bir ters örnek üretmişlerdir. Ters örneğin neden önermeyi yanlışladığını doğru bir şekilde açıklamışlardır.*
Geçersiz ters örnek	*Öğretmen adayları önermeyi yanlışlayan ters örnek bulmaya çalışmışlar fakat başarılı olamamışlardır. Ters örnek olarak öne sürdükleri örnekler önermeyi yanlışlamak için gerekli özellikleri taşımamaktadır.*
Ters örnek yok	*Öğretmen adayları söz konusu önermelerin yanlış olduğunu düşünerek ters örnek bulmaya çalışmışlar fakat başarılı olamamışlardır.*
İspatla yanlışlama	*Öğretmen adayları önermeyi doğrulamak için ispat yapmaya çalışmışlardır. İspatlarında mantıksal olarak bir eksiklik görmüşlerdir. Önermeyi yanlışlamak için ispatın neden yapılamayacağını izah etmeye çalışmışlardır. İspatlarındaki çelişkili durumun önermenin yanlış olduğunu göstermek için yeterli olduğunu ifade etmişlerdir.*
İspat kullanma	*Öğretmen adayları önermeyi yanlışlamak için önermenin ilgili olduğu farklı bir teoremin ispatını yapmışlardır. Bu teoremin ispatına dayanarak söz konusu önermenin yanlış olduğunu ifade etmişlerdir.*
Açıklama yapma	*Öğretmen adayları önermeyi yanlışlamak için ters örnek bulmaya çalışmak yerine önermenin neden yanlış olduğunu açıklamaya çalışmışlardır.*
İspat	*Öğretmen adayları yanlış olan önermenin doğru olduğunu düşünerek ispat yapmaya çalışmışlardır. İspatlarını kendilerine göre tamamlayarak ya da ispatlarını yarım bırakarak önermenin doğru olduğu sonucuna ulaşmışlardır.*
Örnekle doğrulama	*Öğretmen adayları yanlış olan önermenin doğru olduğunu düşünerek doğrulamaya çalışmışlardır. Önermeyi doğrulamak için bir ya da birkaç örnek ile önermenin doğru olduğunu göstermişlerdir.*

3.6.7. Öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasındaki yapısal ilişkinin analizi

Öğretmen adaylarının argümantasyon süreci ile ispat süreci arasındaki ilişkinin analiz edilmesinde Pedemonte'nin (2007) ortaya attığı yapısal bütünlük hipotezi dikkate alınmıştır. Pedemonte (2007) argümantasyon ile ispatı yapısal olarak karşılaştırabilmek için öğrencilerin kullandıkları argümantasyonları üç yapıya ayırmış ve analizlerinde kullanmıştır. Bu argüman yapıları dedüktif, abdüktif ve indüktif (tümevarımsal) yapılardır. Analizlerinde öğrencilerin ispat yapmadan önce, önermenin doğruluğuna ikna olmak için ya da varsayım oluşturmak için geçirdiği düşünce sürecini argümantasyon ile ifade etmiştir. Bu süreç sonunda bir karara varılarak, verilen kararın doğruluğunu göstermek için ürün ortaya koyma süreci de ispat olarak isimlendirilmiştir.

Öğrencilerin argümantasyon ile ispat süreçlerinin yapıları ayrı ayrı incelenmiş ve iki süreç arasındaki yapısal ilişkiler analiz edilmiştir. Bu çalışmada, Pedemonte (2007) tarafından üne sürülen üç yapı olan indüktif, abdüktif ve dedüktif yapı çoğunlukla Harel ve Sowder (1998) tarafından öne sürülen ispatlama şemalarından yararlanılarak genişletilmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasındaki yapısal ilişki ayrıntılı olarak betimlenmek istenmiştir. Bu amaç doğrultusunda öğretmen adaylarına mülakatlarda dört adet doğru önerme sunulmuştur. Öğretmen adaylarından önce bu önermelerin doğru olup olmadığına karar vermeleri istenmiştir. Burada amaç öğretmen adaylarının önermenin doğruluğuna ikna olmak için ürettikleri argüman yapılarını ortaya çıkarmaktır. Öğretmen adaylarından önermelerin doğruluğu hakkında bir karara varmalarının ardından kararlarının doğruluğunu göstermeleri ve verdikleri karara ilişkin yazılı bir ürün üretmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri çalışmada elde edilen gerekçe tipleri kullanılarak analiz edilmiştir. İspat süreçleri ise gerekçe tipleri ile paralel olan Harel ve Sowder’ın (1998) ispatlama şemalarına göre değerlendirilmiştir. Bu iki süreçteki yapısal özellikler, birbiri ile karşılaştırılmış ve süreçler arasındaki örüntüler ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Her iki süreçte öğrencilerin hem yazılı hem de sözlü beyanları ortak olarak değerlendirilmiştir. Tablo 3.9’da öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat yapılarının analizinde kullanılan kategorilere yönelik bilgiler sunulmuştur.

Tablo 3.9.

Öğretmen Adaylarının Argümantasyon ve İspat Süreçlerinin Yapısal Analizinde Kullanılan Kategoriler

Yapılar	*Argümantasyon*	*İspat*
Otoriter	*Öğretmen adayları önermenin doğru olduğuna düşünce sürecine girmeden ikna olurlar. Söz konusu önermenin doğruluğunu bildikleri, başka bir yerde gördükleri, arkadaşları ya da hocaları tarafından söylendiği için kabul ederler.*	*Öğretmen adayları ispatlarını yaparken daha önce ezberledikleri, zihinlerinde olan bir algoritmayı takip etmeye çalışırlar. Yazdıkları ifadelerin anlamını düşünmezler. Daha önce yaptıkları ispatları hatırlamaya çalışırlar ve onlara benzetmeye çalışırlar.*
Sezgisel-Sembolik	*Öğretmen adayları ifadenin içeriğinden çok görünüşü ile ilgilenirler. Önermenin doğruluğuna ikna olurken daha çok sezgilerine güvenirler. Bu öğretmen adaylarının bir ifadenin doğruluğuna ikna olmaları için matematiksel görünmesi ya da kulağa mantıklı gelmesi yeterlidir.*	*Öğretmen adayları ispatlarında anlamını bilmeden matematiksel tanımları ya da sembolleri kullanırlar. Anlamlarını bilmeden matematiksel ifadeleri manipüle ederek sonuca ulaşmaya çalışırlar. Burada amaç ispatın matematiksel görünmesini sağlamaktır.*
Algısal	*Öğretmen adayları önermeye ikna olmak için yetersiz zihinsel gösterimleri kullanırlar. Çizdikleri şekil ve grafiklerden yararlanırlar. Bazı öğretmen adayları kısmen doğru bilgileri ya da gelişmemiş kavram imajlarını kullanarak ikna olmak için yeterli olmayan açıklamalar yaparlar.*	*Öğretmen adayları ispatlarında gelişmemiş zihinsel imajlarını kullanırlar. İspatlarında zihinsel imajlarının göstergesi olan şekil ve grafiklerden yararlanırlar. Kavramlarla ilgili gelişmemiş zihinsel imajlarından kaynaklı olarak geçerli bir gösterim yapamazlar.*
Tümevarımsal	*Öğretmen adayları önermenin doğru olduğuna bir ya da birkaç durumu göz önünde bulundurarak karar verirler. Önerme cebirsel formda ise bir ya da birkaç özel değeri yerine yazarak çıkan sonuca göre karar verirler.*	*Öğretmen adayları ispatlarını bir ya da birkaç durum üzerinden yaparlar. Önermelerin ispatlarını çoğunlukla özel bir örnek kullanarak yaparlar.*
Dedüktif	*Öğretmen adayları önermenin doğruluğuna ikna olmak için geçerli tanım, teorem ve aksiyomları gerekçe olarak kullanırlar. Tanımlarla uyumlu kavramsal bilgilerini işe koşarlar. Bazı öğretmen adayları da önermenin doğru olduğuna ikna olmak için tanımları açıp ilerleterek ispat yapmaya çalışırlar.*	*Öğretmen adayları ispatlarını formel çıkarımda bulunarak yaparlar. Tanım, teorem ve aksiyomları kullanırlar. Genellikle tanımları açarak ilerlerler. Gelişmiş kavramsal bilgilerini, ispatların içerisinde ürettikleri argümanlara gerekçe olarak tanım, teorem ve aksiyomlar gibi dönüşümsel gerekçeleri kullanırlar.*

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR ve YORUM

4.1. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Görüşleri

Araştırmanın birinci sorusuna yanıt bulabilmek için öğretmen adaylarıyla yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmelerde ilk olarak öğrencilerin matematiksel ispata ne anlam yüklediklerini öğrenmek amacıyla "Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?" sorusu yöneltilmiştir. Alınan cevapların yedi kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Bu kategoriler hakkında bilgiler Tablo 4.1'de sunulmuştur.

Tablo 4.1.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yükledikleri Anlam

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Sembolik açıklama	Ahu	*Ahu: Matematiksel ispat deyince daha çok epsilon, delta gibi matematiksel semboller ile açıklanan birşey olduğunu anlıyorum.*
Mantıklı açıklama	Adem	*Adem: Matematiksel ispat deyince işte matematikle ilgili verilerin, problemlerin akla ve mantığa uygun bir şekilde açıklanması.*
Neyin nereden geldiğini öğrenmek	Barış Belma	*Belma: Kanıt, teoremleri daha iyi anlamak ve öğrenmek amacıyla yani neyin, nereden ve nasıl geldiğini ortaya çıkarmak için yapılan birşey. Hani teoremi ezberlemek yerine ispatını öğrenerek neyin, nereden, nasıl çıktığını öğrenmek.*
Doğruluk	Aziz, Aysun	*Aziz: Birşeyin doğruluğunun gösterilmesi.*
İspatlama yöntemleri	Bilge	*Bilge: Dolaylı ispat, ispat metotları geliyor aklıma.*
Tekrarlamak	Bilge	*Bilge: Daha önceden ispatlanmış birşeyi bize öğretilen şekliyle, matematiksel kurallara uygun bir şekilde yapılmış akla uygun bir şekilde gösterilmesi.*
Açığa çıkarmak	Buse	*Buse: Herhangi bir matematiksel konu üzerinde birşeyin açığa çıkarılması yani herkes tarafından kabul edilmesi gibi birşey.*

Tablo 4.1 incelendiğinde öğretmen adaylarının yarısının (Ahu, Adem, Barış, Belma) ispata sembolik açıklama, mantıklı açıklama ve neyin nereden geldiğini

öğrenme anlamlarını yükledikleri tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının ispatın açıklama fonksiyonunu göz önünde bulundurduğu söylenebilir. Ahu, bu öğretmen adaylarından biraz farklı olarak, ispata sembolik açıklama anlamını yüklemiştir. Aziz ve Aysun matematiksel ispatın bir şeyin doğruluğunun gösterilmesi olduğunu belirtmişlerdir. Sadece Buse, ispat denince aklına birşeyin açığa çıkarılmasının geldiğini belirtmiştir. Bilge ise ispat deyince aklına ilk gelen şeyin ispatlama metotları olduğunu, daha sonra da matematikçilerin daha önceden yaptıkları şeylerin tekrar gösterilmesi olduğunu ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarından ispata ne anlam yükledikleri hakkında görüşleri alındıktan sonra, matematiksel ispatın amacına yönelik görüşleri alınmıştır. Görüşlerin altı kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.2'de bu kategoriler ve bu kategorilerin oluşmasını sağlayan örnek ifadelere yer verilmiştir.

Tablo 4.2.

Öğretmen Adaylarının İspatın Amacına Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Bir ifadenin doğruluğunun gösterilmesi	Ahu Bilge Aysun Aziz	*Ahu: Matematiksel ispatın amacı, matematiksel ifade gerçek mi değil mi onu ifade etmektir.* *Aziz: Hocam işte bir yol bulunur, bu yolun geçerliğini doğrular.*
Keşfetmek	Ahu Buse	*Buse: İspatta amaç başka kuralları, formülleri kullanıp bilinen şeyleri kullanarak bilinmeyeni bulmak, keşfetmektir.*
Şüpheyi ortadan kaldırmak	Adem	*Adem: Benim düşüncem, örneğin bir özellik verildiği zaman ispatlanmazsa şüphe oluyor. Yani doğru mu, bütün durumlar için geçerli mi diye. İspat olduğu zaman daha güven duyuyorsunuz. İspat olduğu zaman o şüpheyi ortadan kaldırıyor.*
Neyin nereden geldiğini bilmek	Barış	*Barış: İspatla birlikte neyin nereden geldiği bilinir.*
Konuları daha iyi kavratmak	Belma	*Belma: Aslında ispat matematikçilerin hani, teorem, aslında ispatlardan yola çıkarak teoremlerin bulunduğuna inanıyorum ben. Matematikçilerin uğraştığı daha sonra öğrencilerin konuları daha iyi kavraması için verilmesi gerek diye düşünüyorum.*

Tablo 4.2 incelendiğinde, öğretmen adaylarının yarısının (Ahu, Bilge, Aysun, Aziz) ispatın amacının doğrulama yapmak olduğunu belirttikleri görülmüştür. Bu öğrenciler ispatın matematiksel bir ifadenin ya da bulunan bir matematiksel yöntemin geçerli olup olmadığını kontrol ettiğini belirtmişlerdir. Ahu ve Buse ispatın amacının keşfetmek olduğunu ifade etmişlerdir. Onlara göre ispatın amacı bilinenlerden hareket edilerek bilinmeyen yeni şeyler bulmaktır. Adem ise ispata sosyal açıdan bakarak matematiksel ispatların amacının bir ifade üzerindeki şüpheyi ortadan kaldırmak olduğunu belirtmiştir. Adem ortaya atılan bir özellik ya da kuralın doğruluğu hakkındaki şüphelerin ispat sayesinde ortadan kalktığını ve herkesin böylelikle o özelliğe ikna olabileceğini belirtmiştir. Barış, ispatın amacının birşeyin nereden ve nasıl geldiğini belirtmek olduğunu ifade etmiştir. Belma ise ispatların matematikçilerin bir uğraşı olduğunu ifade ederek öğrencilere konuları daha iyi kavratmak gibi bir amacının olduğunu belirtmiştir.

Öğretmen adaylarının ispatın amacına yönelik görüşleri alındıktan sonra ispatın önemi hakkında görüş bildirmeleri istenmiştir. Görüşmelerde bütün öğretmen adayları ispatın matematikte önemli bir yere sahip olduğunu belirtmişlerdir. Bunun üzerine öğretmen adaylarının matematiksel ispatların neden önemli olduğuna yönelik görüşleri alınmıştır. Görüşlerin altı kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.3’te bu kategoriler ve kategorilerin oluşmasını sağlayan örnek ifadeler sunulmuştur.

Tablo 4.3.

Öğretmen Adaylarının İspatın Neden Önemli Olduğuna Yönelik Görüşleri

Kategoriler	**Öğretmen adayları**	***Örnek ifadeler***
Şüpheyi ortadan kaldırır	Ahu Adem Aysun Bilge	*Ahu: Önemi şöyle: ispatın öneminden bahsediyorsak onun olmadığını düşünmemiz lazım. İspat olmasaydı, o zaman ortalık çok karışırdı gibime geliyor. Yani şimdi bilim adamları bir teorem ortaya attı diyelim. Onun aksini de savunabilen olur. Şimdi bunların hangisinin doğru olduğuna nasıl karar vereceğiz? Onları ispatlamaları lazım ki hangi bilginin doğru olduğuna karar verelim.*
Kavramsal bilgiyi kuvvetlendirir	Aysun Barış Belma	*Aysun: Önemlidir, çünkü matematik somut değil soyut. Eğer biz bunu kafamızda oturtamazsak inanamayız. O yüzden matematiksel ispat önemlidir. Çünkü kavramları kavrayabilmemiz için böyle şeyler gereklidir.*
Zor işleri kolaylaştırır	Aziz	*Aziz: Dediğim gibi zor işleri daha da kolaylaştırma için önemlidir.*
Bilgilerin kalıcılığını sağlar	Barış	*Barış: İspat yapma, öğrencilerin kavramsal bilgilerini daha da kuvvetlendirir. Unutmaz. Ezberlese bile onun nereden geldiğini de bilse o zaman uzun yıllar boyunca unutmaz. Kısa sürede unutmaz, ispat onun için önemlidir yani.*
Bilginin devamlılığını sağlar	Buse	*Buse: İspatlar matematikte önemlidir. Çünkü herhangi birşeyi ispatlayamazsak bundan sonra gelecek konuları da bulamayız. Mesela, geometride olsun, analizde olsun ondan sonra gelecek konuyu da açığa çıkaramayız. O yüzden bir şeyleri ispatlayalım ki önü açılsın.*
Neyin nereden geldiğini açıklar	Bilge	*Bilge: Matematikte önemlidir. Matematiksel ispat olmasaydı yaptığımız soyut işlemlerde neyin nereden geldiğini ya da doğru mu bilemezdik. Matematik soyut bir bilim. Doğru mu, yanlış mı olduğunu bize akla uygun bir şekilde öğrettiği, uygulattığı ve buldurduğu için gereklidir.*

Tablo 4.3 incelendiğinde, öğretmen adaylarının yarısının (Ahu, Aysun, Adem, Bilge) matematiksel ispatların, matematiksel ifadelerin doğruluğu üzerindeki şüpheyi ortadan kaldırdığı için önemli olduğunu düşündükleri görülmüştür. Öğretmen adaylarından üçü (Aysun, Barış, Belma) ispatların kavramsal bilgiyi kuvvetlendirdiğini, konuların daha iyi anlaşıldığını ifade ederek ispatların bu yüzden önemli olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarından Aziz, ispatın zor işleri kolaylaştırdığı için önemli olduğunu belirtmiştir. Aziz'in zor işleri kolaylaştırmaktan kastı görüşmede daha

önce ifade ettiği, ispatlar sayesinde elde edilen teoremlerin, problemlerin ya da işlemlerin çözümünü kolaylaştırdığı şeklindeki görüşüdür. Barış ispatların, bilgilerin kalıcılığını sağladığı için önemli olduğunu belirtmiştir. Buse ise ispatlar sayesinde elde edilen bilgilerin yeni bilgilere ulaşmaya kapı araladığını belirtmiştir. İspatın bu sayede bilginin devamlılığını sağladığını ifade etmiştir. Bilge de matematiksel ispatlar sayesinde yapılan işlemlerin nereden geldiğinin açıklanmasından dolayı ispatların önemli olduğunu belirtmiştir.

Öğretmen adaylarının ispatın önemine yönelik görüşlerinin alınmasının ardından matematiksel ispatın onlara neden öğretildiğine yönelik görüşleri alınmıştır. Görüşlerin dokuz kategoride toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4.4'te söz konusu kategoriler hakkında bilgiler verilmiştir.

Tablo 4.4.

Öğretmen Adaylarının İspatların Neden Öğretildiğine Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Akademik kariyer yapacaklar için	Aziz Barış Belma Buse	*Aziz: İleride matematik öğretmeni olacağız ama daha da bilgili olmak için öğretiliyor. Sadece öğretmen değil mesela yüksek lisans yapacak öğrenciler var. Onlara yönelik de eğitim verilmesi gerekiyor.*
Kuralların nereden geldiğini bilmek için	Ahu Bilge Aysun Buse	*Buse: Neden öğretiliyor bize? Biz matematik öğretmeni olacağız inşallah. Bir matematikçi olarak da bizim bunları bilmemiz gerekiyor. İspatları bilmemiz gerekiyor. Hani, bir lise öğrencisi de formülleri bilebilir ama bizim bunların nereden geldiğini bilmemiz gerekir. Yani bunun eğitimini almamız gerekir, o yüzden.*
Daha bilgili olmak için	Adem Aysun Aziz	*Adem: İspatları bilmemiz gerekiyor, alanda daha iyi olabilmemiz için.*
Farklı bakış açısı geliştirmek için	Adem Barış	*Barış: Tabi ki matematiksel ispatlar öğretilmelidir. Çünkü öğrendiğimiz zaman sorulara bakış açımız gelişiyor. Farklı açılardan bakmak her zaman iyidir.*
Bilgilerin kalıcılığını sağlamak için	Aysun Barış	*Aysun: İspatlar öğretilmelidir çünkü birşeyin ispatının nasıl olduğunu bilmezsek, o bizde yüzeysel olarak kalır. Ama birşeyin nereden geldiğini bilirsek daha kalıcı öğrenme sağlanır.*

Tablo 4.4. *(Devamı)*

Meraklı öğrencilere yanıt verebilmek için	Ahu	*Ahu: Hocam, bazen çok meraklı öğrenciler olabiliyor. Yani özel eğitim derslerinde de olabilir, ispat sadece analiz ve cebir anlaşılmamalı. Meraklı öğrenciler oluyor onlara yanıt vermemizde yardımcı olur. Bir de insan anladığı şeyi anlatırken daha rahat oluyor. Daha kolay anlatıyor. Mesela sen birşeyin nereden geldiğini bilirsen, çocuğa onu ifade etmesen bile sen nereden geldiğini bildiğin için karşı tarafa daha kolay geçirebilirsin.*
Başkalarını ikna etmek için	Adem	*Adem: Konulara daha hâkim oluruz o zaman. Mesela bir soru sorulduğunda onu çok soru çözerek cevaplayabiliriz ama ispatını bildiğimiz zaman karşıdakini daha iyi ikna edebilirsiniz.*
Matematiksel düşünmeyi geliştirmek için	Adem	*Adem: Öğretilmelidir yani ufkumuz açılır, daha iyi düşünürüz, düşünce şeklimiz değişir. Bir konu hakkında daha fazla, daha farklı yönlerden bakabiliriz.*
Ezberlenmesi için	Belma	*Belma: Şuan ezberleyelim geçelim diye bir mantığı yok. Çünkü biz ilköğretim matematik öğretmeni olacağız. Bu ispatların bizim için yani yüksek lisans falan düşünmeyenler için bir yararı yok. O yüzden biz dersten geçmek için ezberleyip geçiyoruz.*

Tablo 4.4 incelendiğinde öğretmen adayları çoğunlukla (Belma hariç) ispatların akademik kariyer yapacak öğrenciler için ya da matematiksel kuralların nereden geldiğinin bilinmesi için lisans seviyesindeki derslerde öğretildiğini ifade etmişlerdir. Üç öğretmen adayı (Adem, Aysun, Aziz) matematik alanında daha fazla bilgiye sahip olup uzman olmak için matematiksel ispatların öğretildiğini vurgulamışlardır. Adem ve Barış matematiksel ispatların öğretilmesinin amacının matematiğe yönelik farklı bakış açısı geliştirmek olduğunu belirtmişlerdir. İki öğrenci de (Aysun, Barış) matematiksel ispatlar sayesinde bilgilerin daha kalıcı olmasından dolayı matematiksel ispatların öğretiminin yapıldığını ifade etmişlerdir. Birer öğrenci de meraklı öğrencilere yanıt verebilmek için (Ahu), başkalarını ikna edebilmek için (Adem) ve matematiksel düşünmeyi geliştirdiği için (Adem) ispat öğretiminin yapıldığını belirtmiştir. Belma ise ispat öğretimine olumsuz bakarak ispatların sadece ezberlenmesi için öğretildiğini ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarının ispat öğretimine yönelik görüşlerinin alınmasının ardından şimdiye kadar öğrendikleri ispatların matematiksel anlamda kendilerine yarar sağlayıp sağlamadığı hakkında görüşleri alınmıştır. Öğrencilerin görüşlerinin 10 kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.5'te bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.5.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatların Kendilerine Matematiksel Anlamda Yarar Sağlayıp Sağlamadığına Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Düşünme kapasitemiz gelişti	Ahu Aziz Aysun Adem	*Aysun: Düşünme zekâm gelişti, daha ayrıntılı düşünebiliyorum. Mesela bakıyoruz bu buradan geldiği için, şu şuradan geldiği için önceki işlediğimiz şeylere dayanarak bazı şeyleri ispat ediyoruz. Bunları düşünerek ispat yapabildiğimi gördüm.*
Yararı yok	Barış Belma Buse	*Belma: Her şey yararlı oldu diyemem ama bazı ispatlar yararlı oldu. İleride öğretmenlik hayatımda pek yararı olacağını düşünmediğim için. Belki olacaktır ama ben bunu henüz kavrayamamışımdır. Kendi adıma matematiksel anlamda fayda görmüyorum. Önemli olduğunu düşünüyorum ama benim için değil.*
Matematiğe bakış açımız değişti	Adem Aziz	*Adem: Ufkum açıldı, daha iyi düşünebiliyorum. Bu, ders çalışırken oluyor. İspatlarda bu yönden de düşünülebiliyormuş. Mesela sizin bilmediğiniz bir formül verildiği zaman bu nereden geldi diye sorabilirsiniz yani.*
Soru çözümüne yardımcı oluyor	Bilge Aziz	*Bilge: Gerçek hayatta yararlı olmuyor tabi ki. Matematiksel anlamda her yerde kullanıyoruz ama. Bir yöntem öğrenip, her alandaki sorulara uygulayabiliyoruz. Yararlı olduğunu düşünüyorum.*
Kalıcı bilgi sağladı		*Adem: Bilginin kalıcı olmasını sağladı. İyi anlıyoruz yani sıkılmıyoruz ispatlarda.*
İlişkilendirme becerimiz arttı	Adem	*Adem: İlişkilendirmeyi de sağlıyor. Mesela iki konu hakkında ayrıntılı bir şekilde ilişkilendirmeyi de sağlıyor. Misal, türev ile ilgili bir ispatta limit de kullanılıyor. İspatını yaptığınız zaman limit hakkındaki bilgilerinizi de hatırlıyorsunuz.*
Derslerdeki başarı arttı		*Adem: Konular daha iyi anlaşılıyor o şekilde. Soruları rahat cevaplayabiliyoruz. Derslerdeki başarı oranımız artıyor.*
Kavramların iyi bilinmesi gerektiği öğrenildi	Aysun	*Aysun: Mesela soyut cebirde çok fazla teorem görüp ispatladık. Onların çok yararı oldu. Nasıl yapıldığını öğrendim. Verilen teoremi ispatlamak için teoremdeki kavramların iyi bilinmesi gerektiğini öğrendim. Çünkü genelde ispatları tanımlardan yola çıkarak yapıyoruz.*
Matematiği sevdirdi	Aziz	*Aziz: Matematiğe bakış açısı değişiyor insanın. Soru çözme yeteneği de gelişiyor. Başka hocam, matematiği sevdiriyor ispat. Ben çok seviyorum yani. Akılda tutması zor ama hoşuma gidiyor. Farklı açılardan bakmayı öğretiyor. İşlem kabiliyetini geliştiriyor. Düşünmeyi, matematiksel düşünmeyi, soyut düşünmeyi geliştiriyor.*
İşlem kabiliyetini geliştirdi		

Tablo 4.5’e göre, öğretmen adaylarının yarısı (Ahu, Adem, Aysun, Aziz) matematiksel ispatlar sayesinde matematiksel düşüncelerinin geliştiğini ifade etmişlerdir. Buna karşın Barış, Belma ve Buse matematiksel ispatların kendilerine matematiksel anlamda bir katkısı olmadığını söylemişlerdir. Buna göre, bu öğretmen adaylarının matematiksel ispata karşı olumsuz görüşlere sahip oldukları söylenebilir. İki öğretmen adayı matematiksel ispatlar sayesinde matematiğe olan bakış açılarının değiştiğini belirtmiştir (Adem, Aziz). Bilge ve Aziz öğrendikleri matematiksel ispatların soru çözümlerinde yardımcı olduğunu ifade etmişlerdir. Adem matematiksel ispatlar sayesinde bilgilerinin daha kalıcı olduğunu, matematiksel kavramlar arasında ilişkilendirme becerisinin ve diğer derslerdeki başarısının arttığını vurgulamıştır. Aysun matematiksel ispatlarla birlikte matematikteki konuların daha iyi öğrenilmesi gerektiğini öğrendiğini ifade etmiştir. Aziz de matematiksel ispatlar sayesinde matematiği sevdiğini ve işlem kabiliyetinin geliştiğini dile getirmiştir.

Öğretmen adaylarının hangi tür ispatlarda başarılı olduğunu ortaya çıkarmak amacıyla konuyla ilgili görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarının başarılı oldukları ispatlara yönelik görüşlerinin beş kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Söz konusu kategorilere yönelik bilgiler Tablo 4.6’da sunulmuştur.

Tablo 4.6.

Öğretmen Adaylarının Başarılı Oldukları İspatlara Yönelik Görüşleri

Kategoriler	**Öğretmen adayları**	***Örnek ifadeler***
Sayısal ispatlar	Ahu Aziz Belma	*Ahu: Sayısal olanlar, iki üç düşünceyi birleştirince hemen çıkanlar. Yani çok fazla tümdengelim kullanmadan olanlarda başarılı oluyorum.*
Tümevarım yöntemli ispatlar	Bilge Buse	*Bilge: Tümevarım ispat metoduyla yapılan ispatlar diyeceğim şimdi. Çünkü tümevarımı belli başlı yerlerde kullanıyoruz. Yani sayıların düzgün bir şekilde sıralandığı durumlarda kullanıyoruz.*
Olmayana ergi yöntemli ispatlar	Barış Buse	*Barış: Olmayana ergi metoduyla yapılan ispatlar. Çünkü o biraz daha mantıklı geliyor. Mesela tek bir çözümü vardır diyor. Ben iki çözümün olduğunu kabul ediyorum ve bunu çürütüyorum diğer aşamalarda. Biraz daha akla uygun.*
Çözüm yöntemi açık olanlar	Ahu Aysun	*Aysun: Hocam başarılı olduğum ispatların genelinde bariz belli oluyor. Şu şuradan diye. Yine Soyut cebirden örnek vereceğim. Mesela, şu şunun alt uzayı olduğunu gösterin dediğinde bunu kullanırsam buradan çıkar diyorum. Bu şekilde geliyor ama bazılarında hiçbir şekilde mantık yürütemiyorum.*

Tablo 4.6. (Devamı)

Kısa ispatlar	Adem	*Adem: Kısa ispatlarda. Yani, yine türevden örnek vereceğim. Bir noktada türevinin olabilmesi için sürekli olması lazım. O kısa ispat yani onu yapabilirim. Türevli olması için sürekli olması gerekiyor ama sürekli olması türevli olmasını gerektirmiyor. Kısa bir ispat yani onlarda daha kalıcı oluyor.*

Tablo 4.6'ya göre öğretmen adaylarının üçü (Ahu, Aziz, Belma) sayısal ispatlarda başarılı olduklarını ifade etmişlerdir. Sayısal ispat ile öğretmen adayları, çok fazla sözel ifadeler içermeyen, ispat içerisindeki argümanlarda işlemsel gerekçelerin yoğunlukta olduğu, genellikle formüllerin ispatlanması şeklindeki ispatları kastettiklerini ifade etmişlerdir. Yine öğretmen adaylarından üçü (Bilge, Buse, Barış) başarılı oldukları ispatları, ispatlama yöntemi açısından değerlendirmişlerdir. İki öğretmen adayı (Bilge, Buse) tümevarım ispatlama yöntemi ile yapılmış ispatlarda daha başarılı olduklarını belirtirken, iki öğretmen adayı (Buse, Barış) da olmayana ergi yönetimi ile yapılan ispatlarda daha başarılı olduklarını vurgulamışlardır. Ahu ve Aysun çözümü açık olan ispatlarda daha başarılı olduklarını ifade etmişlerdir. Adem ise kısa ispatları yaparken daha başarılı olduğunu belirtmiştir.

Başarılı oldukları ispatları ispatlama yöntemleri açısından değerlendiren öğretmen adaylarının ispatlama yöntemleri hakkındaki bilgilerini ortaya çıkarmak amacıyla bilgileri sorgulanmıştır. Öğrencilerin konu ile ilgili ifadelerinden ispatlama yöntemleri ile ilgili yeterli bilgiye sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Özellikle bu öğretmen adaylarının çelişki bulma ve olmayana ergi yöntemini açıklayamadıkları, çelişki bulma yöntemi ile olmayana ergi yöntemi arasındaki farkı belirtemedikleri ve birbiri yerine kullandıkları belirlenmiştir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın olmayana ergi yöntemi ile çelişki bulma yöntemi arasındaki farka yönelik ifadeleri sunulmuştur.

Barış: Olmayana ergide ilk başta kabul ediyoruz birşeyi. Mesela, bunun tek bir çözümü var diyor. Ben iki çözümü olduğunu kabul ediyorum, daha sonra işlemleri yaptığım zaman bir tane çıkıyor. Bu da kabulümle çeliştiği için olmayana ergi öyle. Çelişki bulma şöyle olur; diyelim ki x eşittir bir denklem var. Mesela, denklemin çözümüne 3 diyor. Ben denklemi çözdüm, x=2 ve x=-2 buldum. O zaman denklemin çözümü olmuyor. x hem 2'ye hem de -2'ye eşit, bu bir çelişkidir.

Öğretmen adaylarının başarılı oldukları ispatlara ilişkin görüşlerinin alınmasından sonra onlara ispatlarda başarılı olmak için ne yapılması gerektiği sorulmuştur. Alınan yanıtların yedi kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.7'de bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.7.

Öğretmen Adaylarına Göre İspatlarda Başarılı Olabilmek İçin Yapılması Gerekenler

Kategoriler	**Öğretmen adayları**	***Örnek ifadeler***
Konuyu iyi bilme	Adem Aziz Barış Bilge Buse	*Aziz: Bir kere tanımları kavramsal boyutta bilmesi lazım. Mesela limit deyince, limiti tam olarak anlayabilmesi lazım. Yani limitin ne olduğunu anlaması lazım. Yani bu şekilde kavramsal olarak bilmesi lazım.*
Ezber yapmama	Ahu Adem Aysun Barış	*Aysun: Ezber yapanlar başarılı olamıyor. Çünkü neyin nereden geldiğini bilmesi lazım. Hocam mesela arada olma teoremi sınavda sorulmuştu. Millet direk ezberlediği için başarılı olamadı ama kendi mantığı ile ispat oluşturulduğunda başarılı olunuyor yani.*
İspatların üzerinde yoğunlaşma	Ahu Buse	*Ahu: Aslında herkes yapabilir. Çok zor birşey değil. Uğraşması lazım biraz. Üzerinde düşünmesi lazım, uğraşması lazım.*
İyi ezberleme	Belma Bilge	*Belma: Şuan ezberleyip başarılı oluyoruz. İyi ezberlemeli.*
Gerekçeleri anlama	Adem	*Adem: Öncelikle konuyu iyi bilmesi lazım. Ondan sonra günlük ders çalışması lazım. İspatlarda derste iyi anlayacak daha sonra not alması lazım. İspatın adımlarındaki geçişleri iyi anlaması lazım. Ezberlemesi değil ama neyin nereden geldiğini bilmesi lazım*
İspatlama yöntemlerini ayırt etme	Bilge	*Bilge: Öncelikle ispatlama yöntemlerinin anlamını, olmayana ergi ile çelişki bulma arasındaki farkı, karıştırılabilecek şeyleri iyi bilmesi gerekiyor. Sonra o konu hakkındaki donanımının ve eski bilgilerinin yeterli olması gerekiyor. Yani biz öğrenciyiz, ne kadar baksak da zorlanırız ispatlarda. Şimdiye kadar gördüğümüz, defterlerdeki ispatları tekrar ispatlamaktı. Bizim karşımıza zaten kendimizin ispatlayabileceği bir tarzda bir ispat sorulmadı.*
Öğrencilere fırsat verme	Bilge	*Bilge: İşlediğimiz eğitim derslerinde buluş yolu ile öğretimin daha iyi olacağını öğrenmiştik. O yüzden buluş yolu ile öğrenciye buldurarak yani ipucu vererek ispatın öğrenciye tamamlatılmasını bizim için öğretici bulurum. Direk hoca kendisi yapınca biz hemen tahtadan defterimize geçiriyoruz. Pek yararı olmuyor, ezberci oluyor.*

Öğretmen adaylarının çoğunluğu ispatlarda başarılı olabilmek için ispatın yapıldığı konuyu iyi bilmenin gerekli olduğunu vurgulamışlardır. Bu kategorideki öğretmen adayları özellikle tanımların kavramsal boyutta bilinmesinin gerekliliği üzerinde durmuşlardır. Öğretmen adaylarının yarısı da ispatların kesinlikle ezberlenmemesi gerektiğini, ezberlemek yerine ispatın mantığının anlaşılmaya çalışılmasını önermişlerdir. Ahu ve Buse ispatların üzerinde ciddi bir şekilde yoğunlaşmanın gerekli olduğunu belirtmişlerdir. Belma ve Bilge ise ispatlarda başarılı olmanın yolunun ispatları iyi ezberlemekten geçtiğini ifade etmişlerdir. Adem ispatlarda başarılı olabilmek için ispatların içerisindeki argümanları anlamanın önemli olduğunu vurgulamıştır. Bilge ispatlama yöntemleri hakkında yeterli bilgiye sahip olmanın ispatlarda başarının sağlanabilmesi için gerekli olduğunu belirtmiştir. Ayrıca Bilge, ispatların öğretimine yönelik bir eleştiride bulunmuştur. İspatların öğretimi sırasında öğrencilerin pasif olduklarını belirterek öğrencilere ispat yapmaları için fırsat verilmesinin, ispatların daha iyi öğrenilmesi adına yararlı olacağını ifade etmiştir.

Öğrencilerin doğru ispat anlayışlarını ve kriterlerini ortaya çıkarmak amacıyla öğretmen adaylarının doğru yapılmış bir ispatta bulunması gereken özelliklere yönelik görüşleri alınmıştır. Görüşlerin dört kategori ve 12 alt kategori altında toplandığı tespit edilmiştir.

Tablo 4.8.

Öğretmen Adaylarına Göre Doğru Yapılmış Bir İspatta Bulunması Gereken Özellikler

Kategoriler	**Alt Kategoriler**	**Öğretmen adayları**	***Örnek ifadeler***
Argüman incelemesi	Argümanlarda bilinen gerçekler kullanılmalı	Ahu Belma Bilge Buse	*Ahu: Bir kere neye dayandırmış? Bilinen bir kavram mı? Gerekçesi ne, yani bildiğimiz bir teorem mi? Kabul edilmiş bir şey mi? Bir kere ona bakarım. Yaptığı işlemlere bakarım. İşlemsel bir hata var mı?*
	Matematiksel kurallara uygun olmalı, İfadelerde çelişki olmamalı	Ahu Adem Barış	*Barış: İspatın nasıl yapıldığına baktığımız zaman öncelikle kullanılan verilerin birbiri ile çelişmemesi lazım. Ondan sonra önceki bildiğim bilgilerle tezat bir şey oluşturmaması lazım. Yani doğru bildiğim ifadeler çelişmeyecek.*

Tablo 4.8. (Devamı)

	İşlemsel hata olmamalı	Ahu Aziz	*Aziz: Doğru yapılmış bir ispatta işlemsel bir hata olmayacak*
	Kilit ifadelerde hata yapılmamalı	Aziz	*Aziz: Çok uç noktalar olur ispatta. Mesela deltayı limitte minimum alması gerekiyordu. Onu almalı, o çok önemli bir nokta. Eğer orayı almamışsa yanlış olur ispat. Çünkü ispatta oraya kadar gelmiş ama orada bir şart var. Eğer o şart sağlanmazsa ispat olmaz zaten. Çünkü sağlanmayan bir durum ortaya çıkar. Aksine bir örnek bulunabilir.*
Yapısal inceleme	Teoremin hipotezleri kullanılmalı	Aysun Belma	*Belma: Teoremde verilen verilerin dışında bir şey kullandıysa bu ispat geçersizdir. Öncelikle ona dikkat ederim. Başka, ispat tam olduysa sonucuna ulaşmışsa. Başka bakacağım şeyler de vardır da, şuan aklıma gelmiyor.*
	Teoremin hükmü bulunmalı	Aysun Belma	*Aysun: Verilenleri kullanmış mı ve hükmü yerine getirmiş mi diye bakarım. İspatta hüküm önemlidir. Çünkü hükmünü ispatlamaya çalışıyoruz.*
	Teoremin hükmü kullanılmamalı	Buse	*Buse: En son istenen şey bizim neyi ispatlayacak olduğumuzdur. En son bunlara dayanarak varacak olduğumuz şeydir. Eğer sonuç kısmını ispatta kullandı ise bu yanlıştır. Kesinlikle sonuç kısmı ispatta kullanılmamalıdır. Bunu yaptıysa yanlış.*
	İspatlama yöntemi uygun olmalı	Ahu Aysun Buse	*Buse: Bir de hangi ispatlama yöntemini kullandı? Bu kullandığı ispatlama yöntemini ispatında barındırıyor mu? Mesela olmayana ergi ile çelişki bulmayı kullandı. Bunları kullandığı zaman gerçekten en sonuna vardığında kabul ettiği ile zıtlık oluşturuyor mu? Bunları yapması gerekir diye düşünüyorum.*
Dilsel-Mantıksal inceleme	Açık, anlaşılır olmalı	Aysun Bilge	*Bilge: Akla yatkın olmalı en başta. Ben o ispatı okuyunca evet bunu buradan yapmış doğru kullanmış diyebilmeliyim. Yani, ben de o işlemi düşündüğümde oradakiyle aynı sonuca, aynı düşünceye varabilmeliyim. Herkes tarafından objektif olması diyebilirim.*
	İkna edici olmalı	Aysun Bilge	*Aysun: Herkesi ikna edici bir şekilde olmasın lazım. Kolay olması lazım, kolay olmalı derken benim de aklıma yatacak yani. Herkesin anlayabileceği şekilde olacak.*
	Yapacağı işlemlere zemin hazırlamalı	Aziz	*Aziz: Baş kısmına bakarım hocam. Yapacağı işlemlere zemin hazırlamış mı? Onları ifade etmiş mi? Yani ondan sonra söylediklerini matematiksel olarak yapabilmiş mi?*
Otoriter inceleme	Kitaptaki gibi olmalı	Aysun	*Aysun: Doğru bir ispatta neler olmalı derken kitaptaki gibi olmalı geliyor aklıma.*

Tablo 4.8 incelendiğinde, öğretmen adaylarının doğru bir ispatta bulunması gereken özelliklere yönelik görüşlerini belirtirken ispatların doğruluğunu dört ana başlık altında inceledikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının tamamına yakını (Aysun hariç) ispatların doğruluğunu incelerken argüman incelemesi yapmıştır. Yani öğretmen adayları ispatlarda bulunan argümanları kullanılan gerekçe, işlemsel doğruluk, matematiksel kurallara uygunluk ve ispattaki kilit düşüncelerde hata yapılmaması noktalarında incelemişlerdir. Dört öğretmen adayı, ispatlarda kullanılan gerekçelerin herkes tarafından bilinen gerçekler olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarından üç tanesi de ispatın matematiksel kurallara uygun olması gerektiğini ve ifadelerin birbiri ile çelişmemesi gerektiğini ifade etmişlerdir. İki öğretmen adayı da ispatlarda işlemsel bir hatanın olmaması gerektiğini belirtmişlerdir. Aziz ise ispatlarda önemli kilit noktalar olduğunu belirterek bu noktaların kesinlikle ispatta yer alması gerektiğini vurgulamıştır. Aziz düşüncesini desteklemek için fonksiyonların limiti ile ilgili yapılan ispatlarda delta sayısının minimum seçilmesi gerektiğini, aksi halde ispatın doğruluğunun tehlikeye düşeceğini belirtmiştir. Öğretmen adaylarının yarısı ispatları yapısal olarak incelemişlerdir. Yani ispatların içerisinde mevcut olan argümanların doğruluğunu ya da ispatta bulunan mantıksal boşlukları incelemek yerine ispatlarda kullanılan ispatlama yöntemine, teoremin hipotezine ve hükmüne dikkat ederek inceleme yaptıklarını ifade etmişlerdir. Aysun ve Belma doğru yapılmış bir ispatta teoremin hipotezinin kullanılması gerektiğini ve sonuç olarak teoremin hükmüne ulaşılmasının öneminden bahsetmişlerdir. Buse ise teoremin hükmünün ispatta kullanılmaması gerektiğini belirtmiştir. Ahu, Aysun ve Buse ispatta kullanılan ispatlama yönteminin uygunluğuna dikkat ettiklerini ifade etmişlerdir. Üç öğretmen adayı da ispatların doğruluğuna dilsel ve mantıksal açıdan yaklaşmışlardır. Bu öğretmen adayları doğru bir ispattaki matematiksel dilin açık, anlaşılır olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Ayrıca doğru yapılmış bir ispatın akla ve mantığa uygun olarak ikna edici olması gerektiğini belirtmişlerdir (Aysun, Bilge). Aziz ise doğru yapılmış bir ispatta yapılması planlanan işlemlere zemin hazırlayan ifadelerin yer alması gerektiğini vurgulamıştır. Son olarak Aysun, doğru yapılmış bir ispatta bulunması gereken özellikleri ifade ederken otoriter bir görüş belirtmiştir. Aysun, doğru yapılmış bir ispatın kitaptaki gibi olması gerektiğini savunmuştur.

Öğretmen adaylarına matematiksel bir önermenin doğruluğu hakkında şüpheye düştüklerinde kendilerini nasıl ikna ettikleri sorulmuştur. Alınan cevapların yedi kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4.9'da bu kategoriler ve öğretmen adaylarının örnek ifadelerinden bölümlere yer verilmiştir.

Tablo 4.9.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Bir Önermenin Doğruluğu Hakkında Şüpheye Düştüklerinde Kendilerini Nasıl İkna Ettiklerine Yönelik Görüşleri

Kategoriler	**Öğretmen adayları**	***Örnek ifadeler***
Tanımlar üzerinden muhakeme	Ahu Aysun Belma Bilge	*Ahu: Tanım ve teoremleri dayanak olarak kullanıyorum. Benim kendimi ikna etmem zordur. O konuda bilgili olursam zaten bilgimden yola çıkarak yapabilirim. Bilgiliysem onu dayandırmam lazım. Mesela dedim ki doğru veya yanlış, burada teoremi daha çok kullanıyoruz. Teorem, formül, kural olabilir.*
Teoremler üzerinden muhakeme	Ahu Aysun Bilge	*Aysun: Daha önceki teoremlerden bu böyledir derim ya da tanımları gerekçe olarak kullanırım*
İspat yapma	Adem Aysun Aziz	*Aziz: İspatlamaya çalışırım. Denilen ifade doğrultusunda bir ispat yapabilirsem zaten doğruluğuna ikna olurum.*
Örneklerle deneme	Barış Belma Bilge Buse	*Bilge: Ben direkt örnekleri düşünürüm. O matematiksel ifadeye yakın benzer bir örnekle denerim*
Şekil çizme	Barış Belma Buse	*Barış: Bu ifadeler soyut ifadeler olduğu için genelde tanımlardan pek anlaşılmaz. Tanımlar pek cazip değil. Şekil ve örnek üzerinden daha çok.*
Yanlışlık için ters örnek arama	Buse dışındaki öğretmen adayları	*Adem: Bu ifade üzerinde yanlış örnek bulmaya çalışırım. Çünkü doğru örnek olduğu zaman her zaman doğru olacak diye bir şey yok.*
Yanlışlık için açıklama yapma	Buse	*Buse: Bir ifadenin yanlış olduğunu göstermek için ya denerim ya da şekil çizerek anlatmaya çalışırım.*

Tablo 4.9'daki verilere göre, öğretmen adaylarının yarısı (Ahu, Aysun, Belma, Bilge) matematiksel bir önermenin doğruluğu hakkında şüpheye düştüğünde tanımlar üzerinden muhakeme ederek karar verdiklerini ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adayları matematiksel kavramlar üzerine düşünerek söz konusu şüpheden kurtulduklarını

belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarından dördü (Barış, Belma, Bilge, Buse) matematiksel bir önermenin doğruluğuna birkaç örnekle deneme yaparak ikna olduklarını dile getirmişlerdir. Üç öğretmen adayı (Ahu, Aysun, Bilge) matematiksel önermenin bildikleri teoremler ile uyumlu olması durumunda doğruluğu hakkında şüphelerinin ortadan kalktığını ifade etmişlerdir. Adem, Aysun ve Aziz ise matematiksel bir ifadeye doğru diyebilmeleri için o önermeyi ispat etmeleri gerektiğini vurgulamışlardır. İfadeyi ispatlayabilirlerse doğru olduğuna ikna olacaklarını, aksi durumda ise önermenin doğruluğu hakkında bir karar veremeyeceklerini ifade etmişlerdir. Barış, Belma ve Buse bir matematiksel önermenin doğru olduğuna şekil çizerek karar verebileceklerini belirtmişlerdir.

Buse dışındaki tüm öğretmen adayları matematiksel önermenin yanlış olduğuna bir ters örnek bulmaları durumunda karar vereceklerini belirtmişlerdir. Buse ise bir matematiksel önermenin yanlış olduğuna ikna olmak için şekil çizerek ya da deneme yaparak açıklama yapacağını belirtmiştir. Buna göre Buse'nin ters örnekler hakkındaki bilgisinin yeterli düzeyde olmadığı söylenebilir. Tablo 4.9 dikkatle incelendiğinde öğretmen adaylarının bazıları sadece bir kategoride iken bazılarının ise birden çok kategori içinde oldukları tespit edilmiştir. Örneğin Aziz ve Adem bir önermenin doğru olduğuna sadece ispat yapmaları durumunda ikna olacaklarını belirtmişlerdir. Barış, Belma ve Buse şekilleri ve örnekleri kullanarak bir önermenin doğru olduğu kanaatine varacaklarını ifade etmişlerdir. Ahu ikna olmak için tanımları ve teoremleri kullanırken Bilge tanım ve teoremlerin yanı sıra örnekleri de kullanacağını belirtmiştir. Aysun ise tanım ve teoremlerle birlikte doğruluğa ikna olmak için ispata da başvurabileceğini dile getirmiştir.

Öğretmen adaylarının matematiksel önermelerin doğruluğuna nasıl ikna olduklarına yönelik görüşlerinin ortaya çıkarılmasının ardından, doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını nasıl savunduklarına yönelik görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarının ifadeleri oluşturdukları argümanların gerekçeleri kapsamında incelenmiştir. Öğretmen adaylarının doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını savunurken kullandıkları gerekçelere yönelik görüşlerinin dört kategoriye ayrıldığı belirlenmiştir. Tablo 4.10'da bu kategoriler hakkındaki bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.10.

Öğretmen adaylarının Doğru Olduğunu Düşündükleri Matematiksel İddialarını Savunurken Kullandıkları Gerekçelere Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Alt Kategoriler	Öğretmen adayları	Örnek ifadeler
Dedüktif gerekçe	Tanımlar	Ahu Adem Aziz Bilge Aysun	*Adem: Şimdi nasıl savunayım ki onu? Tanımları kullanırım yani. Ondan sonra ona yönelik bir örnek sunarım. Örneği doğrulama yapmak için değil açıklama yapmak için kullanırım.*
	Teoremler	Ahu Aziz Aysun	*Aysun: Örneğin tanımları kullandığım zaman kimse bir şey diyemez. Bu tanımdan dolayı böyledir derim ya da bir önceki teoremden dolayı derim. Yani onlarla ikna olabilirler.*
Görsel gerekçe	Şekiller	Belma Bilge Buse	*Buse: Mesela sürekliliği anlatırken hocalarımız şekil çiziyor onları kullanırım. Noktalar çiziyor burada herhangi bir kesiklik varsa veya iki parçaysa sürekli değildir diyor. Buna bakarım türevli olabilmesi için bu gereklidir derim. Şekilleri kullanırım oradan daha açık olur.*
Tümevarımsal gerekçe	Örnekler	Barış Bilge	*Barış: Daha fazla örnek vererek genelleme yaparak.*

Tablo 4.10 incelendiğinde öğretmen adaylarının yarısından fazlası (Ahu, Adem, Aziz, Bilge, Aysun) iddialarını savunurken ürettikleri argümanlarında tanımları gerekçe olarak kullandıklarını ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarından üçü (Ahu, Aziz, Aysun) argümanlarında teoremleri gerekçe olarak kullandıklarını belirtmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunun iddialarını savunmak için ürettikleri argümanlarda dedüktif gerekçeler kullandıkları yönünde görüş bildirdikleri ortaya çıkmıştır. Yine öğretmen adaylarından üçü (Belma, Bilge, Buse) matematiksel iddialarını savunurken argümanlarında gerekçe olarak şekilleri kullandıklarını dile getirmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının ürettikleri argümanlarda görsel gerekçeler kullandıkları söylenebilir. Öğretmen adaylarından ikisi (Barış, Bilge) argümanlarında örneklere, gerekçe olarak yer verdiklerini belirtmiştir. Bu öğretmen adayları ürettikleri argümanlarda tümevarımsal gerekçeleri kullandıklarını dile getirmişlerdir. Bazı öğretmen adayları sadece tek gerekçeyi kullandıklarını ifade ederken bazı öğretmen adayları

argümanlarında birden çok tipte argümana yer verdiklerini belirtmişlerdir. Adem argümanlarında sadece tanımları gerekçe olarak kullandığını belirtirken, Barış sadece örnekleri, Belma ve Buse de sadece şekilleri kullandığını ifade etmişlerdir. Ahu, Aziz ve Aysun argümanlarında tanım ve teoremleri kullandıklarını belirtmişlerdir. Bilge ise tanımların yanında şekil ve örnekleri de matematiksel iddialarını savunurken gerekçe olarak kullandığını ifade etmiştir.

4.2. Öğretmen Adaylarının Fonksiyonlar Konusundaki Argümantasyon ve İspat Süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki argümantasyon ve ispat süreçlerine yönelik bulgular sunulmuştur. Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlarda etkinliklere geçilmeden önce, fonksiyon, birebir fonksiyon ve örten fonksiyon tanımları öğretmen adaylarına sunulmuştur. Öğretmen adaylarından bu tanımları sesli bir şekilde okumaları rica edilmiştir. Tanımların okunmasının ardından tanımlardan ne anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat etkinliklerinde kullanacakları kavramları ne ölçüde içselleştirdikleri ve bu tanımları anlayış şekilleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Öğretmen adaylarının fonksiyon tanımına yönelik anlayışlarının beş kod ve dört kategori altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Tablo 4.11’de bu kod ve kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.11.

Öğretmen Adaylarının Fonksiyon Tanımına Yönelik İfadeleri

Kategori	Kod	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Kavramsal anlama	Tanım kümesinde her elemanın bir karşılığının olması ve bir ve yalnız bir elemana gitmesi	Aziz Ahu Aysun Adem	*Ahu: Yani tanım kümesinin her elemanının değer kümesinde karşılığı olacak. Tanım kümesinde boşta eleman kalmayacak. Bir de tanım kümesindeki bir tek elemanın görüntüsü tek olacak yani bir eleman iki yere gidemez.*
	Tanım kümesindeki her bir elemanın değer kümesinde sadece bir elemana gitmesi	Bilge	*Bilge: Tanım kümesinden alınan her eleman, değer kümesinden sadece bir elemana gidecek. Birincisi, her elemana karşı gelecek bir eleman vardır diyor. A tanım kümesinden alınan her eleman B de bir elemana gider. B de karşıtı olan bir eleman olmalıdır diyor tanım.*
	Tanım kümesindeki herhangi bir elemanın değer kümesindeki bir ve yalnız bir eleman ile eşleşmesi	Barış	*Barış: Mesela fonksiyon olması için tanım kümesindeki herhangi bir eleman değer kümesindeki bir ve yalnız bir eleman ile eşleşiyorsa fonksiyon oluyor.*
Hatalı anlama	Tanım kümesinden alınan bir elemanın değer kümesinde bir değerinin olması	Buse	*Buse: Mesela x ve y gibi iki tane elemanımız olsun. Bu aldığımız elemanlar, tanım kümesinden aldığımız bir eleman değer kümesinden bir elemana karşılık geliyorsa fonksiyon oluşturur.*
Kavram karmaşası	Bağıntının birebir ve örten olması	Belma	*Belma: Elimizde iki küme var. A dan seçtiğimiz elemanı B de tanımlıyoruz… Fonksiyonu tanımlayabilmemiz için bağıntıyı bilmemiz gerek. Bağıntıyı bildiğimizi kabul ederek, AxB kümesinde tanımlı olan bağıntı birebir ve örten ise bağıntı, fonksiyondur.*

Tablo 4.11 incelendiğinde, öğretmen adaylarının çoğunun (Belma ve Buse hariç) yaptıkları tanımlarda bir bağıntının fonksiyon olma şartlarından ilki olan, tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde karşılığının bulunması ve ikincisi olan, tanım kümesindeki her elemanın görüntüsünün tek olması özelliklerini barındırdığı tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının fonksiyon tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin yeterli düzeyde olduğu söylenebilir. Buse ise bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için tanım kümesinden alınan bir elemanın görüntü kümesinde bir

karşılığının bulunmasının yeterli olduğunu ifade etmiştir. Buse'nin tanımında söz konusu durumun tanım kümesinde bulunan tüm elemanlar için gerekli olduğu ve görüntülerinin tek olması ifade edilmemiştir. Bu bakımdan Buse'nin yapmış olduğu tanımda hataların olduğu söylenebilir. Buna göre Buse'nin söz konusu tanıma yönelik kavramsal bilgilerinde eksikliklerin olduğunu ve hatalı anlamalarının mevcut olduğunu söylemek mümkündür. Son olarak Belma, bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için, bağıntının birebir ve örten olması gerektiğini ifade etmiştir. Belma bu düşüncesini savunmuştur. Belma, fonksiyon tanımında yer alan *"*$\forall a \in A$ için öyle bir $b \in B$ vardır ki $(a, b) \in f$'dir" şartının birebirliğe işaret ettiğini, "$(a, b_1) \in f$ ve $(a, b_2) \in f$ ise $b_1 = b_2$'dir" şartının da örtenliğe işaret ettiğini iddia etmiştir. Buna göre Belma'nın fonksiyon tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal bilgi düzeyinde olmadığı söylenebilir. Ayrıca Belma'nın bağıntı kavramına yönelik bilgilerinde de eksikliklerin olduğu belirlenmiştir. Çünkü birebirlik ve örtenlik bağıntılara değil fonksiyonlara has bir özelliktir. Bu nedenle Belma'nın bağıntı, fonksiyon, birebir fonksiyon ve örten fonksiyon kavramlarını birbiri ile karıştırdığı söylenebilir.

Öğretmen adaylarının fonksiyon tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin sorgulanmasının ardından birebir ve örten fonksiyon tanımlarına yönelik kavramsal bilgileri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarından kendilerine formel bir şekilde verilen tanımları anladıkları şekilde, kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımına yönelik ifadelerinin dört kod ve üç kategori altında toplandığı, örten fonksiyon tanımına yönelik ifadelerinin ise tek kod ve kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.12'de kod ve kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.12.

Öğretmen Adaylarının Birebir ve Örten Fonksiyon Tanımlarına Yönelik İfadeleri

Kategori	**Kod**	**Öğretmen adayları**	***Örnek ifadeler***
Kavramsal anlama	Görüntüleri eşit iken elemanlar eşit ya da elemanlar farklı iken görüntüleri farklı	Ahu Aysun Adem Aziz	*Aysun: Bir fonksiyonun görüntüleri birbirine eşit ise değerleri de eşittir. Aynı şekilde değerleri farklı ise görüntüleri de farklıdır.*
Hatalı anlama	Elemanlar eşit iken görüntüler de eşit ya da elemanlar farklı iken görüntüler de farklı	Barış Belma	*Barış: Birebir fonksiyonda aldığımız herhangi iki eleman eşit oluyorsa ve bunları görüntü kümesine yazdığımızda sonuç da eşit oluyorsa birebiridir. Ve iki tane farklı eleman aldığımızda görüntü kümesine yazdığımız zaman sonuçlarda birbirinden farklı oluyorsa birebir olur.*
Kavram karmaşası	Tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde bir ve yalnız bir eleman ile eşleşir.	Buse	*Buse: Tanım kümesindeki her eleman değer kümesindeki bir ve yalnız bir eleman ile eşleşiyorsa birebirdir.*
	Tanım kümesindeki bir eleman değer kümesindeki sadece bir eleman ile eşleşir.	Bilge	*Bilge: Bir fonksiyonun birebir olması, kendi cümlelerim ile ifade edeyim. Tanım kümesindeki bir eleman değer kümesindeki bir eleman ile eşleneceği ve ikinci bir elemana gitmeyeceğini anlıyorum.* $x_1 = x_2$ *iken* $f(x_1) = f(x_2)$ *yani.*
Kavramsal anlama (Örten fonksiyon)	Fonksiyonun değer kümesinde açıkta eleman kalmayacak	Tüm öğretmen adayları	*Adem: B değer kümesinden her elemanı seçtiğimiz zaman, B nin her b elemanı için, görüntüsü b ye eşit olan bir eleman vardır. Yani değer kümesinde açıkta eleman kalmayacak.*

Tablo 4.12 incelendiğinde Ahu, Aysun ve Adem'in birebir fonksiyon tanımlarının "Bir fonksiyonun görüntüleri birbirine eşit iken tanım kümesindeki elemanlar da eşittir ya da fonksiyonun tanım kümesindeki elemanlar farklı iken görüntüleri de farklıdır." şeklinde olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının yaptıkları bu tanımlamanın birebir fonksiyon kavramının mantığı ile örtüştüğü belirlenmiştir. Buna göre bu öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımını içselleştirdikleri söylenebilir. Bu bakımdan, öğretmen adaylarının birebir fonksiyon

tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin yeterli düzeyde olduğu ve kavramsal anlamaya sahip oldukları ortaya çıkmıştır.

Barış ve Belma'nın birebir fonksiyon tanımına yönelik ifadeleri incelendiğinde, tanımda bulunan bileşik önermeleri anlama konusunda sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Bu öğretmen adayları tanımda bulunan önermenin hipotezi ve hükmünü birbiri yerine kullanmışlardır. Barış ve Belma, fonksiyonun tanım kümesindeki elemanlar eşit iken görüntüleri de eşit ise fonksiyonun birebir olacağını ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının ifadeleri birebir fonksiyon tanımında yer alan *"*$f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$" ya da bu önermenin karşıt tersi olup, dengi olan *"*$x_1 \neq x_2$ ise $f(x_1) \neq f(x_2)$*"* önermelerinin ifade ettiği matematiksel gerçeklerle uyuşmamaktadır. Bu öğretmen adayları, önermelerdeki bu sıranın önemli olmadığını ifade ederek düşüncelerini savunmuşlardır. Bu bağlamda Barış ve Belma'nın birebir fonksiyon tanımına yönelik kavram yanılgılarının olduğu söylenebilir. Barış ve Belma'nın birebir fonksiyon tanımına yönelik hatalı anlamaya sahip oldukları tespit edilmiştir.

Buse bir fonksiyonun birebir olması için tanım kümesindeki her elemanın değer kümesindeki bir ve yalnız bir eleman ile eşleşmesi gerektiğini vurgulamıştır. Buse'nin ifadelerinden, birebir fonksiyon tanımı ile fonksiyon tanımını birbiri ile karıştırdığı söylenebilir. Bilge de Buse ile benzer olarak bir fonksiyona birebir fonksiyon diyebilmek için tanım kümesindeki bir elemanın değer kümesindeki sadece bir eleman ile eşleşebileceğini ifade etmiştir. Buna göre Bilge ve Buse'nin kavramları birbiri ile karıştırdığı ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının örten fonksiyon tanımından ne anladıklarına yönelik ifadeleri incelendiğinde, öğretmen adaylarının tümünün bir fonksiyonun örten olabilmesi için değer kümesinde açıkta eleman kalmayacağını yani değer kümesindeki her elamanın tanım kümesindeki en az bir eleman ile eşleşeceğini ifade ettikleri belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının örten fonksiyon tanımına yönelik kavramsal bilgilerinde bir eksikliğin olmadığı söylenebilir.

Öğretmen adaylarının fonksiyon, birebir ve örten fonksiyon tanımlarına yönelik kavramsal bilgilerinin sorgulanmasının ardından argümantasyon ve ispat süreçlerine yönelik etkinliklere geçilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarına mülakatta kullanılan diğer tanımlar formel bir şekilde, yazılı olarak sunulmuştur. Öğretmen adaylarına gerek duydukları takdirde tanımları kullanılabilecekleri belirtilmiştir. Ayrıca, etkinliklerde tanım ve değer kümesi belirtilmeyen fonksiyonlar için fonksiyon tanımında belirtilen tanım ve değer kümelerini dikkate almaları gerektiği ifade edilmiştir. Mülakat formunda yer alan etkinlikler hakkında bilgi verilmesinin ardından etkinliklere geçilmiştir.

4.2.1. Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki argümantasyon süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının argümantasyon süreçlerini ortaya çıkarmak amacıyla kendilerine yöneltilen bir önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına nasıl ikna oldukları ve doğru olduğunu bildikleri bir matematiksel iddiayı nasıl savundukları araştırılmıştır.

Öğretmen adaylarının matematiksel bir önermenin doğruluğu hakkında şüpheye düştüklerinde kendilerini nasıl ikna ettiklerini ortaya çıkarmak için biri doğru, diğeri yanlış iki önerme sunulmuştur. Öğretmen adaylarından bu önermeleri doğru ya da yanlış olarak belirtmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarına ilk olarak *"Bir fonksiyonun tersi de bir fonksiyon ise, o zaman fonksiyon birebir ve örten bir fonksiyondur."* önermesinin doğru olup olmadığını belirtmeleri istenmiştir. Önermenin doğru olup olmamasına yönelik farklı argümanlar üretilmiştir. Öğretmen adaylarının önermeye ikna olmak için kullandıkları stratejiler incelenmiştir. Öğretmen adaylarının kullandıkları stratejilerin dört kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.13'te öğretmen adaylarının doğru önermeye ikna olmak için kullandıkları stratejiler ve verdikleri kararlar sunulmuştur.

Tablo 4.13.

Öğretmen Adaylarının Doğru Önermeye İkna Olmak İçin Kullandıkları Stratejiler

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Kavramlar üzerinden muhakeme	✓		✓			✓		
Geçmiş bilgi				✓	✓			✓
Örnek kullanma							✓	
İspat yapma		✓						
Verilen karar	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

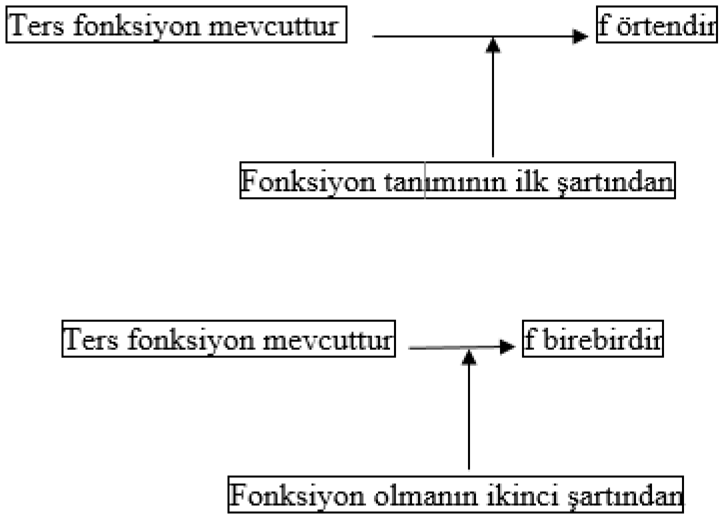
Tablo 4.13’e göre, öğretmen adaylarının tümünün doğru olan matematiksel önermeyi belirleyebildikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adayları kararlarını verirken çoğunlukla kavramlar üzerinden muhakeme ederek (Ahu, Aziz, Bilge) doğru önermeyi seçmiş ya da geçmiş bilgilerinden hareket ederek (Aysun, Barış, Belma) önermenin doğru olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bir öğretmen adayı (Buse) özel bir örnek üzerinden muhakeme ederek doğru karar vermiştir. Öğretmen adaylarından biri de (Adem) önermenin doğru olduğuna ikna olmak için ispat yapmasının gerekli olduğunu ifade etmiştir.

Ahu, Aziz ve Bilge ifadenin doğruluğuna karar verirken fonksiyon, birebir fonksiyon, örten fonksiyon ve ters fonksiyon kavramlarını düşünüp kavramları birbiri ile ilişkilendirerek doğru sonucu ulaşmışlardır. Bu öğretmen adayları önermeye ikna olmak için ürettikleri argümanlarda doğru tanım ve kavramları kullanmışlardır. Bu bakımdan öğretmen adaylarının dönüşümsel argümanlar (üretilen argümanlarda doğru tanım, teorem ve aksiyomların kullanılması, kavramların birbiri ile ilişkilendirilmesi) ürettikleri söylenebilir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Ahu’nun ifadelerine yer verilmiştir.

Ahu: Mesela tersi varsa ne yapıyoruz biz? Fonksiyonun görüntü kümesini tanım kümesine götürüyoruz. Fonksiyon tanımı neydi? Fonksiyon tanımı bize diyordu ki, tanım kümesinde boşta eleman kalmasın ve tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde sadece bir elemana gitsin. O zaman işte bu tanıma bakarsak, madem bu fonksiyonun tersi var. Şimdi ters fonksiyon için değer kümesi ile tanım kümesinin yerlerini değiştirdik. Değer kümesinde boşta eleman kalmayacak, çünkü fonksiyon tanımı bize böyle diyor. Fonksiyon örten olduğu için değer kümesinde boşta eleman kalmayacak çünkü fonksiyon tanımı bize böyle diyor. Aynı zamanda yine fonksiyon tanımından değer kümesindeki her eleman tanım kümesindeki sadece bir eleman ile eşleşecek. Bu da bizi birebirliğe götürüyor.

Ahu önce fonksiyon tanımını ve ters fonksiyon tanımını göz önüne almıştır. Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için ilk şart olarak, tanım kümesinde boşta eleman kalmamasını yani tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir eleman ile eşleşmesi gerektiğini ifade etmiştir. İkinci şart olarak da tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinden sadece bir eleman ile eşleşmesi gerektiğini dile getirmiştir.

Bir fonksiyonun tersinde, tersi alınan fonksiyonun tanım kümesi ile değer kümelerinin yer değiştireceğini belirtmiştir. Fonksiyon tanımından, ters fonksiyonun tanım kümesinde değer kümesi ile eşlenmeyecek bir eleman bulunmadığını ifade etmiştir. Dolayısıyla fonksiyonun değer kümesinde eşlenmeyen eleman kalmayacağını belirtmiştir. Bu durumun fonksiyonun örten olduğunu ifade ettiğini belirtmiştir. Ters fonksiyonu göz önüne alarak, fonksiyon olmanın ikinci şartından, ters fonksiyonun tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde sadece bir eleman ile eşleşeceğini ifade etmiştir. Bu durumun da fonksiyonun birebir olduğunu gösterdiğini dile getirmiştir. Aşağıda Ahu'nun ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizleri sunulmuştur.



Şekil 4.1. Ahu'nun ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

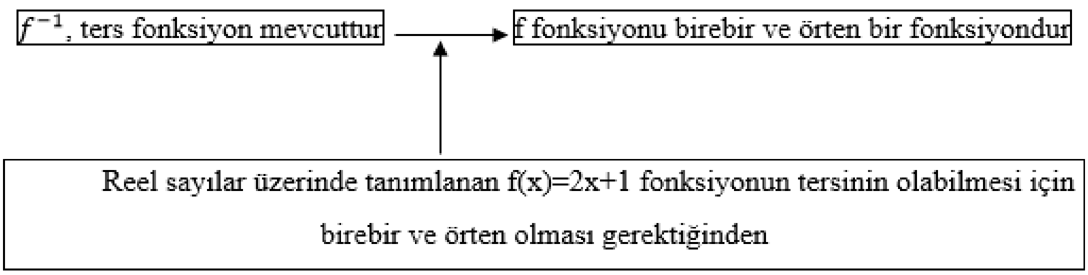
Aysun, Barış ve Belma önermenin doğruluğuna ikna olmak için düşünce sürecine girmemişlerdir. Bu önermenin doğru olduğunu daha önce bildiklerinden dolayı doğru olduğuna karar verdiklerini belirtmişlerdir. Buna göre, öğretmen adaylarının önermenin doğru olduğuna ikna olurken otoriter bir yaklaşım içinde oldukları söylenebilir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın görüşlerine yer verilmiştir.

Barış: Tanıdık geldi. Bir de ters fonksiyonun tanımında ters fonksiyonun olması için birebir ve örten fonksiyon olması gerekir denmişti. Onu biliyordum.

Buse ise, önermenin doğruluğuna ikna olmak için özel bir örnek kullanmıştır. Buse önermenin doğruluğu için bir örneği düşünerek genelleme yapmıştır. Buse'nin tümevarımsal gerekçe kullandığı söylenebilir. Aşağıda Buse'nin ifadelerine yer verilmiştir.

Buse: Mesela bir fonksiyon aldık. Mesela bir kümeden bir x elemanını aldık. Mesela diyelim ki f(x)=2x+1 fonksiyonunu alalım [f fonksiyonunu venn şeması ile çizdi]. Bu fonksiyonun burada görüntüsü oluştu. Görüntüsünün oluştuktan sonra aynı elemana dönmesi gerekir ki tersi olsun yani. Bu fonksiyonun tersinin olabilmesi için kesinlikle birebir olmalı ki başka bir elemana gitmesin. Bir de bu fonksiyon örten olmalı ki burada aldığımız elemanlar açıkta kalmasın.

Buse önermenin doğruluğuna ikna olmak için ürettiği argümanda reel sayılar üzerinde $f(x) = 2x + 1$ kuralı ile tanımlı f fonksiyonunu birebir ve örten bir fonksiyon olarak dikkate almıştır. f fonksiyonunu venn şeması ile göstermiştir. Buse fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini düşünerek, fonksiyonun tersi varsa kesinlikle birebir örten olması gerektiğini vurgulamış, f fonksiyonu üzerinden genellemeye gitmiştir. Aşağıda Buse'nin ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.2. Buse'nin ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Adem bir ifadenin doğru olduğuna ikna olabilmek için onun ispatlanması gerektiğini savunmuştur. Bu ifadenin doğru olup olmadığına karar verebilmek için ispatlamaya çalışacağını, ispatlayabilirse doğruluğuna ikna olacağını belirtmiştir. İspatını tamamlayan öğretmen adayı, önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Aşağıda Adem'in konu ile ilgili ifadelerine yer verilmiştir.

Adem: Doğruluğunu göstermeye çalışacağım tam olarak bilemiyorum.

Öğretmen adaylarının doğruluğunu değerlendirmeleri için ikinci önerme olarak *"Herhangi çarpılabilir olan birebir iki fonksiyonun çarpımı olan yeni fonksiyon da birebirdir."* yanlış önermesi sunulmuştur. Önermenin doğruluğu hakkında bir karara varmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının önermeye ikna olurken kullandıkları stratejiler incelenmiştir. Önermeye ikna olmak için kullanılan stratejilerin dört kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.14’te öğretmen adaylarının kullandıkları stratejiler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.14.

Öğretmen Adaylarının Yanlış Önermeye İkna Olmak İçin Kullandıkları Stratejiler

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Ters örnek arama	✓		✓		✓	✓		
Örnek kullanma				✓			✓	
İspat yapma		✓						
İspatı düşünme								✓
Verilen karar	Yanlış	Doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış	Yanlış	Doğru	Doğru

Tablo 4.14 incelendiğinde öğretmen adaylarının yarısının (Adem, Aysun, Buse, Belma) önermenin yanlış olduğunu tespit edemedikleri belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda yanlış önermeyi belirleyebilme becerilerinin, doğru önermeyi belirleyebilme becerilerinden oldukça düşük olduğu ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının yarısı (Ahu, Aziz, Barış, Bilge) önermenin doğruluğu hakkında bir karara varabilmek için önermeyi yanlışlayan ters örnek bulmaya çalışmışlardır. İki öğretmen adayı (Adem, Belma) önermenin ispatını yaparak ya da yapabileceklerini düşünerek karar vermişlerdir. İki öğretmen adayı ise (Aysun, Buse) önermenin doğruluğuna ikna olmak için önermeyi doğrulayan örnekler kullanmışlardır.

Öğretmen adaylarından Ahu, Aziz, Barış ve Bilge yanlış olan matematiksel önermeyi tespit etmede başarılı olmuşlardır. Bu öğretmen adaylarının önermenin doğruluğunu tayin edebilmek için kullandıkları stratejiler incelendiğinde, öğretmen adaylarının ters örnek bulmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Bu öğretmen adayları bir önermenin yanlışlığı için tek bir ters örneğin yeterli olduğunu ifade ederek önermeyi çürüten bir örnek bulmuşlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aziz ile araştırmacı arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.

Araştırmacı: Ne düşünüyorsun?

Aziz: [Önermeyi tekrar okuyor] Düz mantıkla baktığım zaman birebir gibi gözüküyor ama… Şimdi f ve g'yi çarptığım zaman birebirliği bozar mı? Bozabilir sanki. Hocam bunu nasıl ispatlayacağım şimdi☺ hadi yanlış dedim, yanlışlığını nasıl göstereceğim?

Araştırmacı: Bilmiyorum, nasıl göstermek istiyorsan gösterebilirsin.

Aziz: Aksine bir örnek gösterebilirim de… Zor bir şey gerçekten. O zaman bir örnek düşüneyim kafamdan.

Aziz: 2x+3 ile 2x+1 olsun. Şimdi bunların tanım kümelerini verelim. R den R ye olsun. Şimdi sıkıntı yok. Birebir. Şimdi ikisini çarpsam birebir midir?

Araştırmacı: İki fonksiyonu çarptığında sonuç ne çıktı?

Aziz: $4x^2 \ldots$ *çıktı. Parabol çıktı. Parabol birebir değildir.*

Araştırmacı: Parabol birebir değil midir?

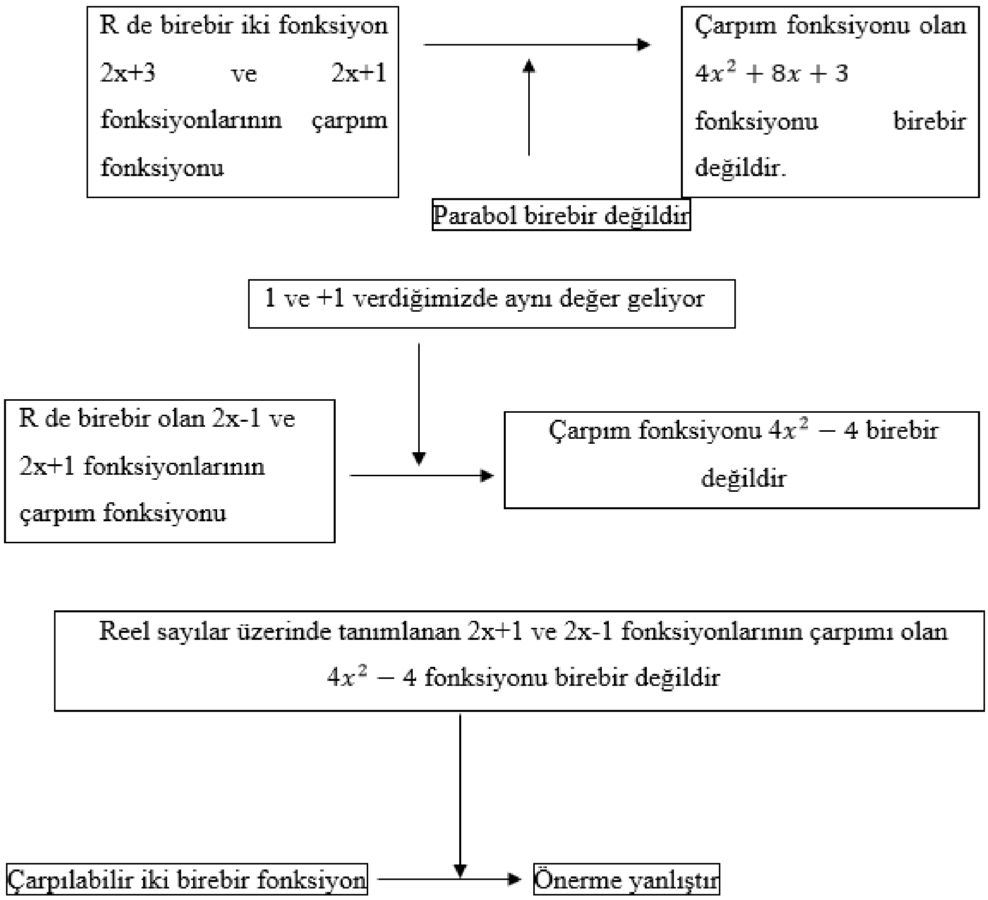
Aziz: $y = x^2$ *bir paraboldür ve baktığımız zaman birebir değildir. Burada* x^2 *değil ama…*

Aziz: Burada seçtiğim fonksiyon birebir oldu. Tabii ki bu doğru olduğu için yeterli değil de. Aksine bir örnek bulmaya çalıştım… 2x+3, 2x+5 bunların hepsi birebir fonksiyonlar. x+1, x+2 desek fark eden bir şey olmaz ya. $x^2 + 3x + 2$ *olur. İşte bu ortadaki değerin olmaması gerek. 2x-2 ile 2x+2 yi çarpsam ortadaki değer gidiyor.* $4x^2 - 4$ *olur. 2x-2 ve 2x+2 birebir iki fonksiyon ve* $4x^2 - 4$ *birebir bir fonksiyon değil.*

Araştırmacı: Neden birebir değil?

Aziz: -1 ile +1 verdiğimizde aynı değer geliyor. Kesinlikle artık yanlış, eminim şuan eminim!

Aziz önermeyi yanlışlamak için ters bir örnek aramıştır. İlk önce reel sayılar üzerinde birebir iki fonksiyon olan $2x + 3$ ve $2x + 1$ fonksiyonlarını göz önüne almıştır. Bu fonksiyonların çarpım fonksiyonu olan $4x^2 + 8x + 3$ fonksiyonunun parabol tipinde bir fonksiyon olduğu için birebir olmadığını belirtmiştir. Aziz bu argümanında gerekçe olarak parabollerin birebir olmadığı bilgisini kullanmıştır. Aziz ürettiği argümanda yanlış bilgiye dayanan bir gerekçe kullanmıştır. Reel sayılar üzerinde tanımlanan parabollerin birebir olmadığı doğrudur fakat Aziz'in bulduğu çarpım fonksiyonu parabol değil polinom tipli bir fonksiyondur. Aziz daha sonra hatasını anlamış, bu fonksiyonun parabol olmadığını ifade etmiştir. Ters bir örnek bulmasına rağmen elde ettiği çarpım fonksiyonunun birebir olduğundan emin değildir. Bu ifadeyi çürütmek için birebir olmadığından emin olduğu parabol tipli bir çarpım fonksiyonu elde etmeye çalışmıştır. En sonunda, $2x + 1$ ve $2x - 1$ fonksiyonlarını göz önüne alarak $4x^2 - 4$ parabolünü elde etmiştir. Bu parabolün -1 ve +1 noktasında birebirliği bozduğu için birebir olmadığını belirtmiştir. Burada Aziz argümanında -1 ve +1 değerlerini birebirliği bozan bir çürüten bileşeni olarak sunmuştur. Sonuç olarak Aziz önermeyi çürüten bir ters örnek bulmuş ve önermenin yanlış olduğunu ifade etmiştir. Aşağıda Aziz'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.3. Aziz'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Aysun ve Buse önermenin doğruluğuna ikna olmak için ifadenin doğruluğunu tek bir örnek üzerinden denemişlerdir. Buldukları örnek önermeyi doğruladığı için önermenin doğru olduğuna ikna olmuşlardır Aşağıda Aysun ile araştırmacı arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.

Aysun: Birebir fonksiyon düşüneyim iki tane…

Araştırmacı: Hangi fonksiyonları düşündün?

Aysun: Sanırım x^2 birebir değildi. Çünkü farklı değer veriyorduk aynı çıkıyordu. $|x|$ olabilir mi? Görüntüleri aynı olduğundan değerleri de aynı olacak.

Araştırmacı: Hangi fonksiyonları seçtin?

Aysun: Seçtim bir tane $|x|$. Birebir değil mi?

Araştırmacı: Bilmiyorum.

Aysun: Birebir. Evet değer veriyoruz iki tane x_1 ve x_2. Bunlar pozitif çıkar $x_1 = x_2$. Değil mi?

Araştırmacı: Bilmiyorum.

Aysun: Neyse, bir tane daha seçeyim ben…

Araştırmacı: Şimdi sen ne yapmaya çalışıyorsun? Açıklar mısın?

Aysun: İki örnek alıp çarpacağım. Bakacağım sonuç ne çıkacak.

Aysun: $\sqrt{x}$ olur mu?

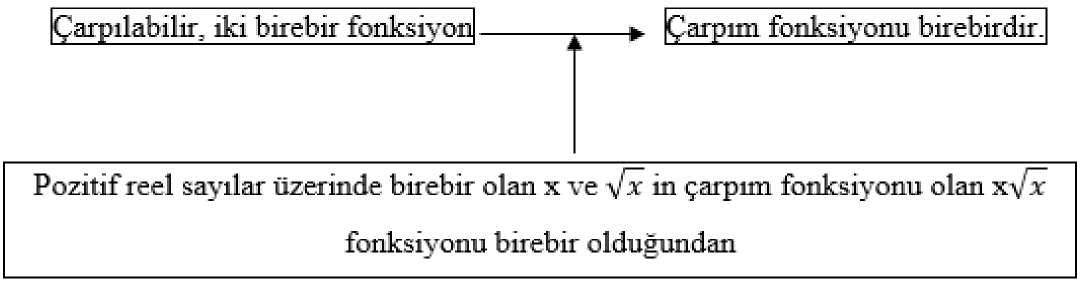
Araştırmacı: Bilmiyorum.

Aysun: Sanki eşit çıkıyor ya karelerini alınca $x_1 = x_2$. Tamam, bir tane x, bir tane $\sqrt{x}$. Bunlar tanımlı olduğu aralıkta birebir diye tahmin ettim (pozitif reel sayılarda). Neyse çaptık $x\sqrt{x}$ oldu değil mi hocam? Sonra bunları aynı şekilde birebirliği uyguladım… Evet, birebir çıktı sanki…

Araştırmacı: Ne karar verdin?

Aysun: Doğru.

Aysun önermenin doğruluğuna ikna olmak için örnek bularak denemeyi tercih etmiştir. x^2 ve $|x|$ fonksiyonlarını göz önüne almış fakat bu örnekleri kullanmamıştır. Daha sonra Aysun önermeyi doğrulamak için x ve $\sqrt{x}$ fonksiyonlarının birebir olduğunu belirterek çarpım fonksiyonu olan $x\sqrt{x}$ fonksiyonunun birebirliğini incelemiştir. Mülakat sonunda Aysun'a bu fonksiyonların tanım kümesinin ne olduğu sorulduğunda, birebir olduğu aralıklar olan pozitif reel sayılar olduğunu ifade etmiştir. $x\sqrt{x}$ fonksiyonunun birebir olduğundan yola çıkarak önermenin doğru olduğunu ifade etmiştir. Aysun'un ürettiği argümanda bu örneği gerekçe olarak kullanmıştır. Ayrıca, Aysun mülakatlar sırasında araştırmacıdan çıkarımları konusunda onay beklemiştir. Araştırmacının sorularına cevap vermemesine rağmen tutumunu sürdürmüştür. Buna göre Aysun'un referans desteğine ihtiyaç duyduğu söylenebilir. Aşağıda Aysun'un önermenin doğru olduğuna ikna olmak için ürettiği argümanının Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



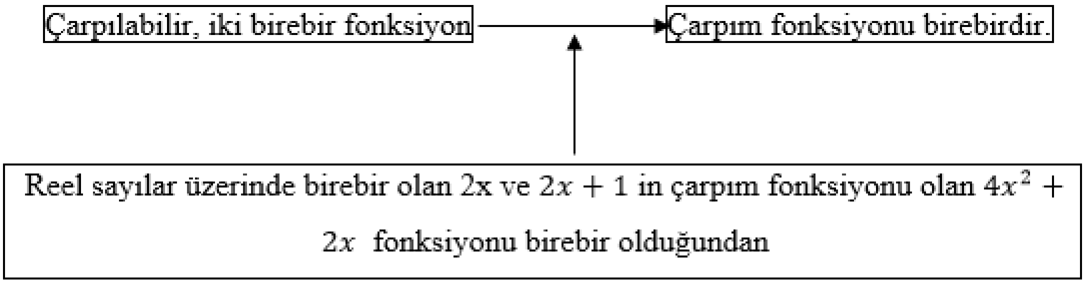
Şekil 4.4. Aysun'un ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Buse'nin durumu Aysun'dan farklıdır. Buse ifadenin doğruluğunu göstermesi açısından öne sürdüğü örnek aslında bir ters örnek olmasına rağmen önermeyi doğrulayan bir örnek olarak göz önüne almıştır. Buse reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan $2x$ ve $2x+1$ birebir fonksiyonlarını çarparak bulduğu çarpım fonksiyonu olan $4x^2+2x$ fonksiyonunun birebir olduğunu ifade etmiştir. Buse'nin belirttiği çarpım fonksiyonu reel sayılar kümesinde birebir bir fonksiyon değildir. Aşağıda Buse'nin ilgili ifadelerine yer verilmiştir.

Buse: Neyi düşündüm. İki tane fonksiyon aldım. Bu fonksiyonlar ayrı ayrı birebirdir. f fonksiyonu $2x$ olsun. g fonksiyonu $2x+1$ olsun dedim. Bu iki fonksiyonun çarpımı $f(x).g(x)$ olur. Bunların her ikisini ayrı ayrı çarptığımızda $2x.(2x+1)=$

$4x^2 + 2x$ *ayrı bir fonksiyon çıkıyor. Bu fonksiyon birebir olur. Yani* f *ve* g *birebir olduğu için yeni bir fonksiyon oluşur. O fonksiyon da birebir olur.*

Buse önermenin doğruluğuna ikna olmak için oluşturduğu argümanda bir örnek üzerinden önermenin doğru olduğuna ikna olmuş ve bu örnek üzerinden genelleme yapmıştır. Önermenin doğru olduğuna ikna olmada kullandığı örneği gerekçe olarak sunmuştur. Buse'nin bulduğu örnek, önermenin doğru olmadığına dair ters bir örnektir. Buse birebir fonksiyon kavramındaki eksiklikleri nedeniyle elde ettiği çarpım fonksiyonunun birebir olmadığını fark edememiştir. Buse mülakat sonunda birebir kabul ettiği fonksiyonların reel sayılar üzerinde tanımlı olduğunu belirtmiştir. Aşağıda Buse'nin ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.



Şekil 4.5. Buse'nin ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Adem bir önceki önermenin doğruluğunu belirlemede kullandığı stratejiyi bu önermede de değiştirmemiştir. Adem bir ifadenin doğru olduğuna ancak ispat yapıldığında ikna olduğunu ifade ederek ispat yapmaya başlamıştır. Matematiksel olarak geçersiz bir ispat yapmıştır. Yaptığı ispatın doğru olduğunu düşünerek önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Aşağıda Adem'in ifadelerine yer verilmiştir.

Araştırmacı: Neyi düşünüyorsun?

Adem: Bunu da göstermeye çalışacağım.

Araştırmacı: Bunu da ispatlamaya mı çalışacaksın?

Adem: Evet.

Araştırmacı: Şuan bir karar verdin mi yoksa ispat yaptıktan sonra mı karar vereceksin?

Adem: Evet, yaptıktan sonra karar vereceğim.

Son olarak Belma, önermenin ispatını düşünerek karar vermiştir. İspatı yapabileceğine karar vermiş ve önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Uygun bir ispat yapamamasına rağmen kararında bir değişiklik olmamıştır. Aşağıda Belma'nın görüşleri sunulmuştur.

Belma: Doğrudur. Hemen altına yapayım.

Araştırmacı: Nasıl düşündün?

Belma: İki ayrı birebir fonksiyon alırım. Daha sonra da çarpımlarının birebir olduğunu gösteririm diye düşündüm.

Öğretmen adaylarının argümantasyon sürecini ortaya çıkarmak amacıyla yapılan son etkinlik olarak, öğretmen adaylarından doğru olduğu bilinen bir matematiksel iddiayı savunmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarından $f: R^- \to R^+,\ \ f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun ters fonksiyonunun mevcut olduğunu göstermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının çözümlerinde ürettikleri argümanların gerekçeleri incelenmiştir. Kullanılan gerekçelerin altı kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.15'te kategoriler hakkında bilgiler ve öğretmen adaylarının argümanlarının ikna edicilik durumları sunulmuştur.

Tablo 4.15.

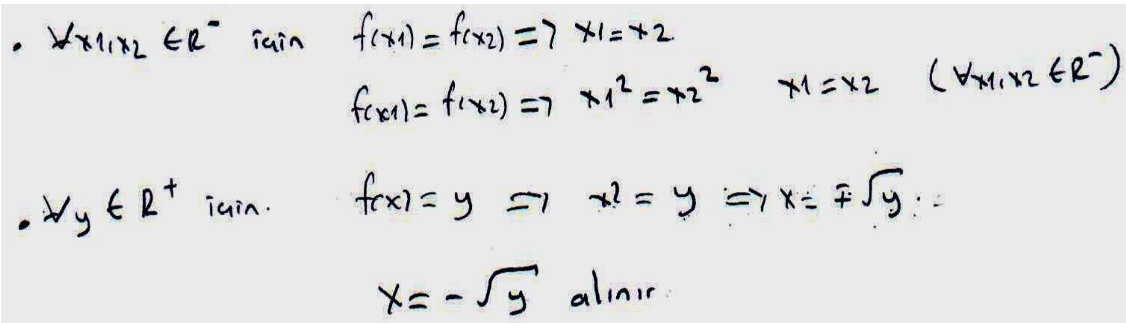
Öğretmen Adaylarının Ürettikleri Argümanlarda Kullandıkları Gerekçeler

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Dönüşümsel gerekçe		✓	✓					
Dönüşümsel-algısal gerekçe	✓					✓		
Referanssız gerekçe								✓
Dönüşümsel-tümevarımsal gerekçe					✓			
Tümevarımsal gerekçe							✓	
Dönüşümsel-referanssız gerekçe				✓				
İkna edicilik	Kısmen	Evet	Evet	Hayır	Hayır	Kısmen	Hayır	Hayır

Öğretmen adaylarının çözümleri incelendiğinde iki tanesinin ikna edici, iki tanesinin ise kısmen ikna edici olduğu tespit edilmiştir. Diğer öğretmen adaylarının çözümleri, ikna edici bulunmamıştır. Buna göre öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda doğru olduğunu bildikleri matematiksel iddiaları ikna edici bir şekilde savunma becerilerinin düşük olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının hepsi, fonksiyonun ters fonksiyonunun mevcut olduğunu göstermek için fonksiyonun birebir ve örten olduğunu göstermeye çalışmışlardır. Bu durumun önceki etkinlikte yer alan matematiksel önermenin etkisi altında kalarak gerçekleştiği düşünülmüştür. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu (Barış ve Buse hariç) fonksiyonun birebir ve örten olduğunu göstermek için birebir ve örten fonksiyon tanımlarını uygulamaya çalışmışlardır. Öğretmen adaylarının yarısı (Adem, Aziz, Buse, Belma) ürettikleri argümanlarını sadece tek tip gerekçe kullanırken diğer yarısı da karma gerekçeler kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının en çok kullandıkları gerekçe, dönüşümsel gerekçe olmuştur. Öğretmen adaylarının yarısından fazlası bu gerekçe tipini kullanmıştır. İkişer öğretmen adayı argümanlarında tümevarımsal, refaranssız ve algısal gerekçeler kullanmışlardır.

Aziz ve Adem *f* fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu tanımları başarılı bir şekilde uygulayarak göstermişlerdir. Aziz ve Adem argümalarında dönüşümsel gerekçeler kullanmışlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aziz'in çözümüne ve çözümünü yaparken araştırmacı ile arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.



Şekil 4.6. Aziz'in çözümü

Aziz: O zaman birebir ve örten olduğunu göstermeliyiz. Öyle mi?

Araştırmacı: Bilmem. Nasıl göstermek istiyorsan öyle gösterebilirsin.

Aziz: Tamam tersinin olması için birebir ve örten olması lazım.

Araştırmacı: Tersi derken ne demek istiyorsun?

Aziz: Tersinden kastettiğim tersinin de bir fonksiyon olması. Onun için de birebir ve örten olması lazım. Onu gösterirsem göstermiş olacağım zaten. [Birebirlik için çözümünü yapıyor.] Bu da yine R^- de tanımlandığı için $x_1 = x_2$ olur. Buradan fonksiyonun birebir olduğu görülür.

Araştırmacı: Örtenlik için ne yapacaksın?

Aziz: Şimdi örtenlik için de… Hocam biraz kafam karıştı. Bildiğim şeyleri de unuttum. Tanımlara bakabilir miyim?

Araştırmacı: Tabi ki bakabilirsin.

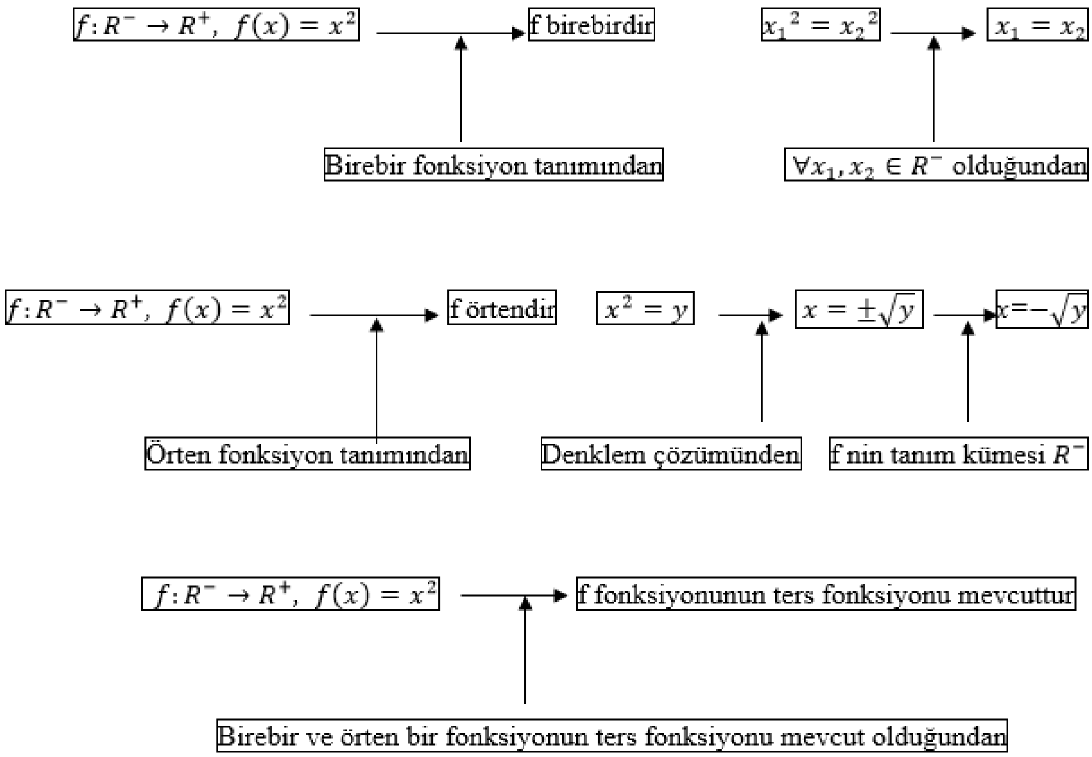
Aziz: [Örten fonksiyon tanımına bakıyor] şimdi neyi göstereceğiz? Örten olduğunu göstereceğiz. Şimdi örten olduğunu… Şimdi fonksiyonların örten olduğunu gösterirken hep sıkıntı yaşıyorum. Şimdi bunu nasıl göstereceğim? Değer kümesinden bir eleman alacağım, bu elemanı sağlayacak tanım kümesinde en az bir eleman olduğunu söyleyeceğim. Değer kümesinin her elemanı için… Her y için bir x var mıdır? … Gerçi bir dakika… İyi de buluruz ki sonuçta.

Araştırmacı: Nasıl bulursun?

Aziz: Mesela x^2 10 desek, $-\sqrt{10}$ un da karesi 10 olur. O zaman $x^2 = y$ ise $x = -\sqrt{y}$ veya $x = +\sqrt{y}$ olur. $-\sqrt{y}$ de R^- nin elemanı olduğundan örtendir.[Örtenlik için çözümünü yazıyor.] Bu da her $y \in R^+$ için en az bir $x \in R^-$ olduğunu gösterir, o zaman f örtendir.

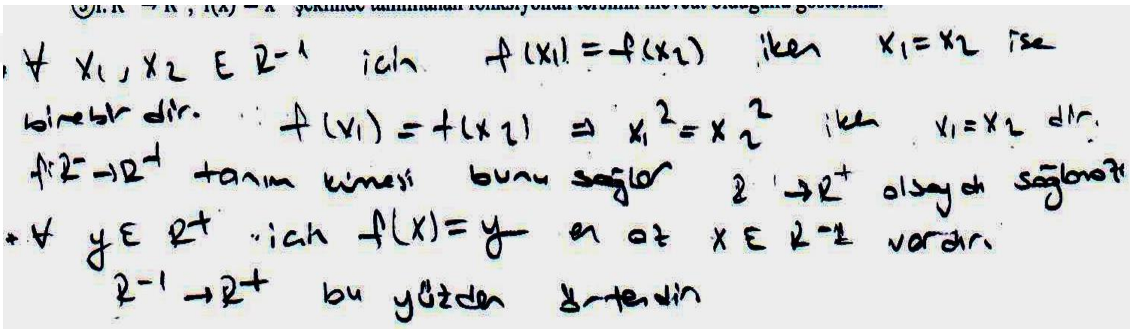
Aziz bir fonksiyonun tersinin mevcut olduğunu göstermek için öncelikle birebir ve örten olduğunu göstermesi gerektiğini ifade etmiştir. Bu bakımdan Aziz'in bir fonksiyonun ters fonksiyonunun mevcut olması için birebir ve örten olmalıdır teoremini ana argümanına gerekçe olarak kullandığı belirlenmiştir. Aziz f fonksiyonun birebir olduğunu göstermek için birebir fonksiyon tanımını uygulamıştır. Birebir fonksiyon tanımı yardımıyla fonksiyonun birebir olduğunu göstermiştir. Aziz fonksiyonunun birebir olduğunu gösterirken alt argüman oluşturmuştur. Bu argümanda Aziz, fonksiyonun tanım kümesinin negatif reel sayılar olduğu için ${x_1}^2 = {x_2}^2$ ifadesinden

$x_1 = x_2$ ifadesine ulaştığını belirtmiştir. f fonksiyonun örten olduğunu göstermek için örten fonksiyon tanımını kullanmıştır. f fonksiyonunun örten fonksiyon tanımını sağladığı için örten olduğunu ifade etmiştir. Aziz örten fonksiyon tanımını ifade ederken alt argümanlar oluşturmuştur. Bu argümanların ilki $x^2 = y$'den x'in $+\sqrt{y}$ *veya* $-\sqrt{y}$ olması gerektiğini denklemi çözerek ulaşmıştır. Bu sonuca ulaşmak için ürettiği oluşturmacı argümanında $x^2 = 10$ örneğini göz önüne alsa da yapılandırılmış argümanında bu örneği gerekçe olarak kullanmadığı görülmüştür. Buradan da f fonksiyonun tanım kümesinin negatif reel sayılar olduğunu düşünerek x'in sadece $-\sqrt{y}$ olması gerektiği sonucuna ulaşmıştır. Aziz ürettiği argümanlarda tanım, teorem ve matematiksel işlemlerden çıkan sonuçları gerekçe olarak kullandığı için dönüşümsel gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Aşağıda Aziz'in problemin çözümü için ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi yer almıştır.



Şekil 4.7. Aziz'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Ahu ve Bilge ise f fonksiyonunun birebir olduğunu, birebir fonksiyon tanımından başarılı bir şekilde göstermelerine karşın f fonksiyonun örten olduğunu, bu fonksiyon özelinde, tanımı kullanarak ikna edici bir şekilde gösterememişlerdir. Bu gösterimlerin tanımın tekrar yazılması şeklinde olduğu görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının fonksiyonun örten olduğunu savunmak için ürettikleri argümanların mantıksal olarak yetersiz bir gösterim olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının fonksiyonun birebir olduğunu gösterirken birebir fonksiyon tanımını başarılı bir şekilde uyguladıkları için dönüşümsel gerekçe kullandıkları, fonksiyonun örten olduğunu yeterli zihinsel gösterimler kullanarak gösteremedikleri için algısal gerekçe kullandıkları belirlenmiştir. Bu yüzden çözümler kısmen ikna edici bulunmuştur. Ahu ve Bilge'nin hem dönüşümsel hem de algısal gerekçe tipinde oldukları tespit edilmiştir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Bilge'nin çözümü sunulmuştur.



$\forall x_1, x_2 \in R^{-1}$ için $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ ise birebirdir. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$ iken $x_1 = x_2$ dir.

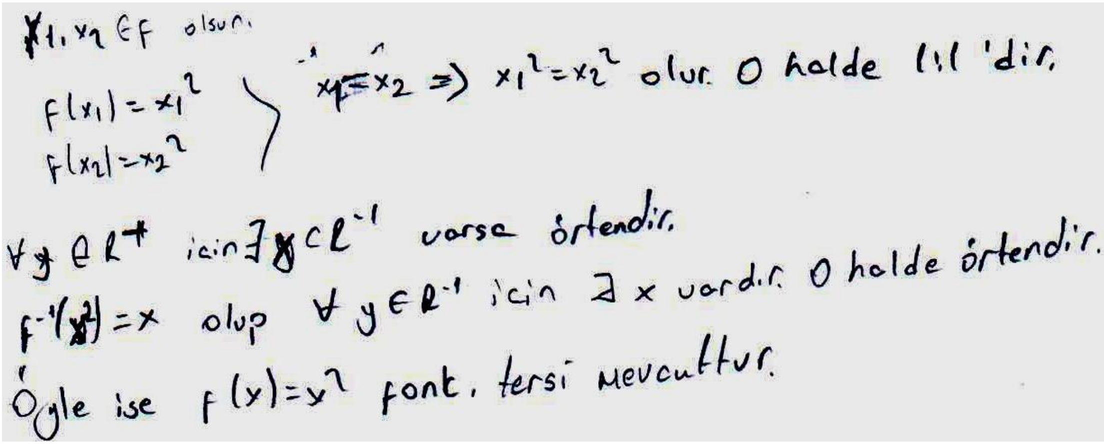
$f: R^- \to R^+$ tanım kümesi bunu sağlar $R \to R^+$ olsaydı sağlamazdı

$\forall y \in R^+$ için $f(x) = y$ en az $x \in R^-$ vardır.

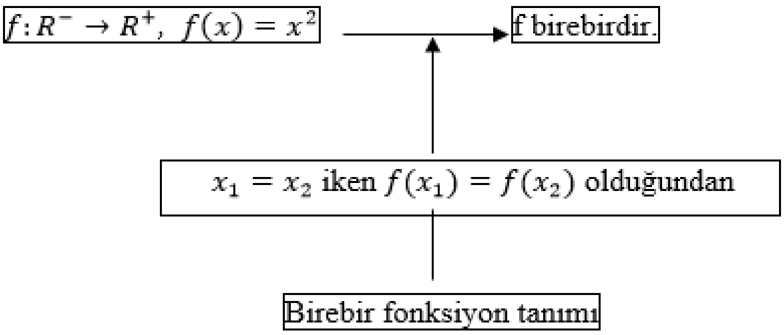
$R^- \to R^+$ bu yüzden örtendir

Şekil 4.8. Bilge'nin çözümü

Belma ise birebir fonksiyon tanımını hatalı bir şekilde kullanmış ve uygun bir gösterim yapamamıştır. Fonksiyonun örten olduğunun gösterimi de tanımın tekrar edilmesi şeklinde olmuştur. Bu durumun kaynağının Belma'nın birebir fonksiyon tanımına yönelik kavram yanılgısından kaynaklandığı belirlenmiştir. Belma birebir fonksiyon tanımını "$x_1 = x_2$ iken $f(x_1) = f(x_2)$" olarak uygulamıştır. Belma'nın fonksiyonun örten olduğunu savunmak için ürettiği argümanda da birçok matematiksel çelişkiler mevcuttur. Belma'nın özellikle, matematiksel notasyonları doğru bir şekilde kullanmada güçlük yaşadığı ortaya çıkmıştır. Belma ürettiği her iki argümanda da matematiksel olarak doğru olmayan bilgi ve ifadeler kullandığı için referanssız gerekçe tipinde olduğu tespit edilmiştir. Aşağıda Belma'nın çözümü ve fonksiyonun birebir olduğunu göstermek için ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.

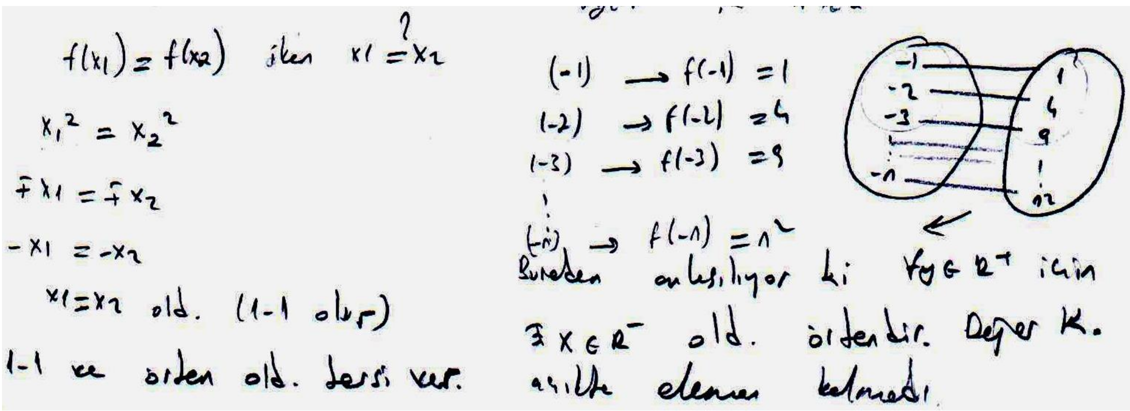


Şekil 4.9. Belma'nın çözümü



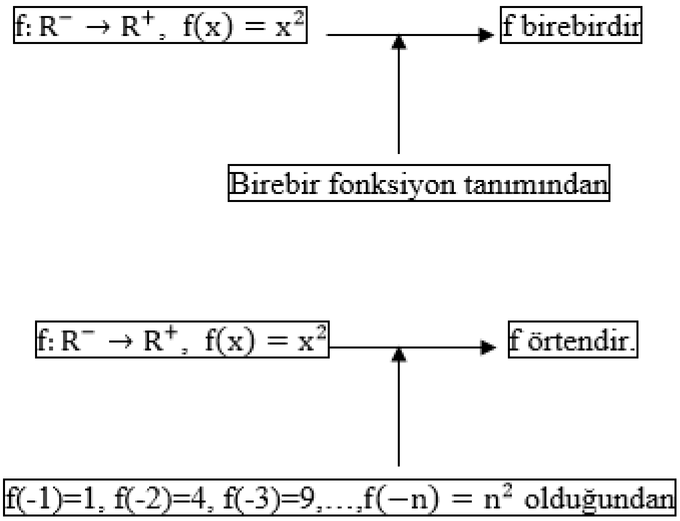
Şekil 4.10. Belma'nın ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Barış, çözümünde *f* fonksiyonunun birebir olduğunu göstermek için birebir fonksiyon tanımını doğru bir şekilde kullanmıştır. *f* fonksiyonunun örten olduğunu göstermek için tanım kümesindeki elemanların bir bölümünü denemiştir. Aşağıda Barış'ın çözümüne yer verilmiştir.



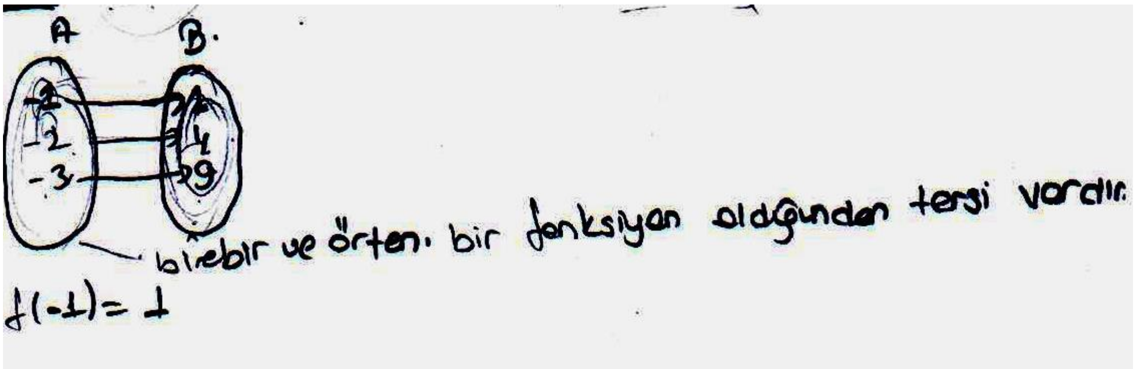
Şekil 4.11. Barış'ın çözümü

Barış, iddiasını savunurken farklı tipte argümanlar oluşturmuştur. Fonksiyonun birebir olduğunu, birebir fonksiyon tanımından göstermiştir. Barış, fonksiyonun birebir olduğunu göstermek için ürettiği argümanda birebir fonksiyon tanımını gerekçe olarak kullanmıştır. Fonksiyonun örten olduğunu göstermek için tanım kümesinden n tane negatif tamsayıyı denemiştir. Denemelerinin sonucu olarak fonksiyonun görüntü kümesindeki her eleman için tanım kümesinde en az bir eleman ile eşleşeceğini ifade etmiştir. Buna göre Barış'ın hem dönüşümsel hem de tümevarımsal gerekçe tipine ait özellikleri taşıdığı söylenebilir. Aşağıda Barış'ın ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.



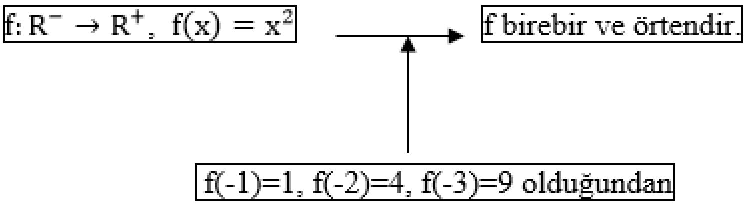
Şekil 4.12. Barış'ın ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Buse, *f* fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu tanım kümesinden aldığı üç sayıyı görüntü kümesinden üç eleman ile eşleştirerek doğru olduğunu gösterdiğini belirtmiştir. Buna göre Buse'nin fonksiyonlar konusunda iddialarını savunurken tamamen tümevarımsal gerekçe tipinde bir yapı sergilediği belirlenmiştir. Aşağıda Buse'nin çözümüne, ifadelerine ve ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.



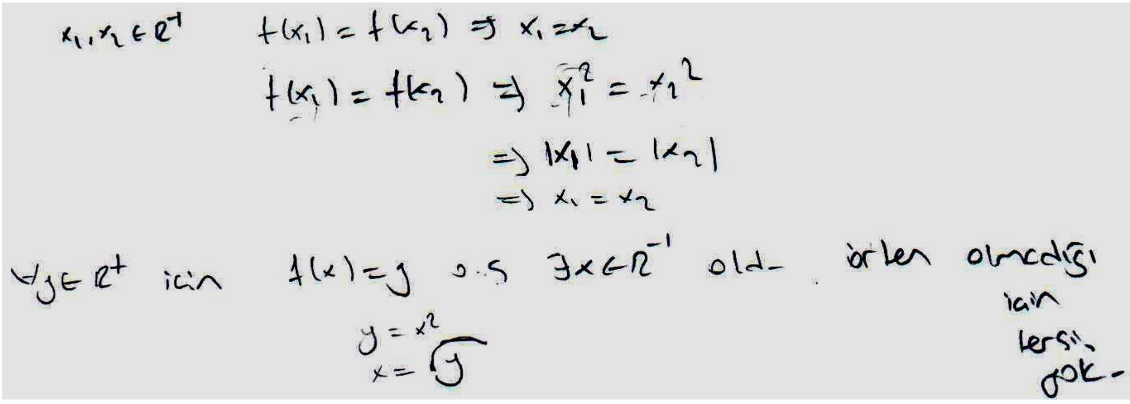
Şekil 4.13. Buse'nin çözümü

Buse: Şimdi A ve B gibi iki tane kümemiz var. [A ve B kümesini çiziyor] Bunun tanım kümesi negatif reel sayılardan oluşması gerekiyor. Değer kümesi de pozitif reel sayılardan oluşması gerekiyor. Mesela tanım kümesinde -1 aldım, f(-1)=1 olur. Yani pozitif reel sayıları sağlar. Her bir eleman için ayrı ayrı gider. -2 için 4'e gider, -3 için 9'a gider. Yani tanım kümesindeki her eleman görüntü kümesindeki bir eleman ile eşleşiyor ve açıkta eleman da kalmaz. Ve birebir ve örten oluyor.



Şekil 4.14. Buse'nin ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Aysun ise *f* fonksiyonunun örten olmadığı için tersinin olamayacağını ifade etmiştir. Aysun *f* fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu göstermek için birebir ve örten fonksiyon tanımını kullanmıştır. Fonksiyonun birebir olduğunu birebir fonksiyon tanımından başarılı bir şekilde göstermiştir. Fonksiyonun örten olduğunu göstermek için örten fonksiyon tanımını uygulamaya çalışmıştır. Aysun, denklem çözümünde hata yaptığı için fonksiyonun örten olmadığını iddia etmiştir. Buna göre Aysun'un hem dönüşümsel hem de referanssız gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Aysun'un çözümü aşağıda sunulmuştur.



$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow |x_1| = |x_2|$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\forall y \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) = y$ o.ş $\exists x \in \mathbb{R}^{-1}$ old. örten olmadığı için tersi yok.

$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$

Şekil 4.15. Aysun'un çözümü

4.2.2. Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki ispat süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki ispat süreçlerine yönelik bulgular sunulmuştur. Öğretmen adaylarının ispat süreçleri kapsamında, doğrudan ispat yöntemiyle yapılmış geçerli bir ispatı ve yanlış bir önerme için üretilen dedüktif argümanın doğruluğunu nasıl değerlendirdikleri incelenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat ve ters örnek üretme becerileri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Öğretmen adaylarına ilk olarak "$f: A \to B$ *ve* $g: B \to C$ *birer fonksiyon olsunlar. Eğer* f *ve* g *fonksiyonları birebir ise* gof *fonksiyonu da birebirdir.*" teoreminin doğrudan ispat yöntemiyle yapılmış geçerli ispatı sunulmuştur. Öğretmen adaylarından ispatı incelemeleri ve ispatın doğruluğu hakkında bir değerlendirmede bulunarak gerekçelerini yazmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken yazılı ve sözlü ifadeleri ortak olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejilerin üç kategori ve altı alt kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4.16'da öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejiler ve verdikleri kararlar sunulmuştur.

Tablo 4.16.

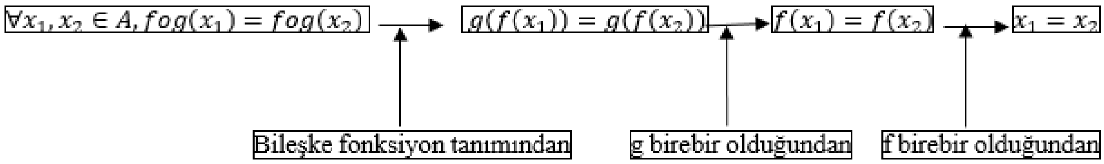
Öğretmen Adaylarının Fonksiyonlar Konusundaki İspatı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	İşlemsel hata	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Yapısal inceleme	Birebir fonksiyon tanımı	✓					✓	✓	✓
	Teoremin hipotezi kullanılıp hükmünün bulunması				✓	✓		✓	
	İspatın başlangıcı		✓				✓		
	Teoremin hipotezlerinin kullanılması		✓						✓
Otoriter inceleme	Öğrenilen ispatla uyum								✓
Verilen Karar		Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

Öğretmen adaylarının tümü teoremin doğru bir şekilde ispatlandığını belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarının çoğunun (Belma hariç) ispatın içeriğinde işlemsel bir hatanın olup olmadığını sorguladıkları tespit edilmiştir. Bu öğretmen adayları ispatın basamakları arasındaki geçişlerin gerekçelerine ve basamaklarda işlemsel bir hatanın olmamasına dikkat etmişlerdir. Öğretmen adaylarının yarısı (Ahu, Bilge, Buse, Belma) ispatta birebir fonksiyon tanımının kullanılıp kullanılmadığını incelemiştir. Öğretmen adaylarının üçü (Aysun, Barış, Buse) teoremin hipotezinin ispatta kullanılarak hükmün bulunmasını göz önüne almışlardır. İki öğretmen adayı (Adem, Belma) özellikle teoremin hipotezinin ispatta kullanılmasına dikkat etmişlerdir. İki öğretmen adayı da (Adem, Bilge) ispata nasıl başlandığına odaklanmışlardır. Belma ise ispatı değerlendirirken ispatın önceden öğrendiği ispatlarla uyumlu olup olmadığını düşünmüştür.

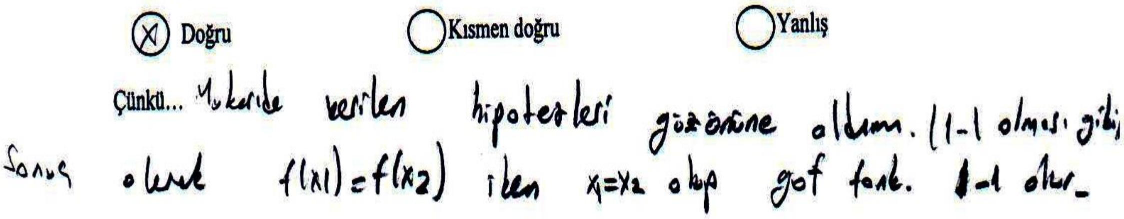
Öğretmen adaylarının tamamına yakını ispatı incelerken ispatın basamaklarında işlemsel bir hata olup olmamasına odaklanmışlardır. İspat basamakları arasındaki geçişleri anlamaya çalışmışlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Adem'in yaptığı argüman incelemesine ve bu incelemenin Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.

Adem: Hocam birebirliğin tanımını uyguluyoruz burada. Tanım kümesinden iki tane eleman aldık. Tanımı uygulamaya çalışmış. Her $x_1, x_2 \in A$ *için diye başladık.* $gof(x_1) = gof(x_2)$ *ise buradaki bileşke fonksiyon tanımını uygulamış.* $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ *oluyor. Burada g de bir eşitlik var. Bunu,* $f(x_1) = f(x_2)$ *olduğunu nereden söyleyeceğiz?... f ve g fonksiyonunu birebir demişti zaten. Onu unutmuşum. f ve g fonksiyonlarını birebir dediğimiz için. g fonksiyonu birebir olduğu için* $f(x_1) = f(x_2)$ *diyoruz. Aşağıda da aynı gitmiş.*



Şekil 4.16. Adem'in yaptığı incelemenin Toulmin modeline göre analizi

Öğretmen adaylarının yarısının ispatta birebir fonksiyon tanımının kullanılıp kullanılmamasına dikkat ettikleri belirlenmiştir. Aysun, Barış ve Buse ispatları incelerken teoremdeki hipotezlerin kullanılıp hükmünün bulanmasını önemsemişlerdir. Adem ve Bilge'nin ispatın başlangıcına dikkat ettikleri görülmüştür. Adem ve Belma ispatta, teoremin hipotezlerin kullanılmasını dikkate almışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının tamamına yakınının ispatları incelerken ispatı yapısal olarak inceledikleri söylenebilir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın sunduğu gerekçeye yer verilmiştir.


(X) Doğru ( ) Kısmen doğru ( ) Yanlış

Çünkü... Yukarıda verilen hipotezleri gözönüne aldım. (1-1 olması gibi)
Sonuç olarak f(x1)=f(x2) iken x1=x2 olup gof fonk. 1-1 olur_

Şekil 4.17. Barış'ın gerekçesi

Son olarak Belma'nın ispatı değerlendirirken ispatın, daha önceden bildiği ispatlarla uyumlu olup olmamasına dikkat ettiği tespit edilmiştir. Buna göre Belma'nın ispatı değerlendirirken otoriter bir yaklaşım sergilediği söylenebilir. Aşağıda Belma'nın görüşlerine yer verilmiştir.

Belma: Daha önce böyle bir ispat yapmadık ama diğer birebirlik ispatlarına bakarak $gof(x_1) = gof(x_2)$ *bu şekilde daha önce yaptığımız için aynı şekilde kullanılmış, Aynı adımlar izlenmiş ve doğru adımlar şeklinde izlenmiş.*

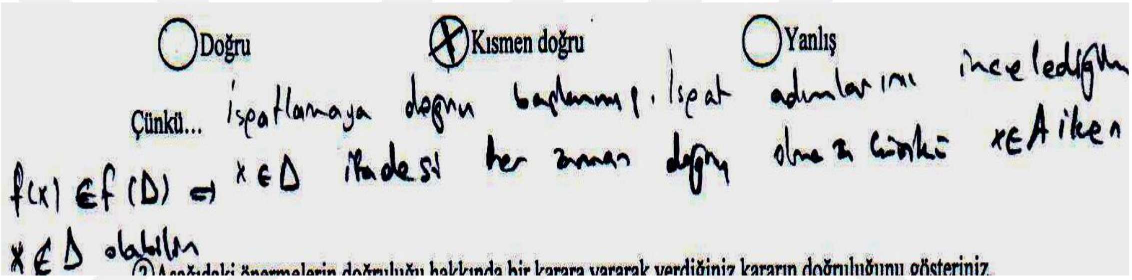
Öğretmen adaylarına fonksiyonlar konusunda yanlış bir önermeye ait dedüktif argüman sunulmuştur. Öğretmen adaylarından argümanı incelemeleri ve doğruluğu hakkında karar vermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarınca "$f: A \to B$ *bir fonksiyon ve* $D \subset A$ *olsun. O halde* $f^{-1}(f(D)) \subset D$*'dir.*" yanlış önermesinin doğrulaması yapılmıştır. Bu argümantasyonda yer alan "$f(x) \in f(D) \Rightarrow x \in D$" argümanı her durumda doğru olmayan bir argümandır. Öğretmen adaylarının argümanı incelerken kullandıkları stratejiler incelenmiştir. Kullanılan stratejilerin iki kategori ve üç alt kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.17'de öğretmen adaylarının kendilerine sunulan argümanı değerlendirirken kullandıkları stratejiler sunulmuştur.

Tablo 4.17.
Öğretmen Adaylarının Yanlış Önerme İçin Üretilen Dedüktif Argümanı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	Gerekçe kontrolü	✓	✓	✓	✓	✓			
Yapısal inceleme	Hipotezden hükme ulaşma	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
	Tanımların kullanılması	✓	✓			✓			✓
Verilen karar		Doğru	Kısmen doğru	Doğru	Kısmen doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

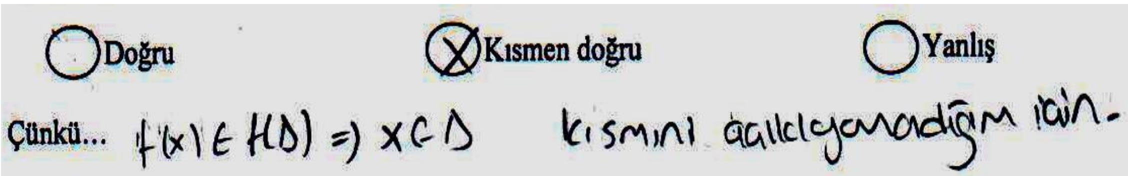
Tablo 4.17 incelendiğinde, argümanın doğru olmadığını Aysun ve Adem'in fark ettiği ortaya çıkmıştır. Argümanın kısmen doğru olduğunu belirtmişlerdir. Diğer öğretmen adayları ise söz konusu argümanın doğru ve ikna edici olduğunu ifade etmişlerdir.

Argümanı değerlendirirken kullanılan stratejiler incelendiğinde, öğretmen adaylarının çoğunun verdikleri kararlarda argümanın başlangıcının ve elde edilen sonucun etkili olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının çoğu ispata nereden başlandığı, elemanların hangi kümeden seçildiği ve sonucun ne olduğu ile ilgilenmişlerdir. Öğretmen adaylarının yarısı da yapılan işlemlerin alt küme ve ters fonksiyon tanımları ile uyumlu olup olmamasına dikkat ettikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının çoğunluğu da argümantasyonda bulunan argümanların doğruluğunu kontrol etmişlerdir. Argümanlarda bulunan verilerden sonuca nasıl gidildiğini, yani argümanların gerekçelerini bulmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adayları özellikle yanlış ifade olan “$f(x) \in f(D) \Rightarrow x \in D$” argümanının gerekçesini, anlamaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından Adem, argümanın doğru bir ispat olmadığını belirterek açıklama yapmıştır. Kendisine yöneltilen argümanın da kısmen doğru olduğunu belirtmiştir. Adem kullanılan yöntemin geçerli bir yöntem olduğunu düşündüğü için argümanın doğruluk yönünün olduğunu ifade etmiştir. Aşağıda Adem’in gerekçesi sunulmuştur.


Doğru
Kısmen doğru
Yanlış
Çünkü... İspatlamaya doğru başlanmış. İspat adımlarını incelediğim $f(x) \in f(D) \Rightarrow x \in D$ ifadesi her zaman doğru olmaz çünkü $x \in A$ iken $x \notin D$ olabilir
2) Aşağıdaki önermelerin doğruluğu hakkında bir karara vararak verdiğiniz kararın doğruluğunu gösteriniz.

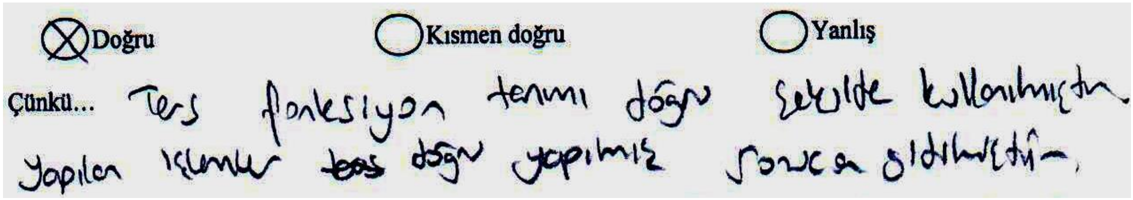
Şekil 4.18. Adem’in gerekçesi

Öğretmen adaylarından Aysun ise yanlış olan argümanın doğruluğuna yönelik bir gerekçe bulamadığı için bu argümanın kısmen doğru olduğunu ifade etmiştir. Aysun bu argümanı açıklayamadığı için doğruluğuna ikna olmadığını vurgulamıştır. Aşağıda Aysun’un gerekçesi sunulmuştur.


Doğru
Kısmen doğru
Yanlış
Çünkü... $f(x) \in f(D) \Rightarrow x \in D$ kısmını açıklayamadığım için.

Şekil 4.19. Aysun’un gerekçesi

Ahu, Aziz ve Barış yaptıkları incelemede söz konusu argümanın gerekçesinin “ters fonksiyonun tanımı” olduğunu ifade ederek ikna olmuşlar ve bu argümanın doğru bir ispat olduğuna karar vermişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Ahu’nun gerekçesine yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Ters fonksiyon tanımı doğru şekilde kullanılmıştır. Yapılan işlemler ~~tas~~ doğru yapılmış sonuca ulaşılmıştır.

Şekil 4.20. Ahu’nun gerekçesi

Öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini ortaya çıkarmak için *“Bir fonksiyonun tersi de bir fonksiyon ise, o zaman fonksiyon birebir ve örten bir fonksiyondur.”* önermesi için oluşturdukları ürünler incelenmiştir. Önermenin doğru olduğunu ispatlamak için oluşturulan ürünlerin beş kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.18’de öğretmen adaylarının ispat yapma durumları sunulmuştur.

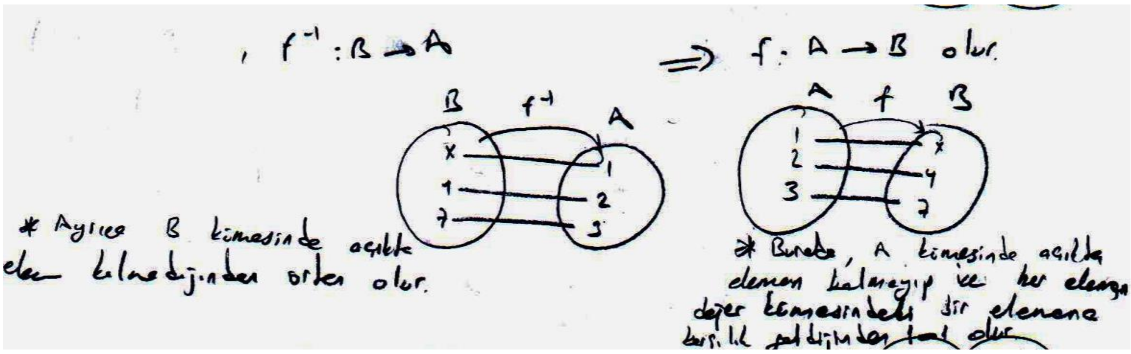
Tablo 4.18.

Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ispat		✓						
Örnekle doğrulama					✓			✓
Tanımları kopyalama							✓	
Tanımları manipüle etme				✓		✓		
Açıklama	✓		✓					

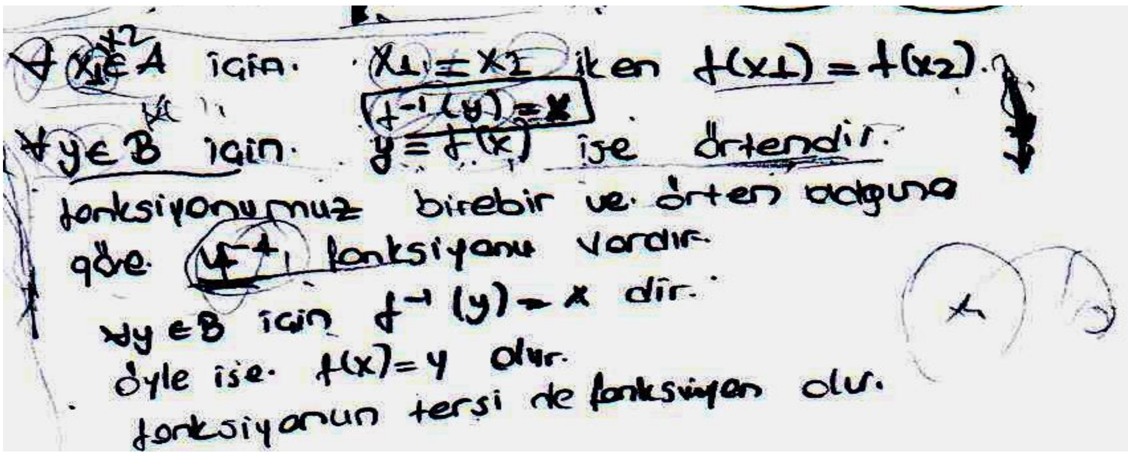
Tablo 4.18 incelendiğinde öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda doğru ispat yapma becerilerinin oldukça düşük olduğu tespit edilmiştir. Sadece bir öğretmen adayının geçerli bir ispat yapabildiği belirlenmiştir. İki öğretmen adayı ispatında özel örnekler kullanmıştır. İki öğretmen adayı tanımlarda bulunan matematiksel notasyonları manipüle ederek sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Öğretmen adaylarından ikisi ispatta bulunan mantığı açıklamaya çalışmıştır. Bir öğretmen adayı tanımları kopyalayarak kullanma yolunu seçmiştir.

Barış ve Belma özel örnekler kullanarak geçerli bir ispat yapmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adayları fonksiyonun birebir ve örten olduğunu örnek ve şekil kullanarak göstermeye çalışmışlardır. Bu bakımdan Barış ve Belma’nın tümevarımsal ispat şemasında olduğunu söylemek mümkündür. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın ispatına yer verilmiştir.



Şekil 4.21. Barış'ın ispatı

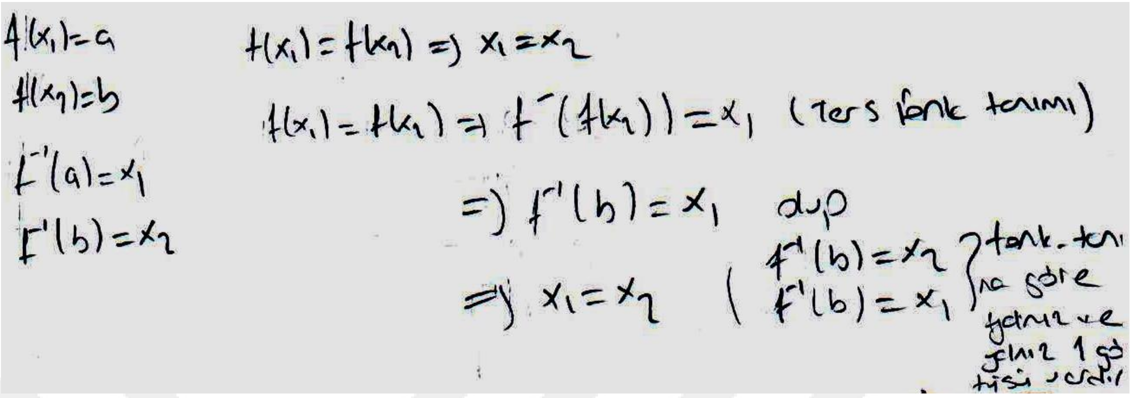
Buse ise ispatında mülakatın başında verilen tanımları aynen ispatında kullanmış ve bu şekilde ispat yapmaya çalışmıştır. Buse geçerli bir ispat yapamamıştır. Buse'nin ispatı mantıksal olarak yetersiz bir gösterim olarak değerlendirilmiştir. Buse kendilerine verilen tanımları içerisindeki ifadelerin anlamını bilmeden kullanmaya çalışmıştır. Tanımların içerisindeki sembolleri manipüle etmeye çalışarak ispatının matematiksel görünmesine odaklanmıştır. Buna göre Buse'nin sembolik ispat şemasında olduğu söylenebilir. Ayrıca Buse'nin ispatında birebir fonksiyon kavramına yönelik bir yanılgı olan "$x_1 = x_2$ *ise* $f(x_1) = f(x_2)$" koşullu önermesinin birebir fonksiyona karşılık geldiğini düşünmüş ve kullanmıştır. Aşağıda Buse'nin ispatı sunulmuştur.



Şekil 4.22. Buse'nin ispatı

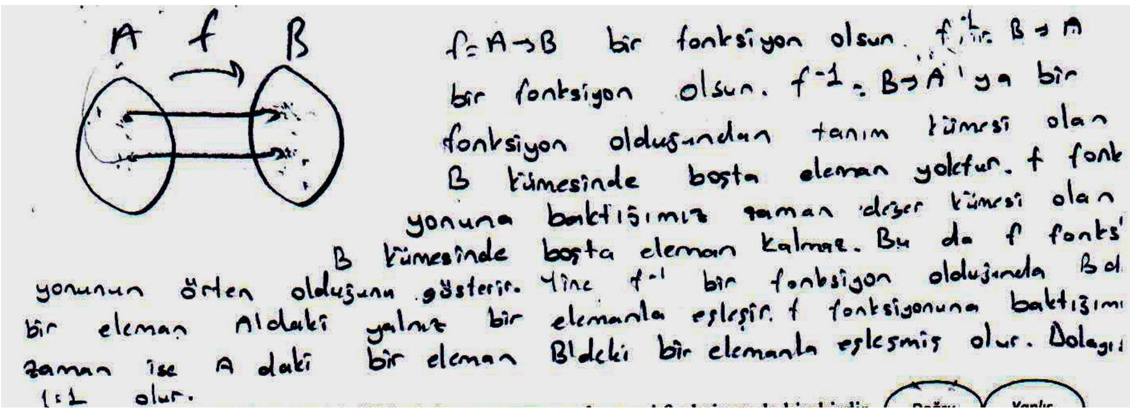
Aysun ve Bilge ise ispatını yaparken Buse gibi tanımları yazmış ve tanımda bulunan notasyonları manipüle etmeye çalışarak ispat yapmaya çalışmıştır. Aysun ve

Bilge başarıya ulaşamamıştır. Bu öğretmen adaylarının tanımları açıp ilerleyerek sonuca ulaşmaya çalıştıkları için dönüşümsel ispat şemasında oldukları belirlenmiştir. Aşağıda Aysun'un ispatı sunulmuştur.


$f(x_1)=a$
$f(x_2)=b$
$f^{-1}(a)=x_1$
$f^{-1}(b)=x_2$
$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$
$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_2))=x_1$ (ters fonk tanımı)
$\Rightarrow f^{-1}(b)=x_1$ dur
$\Rightarrow x_1=x_2$ ($f^{-1}(b)=x_2$, $f^{-1}(b)=x_1$) fonk. tanımına göre yalnız ve yalnız 1 görüntüsü vardır

Şekil 4.23. Aysun'un ispatı

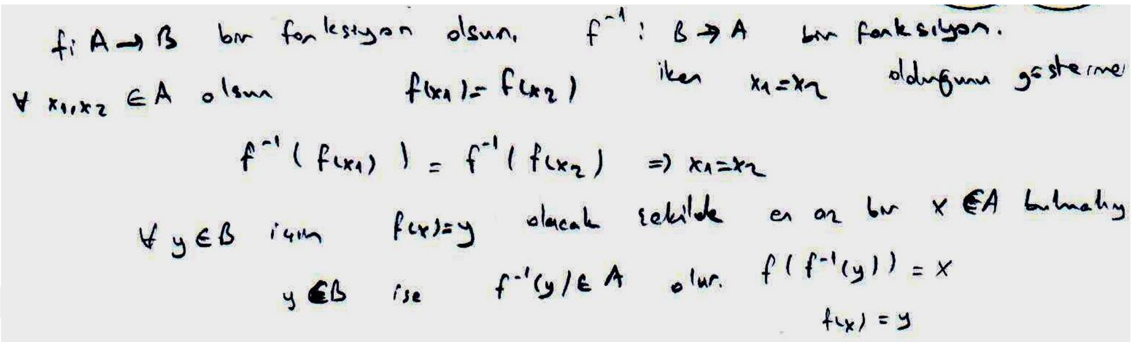
Ahu ve Aziz ise yaptıkları ispatlarda, teoremin ispatında yer alan matematiksel mantığı yansıtmışlardır. Bu öğretmen adayları fonksiyon, ters fonksiyon, birebir ve örten fonksiyon kavramları üzerinden açıklamalar yaparak ispat yapmaya çalışmışlardır. Ahu ve Aziz'in ispatlarındaki eksiklik, matematiksel düşünceleri notasyona dönüştürememeleridir. Bu ispatlar ikna edicidir fakat matematiksel gösterimden uzaktır. Bu bakımdan bu ispatları kısmen doğru ispat olarak değerlendirmek mümkündür. Öğretmen adaylarının matematiksel kavramlarla ilişki kurarak ispat yaptıkları söylenebilir. Buna göre bu öğretmen adaylarının dedüktif ispat şemalarından dönüşümsel ispat şemasında olduğu ortaya çıkmıştır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aziz'in ispatına yer verilmiştir.



$f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. $f^{-1}: B \to A$ bir fonksiyon olsun. $f^{-1}: B \to A$'ya bir fonksiyon olduğundan tanım kümesi olan B kümesinde boşta eleman yoktur. f fonksiyonuna baktığımız zaman değer kümesi olan B kümesinde boşta eleman kalmaz. Bu da f fonksiyonunun örten olduğunu gösterir. Yine f^{-1} bir fonksiyon olduğundan B'deki bir eleman A'daki yalnız bir elemanla eşleşir. f fonksiyonuna baktığımız zaman ise A daki bir eleman B'deki bir elemanla eşleşmiş olur. Dolayısı 1:1 olur.

Şekil 4.24. Aziz'in ispatı

Son olarak Adem, yaptığı ispatta, Ahu ve Aziz'de olduğu gibi ispatın mantığını yansıtmıştır. Adem matematiksel düşüncelerini notasyonlara yansıtmada başarılı olmuştur. İspatını yaparken matematiksel tanımlardan yola çıkmıştır. Kavramlar arasında ilişkiler kurarak geçerli bir ispat yapmıştır. Aşağıda Adem'in ispatına yer verilmiştir.


$f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. $f^{-1}: B \to A$ bir fonksiyon.
$\forall x_1, x_2 \in A$ olsun $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğunu gösterme
$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$
$\forall y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ bulmalıy
$y \in B$ ise $f^{-1}(y) \in A$ olur. $f(f^{-1}(y)) = x$
$f(x) = y$

Şekil 4.25. Adem'in ispatı

Öğretmen adaylarının ters örnek üretme süreçlerini ortaya çıkarmak amacıyla yanlış bir önerme olan "*Herhangi çarpılabilir olan birebir iki fonksiyonun çarpımı olan yeni fonksiyon da birebirdir.*" önermesi için oluşturdukları ürünler incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ters örnek üretme durumları üç kategori altında toplanmıştır. Bu kategoriler hakkında bilgiler Tablo 4.19'da sunulmuştur.

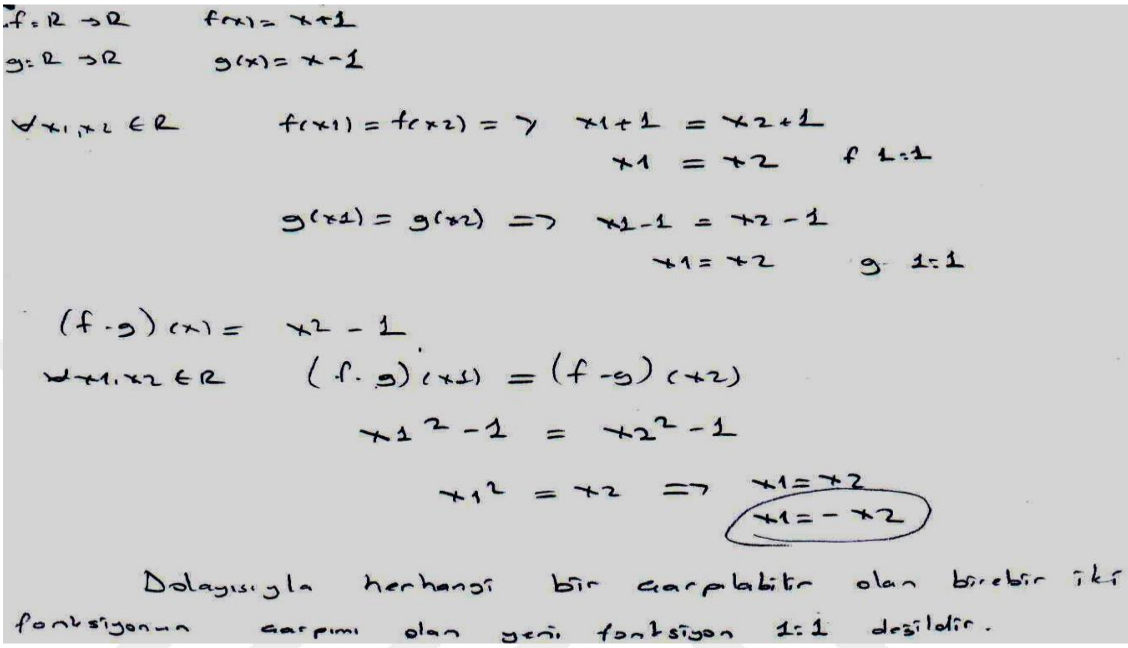
Tablo 4.19

Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Üretme Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ters örnek	✓		✓		✓	✓		
Örnekle doğrulama							✓	
İspat		✓		✓				✓

Tablo 4.19'a göre öğretmen adaylarının yarısı verdikleri karara uygun olarak geçerli ters örnekler üretmişlerdir. Diğer öğretmen adayları ise önermenin doğru olduğunu göstermeye çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından üçü ispat yapmaya çalışırken, bir öğretmen adayı özel bir örnek kullanarak doğrulama yapmıştır.

Ahu, Aziz, Barış ve Bilge verdikleri kararlara uygun olarak doğru ters örnekler üretmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarına örnek olarak Aziz'in ispatı sunulmuştur. Aziz, ispatında reel sayılar üzerinde tanımladığı $f(x) = x + 1$ ve $g(x) = x - 1$ fonksiyonlarını önermeyi çürüten ters örnek olarak kullanmıştır.



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x+1$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x-1$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1$

$x_1 = x_2 \quad f\ 1{:}1$

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1$

$x_1 = x_2 \quad g\ 1{:}1$

$(f \cdot g)(x) = x^2 - 1$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad (f \cdot g)(x_1) = (f \cdot g)(x_2)$

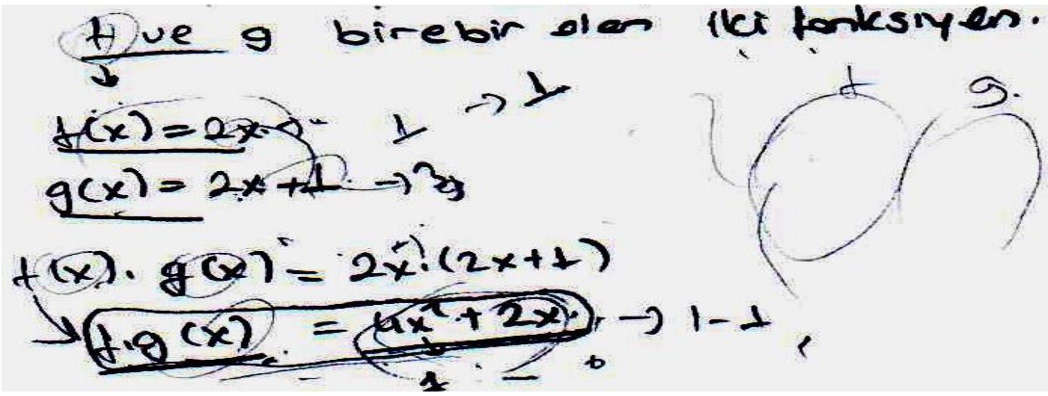
$x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$

$x_1^2 = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, $x_1 = -x_2$

Dolayısıyla herhangi bir çarpılabilir olan birebir iki fonksiyonun çarpımı olan yeni fonksiyon 1:1 değildir.

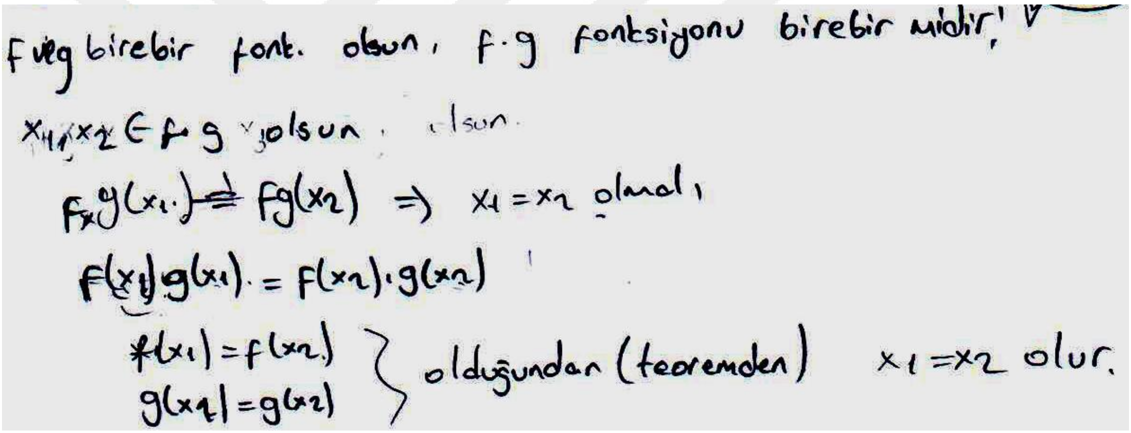
Şekil 4.26. Aziz'in ispatı

Diğer öğretmen adayları ise bu önermenin doğru olduğunu belirterek doğrulamaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından Buse reel sayılar kümesi üzerinde tanımladığı iki fonksiyonu çarparak bulduğu sonuca göre doğrulama yapmıştır. Reel sayılar üzerinde tanımladığı $f(x) = 2x$ ve $g(x) = 2x + 1$ fonksiyonlarını göz önüne almıştır. Çarpım fonksiyonunun birebir bir fonksiyon olduğunu belirtmiştir. Buse'nin bulduğu çarpım fonksiyonu gerçekte birebir olmayan bir fonksiyondur. Buse önermeyi çürüten bir örnek bulmuş fakat yeterli inceleme yapmadığı için fark edememiştir. Buse'nin bulduğu örneği hatalı değerlendirmesinde birebir fonksiyon kavramına yönelik geliştirdiği "$x_1 = x_2$ *ise* $f(x_1) = f(x_2)$" imajı etkili olmuştur. Aşağıda Buse'nin yaptığı ispata yer verilmiştir.



Şekil 4.27. Buse’nin ispatı

Adem, Aysun ve Belma doğru olarak değerlendirdikleri önerme için ispat yapmaya çalışmışlar ve başarısız olmuşlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Belma’nın ispatına yer verilmiştir.



Şekil 4.28. Belma’nın ispatı

4.2.3. Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki argümantasyon ve ispat süreçleri arasındaki ilişki

Bu bölümde öğretmen adaylarının bir önermenin doğruluğuna karar verirken girdikleri argümantasyon süreçleri ile bu kararın sonucu olarak ürün üretmek için girdikleri ispat süreçleri arasındaki ilişkiye yönelik bulgular sunulmuştur. Öğretmen adaylarının kendilerine yöneltilen *“Bir fonksiyonun tersi de bir fonksiyon ise, o zaman fonksiyon birebir ve örten bir fonksiyondur.”* önermesinin doğruluğuna ikna olmak için girdikleri argümantasyon süreci ile önermenin doğruluğunu göstermek için girdikleri ispat süreci yapısal olarak incelenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda dört farklı durum ile karşılaşılmıştır. Bu durumlar aşağıda sunulmuştur.

1. *Dedüktif Argümantasyondan Dedüktif İspat*

Bu durumdaki öğretmen adayları argümantasyon süreçlerinde önermenin doğru olduğuna tanımları, kavramları, ilgili teoremleri düşünerek ve bunlar üzerinden muhakeme ederek ulaşmışlardır. Öğretmen adaylarından Ahu, Aziz ve Bilge önermenin doğru olduğuna ikna olmak için fonksiyon, ters fonksiyon, birebir ve örten fonksiyon tanımlarını argümanlarında gerekçe olarak kullanmışlardır. Bu öğretmen adaylarının dedüktif gerekçe tiplerinden dönüşümsel tipte argümanlar ürettikleri tespit edilmiştir. Adem ise önermeye ispat yaptıktan sonra karar verme eğiliminde olsa da karar verirken ispatta kullandığı tanım, teorem ve özelliklerden yararlandığını söylemek mümkündür. Bu bakımdan Adem'in de dedüktif gerekçe tiplerinden ispat gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Önermeye ikna olabilmek için dedüktif argümanlar üreten öğretmen adaylarından Adem, tanımlardan hareket ederek geçerli bir ispat oluşturmuştur. Ahu ve Aziz ise Adem'in ispatına benzer ispatlar yapmışlar fakat düşüncelerini matematiksel olarak ifade etmede sıkıntı yaşamışlardır. Ahu ve Aziz'in kısmen doğru ispat yaptıkları söylenebilir. Bilge ise ispatında tanımlardan hareketle ispat oluşturmuştur. Bilge'nin ispatında mantıksal hatalar olması sebebiyle geçerli ispat olarak değerlendirilmemiştir. Buna göre öğretmen adaylarının ispatlarında da dedüktif ispat şemasına sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının argümantasyon süreci ile ispat süreci arasındaki yapısal sürekliliğin, arkadaşlarına oranla daha başarılı ispatlar yapmalarını sağladığı söylenebilir.

2. *Otoriter Argümantasyondan Dedüktif İspat*

Bu durumdaki öğretmen adayı olan Aysun, önermenin doğruluğuna ikna olmak için argümantasyon sürecine girmemiştir. Önermeyi daha önceden bildiğini ifade ederek önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Bu yüzden Aysun'un otoriter tarzda bir argüman ürettiği söylenebilir. Aysun ispatına argüman yapısını transfer etmemiştir. İspatında tanımlardan yola çıkarak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Tanımlardaki notasyonları manipüle ederek geçerli bir ispata ulaşmayı hedeflemiş ama başarılı olamamıştır. Aysun'un ispatındaki yapısının dedüktif olduğu ortaya çıkmıştır. Aysun'un argümantasyon süreci ile ispat süreci arasındaki yapısal boşluğun başarılı bir ispat yapamamasında etkili olduğu düşünülmüştür.

3. Otoriter Argümantasyondan Tümevarımsal İspat

Bu duruma örnek olan öğretmen adayları Barış ve Belma'dır. Barış ve Belma önermenin doğru olduğuna ikna olmak için düşünce sürecine girmemişlerdir. Bu önermenin doğru olduğunu önceden bildikleri veya sınıf ortamında duyduklarını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının önermenin doğru olduğuna ikna olmak için otoriter argümanlar ürettikleri belirlenmiştir. Barış ve Belma önermenin doğru olduğunu göstermek için yaptıkları ispatlarda özel örnekleri kullanmışlardır. Bu örnekler yardımıyla önermenin ispatlandığını iddia etmişlerdir. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının tümevarımsal ispat şeması olduğu ortaya çıkmıştır. Barış ve Belma'nın argümantasyon süreci ile ispat süreci arasındaki bu yapısal boşluk geçerli bir ispat yapmalarını engellemiştir.

4. Tümevarımsal Argümantasyondan Sembolik İspat

Bu duruma örnek olan öğretmen adayı Buse'dir. Önermenin doğruluğuna ikna olmak için reel sayılar kümesi üzerinde tanımladığı özel bir örnek üzerinden muhakeme ederek elde ettiği sonucu değerlendirmiştir. Buse bir önermenin doğru olduğuna ikna olmak için tek bir örneğin yeterli olacağını düşünmüştür. Buna göre Buse'nin tümevarımsal bir argüman oluşturarak önermenin doğru olduğuna karar verdiği tespit edilmiştir. Buse ise tanımları kullanarak ispat yapmaya çalışmıştır. İspatında tanımları aynen kopyalamış ve sonuca ulaştığını belirtmiştir. Buse'nin ispatında mantıksal bir bütünlük tespit edilememiş ve yazdığı ifadelerin anlamlarını düşünmeden hareket ettiği belirlenmiştir. Buse'nin sembolik manipülasyonlarla ispatın matematiksel görünmesine odaklandığı tespit edilmiştir. Bu nedenle Buse'nin ispatı sembolik ispat şeması altında değerlendirilmiştir. Argümantasyon sürecindeki tümevarımsal yapısını ispatına aktarmadığı belirlenmiştir. Buna göre Buse'nin argümantasyon ve ispatında yapısal bir boşluğun olduğu söylenebilir. Buse'nin sahip olduğu bu yapısal boşluk ispat yapmada başarı getirmemiştir.

4.3. Öğretmen Adaylarının Diziler Konusundaki Argümantasyon ve İspat Süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının diziler konusundaki argümantasyon ve ispat süreçlerine yönelik bulgular sunulmuştur. Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlardaki etkinliklere geçmeden önce, reel sayı dizileri için yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımları öğretmen adaylarına sunulmuştur. Öğretmen adaylarından tanımları sesli bir şekilde okumaları rica edilmiştir. Tanımları okuyan öğretmen adaylarına, tanımlardan ne anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının söz konusu kavramlara yönelik bilgileri sorgulanarak olası yanlış anlamalarını ortaya çıkarmak hedeflenmiştir. Öğretmen adaylarının yakınsak dizi tanımına yönelik anlayışlarının dört kod ve dört kategori atında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.20'de bu kod ve kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.20.

Öğretmen Adaylarının Yakınsak Dizi Tanımına Yönelik İfadeleri

Kategoriler	Kod	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Kavramsal anlama	Bir dizinin belli bir teriminden sonraki terimlerinin, bir sayının epsilon komşuluğunda kalması	Adem Aysun Ahu Aziz	*Adem: Bir dizinin terimleri belli bir reel sayıdan farkı çok küçük oluyorsa, epsilona bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa, dizinin tüm terimleri değil de dizinin belli teriminden sonraki terimleri eğer bir sayının epsilon komşuluğunda bulunuyorsa bu dizi o sayıya yakınsıyor demektir.*
Sembolik anlama	$\lvert sn - s \rvert < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısının bulunması.	Barış Belma	*Barış: Yani hocam zaten her ε>0 için $n > n_0$ olduğunu hipotez olarak kabul ediyoruz. Daha sonra s_n dediğimiz genel terimi s limitinden çıkarıyoruz. Mutlak değer farkının ε dan küçük olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulabildiğimiz zaman biz buna yakınsak dizi diyoruz.*
Hatalı anlama	Reel sayı dizisinin epsilona bağlı olması	Buse	*Buse: Önce epsilon ve s_n reel sayı dizisi var. Bu reel sayı dizisi de epsilona bağlı olursa yakınsak olur. Eğer epsilon sayısına bağlı değilse de ıraksak dizi olur.*
Kavram karmaşası	Grafiksel olarak kopukluk olmaması ve dizinin iki tane terimi arasındaki farkın sıfıra yakınsaması	Bilge	*Bilge: Grafiksel olarak limitinin kopmaması ya da limitinin olması diyebilirim. Mesela bir tane dizi alayım. Dizinin iki tane terimi arasındaki farkın sıfıra yakınsaması*

Tablo 4.20 incelendiğinde, öğretmen adaylarından Ahu, Aysun, Aziz ve Adem'in yakınsak dizi tanımına, bir dizinin belli bir teriminden sonraki terimlerinin, bir sayının epsilon komşuluğunda kalması anlamını yükledikleri belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarına tanımda yer alan n_0 teriminin, yakınsak dizi tanımındaki işlevinin ne olduğu sorulmuştur. Alınan cevaplar incelendiğinde öğretmen adaylarının tanımda yer alan n_0 terimi hakkında yeterli bilgiye sahip oldukları tespit edilmiştir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aysun ve Adem'in yakınsak dizi tanımında yer alan n_0 terimi hakkındaki ifadeleri sunulmuştur.

Aysun: Sonlu tane, yani n_0 *tane terim komşuluğun dışında kalacak, sonsuz terim komşuluğun içinde kalacak.*

Adem: Bu terimden sonraki terimler sayının epsilon komşuluğunda kalmalıdır. Diyelim ki $n_0 = 5$*, 5'ten sonraki terimler epsilon komşuluğu içinde kalacak 1., 2., 3., 4., 5. terimler epsilon komşuluğu dışında kalacak.*

Buna göre Aysun, Ahu, Adem ve Aziz'in yakınsak dizi konusunda kavramsal anlamaya sahip oldukları söylenebilir.

Barış ve Belma ise yakınsak dizi tanımından $|s_n - s| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısının bulunmasını anladıklarını ifade etmişlerdir. Belma ve Barış'ın ifadelerinde yakınsak dizi tanımında n_0'ın işlevine dair herhangi bir bilgi yer almamıştır. Bu öğretmen adaylarının tanımda yer alan n_0 terimi hakkındaki bilgilerini sorgulamak için "n_0'ın tanımdaki işlevi nedir?" sorusu yöneltilmiştir. Alınan cevaplara göre Barış ve Belma'nın yakınsak dizi tanımında önemli bir yer tutan n_0 terimi hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Aşağıda Barış ve Belma'nın ifadelerine yer verilmiştir.

Belma: Vardı ama… O neydi? En küçük bir değer ama… Tam hatırlayamadım.

Barış: Şu an aklıma gelmiyor ama bir şey vardı yani. Limiti ya da tanımı bozmaması içindi. Bir önemi vardı ama şuan aklıma gelmedi.

Buna göre Barış ve Belma'nın yakınsak dizi tanımını kendi cümleleri ile doğru bir şekilde ifade edemedikleri belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları tanımda bulunan ifadeleri tekrarlamışlardır. Barış ve Belma'nın yakınsak dizi tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal düzeyde oluşmadığı ve sembolik olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Buse ise yakınsak dizi tanımından anladığı şeyin, “reel sayı dizisinin epsilona bağlı olması” olduğunu ifade etmiştir. Buse’nin ifadelerindeki anlaşılmazlığa açıklık getirebilmek için Buse’ye de yakınsak dizi tanımında yer alan n_0 teriminin işlevinin ne olduğu sorulmuştur. Alınan cevaba göre, Buse’nin n_0 teriminin işlevi hakkında bilgisinin olmadığı açığa çıkmıştır. Aşağıda Buse’nin görüşlerine yer verilmiştir.

Buse: n_0, mesela sorularda bize veriyor ya hocam. n_0, n ye bağlı çıkıyor. Yani en sondaki bulduğumuz değer n_0 cinsinden oluyor. n den daha küçük n_0 sayısı seçiyoruz ki, s ye yakınsadığını gösterelim.

Buse’nin ifadelerine bakıldığında n_0 hakkındaki bilgilerinin yakınsak dizi konusundaki problemlerin çözümündeki işlemlerle sınırlı olduğu belirlenmiştir. Buna göre Buse’nin bu tanımı kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışmasına rağmen matematiksel olarak hatalı ve eksik ifadeler kullandığı anlaşılmıştır. Dolayısıyla Buse’nin yakınsak dizi tanımını hatalı bir şekilde anladığı söylenebilir.

Bilge ise yakınsak dizi tanımından anladığının, dizinin grafiğinde kopukluk olmaması ve dizinin iki terimi arasındaki farkın sıfıra yakınsaması olduğunu ifade etmiştir. Bilge’nin ifadelerinden yakınsak dizi kavramını, sürekli fonksiyon ve Cauchy dizisi kavramları ile karıştırdığı söylenebilir. Bilge yakınsak dizi tanımında yer alan n_0’ın işlevinin ne olduğu sorusuna da uygun bir cevap verememiştir. Aşağıda Bilge’nin n_0’ın işlevine yönelik ifadeleri yer almıştır.

Bilge: Oraya bir reel sayı gelecek mesela, dizideki bir terim bir yerde genellemek için kullanılıyor. Yani dizide ona bağlı bir şey bulunabiliyorsa demiş. Epsilona bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa. Onları birbirine benzetmek için. Dizi 2x+1 desem yaptığımız işlemlerle ona benzetmeliyiz yine.

Öğretmen adaylarının Cauchy dizisi tanımına yükledikleri anlam incelendiğinde, ifadelerin yakınsak dizi tanımındaki ifadeler ile paralel olduğu belirlenmiştir. Tekrara düşmemek adına Cauchy dizisi tanımına yönelik ifadeler sunulmamıştır. Buna göre, öğretmen adaylarından Adem, Ahu, Aysun ve Aziz’in yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarına yönelik kavramsal bilgilerinin oluştuğu söylenebilir. Diğer öğretmen adaylarının ise söz konusu bilgilerinin kavramsal bilgi düzeyinde oluşmadığını ifade etmek mümkündür.

Öğretmen adaylarının yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin sorgulanmasının ardından, argümantasyon ve ispat süreçlerini ortaya çıkarmak amacıyla etkinliklere geçilmiştir. Etkinliklere geçmeden önce söz konusu etkinliklerin reel sayı dizileri için geçerli olduğu vurgulanmıştır. Etkinliklerde özellikleri belirtilmeyen diziler için tanımlar bölümünde yer alan reel sayı dizilerinin dikkate alınmasının gerekli olduğu ifade edilmiştir.

4.3.1. Öğretmen adaylarının diziler konusundaki argümantasyon süreçleri

Diziler konusundaki argümantasyon süreçleri kapsamında öğretmen adaylarının bir önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına nasıl ikna oldukları ve doğru olduğunu bildikleri matematiksel bir iddiayı nasıl savundukları incelenmiştir.

Öğretmen adaylarına ilk etkinlik olarak doğru bir önerme olan *"Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir."* önermesi sunulmuş ve onlardan bu önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı için bir karar vermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının doğru olan bu önermeyi değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda öğretmen adaylarının kullandıkları stratejilerin üç kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.21'de bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.21.

Öğretmen Adaylarının Doğru Önermeye İkna Olmak İçin Kullandıkları Stratejiler

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Geçmiş bilgi	✓	✓			✓	✓	✓	✓
İspatını düşünme				✓				
Kavramlar üzerinden muhakeme			✓					
Verilen karar	Yanlış	Yanlış	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

Tablo 4.21'e göre öğretmen adaylarının çoğunlukla önermenin doğru olduğunu belirttikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı önermenin doğru ya da yanlış olduğunu önceden bildiklerini ifade etmişlerdir. Ancak önermenin doğruluğunu değerlendirirken herhangi bir argüman üretmemişlerdir. Öğretmen adaylarından biri (Aziz) önermenin doğru olduğuna yakınsak dizi ve Cauchy dizisi kavramları üzerinden

muhakeme ederek ulaşmıştır. Bir öğretmen adayı (Aysun) da ispatı nasıl yapacağını düşünerek önermenin doğru olduğuna ikna olmuştur.

Barış, Bilge, Buse ve Belma önermenin doğru olduğunu daha önce sınıfta duyduklarını ya da daha önceden bildiklerini ifade ederek ikna olmuşlardır. Buna göre bu öğretmen adaylarının önermenin doğruluğunu değerlendirirken otoriter bir yaklaşım içinde oldukları söylenebilir. Bu öğretmen adaylarından Buse'nin ifadeleri aşağıda yer almıştır.

Buse: Bu doğru hocam, sınıfta görmüştük. Her yakınsak dizi Cauchy diyebiliyorduk. Bunun ispatı da vardı. Aynı bu şeyi kullanıyordu, m ve n gibi iki eleman seçiyordu.

Benzer şekilde, Ahu ve Adem önermenin yanlış olduğunu daha önceden bildiklerini ifade ederek karar vermişlerdir. Bu öğretmen adaylarına göre, yakınsak her dizi Cauchy dizisi değil ancak her Cauchy dizisi yakınsak dizidir. Ahu ve Adem bu bilgiye dayanarak karar vermiş ve herhangi bir argüman üretmemişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Adem'in düşüncelerine yer verilmiştir.

Adem: Yanlıştı herhalde bu ya. Cauchy dizisi yakınsaktır da, her yakınsak dizi Cauchy dizisi olacak diye bir şey yok. Bunu önceki bilgilerime dayanarak söylüyorum.

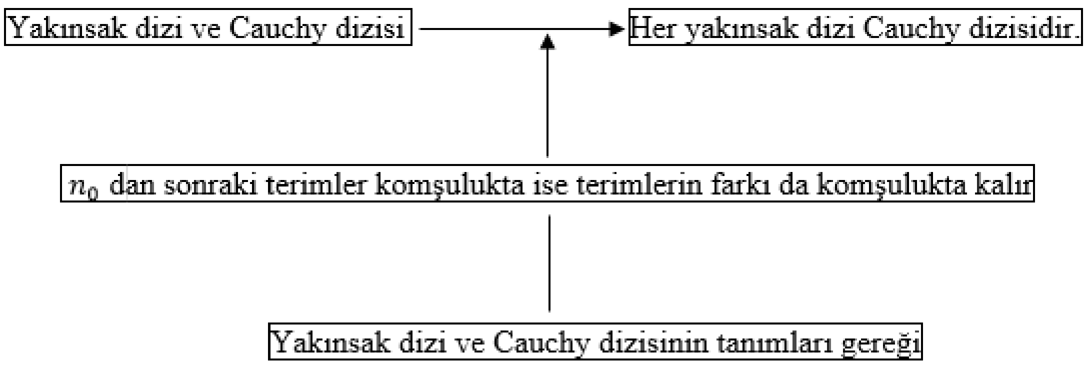
Aysun ise önermenin bir teorem olduğunu belirtmiştir. Teoremin ispatını düşünerek karar vermiştir. Aysun ispatı nasıl yapacağını düşünmüştür. Aşağıda Aysun'un ifadelerine yer verilmiştir.

Aysun: İspatını düşündüm. Yakınsak dizininin tanımını düşündüm. Cauchy dizisinden yola çıktım. Doğru geldi bana. Göstereyim.

Aziz önermenin doğruluğuna ikna olmak için yakınsak dizi ve Cauchy dizisi kavramlarını düşünüp birbiri ile ilişkilendirerek argümantasyon sürecine girmiştir. Aşağıda Aziz'in ifadeleri sunulmuştur.

Aziz: Yakınsak dizi n_0 dan sonraki terimleri, işte o dizinin yakınsadığı noktanın ε komşuluğunda olacak. Cauchy dizisinde de n_0 dan sonra iki farklı terimi var. Ve bu iki terimin farkı da komşulukta kalacak. Zaten terimler komşulukta ise terimlerin farkı da komşulukta kalır.

Aziz'in ifadelerinden önermenin doğruluğuna ikna olmak için argüman ürettiği tespit edilmiştir. İlk önce, elindeki veri olan yakınsak dizi kavramını ele almış ve yorumlamıştır. Ulaşacağı sonuç olan Cauchy dizisi kavramını da kendi cümleleri ile yorumlayan Aziz, kavramlar arasında bağlantı kurmuştur. Aziz'in kurduğu bağlantı, ürettiği argümana gerekçe olmuştur. Bu gerekçe, n_0'dan sonraki terimler komşulukta ise terimlerin farkının da aynı komşulukta kalması gerektiği bilgisidir. Aziz'in gerekçesi yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarıyla desteklenmiştir. Aşağıda Aziz'in ürettiği argümanın, Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.29. Aziz'in ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Öğretmen adaylarına ikinci önerme olarak yanlış bir önerme sunulmuştur. Bu önerme *"(s_n) yakınsak ve (t_n) ıraksak reel sayı dizisi olmak üzere $(s_n.t_n)$ çarpım dizisi ıraksaktır."* önermesidir. Öğretmen adaylarından yanlış olan bu önermenin doğruluğunu değerlendirmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının önermenin doğruluğunu değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelenmiştir. Bu stratejilerin toplam dört kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.22'de söz konusu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.22.

Öğretmen Adaylarının Yanlış Önermeye İkna Olmak İçin Kullandıkları Stratejiler

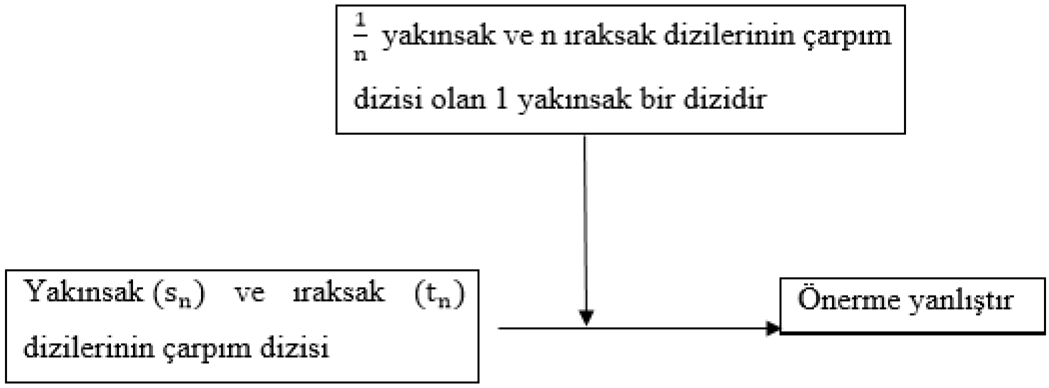
Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Örnek kullanma					✓	✓		✓
Ters örnek arama	✓	✓	✓					
Kavramlar üzerinden muhakeme				✓				
Sezgisel düşünme							✓	
Verilen karar	Yanlış	Yanlış	Yanlış	Doğru	Doğru	Doğru	Yanlış	Doğru

Tablo 4.22'ye göre, öğretmen adaylarının yarısının (Aysun, Barış, Bilge, Belma) yanlış olan önermeyi belirlemede başarılı olamadıkları belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının diziler konusunda yanlış olan önermeyi belirleme becerilerinin doğru olan önermeleri belirlemeye oranla daha düşük olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının üçü (Ahu, Adem, Aziz), önermenin doğruluğu hakkında ikna olmak için ters örnek bulmaya çalışmışlardır. Yine üç öğretmen adayı (Barış, Bilge, Belma) önermeyi doğrulayan bir örnek bularak ikna olmuşlardır. Bir öğretmen adayı (Aysun) kavramlar üzerinden akıl yürüterek önermenin doğru olduğuna karar verirken bir öğretmen adayı (Buse) ise hiçbir düşünce sürecine girmeden sezgilerine güvenerek önermenin yanlış olduğunu belirtmiştir.

Öğretmen adaylarından Ahu, Adem ve Aziz önermeyi yanlışlayan ters örnek bulmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adayları ters örnek bularak önermenin yanlış olduğunu belirtmişlerdir. Aşağıda Ahu'nun girdiği düşünce sürecine yönelik ifadeleri sunulmuştur.

Ahu: s_n yakınsakmış, mesela $\frac{1}{n}$ olsun. t_n ıraksakmış o da n olsun. Buradan 1 olur, limitini sonsuza götürürsek. Yanlış bu sanki ıraksak olsaydı bir sonuç çıkmazdı. $\frac{1}{n}$ sıfıra yakınsarken diğeri sonsuza gidiyor. Çarpınca 1 geliyor, bir de yakınsak zaten.

Ahu yakınsak bir dizi ile $((\mathrm{s_n}) = \frac{1}{\mathrm{n}})$ ıraksak bir diziyi $((\mathrm{t_n}) = \mathrm{n})$ çarparak sabit bir dizi bulmuştur. Sabit dizi yakınsak olduğundan dolayı bulduğu örneğin bir ters örnek olduğunu belirtmiştir. Ahu çarpım dizisinin ıraksak olması durumunda bir karar verilemeyeceğini ifade etmiştir. Bulduğu ters örneğe dayanarak önermenin yanlış olduğunu dile getirmiştir. Aşağıda Ahu'nun ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.

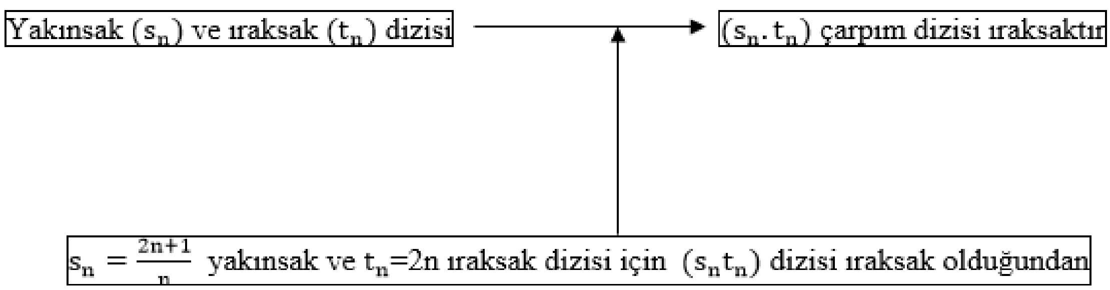


Şekil 4.30. Ahu'nun ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Barış, Bilge ve Belma önermenin doğru olduğuna, önermeyi doğrulayan bir örnek bularak ikna olmuşlardır. Onlara göre bir önermenin doğru olması için önermeyi doğrulayan bir örnek bulmak yeterlidir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın ifadelerine yer verilmiştir.

Barış: Limitini aldım. Mesela diyelim ki s_n yakınsak dizi ne olsun? $s_n = \frac{2n+1}{n}$ olsun. Bunun limiti 2 dir. t_n dizisi de polinom şeklinde olsun. t_n=2n olsun. Bunun limiti de sonsuz. Buradan $2 \times \infty = \infty$. Dolayısıyla $lim(s_n t_n) = lim\, s_n \times lim\, t_n$ şekline geldi.

Barış, ürettiği argümanda önermenin doğru olduğuna, biri yakınsak diğeri ıraksak iki dizi alıp çarpım dizisinin ıraksak çıkmasına dayanarak ikna olmuştur. Barış'ın bir önermenin doğru olduğuna ikna olmak için tek bir örneğin yeterli olacağına inandığı tespit edilmiştir. Aşağıda Barış'ın ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.

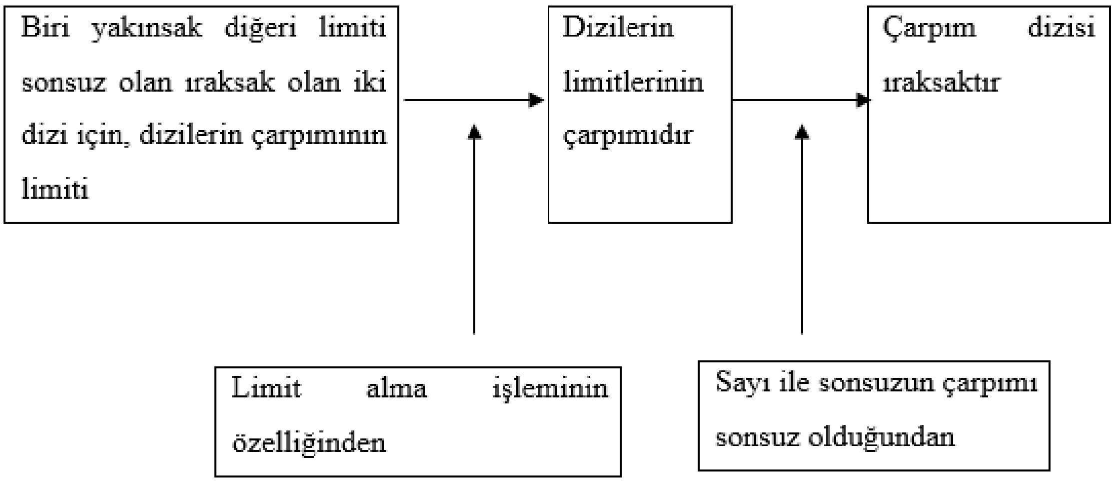


Şekil 4.31. Barış'ın ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Aysun, önermenin doğruluğuna ikna olmak için tanımlar üzerinden düşünmeyi tercih etmiştir. Yakınsak dizi ile ıraksak dizi kavramlarını ve limitin özelliklerini düşünerek karar vermiştir. Aşağıda Aysun'un ifadelerine yer verilmiştir.

Aysun: Şimdi yakınsak olabilmesi için limitinin olması gerekiyordu. Genel teriminin limiti yoksa o zaman ıraksak diyorduk. Şimdi hani limitte değerlerinin çarpımı kendilerinin çarpımlarına eşit oluyordu ya oradan düşündüm ki, limiti yok o zaman sonsuz olsun. Diğerinin limiti de olsun. Sonsuzla bir sayının çarpımı da sonsuz olur. O yüzden de limit ıraksak yani yok.

Aysun ürettiği argümanda ilk önce yakınsak ve ıraksak dizi bilgilerini ortaya koymuştur. Daha sonra biri yakınsak diğeri limiti sonsuz olan ıraksak iki dizi göz önüne almıştır. Bu iki dizinin çarpımının ıraksak olduğunu göstermek için çarpım dizisinin limitinin, ayrı ayrı dizilerin limitlerinin çarpımı olduğuna, limitin özelliğini belirterek ulaşmıştır. Daha sonra bir sayı ile sonsuzun çarpımının sonsuz olacağını belirterek çarpım dizisinin ıraksak olduğu sonucuna ulaşmıştır. Burada Aysun, argümanı ile ilgili tüm durumları düşünmemiştir. Örneğin, Aysun'un ürettiği argümanda limit durumunda "$0x\infty$" belirsizliği ile de karşılaşılabilir. Bu belirsizliğin Ahu'nun durumunda olduğu gibi sonlu bir limit değerine dönüşebileceği bilinmektedir. Aşağıda Aysun'un ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.32. Aysun'un ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Son olarak Buse, önermenin doğruluğunu değerlendirirken herhangi bir argümantasyon sürecine girmeyerek önermenin yanlış olduğunu hissettiğini belirtmiştir.

Buse hiçbir gerekçe öne sürmemiştir. Buse'nin bir önermenin doğruluğuna ikna olmak için onun doğruluğundan ziyade önermenin şekli ile ilgilendiği söylenebilir. Aşağıda Buse'nin söz konusu ifadeleri yer almıştır.

Buse: Biri yakınsak diğeri ıraksak iken çarpımları ıraksak demiş. Yanlış gibi hocam. Nasıl karar verdi ki biri yakınsak diğeri ıraksak iken ıraksak olduğuna? Bunların çarpımlarının ıraksak olduğunu söyleyemez bence. İkisi de yakınsak olsaydı çarpımlarının yakınsak olduğunu söyleyebilirdi. Ama biri yakınsak diğeri ıraksak iken çarpımları ıraksak diyemeyiz. Bence diyemeyiz.

Öğretmen adaylarından diziler konusunda doğru olduğunu bildikleri matematiksel iddiaları nasıl savunduklarını ortaya çıkarmak amacıyla $(s_n) = (\frac{2.4.6 \ldots 2n}{3.5.7 \ldots 2n+1})$ dizisinin yakınsak olduğunu göstermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının doğrulama gerektiren bu problemi çözerken ne tür gerekçeleri kullandıkları incelenmiştir. Problemi çözmeye yönelik kullanılan gerekçeler ve argümanların matematiksel olarak ikna edicilik durumu Tablo 4.23'te sunulmuştur.

Tablo 4.23.

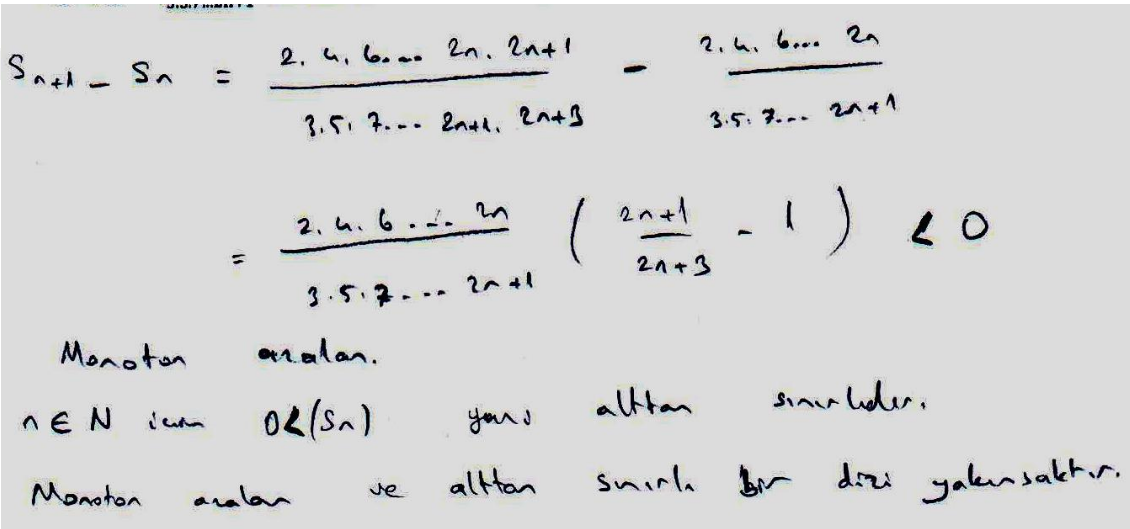
Öğretmen Adaylarının Ürettikleri Argümanlarda Kullandıkları Gerekçeler

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Dönüşümsel gerekçe		✓	✓					
Referanssız gerekçe					✓	✓	✓	✓
Boş	✓			✓				
İkna edicilik	Hayır	Evet	Evet	Hayır	Hayır	Hayır	Hayır	Hayır

Tablo 4.23 incelendiğinde, öğretmen adaylarından ikisinin (Adem, Aziz) ürettikleri argümanlarda tanımları ve teoremleri gerekçe olarak kullanıp ikna edici bir çözüm ürettikleri görülmektedir. Buna göre bu öğretmen adaylarının dönüşümsel gerekçe tipinde oldukları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının yarısı (Barış, Bilge, Buse, Belma) ise problemin çözümü için ürettikleri argümalarında matematiksel olarak hatalı işlemler yapmış ya da doğru olmayan teoremler kullanmışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının problem çözümünde matematiksel olarak yanlış bilgiler

kullandıkları anlaşılmıştır. Bu öğretmen adaylarının referanssız gerekçeler kullandıkları söylenebilir. Aysun ve Ahu problemin çözümünü boş bırakmıştır.

Adem ve Aziz kendilerine sunulan dizinin yakınsak bir dizi olduğu iddiasını ikna edici bir şekilde savunmuşlardır. Adem ve Aziz dizinin yakınsak olduğunu göstermek için “Monoton azalan ve alttan sınırlı her dizi yakınsaktır.” teoremini kullanmışlardır. Teoremin hipotezi olan dizinin monoton azalan olduğunu göstermek için monoton azalan dizi tanımının farklı formlarını uygulamışlardır. Dizinin alttan sınırlı olduğunu Adem cebirsel bir gösterim ile, Aziz ise tümevarım metodu ile göstermiştir. Aşağıda Adem’in çözümüne yer verilmiştir.



$$S_{n+1} - S_n = \frac{2.4.6\ldots 2n.2n+1}{3.5.7\ldots 2n+1.2n+3} - \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1}$$

$$= \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1}\left(\frac{2n+1}{2n+3} - 1\right) < 0$$

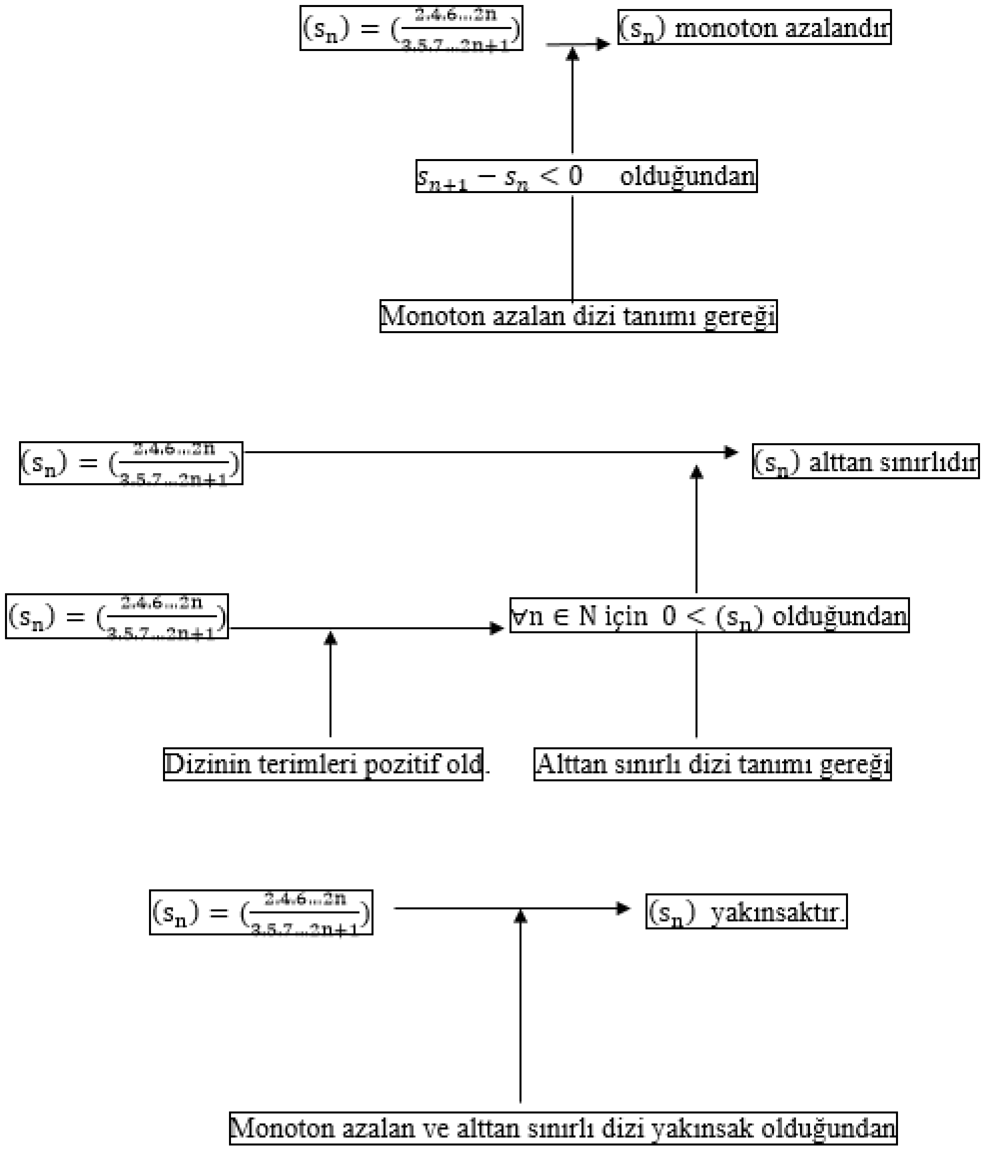
Monoton azalan.

$n \in N$ için $0 < (S_n)$ yani alttan sınırlıdır.

Monoton azalan ve alttan sınırlı bir dizi yakınsaktır.

Şekil 4.33. Adem’in çözümü

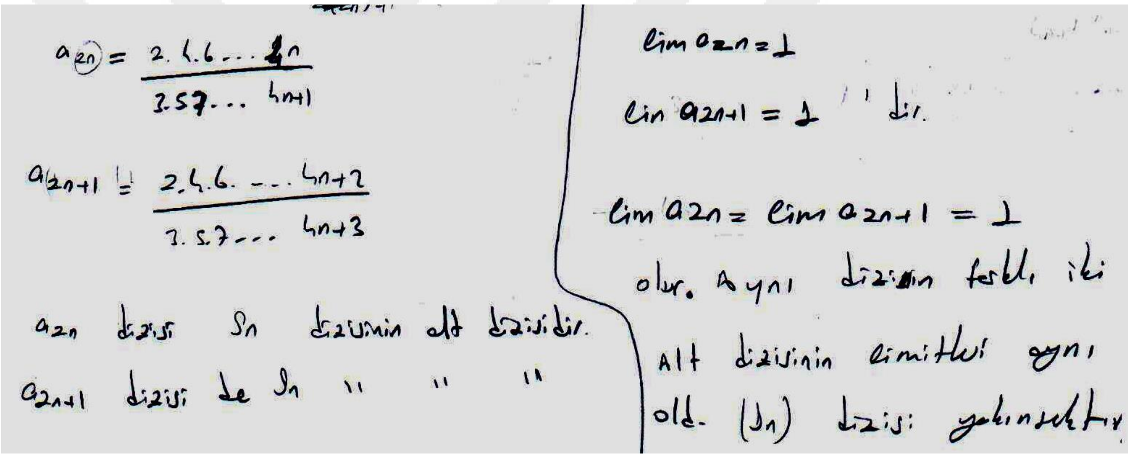
Adem savunmasının ana gerekçesi olarak monoton azalan ve alttan sınırlı bir dizinin yakınsak olduğu teoremini kullanmıştır. Dizinin monoton azalan olduğunu göstermek için monoton azalan dizi tanımının farklı bir formu olan $s_{n+1} - s_n < 0$ gerekçesini kullanmıştır. Alttan sınırlı dizi tanımını düşünerek dizinin her teriminin belli bir sayıdan daha büyük olması gerektiğini vurgulamıştır. (s_n) dizisinin terimlerinin pozitif reel sayı olmasından $0 < (s_n)$ sonucuna ulaşmıştır. Aşağıda Adem’in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.34. Adem'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Barış ise söz konusu dizinin yakınsak olduğunu göstermek için dizinin iki alt dizisini göz önüne almıştır. Bu alt dizilerin limitinin bir olduğunu iddia etmiştir. Bir dizinin farklı iki alt dizisinin aynı noktaya yakınsaması durumunda dizinin yakınsak olacağını belirterek bu dizinin de yakınsak olduğunu ifade etmiştir. Barış'ın çözümünde iki önemli hata mevcuttur. Bunlardan ilki, kendisine sunulan diziyi analiz etmemesidir. Bu diziyi polinom tipli iki fonksiyonun oranı olarak algıladığı için alt dizilerin limitinin bir olduğu sonucuna vardığı düşünülmüştür. İkincisi ise bir dizinin yakınsaklığı ile alt dizilerinin yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi ifade eden teoremi yanlış yorumlamasıdır. Barış'ın ifade ettiği "Bir dizi yakınsak ise alt dizileri de aynı noktaya yakınsar."

teoreminin denk olduğu karşıt tersinden “Bir dizinin herhangi iki alt dizisi farklı noktalara yakınsıyorsa dizi ıraksaktır.” sonucu çıkarılabilir. Barış dizinin ıraksaklığı için geçerli olan bu bilgiyi bilmektedir. Ayrıca Barış, bir dizinin iki farklı alt dizisinin aynı noktaya yakınsaması durumunda dizinin de yakınsak olacağını iddia etmiştir. Barış’ın iddiası bahsedilen teorem ile uyuşmamaktadır. Barış’ın iddiasının geçerli olduğu tek istisnai durum, söz konusu alt dizilerin terimlerinin birleşiminin dizinin tüm terimlerine eşit olmasıdır. Barış’ın ele aldığı tek ve çift alt dizilerin birleşimi diziyi oluşturmaktadır fakat Barış, bu istisnai durumu düşünerek hareket etmemiştir. Bu durum Barış ile araştırmacı arasında geçen konuşmada açık bir şekilde görülmüştür. Aşağıda Barış’ın problem çözümü ve bu süreçte araştırmacı ile arasında geçen konuşmadan bölümler sunulmuştur.



Şekil 4.35. Barış’ın çözümü

Barış: a_{2n+1} ile a_{2n} e bakalım.

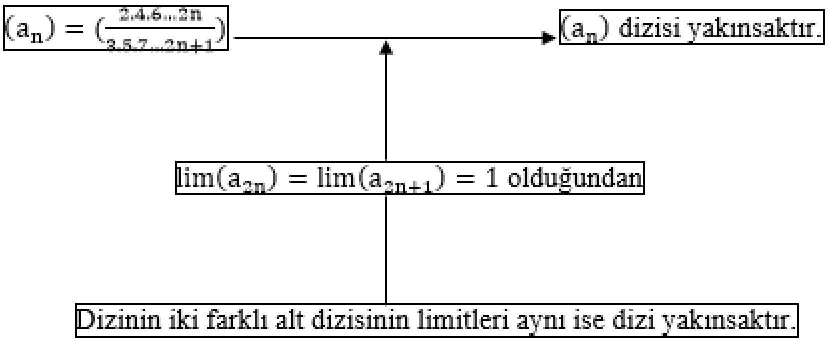
Araştırmacı: Neden?

Barış: Alt dizisi. Alt dizilerinin limiti aynı ise bu dizi yakınsaktır. Alt dizilerinin limitleri farklı ise ıraksaktır. Çünkü her yakınsak dizinin alt dizileri de yakınsaktır. Mesela a_{2n+1} üçe yakınsadı, a_{2n} bire yakınsadı. O zaman ıraksak dizidir.

Araştırmacı: Mesela a_{3n} üçe yakınsadı, a_{5n} de üçe yakınsadığını düşünelim. Sonuç ne olur?

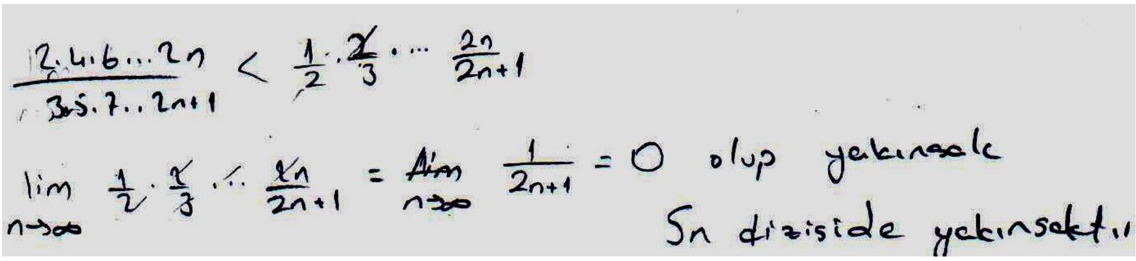
Barış: O zaman dizi de üçe yakınsar

Barış, çözümünde dizinin çift ve tek alt dizilerini dikkate almış ve bu alt dizilerin limitinin bire eşit olduğunu iddia etmiştir. Alt dizilerin limitinin neden bir olduğu konusunda bir açıklama yapmamıştır. Barış'ın diziyi polinom tipli iki ifadenin bölümü şeklinde algıladığı için bu kararı verdiği düşünülmektedir. Barış ürettiği argümanda konu ile ilgili teoremi yanlış yorumlamış ve argümanına gerekçe olarak kullanmıştır. Barış bir dizinin iki farklı alt dizisinin limitinin aynı olduğundan dizinin yakınsak olduğunu belirtmiştir. Barış'ın matematiksel ve mantıksal referansı olmayan gerekçeler kullandığı söylenebilir. Aşağıda Barış'ın ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.



Şekil 4.36. Barış'ın ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Bilge ve Belma dizinin yakınsak olduğunu göstermek için dizinin limitini almaya çalışmışlardır. Belma matematiksel olarak anlamsız işlemler yaparak dizinin limitinin sıfır olduğunu iddia etmiştir. Aşağıda Belma'nın çözümüne ve araştırmacı ile arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.



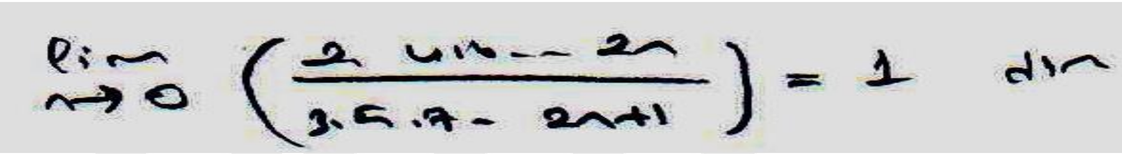
Şekil 4.37. Belma'nın çözümü

Belma: İfadeyi daha küçük bir ifade ile şey yaptım. Daha sonra limit aldım. Limiti sıfır çıktığı için yakınsaktır.

Araştırmacı: Limit nasıl sıfır çıktı?

Belma: Aldığım daha küçük değer, aldığım küçük fonksiyon sıfır olduğundan s_n fonksiyonu da sıfır dedim.

Bilge dizinin limitini alarak, dizinin limitinin bir olduğunu iddia etmiştir. Bilge'nin limiti bir olarak iddia etmesinin sebebi Barış'ın durumunda olduğu gibi diziyi polinom tipli iki ifadenin oranı olarak düşünmesidir. Bilge'nin çözümünde, diziler konusunda önemli bir yanılgısının olduğu da ortaya çıkmıştır. Bilge dizilerin limitinin sıfır noktasında arandığını belirtmiştir. Aşağıda Bilge'nin çözümüne ve araştırmacı ile arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.



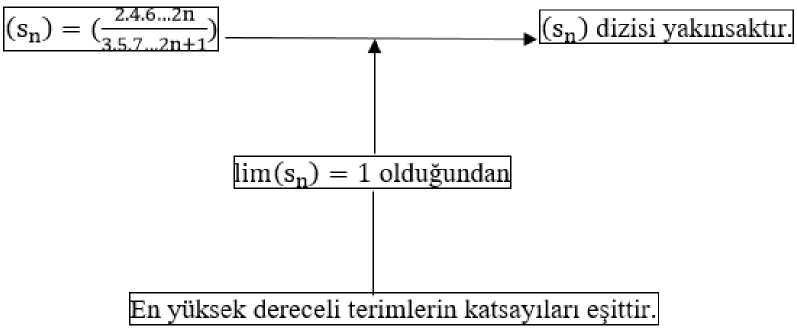
Şekil 4.38. Bilge'nin çözümü

Bilge: Yakınsak ise limiti var diyeceğim. Limitinin olduğunu göstereceğim. Evet, burada limit bir. Ama burada limiti sıfıra göre mi yoksa sonsuza göre mi alıyorduk? Sıfıra giderken bakıyorduk değil mi? Öyle hatırlıyorum ben. Sıfıra giderken bakıldığını hatırlıyorum. Yani direk onu gösterdim.

Araştırmacı: Limitinin bir olduğunu nasıl söyledin?

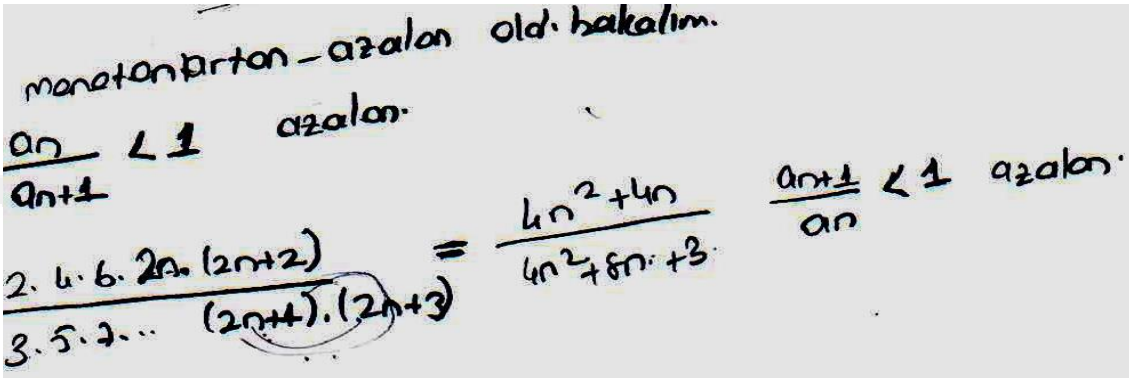
Bilge: Sıfırdayken limit aldım. En yüksek dereceli terimden bir geldi. $\frac{2n}{2n+1}$ *den, zaten katsayıları eşit.*

Bilge'nin ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.39. Bilge'nin ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Buse çözümünü yarım bırakmıştır. Dizinin yakınsak olduğunu göstermek için dizininin monotonluğunu ve sınırlılığını araştırmaya çalışmıştır. Dizinin monotonluğuna yönelik araştırma yapmış ve çözümünü sonlandırmıştır. Buse'nin çözümü incelendiğinde, dizinin monotonluğunu incelerken birbiri ile çelişen ifadeler kullandığı ortaya çıkmıştır. Dizinin monoton azalan olduğunu belirtmiş fakat herhangi bir açıklama ya da açık bir gösterim yapmamıştır. Buse'nin de referanssız gerekçeler kullandığı belirlenmiştir. Aşağıda Buse'nin çözümüne yer verilmiştir.



Şekil 4.40. Buse'nin çözümü

4.3.2. Öğretmen adaylarının diziler konusundaki ispat süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının diziler konusunda ispat süreçlerine yönelik bulgular sunulmuştur. Öğretmen adaylarının ispat süreçleri kapsamında kendilerine yöneltilen çelişki bulma ispat yöntemi ve ters örnek kullanılarak yapılmış ispatları nasıl değerlendirdikleri, doğru olduklarını düşündükleri önermeleri nasıl doğruladıkları ve yanlış olduğunu düşündükleri önermelerin yanlışlığını nasıl gösterdikleri incelenmiştir.

Öğretmen adaylarına ilk olarak "*Dizilerin limiti varsa tektir.*" teoreminin doğru bir şekilde yapılmış ispatı sunulmuştur. Öğretmen adaylarından ispatı değerlendirmeleri ve verdikleri kararların gerekçelerini yazmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejiler, ifadelerinden ve yazdıkları gerekçelerden ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Kullanılan stratejiler ve verilen kararlar Tablo 4.24'te sunulmuştur.

Tablo 4.24.

Öğretmen Adaylarının İspatı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler ve Verdikleri Kararlar

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	İspat basamakları ve işlemsel hata	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
	n_0 ın seçimi		✓	✓					
Yapısal inceleme	İspatlama yöntemi	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Yakınsak dizi tanımı	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Otoriter inceleme	Öğrenilen ispatla uyum					✓	✓		✓
Verilen karar		Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

Tablo 4.24'e göre, öğretmen adaylarının kendilerine sunulan ispatın doğru bir ispat olduğunu belirleyebildikleri görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının doğru ispatı seçme becerilerinin yüksek olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken nelere dikkat ettikleri incelendiğinde, hepsinin öncelikle ispatlama yöntemine ve yakınsak dizi tanımının kullanılmasına dikkat ettikleri ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının yarısından fazlası ispat basamaklarındaki geçişlere ve bu geçişlerde işlemsel hata olup olmamasına odaklanmışlardır. Üç öğretmen adayı ispatı değerlendirirken, otoriter bir bakış açısı ile daha önce öğrendikleri ispatla uyumlu olmasına dikkat etmişlerdir. İki öğretmen adayı ise ispatta bulunan n_0 teriminin nasıl seçildiğini göz önünde bulundurmuşlardır.

Öğretmen adaylarının verdikleri kararlarda ispatlama yöntemini değerlendirmeleri önemli bir yer tutmuştur. Öğretmen adayları ispatlama yöntemini doğru bir şekilde belirlemede sıkıntı çekmişlerdir. Öğretmen adaylarından Ahu, Adem ve Aysun ispatın çelişki bulma yöntemiyle yapıldığını belirtip açıklayabilirken, diğerleri ise ispatın olmayana ergi ispatlama yöntemiyle yapıldığını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarına, ispatın neden olmayana ergi yöntemi ile yapıldığını düşündükleri sorulduğunda uygun bir açıklama yapamamışlardır. Bu durumun sebebi incelendiğinde ise, öğretmen adaylarının çelişki bulma yöntemi ile olmayana ergi ispatlama yöntemini birbirinden ayırt edemedikleri tespit edilmiştir. Aşağıda ispatlama yöntemini doğru bir şekilde tespit eden öğretmen adaylarından Ahu ile araştırmacı arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.

Ahu: Hocam tersini kabul etmiş. Sonra aslında aldığımız iki tane limitin bir tane olduğunu göstermiş. Yani tersini kabul edip öyle olmadığını göstermiş.

Araştırmacı: Hangi ispatlama yöntemi ile yapılmış?

Ahu: Olmayana ergi $q' \Rightarrow p'$ idi. Burada q' yani. Olmayana ergi mi, çelişki bulma mı? Çelişki bulma sanki.

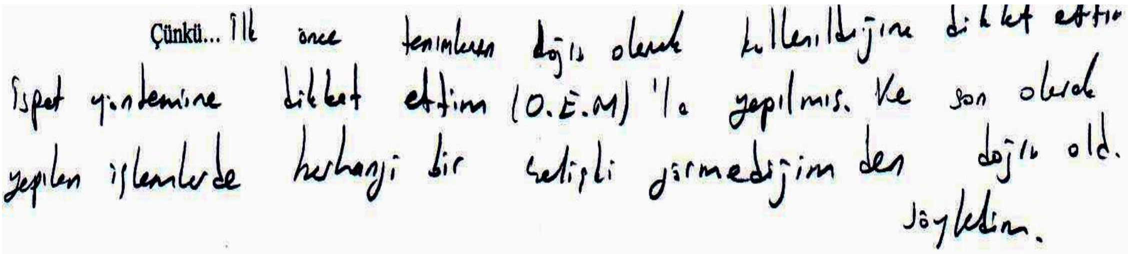
Araştırmacı: Neden çelişki bulma?

Ahu: Tersini varsayalım diye başlıyoruz?

Araştırmacı: Olmayana ergi yöntemi ile çelişki bulma yöntemi arasındaki fark nedir?

Ahu: Çelişki bulmada tersini varsayıyorduk, daha sonra onun doğru olmadığını gösteriyorduk. Olmayana ergide de yine önermenin tersini alıyorsun yine tersini buluyorsun. Sembolik olarak $p \Rightarrow q$ önermesi için $q' \Rightarrow p'$ idi.

Ahu, Adem ve Aysun'un dışındaki öğretmen adayları ispatın olmayana ergi ispatlama yöntemi ile yapıldığını belirtmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın gerekçesine ve araştırmacı ile arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.


Çünkü... İlk önce terimlerin doğru olarak kullanıldığına dikkat ettim ispat yöntemine dikkat ettim (O.E.M) 'la yapılmış. Ve son olarak yapılan işlemlerde herhangi bir çelişki görmediğimden doğru old. söyledim.

Şekil 4.41. Barış'ın gerekçesi

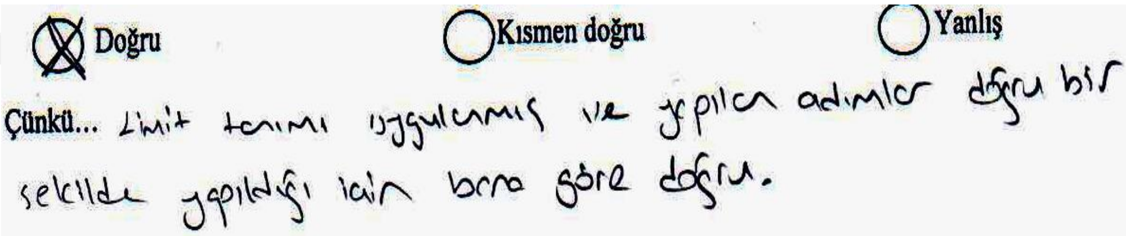
Araştırmacı: Neden olmayana ergi yöntemi?

Barış: Bu gibi şeylerde onu kullanıyoruz. Diyelim ki A noktasından B noktasına iki farklı yoldan gidiliyor. Sen bunu ispatlamaya geçtiğin zaman A ve B noktalarına bir yoldan gidilsin diyor. Kabul ediyor bunu. Bu şekilde yapılan ispatlara olmayana ergi metodu diyoruz.

Araştırmacı: Peki, çelişki bulma yöntemiyle arasındaki fark nedir?

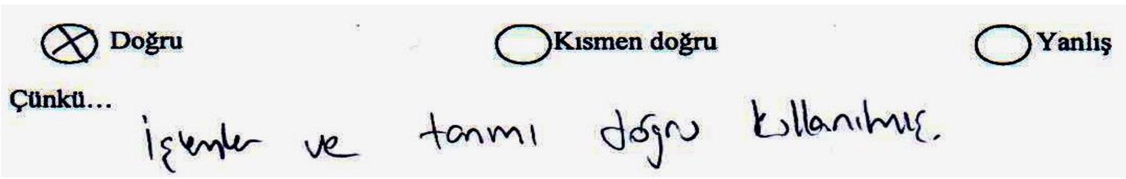
Barış: Çelişki bulmayı biraz andırıyor ama tam karşılığını vermez. Çelişki var ama olmayana ergi de, kabul ettiği bir şeye çelişki var. Hani iki tane limiti olsun diyor sonra aynı olduğunu buluyor bu bir çelişkidir. Çünkü bir tane limiti olmuş diyor. Yani kabul ettiği şeyle çelişmiş oluyor. Aradaki fark bu.

Öğretmen adaylarının hepsi ispatı değerlendirirken yakınsak dizi tanımının kullanılıp kullanılmamasına dikkat etmişlerdir. İspatta limit tanımı olarak belirttikleri yakınsak dizi tanımının uygulanmasının gerekli olduğunu düşünmüşlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aysun'un ifadelerine yer verilmiştir.



Şekil 4.42. Aysun'un gerekçesi

Öğretmen adaylarının çoğu ispatı değerlendirirken ispatın adımlarını da incelemişlerdir. İspatların adımları arasındaki bağlantılara ve bu adımlarda işlemsel bir hata bulunmamasına dikkat etmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Ahu'nun ifadelerine yer verilmiştir.



Şekil 4.43. Ahu'nun gerekçesi

Barış, Bilge ve Belma ispatı değerlendirirken daha önceden bildikleri ispatla uyumlu olup olmamasına dikkat etmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Bilge'nin ifadelerine yer verilmiştir.

Bilge: Doğru başlamış, ben de öyle başlardım. Mesela $\frac{\varepsilon}{2}$ *diye hatırlıyorum bunu. Farklı limitinin olduğunu hatırladığım teoremden. Öyle yaptığımızı hatırlıyorum. Ben bizim yaptığımız ispatta* ε *yerine* $\frac{\varepsilon}{2}$ *oluyordu diye biliyordum. Sonra onları* *topladığımızda s_n leri toplayıp çıkardığımızda ε buluyorduk. Ona dikkat ettim. Öğrendiğim şekle uygun olup olmamasına baktım.*

Adem ve Aziz ispatta önemli bir yer tutan n_0 teriminin doğru bir şekilde seçilmesine dikkat etmişlerdir. Öğretmen adayları ispatta n_0 teriminin öneminden bahsederek bu ispatta da doğru bir şekilde seçildiğini ifade etmişlerdir. İspatta n_0 teriminin n_1 ve n_2 teriminden en büyüğünün seçilmesi sayesinde, ispatın ilk basamağında yer alan eşitsizlik ile ikinci basamakta yer alan eşitsizliğin ortak olarak kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Aşağıda Aziz ile araştırmacı arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.

Aziz: İspata baktığımız zaman tanımlar doğru kullanılmış. Burada o ayrıntı mesela $n_0 = maks\{n_1, n_2\}$ almış. Orada minimum olsaydı sağlamayan yerler olabilirdi. Mesela sayı doğrusunda gösterirsek şurası n_1, şurası da n_2 olsun [sayı doğrusunda n_1 ve n_2 noktalarını, $n_1 < n_2$ olacak şekilde işaretliyor]. Şu aradaki yerler n_1 için sağlamaz [n_1 ile n_2 noktaları arasında kalan bölgeyi işaretliyor]. Ama burada maksimum alındığı için o durumu da ortadan kaldırmış.

Araştırmacı: Neden maksimum seçilmiş? Açıklar mısın?

Aziz: Onu şekilde çizdim. Birincinin terimleri n_1 den itibaren olsun, ikincinin terimleri de n_2 den itibaren olsun.

Araştırmacı: Terimleri buradan itibaren dediğin şey nedir?

Aziz: Şuradaki $n > n_1$ derken bundan sonraki terimler a nın ε komşuluğu içinde kalır. Burada da n_2 den sonraki terimler b nin ε komşuluğnda kalır.

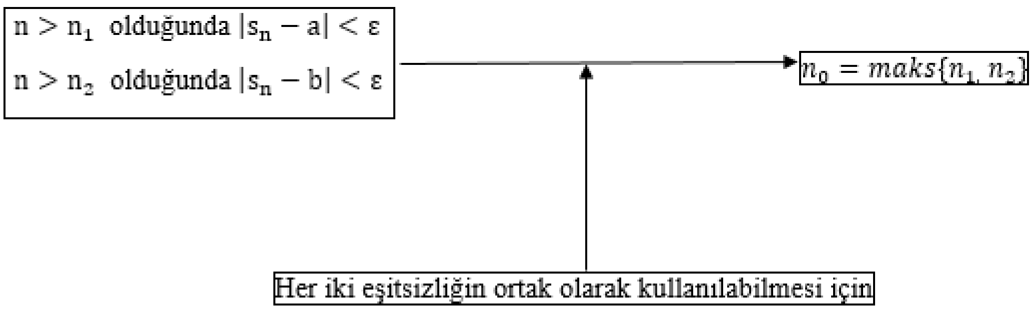
Araştırmacı: Minimum olsaydı ne olurdu?

Aziz: Şimdi minimum olsaydı yanlış olurdu. Minimum olsaydı işte bunu alırdı [çizdiği şekilde n_2 den sonraki terimleri gösteriyor], bunun için sağlanmazdı [$n_1$den sonraki terimleri gösteriyor]. Şimdi n_1 e 1, n_2 ye de 5 diyelim. 1 den sonraki terimler için a nın ε komşuluğundaki s_n ler olan ilk eşitsizlik geçerli, diğer eşitsizlik için de 5 ten sonraki terimler için geçerli. Minimum aldığımız zaman 1 den sonraki terimler için söyleriz. Ama biz burada 5 ten sonraki terimler için söylemeliyiz.

Araştırmacı: Minimum olsaydı nerede sıkıntı olurdu?

Aziz: Yani dördüncü, üçüncü, ikinci ve birinci terim için sıkıntı olurdu.

Aziz'in ifadelerinden, $n_0 = maks\{n_{1,} n_2\}$ seçilmesinin sebebini açıklarken yakınsak dizi tanımındaki kavramsal bilgilerini kullandığı tespit edilmiştir. İspatın ikinci satırında yer alan "$\mathrm{n} > \mathrm{n}_1$ olduğunda $|\mathrm{s_n} - \mathrm{a}| < \varepsilon$" ifadesinden $|\mathrm{s_n} - \mathrm{a}| < \varepsilon$ eşitsizliğinin $\mathrm{s_n}$'nin n_1'den sonraki terimleri için geçerli olduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde ispatın üçüncü satırında yer alan "$\mathrm{n} > \mathrm{n}_2$ olduğunda $|\mathrm{s_n} - \mathrm{b}| < \varepsilon$" ifadesinden $|\mathrm{s_n} - \mathrm{b}| < \varepsilon$ eşitsizliğinin $\mathrm{s_n}$'nin n_2'den sonraki terimleri için geçerli olduğunu vurgulamıştır. Her iki eşitsizliğin ortak olarak kullanılabilmesi için $n_0 = maks\{n_{1,} n_2\}$ seçilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Aşağıda Aziz'in ispatı değerlendirirken ürettiği bu argümanın Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.

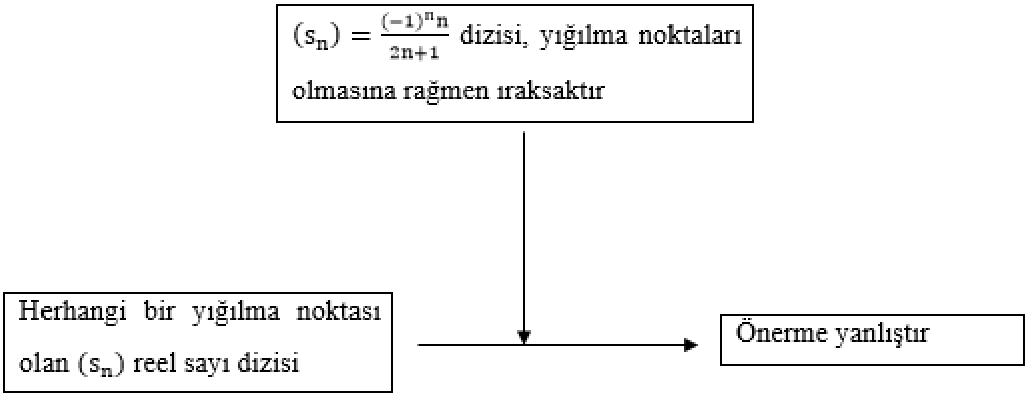


Şekil 4.44. Aziz'in ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Adem ve Aziz dışındaki öğretmen adayları $n_0 = maks\{n_{1,} n_2\}$ seçilmesinin sebebini açıklayamamıştır. Ayrıca öğretmen adaylarından hiçbiri ispatın sonunda yer alan $|\mathrm{a} - \mathrm{b}| < 2\varepsilon$ ifadesinden $a = b$ sonucuna nasıl ulaşıldığını ifade edememiştir. Öğretmen adayları ya bu argümanın gerekçesini hiç düşünmediklerini ya da sezgisel olarak bu argümanın doğru olduğunu belirtmişlerdir. Aşağıda Adem'in konu ile ilgili ifadelerine yer verilmiştir.

Adem: Evet oraya ikna olmada bir sıkıntı var. 2ε ama orada rahatlıkla mutlak değerin sıfıra eşit diyebilirim de tam olarak açıklayamadım orayı. Bildiğim bir şey bu, ben ikna oldum.

Öğretmen adaylarına değerlendirmeleri için bir dizinin yığılma noktası ile limiti arasındaki ilişki ile ilgili olan *"(s_n) herhangi bir reel sayı dizisi olsun. (s_n) dizisinin herhangi bir yığılma noktası var ise yakınsaktır."* yanlış önermesinin, ters bir örnek yardımıyla yanlışlığı gösterilmiştir. Öğretmen adaylarından ters örnek ile yapılan ispatı değerlendirmeleri ve bu ispatın doğruluğu hakkında karar vermeleri istenmiştir. Bu önermenin yanlışlanmasında kullanılan global argümanın Toulmin modeline göre analizi aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.45. Önermenin yanlışlanmasında kullanılan argümanın Toulmin modeline göre analizi

Öğretmen adaylarının ters örnekle yapılan ispatı değerlendirirken ne tür stratejiler uyguladıkları incelenmiştir. İncelemeler yapılırken öğretmen adaylarının yazılı ve sözlü ifadeleri ortak olarak değerlendirilmiştir. Tablo 4.25'te öğretmen adaylarının kullandıkları stratejiler ve verdikleri kararlar sunulmuştur.

Tablo 4.25.

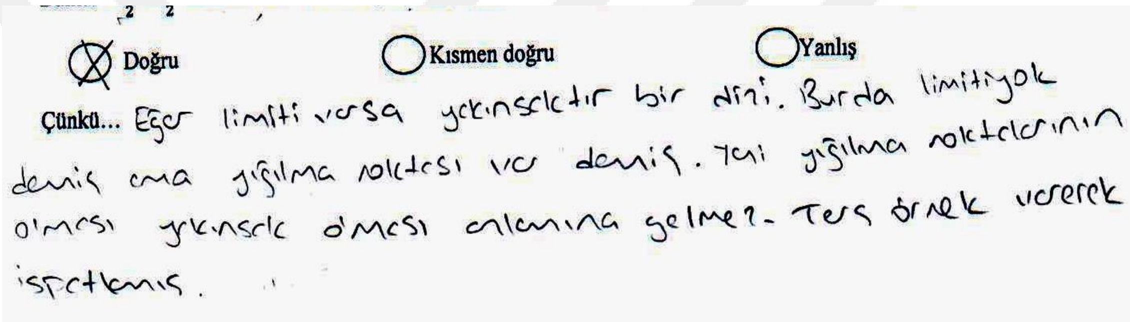
Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Kullanılarak Yapılan İspatı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler ve Verdikleri Kararlar

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	Gerekçeleri inceleme	✓	✓	✓		✓	✓		
Yapısal inceleme	İspatlama yöntemi	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Otoriter inceleme	Geçmiş bilgiler						✓		
	Otoriter bilgiler							✓	
Verilen karar		Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Yanlış	Kısmen doğru

Tablo 4.25 incelendiğinde öğretmen adaylarından sadece iki öğretmen adayının ters örnek ile yapılan ispatın doğru olmadığını ifade ettikleri görülmüştür. Öğretmen

adaylarının tümü ispatı değerlendirirken ispatın yapılış yöntemini dikkate almışlardır. Öğretmen adaylarından yarısından fazlası ispatta kullanılan gerekçeleri incelemiştir. Bir öğretmen adayı ispatı geçmiş bilgilerinden yardım alarak değerlendirirken bir öğretmen adayı ise otoriteden gelen bilgilerini kullanmıştır.

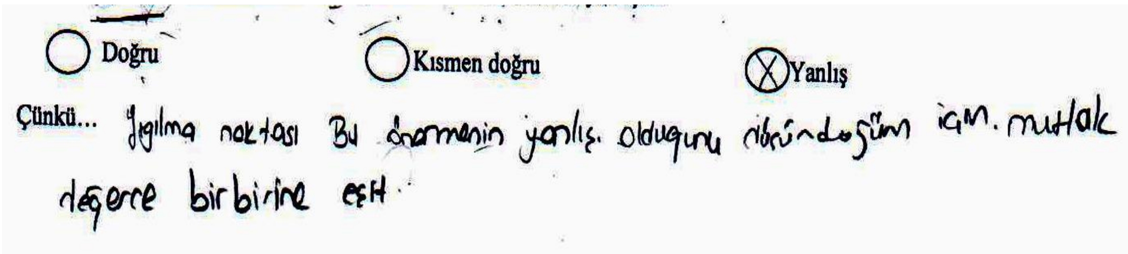
Öğretmen adaylarının hepsi ispata yönelik değerlendirme yaparken ispatın yöntemine dikkat etmişlerdir. Verdikleri kararlarda büyük oranda ispatın nasıl yapıldığı etkili olmuştur. Öğretmen adaylarının çoğu, ters örnek üretilerek yapılan ispatın doğru bir ispat olduğunu ifade etmişlerdir. Söz konusu ters örneğin önermeyi çürütmek için yeterli olduğunu vurgulamışlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aysun'un sunduğu gerekçeye yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Eğer limiti varsa yakınsaktır bir dizi. Burda limiti yok demiş ama yığılma noktası var demiş. Yani yığılma noktalarının olması yakınsak olması anlamına gelmez. Ters örnek vererek ispatlamış.

Şekil 4.46. Aysun'un gerekçesi

Buse ise ispatta yer alan ters örneğin uygun bir ters örnek olmadığını ifade etmiştir. Buse ifadelerinde söz konusu ters örneğin yığılma noktalarının mutlak değerce birbirine eşit olduğunu ifade ederek bu örneğin uygun olmadığını belirtmiştir. Buse'nin ifadelerinden ne demek istediği tam olarak anlaşılamamaktadır. Buse bu düşüncesine dayanak olarak ilgili dersin hocasını göstermiştir. Ders hocasının onun ifade ettiği şekilde söylediğini iddia etmiştir. Aşağıda Buse'nin gerekçesine ve konu ile ilgili ifadelerine yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Yığılma noktası bu önermenin yanlış olduğunu düşündüğüm için. mutlak değerce birbirine eşit.

Şekil 4.47. Buse'nin gerekçesi

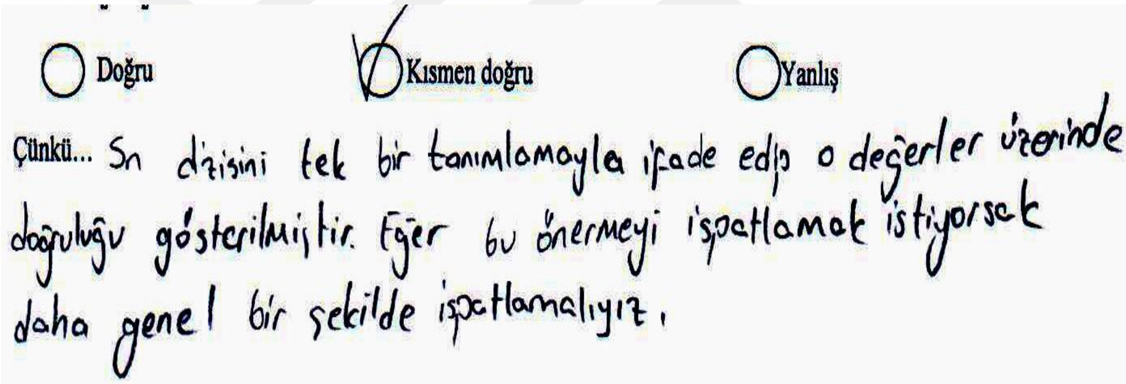
Araştırmacı: Bu yapılan sana neden ikna edici gelmedi?

Buse: Burada seçtiği yığılma noktaları iki tane olsa bile -½ ve ½ mutlak değerce birbirine eşit. O yüzden bana yanlış geldi sanki.

Araştırmacı: Neden mutlak değerini alıyorsun?

Buse: Bu şekilde olduğu zaman mutlak değeri olamıyor muydu? Ben öyle hatırlıyorum. Bilmiyorum ama hocanın söylediklerini öyle gözümde canlandırmış olabilirim. Hocanın söylediklerinden ben öyle anladım.

Belma ters bir örneğin bu önermeyi yanlışlamak için yeterli olmadığını, daha genel bir şekilde ispatlanmasının gerekli olduğunu belirtmiştir. Bu yüzden yapılan ispatın da kısmen doğru olacağını ifade etmiştir. Buna göre Belma'nın ters örneklerle yapılan ispatlara yönelik bilgisinde eksikliklerin olduğu söylenebilir. Aşağıda Belma'nın gerekçesine yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Sn dizisini tek bir tanımlamayla ifade edip o değerler üzerinde doğruluğu gösterilmiştir. Eğer bu önermeyi ispatlamak istiyorsak daha genel bir sekilde ispatlamalıyız.

Şekil 4.48. Belma'nın gerekçesi

Öğretmen adaylarının yarısından fazlası ispatta bulunan argümanların gerekçelerini incelemişlerdir. Öğretmen adayları bu argümanlarda ya işlem hatası olup olmamasını ya da elde edilen sonuçların mantıksal olarak doğru olup olmamasına dikkat etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının çoğu, ispatta yer alan ifadelerin sebeplerini doğru bir şekilde sorgularken bazıları ise matematiksel olarak yanlış gerekçeler sunmuşlardır. Ahu, Adem ve Aziz ispatta yer alan ters örnek olarak verilen dizinin yığılma noktalarını sorgularken matematiksel olarak doğru gerekçeler kullanmışlardır. Aziz, dizinin yığılma noktalarının alt dizilerinin limitinden geldiğini ifade etmiştir. Aşağıda Aziz'in ifadeleri yer almaktadır.

Araştırmacı: ½ ve -½ nereden geliyor?

Aziz: Sonsuza giderken dizinin limitine baktığımız zaman bir pozitif, bir negatif oluyor. Çiftler için pozitif oluyor ½, tekler için -½ oluyor.

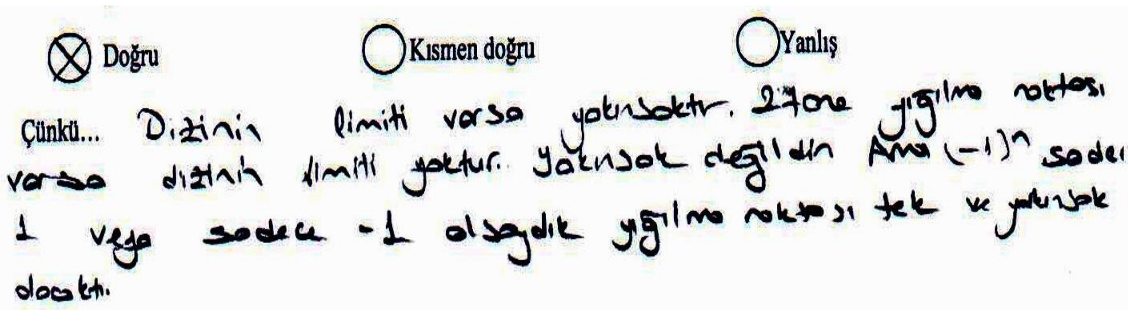
Araştırmacı: Çift ve tek dediğin şey nedir?

Aziz: Tekler ve çiftler bu dizinin iki alt dizisi. Alt dizilerin limitleri farklı olduğu için ıraksaktır.

Öğretmen adaylarından Bilge ise yığılma noktaları olan ½ ve -½ nin nereden geldiğini ifade ederken dizilerdeki limit kavramını fonksiyonların bir noktadaki limiti kavramı ile karıştırmıştır. Bu durumun sebebinin Bilge'nin yakınsak dizi tanımına yönelik kavramsal bilgi eksikliği olduğu ortaya çıkmıştır. Dizi kavramına yönelik etkinliklere başlamadan önce yakınsak dizi tanımını açıklarken de süreklilik kavramı ile ilgili ifadeler kullanmıştır. Burada da yakınsak dizi kavramı ile fonksiyonların bir noktadaki limiti kavramı arasındaki ayırımı yapamadığı ortaya çıkmıştır. Yığılma noktalarının sağ limit ve sol limitten geldiğini ifade etmiştir. Aşağıda Bilge'nin ifadeleri yer almıştır.

Bilge: Buradaki $(-1)^n$ de n yerine 2n olsaydı, sağ limiti 1 olacaktı. O zaman da limiti var diyecektik ve yakınsak olacaktı. Burada -1 işin içine girdiği için, limiti olmadığı için ikna oldum.

Ayrıca Bilge ispatı değerlendirirken daha önceki bilgilerinin etkisi ile karar vermiştir. Bilge bir dizinin iki tane yığılma noktası varsa dizinin ıraksak olacağı bilgisini kullanarak karar vermiştir. Aşağıda Bilge'nin kararının gerekçesine yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Dizinin limiti varsa yakınsaktır. 2 tane yığılma noktası varsa dizinin limiti yoktur. Yakınsak değildir. Ama $(-1)^n$ sadece 1 veya sadece -1 olsaydık yığılma noktası tek ve yakınsak olacaktı.

Şekil 4.49. Bilge'nin gerekçesi

Barış ise ters örnekte verilen dizinin neden ıraksak olduğunu sorgularken sıklıkla dizileri reel sayı serileri ile karıştırmıştır. Serilerin yakınsaklık karakterini belirlemede geçerli olan özellikleri dizinin karakterini belirlemek için kullanmıştır. Aşağıda Barış'ın ifadelerinden bölümlere yer verilmiştir.

Barış: Genel teriminin limiti sıfırdan farklı ise ıraksak diyorduk… Alterne seri, dizileri de serilerin aynı şeyinden yapıyoruz. Yani terimleri çift için artı, tek için eksi… Tamam hocam birkaç değer verelim. Artan, azalan dizi olduğunu görürüz. Hocam mesela a_{n+1} ile a_n i oranlarız, farkını alırız.

İspat değerlendirme aktivitelerinin ardından öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini ortaya çıkarmak için *"Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir."* önermesi için ürettikleri ürünler incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlarının dört kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4.26'da kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

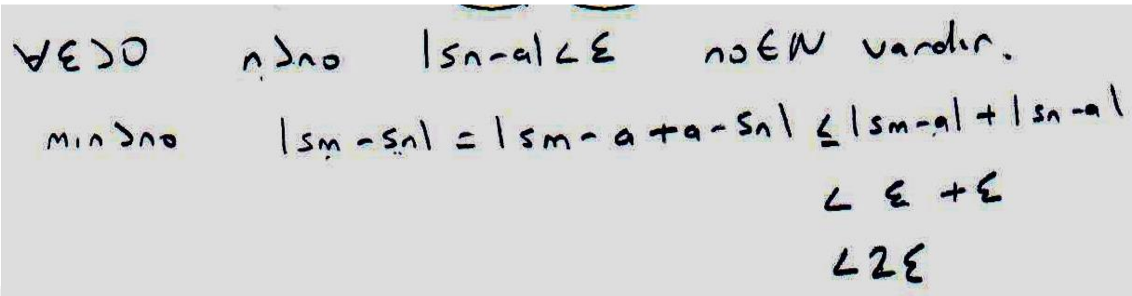
Tablo 4.26.

Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ispat			✓	✓				
Kısmen doğru ispat								✓
Tamamlanma-mış ispat							✓	
Tanımları kopyalama					✓	✓		
Boş	✓	✓						

Tablo 4.26 incelendiğinde sadece iki öğretmen adayının doğru bir ispat ürettiği belirlenmiştir. Diğer öğretmen adaylarından ikisi önermenin yanlış olduğunu ifade etmiş fakat ters bir örnek bulamayarak ispatı boş bırakmışlardır. İki öğretmen adayı ise ispatlarında sadece tanımlara yer vermişlerdir. Bir öğretmen adayı ispatını tamamlayamamış ve yarım bırakmıştır. Bir öğretmen adayı da kısmen doğru bir ispat yapmıştır. Buna göre öğretmen adaylarının diziler konusundaki bu teoremin ispatını yapma becerilerinin düşük olduğu söylenebilir.

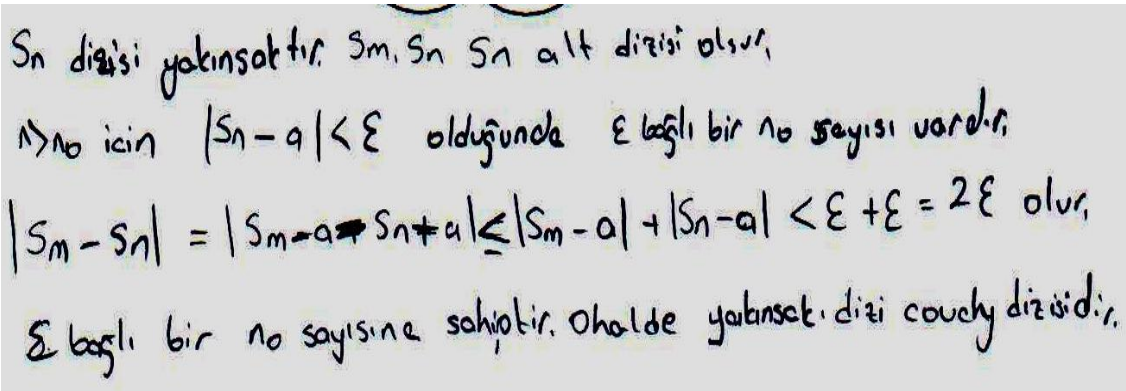
Aziz ve Aysun yakınsak dizi tanımından yola çıkarak Cauchy dizisi tanımına ulaşmışlardır. Bu öğretmen adayları ispatlarını yaparken yakınsak dizi ve Cauchy dizisi kavramlarını düşünerek birbiri arasında ilişki kurmuşlardır. Buna göre öğretmen adaylarının dönüşümsel ispat şemasında oldukları söylenebilir. Örnek olarak Aziz, ispatına teoremin hipotezi olan yakınsak dizi tanımını yazarak başlamıştır. Yakınsak dizi tanımından hareketle Cauchy dizisi tanımına nasıl ulaşacağı konusunda düşünce sürecine girmiştir. Cauchy dizisi ile yakınsak dizi arasındaki kavramsal ilişkileri kullanarak ispatını sonuçlandırmıştır. Aşağıda Aziz'in ispatına ve ifadelerine yer verilmiştir.



Şekil 4.50. Aziz'in ispatı

Aziz: Şimdi elimde yakınsak bir dizi var [yakınsak dizinin tanımını yazıyor]. Bu, yakınsaklığın tanımı. Şimdi Cauchy dizisi için farklı bir m terimini alayım. Şimdi yine m ve n de dizinin n_0 dan sonraki iki farklı terim olsun. $|s_m - s_n|$ nin ε dan küçük olduğunu bulmaya çalışıyorum… Şimdi ben $|s_m - s_n|$ ifadesine a ekleyip çıkarsam, buradan da üçgen eşitsizliğinden $|s_m - a|$ ile $|s_n - a|$ olur. Zaten m ve n de n_0 dan sonraki terimler olduğu için bunlar komşuluğun içinde kalır. Buradan büyük olan ε yazdığım zaman eşitlik kalkar. $< 2\varepsilon$ olur. Bu da $|s_m - s_n|$ nin komşulukta kaldığını gösterir. O zaman Cauchy dizisidir.

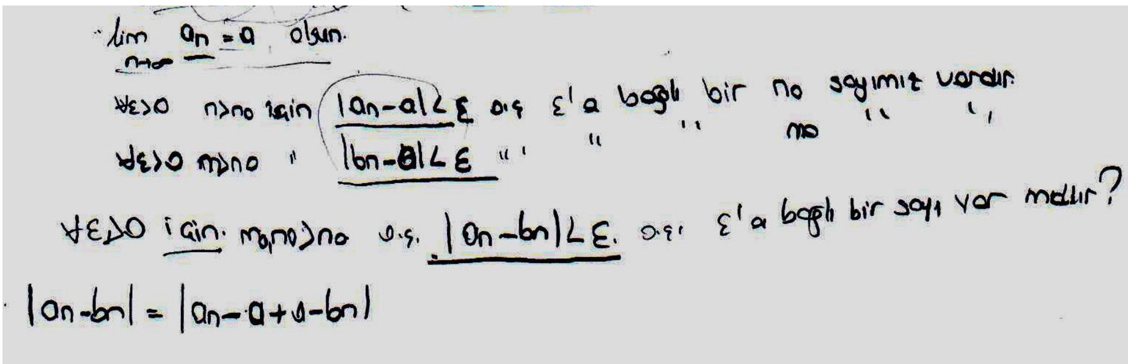
Belma'nın ispatı incelendiğinde, yapı olarak doğru bir ispat gibi görünse de ispatta bazı eksiklikler olduğu görülmüştür. Bu eksikliklerden biri Cauchy dizisi tanımına yönelik kavramsal bilgi eksikliğinden kaynaklanan bir eksikliktir. Belma, Cauchy dizisinde bulunan $|s_m - s_n|$ ifadesinde yer alan ve dizinin n_0'dan sonraki iki farklı terimini temsil eden s_m ve s_n terimlerini dizinin iki alt dizisi olarak görmüştür. Belma'nın ispatındaki ikinci eksiklik ise, Cauchy dizisinin kesme noktasının açıkça belirtilmemesidir. Kesme noktasının belirtilmesi Cauchy dizisi için kullanılan eşitsizliklerin geçerliliğinin de bir garantisidir. Belma'nın ispatındaki bu eksiklikler düşünülerek bu ispat, kısmen doğru olarak değerlendirilmiştir. Bu durumun sebebi olarak, Belma'nın ispatı daha önce yaptığını hatırladığı için zihnindeki belli bir algoritmayı takip ettiği düşünülmektedir. Belma prosedürel bir yaklaşım sergilemiştir. Aşağıda Belma'nın ispatına ve ifadelerine yer verilmiştir.



Şekil 4.51. Belma'nın ispatı

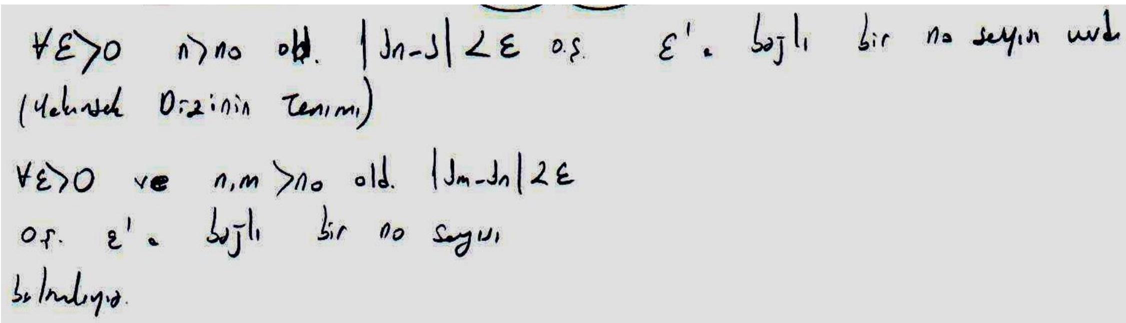
Belma: Bu doğru çünkü ispatını yapmıştık... s_n yakınsak dizi dedim. Daha sonra yakınsaklık tanımını yazdım. Daha sonra Cauchy dizisi olması için iki alt dizisi seçtim ve bunların yakınsak olduklarını göstermeye çalıştım. Bir dizinin her alt dizisi yakınsaktır diyerek oradaki işlemleri yaptım. a ekleyip çıkarttım. Daha sonra alt dizileri ayırt ettim. ε a bağlı bir n_0 sayısı buldum. O halde dedim yakınsaktır. Cauchy dizisidir.

Buse ispatını tamamlayamamıştır. Buse tıpkı Belma gibi, Cauchy dizisi tanımındaki farklı terimleri, farklı alt diziler olarak dikkate almıştır. Bu bakımdan Buse'nin de Cauchy dizisi tanımına yönelik kavramsal bilgilerinde eksikliklerin olduğu söylenebilir. Ayrıca Buse'nin ispatında notasyonları kullanma konusunda güçlük yaşadığı da görülmüştür. Aşağıda Buse'nin ispatı sunulmuştur.



Şekil 4.52. Buse'nin ispatı

Barış ve Bilge ispatlarında sadece yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımını ifade etmişler ve ispatlarını tamamlayamamışlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın ispatına yer verilmiştir.



Şekil 4.53. Barış'ın ispatı

Öğretmen adaylarının yanlış olan matematiksel bir önerme için ne tür ürünler ortaya çıkaracaklarını belirleyebilmek için *"(s_n) yakınsak ve (t_n) ıraksak reel sayı dizisi olmak üzere $(s_n.t_n)$ çarpım dizisi ıraksaktır"* önermesi için oluşturdukları ürünler incelenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda öğretmen adaylarının ürünlerinin dört kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Bu kategoriler hakkındaki bilgilere Tablo 4.27'de yer verilmiştir.

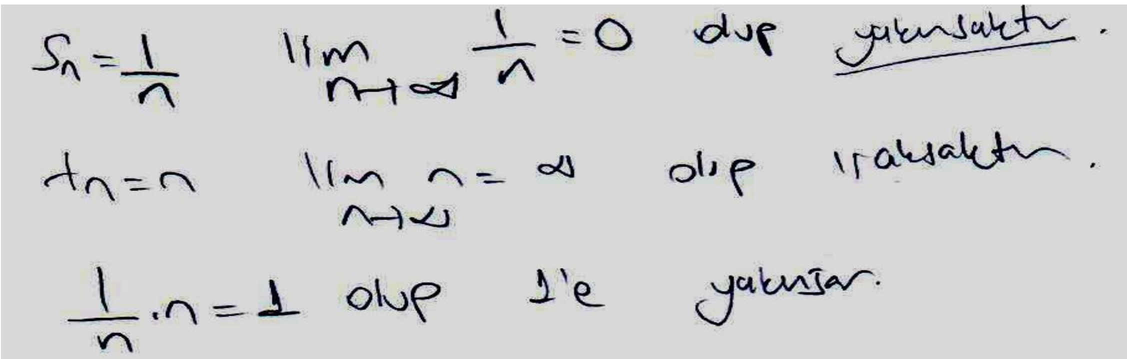
Tablo 4.27.

Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Üretme Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ters örnek	✓	✓	✓					
Açıklama yapma							✓	
Örnekle doğrulama					✓	✓		
İspat				✓				✓

Tablo 4.27 incelendiğinde önermenin yanlış olduğunu belirten dört öğretmen adayından üçünün doğru ters örnek ürettikleri belirlenmiştir. Diğer öğretmen adayı ters örnek üretme yerine açıklama yaparak önermenin yanlış olduğunu göstermeye çalışmıştır. Öğretmen adaylarının yarısı önermenin doğru olduğunu düşünerek doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından ikisi önermeyi ispatlamaya çalışırken diğer ikisi özel örnekler kullanarak önermenin doğruluğunu göstermek istemiştir

Ahu, Aziz ve Adem önermenin yanlışlığını doğru bir ters örnek üreterek göstermişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Ahu’nun ispatına yer verilmiştir.



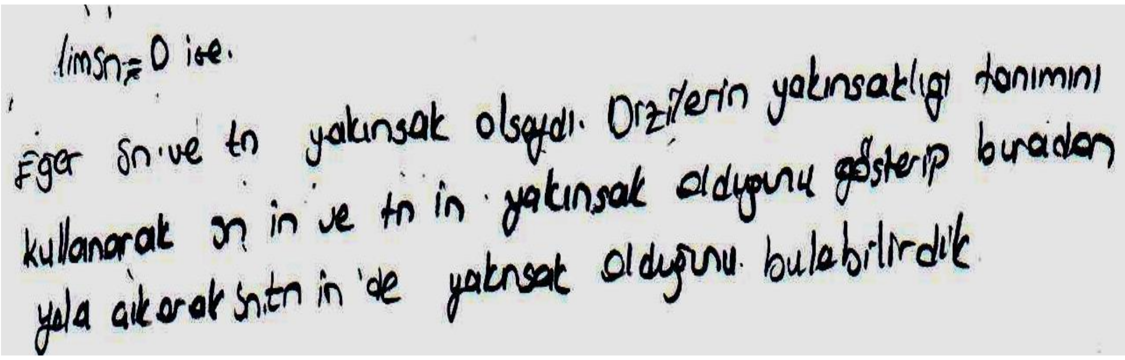
$S_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olup yakınsaktır.

$t_n = n$ $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ olup ıraksaktır.

$\frac{1}{n} \cdot n = 1$ olup 1'e yakınsar.

Şekil 4.54. Ahu’nun ispatı

Buse önermenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Önermenin yanlış olduğunu göstermek için ters örnek ile ispat yapmak yerine önermenin yanlış olduğunu açıklamaya çalışmıştır. Buse’nin önermenin yanlışlığını ters örnek bularak ispatlamak yerine açıklamaya çalışması şaşırtıcı bir durum olmamıştır. Çünkü Buse çalışmanın ilk mülakatında ispata yönelik görüşlerini dile getirirken bir ifadenin yanlış olduğunu göstermek için açıklama yaptığını belirtmişti. Bu durum Buse’nin önermelerin ya da matematiksel ifadelerin nasıl yanlışlanacağı konusunda bilgi eksikliğinin olduğu yönündeki sonuçları teyit etmiştir. Aşağıda Buse’nin ispatına yer verilmiştir.

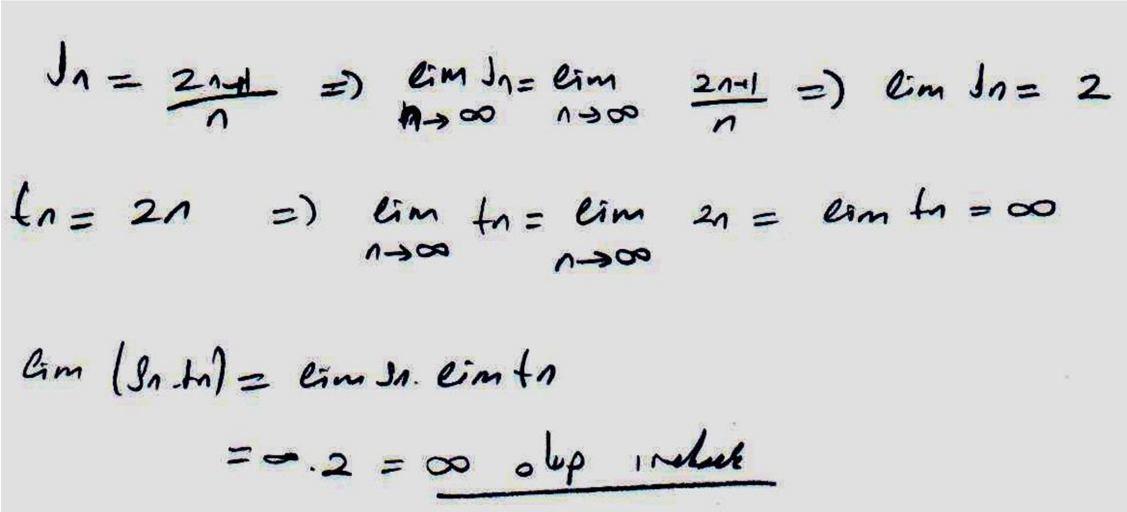


$\lim S_n \neq 0$ ise.

Eğer S_n ve t_n yakınsak olsaydı. Dizilerin yakınsaklığı tanımını kullanarak S_n in ve t_n in yakınsak olduğunu gösterip buradan yola çıkarak $S_n \cdot t_n$ in 'de yakınsak olduğunu bulabilirdik.

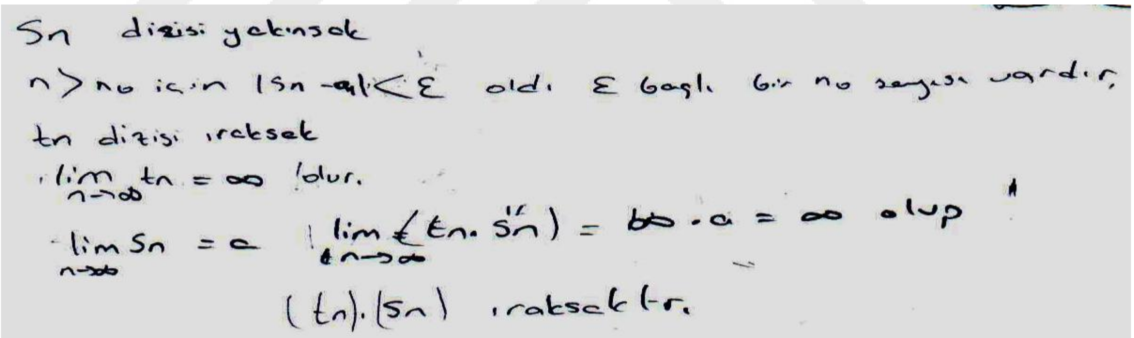
Şekil 4.55. Buse’nin ispatı

Bilge ve Barış önermenin doğru olduğunu düşünerek ispat yapmaya çalışmışlardır. İspatlarında önermeyi doğrulayan örnekler kullanmışlardır. Bu öğretmen adaylarının ispatlarında tümevarımsal bir yaklaşım sergiledikleri söylenebilir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış’ın ispatı sunulmuştur.



Şekil 4.56. Barış'ın ispatı

Aysun ve Belma ise doğru olduğunu düşündükleri önermenin doğruluğunu göstermek için ispat yapmaya çalışmışlardır. İspatlarında ortak olarak limit işleminin çarpma işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanmışlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Belma'nın ispatı örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 4.57. Belma'nın ispatı

4.3.3. Öğretmen adaylarının diziler konusundaki argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasındaki ilişki

Bu bölümde öğretmen adaylarının kendilerine yöneltilen "*Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.*" doğru önermesine ikna olmak için girdikleri argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişki yapısal olarak incelenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda iki durum ile karşılaşılmıştır. Bu durumlar aşağıda sunulmuştur.

1. Dedüktif Argümantasyondan Dedüktif ispat

Bu durumdaki öğretmen adayları diziler konusundaki önermenin doğru olduğuna ikna olmak için yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarına ait kavramsal bilgilerini kullanarak tanımlar arasında ilişki kurmuşlar ya da yakınsak dizi tanımından yola çıkarak Cauchy dizisine nasıl ulaşılabileceği konusunda düşünce sürecine girmişlerdir. Bu öğretmen adaylarından Aziz, önermenin doğru olduğuna ikna olmak için yakınsak dizi kavramı ile Cauchy dizisi kavramını düşünerek yakınsak dizinin aynı zamanda Cauchy dizisi olacağına ikna olmuştur. İspatında da aynı yapıyı koruyan Aziz, tanımları yorumlayarak ve sorgulayarak doğru bir ispat üretmiştir. Bu bakımdan Aziz dedüktif argümantasyon süreci sonucunda dedüktif tarzda bir ispat yaparak başarılı olmuştur. Bu durumdaki diğer öğretmen adayı olan Aysun ise önermenin doğru olduğuna ikna olmak için önermenin ispatını düşünmüştür. Yakınsak dizi tanımından yola çıkarak Cauchy dizisine nasıl ulaşılabileceği konusunda akıl yürütmüştür. Girdiği argümantasyon süreci sonunda ispatı yapabileceğine inandığı için ikna olmuştur. Aysun'un argümantasyon sürecinde tanımlar üzerinden akıl yürüttüğü için dedüktif gerekçe tiplerinden dönüşümsel gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Argümantasyon sürecinin ardından ispatına başlayan Aysun, yakınsak dizi ve Cauchy dizi tanımlarını yorumlayıp ilişkilendirerek doğru bir ispat yapmıştır. Aysun'un ispatlama şemasının da Aziz'inki ile aynı olduğu belirlenmiştir.

2. Otoriter Argümantasyondan Otoriter İspat

Belma bu duruma örnek oluşturan öğretmen adayıdır. Belma önermenin doğru olduğuna ikna olmak için herhangi bir argümantasyon sürecine girmemiştir. Bu önermenin doğru olduğunu daha önce ders hocasından ya da sınıf ortamında duyduğu için doğru olduğunu ifade etmiştir. Belma'nın otoriter argümanlar ürettiği belirlenmiştir. Belma ispatlama sürecine girdiğinde, ispatında zihnindeki algoritmayı sorgulama yapmadan uyguladığı tespit edilmiştir. Kısmen doğru sayılabilecek bir ispat yapmasına karşın ispatta yazdığı ifadelerin ne anlama geldiğinin farkında değildir. Belma'nın ispatında da prosedürel bir yaklaşım sergilediği söylenebilir. Belma'nın argümanatasyon ile ispat süreçleri arasındaki bu yapısal süreklilik geçerli bir ispat yapmasını sağlamamıştır.

4.4. Öğretmen Adaylarının Limit ve Süreklilik Konularındaki Argümantasyon ve İspat Süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki argümantasyon ve ispat süreçlerine yönelik bulgular sunulmuştur. Öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçlerini ortaya çıkarmayı amaçlayan etkinliklere geçilmeden önce reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için limit ve süreklilik tanımları formel olarak öğretmen adaylarına sunulmuştur. Öğretmen adaylarının tanımları incelemelerinin ardından söz konusu tanımlardan ne anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının limit ve süreklilik tanımlarına yönelik kavramsal bilgilerinin sorgulanmasının yanında, bu tanımların öğretmen adayları tarafından ne ölçüde içselleştirildiği belirlenmeye çalışılmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının sürekli fonksiyon kavramına yönelik algılarını ortaya çıkarmak amacıyla "Sürekli fonksiyon denilince aklınıza ne geliyor?" sorusu yöneltilmiştir.

Öncelikle öğretmen adaylarının limit tanımından ne anladıklarına yönelik görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarının ifadelerinin altı kod ve üç kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.28'de söz konusu kod ve kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.28.

Öğretmen Adaylarının Limit Tanımına Yönelik İfadeleri

Kategori	Kod	Öğretmen adayları	Örnek ifadeler
Kavramsal anlama	a'nın δ komşuluğunda kalan x'ler için, görüntülerinin de L'nin ε komşuluğunda kalacak şekilde $\delta > 0$ sayısının bulunması	Aysun Aziz	*Aysun: Şimdi $A \subset R$ olduğunda A dan B ye bir f fonksiyonu tanımlanıyor ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun diyor. Sonra her $\varepsilon > 0$ için a nın δ komşuluğunda kalan x ler için görüntülerinin de L nin ε komşuluğunda kalacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x a noktasına yaklaştığında limiti L dir denir.*
	x, a'nın δ komşuluğunda kalırken *f(x)*'in de L'nin ε komşuluğunda kalması	Ahu	*Ahu: Hocam, x, a'nın δ komşuluğunda kalıyorken f(x) de L nin ε komşuluğunda kalıyorsa, yani kalacak şekilde ε a bağlı bir δ sayısı varsa o zaman biz x, a ya yaklaşırken fonksiyonun limiti L dir diyoruz.*
	x ler a'ya yaklaşırken görüntülerinin de L gibi bir sayıya yaklaşması	Adem	*Adem: x a ya yaklaştığında f fonksiyonunun görüntüsü L dir demek, x a ya yaklaştığında görüntülerinin de bir sayıya yaklaşması demektir.*
Kavram karmaşası	x_1 değeri x_2 değerine giderken, bunların görüntüleri olan y_1 değerinin y_2 değerine yaklaşması.	Bilge	*Bilge: Fonksiyonda bir x_1 değerinden x_2 değerine giderken aynı şekilde x_1 değerine karşılık gelen y_1 değerinin de y_2 ye gidecek şekilde arasındaki farkın ε kadar küçük bir sayı olacağını anlıyorum.*
Sembolik anlama	Fonksiyonun limiti, a noktasına yaklaştığında L dir.	Buse Belma	*Buse: Şimdi bir tane f(x) fonksiyonumuz var. Bu f(x) fonksiyonunun limiti a noktasına yaklaştığında fonksiyonun limitinin L olduğunu söylüyor.*
	x ile a nın farkı δ dan küçük olduğunda *f(x)* ile L nin farkının ε dan küçük olacak şekilde $\delta > 0$ sayısının bulunması	Barış	*Barış: Hocam bu tanım diyor ki; a noktası a'nın bir yığılma noktası olsun. x ile a'nın mutlak değerinin farkı δ dan küçük olduğunda fonksiyon, yani f(x)'in de L den farkı yine ε dan küçük olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x a noktasına yaklaştığında f fonksiyonunun limiti L dir.*

Tablo 4.28 incelendiğinde öğretmen adaylarının limit tanımını altı farklı biçimde ifade ettikleri belirlenmiştir. Aysun ve Aziz limitin formel tanımından “a nın δ komşuluğunda kalan x ler için görüntülerinin de L nin ε komşuluğunda kalacak şekilde δ sayısının bulunmasını” anladıklarını ifade etmişlerdir. Ahu, x a’nın δ komşuluğunda kaldığında *f(x)* görüntüsünün L’nin ε komşuluğunda kalmasının limit tanımını ifade ettiğini belirtmiştir. Adem ise limit tanımından “x’ler a’ya yaklaşırken görüntülerinin de L gibi bir sayıya yaklaşmasını” anladığını ifade etmiştir. Bu ifadelere göre Aysun, Aziz, Ahu ve Adem’in limitin formel tanımının altında yatan sezgisel düşünceyi keşfettikleri söylenebilir. Bu öğretmen adaylarının yaptıkları limit tanımlarından, limit tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin oluştuğu düşünülmüştür. Bu düşünceden emin olabilmek ve öğretmen adaylarının tanımdaki topolojik ifadeleri ne kadar içselleştirdiklerini ortaya çıkarmak için limit tanımında önemli bir yer tutan “$0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$” ifadesinin ne anlama geldiği sorulmuştur. Alınan yanıtlar, öğretmen adaylarının tanımdaki ifadelerin anlamlarının farkında olduklarını ortaya çıkarmıştır. Öğretmen adayları kendilerine yöneltilen soruyu komşuluk ve yaklaşma terimleri ile açıklamışlardır. Limit tanımının arkasındaki sezgisel düşünceyi vurgulamışlardır. Aşağıda öğretmen adaylarından Ahu ve Adem’in bu soruya verdikleri yanıtlar sunulmuştur.

Ahu: x, a nın δ komşuluğunda kaldığında aynı şekilde görüntüsünün de L nin ε komşuluğunda kalıyormuş.

Adem: x a ya yaklaşırken f(x) in de L ye yaklaşması demektir. $|x - a| < \delta$ *demek x, a nın δ yarıçaplı komşuluğunda demek. x ler a ya o kadar çok yaklaşmış demek.* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *de aynı şekilde.*

Aysun, Ahu, Aziz ve Adem süreklilik tanımını, limit tanımı ile benzer bir şekilde yapmışlardır. Bu öğretmen adaylarının limit ve süreklilik tanımlarını kendi cümleleri ile doğru bir şekilde açıklayabildikleri için kavramsal anlamaya sahip öğretmen adayları oldukları belirlenmiştir.

Bilge limit tanımından anladığının x_1, x_2’ye giderken onun görüntüleri olan y_1’in de y_2’ye gitmesi olduğunu ifade etmiştir. Bilge’nin limitin tanımına yönelik ifadelerinin, limitin tanımında yer alan matematiksel gerçeklerle uyuşmadığı söylenebilir. Bilge, limit tanımını kendi cümleleri ile ifade etmiş fakat doğru bir açıklama yapamamıştır. Yaptığı açıklama limitin tanımından çok, düzgün süreklilik tanımını çağrıştırmaktadır. Buna göre, Bilge’nin limit tanımına yönelik kavram karmaşası yaşadığı söylenebilir. Buse ve Belma da limitin tanımından fonksiyonun limiti a noktasına yaklaştığında limitinin L olmasını anladıklarını ifade etmişlerdir. Buse ve Belma’nın bu ifadesi verilen limit tanımında mevcut olan bir ifadedir. Bu bakımdan Buse ve Belma’nın limitin tanımında yer alan ifadeyi tekrar ettikleri belirlenmiştir. Barış da yaptığı limit tanımında Buse ve Belma gibi, tanımda bulunan ifadeleri tekrar etmiştir. Buna göre Buse, Belma ve Barış’ın limitin tanımını kendi cümleleri uygun bir şekilde açıklayamadıkları tespit edilmiştir. Buna göre bu öğretmen adaylarının limit tanımına yönelik anlamalarının sembolik olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumun, öğretmen adaylarının limitin tanımında yer alan matematiksel ifadeleri anlamlandıramamalarından kaynaklandığı belirlenmiştir. Çünkü bu öğretmen adaylarına da limit tanımında yer alan “$0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$” ifadesinin matematiksel olarak ne anlama geldiği sorulduğunda uygun bir cevap verememişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Buse ve Barış’ın verdikleri cevaplara yer verilmiştir.

Buse: Şimdi buradaki x, tanım kümesindeki x. Fonksiyonumuz da f(x). a daki limitin değeri L oluyor. Sonuç L oluyor. İşte bunu matematiksel olarak ifade ediyor.

Barış: x a notasına yaklaştığında… Şimdi a noktası yığılma noktası değil mi? Yığılma noktası. Tamam, o zaman yığılma noktası olduğu için… x in a ya yığıldığı en az bir tane delta sayısı vardır demek

Bu öğretmen adayları, süreklilik tanımını limit tanımına benzer cümlelerle ifade etmeye çalışmışlardır. Buna göre söz konusu öğretmen adaylarının limit ve süreklilik tanımlarına yönelik bilgilerinin kavramsal düzeyde olmadığı söylenebilir.

Son olarak öğretmen adaylarının sürekli fonksiyona yönelik algılarını ortaya çıkarmak amacıyla öğretmen adaylarına “Sürekli bir fonksiyon denince aklınıza ne geliyor?” sorusu yöneltilmiştir. Alınan cevapların dört kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4.29’da kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.29.

Öğretmen Adaylarının Sürekli Fonksiyon Algısı

Kategoriler	Öğretmen adayları	Örnek ifadeler
Kopukluk olmaması	Adem Buse Ahu Bilge Aziz	*Aziz: Süreklilik deyince bir fonksiyonun grafiğine bakıldığı zaman parmağımı kaldırmadan devam ettirebilmeyi anlıyorum. Grafiği süreklidir yani, kopmayacak.*
İşlemsel özellikler	Barış Aysun Belma Ahu	*Barış: Sürekli fonksiyon denince o noktada limiti olduğu anlaşılır, verilen o değerde tanımlı olduğu anlaşılır ve limitinin o noktadaki görüntüsüne eşit olduğu anlaşılır.*
Diklik olmaması	Aysun	*Aysun: Sürekli fonksiyon olduğunda herhalde diklik olmayacaktı.*
Sıçrama olmaması	Bilge	*Bilge: Fonksiyonun sürekli olmasından grafiğinin kopmamasını anlıyorum. Limitte belirttiğim gibi herhangi bir sıçramanın olmaması gerektiğini anlıyorum. Yani, her limit değeri için aynı değere ulaşmamı ya da ulaştığım değerlerin farklı olmamasını anlıyorum. Yani, limitin farklı olmayacağını anlıyorum.*

Tablo 4.29 incelendiğinde öğretmen adaylarının çoğunun sürekli fonksiyondan, fonksiyonun grafiğinde kopukluk olmamasını algıladıkları belirlenmiştir. Benzer şekilde, öğretmen adaylarının yarısı da sürekli fonksiyon kavramına işlemsel bir göz ile bakarak sürekli fonksiyonun o noktada tanımlı olması, limitinin var olması ve limitinin görüntüsüne eşit olmasını anladıklarını ifade etmişlerdir. Buna göre, öğretmen adaylarından çoğunun sürekli fonksiyon kavramına yönelik kavram imajlarının, kopukluk olmaması ve işlemsel özellikler olduğu söylenebilir. Aysun ise sürekli fonksiyonda diklik olmaması gerektiğini belirtmiştir. Aysun'un sürekli fonksiyon imajlarından birinin "diklik olmaması" olduğu ortaya çıkmıştır. Fonksiyonun grafiğinde diklik olmaması türevlenebilen fonksiyonlara has bir özelliktir. Aysun'un bu ifadesinden, bir fonksiyonun sürekli olması ile türevli olması arasındaki ilişkiye yönelik bilgi eksikliğinin olduğu söylenebilir. Bilge ise bir fonksiyonun sürekli olması için fonksiyonun grafiğinde sıçrama olmaması gerektiğini ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik tanımlarına yönelik kavramsal bilgilerinin sorgulanmasının ardından, bu konular üzerinde argümantasyon ve ispat aktivitelerine geçilmiştir. Aktivitelere geçmeden önce öğretmen adaylarına kendilerine sunulan tanımları istedikleri zaman kullanabilecekleri belirtilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarına aktivitelerin reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için geçerli olduğu ifade edilmiştir. Bu yüzden etkinliklerde yer alan tanım ve değer kümesi belirtilmemiş genel fonksiyonlar için tanımlarda yer alan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonları göz önünde bulundurmaları istenmiştir. Mülakat formunda yer alan aktiviteler hakkında bilgi verilmesinin ardından öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularında argümantasyon ve ispat süreçlerini ortaya çıkarmayı hedefleyen etkinliklere geçilmiştir.

4.4.1. Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki argümantasyon süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki argümantasyon süreçlerine yönelik bulgular sunulmuştur. Öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri kapsamında kendilerine sunulan bir önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına nasıl ikna oldukları ve doğru olduğunu bildikleri matematiksel iddialarını nasıl savundukları incelenmiştir.

Öğretmen adaylarına ilk olarak, *“$A \subset R$, $f: A \to R$ ve $g: A \to R$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar A kümesi üzerinde sürekli olsun. Bu durumda f+g fonksiyonu da A kümesi üzerinde süreklidir.*” doğru önermesi sunulmuştur. Öğretmen adaylarından kendilerini ikna etmek adına kullandıkları stratejileri analiz etmek amacıyla önermenin doğru veya yanlış olduğunu belirtmeleri istenmiştir. Kullanılan stratejilerin beş kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Bu kategorilere yönelik bilgiler ve öğretmen adaylarının verdikleri kararlar Tablo 4.30’da sunulmuştur.

Tablo 4.30.

Öğretmen Adaylarının Doğru Önermeye İkna Olmak İçin Kullandıkları Stratejiler

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Sezgisel düşünme			✓	✓	✓			
İspatını düşünme						✓	✓	
Geçmiş bilgi								✓
İspat yapma		✓						
Kavram üzerinden muhakeme etme	✓							
Verilen karar	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

Tablo 4.30 incelendiğinde, öğretmen adaylarının tümünün önermenin doğru olduğunu başarılı bir şekilde belirledikleri tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının süreklilik konusunda doğru olan matematiksel önermeyi belirleme becerilerinin yüksek olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının yarısı (Aziz, Aysun, Barış, Belma) önermenin doğru olduğuna ikna olmak için argüman üretmemişlerdir. Üç öğretmen adayı (Aziz, Aysun, Barış) sezgilerini kullanarak, bir öğretmen adayı (Belma) da geçmiş bilgilerine güvenerek karar vermişlerdir. İki öğretmen adayı (Bilge, Buse) önermenin ispatını düşünerek karar vermişlerdir. Adem ise önermenin ispatını yaparak karar vermiştir. Ahu da süreklilik kavramını kullanarak ikna olmuştur.

Öğretmen adaylarının kendilerini ikna etmek adına kullandıkları stratejiler incelendiğinde öğretmen adaylarının yarısının ikna olmak için argüman üretmedikleri belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarından Aziz, Aysun ve Barış bir gerekçe belirtmeden önermenin doğru olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının önermenin doğruluğuna ikna olmak için sezgisel gerekçeler kullandıkları belirlenmiştir. Öğretmen adayları sürekli iki fonksiyonun toplamının da sürekli olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aysun'un ifadelerine yer verilmiştir.

Aysun: f+g yi düşünüyorum. Sürekli iki fonksiyonun toplamının da sürekli olup olmadığını düşünüyorum. Tanımları da düşünüyorum. Sürekli gibi geliyor bana doğrudur. Yani sürekli iki fonksiyonun toplamı da süreklidir. İkisi de aynı aralıkta tanımlanmış süreklidir.

Belma önermenin doğruluğu için bir argüman üretmemiştir. Önermenin doğru olduğunu önceden bildiği için önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Belma'nın önermenin doğru olduğuna ikna olmak için otoriter gerekçe kullandığı tespit edilmiştir. Aşağıda Belma'nın ifadeleri yer almıştır.

Belma: Doğru. Çünkü önceden biliyordum.

Öğretmen adaylarından Bilge ve Buse önermenin ispatını düşünerek karar vermişlerdir. Sürekli iki fonksiyonun tanımından toplam fonksiyonunun sürekliliğine nasıl ulaşılacağını düşünmüşlerdir. Bu düşünce süreci sonunda ispatın yapılabileceğine ikna olarak karar vermişlerdir. Aşağıda örnek olarak Buse ile araştırmacı arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.

Buse: Şimdi f ve g fonksiyonları sürekli f+g de sürekli demiş. Sürekli olması için ne gerekiyordu? Buradaki kuralımızı sağlaması gerekiyordu [süreklilik tanımına bakıyor]. Yani süreklidir.

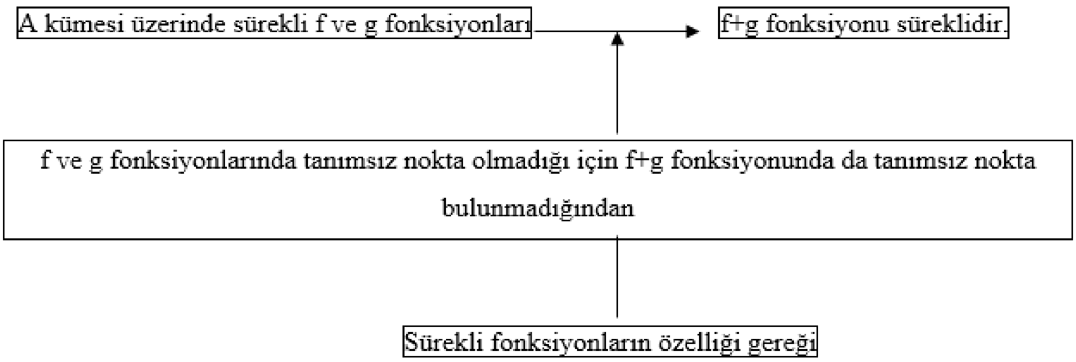
Araştırmacı: Neden?

Buse: Burada f ve g fonksiyonları için limit süreklilik tanımını ayrı ayrı uygularsak sonuç olarak toplam fonksiyonu için de yazarsak sürekli çıkar. Yani ispatında bu tanımı kullanırım diye düşündüm.

Ahu önermenin doğru olduğuna ikna olmak için süreklilik kavramına yönelik sahip olduğu bilgileri ve süreklilik algısını kullanmıştır. Ahu sürekli fonksiyonlarda tanımsız bir noktanın olmaması gerektiğini ifade etmiştir. Aşağıda Ahu'nun ifadelerine yer verilmiştir.

Ahu: Hocam mesela f sürekli ise bu ne demektir? f nin A dan B ye tanımsız olduğu bir noktanın olmaması demektir. Aynı şekilde g fonksiyonu için de aynı şey geçerlidir. Bu iki fonksiyonu topladığımızda da yine tanımsız olduğu bir nokta olmayacaktır. Süreksizlik olmadığı için de iki fonksiyonun toplam fonksiyonu da sürekli olacaktır.

Ahu ürettiği argümanda sürekli fonksiyonun tanımsız nokta içermemesi gerektiğini belirtmiştir. Ahu'nun bu düşüncesi ürettiği argümana gerekçe olmuştur. Ahu elindeki veriler olan, *f* ve *g* sürekli fonksiyonlarını bu şekilde yorumlamıştır. Bu iki fonksiyonun toplam fonksiyonunda tanımsız bir nokta içermeyeceği için sürekli olacağı sonucuna ulaşmıştır. Aşağıda Ahu'nun ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.58. Ahu'nun ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Adem ise önermenin doğru olduğuna karar verebilmek için ispat yapması gerektiğini belirtmiştir. İspatını yaptığında önermenin doğru olduğuna ikna olacağını ifade etmiştir. Aşağıda Adem'in ifadelerine yer verilmiştir.

Adem: Süreklidir diyor. Sürekliliği için şöyle bir şart vardı. Mesela f A kümesi üzerinde sürekli ise… İspat yaptıktan sonra karar vereceğim.

Öğretmen adaylarına ikinci olarak *"Bir küme üzerinde monoton artan her fonksiyon aynı küme üzerinde süreklidir."* yanlış önermesi, doğruluğunun değerlendirilmesi için sunulmuştur. Burada söz konusu önermenin reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için geçerli olduğu öğretmen adaylarına tekrar hatırlatılmıştır. Öğretmen adaylarının önermenin doğruluğu ya da yanlışlığına ikna olmak için girdikleri düşünce süreçleri incelenmiştir. Kullanılan stratejilerin yedi kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.31'de öğretmen adaylarının kullandıkları stratejiler ve verdikleri kararlar hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.31.

Öğretmen Adaylarının Yanlış Önermeye İkna Olmak İçin Kullandıkları Stratejiler

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
İspat ve ters örnek			✓					
Ters örnek				✓				
Ters örnek ve algı	✓							
İspat ve algı		✓						
Tanımlar üzerinden muhakeme							✓	
Örnek kullanma					✓	✓		
Sezgisel düşünme								✓
Verilen Karar	Doğru	Doğru	Yanlış	Yanlış	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

Önermenin yanlış olduğunu sadece Aziz ve Aysun belirleyebilmiştir. Diğer öğretmen adayları ise önermenin doğru bir önerme olduğunu ifade etmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki yanlış önermeyi seçme becerilerinin oldukça düşük olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının çoğunun önermeye ikna olmak için tanımları, ispatı ve ters örnekleri kullanmaları dedüktif gerekçelere başvurduklarını göstermiştir. Sadece iki öğretmen adayı (Barış, Bilge) önermeyi doğrulayan bir örnek üzerinden düşünerek önermenin doğru olduğuna karar vermişlerdir. Buna göre bu öğretmen adaylarının tümevarımsal gerekçe tipinde oldukları söylenebilir. Sadece bir öğretmen adayı (Belma) önermenin doğru olduğuna sezgilerini kullanarak karar vermişlerdir. Bu öğretmen adayının sezgisel gerekçe tipinde olduğu söylenebilir.

Ahu önermeyi çürüten bir ters örnek aramış fakat bulamamıştır. Ters bir örnek bulamadığı için ifadenin doğru olduğuna karar vermiştir. Aysun da Ahu gibi, monoton artan fakat sürekli olmayan bir örnek bulmaya çalışmıştır. Aysun örneğini ararken öncelikle örneğinin sürekli fonksiyon olmamasını dikkate almıştır. Sürekli olmaması için fonksiyonun bir noktada tanımlı olmaması gerektiğini düşünmüştür. Bu amaçla pay ve payda şeklinde yazılan fonksiyonları dikkate alarak paydayı sıfır yapan değerleri araştırmıştır. Aysun ters örnek ararken, söz konusu ters örneğin aynı zamanda monoton artan olması gerektiğini arka plana atmıştır. $\frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{(x-1)^2}$ kuralları ile tanımlı fonksiyonları göz önüne almıştır. Bu örneklerin 0 ve 1 noktalarında süreksiz olduğunu ifade etmiş fakat monoton artanlık konusunda emin olmamasına rağmen ikna olduğunu ifade etmiştir. Gerekçe belirtmeden önermenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Aşağıda Aysun ile araştırmacı arasında geçen konuşmadan bölümler sunulmuştur.

Aysun: Sürekli midir, değil midir? Olmayabilir de… Şimdi monoton artan bir fonksiyon düşündüm buna ters bir örnek.

Araştırmacı: Nasıl bir örnek arıyorsun?

Aysun: Monoton artan olup sürekli olmayacak. Sürekli olmayan bir fonksiyon bulup monoton artan olmadığı bir örnek düşüneyim.

Araştırmacı: Sürekli olmayan bir fonksiyon nasıl oluyor?

Aysun: Mesela sürekli olmayan noktalar dediğimizde tanımsız yapan noktalarda sürekli olmuyordu. O zaman tanımsız yapan noktalarda süreksiz oluyorsa… Nasıl oluyor ki o ya?... $\frac{1}{x}$ *0 noktasında süreksizidir mesela. 0 noktasında tanımsız oluyor, değeri sonsuza gidiyor o yüzden süreksizdir. Sürekli olması için her noktada değeri mi olması gerekiyor? Yani belli bir noktaya mı karşılık gelmesi lazım?*

Araştırmacı: Bilmem.

Aysun: Şekli nasıl oluyor o zaman? Sonsuza falan gitmeyecek, o mu? x ekseninde açıkta eleman kalmayacak mı ?

Araştırmacı: Bilmiyorum. Düşün, öyle mi olması lazım?

Aysun: Evet, bence öyle olması lazım. x ekseninde açıkta eleman kalmayacak. Mesela $\frac{1}{(x-1)^2}$ *, 1 noktasında sürekli olmuyor. Yani orada kesintiye uğramış oluyor. Sürekli bir fonksiyonun kesintiye uğramaması lazım. Hocam,* $\frac{1}{x}$ *aldık şimdi, 0 noktasında sonsuz olacak. Bilemedim ama. Bence sürekli değildir, bir yanlışlık var. Kesin eminim.*

Aziz önermenin doğru olduğuna ikna olmak için önce ispat yapmaya çalışmıştır. İspatında monoton artan fonksiyon tanımından yola çıkarak süreklilik tanımına ulaşmayı hedeflemiştir. Ancak ispat yapmada başarılı olamamıştır. İspatta başarılı olamayınca önermenin yanlış olabileceğini düşünmüştür. Önermenin yanlış olduğuna ikna olmak için ters örnek bulmaya çalışmıştır. Aklına gelen ilk iki örnekte başarısız olan Aziz, üçüncü denemesinde doğru bir ters örnek bulduğuna ikna olarak önermenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Aşağıda Aziz ile araştırmacı arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.

Aziz: Şimdi f fonksiyonu monoton artan olsun. Monoton artan olduğundan dolayı her x_1, x_2 *elemanları için* $x_1 < x_2$ *iken* $f(x_1) < f(x_2)$ *dir. Bunu söyleyebilirim. Şimdi süreklilik tanımına göre nasıl yapabilirim? [İspatını yapıyor] nasıl bir fonksiyon yazsam ki?. Bir dakika, aksine bir örnek düşünsem. Monoton artan bir fonksiyon. Nasıl bir fonksiyon yazsam ki? Buradan gidilmez ya [yapmaya çalıştığı ispattan vazgeçiyor].* $f(x) = |x|$ *fonksiyonu monoton artandır.*

Araştırmacı: Monoton artanlığına nasıl karar verdin?

Aziz: Yok, monoton artan değildir.

Araştırmacı: Neden?

Aziz: Mesela -1, bir de +1 verdiğimizde görüntüleri aynı oluyor. $\frac{x+1}{x}$ *fonksiyonu monoton artandır.*

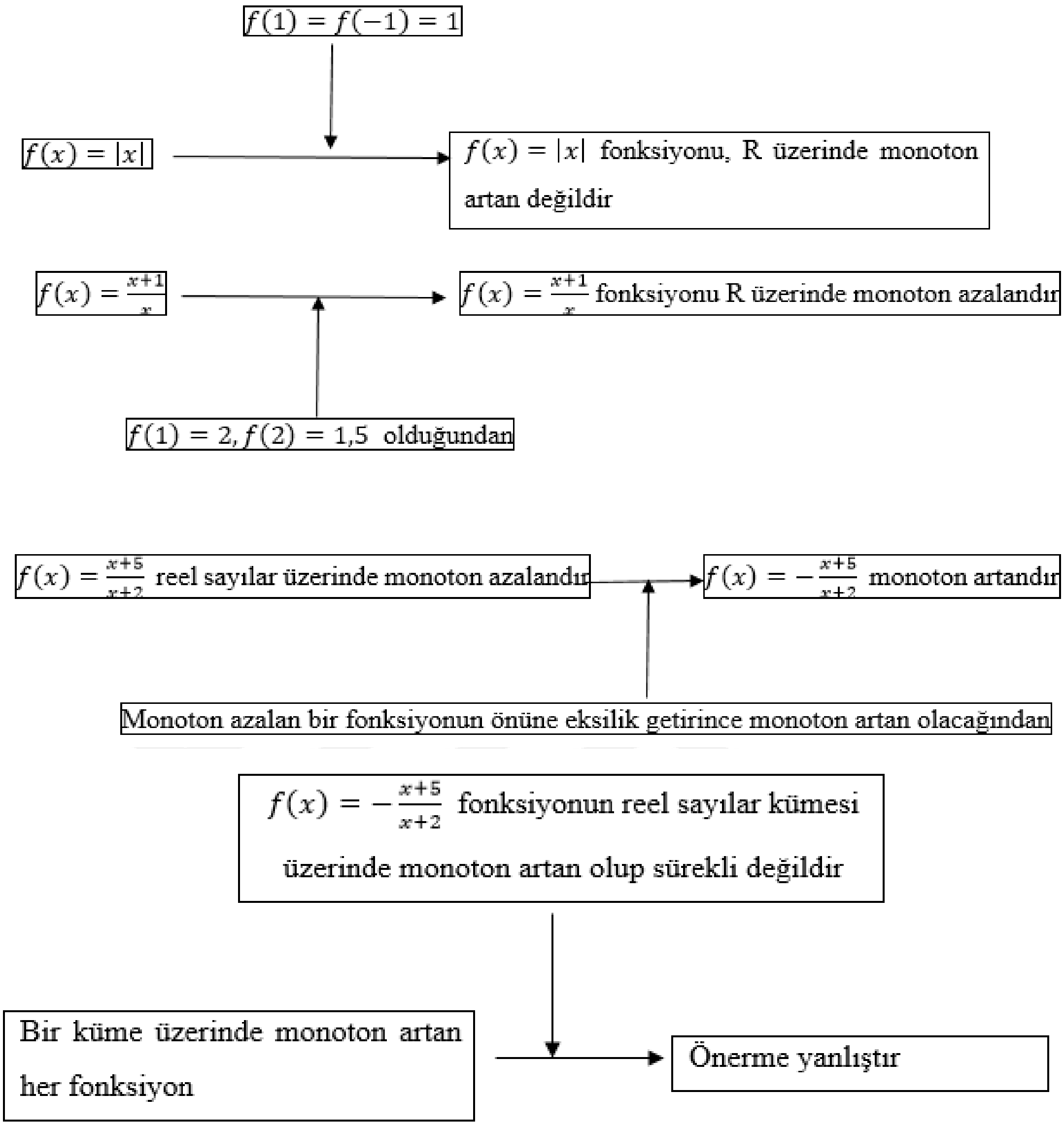
Araştırmacı: Nasıl monoton artandır?

Aziz: Monoton azalandır, bu da değil. 1 için 2, 2 için 1,5 oluyor… Denediğim örnekler hep monoton azalan oluyor. Niye öyle oluyor ki?

*Araştırmacı**:** Hangi fonksiyonu denedin?*

Aziz: $\frac{x+5}{x+2}$ *idi. Önüne eksilik getirsem monoton artan olur herhalde. Mesela bu neydi?* $1+\frac{3}{x+2}$ *önüne eksi getirsem* $-1-\frac{3}{x+2}$*. Tamam, monoton artan oluyor. O zaman tekrar 1 ve 2 değerini denediğim zaman -2 ve -7/4 evet monoton artan oluyor. Şimdi,* $f(x)=\frac{-x-5}{x+2}$ *fonksiyonunu aldım. Fonksiyon reel sayılarda monoton artan ve -2 de tanımlı olmadığı için sürekli değil, süreksizdir.*

Aziz ispatta güçlük yaşadığı için ters örnek bulmaya çalışmıştır. Önce $f(x)=|x|$ fonksiyonunu göz önüne almıştır. Bu fonksiyonun -1 ve 1 noktalarından monoton artanlığı bozduğu için bu örnekten vazgeçmiştir. Aziz burada ilk argümanını çürüten bileşeni kullanarak üretmiştir. Aziz bir sonraki denemesinde $f(x)=\frac{x+1}{x}$ fonksiyonunu dikkate almıştır. Bu fonksiyonun monoton azalan bir fonksiyon olduğunu belirterek bu örnekten de vazgeçmiştir. Aziz bu fonksiyonun monoton azalanlığı için ürettiği argümanda 1 ve 2 sayılarını deneyerek bulduğu sonucu gerekçe olarak kullanmıştır. Aziz bu argümanında tümevarımsal tarzda bir gerekçe kullanmıştır. Üçüncü denemesinde $f(x)=\frac{x+5}{x+2}$ fonksiyonunu ele almış ve bu fonksiyonunda monoton azalan bir fonksiyon olduğunu tespit etmiştir. Monoton artan bir fonksiyon bulmanın yollarını arayan Aziz, monoton azalan bir fonksiyonun kuralının önüne eksi işareti getirilmesi durumunda yeni fonksiyonun monoton artan olacağını gerekçe göstererek $f(x)=-\frac{x+5}{x+2}$ fonksiyonunun monoton artan olduğunu belirtmiştir. Aziz, bulduğu ters örneğin reel sayılar üzerinde monoton artan olup sürekli olmadığını ifade ederek önermeye ters bir örnek teşkil ettiğini belirtmiştir. Aşağıda Aziz'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.59. Aziz'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Ahu ise Aziz'in tam tersine, önce önermenin yanlış olduğuna ikna olmak için ters örnek bulmaya çalışmıştır. Ters örnek bulmakta zorlanınca ifadenin doğru olduğuna monoton artanlık ve süreklilik tanımlarını düşünerek ikna olmuştur. Aşağıda Ahu ile araştırmacı arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.

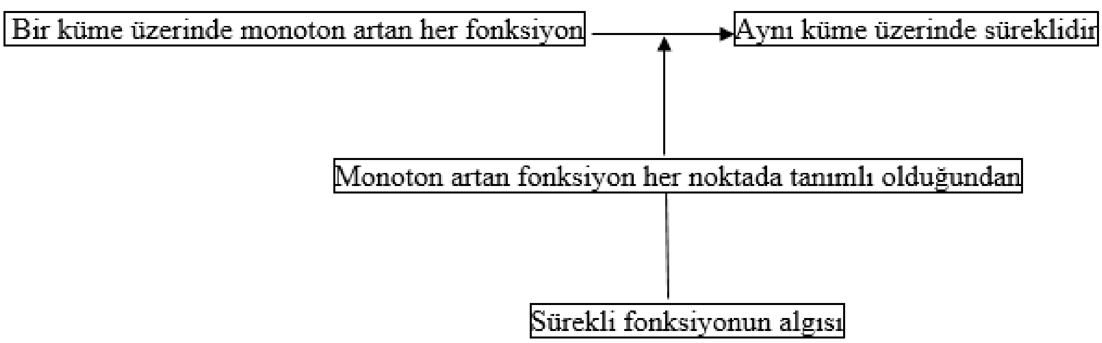
Ahu: Yanlış sanki bu. $x_1 < x_2$ *olduğunda* $f(x_1) < f(x_2)$ *olsun diyor bize teorem. Aynı küme üzerinde süreklidir. Hocam mesela biri diğerinden küçük iki değer düşünelim. Biri diğerinden küçük olduğunda görüntülerinin de küçük olabilir ama sürekli olması demek sadece o noktada tanımlı olmasına bakılmaz, yaklaşma olarak da* *bakmalıyız. Limitleri olduğu anlamına gelmez bence. Hocam, bir ters örnek düşüneyim… [Ters örnek bulmaya çalışıyor fakat başarılı olamıyor].*

Ahu: Hocam doğru o zaman bu.

Araştırmacı: Neden fikrini değiştirdin?

Ahu: Çünkü… Şu tanımlara bakayım öyle söyleyeyim. Zaten tanımlı olmasa biz monoton artanlıktan bahsedemiyoruz. Hocam şimdi x_1, x_2 almış, $f(x_1)$ tanımlı olacak. O zaman o noktada, tanımlı olacak, bir de limiti var. Yani doğru hocam ya herhalde. Ters örnek bulamadım ama yanlış değildir. Çünkü mantıklı geliyor. Tanımlı değil ise zaten bahsedemiyoruz monoton artanlıktan. Doğru hocam bu galiba.

Ahu'nun önermenin doğruluğu için ürettiği argüman incelendiğinde, bir fonksiyonun bir küme üzerinde sürekli olması için o küme üzerindeki tüm elemanlar için tanımlı olması gerektiğini gerekçe olarak sunup monoton artan bir fonksiyonun sürekli olduğu sonucuna ulaştığı görülmektedir. Ahu'nun kullandığı bu gerekçe sürekli fonksiyon algısının bir sonucudur. Çünkü Ahu bir önceki önermeye ikna olurken ve sürekli fonksiyona yönelik görüşleri alınırken sürekli fonksiyon imajının, fonksiyonda tanımsız bir nokta bulunmaması olduğu ortaya çıkmıştır. Ürettiği bu argümanda da bu algısının karşıtını kullanmıştır. Monoton artanlığın gereği olarak fonksiyonun her noktada tanımlı olmasından dolayı fonksiyonun sürekli olduğunu belirtmiş ya da ikna olmak istemiştir. Aşağıda Ahu'nun ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.60. Ahu'nun ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Adem, Aziz ile benzer bir şekilde, önermenin doğru olduğunu göstermek için ispat yapmaya çalışmıştır. İspatı yapmada güçlük yaşayınca, Aziz gibi ters örnek aramamıştır. Tanımları kullanarak kendini bu ifadenin doğruluğu hakkında ikna etmeye çalışmıştır. Aşağıda Adem'in ifadeleri sunulmuştur.

Adem: Monoton artan fonksiyon her $x_1,\ x_2$ *ye karşılık… [Tanımı hatırlamaya çalışıyor]. f, A dan R ye bir fonksiyon olsun.* $x_1, x_2 \in A$ *ve* $x_1 < x_2$ *iken* $f(x_1) < f(x_2)$ *bu monoton artan bir fonksiyon [İspatını yapmaya çalışıyor]. Sürekliliğini göstermek için yine aynı küme üzerinde A daki elemanlara gittiği zaman… Bunu aynı şekilde mi göstereceğim? Bunu nasıl göstereceğim ki?*

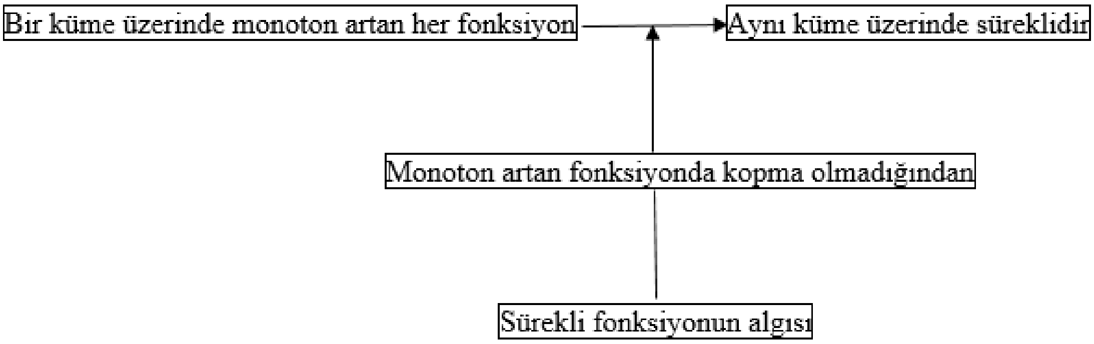
Araştırmacı: Neden doğru olduğunu düşünüyorsun?

Adem: Çünkü $x_1 < x_2$ *yani hiçbir kopma olmaz. Fonksiyonda yerine yazdığımız zaman görüntülerini de bulabiliriz. Her değer için büyüklük küçüklük farkı var. Her* x_1 *değeri için* $f(x_1)$ *vardır. Kopma olmaz yani.*

Araştırmacı: İspatın yarım mı kaldı?

Adem: İspatın gerisini getirmem lazım. Ben buna doğru dedim ama ispatının yapılması lazım. Çünkü monoton artan her fonksiyon demiş. Burada en az bir tane fonksiyonun bunu bozma ihtimali de var. Tüm fonksiyonlar için geçerli olması lazım. Doğru olduğunu düşünüyorum ama.

Adem önermenin doğru olduğunu göstermek için ispat yapmaya çalışmıştır. İspatında ilerleyemeyince tanımlar arasında muhakeme ederek kendini ikna etmeye çalışmıştır. Adem, kendini ikna etmek için ürettiği argümanda monoton artan fonksiyonda her değere karşılık bir görüntünün olmasını gerekçe olarak kullanmıştır. Bu gerekçeden bir köprü inşa ederek fonksiyonun sürekli olduğu sonucuna ulaşmıştır. Adem'in kullandığı gerekçenin altında sürekli fonksiyonda kopukluk olmama algısı yatmaktadır. Adem gerekçesini öne sürerken kendi süreklilik algısından destek almıştır. Aşağıda Adem'in ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.61. Adem'in ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

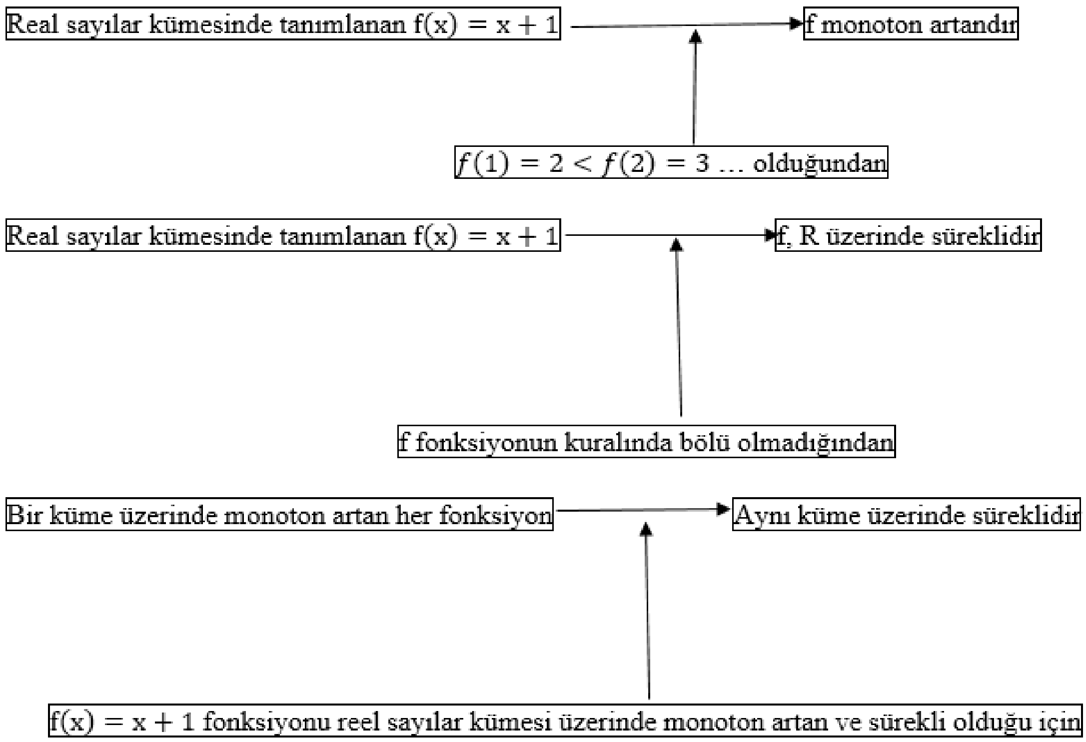
Öğretmen adaylarından Barış ve Bilge önermenin doğru olduğuna ikna olmak için önermenin doğruluğunu bir örnek üzerinden değerlendirmişlerdir. Göz önüne aldıkları örneklerin önermeyi doğruladığı için önermenin doğru olduğuna karar vermişlerdir. Aşağıda Bilge ile araştırmacı arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.

Bilge: Bunu doğru diye düşünüyorum.

Araştırmacı: Nasıl bu karara vardın?

Bilge: Bir sayısal örnek düşündüm. Monoton artan olacak şekilde 2x+1 diyebilirim. x+1 olsun, daha kolay olsun. Hani 1 verdim 2, 2 verdim 3. Aynı şekilde aratarak gidiyor. Verdiğim fonksiyonun bir bölüsü yok. Bölümde sıfırdan farklı olması gerekiyor ya. Öyle bir durum yok. O zaman düşündüğüm monoton artan örnek sürekli olduğundan doğrudur diyorum.

Bilge örneğe ikna olmak için birden çok argüman üretmiştir. Göz önüne aldığı fonksiyonun monoton artan olduğuna iki tamsayı ile deneyerek ikna olmuştur. Elindeki fonksiyonun sürekli olduğunu, fonksiyonun pay ve payda şeklinde yazılmadığına dayanarak söylemiştir. Son argümanında da, örnek olarak aldığı fonksiyonun monoton artan ve sürekli olduğu için önermeyi doğruladığını belirterek önermeye ikna olduğunu belirtmiştir. Kullandığı örneğin tanım kümesinin reel sayılar olduğunu belirtmiştir. Aşağıda Bilge'nin ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.

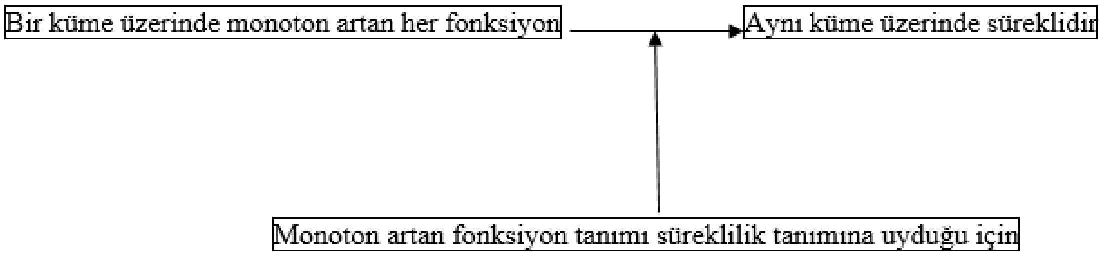


Şekil 4.62. Bilge'nin ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Buse önermenin doğru olduğuna ikna olmak için monoton artan fonksiyon tanımı ile süreklilik tanımlarını kullanmıştır. Buse monoton artan tanımında bulunan ifadeleri manipüle ederek süreklilik tanımındaki ifadelere benzetmeye çalışmıştır. Aşağıda Buse'nin ifadelerine yer verilmiştir.

Buse: Monoton artan ise süreklidir. Öyle midir? Monoton artan olması için ve $x_1 < x_2$ *şartını sağlayan her* x_1, x_2 *elemanı için* $f(x_1) < f(x_2)$ *olması geriyordu. Yani hocam burada* $|x - a| < \delta$ *olduğunda* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ *olması gerekiyordu. Burada da* $x_1 < x_2$ *şartını sağlayan her* x_1, x_2 *elemanı için* $f(x_1) < f(x_2)$ *orada her iki tarafa* $-f(a)$ *eklersek* $f(x_1) - f(a) < f(x_2) - f(a)$ *olur. Monoton artanlığın tanımı süreklilik tanımına da uyduğu için monoton artan her fonksiyon aynı küme üzerinde süreklidir.*

Buse önermenin doğruluğunu ikna olmak için ürettiği argümanda monoton artan tanımındaki matematiksel ifadeleri göz önüne alarak, bu ifadelerden süreklilik tanımındaki ifadelere ulaşmaya çalışmıştır. Buse argümanına gerekçe olarak, monoton artan fonksiyon tanımının süreklilik tanımına uyduğunu dile getirmiştir. Aşağıda Buse'nin ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.63. Buse'nin ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Son olarak Belma, önermenin doğruluğuna ikna olmak için bir düşünce sürecine girmemiştir. Önermenin ona göre doğru olduğunu düşündüğünü ifade etmiştir. Belma önermenin doğru olduğuna sezgisel olarak ikna olmuştur. Aşağıda Belma'nın ifadelerine yer verilmiştir.

Belma: Öyledir. Monoton artansa aynı küme üzerinde süreklidir. Öyledir yani.

Limit ve süreklilik konularındaki son argümantasyon etkinliği olarak, öğretmen adaylarının doğru olduğu bilinen bir matematiksel iddiayı nasıl savundukları incelenmiştir. Bu incelemeyi yapabilmek için öğretmen adaylarına bir problem sorulmuştur. Öğretmen adaylarından reel sayılar kümesi üzerinde $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun *0* noktasında sürekli olduğunu göstermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının problem çözümleri, kullandıkları gerekçeler ve matematiksel olarak ikna edicilik açısından değerlendirilmiştir. Çözümler incelendiğinde kullanılan gerekçelerin dört kategori altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Tablo 4.32'de bu kategoriler hakkında bilgilere yer verilmiştir.

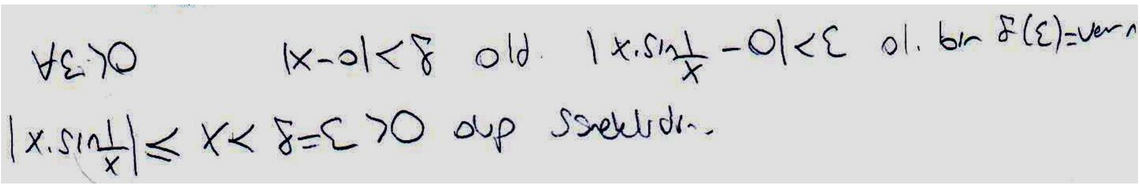
Tablo 4.32.

Öğretmen Adaylarının Ürettikleri Argümanlarda Kullandıkları Gerekçeler

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Dönüşümsel gerekçe	✓	✓		✓				
Görsel-dönüşümsel gerekçe			✓					
Referanssız gerekçe					✓	✓	✓	
Otoriter gerekçe								✓
İkna edicilik	Evet	Evet	Evet	Evet	Hayır	Hayır	Hayır	Hayır

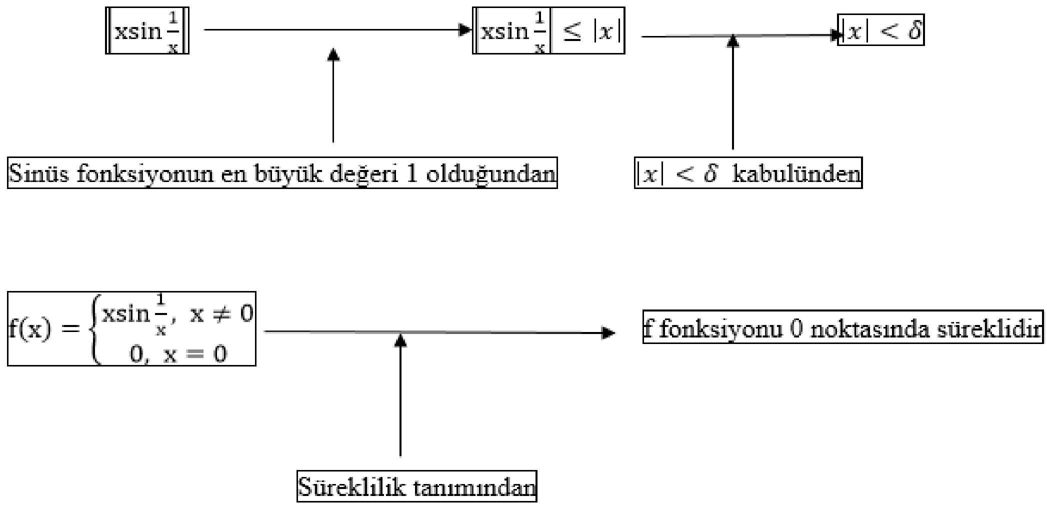
Tablo 4.32 incelendiğinde öğretmen adaylarının yarısının çözümlerinin, iddianın doğru olduğunu göstermede matematiksel olarak ikna edici olduğu tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularında problem çözme becerilerinin ortalama bir düzeyde olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının ürettikleri argümanlarda kullandıkları gerekçeler incelendiğinde, öğretmen adaylarından üçünün (Barış, Bilge, Buse) argümanlarında hatalı uyguladıkları tanımları ve cebirsel işlemleri gerekçe olarak kullandıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının kullandıkları gerekçelerin mantıksal hatalı ve matematiksel gerçeklerle örtüşmediği için referanssız gerekçe tipinde olduğu ortaya çıkmıştır. Bir öğretmen adayının (Belma) argümanında kullandığı mantıksal hatalı gerekçenin kaynağının bir otoriteye dayandığı tespit edilmiştir. Bu öğretmen adayının otoriter bir gerekçe kullandığı belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının üçünün (Ahu, Adem, Aysun) ürettiği argümanlarda tanımları ve cebirsel işlemlerin sonuçlarını gerekçe olarak kullandıkları belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları ikna edici bir çözüme ulaşmışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının dönüşümsel gerekçe tipinde oldukları belirlenmiştir. Bir öğretmen adayı (Aziz) ürettiği bir argümanda çizdiği şekli gerekçe olarak kullanmıştır. Çizilen şekil matematiksel olarak mantıklı bulunmuştur. Diğer argümanlarında ise tanımlardan ve fonksiyonların özelliklerinden yararlanmıştır. Buna göre Aziz'in hem görsel hem de dönüşümsel gerekçe tipinde olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının çözümlerinde kullandıkları gerekçeler incelendiğinde, öğretmen adaylarının yarısının limitin tanımını kullandıkları ortaya çıkmıştır. Ahu ve Aysun limit tanımını başarılı bir şekilde uygulayabilirken, Barış ve Bilge ise limit tanımını uygulamada sıkıntı yaşamışlardır. Aşağıda tanımı doğru bir şekilde çözümünde uygulayan Ahu'nun çözümüne yer verilmiştir.



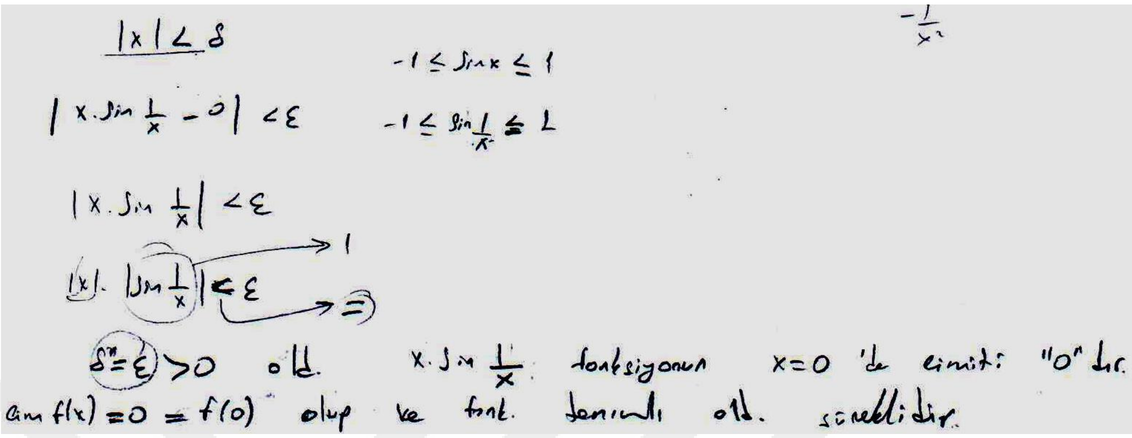
Şekil 4.64. Ahu’nun çözümü

Ahu çözümünde süreklilik tanımını kullanarak fonksiyonun 0 noktasında sürekli olduğunu göstermiştir. Tanımı uygularken alt argümanlar da üretmiştir. Ahu $\left|xsin\frac{1}{x}\right|$ ifadesinden $\leq |x|$ ifadesine sinüs fonksiyonunun alabileceği en büyük değerin 1 olmasından geçmiştir. $\leq |x|$ ifadesinden δ ifadesine ise $|x| < \delta$ kabulünden ulaştığını ifade etmiştir. Elde edilen bu bilgiler Ahu’nun çözümünü sesli bir şekilde yapmasından ve araştırmacının bu geçişleri nasıl yaptığının sorulmasıyla elde edilmiştir. Ahu çözümünü yaparken “*x*” olarak yazdığı ifadeyi “mutlak *x*” olarak okumuş fakat yazarken mutlak değer içine almayı unutmuştur. Bu yüzden Ahu’nun çözümündeki bu eksiklik bilinçli olarak yapılmadığı ve doğru bir şekilde ifade edildiği için önemsenmemiştir. Bu konuda sözlü ifadeler dikkate alınmıştır. Buna göre Ahu’nun dönüşümsel gerekçe tipinde olduğu ortaya çıkmıştır. Ahu’nun ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.65. Ahu’nun ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Bilge ve Barış ise limit tanımını uygulamada sıkıntı yaşamışlardır. Limit tanımını uygulamada eksikleri olan bu öğretmen adayları, çözüm yaparken yanlış argümanlar da kullanmışlardır. Bu öğretmen adaylarının argümanlarında yer alan matematiksel hatalı gerekçelerden dolayı referanssız gerekçe tipinde oldukları belirlenmiştir. Aşağıda örnek olarak Barış'ın çözümü yer almıştır.


$|x| < \delta$ $\quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad -\frac{1}{x^2}$

$\left| x.\sin\frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \quad -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

$\left| x.\sin\frac{1}{x} \right| < \varepsilon$

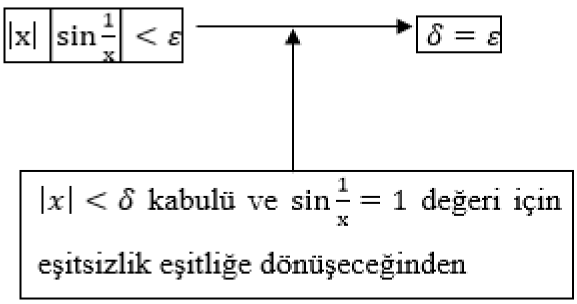
$|x|.\left|\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \rightarrow 1 \quad \Rightarrow$

$\delta = \varepsilon > 0$ old. $x.\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonun $x=0$'da limiti "0" dır.

$\lim f(x) = 0 = f(0)$ olup ve fonk. tanımlı old. süreklidir.

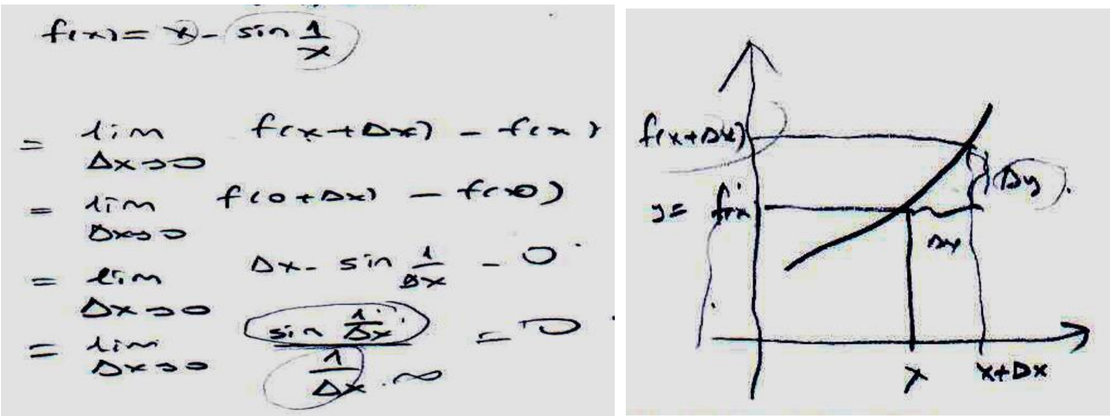
Şekil 4.66. Barış'ın çözümü

Barış'ın çözümünde göze çarpan ilk özellik süreklilik tanımını uygulamadaki eksikliğidir. Barış göstermek istediği ifade olan "$\left|x sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$" ifadesini göz önüne alarak onun üzerinden çözümünü ilerletmiştir. Barış'ın çözümündeki ikinci hata ürettiği argümanda gerçekleşmiştir. Barış, "$|x|\left|sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$" ifadesinden "$\delta = \varepsilon$" ifadesine ulaşırken gerekçe olarak "$|x| < \delta$" kabulünü ve $sin\frac{1}{x}$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değer olan 1 değerini eşitsizlikte yerine yazdığında eşitsizliğin eşitliğe döneceğini düşünmüştür. Aşağıda Barış'ın ürettiği bu argümanın Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.67. Barış'ın ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Aziz sürekliliğin limit formunu kullanarak ikna edici bir çözüm yapmıştır. Aziz'in çözümü aşağıda sunulmuştur.

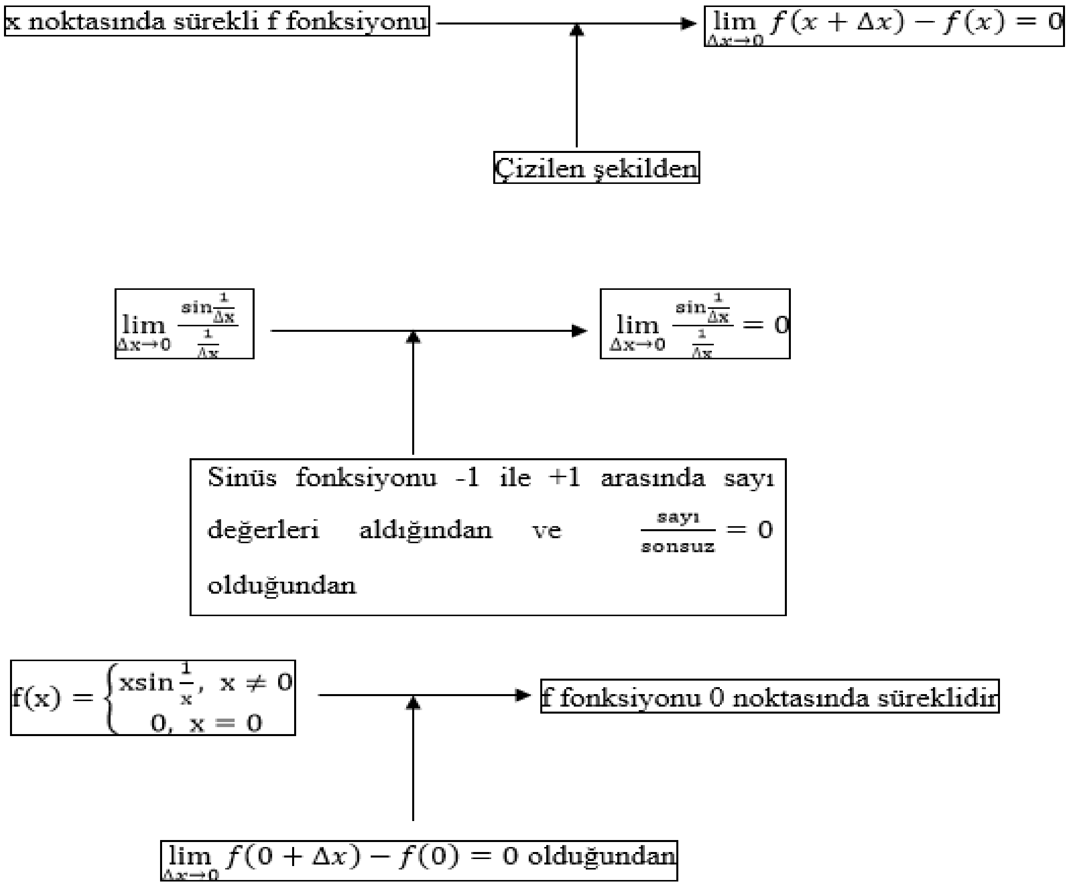


Şekil 4.68. Aziz'in çözümü

Aziz söz konusu fonksiyonun sıfır noktasında sürekli olduğunu nasıl göstereceğine yönelik düşünce sürecine girmiştir. Herhangi bir fonksiyonun grafiğini çizerek x noktasında sürekli bir fonksiyon için bir çıkarımda bulunmuştur. Aziz, x noktasında bir fonksiyonun sürekli olması için $lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0$ olması gerektiği sonucuna ulaşmıştır. Aziz'in ürettiği bu argümanda görsel gerekçe tipinde hareket ettiği belirlenmiştir. Bulduğu bu sonucu çözümünün ana gerekçesi olarak kullanmıştır. Aziz, problem çözümü sırasında $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\frac{1}{\Delta x}}{\frac{1}{\Delta x}}$ limitini hesaplarken bir alt argüman daha üretmiştir. Aziz bu limitin sonucunu bulurken sinüs fonksiyonun ve limit alma işleminin özelliklerini kullanmıştır. Aziz ürettiği bu argümanlarda dönüşümsel gerekçe tipine ait özellikler sergilemiştir. Buna göre Aziz'in matematiksel iddiasını savunurken hem görsel hem de dönüşümsel gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Aşağıda Aziz'in söz konusu limiti hesaplarken girdiği düşünce sürecine yönelik ifadelerine yer verilmiştir.

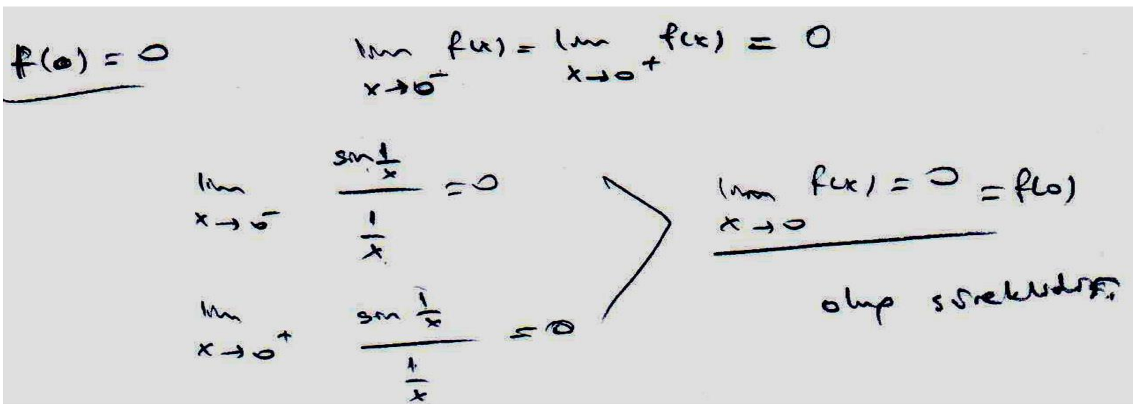
Aziz: Şimdi sinx fonksiyonu -1 ile +1 değerleri arasında değerler alıyor. Sonuçta aldığı bu değer bir sayıdır. $\frac{sayı}{sonsuz} = 0$ *olduğundan* $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\frac{1}{\Delta x}}{\frac{1}{\Delta x}} = 0$ *olur. Bu fonksiyon süreklidir.*

Aşağıda Aziz'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



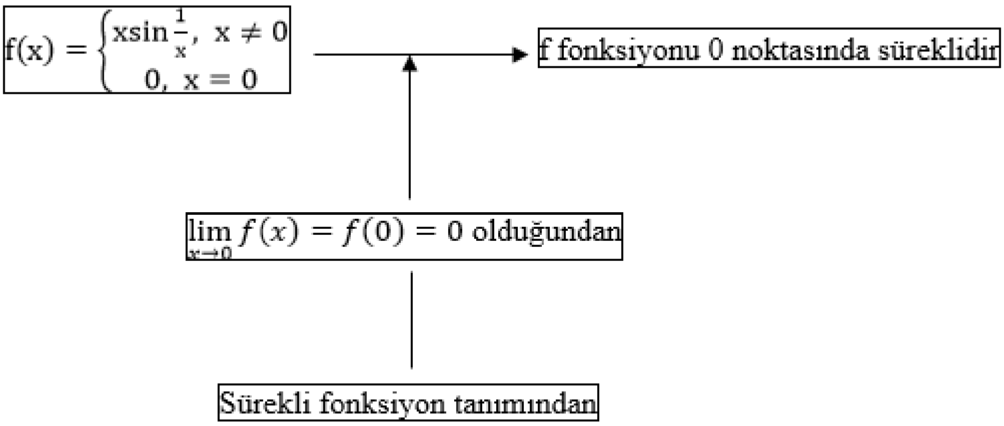
Şekil 4.69. Aziz'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Adem problemini çözerken söz konusu fonksiyonun 0 noktasında sürekli olduğunu göstermek için fonksiyonun sıfır noktasındaki limitini araştırmıştır. Aşağıda Adem'in çözümüne yer verilmiştir.



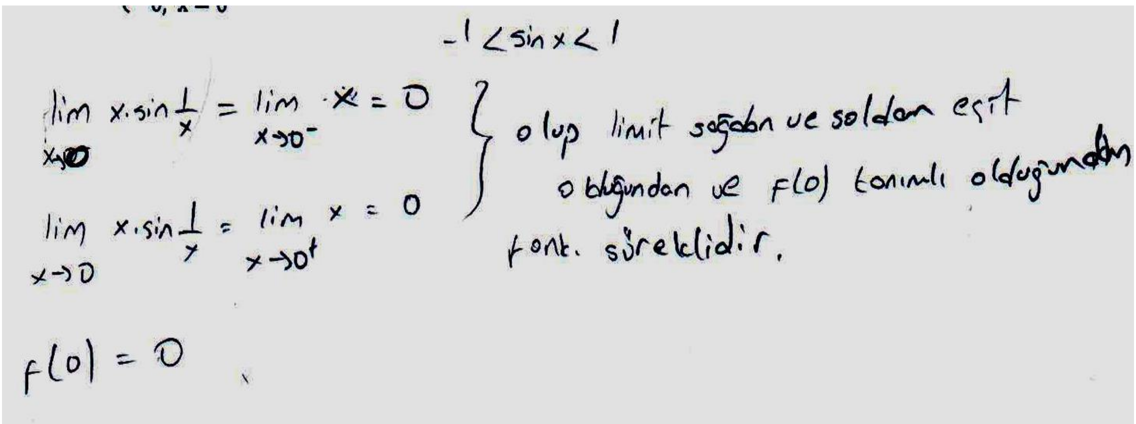
Şekil 4.70. Adem'in çözümü

Adem fonksiyonun sürekli olduğunu göstermek için ürettiği ana argümanda gerekçe olarak $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ olmasının gerekli olduğu gerçeğini kullanmıştır. Adem çözümünde yer alan limit değerini bulmak için Aziz'in çözümünde olduğu gibi alt argümanlar üretmiştir. Adem bu limiti bulurken sinüs fonksiyonun ve limit alma işleminin özelliklerini kullanmıştır. Buna göre, Adem'in dönüşümsel gerekçe tipinde olduğu ortaya çıkmıştır. Aşağıda Adem'in ürettiği ana argümanın Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.71. Adem'in ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Belma ve Buse problem çözümünde Adem'in kullandığı gerekçeyi kullanarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adayları kendilerine verilen fonksiyonun sıfır noktasındaki limitini araştırmışlardır. Limit alma işlemi sırasında matematiksel gerçeklerle uyuşmayan bir şekilde limit değerini bulmaya çalışmışlardır. Aşağıda Belma'nın çözümüne ve limit alma işlemi sırasındaki düşüncelerine yer verilmiştir.



Şekil 4.72. Belma'nın çözümü

Belma: Limiti sıfıra sağdan ve soldan baktım. İkisinin de limiti aynı çıktı ve f(0) da tanımlı olduğundan süreklidir.

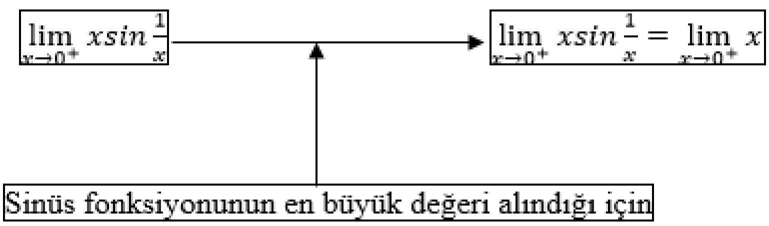
Araştırmacı: Limiti nasıl buldun?

Belma: Limiti sıfır buldum. Sinx fonksiyonu -1 ile +1 arasında olduğu için büyük değeri aldım. x.1 dedim.

Araştırmacı: Neden büyük değeri aldın?

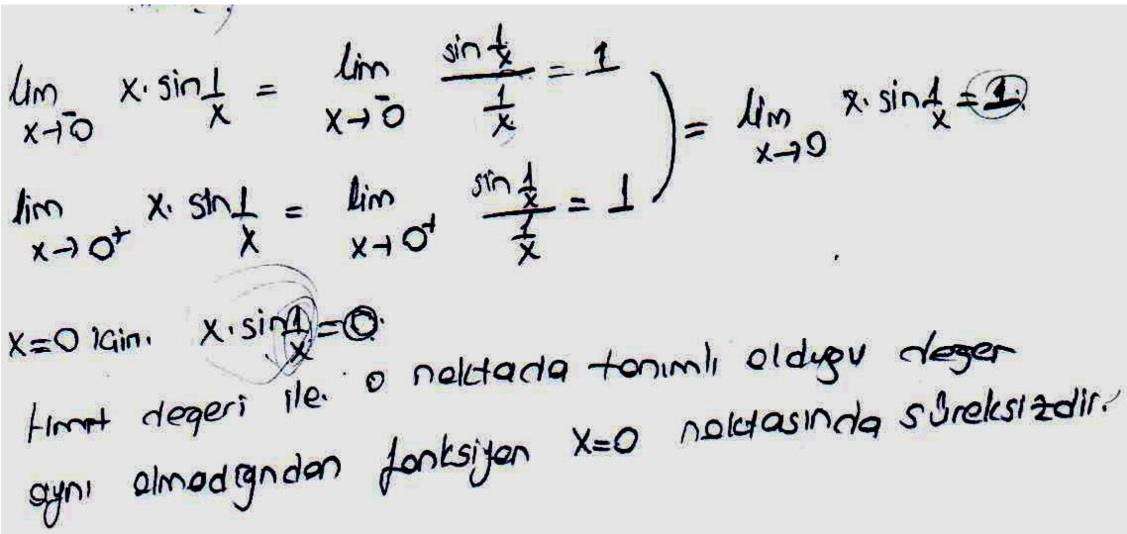
Belma: Öyle yapıyorduk.

Belma fonksiyonun sıfır noktasındaki limit alma işlemi sırasında matematiksel olarak hatalı bir argüman üretmiştir. Argümanında sinüs fonksiyonunun alabileceği en büyük değeri fonksiyonda yerine yazarak limit alma işlemine devam etmiştir. Belma'ya neden sinüs değeri yerine 1 yazdığı sorulduğunda otoriter bir yaklaşım sergileyerek daha önce böyle yaptıklarını ifade etmiştir. Bu yüzden Belma'nın çözümünün anlamaya dayalı olmadığı, sadece zihnindeki belli bir prosedürü uygulamaya çalıştığı düşünülmüştür. Bu sebeple Belma'nın otoriter gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Aşağıda Belma'nın ürettiği yanlış argümanın Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



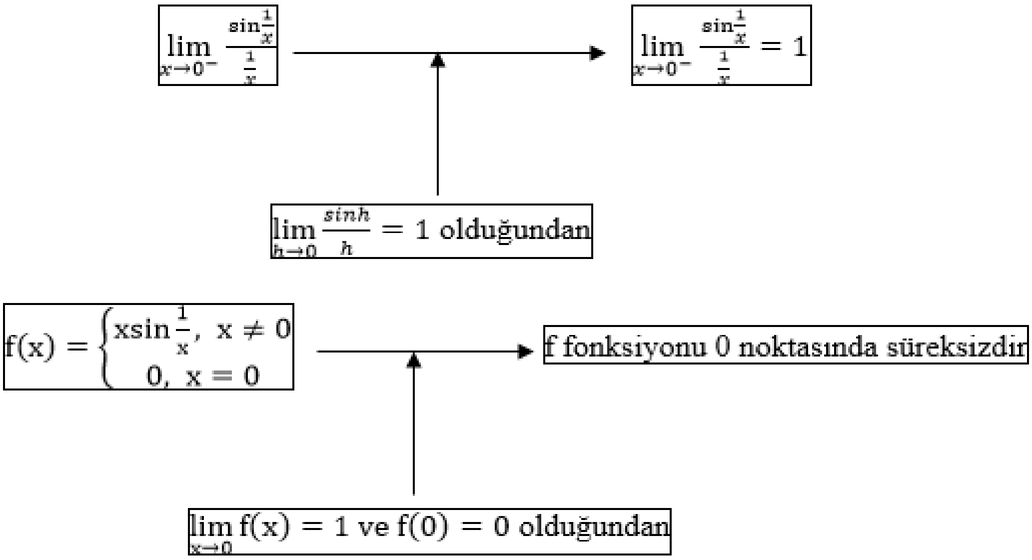
Şekil 4.73. Belma'nın ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Buse de limit alma işleminde yanlışlık yapmıştır. Yaptığı yanlış limit alma işlemi sonucunda fonksiyonun görüntüsünden farklı bir limit değeri bulduğu için fonksiyonun sıfır noktasında sürekli olmadığını belirtmiştir. Aşağıda Buse'nin çözümü yer almıştır.



Şekil 4.74. Buse’nin çözümü

Buse çözümündeki limit alma işlemini yaparken trigonometrik fonksiyonların limitleri konusundaki bilgi eksikliği ortaya çıkmış ve söz konusu limit değerini 1 olarak bulmuştur. Buse $lim_{h\to 0}\frac{sinh}{h} = 1$ olduğundan dolayı bu limitin değerinin de 1 olması gerektiğini iddia etmiştir. Bu işlemler sonucunda fonksiyonun sıfır noktasındaki limit değerinin görüntü değerinden farklı olmasından dolayı fonksiyonun sıfır noktasında süreksiz olduğunu belirtmiştir. Ürettiği argümanda matematiksel olarak yanlış bir bilgi kullandığı için Buse’nin referanssız gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Aşağıda Buse’nin ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.75. Buse’nin ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

4.4.2. Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki ispat süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki ispat süreçlerine yönelik bulgular sunulmuştur. Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki ispat süreçleri kapsamında, öğretmen adaylarının yanlış yapılmış bir ispatı nasıl değerlendirdikleri ve matematiksel önermelere ait ispat ve ters ispat üretme durumları araştırılmıştır.

Öğretmen adaylarına ilk olarak “$f(x), h(x), g(x)$ *fonksiyonları* $x=a$ *noktası hariç bu noktayı ihtiva eden uygun bir açıklıkta tanımlı olsun. Bu aralıkta* $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ *olmak üzere* $lim_{x\to a}\, g(x)=lim_{x\to a}\, h(x)=L \Rightarrow lim_{x\to a}\, f(x)=L$” teoreminin yanlış bir şekilde yapılmış ispatı sunulmuştur. Bu ispatın orijinalinde yer alan “$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$" ifadesi “$\delta=\text{maks}\{\delta_1,\delta_2\}$” olarak değiştirilmiştir. İspatta yapılan böyle bir değişiklik ispatın genellenebilirliğine zarar vermekte ve ters bir örnekle yanlışlanabilmektedir. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejilerin üç kategori ve yedi alt kategori altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Tablo 4.33’te kullanılan stratejiler ve verilen kararlar sunulmuştur.

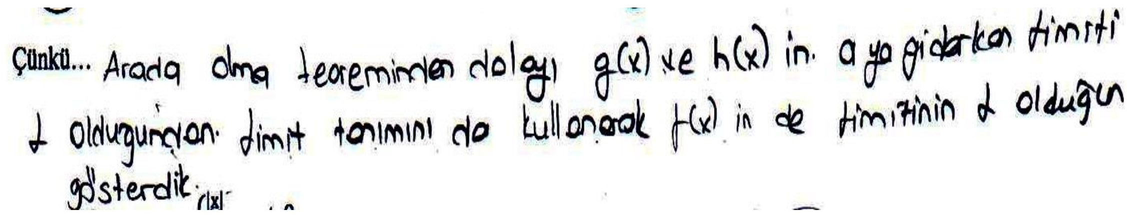
Tablo 4.33.

Öğretmen Adaylarının Limit Konusundaki İspatı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler ve Verdikleri Kararlar

	Stratejiler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	İşlemsel hata ve basamak kontrolü	✓		✓	✓	✓	✓		
	$\boldsymbol{\delta}$ nın seçimi	✓	✓	✓	✓				
Yapısal İnceleme	Hipotezin kullanılması	✓	✓						✓
	Limit tanımının kullanılması	✓	✓	✓	✓	✓		✓	
	Hükme ulaşılması					✓		✓	
Otoriter inceleme	Öğrenilen ispatla uyum						✓		✓
	Uyarlama					✓			
Verilen Karar		Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

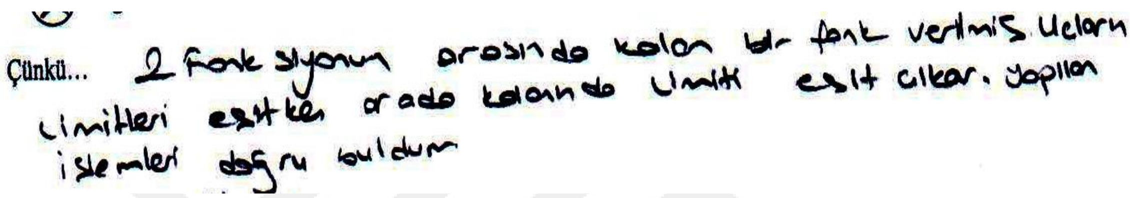
Tablo 4.33’e göre öğretmen adaylarının hepsinin, yanlış olan bu ispatın doğru olduğunu belirttikleri görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının limit konusunda yapılan yanlış ispatı belirleme becerilerinin oldukça düşük olduğu söylenebilir. Öğretmen adayları ispatı değerlendirirken çoğunlukla limit tanımının ispatta kullanılmasına ve ispat basamaklarında işlemsel ve mantıksal olarak bir hata bulunup bulunmamasına dikkat etmişlerdir. Öğretmen adaylarının yarısı da ispatta δ sayısının seçimini göz önüne almışlardır. Öğretmen adaylarının çoğu ispatın yapısına dikkat ederek teoremin hipotezinin ispatta kullanılması ve hükme ulaşılması ile ilgilenmişlerdir. İki öğretmen adayı, ispatın daha önceden bildikleri ispatla uyumlu olmasına dikkat etmişlerdir. Bir öğretmen adayı farklı bir konudaki ispatı söz konusu ispata uyarlayarak değerlendirmiştir.

Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelendiğinde öğretmen adaylarının çoğunun ispatta limitin formel tanımının uygulanıp uygulanmamasına dikkat ettikleri belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarından Buse’nin gerekçesi aşağıda sunulmuştur.


Çünkü... Arada olma teoreminden dolayı g(x) ve h(x) in a ya giderken limiti L olduğundan limit tanımını da kullanarak f(x) in de limitinin L olduğunu gösterdik.

Şekil 4.76. Buse'nin gerekçesi

Öğretmen adaylarının yarısından fazlası, ispatı değerlendirirken ispat basamaklarında işlemsel hatanın olup olmamasına ve ispat basamakları arasındaki geçişlerin doğru yapılıp yapılmamasına dikkat etmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarıdan Bilge'nin gerekçesine yer verilmiştir.


Çünkü... 2 fonksiyonun arasında kalan bir fonk verilmiş. Uçların limitleri eşitken arada kalanında limit eşit çıkar. Yapılan işlemleri doğru buldum

Şekil 4.77. Bilge'nin gerekçesi

Ahu, Aziz, Adem ve Aysun'un ispatı değerlendirirken ispatta yer alan δ sayısının seçimine dikkat ettikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adayları yaptıkları değerlendirmelerde ve ürettikleri argümanlarda doğru gerekçeler sunmalarına rağmen δ sayısının doğru seçildiğini ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adayları limit tanımına yönelik kavramsal bilgilerin yeterli düzeyde olmasına rağmen δ nın doğru bir şekilde seçildiğini ifade etmişlerdir. Bu durumun sebebinin, bir önceki mülakat olan diziler ile ilgili yapılan ispatta kesme noktasının seçiminin etkili olduğu düşünülmüştür. Buna en iyi örnek Aziz'in durumudur.

Etkinlik temelli mülakatlara başlamadan önce ispatla ilgili Aziz'in görüşleri alınırken doğru bir ispatta neler olması gerektiği de sorulmuştu. Buna cevap olarak Aziz, ispatlarda bulunan kilit ifadelerin önemli olduğunu ifade etmişti. Kilit ifadelere örnek olarak fonksiyonların limiti ile ilgili ispatlarda δ nın minimum seçilmesini vermişti. Eğer δ minimum seçilmezse ispatın yanlış olacağını belirtmişti. Aziz, bu ispatı değerlendirirken δ nın nasıl seçildiğine dikkat etmiştir. Aziz δ nın seçimi için uygun gerekçeler öne sürmesine rağmen ısrarla δ nın doğru bir şekilde seçildiğini iddia etmiştir. Buna göre Aziz ile beraber Ahu, Aysun ve Adem'in fonksiyonlar ve dizilerin limiti tanımlarına yönelik kavramsal bilgileri yeterli seviyede olmasına rağmen reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların bir noktadaki limiti ile reel sayı dizilerin limiti arasındaki fark hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları söylenebilir. Aşağıda Aziz'in konu ile ilgili ifadelerine yer verilmiştir.

Aziz: Evet doğru yapmış. İşlemlerde bir sıkıntı yok. Tanımları doğru kullanmış, yine sağlamadığı durumları ortadan kaldırmak için $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$ *seçmiş. Eşitsizliği doğru kullanmış. Herhangi bir işlem hatası yok.*

Araştırmacı: Neden $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$ *seçilmiş?*

Aziz: İlkine a nın δ_1 *komşuluğundaki x ler, diğerine a nın* δ_2 *komşuluğundaki x ler diyoruz. İşte bu yarıçaplardan birisi ufak diğeri büyük olacak, zaten birbirinden farklı maksimum aldığımız zaman ufak olanı da kapsar.* δ_1, δ_2*den daha büyük olsun. Şimdi maksimum aldığımız zaman* δ_1 *yarıçapı zaten kapsıyor.* δ_2 *yarıçapı da* δ_1 *den daha küçk olduğu için yine kapsıyor. Bu yüzden yani.*

Araştırmacı: Minimum seçilseydi ne olurdu?

Aziz: Minimum seçilseydi δ_1 *yarıçaplı komşulukta olup,* δ_2 *yarıçaplı komşulukta olmayan x ler olabilirdi. O yüzden maksimum seçtiğimiz zaman bu ortadan kalkıyor.*

Araştırmacı: Eğer minimum seçilseydi ispatın bundan sonraki adımlarının hangisinin yazımında sıkıntı olurdu?

Aziz: $|f(x) - L|$ *nin* ε *dan küçük olduğunu söyleyemezdik.*

Aziz ifadelerinde $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$ seçilmesinin sebebinin sağlanmadığı durumları ortadan kaldırmak olduğunu belirtmiştir. Aziz, sağlamayan durum ile $|f(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlamayan x değerlerinden bahsetmektedir. Burada Aziz tarafından açıkça belirtilmese de, Aziz'in sağlamasını istediği x lerin, birinci tanımda yer alan $|g(x) - L| < \varepsilon$ ve $|h(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliklerini ortak olarak sağlayan x değerleri olduğu anlaşılmıştır. Aziz δ nın minimum seçilmesi durumunda, bu iki eşitsizliğin kullanılarak oluşturulan $|f(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliğin yazılamayacağını ifade etmiştir. Aziz'in sunduğu gerekçeler doğru olmasına rağmen iddiası yanlıştır. İki farklı aralıktaki elemanlar için geçerli olan iki eşitsizliğin ortak olarak kullanılabilmesi için, her iki eşitsizliği de sağlayan elemanlar seçilmelidir. Bu durum ise iki aralığın kesişiminin, yani ortak olan elemanların alınması ile mümkündür. Bu yüzden Aziz'in eşitsizliği sağlayacak x lerin seçilmesi düşüncesi doğru fakat bu durumun $\delta = \text{maks}\{\delta_1, \delta_2\}$ seçilmesi ile mümkün olacağı iddiası yanlıştır. Aşağıda Aziz'in ürettiği bu argümanın Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.

$0 < |x - a| < \delta_1$ olduğunda $|g(x) - L| < \varepsilon$
$0 < |x - a| < \delta_2$ olduğunda $|h(x) - L| < \varepsilon$

→ $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$ olmalı

$|f(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanmadığı durumları ortadan kaldırmak için

Şekil 4.78. Aziz'in ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Ahu, Adem ve Belma ispatı değerlendirirken teoremin hipotezinde verilen bilgilerin ispatta kullanılıp kullanılmadığına dikkat etmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Ahu'nun gerekçesi sunulmuştur.

Çünkü... Tanım ve hipotez doğru kullanılmış. İşlemler doğru olarak yapılmıştır.

Şekil 4.79. Ahu'nun Gerekçesi

Barış ve Buse ise teoremin hükmüne, yani istenilen sonuca ulaşılıp ulaşılmamasına dikkat etmişlerdir. Aşağıda Barış'ın gerekçesi sunulmuştur.

Çünkü.. Limitin tanımı doğru bir şekilde kullanmış. Daha sonra δ ifadelerinde max. olanı seçmiş ve $|f(x)-L|<\varepsilon$ ifadesini $-\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon$ olarak açıp (Mutlak değ. tanım.) cebirsel işlemler yapıp gereken sonuca ulaşmıştır.

Şekil 4.80. Barış'ın gerekçesi

Bilge ve Belma ise ispatın daha önce öğrendikleri ispatlara benzemesine dikkat etmişlerdir. Bu bakımdan Bilge ve Belma'nın bu ispatı değerlendirirken otoriter bir yaklaşım sergiledikleri söylenebilir. Aşağıda Bilge'nin ifadelerine yer verilmiştir.

Bilge: Daha önce bu ispatı öğrendiğim için tanıdık geldi. Tanıdık bir ispattı zaten. Tanımları nasıl kullanmış ona baktım. Öğrendiğim ispatla uyumlu mu ona baktım.

Barış, ispatı değerlendirirken yakınsak dizi konusunda yapılan ispatları referans almıştır. Diziler konusundaki bilgilerini fonksiyonlara uyarlayarak bir değerlendirme yapmıştır. Aşağıda Barış'ın ifadelerine yer verilmiştir.

Barış: Burada tanımı kullanmış. Geçen dizilerde yaptığımız gibi δ_1 *ve* δ_2 *den maksimumun olanını almış.* $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$ *demiş, daha sonra da ekleme çıkarma yapmış zaten…*

İspat değerlendirme aktivitesinin ardından öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusundaki ispat yapma süreçleri incelenmiştir. Öğretmen adaylarının *"$A \subset R$, $f: A \to R$ ve $g: A \to R$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar A kümesi üzerinde sürekli olsun. Bu durumda f+g fonksiyonu da A kümesi üzerinde süreklidir.*" doğru önermesi için ürettikleri ispatlar incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlarının dört kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4.34'te bu kategorilere yönelik bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.34.

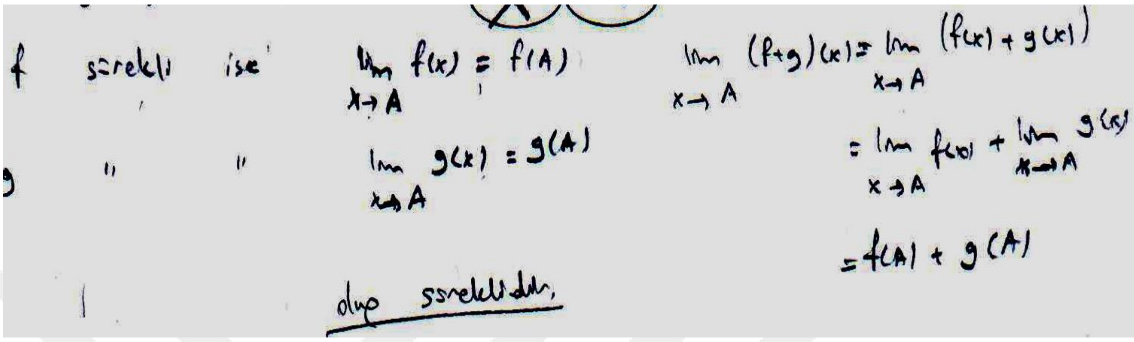
Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ispat		✓						
Kısmen doğru ispat						✓		
Geçersiz ispat	✓		✓	✓			✓	✓
Örnekle doğrulama					✓			

Tablo 4.34 incelendiğinde, sadece bir öğretmen adayının doğru bir ispat yapabildiği görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki ispat yapma becerilerinin oldukça düşük olduğu söylenebilir. Bir öğretmen adayı kısmen doğru bir ispat yapmıştır. Öğretmen adaylarının yarısından fazlasının ispatları geçersiz olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının tamamına yakını süreklilik tanımını kullanarak ispatı ilerletmeye çalışmış ve tamamlamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının bu önermenin ispatı için dönüşümsel ispat şemasında oldukları söylenebilir. Bir öğretmen adayı ise önermenin doğru olduğunu bir örnek

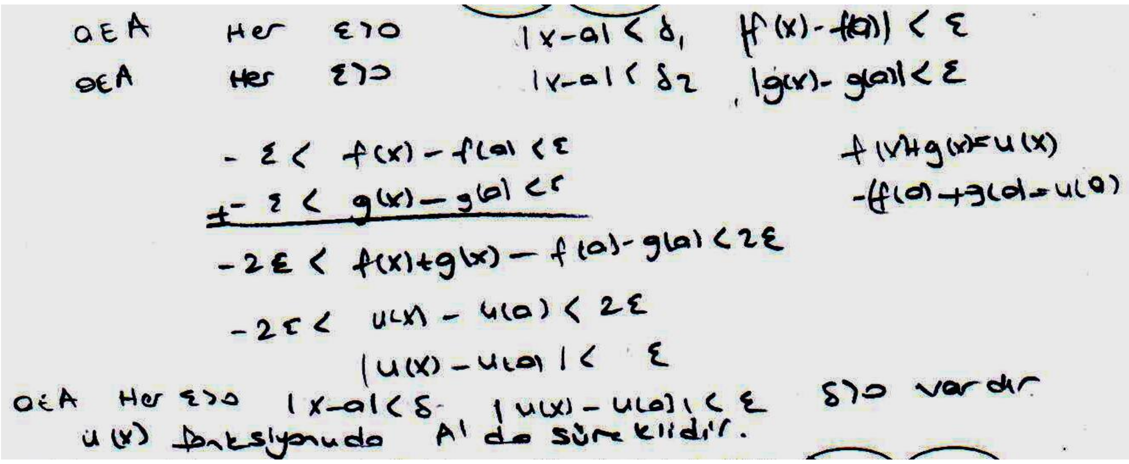
üzerinden göstermeye çalışmıştır. Bu öğretmen adayının tümevarımsal ispat şemasında olduğu ortaya çıkmıştır.

Adem ispatında süreklilik tanımını ve limit işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanmıştır. Aşağıda doğru bir ispat üreten Adem'in ispatı yer almıştır.



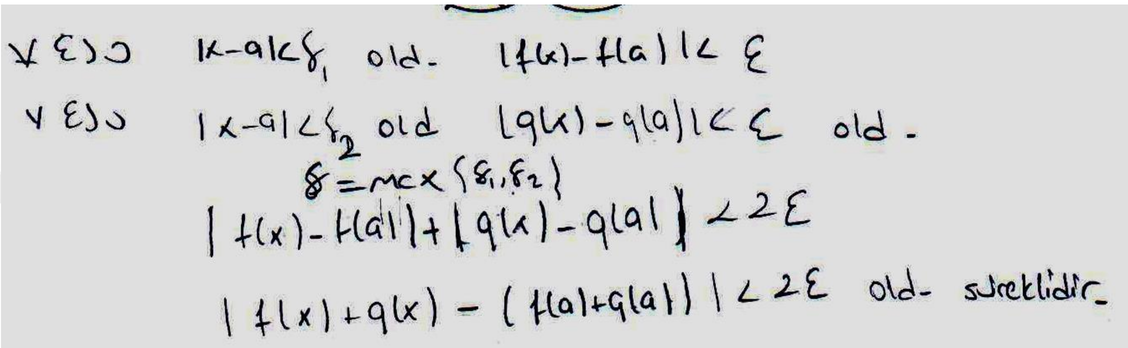
Şekil 4.81. Adem'in ispatı

Bilge ise sürekliliğin formel tanımını kullanarak kısmen doğru bir ispat yapmıştır. Bilge'nin ispatının kısmen doğru olarak değerlendirilmesinin sebebi f+g fonksiyonunun A kümesi üzerinde sürekliliğini sağlayacak bir δ sayısının varlığını ifade etmesine rağmen onun varlığını teoremin hipotezindeki bilinenlerden hareketle garanti altına alamamasıdır. Söz konusu δ sayısının varlığı ifade edilmiş fakat açık bir şekilde belirtilmemiştir. Aşağıda Bilge'nin ispatı sunulmuştur.



Şekil 4.82. Bilge'nin ispatı

Ahu, Aziz, Aysun, Buse ve Belma'nın ispatları incelendiğinde geçersiz ispatlar yaptıkları ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adayları süreklilik tanımından yararlanarak ispatını tamamlamaya çalışmışlardır. Bu ispatlar Bilge'nin yaptığı ispattan farklıdır. Bilge'nin ispatında, ispatta kullanılan işlemlere olanak verecek bir δ sayısının varlığı ifade edilmiş fakat açıkça belirtilmemiştir. Bu ispatlarda δ sayısı bilinenlerden hareketle açıkça belirtilmiş fakat belirtilen δ sayısı ispatta kullanılan işlemlerin doğruluğunu ve geçerliğini tehlikeye düşürmemektedir. Bu ispatların ters örnek yardımıyla geçersizliğini göstermek mümkündür. Aşağıda bu ispatlara bir örnek olarak Aysun'un ispatı sunulmuştur.



$\forall \varepsilon > 0 \quad |x-a| < \delta_1$ old. $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |x-a| < \delta_2$ old $|g(x)-g(a)| < \varepsilon$ old.

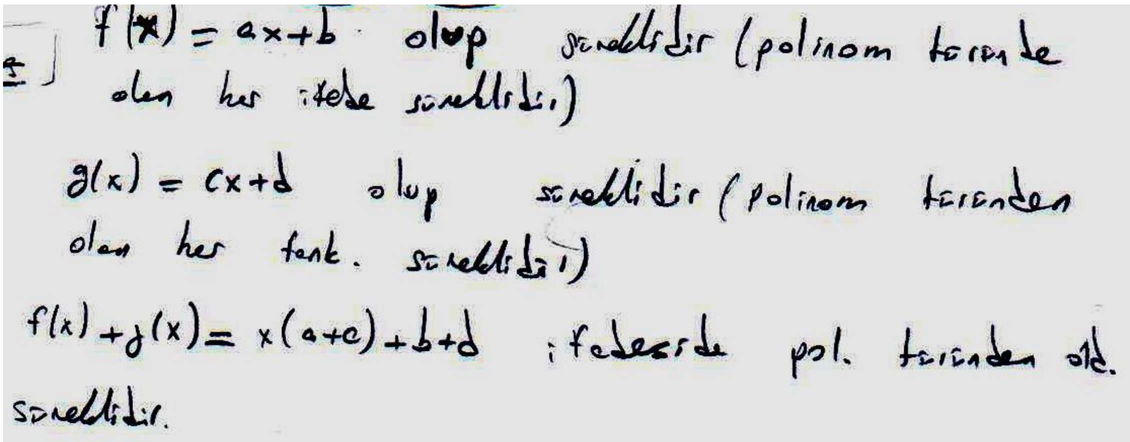
$\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$

$|f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| < 2\varepsilon$

$|f(x)+g(x) - (f(a)+g(a))| < 2\varepsilon$ old. süreklidir.

Şekil 4.83. Aysun'un ispatı

Son olarak Barış ise tümevarımsal bir yaklaşım ile ispatını bir örnek kullanarak yapmıştır. Barış ispatında iki genel doğrusal fonksiyon ele alarak toplamlarının sürekli olduğunu göstermeye çalışmıştır. Aşağıda Barış'ın ispatı sunulmuştur.



$f(x) = ax+b$ olup süreklidir (polinom türünde olan her itede süreklidir)

$g(x) = cx+d$ olup süreklidir (polinom türünden olan her fonk. süreklidir)

$f(x)+g(x) = x(a+c)+b+d$ ifadesinde pol. türünden old. süreklidir.

Şekil 4.84. Barış'ın ispatı

Öğretmen adaylarının ters örnek üretme becerilerini ortaya çıkarmak için *"Bir küme üzerinde monoton artan her fonksiyon, aynı küme üzerinde süreklidir."* yanlış önermesine yönelik ürettikleri matematiksel ürünler incelenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda öğretmen adaylarının oluşturdukları ürünlerin dört kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.35'te bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

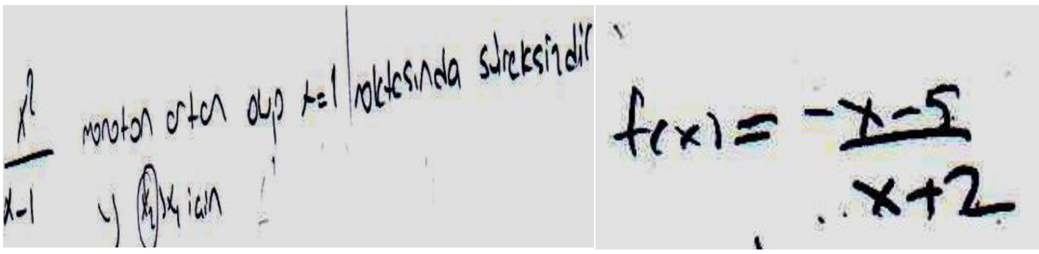
Tablo 4.35.

Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Üretme Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Geçersiz ters örnek			✓	✓				
Örnekle doğrulama					✓			
İspat							✓	✓
Tamamlanmamış ispat	✓	✓				✓		

Tablo 4.35'e göre, önermenin yanlış olduğunu belirten öğretmen adaylarının önerme için uygun bir ters örnek üretemedikleri belirlenmiştir. Diğer öğretmen adayları önermenin doğru bir önerme olduğunu ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları çoğunlukla ispat yapmaya çalışmışlardır. İki öğretmen adayı ispatını tamamlarken üç öğretmen adayı tamamlayamamıştır. Bir öğretmen adayı önermenin doğru olduğunu özel bir örnek kullanarak göstermeye çalışmıştır.

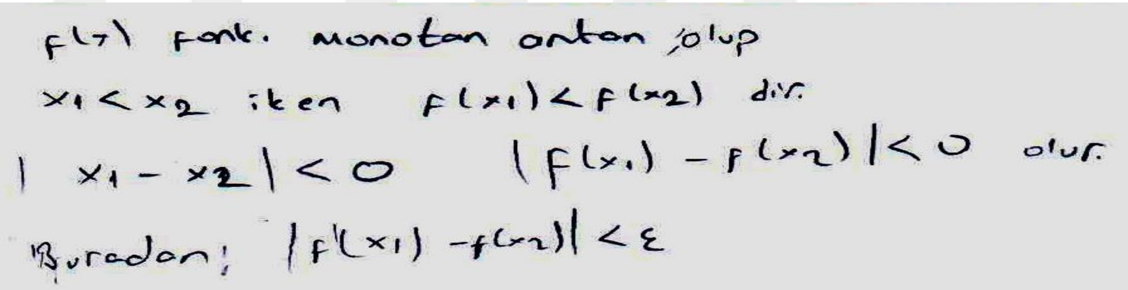
Önermenin yanlış olduğunu belirten Aziz ve Aysun, geçerli bir ters örnek bulamamışlardır. Buna göre, bu öğretmen adaylarının doğru bir ters örnek üretmede başarısız oldukları söylenebilir. Aşağıda sırasıyla Aysun ve Aziz'in reel sayılar üzerinde tanımladıkları örnekler sunulmuştur.



Şekil 4.85. Aysun ve Aziz'in örnekleri

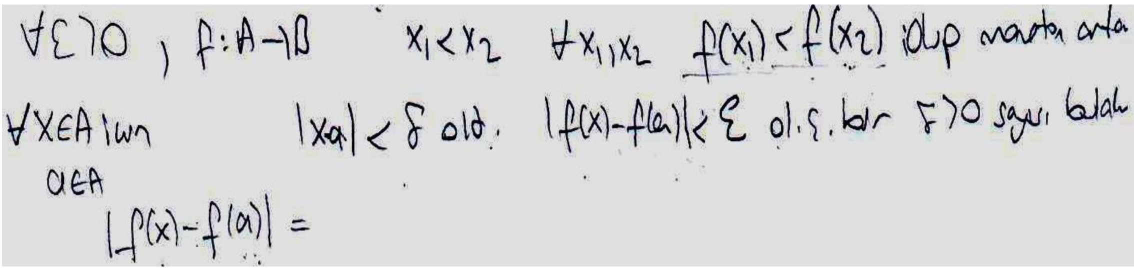
Öncelikle Aysun'un $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ örneği incelendiğinde, bu fonksiyonun reel sayılar üzerinde monoton artan bir fonksiyon olmadığı dikkat çekmiştir. Bu fonksiyon $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ kümesi üzerinde monoton artandır. Bu bakımdan, Aysun'un fonksiyonun reel sayılar kümesi üzerinde monoton artan olduğu iddiası yanlıştır. Ayrıca, fonksiyon monoton artan olduğu aralık olan $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ kümesi üzerinde aynı zamanda süreklidir. Aziz'in örneği incelendiğinde öne sürdüğü $f(x) = \frac{-x-5}{x+2}$ fonksiyonu da, Aziz'ın iddia ettiği gibi reel sayılar üzerinde monoton artan bir fonksiyon değildir. Söz konusu fonksiyonun monoton artan olduğu küme $R - \{-2\}$ kümesidir. Bu fonksiyon da monoton artan olduğu küme üzerinde aynı zamanda süreklidir. Buna göre Aysun ve Aziz'in öne sürdükleri örneklerin önermeye ters örnek olacak özellikleri taşımadığı belirlenmiştir.

Aysun ve Aziz'in dışındaki öğretmen adayları, önermenin doğru olduğunu belirterek önermeyi doğrulamaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarının çoğu önermeyi ispatlama yoluna gitmişlerdir. Bu öğretmen adaylarından Buse ve Belma ispatlarını tamamlamış fakat tatmin olmadıklarını belirtmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Belma'nın ispatına yer verilmiştir.


f(x) fonk. monoton artan olup
$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ dir.
$| x_1 - x_2 | < 0$ $|f(x_1) - f(x_2)| < 0$ olur.
Buradan; $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

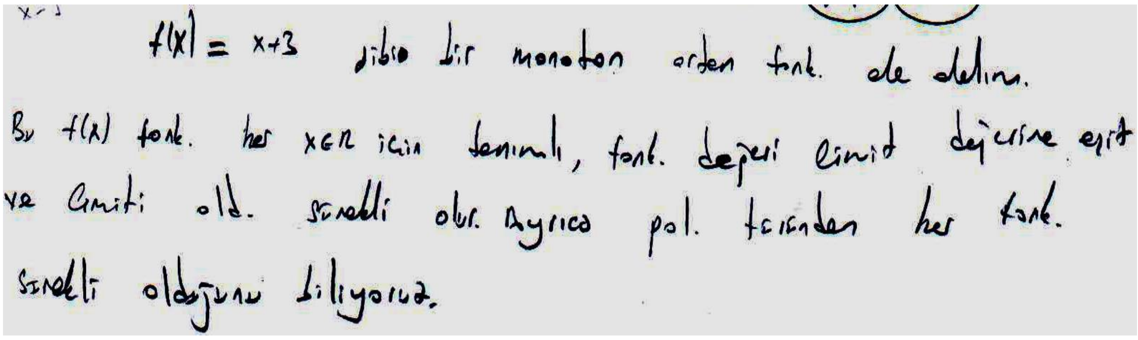
Şekil 4.86. Belma'nın ispatı

Ahu, Adem ve Bilge ispatlarına başlamış fakat tanımları yazdıktan sonra başka bir işlem yapamamışlardır. İspatını ilerletemeyen öğretmen adayları ispatlarını bu şekilde bırakmışlardır. Aşağıda Ahu'nun ispatı sunulmuştur.


$\forall \varepsilon > 0$, $f: A \to B$ $x_1 < x_2$ $\forall x_1, x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$ olup monoton artan
$\forall x \in A$ için $|xa| < \delta$ old. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ o.l.ş. bir $\delta > 0$ sayısı bulalım
$a \in A$
$|f(x) - f(a)| =$

Şekil 4.87. Ahu'nun ispatı

Son olarak Barış önermenin doğru olduğunu bir örnek üzerinden göstermeye çalışmıştır. Bu bakımdan Barış'ın bu ispatında da tümevarımsal ispat şemasını koruduğu söylenebilir. Aşağıda Barış'ın ispatına yer verilmiştir.


$f(x) = x+3$ gibi bir monoton artan fonk. ele alalım.
Bu $f(x)$ fonk. her $x \in R$ için tanımlı, fonk. değeri limit değerine eşit
ve limiti old. sürekli olur. Ayrıca pol. türünden her fonk.
sürekli olduğunu biliyoruz.

Şekil 4.88. Barış'ın ispatı

4.4.3. Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişki

Bu bölümde öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki argümantasyon ve ispat süreçleri arasındaki ilişkiye yönelik bulgular sunulmuştur. Bu bölüme ait bulgular öğretmen adaylarına sunulan *"$A \subset R$, $f: A \to R$ ve $g: A \to R$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar A kümesi üzerinde sürekli olsun. Bu durumda f+g fonksiyonu da A kümesi üzerinde süreklidir."* doğru önermesi yardımıyla elde edilmiştir. Bu önermenin doğruluğuna ikna olmak için girilen süreç sonunda bir karara varma aşaması olan argümantasyon süreci ile verdiği kararın doğruluğunu ikna edici bir şekilde göstermek için ürün oluşturma süreci olan ispat süreci arasındaki ilişki yapısal olarak incelenmiştir. Yapılan incelemelerin sonucunda öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat sürecine yönelik dört farklı durum ile karşılaşılmıştır.

1. ***Dedüktif Argümantasyondan Dedüktif İspat***

Bu durumdaki öğretmen adayları önermenin doğru olduğuna ikna olmak için süreklilik kavramı üzerinde muhakeme sürecine girmişler, zihinlerinde bu ispatı tanımlar üzerinden manipülasyonlar yaparak düşünmüşler ya da ispatını yapmaya çalışmışlardır. İspatlarında da sürekliliğin formel tanımından yola çıkarak toplam fonksiyonunun sürekliliği için gerekli ifadelere ulaşmaya çalışmışlardır. Adem önermenin doğru olduğuna ispat yaparak karar vermiştir. Adem ispatını geçerli bir şekilde yapmıştır. Bilge ise önermenin doğru olduğuna ispatı düşünerek karar vermiş ve kısmen doğru bir ispat yapmıştır. Bu durumdaki diğer öğretmen adaylarından Ahu süreklilik kavramı üzerinden düşünce sürecine girerek önermenin doğru olduğunu belirtmiş fakat geçersiz bir ispat yapmıştır. Buse ise aynı Bilge gibi önermenin doğruluğuna, önermenin ispatını düşünerek karar vermiş fakat doğru bir ispat oluşturamamıştır. Buna göre argümantasyon yapısını ispatta da devam ettiren öğretmen adaylarının ispattaki başarı oranının ortalama bir seviyede olduğu söylenebilir.

2. *Sezgisel Argümantasyondan Dedüktif İspat*

Bu durumdaki öğretmen adayları kendilerine yöneltilen önermenin doğru olduğuna hisleri ile karar vermişlerdir. Bu duruma örnek olan öğretmen adayları Aziz ve Aysun'dur. Aziz ve Aysun önermenin kulağa mantıklı geldiğini ifade ederek karar vermişlerdir. Oluşturdukları ürünler incelendiğinde ise geçersiz ispat yaptıkları belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının ispat oluşturmada başarısız oldukları söylenebilir.

3. *Sezgisel Argümantasyondan Tümevarımsal İspat*

Bu duruma örnek olan öğretmen adayı Barış'tır. Barış önermenin doğru olduğuna sezgisel olarak karar vermiştir. Barış önermenin içeriğine değil görünüşüne göre değerlendirmiştir. Önermenin ispatını özel bir örnek kullanarak yapmaya çalışmıştır. Barış önermenin doğru olduğunu göstermek için tek bir örneğin önermeyi doğrulamasının yeterli olacağına inanmıştır. Barış'ın argümantasyon süreci ile ispat süreci arasındaki bu boşluk geçerli bir ispat yapmasına engel olmuştur.

4. *Otoriter Argümantasyondan Dedüktif İspat*

Bu durumdaki öğretmen adayı Belma'dır. Belma önermenin doğru olduğunu bildiği için doğru olduğunu ifade etmiştir. Belma kararını verirken herhangi bir argüman oluşturmamıştır. Bu yüzden Belma'nın otoriter gerekçe tipinde olduğu belirlenmiştir. Çünkü Belma verdiği kararların çoğunda ilgili bilgiyi daha önce bildiğini, duyduğunu, gördüğünü ya da sınıfta söylendiğini ifade etmiştir. Belma ispatını ise tanımlardan yola çıkarak dedüktif tarzda ispat yapmaya çalışmış fakat geçerli bir ispat yapamamıştır.

4.5. Öğretmen Adaylarının Türev Konusundaki Argümantasyon ve İspat Süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının türev konusundaki argümantasyon ve ispat süreçlerine yönelik bulgulara yer verilmiştir. Türev konusundaki argümantasyon ve ispat süreçlerine yönelik etkinliklere geçmeden önce türev tanımı öğretmen adaylarına formel bir şekilde sunulmuştur. Tanımların öğretmen adaylarına verilmesinin sebebi, öğrencilerin türev tanımını nasıl kullanacaklarını ortaya çıkarmaktır. Ayrıca öğretmen adaylarının türevin formel tanımından ne anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik anlayışlarının ortaya çıkarılması hedeflenmiştir. Bununla birlikte öğretmen adaylarına türevin formel tanımından farklı olarak türevlenebilen fonksiyon imajlarını ortaya çıkarmak için "Türevlenebilen fonksiyon denince aklınıza ne geliyor?" sorusu yöneltilmiştir.

İlk olarak öğretmen adaylarının türev tanımından ne anladıklarına yönelik ifadeleri incelenmiştir. Söz konusu ifadelerin iki kategoriye ayrıldığı tespit edilmiştir. Tablo 4.36'da öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik ifadelerinden elde edilen kod ve kategoriler sunulmuştur.

Tablo 4.36.

Öğretmen Adaylarının Türev Tanımına Yönelik İfadeleri

Kategori	Kod	Öğretmen adayları	Örnek ifadeler
Sembolik anlama	$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limitinin olması	Barış Belma Bilge Buse Aysun	*Buse: A kümesinde bir a elemanı alıyoruz. Bu a da A kümesinin bir yığılma noktası olması gerekiyor. Ayrıca x a ya giderken $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limitinin olması gerekiyor. Öyleyse a noktasında türevlidir diyoruz.*
Kavramsal anlama	Fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limiti	Adem Aziz Ahu	*Ahu: Yine bir yığılma noktamız var bu önemli bir kısım. f, A kümesinden R ye bir fonksiyon verilmiş. Bu fonksiyon için limit x a ya giderken f(x)-f(a) yı, y deki değişim olarak düşünebiliriz. Yani bu f fonksiyonunun a noktasındaki y deki değişimi ile x deki değişimine oranı verilmiş. Bunun limitini aldığımızda bu f nin a noktasındaki türevi oluyormuş.*

Tablo 4.36 incelendiğinde Barış, Belma, Bilge, Buse ve Aysun'un türev tanımından $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limitinin mevcut olmasını anladıklarını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adayları türev tanımını kendi cümleleri ile ifade edememişler ve tanımda bulunan ifadeleri olduğu gibi tekrar etmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunun türev tanımını kendi cümleleri ile ifade etmekte güçlük yaşadıkları

söylenebilir. Bu güçlüğün sebebi ise öğretmen adaylarının söz konusu tanımdaki matematiksel ifadeyi anlamlandıramamalarıdır. Bu öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik anlamalarının sembolik olduğu söylenebilir. Buna karşın Ahu, Adem ve Aziz türev tanımından fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limiti olduğunu anladıklarını belirtmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının limitte yer alan matematiksel ifadeyi yorumlayabildikleri tespit edilmiştir. Buna göre Adem, Ahu ve Aziz'in türev tanımına yönelik kavramsal anlamaya sahip oldukları söylenebilir.

Öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik görüşleri alındıktan sonra türevlenebilen fonksiyon kavramına yönelik imajlarını ortaya çıkarmak için "Türevlenebilen fonksiyon denince aklınıza ne geliyor?" sorusu yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının bu kavrama yönelik algılarının yedi kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4.37'de öğretmen adaylarının türevli fonksiyon algılarına yönelik kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.37.

Öğretmen Adaylarının Türevlenebilen Fonksiyon Algıları

Kategoriler	**Öğretmen adayları**	***Örnek ifadeler***
Süreklilik	Ahu Barış Adem Belma Aziz	*Belma: Sürekli olması lazım. Yani kesik ve kopuk bir yeri olmaması lazım. Sürekli olması türevli olması için yeterli.*
İşlemsel özellikler	Buse Belma Aysun Bilge	*Aysun: İşlemlerde mertebelerini düşürüyorduk. Türevde maksimum ve minimum noktaları bulabiliyoruz. Ondan sonra konveks ve konkavlığı belirleyebiliyoruz. Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi deyince bunları anlıyorum.*
Eğim	Adem Barış Ahu	*Adem: Türevi eğim hesaplamalarında kullanıyoruz. Fonksiyonun bir noktasındaki teğetinin eğimi.*
Sivrilik olmaması	Barış Ahu	*Barış: Türevli işte tanımlı olması gerekiyor. İşte çizdiğimiz eğrilerin biri sağa yatık biri sola yatık olmaması lazım. Yani uç nokta olmaması lazım. Sivrilik olursa sağından çizersem artı, solundan çizersem eksi olur eğim. Sağ ve sol türev biribirine eşit olmaz. Çünkü eğimler farklı.*

Tablo 4.37. (Devamı)

Sağ türev, sol türev	Barış	*Barış: Sağ türev sol türeve eşit olacak. Daha sonra da fonksiyonun sürekli olması lazım türevlenebilmesi için.*
Anlık hız	Ahu	*Ahu: Hocam bu ilk defa fizikte çıkmış sanırım. Orada hız olayları falan vardı.* $x = v.t$ *idi oradan* $v = \frac{x}{t}$. *İşte bu anlık hız için kullanıyoruz, onun için kullanıyoruz yani.*
Değişim	Ahu	*Ahu: Türevin özelliği değişim hocam. Mesela hız için düşünürsek, yol için değişimin zamandaki değişime oranı, bir fonksiyon için de aldığımız noktadaki o delta y deki değişimin delta x deki değişime oranı.*

Tablo 4.37 incelendiğinde öğretmen adaylarının çoğunun türevli bir fonksiyonun sürekli olması gerektiğini ifade ettikleri anlaşılmıştır. Öğretmen adaylarının yarısı da türevlenebilen bir fonksiyon denince zihinlerinde türev ile yapılan işlemlerin canlandığını belirtmişlerdir. Bu öğretmen adayları türeve, özellikle türev alma işlemindeki mertebe düşürme işlemi anlamını yüklemişlerdir. Ayrıca bu öğretmen adayları türev denince maksimum, minimum noktalar, konveks ve konkavlığın zihinlerinde canlandığını belirtmişlerdir. Adem, Barış ve Ahu bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin, fonksiyona o noktada çizilen teğetinin eğimi olduğunu ifade etmişlerdir. Barış ve Ahu bir fonksiyonun türevlenebilmesi için fonksiyon grafiğinde sivriliğin olmaması gerektiğini vurgulamışlardır. Barış bir fonksiyonun bir noktada türevinin olabilmesi için sağ türevinin sol türevine eşit olması gerektiğini dile getirmiştir. Ahu ise türev denince aklına anlık hızın geldiğini ifade etmiş ve türevin değişim özelliğinin olduğunu vurgulamıştır. Bu görüşlere göre Buse, Belma, Aysun ve Bilge'nin türevin sadece işlemsel kısmını vurguladıkları söylenebilir. Öğretmen adayları türev denince akıllarına çoğunlukla türev alma işleminin geldiğini ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adayları dışındaki öğretmen adaylarının ise türevin sezgisel anlamına paralel olarak türevlenebilen fonksiyonlara anlamlar yükledikleri belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin ve türevlenebilen fonksiyon kavramına yönelik algılarının ortaya çıkarılmasının ardından etkinliklere geçilmiştir. Mülakatlara geçmeden önce öğretmen adaylarına etkinliklerde bulunan önermelerin reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için geçerli olduğu belirtilmiştir. Tanım ve değer kümesi belirtilmeden ifade edilen fonksiyonlar için türev tanımında belirtilen "$A \subset R$, $f: A \to R$" fonksiyonların düşünülmesi gerektiği vurgulanmıştır. Öğretmen adaylarına mülakatlarda yer alan etkinlikler hakkında bilgiler verilmesinin ardından argümantasyon ve ispat süreçlerini ortaya çıkarmak için etkinliklere geçilmiştir.

4.5.1. Öğretmen adaylarının türev konusundaki argümantasyon süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının türev konusundaki argümantasyon süreçlerine yönelik bulguları sunulmuştur. Öğretmen adaylarının türev konusundaki argümantasyon süreçleri kapsamında, bir önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına nasıl ikna oldukları ve doğru olduğunu bildikleri matematiksel iddiayı nasıl savundukları araştırılmıştır.

Öğretmen adaylarının doğru bir önermeye nasıl ikna oldukları ve bu süreçte ne tür argümanlar ürettiklerini ortaya çıkarmak için "*Bir fonksiyonun bir aralıkta türevi pozitif ise o aralıkta fonksiyon monoton artandır.*" doğru önermesi sunulmuş ve önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında bir karar vermeleri istenmiştir. Burada bahsedilen fonksiyonun reel değişkenli ve reel değerli olduğu tekrar hatırlatılmıştır. Tablo 4.38'de öğretmen adaylarının önermeye ikna olmak için kullandıkları stratejiler ve verdikleri kararlar sunulmuştur.

Tablo 4.38.

Öğretmen Adaylarının Doğru Önermeye İkna Olmak İçin Kullandıkları Stratejiler

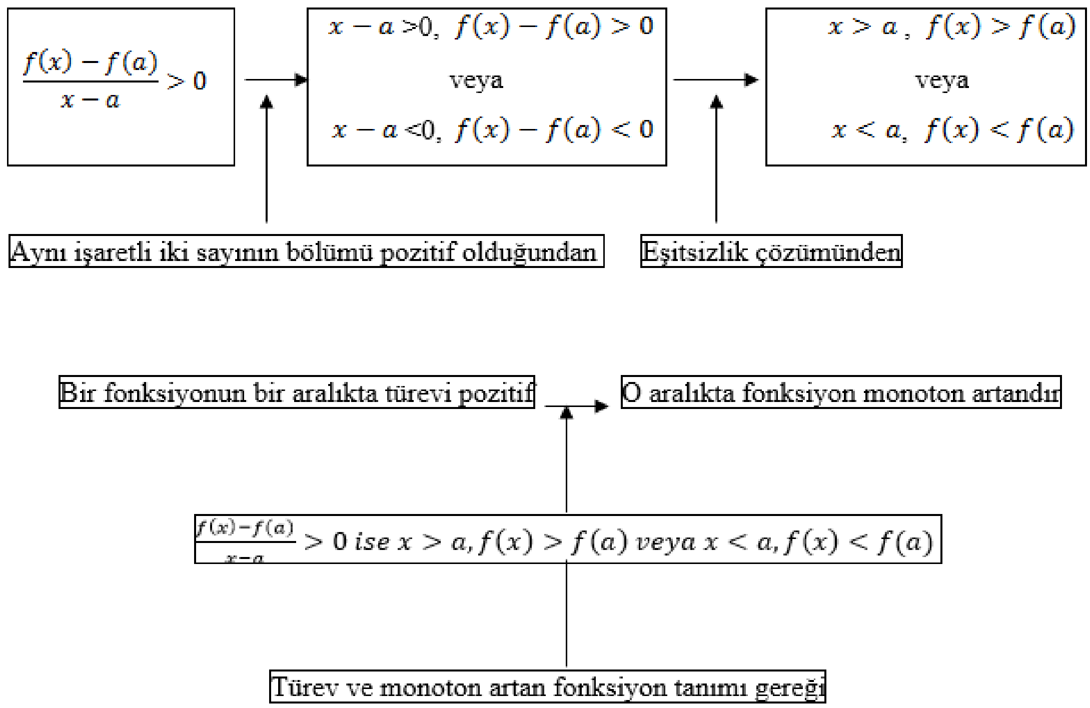
Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Tanımlar üzerinden muhakeme				✓				
Kavramlar üzerinden muhakeme	✓		✓					
İspat		✓						
Örnek kullanma					✓	✓	✓	
Geçmiş bilgi								✓
Verilen karar	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

Tablo 4.38 incelendiğinde, öğretmen adaylarının tümünün önermenin doğru olduğunu ifade ettikleri görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının türev konusunda doğru olan bu önermeyi seçmede başarılı oldukları söylenebilir. Öğretmen adaylarının önermenin doğru olduğuna ikna olmak için kullandıkları stratejiler incelendiğinde, öğretmen adaylarının en çok, bir örnek üzerinden önermenin doğruluğuna ikna oldukları tespit edilmiştir. Bu öğretmen adayları önermeye ikna olmak için ürettikleri argümanlarda özel örnekleri gerekçe olarak kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının yarısı (Ahu, Aziz, Aysun, Adem), önermenin doğru olduğuna ikna olmak için tanımları, kavram algılarını ve ispatı kullanmışlardır. Bir öğretmen adayı (Belma) ise önermenin doğru olduğuna argüman üretmeden, geçmiş bilgilerine güvenerek karar vermiştir.

Aysun tanımlar üzerinden muhakeme ederek önermenin doğru olduğuna ikna olmuştur. Aysun bu düşünceye ikna olmak için türev tanımı ile monoton artan fonksiyon tanımını birbiri ile ilişkilendirmeye çalışarak karar vermiştir. Aysun tanımlarda bulunan matematiksel ifadeleri birbiri ile ilişkilendirmeye çalışmıştır. Aşağıda Aysun'un ifadelerine yer verilmiştir.

Aysun: Şimdi $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ *ise monoton artanlık için* $f(x_1) < f(x_2)$ *olması gerekiyordu. Yani monoton artan gibi geliyor. Hocam şimdi* $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ *dedim. Hocam burası ya eksi, eksi ya da artı, artı dır. Hocam artı, artı olduğunda x>a oluyor. x>a olduğunda f(x)>f(a) oluyor. Aynı şekilde eksi, eksi olduğunda aynı şekilde a>x, f(a)>f(x) oluyor. Monoton artandır.*

Aysun türev ve monoton artan fonksiyon tanımında bulunan ifadeleri göz önünde bulundurarak argümanlar oluşturmuştur. Öncelikle türev ve monoton artan fonksiyon tanımlarını hatırlamıştır. $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ ifadesinden hareketle bu ifadenin pay ve paydasının ya pozitif ya da negatif olması gerektiği sonucuna ulaşmıştır. Pay ve paydanın aynı işaretli olmasından yola çıkarak monoton artan fonksiyon tanımında bulunan ifadeye ulaşmıştır. Sonuçta, türev ve monoton artan fonksiyon tanımını kullanarak türevde bulunan ifadeden monoton artan fonksiyon tanımında bulunan ifadeye ulaştığı için önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Tanımlar ve özellikler üzerinden sonuca başarılı bir şekilde ulaştığı için Aysun'un dönüşümsel gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Aşağıda Aysun'un ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.

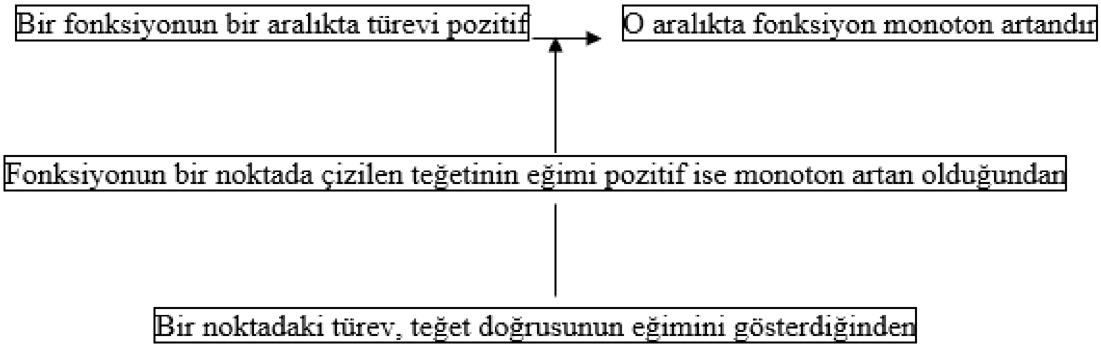


Şekil 4.89. Aysun'un ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Aziz ve Ahu önermenin doğru olduğuna ikna olmak için fonksiyonun bir noktadaki türevinin, fonksiyona o noktada çizilen teğetinin eğimi olma özelliğini kullanmışlardır. Söz konusu eğimin pozitif olma durumu ile fonksiyonun monoton artan olma durumunu ilişkilendirmeye çalışmışlardır. Aşağıda Aziz'in ifadelerine yer verilmiştir.

Aziz: Türev eğim demek. Türev aynı zamanda eğimi de veriyordu. Eğim pozitif ise şimdi… Şöyle bir fonksiyon olsun [Genel bir fonksiyonun grafiğini çiziyor]. Bu noktadaki türevi, teğet doğrusunun eğimini gösteriyor. Eğim pozitif ise monoton artandır.

Aziz, türevin eğim anlamına geldiğini belirtmiştir. Bir fonksiyonun bir noktadaki teğetin eğiminin pozitif olmasının, fonksiyonun monoton artan olmasını gerektireceğini ifade etmiştir. Aziz'in fonksiyonun monoton artan olduğu sonucuna nasıl ulaştığına yönelik açık bir ifade bulunmamıştır. Fonksiyon grafiği çizerek açıklamaya çalışmıştır. Buna göre Aziz ve Ahu'nun argümanlarının yetersiz zihinsel gösterimler barındırdığı söylenebilir. Aziz ve Ahu’nun algısal gerekçe tipinde olduğu ortaya çıkmıştır. Bu gerekçeye dayanarak önermenin doğru olduğunu ifade etmişlerdir. Aşağıda Aziz’in ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 4.90. Aziz’in ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Adem her zamanki gibi, ikna olma yapısını bozmayarak önermenin doğru olduğuna, yapacağı ispattan sonra karar vereceğini belirtmiştir. İspatını yaptıktan sonra bu önermenin doğru olduğu sonucuna ulaşmıştır. Aşağıda Adem’in ifadelerine yer verilmiştir.

Adem: Bunun doğru olduğu gözüküyor ama. Normal olarak fonksiyonun türevi pozitif olsun diyerek başladık. Ona bağlı olarak bunun monoton azalan mı, artan mı? Onu göstermek lazım. İspatını yapayım ondan sonra karar vereceğim.

Barış, Bilge ve Buse ise önermenin doğru olduğuna bir örnekle önermeyi deneyerek ikna olmuş ve önermenin doğru olduğunu belirtmişlerdir. Bu sebeple öğretmen adaylarının tümevarımsal gerekçe tipinde oldukları belirlenmiştir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış ile araştırmacı arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.

Barış: Bir fonksiyonun bir aralıkta türevi pozitif olsun. $f(x) = 3x^2$*diyelim. Bir aralıkta türevi ne olsun bunun?* $f'(x) = 6x$ *olur. Mesela x dediğim ifade 0<x<3 arasındaki* $x \in Z^+$*olsun. Bu şekilde oldu hocam, doğrudur bu ya.*

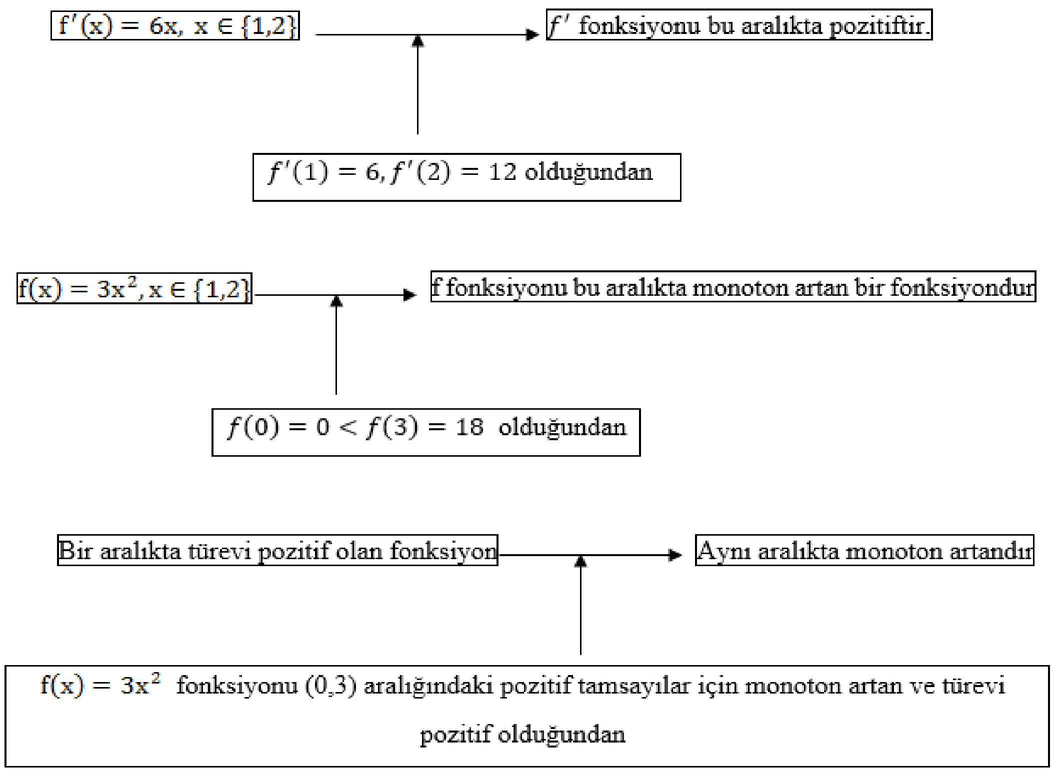
Araştırmacı: Türevi nasıl pozitif oldu?

Barış: 6x ya 0 ile 3 arasında sadece 1 ve 2 değerlerini alır. 6 ya 12 olur.

Araştırmacı: Peki, monoton artan mıdır?

Barış: Evet çünkü 0 ve 3 için 0 a 18 oluyor. Doğru bu.

Barış önermenin doğru olduğunu göstermek için $\{1,2\}$ kümesi üzerinde tanımlı olan $f(x) = 3x^2$ fonksiyonun önermeyi doğruladığını göstermeye çalışmıştır. Bu fonksiyonun türev fonksiyonunun $f'(x) = 6x$ olduğunu belirtmiştir. f fonksiyonunun belirttiği aralıkta türevi pozitif ve monoton artan olduğu için önermenin doğru olduğu sonucuna ulaşmıştır. f'fonksiyonunun belirtilen aralıkta türevinin pozitif olduğunu tanım kümesindeki sayıları deneyerek göstermiştir. f fonksiyonunun monoton artan olduğunu, tanım kümesinde olmayan aralığın uç noktalarını deneyerek belirtmiştir. Barış'ın öne sürdüğü örnek önermenin doğruluğunu gösteren bir örnek olmamıştır. Öncelikle bir fonksiyonun bir noktadaki türevinden bahsedebilmek için türevi aranan noktanın fonksiyonun tanım kümesinin yığılma noktası olması gerekmektedir. Barış'ın örneğindeki fonksiyonun tanım kümesi olan $\{1,2\}$ kümesinin yığılma noktalarının kümesi boş kümedir. Dolayısıyla bu şekilde tanımlanan fonksiyonun türevinden bahsedilemez. Bu durumun sebebinin, Barış'ın türev tanımına yönelik kavramsal bilgilerindeki eksiklik olduğu düşünülmüştür. Aşağıda Barış'ın ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.91. Barış'ın ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Belma ise önerme için herhangi bir gerekçe belirtmeyerek önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Önermeyi daha önce bildiğini ifade etmiştir. Buna göre Belma'nın otoriter gerekçe kullandığı söylenebilir. Aşağıda Belma'nın görüşleri sunulmuştur.

Belma: Evet bu doğrudur.

Araştırmacı: Nasıl bu karara vardın?

Belma: Aklımda öyle kalmış.

Öğretmen adaylarının yanlış bir önermeye nasıl ikna olduklarını ortaya çıkarmak için "*Herhangi bir noktada sürekli her fonksiyon o noktada türevlidir.*" yanlış önermesi sunulmuştur. Öğretmen adaylarından önermenin doğru olup olmadığını belirtmeleri istenmiş ve önermenin doğruluğu için kullandıkları stratejiler incelenmiştir. Kullanılan stratejilerin üç kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4.39'da kullanılan stratejiler ve verilen kararlar sunulmuştur.

Tablo 4.39.

Öğretmen Adaylarının Yanlış Önermeye İkna Olmak İçin Kullandıkları Stratejiler

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Ters örnek	✓	✓						
Geçmiş bilgi ve ispat			✓					
Geçmiş bilgi				✓	✓	✓	✓	✓
Verilen karar	Yanlış	Yanlış	Yanlış	Yanlış	Doğru	Doğru	Yanlış	Doğru

Tablo 4.39 incelendiğinde öğretmen adaylarından üçünün (Barış, Bilge, Belma) önermenin doğru olduğunu belirttikleri görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının türev konusundaki yanlış önermeyi belirleme becerilerinin doğru önermeyi belirleme becerilerinden daha düşük olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının kararlarını verirken en çok geçmiş bilgilerine güvenmiş olmaları otoriter bir yaklaşım içinde olduklarını göstermiştir. İki öğretmen adayı (Ahu, Adem) önermenin yanlış olduğuna ikna olmak için ters örnek bulmaya çalışmışlardır. Bir öğretmen adayı geçmiş yanlış bilgisine dayanarak önermenin doğru olduğunu ifade etmiştir. Önermenin doğruluğunu göstermek için ispat yapmaya başlamış fakat ispatta bir yanlışlık olduğunu düşünerek ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir.

Ahu ve Adem önermenin yanlış olduğuna ikna olmak için ters bir örnek aramışlardır. Her iki öğretmen adayı da $f(x) = |x|$ fonksiyonunun sıfır noktasında sürekli fakat türevli olmadığını belirterek ifadenin yanlış olduğunu belirtmişlerdir. Belirttikleri örneği önermenin yanlışlığı için ürettikleri argümana çürüten bileşeni olarak kullanmışlardır. Aşağıda Ahu'nun ifadeleri ve ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.

Ahu: Bu yanlıştır, çünkü $|x|$ *örneği x sıfıra giderken düşündüm. Süreklidir fakat türevli değildir.*

$f(x) = |x|$ fonksiyonu o noktasında sürekli fakat türevli değildir

Herhangi bir noktada sürekli fonksiyon → Önerme yanlıştır

Şekil 4.92. Ahu'nun ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Aziz geçmiş yanlış bilgilerine dayanarak önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Sürekli her fonksiyonun türevli ve türevli her fonksiyonun da sürekli olduğunu düşünmüştür. Aziz önermenin doğru olduğunu gösterebilmek için ispat yapmaya başlamıştır. Yaptığı ispatında sürekli fonksiyonun tanımından hareket ederek türev tanımındaki ifadeye ulaşmaya çalışmıştır. Fonksiyonun sürekli olması durumunda türevinin olamayacağını ifade etmiştir. Aziz kendine göre bir ispat yaparak "Bir noktada sürekli olan her fonksiyon aynı noktada türevlidir." önermesinin yanlışlığını gösterdiğini iddia etmiştir. Bu ispata dayanarak ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Aşağıda Aziz'in ifadelerine yer verilmiştir.

Aziz: Şimdi sürekli fonksiyon türevlenebilir. Zaten bir fonksiyon sürekli ise türevlenebilirdir. Doğru. Türevli fonksiyon sürekli, sürekli fonksiyon türevlidir. [İspatını yapıyor, ispatında genel bir f fonksiyonu alıp süreklilik tanımından türev tanımına ulaşmaya çalışıyor]… $f(a + \Delta x) - f(a) = \varepsilon$ *desem. Sonra her iki tarafı* Δx *e bölsem.* Δx *i sıfıra yaklaştırırsam sonsuz çıkıyor. Bu da limitin olmadığını gösterir. Bu yüzden yanlıştır. O zaman yanlışı işaretliyorum.*

Aysun, Bilge, Buse ve Belma önermenin doğruluğuna karar verebilmek için geçmiş bilgilerini kullanmışlardır. Bu öğretmen adaylarından Aysun ve Buse önermenin yanlış olduğunu daha önceden bildiklerini ifade ederken, Belma ve Barış önermenin doğru olduğunu duyduklarını dile getirmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının önermenin doğruluğunu değerlendirirken herhangi bir argüman üretmedikleri anlaşılmaktadır. Aşağıda öğretmen adaylarından Barış ve Aysun'un ifadelerine yer verilmiştir.

Barış: Doğru. Sürekli ise türevli olması lazım. Bildiğim şey olduğu için doğru dedim.

Aysun: Sürekli fonksiyon o noktada türevlidir demiş. Türevli olmayabilir demiştik. Yanlış. Sınıfta söylenmişti. Oradan aklımda kaldı. Sürekli fonksiyona örnek verip türevli olmayan ters bir örnek vermiştik. Ters bir örneği hatırlıyorum şu an. Sınıfta söylendi yine. Bunu yaparken kopya çekmeye çalışacağım☺

Öğretmen adaylarının türev konusunda bir önermenin doğruluğuna nasıl ikna olduklarının araştırılmasının ardından öğretmen adaylarının doğru olduğunu bildikleri matematiksel bir iddiayı nasıl savunduklarını ortaya çıkarmak amacıyla doğrulama gerektiren *"$f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun [-2,3] kapalı aralığında sürekli ve (-2,3) açık aralığında türevlenebilir olduğunu gösteriniz."* şeklinde bir problem sunulmuştur. Üretilen çözümler argümanların gerekçelerine göre incelenmiştir. Öğretmen adaylarının hem çözümleri hem de sözel ifadeleri ortak olarak değerlendirilmiş ve Tablo 4.40'da problem çözümlerinde kullanılan argümanların gerekçeleri ve ikna edicilik durumları sunulmuştur.

Tablo 4.40.

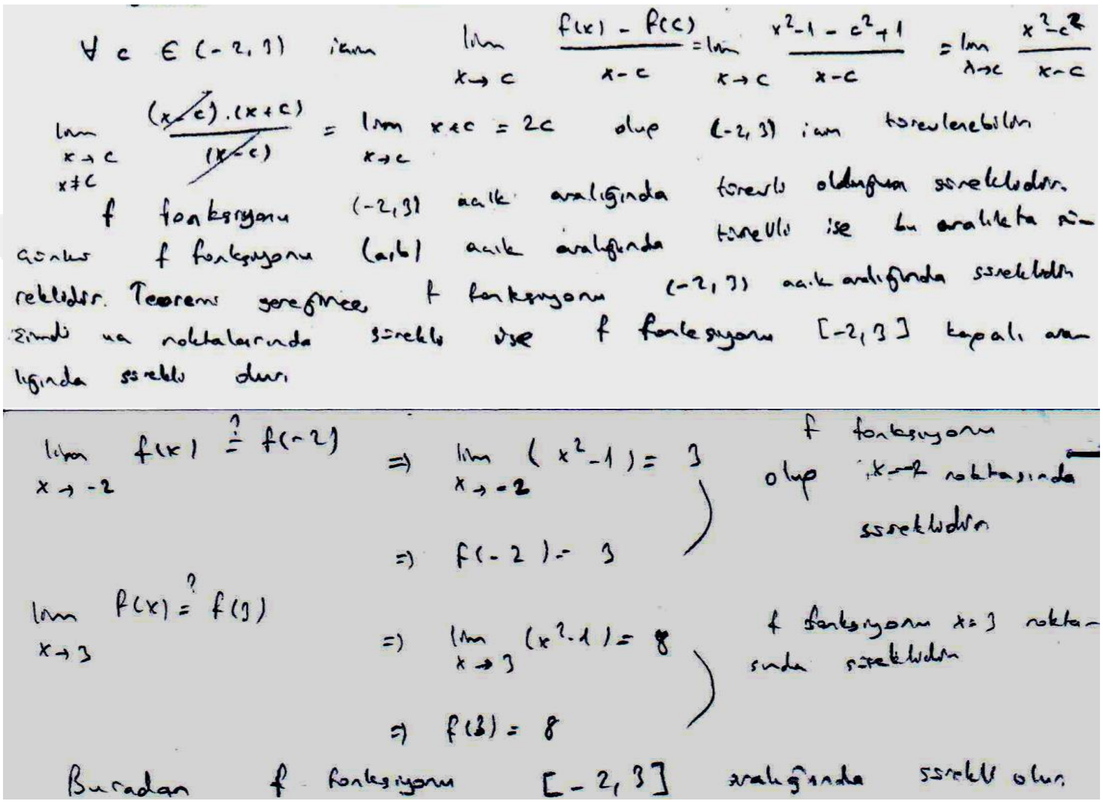
Öğretmen Adaylarının Ürettikleri Argümanlarda Kullandıkları Gerekçeler

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Dönüşümsel gerekçe		✓		✓				
Dönüşümsel-görsel gerekçe			✓					
Tümevarımsal gerekçe							✓	✓
Tümevarımsal-referanssız gerekçe						✓		
Görsel- algısal gerekçe	✓							
Algısal gerekçe					✓			
İkna edicilik	Kısmen	Evet	Evet	Evet	Hayır	Hayır	Hayır	Hayır

Tablo 4.40 incelendiğinde öğretmen adaylarının yarısının (Barış, Bilge, Buse, Belma) bu iddiayı matematiksel gerçeklerle uyumlu bir şekilde savunamadıkları tespit

edilmiştir. Üç öğretmen adayının (Adem, Aziz, Aysun) savunmaları matematiksel olarak ikna edici bulunmuştur. Öğretmen adaylarından birinin (Ahu) yaptığı çözüm incelendiğinde kısmen ikna edici olduğu belirlenmiştir.

Adem, çözümünde türev tanımını ve türev ile süreklilik arasındaki ilişkiye yönelik bir teoremi kullanmıştır. Adem'in matematiksel olarak ikna edici çözüm ürettiği söylenebilir. Aşağıda Adem'in çözümüne yer verilmiştir



$\forall c \in (-2,3)$ için $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{x^2-1-c^2+1}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{x^2-c^2}{x-c}$

$\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{\cancel{(x-c)}.(x+c)}{\cancel{(x-c)}} = \lim_{x \to c} x+c = 2c$ olup $(-2,3)$ için türevlenebilir

f fonksiyonu $(-2,3)$ açık aralığında türevli olduğundan süreklidir.

Çünkü f fonksiyonu (a,b) açık aralığında türevli ise bu aralıkta sü-reklidir. Teorem gereğince f fonksiyonu $(-2,3)$ açık aralığında süreklidir.

Şimdi uç noktalarında sürekli ise f fonksiyonu $[-2,3]$ kapalı aralığında sürekli olur.

$\lim_{x \to -2} f(x) \stackrel{?}{=} f(-2) \Rightarrow \lim_{x \to -2} (x^2-1) = 3$

$\Rightarrow f(-2) = 3$

f fonksiyonu olup $x=-2$ noktasında süreklidir

$\lim_{x \to 3} f(x) \stackrel{?}{=} f(3) \Rightarrow \lim_{x \to 3} (x^2-1) = 8$

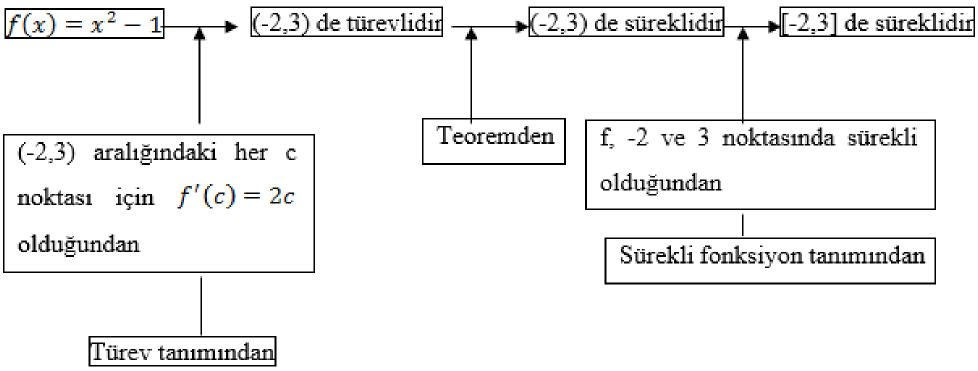
$\Rightarrow f(3) = 8$

f fonksiyonu $x=3$ noktasında süreklidir

Buradan f fonksiyonu $[-2,3]$ aralığında sürekli olur.

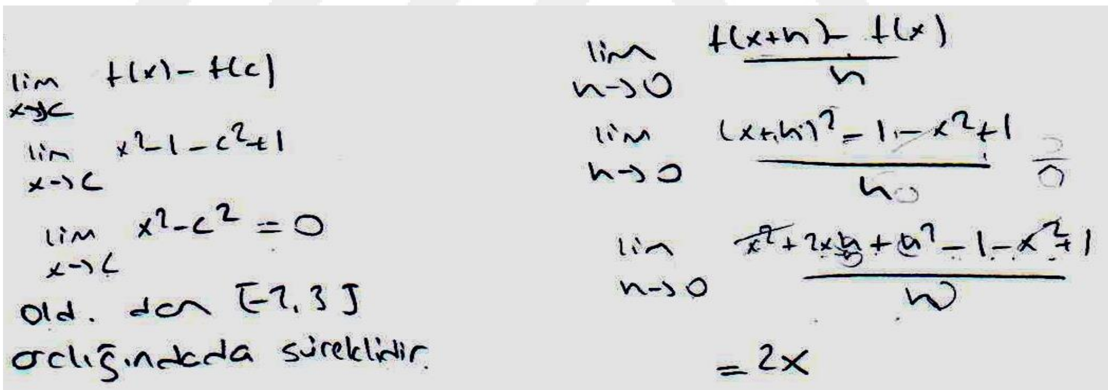
Şekil 4.93. Adem'in çözümü

Adem, çözümünde türev tanımını kullanarak fonksiyonun (-2,3) açık aralığında türevlenebilir olduğunu göstermiştir. Adem ürettiği ilk argümanda türevin tanımını gerekçe olarak kullanmış ve fonksiyonun bu aralıkta türevlenebilir olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bu sonuçtan yola çıkarak aynı açık aralıkta fonksiyonun sürekli olduğunu belirtmiştir. Adem fonksiyonun (-2,3) aralığında sürekli olduğu sonucuna "*f fonksiyonu (a,b) aralığında türevli ise bu aralıkta süreklidir*." teoremini kullanarak ulaşmıştır. Son olarak Adem, aralığın uç noktaları olan -2 ve 3 noktalarında fonksiyonun sürekli olduğunu belirterek f fonksiyonunun [-2,3] kapalı aralığında sürekli olduğunu ifade etmiştir. Adem'in ürettiği argümanların gerekçelerine bakıldığında dönüşümsel gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Aşağıda Adem'in ürettiği argümantasyonun Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



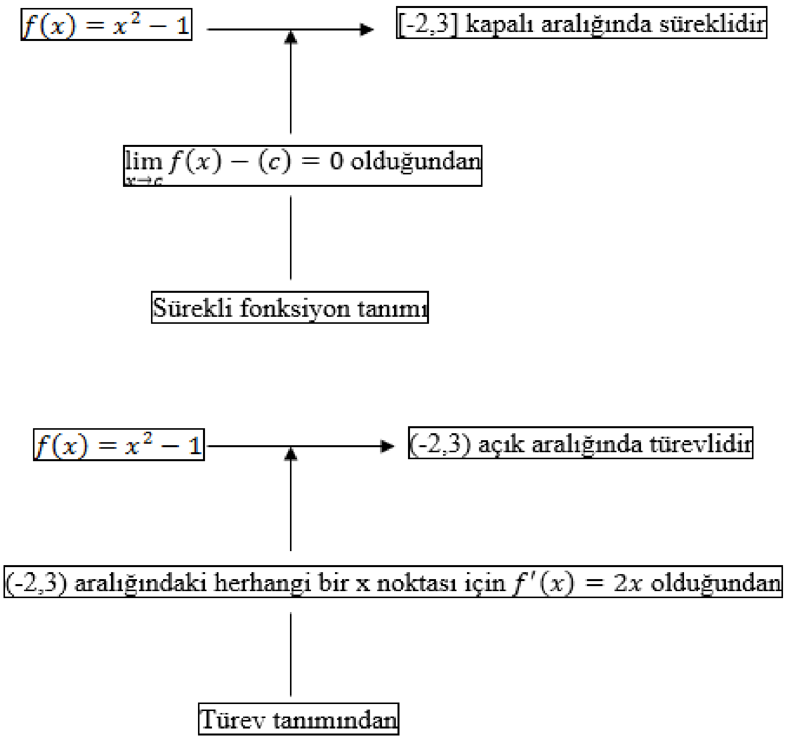
Şekil 4.94. Adem'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Aysun problem çözümünde sadece tanımları kullanmıştır. Fonksiyonun belirtilen aralıklarda sürekli ve türevli olduğunu, sürekliliğin ve türevin tanımlarından haraketle ikna edici bir şekilde göstermiştir. Aşağıda Aysun'un çözümüne yer verilmiştir.



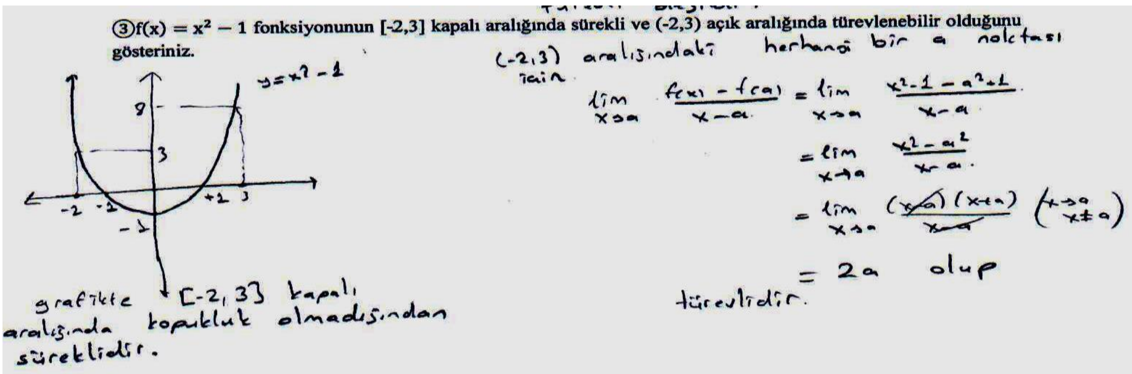
Şekil 4.95. Aysun'un çözümü

Aysun, çözümünde f fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek için [-2,3] kapalı aralığından aldığı herhangi bir x elemanı için $\lim_{x\to c} f(x) - f(c) = 0$ olması gerektiğini ifade etmiştir. Uyguladığı limit işleminin sonucunda, limitin değerini sıfır bulduğu için fonksiyonun söz konusu aralıkta sürekli olduğunu belirtmiştir. f fonksiyonunun belirtilen aralıkta türevinin mevcut olduğunu göstermek için (-2,3) açık aralığından aldığı herhangi bir x elemanı üzerinden türev tanımını uygulamıştır. Herhangi bir x elemanının, bu aralıktaki türevinin 2x olduğunu belirterek fonksiyonun türevli olduğunu ifade etmiştir. Aysun'un ürettiği argümanların gerekçeleri dikkate alındığında, Aysun'un da dönüşümsel gerekçe tipinde olduğu ortaya çıkmıştır. Aşağıda Aysun'un ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



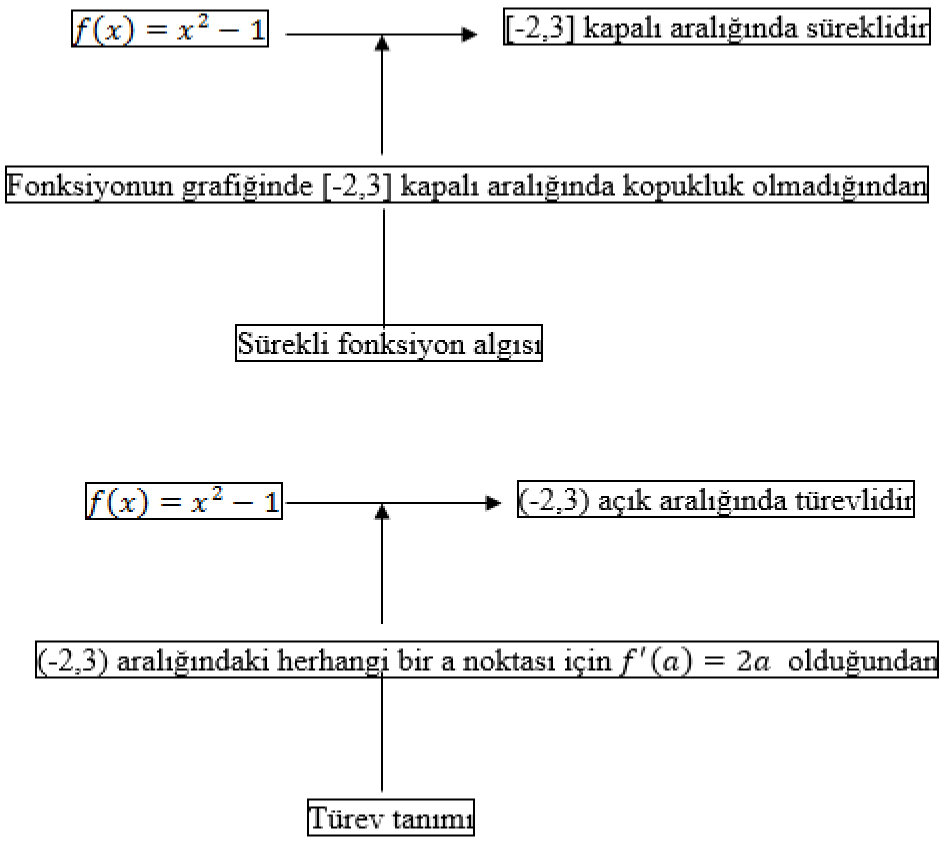
Şekil 4.96. Aysun'un ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Aziz, çözümünde fonksiyonun grafiğinden ve türev tanımından yararlanmıştır. Aziz'in yaptığı çözümde matematiksel gerçeklerden yararlanarak ikna edici bir çözüme ulaştığı belirlenmiştir. Aşağıda Aziz'in çözümü sunulmuştur.



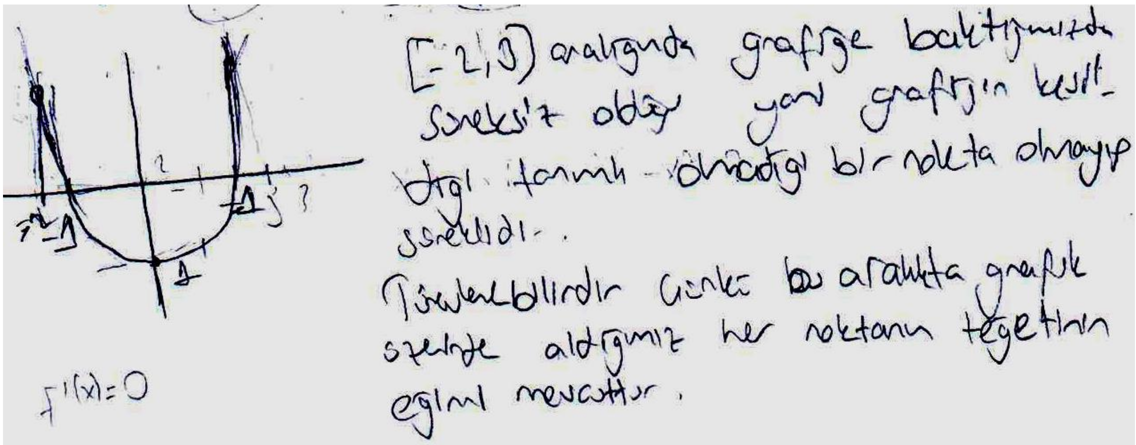
Şekil 4.97. Aziz'in çözümü

Aziz f fonksiyonunun belirtilen aralıkta sürekli bir fonksiyon olduğunu göstermek için sürekli fonksiyon algısını kullanmıştır. Fonksiyonun grafiğini çizerek belirtilen aralıkta fonksiyonun grafiğinde kopukluk olmadığı için sürekli olduğu sonucuna ulaşmıştır. Aziz ürettiği argümanda fonksiyonun grafiğinde kopukluk olmamasını gerekçe olarak kullanmış ve fonksiyonun açık aralıkta türevli olduğu sonucuna türev tanımını uygulayarak ulaşmıştır. Belirtilen açık aralıktaki her elemanın türevinin mevcut olmasını gerekçe olarak kullanmıştır. Aziz ürettiği bu argümanda türevin tanımından destek almıştır. Aziz'in ürettiği argümanlar incelendiğinde hem dönüşümsel hem de görsel gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Aşağıda Aziz'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



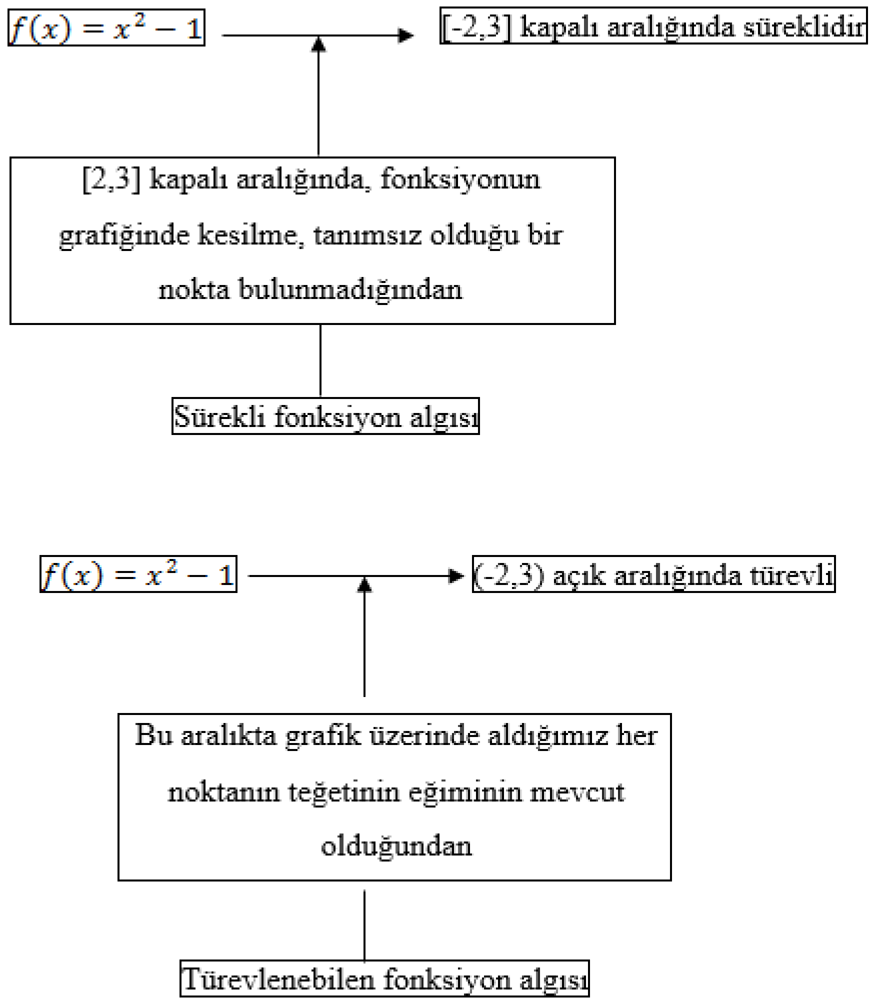
Şekil 4.98. Aziz'in ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Ahu çözümünde fonksiyonun grafiğini çizmiştir. Fonksiyonun şeklinden hareket ederek fonksiyonun belirtilen aralıklarda sürekli ve türevli olduğunu dile getirmiştir. Ahu iddiasını savunurken sürekli ve türevli fonksiyon algılarını gerekçe olarak kullanmıştır. Ahu'nun süreklilik için ürettiği argüman ikna edici bulunurken türev için ürettiği argüman yetersiz bulunmuştur. Aşağıda Ahu'nun çözümüne yer verilmiştir.



Şekil 4.99. Ahu’nun çözümü

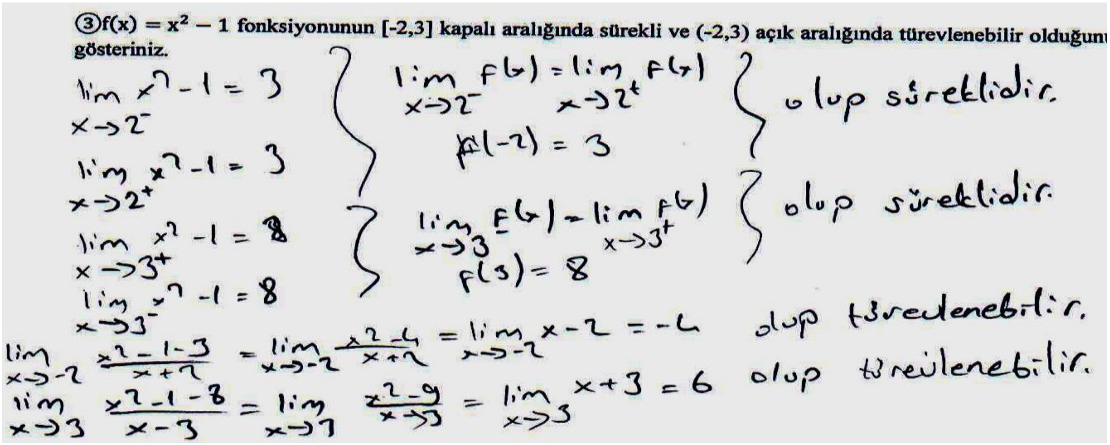
Ahu fonksiyonun kapalı aralıkta sürekli olduğunu göstermek için argüman üretmiştir. Bu argümanında fonksiyonun grafiği için çizdiği şekli gerekçe olarak kullanmıştır. Belirtilen aralıkta fonksiyonun grafiğinde kesildiği, tanımlı olmadığı bir nokta bulunmadığından fonksiyonun belirtilen aralıkta sürekli olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ahu fonksiyonun sürekli olduğunu fonksiyonun şeklinde kopukluk olmaması ve belirtilen aralıkta tanımlı olması algısını kullanmıştır. Ahu’nun sunduğu bu gerekçe fonksiyonun grafiğinden elde edilebilecek bir sonuçtur. Buna göre üretilen bu argümanın matematiksel kurallara uygun yeterli bir gösterim olduğu söylenebilir. Ahu’nun bu argümanda görsel gerekçe tipinde olduğu belirlenmiştir. Benzer şekilde, belirtilen aralıkta fonksiyonun grafiği üzerinde alınan her noktanın teğetinin eğimi mevcut olduğunu belirterek fonksiyonun türevlenebilir olduğunu ifade etmiştir. Fonksiyonun belirtilen aralıkta türevlenebilir olduğunu bir noktadaki türevin o noktada çizilen teğetinin eğimi olma algısından yararlandığı tespit edilmiştir. Ahu’nun ürettiği argüman çizilen şekil üzerinde açıkça görülemediği için ikna edici bulunmamıştır. Ahu’nun argümanında yetersiz bir gösterim yaptığı söylenebilir. Üretilen bu argümanın algısal gerekçe tipinde olduğu ortaya çıkmıştır. Buna göre Ahu’nun problem çözümünde görsel-algısal gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Aşağıda Ahu’nun ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.100. Ahu'nun ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

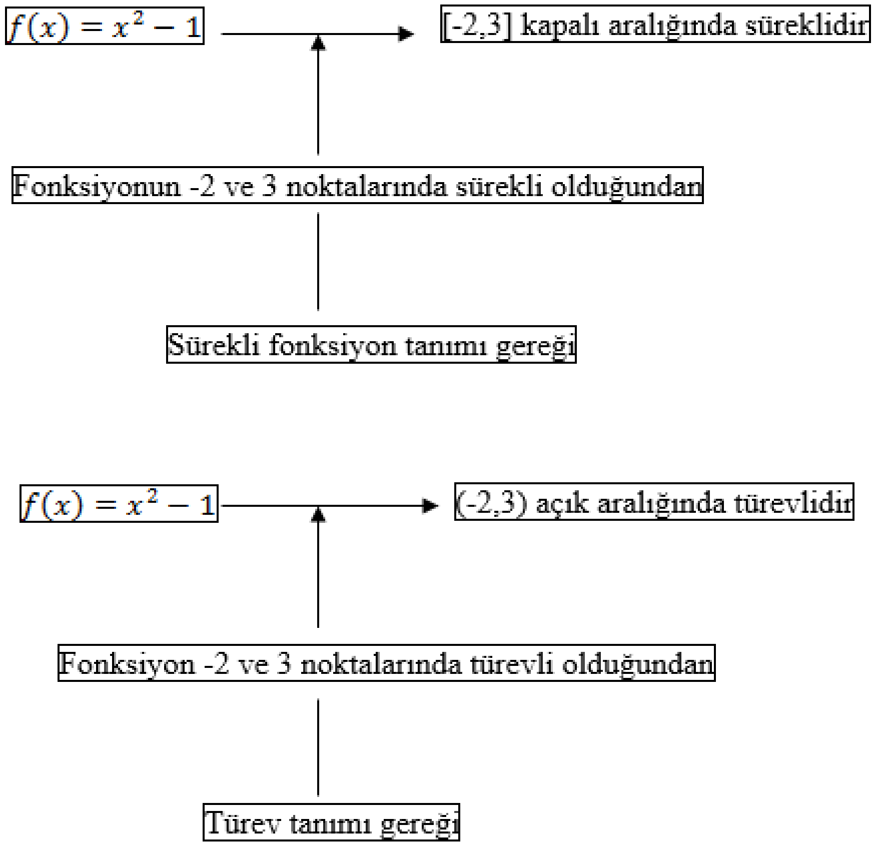
Buse ve Belma çözümlerinde fonksiyonun sürekli ve türevli olduğunu söz konusu aralıktaki bazı özel değerler için deneyerek göstermişlerdir. Öğretmen adayları belirtilen aralığın uç noktalarını kontrol ederek ifadenin doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır. Özel durumlar için elde edilen sonucu, aralığın tamamına genellemişlerdir. Bundan dolayı bu öğretmen adaylarının tümevarımsal gerekçe tipinde oldukları söylenebilir.

Bu öğretmen adaylarından Belma, fonksiyonun sürekli ve türevli olduğunu aralıkların uç noktaları olan -2 ve 3 noktaları için denemiştir. Bu noktalarda sürekli ve türevli olduğunu belirterek fonksiyonun aralığın tamamında sürekli ve türevli olduğunu ifade etmiştir. Belma çözümünde uç noktaları denerken sürekli fonksiyon ve türev tanımını kullanmıştır. Aşağıda Belma'nın çözümü sunulmuştur.



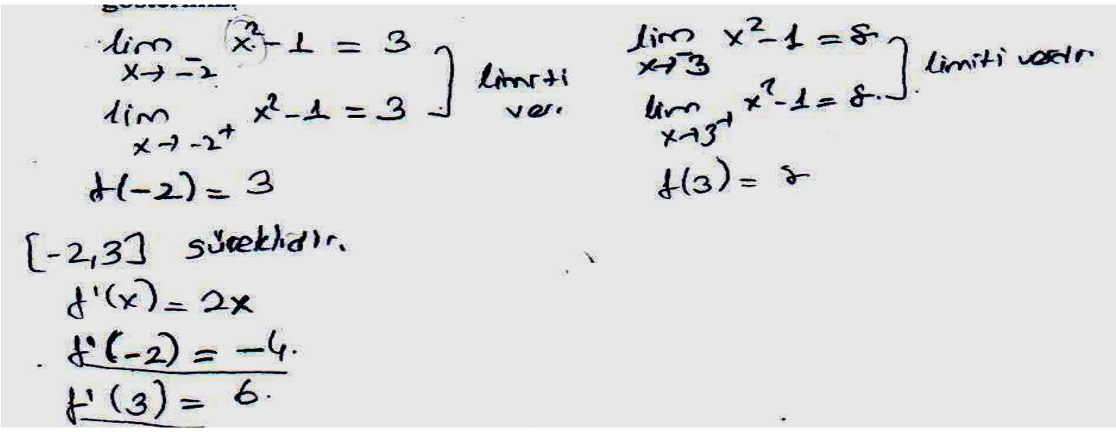
Şekil 4.101. Belma’nın çözümü

Belma çözümünde süreklilik için ürettiği argümanda [-2,3] kapalı aralığının uç noktaları olan -2 ile 3 noktalarında fonksiyonun sürekli olduğunu göstermeye çalışmıştır. Bu noktalarda fonksiyonun sürekli olduğu sonucuna ulaşmıştır. Fonksiyonun kapalı aralıkta sürekli olduğunu, uç noktaların sürekli olduğuna dayanarak ifade etmiştir. Bu argümanda uç noktalar olan -2 ve 3 noktasında fonksiyonun sürekli olması gerekçe olarak kullanılmıştır. Bu gerekçeyi destekleyen bileşen ise sürekliliğin limit formundaki tanımıdır. Belma fonksiyonun (-2,3) açık aralığında türevli olduğunu, aralığın uç noktaları olan -2 ve 3 noktalarına türev tanımını uygulayarak göstermiştir. Uç noktalar için yaptığı incelemenin sonucunda fonksiyonun açık aralıkta türevli olduğu sonucuna ulaşmıştır. Belma’nın ürettiği bu argümanda fonksiyonun uç noktalarda türevli olması gerekçe bileşeni olarak kullanılmıştır. Türevin formel tanımı da bu gerekçeyi destekleyen bileşendir. Aşağıda Belma’nın ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.102. Belma'nın ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Buse çözümünde Belma gibi, fonksiyonun aralığının uç noktalarında sürekli olduğunu belirtmiştir. Fonksiyon uç noktalarda sürekli olduğu için fonksiyonun kapalı aralıkta sürekli olduğunu ifade etmiştir. Buse fonksiyonun türevli olduğunu göstermek için Belma'dan farklı olarak, uç nokta kontrolünü türev alma işlemine göre yapmıştır. Buse argümanında -2 ve 3 noktalarında türevli olmasını gerekçe olarak, türev alma işlemini de gerekçesine destek olarak kullanmıştır. Aşağıda Buse'nin çözümüne ve fonksiyonun türevli olduğunu göstermek için ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizine yer verilmiştir.



Şekil 4.103. Buse'nin çözümü

$f(x) = x^2 - 1$ → (-2,3) açık aralığında türevlidir

↑

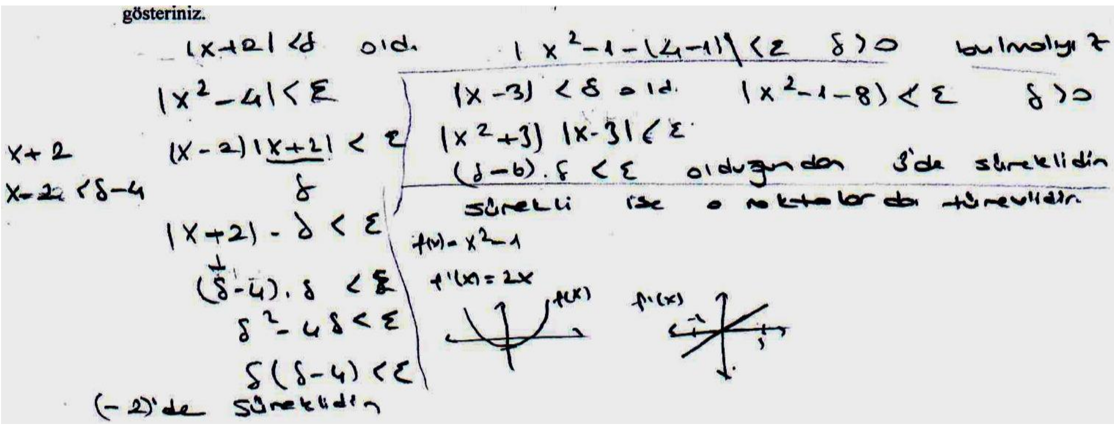
$f'(x) = 2x, f'(-2) = -4, f'(3) = 6$ olduğundan

↑

Türev alma işlemi

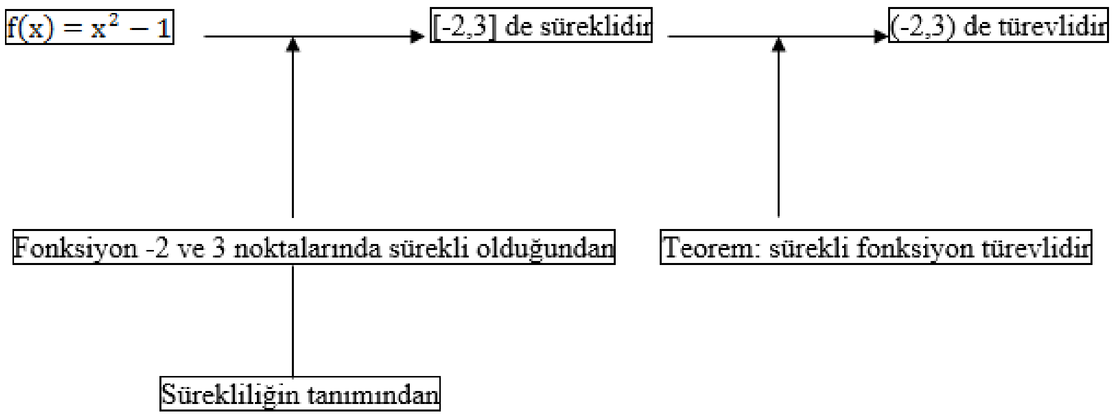
Şekil 4.104. Buse'nin ürettiği argümanın Toulmin modeline göre analizi

Bilge de çözümünde aralıkların uç noktalarını göz önüne alarak inceleme yapmıştır. Fonksiyonun -2 ve 3 noktasında sürekli olduğunu göstermek için süreklilik tanımını kullanmıştır. Fonksiyonun türevli olduğunu göstermek için yanlış bir teorem uygulamıştır. Aşağıda Bilge'nin çözümü yer almıştır.



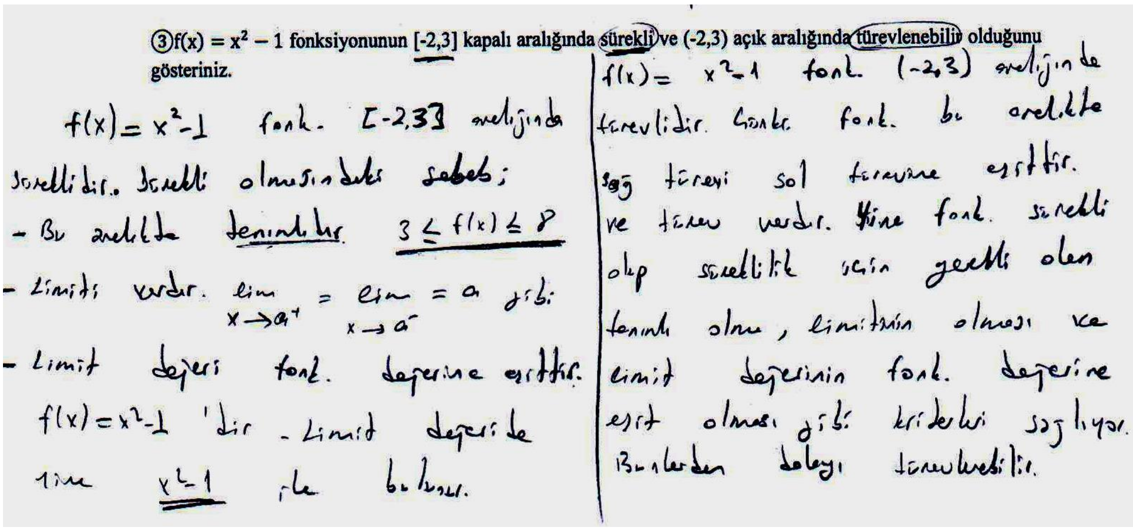
Şekil 4.105. Bilge'nin çözümü

Bilge fonksiyonun sürekli olduğunu göstermek için aralığın uç noktaları olan -2 ve 3 noktalarının sürekliliğini araştırmıştır. Fonksiyonun uç noktalarda sürekli olduğunu, sürekliliğin formel tanımını kullanarak göstermeye çalışmıştır. Uç noktalarda sürekli olduğu için, bu aralıkta fonksiyonun sürekli olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bilge ürettiği argümanda uç noktaların sürekli olmasını, fonksiyonun bu aralıkta sürekli olması için gerekçe olarak kullanmıştır. Gerekçesini sürekliliğin tanımı desteklemiştir. Bilge'nin ürettiği argümanda tümevarımsal gerekçe tipinde olduğu belirlenmiştir. Fonksiyonun sürekli olduğundan hareket ederek türevli olduğuna, yanlış bir teoremi gerekçe olarak kullanarak ulaşmıştır. Bilge, bir fonksiyon sürekli ise türevli olduğunu iddia etmiştir. Bilge'nin ürettiği ikinci argümanda doğru olmayan hatalı bir bilgi kullandığı için referanssız gerekçe tipinde olduğu söylenebilir. Buna göre Bilge'nin ürettiği argümantasyonda hem tümevarımsal hem de referanssız gerekçe tipinde olduğunu söylemek mümkündür. Aşağıda Bilge'nin ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.106. Bilge'nin ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

Barış çözümünde sürekli fonksiyon ve türevlenebilen fonksiyon algılarını kullanmış fakat yeterli bir gösterim yapamamıştır. Barış'ın ürettiği argümanlar genel ifadeler olduğu için fonksiyon özelinde bir gösterim olmadığı kanaatine varılmıştır. Barış'ın çözümü aşağıda sunulmuştur.



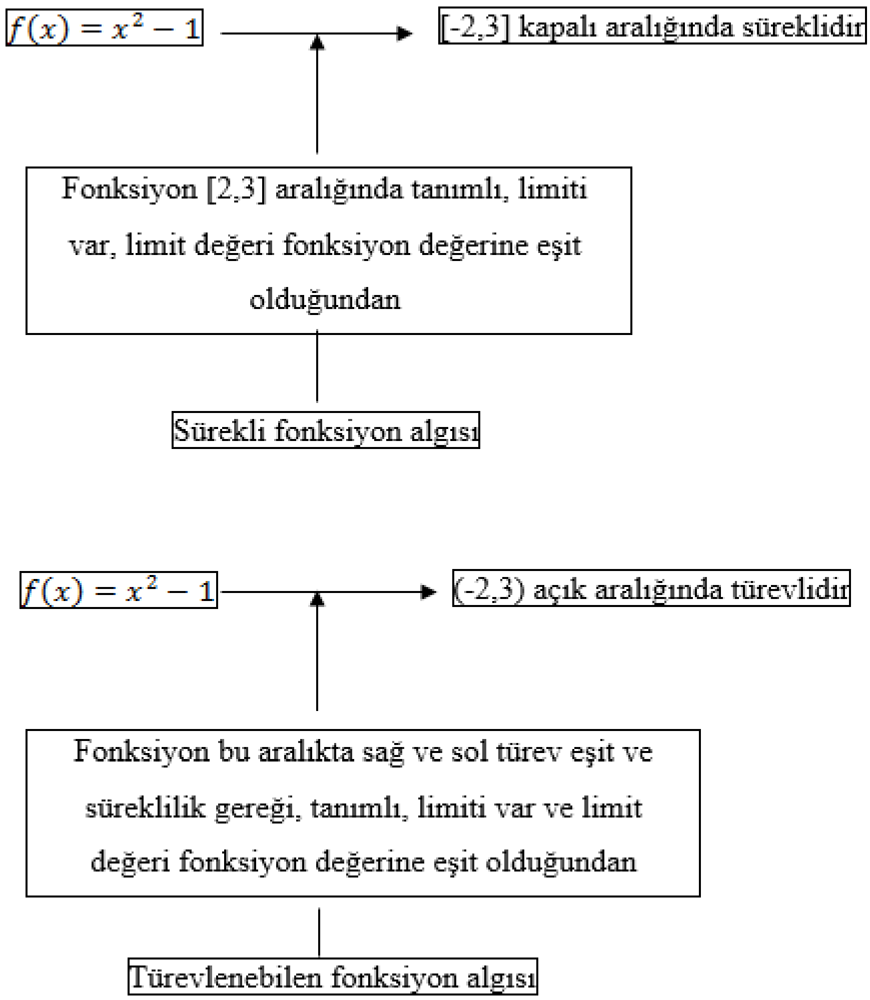
③ $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun [-2,3] kapalı aralığında sürekli ve (-2,3) açık aralığında türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

$f(x) = x^2 - 1$ fonk. [-2,3] aralığında süreklidir. Sürekli olmasındaki sebeb;
- Bu aralıkta tanımlıdır $3 \leq f(x) \leq 8$
- Limiti vardır. $\lim_{x \to a^+} = \lim_{x \to a^-} = a$ gibi
- Limit değeri fonk. değerine eşittir. $f(x) = x^2 - 1$ 'dir. Limit değeri de $x^2 - 1$ ile bulunur.

$f(x) = x^2 - 1$ fonk. (-2,3) aralığında türevlidir. Çünkü fonk. bu aralıkta sağ türevi sol türevine eşittir. ve türevi vardır. Yine fonk. sürekli olup süreklilik için gerekli olan tanımlı olma, limitinin olması ve limit değerinin fonk. değerine eşit olması gibi kriterleri sağlıyor. Bunlardan dolayı türevlenebilir.

Şekil 4.107. Barış'ın çözümü

Barış çözümünde fonksiyonun sürekli olduğunu savunmak için, bir fonksiyonun bir noktada sürekli olabilmesi için gerekli şartları öne sürmüştür. Bu fonksiyonun belirtilen aralıkta tanımlı, limiti var ve limitin değeri fonksiyon değerine eşit olduğu için sürekli olduğunu ifade etmiştir. Yaptığı açıklamalara yönelik bir gösterim yapmamıştır. Barış bu aralıkta fonksiyonun sürekli olduğuna yukarıda belirtilen özelliklerin sağlandığı gerekçesiyle ulaşmıştır. Fonksiyonun belirtilen açık aralıkta türevli olduğunu göstermek için ürettiği argümanda birden çok gerekçe sunmuştur. Barış'ın gerekçeleri; sağ ve sol türevin eşit olması, sürekliliğin gereği olan tanımlı olma, limitinin olması ve limit değerinin fonksiyon değerine eşit olmasıdır. Çözümünde kullandığı gerekçelerin bu kavramlara yönelik algılarından kaynaklandığı tespit edilmiştir. Barış'ın ürettiği argümanlara bakıldığında yetersiz zihinsel gösterimler olduğu söylenebilir. Bu bakımdan Barış'ın algısal gerekçe tipinde olduğunu söylemek mümkündür. Aşağıda Barış'ın ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi sunulmuştur.



Şekil 4.108. Barış'ın ürettiği argümanların Toulmin modeline göre analizi

4.5.2. Öğretmen adaylarının türev konusundaki ispat süreçleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının türev konusundaki ispat süreçlerine yönelik bulgular sunulmuştur. Öğretmen adaylarının türev konusundaki ispat süreçleri kapsamında, olmayana ergi ispatlama yöntemi ile yapılmış doğru bir ispatı ve tümevarımsal argümanı nasıl değerlendirdikleri araştırılmıştır. Ayrıca, matematiksel önermeler için ne tür ispatlar yaptıkları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Öğretmen adaylarına ilk olarak, olmayana ergi ispatlama yöntemi ile ispatlanmış olan *"$A \subset R$, $a \in A$ ve $f: A \to R$ fonksiyon olsun. f fonksiyonu a noktasında sürekli değil ise türevli de değildir."* teoreminin ispatı sunulmuştur. Öğretmen adaylarından teoremin doğru bir şekilde ispatlanıp ispatlanmadığı konusunda bir karara varmaları ve kararlarının gerekçelerini yazılı olarak belirtmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejiler, hem yazılı hem de sözlü ifadeleri dikkate alınarak değerlendirilmiştir. Kullanılan stratejilerin iki kategori ve beş alt kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4.41'de kullanılan stratejiler ve verilen kararlar sunulmuştur.

Tablo 4.41.

Öğretmen Adaylarının İspatı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler ve Verdikleri Kararlar

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	İşlemsel hata	✓	✓	✓	✓	✓			
Yapısal inceleme	İspatlama yöntemi	✓	✓		✓	✓			✓
	Türev tanımı	✓		✓		✓		✓	
	Sonucu bulma					✓	✓		
	Hipotezi kullanma							✓	
Verilen karar		Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Yanlış

Tablo 4.41 incelendiğinde bir öğretmen adayı dışındaki öğretmen adaylarının teoremin doğru bir şekilde ispatlandığını belirttikleri anlaşılmaktadır. Buna göre öğretmen adaylarının doğru yapılmış bu ispatı değerlendirme becerilerinin oldukça yüksek olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelendiğinde, çoğunlukla ispatta kullanılan ispatlama yöntemine ve ispatın basamaklarında işlemsel hatanın olup olmamasına dikkat ettikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının yarısının teoremin ispatında türevin formel tanımının kullanılmasına dikkat ettikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ikisi teoremin hükmüne ulaşılıp ulaşılmadığına dikkat ederken bir öğretmen adayının ise teoremin hipotezinin ispatta kullanılıp kullanılmadığına dikkat ettiği ortaya çıkmıştır.

Öğretmen adaylarından Ahu, Adem, Aysun, Barış ve Belma ispatın doğruluğunu değerlendirirken ispatlama yöntemine dikkat etmişlerdir. Belma dışındaki öğretmen adayları teoremin olmayana ergi yöntemi ile yapıldığını belirtmiş ve olmayana ergi yöntemini doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Belma ise teoremin ispatının doğrudan ispat yöntemi ile yapıldığını belirtmiştir. İspatı değerlendirirken ispatlama yöntemine dikkat etmediği düşünülen Aziz, Bilge ve Buse'ye ispatın hangi ispatlama yöntemi ile yapıldığı sorulduğunda, Aziz çelişki bulma ispatlama yöntemi ile yapıldığını ifade etmiş fakat çelişki bulma ispatlama yöntemini açıklayamamıştır. Bilge ve Buse ise ispatlama yönteminin olmayana ergi olduğunu belirtmişler fakat uygun bir şekilde ifade edememişlerdir. Buna göre, öğretmen adaylarının çoğunun ispatın yöntemini doğru bir şekilde belirleyebilmiş olmalarına rağmen sadece yarısının olmayana ergi ispatlama yöntemini açıklayabildikleri ortaya çıkmıştır. Aşağıda Adem, Aziz ve Belma'nın ifadelerine yer verilmiştir.

Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... p: f fonksiyonu a noktasında sürekli olmasın
q: f " " " türevli de olmasın.
$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olduğundan. yapılan ispatlama doğrudur.
p': f fonksiyonu a noktasında sürekli olsun.
q': f fonksiyonu a noktasında türevli olsun.

Şekil 4.109. Adem'in gerekçesi

Aziz: Olmayana ergi de tersinden miydi? Direk şey yapıyorduk… Doğru, bu teorem karşıt tersi ile ispatlandığı için bu çelişki bulma yöntemi. $p \Rightarrow q$ *yu* $q' \Rightarrow p'$ *ile göstermeye çalışıyor. Bu yüzden bu çelişki bulma.*

Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Verilen önermede sürekli değil ise türevli değildir deniyor. İspatta ise türevli ise süreklidir ispatlamış. Bu yüzden yanlıştır.

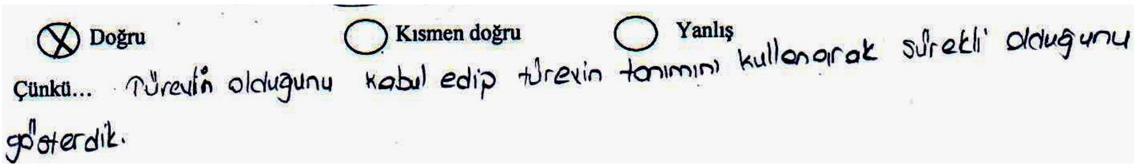
Şekil 4.110. Belma'nın gerekçesi

Öğretmen adaylarının yarısından fazlası (Ahu, Adem, Aziz, Aysun, Barış) ispatı değerlendirirken ispatın basamaklarında işlemsel hata olup olmadığına dikkat etmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Ahu'nun gerekçesine yer verilmiştir.

Çünkü... Tanım ve işlemler doğru olarak kullanılmıştır. Doğrudur,

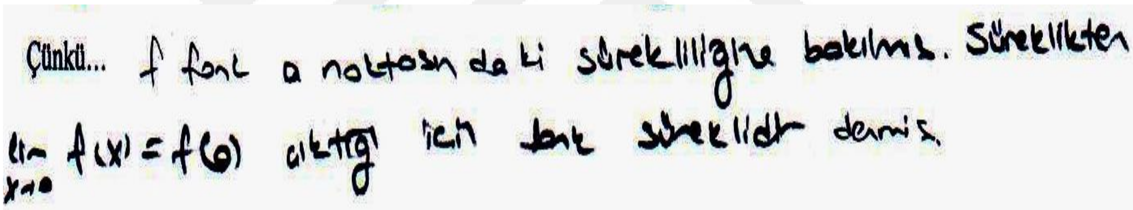
Şekil 4.111. Ahu'nun gerekçesi

Öğretmen adaylarının yarısı da (Ahu, Aziz, Barış, Buse) ispatı değerlendirirken türev tanımının kullanılarak ispatın yapılmasına dikkat etmişlerdir. Ayrıca bu öğretmen adaylarından Buse'nin, ispatı değerlendirirken türev tanımının kullanılmasının yanında teoremin hipotezinin kullanılmasına dikkat ettiği tespit edilmiştir. Aşağıda Buse'nin gerekçesine yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış
Çünkü... Türevli olduğunu kabul edip türevin tanımını kullanarak sürekli olduğunu gösterdik.

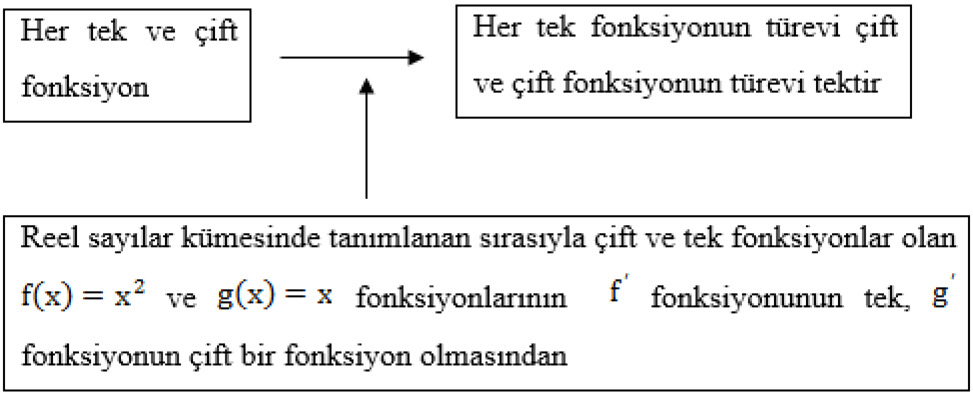
Şekil 4.112. Buse'nin gerekçesi

Bilge ve Barış'ın ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejilerden biri de teoremin hükmü ile belirtilen sonuca ulaşıp ulaşılmamasıdır. Bu öğretmen adaylarının sonuca odaklı bir yaklaşım sergilediklerini söylemek mümkündür. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Bilge'nin gerekçesi sunulmuştur.


Çünkü... f fonk a noktasındaki sürekliliğine bakılmış. Süreklilikten $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ çıktığı için fonk süreklidir demiş.

Şekil 4.113. Bilge'nin gerekçesi

Öğretmen adaylarının başkası tarafından yapılan ispatı değerlendirme becerilerini incelemek amacıyla reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için geçerli olan *"Her tek fonksiyonun türevi çift, çift bir fonksiyonun da türevi tek bir fonksiyondur."* teoremi, tümevarımsal bir gerekçe kullanılarak doğrulanmıştır. Bu teoremin doğruluğu tek bir örnek çifti üzerinden gösterilmiştir. Bu teorem için üretilen argümanın Toulmin modeline göre analizi aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.114. Öğretmen adaylarına sunulan tümevarımsal argümanın Toulmin modeline göre analizi

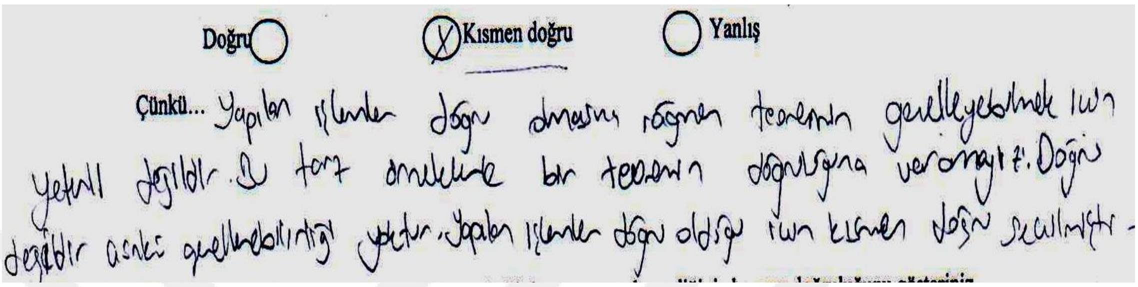
Öğretmen adaylarından argümanın doğruluğunu değerlendirmeleri ve bir karara varmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının argümanı değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelenmiş ve Tablo 4.42'de kullandıkları stratejiler ve verdikleri kararlar sunulmuştur.

Tablo 4.42.
Öğretmen Adaylarının Tümevarımsal Argümanı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler ve Verdikleri Kararlar

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	İşlemsel hata	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Yapısal inceleme	Argüman yapısı	✓	✓		✓		✓		✓
Verilen karar		Kısmen doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış	Doğru	Kısmen doğru	Doğru	Doğru

Tablo 4.42'deki verilere göre öğretmen adaylarının yarısının tümevarımsal gerekçe kullanılarak üretilen argümanı doğru bir ispat olarak değerlendirdikleri belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının tümevarımsal argümanları geçerli bir ispat olarak değerlendirdikleri söylenebilir. Öğretmen adaylarının diğer yarısı ise tümevarımsal argümanın bir ispat olamayacağını ifade etmişlerdir. Tek bir örnek ile yapılan doğrulamanın bir önermenin doğru olduğunu göstermek için yeterli olamayacağını dile getirmişlerdir. Öğretmen adaylarından ikisi, bu şekilde yapılan bir

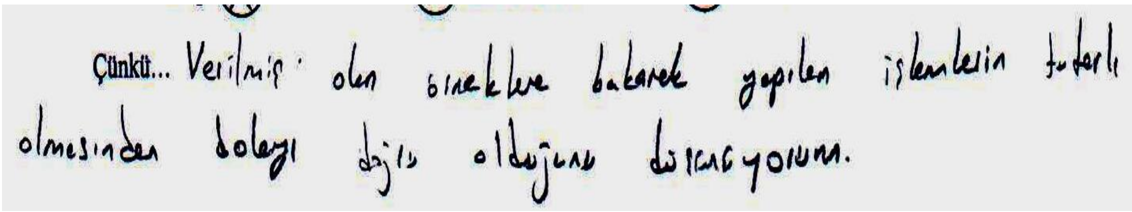
doğrulamanın kesinlikle yanlış bir doğrulama olacağını belirtirken ikisi ise kısmen doğru bir ispat olacağını belirtmişlerdir. Tümevarımsal argümanı kısmen doğru olarak değerlendiren öğretmen adayları, önermenin doğrulama şeklinin yanlış olmasına rağmen yapılan işlemlerin doğru olduğunu düşündükleri için yapılan argümanı tamamen ret etmemişlerdir. Bu öğretmen adaylarına örnek olarak Ahu'nun gerekçesine yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Yapılan işlemler doğru olmasına rağmen teoremin genelleyebilmek için yeterli değildir. Bu tarz örneklerle bir teoremin doğruluğuna varamayız. Doğru değildir çünkü genellenebilirliği yoktur. Yapılan işlemler doğru olduğu için kısmen doğru seçilmiştir.

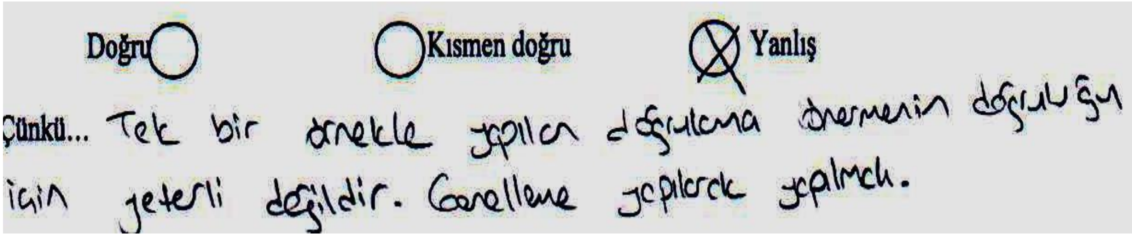
Şekil 4.115. Ahu'nun gerekçesi

Öğretmen adaylarının tümevarımsal argümanı değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelendiğinde tamamının argümanın basamaklarında işlemsel bir hatanın olup olmadığına dikkat ettikleri anlaşılmaktadır. Yapılan bu incelemenin, verilen kararlarda en etkili strateji olduğu söylenebilir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın görüşleri sunulmuştur.


Çünkü... Verilmiş olan örneklere bakarak yapılan işlemlerin tutarlı olmasından dolayı doğru olduğunu düşünüyorum.

Şekil 4.116. Barış'ın gerekçesi

Öğretmen adaylarının yarısından fazlası da argümanda kullanılan gerekçeye yani argümanın yapısına dikkat etmişlerdir. Bu strateji, öğretmen adaylarının verdikleri kararlarda etkili olmuştur. Bu stratejiyi uygulayan öğretmen adaylarının çoğunluğu argümanın doğru bir ispat olamayacağını belirtmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aysun'un gerekçesi örnek olarak sunulmuştur.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Tek bir örnekle yapılan doğrulama önermenin doğruluğu için yeterli değildir. Genelleme yapılarak yapılmalı.

Şekil 4.117. Aysun’un gerekçesi

İspat değerlendirme aktivitelerinin ardından öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini ortaya çıkarmak için reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için “*Bir fonksiyonun bir aralıkta türevi pozitif ise o aralıkta fonksiyon monoton artandır*.” doğru önermesine yönelik üretilen ispatlar incelenmiştir. Öğretmen adaylarının yaptıkları ispatların dört kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4.43’te bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

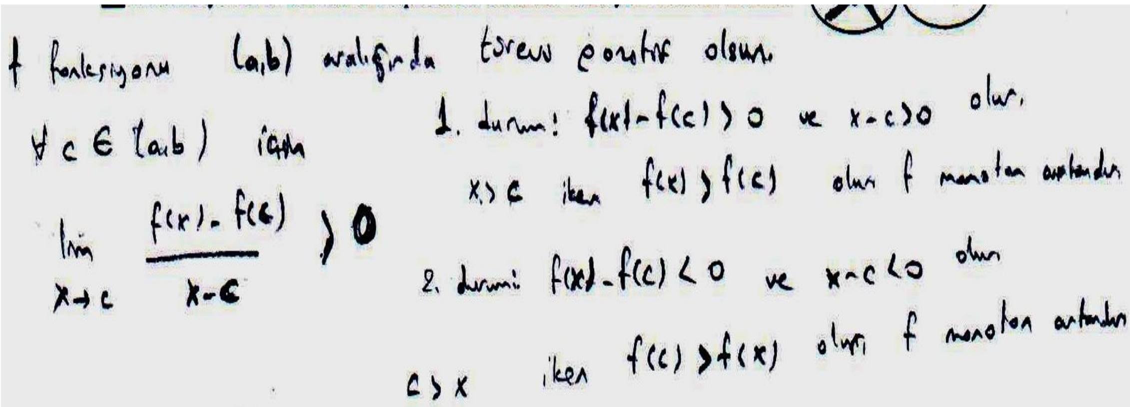
Tablo 4.43.

Öğretmen Adaylarının İspatı Yapma Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ispat		✓		✓				
Hipotezi yazma						✓		
Açıklama yapma	✓		✓					
Örnekle doğrulama					✓		✓	✓

Tablo 4.43 incelendiğinde sadece iki öğretmen adayının doğu bir ispat ürettiği tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının türev konusundaki bu ispatı yapma becerilerinin düşük olduğu söylenebilir. Diğer öğretmen adaylarından üçü ispatlarında örnekleri kullanmış, iki öğretmen adayı tanım ve şekiller üzerinden açıklama yaparak ispat yapmaya çalışmıştır. Bir öğretmen adayı da teoremin hipotezini yazmış ve ispatını tamamlayamamıştır.

Adem ve Aysun ispatlarını yaparken teoremin hipotezini kullanmışlardır. Türev tanımından hareket etmişler, bu tanımı monoton artan fonksiyon tanımı ile ilişkilendirerek ispatlarını tamamlamışlardır. Bu öğretmen adaylarının ispatı yaparken dönüşümsel ispat şemasında oldukları tespit edilmiştir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Adem’in ispatına yer verilmiştir.


f fonksiyonu (a,b) aralığında türevi pozitif olsun.

$\forall c \in (a,b)$ için

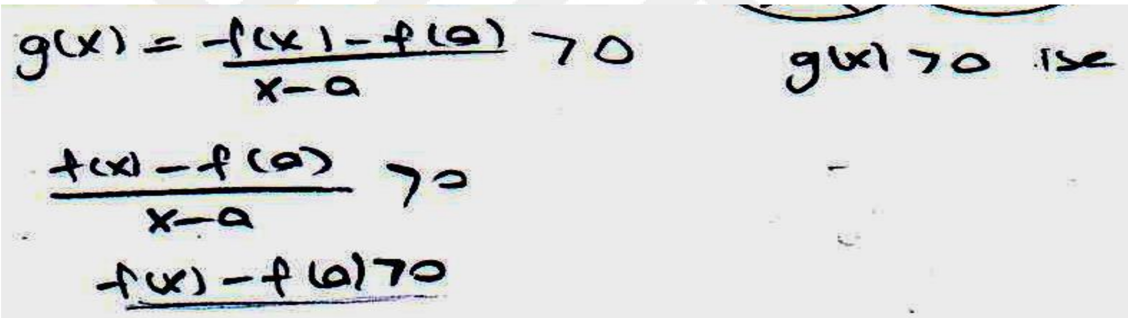
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$$

1. durum: $f(x)-f(c) > 0$ ve $x-c>0$ olur, $x>c$ iken $f(x) > f(c)$ olur f monoton artandır

2. durum: $f(x)-f(c) < 0$ ve $x-c<0$ olur $c>x$ iken $f(c) > f(x)$ olur f monoton artandır

Şekil 4.118. Adem’in ispatı

Bilge ise ispatını tamamlayamayarak sadece teoremin hipotezini yazmıştır. Bilge ispatını yaparken daha önce böyle bir ispat yapıp yapmadığını hatırlamaya çalışmıştır. Buna göre Bilge’nin otoriter ispat şemasında olduğu söylenebilir. Aşağıda Bilge’nin ispatı sunulmuştur.


$$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$$

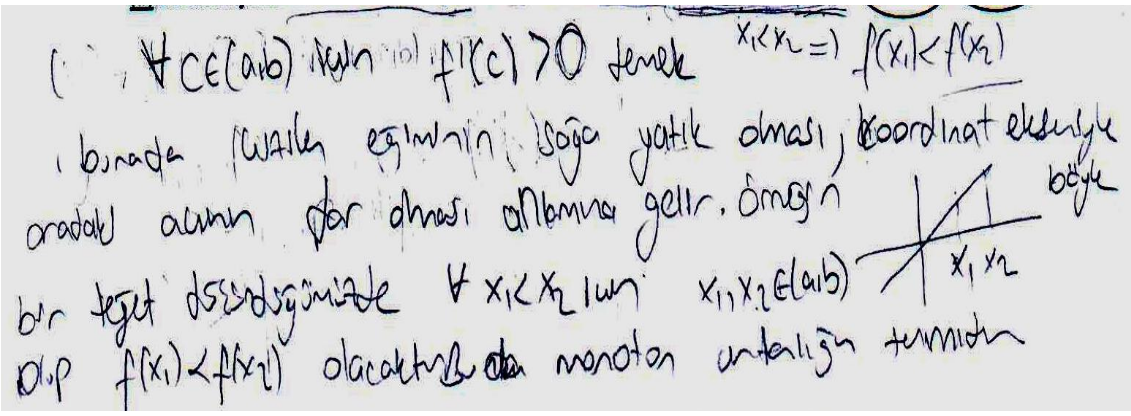
$g(x) > 0$ ise

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$$

$$f(x)-f(a) > 0$$

Şekil 4.119. Bilge’nin ispatı

Ahu ve Aziz ispatlarını yaparken türev kavramından yola çıkmışlardır. Türev kavramına uygun olarak bir şekil çizmiş ve o şekilden yararlanarak monoton artan fonksiyon tanımına ulaşmaya çalışmışlardır. Ahu ve Aziz’in ispatları türev tanımından hareket edilerek monoton artan fonksiyon tanımına uygun olduğunun açıklanması şeklindedir. Ahu ve Aziz’in bu gösterimi yetersiz zihinsel gösterim olarak değerlendirilmiştir. Buna göre bu öğretmen adaylarının tanımlar ve kavram imajları üzerinden hareket ettikleri ve şekillerden yardım aldıkları için algısal şemada oldukları söylenebilir. Aşağıda Ahu’nun ispatı örnek olarak sunulmuştur.

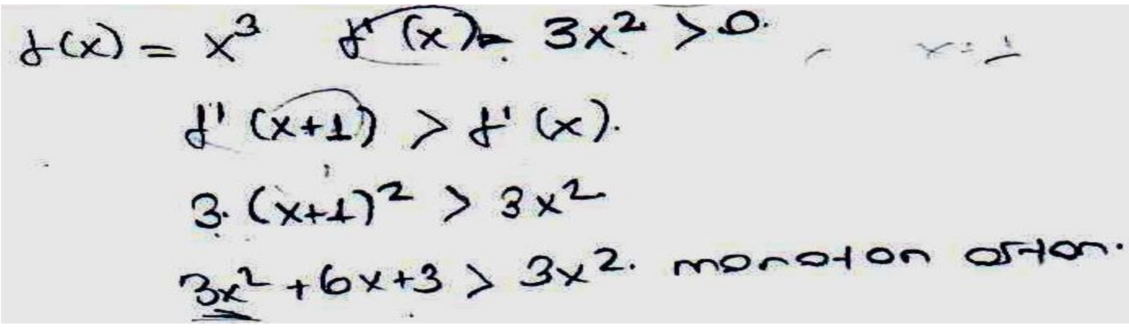

$\forall c \in (a,b)$ için $f'(c) > 0$ demek $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

burada çizilen eğiminin sağa yatık olması, koordinat ekseniyle oradaki açının dar olması anlamına gelir. Örneğin böyle bir teğet düşündüğümüzde $\forall x_1 < x_2$ için $x_1, x_2 \in (a,b)$ olup $f(x_1) < f(x_2)$ olacaktır. Bu da monoton artanlığın tanımıdır

Şekil 4.120. Ahu'nun ispatı

Buse, Barış ve Belma önermenin doğru olduğunu, yeterli olacağını düşünerek bir örnek üzerinden göstermeye çalışmışlardır. Buna göre Buse, Barış ve Belma'nın tümevarımsal ispat şemasında oldukları söylenebilir.

Buse'nin ispatı incelendiğinde, monoton artan fonksiyon tanımı ile monoton artan dizi tanımlarını birbiri ile karıştırdığı belirlenmiştir. Buse fonksiyonun monoton artan olduğunu göstermek için monoton artan dizi tanımını uygulamıştır. Ayrıca Buse'nin önermenin ifadesini anlamada güçlük yaşadığı ortaya çıkmıştır. İspatında kullandığı fonksiyonun monoton artan olduğunu göstermesi gerekirken türev fonksiyonunun monoton artan olduğunu göstermeye çalışmıştır. Aşağıda Buse'nin ispatı sunulmuştur.


$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 > 0.$

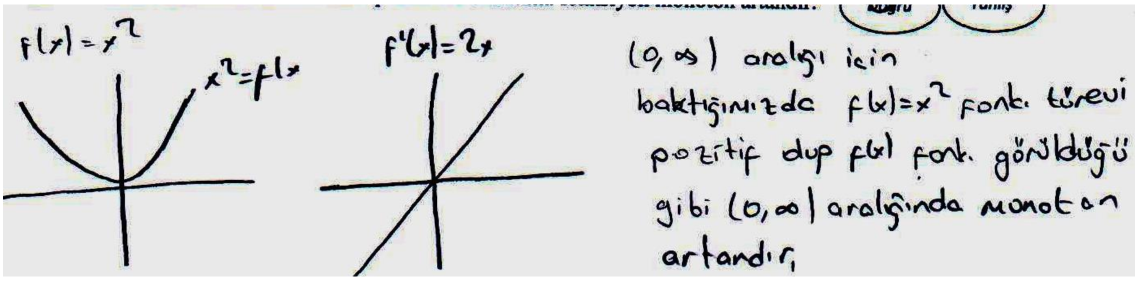
$f'(x+1) > f'(x).$

$3.(x+1)^2 > 3x^2$

$3x^2 + 6x + 3 > 3x^2.$ monoton artan.

Şekil 4.121. Buse'nin ispatı

Belma ispatını yaparken örnek üzerinden hareket etmiştir. Bir örnek üzerinden önermenin doğru olduğunu göstermiştir. Belma kullandığı örneğin önermedeki özellikte olduğunu açıklamak için şekilleri kullanmıştır. Aşağıda Belma'nın ispatı sunulmuştur.



Şekil 4.122. Belma'nın ispatı

Öğretmen adaylarının ters örnek üretme becerilerini incelemek amacıyla "*Herhangi bir noktada sürekli her fonksiyon, o noktada türevlidir.*" yanlış önermesi için ürettikleri ürünler incelenmiştir. Öğretmen adaylarının önermenin doğruluğu ya da yanlışlığını göstermek için ürettikleri ürünlerin altı kategoriye ayrıldığı belirlenmiştir. Tablo 4.44'te bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

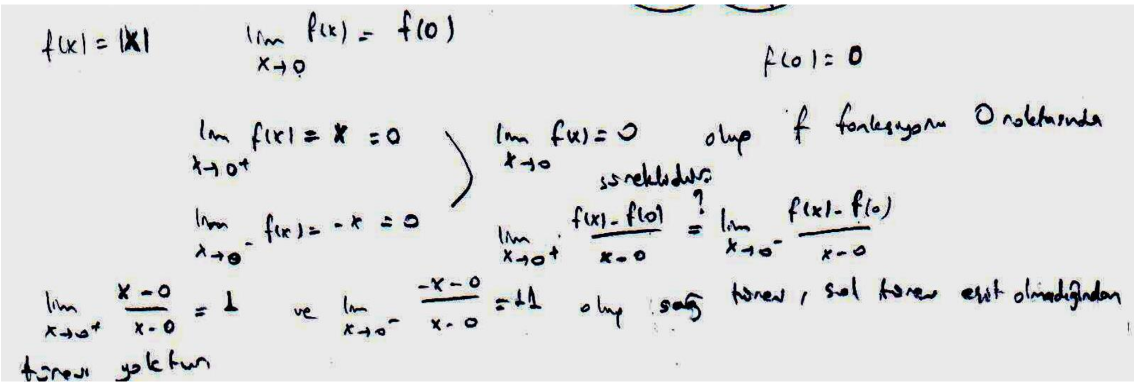
Tablo 4.44.

Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Üretme Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ters örnek	✓	✓						
İspatla yanlışlama			✓					
Ters örnek yok				✓				
İspat kullanma							✓	
Örnekle doğrulama					✓			✓
Tamamlanmamış ispat						✓		

Tablo 4.44'e göre, önermenin yanlış olduğunu belirten beş öğretmen adayından sadece ikisinin doğru bir ters örnek üretebildiği belirlenmiştir. Diğer öğretmen adayları ya ters bir örnek bulamamış ya da bu önermenin yanlış olduğunu göstermek için önermenin ispatında eksiklik olduğunu ifade etmişlerdir. Bir öğretmen adayı da önermenin yanlış olduğunu önermedeki kavramlarla ilgili başka bir teoremin ispatına yer vererek göstermeye çalışmıştır. Bu önermenin doğru olduğunu düşünen öğretmen adayları, örnek kullanarak önermenin doğru olduğunu göstermeye çalışmışlardır. Bir öğretmen adayı ise ispat yapmaya çalışmış fakat ispatını tamamlayamamıştır.

Ahu, Adem ve Aysun önermenin yanlış olduğunu gösterebilmek için ters örnek bulmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından Aysun ters örnek bulamazken Ahu ve Adem önermenin yanlış olduğunu ispatlamak için doğru bir ters örnek üretebilmişlerdir. Bu öğretmen adayları $f(x) = |x|$ fonksiyonunun sıfır noktasında sürekli fakat türevli olmadığını belirtmişlerdir. Bu örneğin önermeyi çürüten bir ters örnek olduğunu belirterek ispatlarından emin olduklarını ifade etmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Adem'in ters örneği yer almıştır.



$f(x)=|x|$ $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ $f(0)=0$

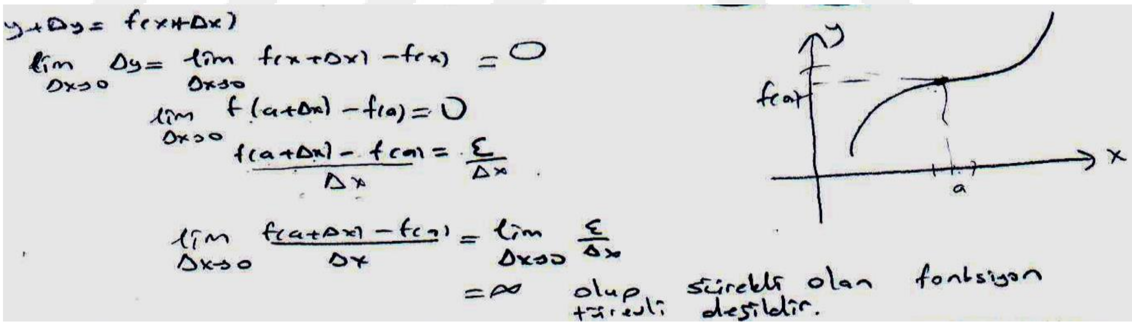
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = x = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -x = 0$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ olup f fonksiyonu 0 noktasında süreklidir.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$ ve $\lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$ olup sağ türev, sol türev eşit olmadığından türevi yoktur

Şekil 4.123. Adem'in ispatı

Aziz önermenin yanlış olduğunu göstermek için farklı bir yol tercih etmiştir. Aziz önermenin ispatını yapmaya çalışmıştır. İspatında süreklilik tanımından hareket ederek türev tanımındaki limit ifadesine ulaşmaya çalışmıştır. Aşağıda Aziz'in ispatı sunulmuştur.



$y+\Delta y = f(x+\Delta x)$

$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) - f(x) = 0$

$\lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x) - f(a) = 0$

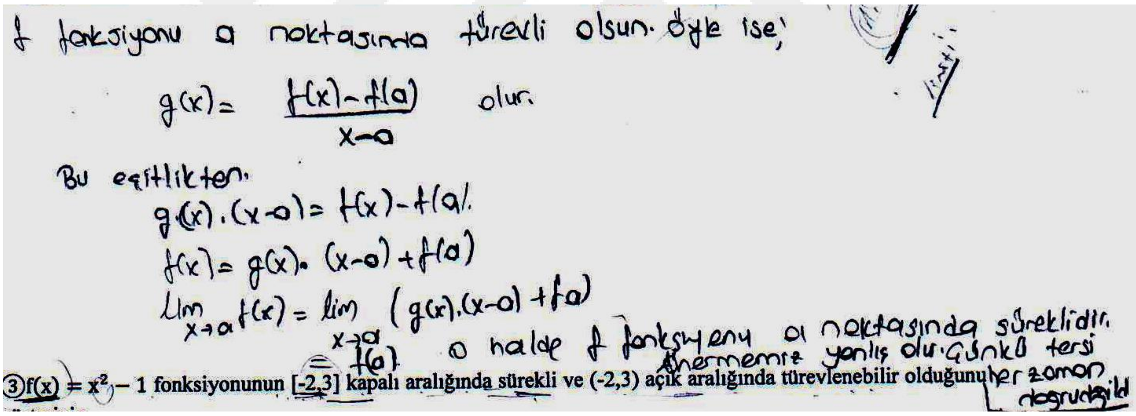
$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\varepsilon}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta x} = \infty$ olup sürekli olan fonksiyon türevli değildir.

Şekil 4.124. Aziz'in ispatı

Aziz'in ispatındaki adımlar incelendiğinde, yapılan işlemler ilk bakışta doğru gibi görünmektedir. Fakat ispat dikkatli bir şekilde irdelendiğinde yanlışlıkların olduğu ortaya çıkmaktadır. Aziz, fonksiyonun sürekli olduğunu kabul ederek türevli olup olmadığını bulmaya çalışmıştır. Fonksiyonun herhangi bir noktada sürekli olmasını $\lim_{\Delta x\to o} f(a+\Delta x) - f(a) = 0$ şeklinde belirtmiştir. Bir fonksiyon ile limiti arasındaki farkın sonsuz küçük olmasından dolayı $f(a+\Delta x) - f(a) = \varepsilon$ şeklinde bir gösterim yapmıştır. Bu gösterim, yanlış bir gösterim değildir fakat önemli bir ayrıntıyı içermemektedir. Bu ayrıntı ispatın sonunda, Aziz'in ispatı hakkında yanlış bir karar vermesine yol açmıştır. İlgili gösterimde $\lim_{\Delta x \to o} \varepsilon = 0$ dır. Aziz ispatın son basamağında $\lim_{\Delta x \to o} \frac{\varepsilon}{\Delta x} = \infty$ olduğunu iddia etmiştir. Aziz burada ε sayısını sonlu bir sayı olarak dikkate almıştır. Söz konusu limit $\frac{0}{0}$ belirsizliğine neden olur. Bu limitin değeri sonlu bir sayı da çıkabilir. Kesinlikle ∞ çıkacağının bir garantisi yoktur. Aziz, ε sayısının hangi özellikte olduğunu düşünmemiştir ya da bilmemektedir. Kaldı ki Aziz'in yaptığı ispat geçerli olsaydı sürekli olan tüm fonksiyonların türevli olmaması gerekirdi. Aziz'in türevlenebilen fonksiyonların sürekli olması gerektiğini bildiği düşünüldüğünde (Aziz'in türevlenebilen fonksiyon imajından), yaptığı ispatın ne anlama geldiğinin farkında olmadığı söylenebilir.

Buse önermenin yanlış olduğunu göstermek için mülakatta kendilerine sunulan bir noktada türevlenebilen fonksiyonların aynı noktada sürekli olduğuna yönelik teoremin ispatını kopyalamıştır. Bu teoremin tersinin doğru olmadığını ifade etmiştir. Aşağıda Buse'nin ispatı yer almıştır.


f fonksiyonu a noktasında türevli olsun. öyle ise;

$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ olur.

Bu eşitlikten.

$g(x).(x-a) = f(x)-f(a)$

$f(x) = g(x).(x-a)+f(a)$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (g(x).(x-a)+f(a))$

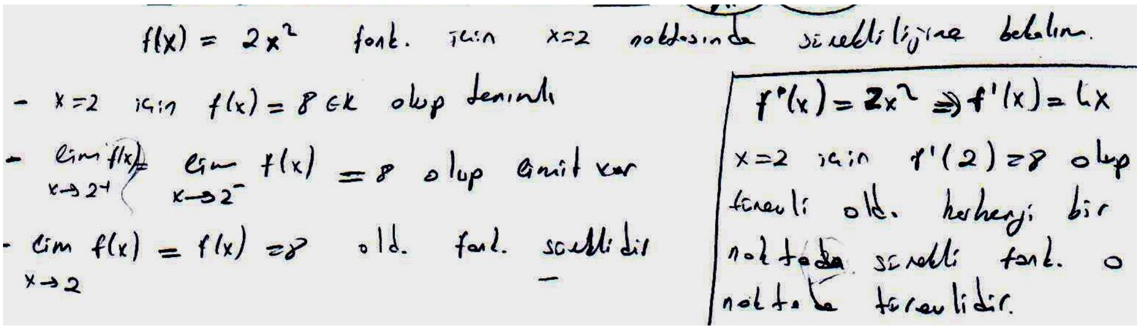
$= f(a)$ o halde f fonksiyonu a noktasında süreklidir.

önermemiz yanlış dır. çünkü tersi her zaman doğru değil

③ $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun [-2,3] kapalı aralığında sürekli ve (-2,3) açık aralığında türevlenebilir olduğunu

Şekil 4.125. Buse'nin ispatı

Barış ve Belma önermenin doğru olduğunu bir örnek üzerinden göstermişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın ispatı sunulmuştur.

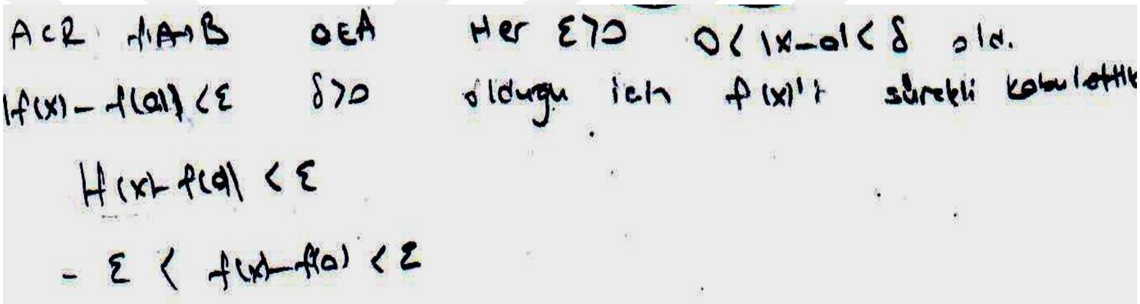

$f(x) = 2x^2$ fonk. için $x=2$ noktasında sürekliliğine bakalım.

- $x=2$ için $f(x) = 8 \in \mathbb{R}$ olup tanımlı
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 8$ olup limit var
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(x) = 8$ old. fonk. süreklidir

$f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x$
$x=2$ için $f'(2) = 8$ olup türevli old. herhangi bir noktada sürekli fonk. o noktada türevlidir.

Şekil 4.126. Barış'ın ispatı

Bilge ise önermenin doğru olduğunu göstermek için ispat yapmaya çalışmıştır. Sadece teoremin hipotezini ifade edebilen Bilge, ispatına devam edememiştir. Aşağıda Bilge'nin ispatı sunulmuştur.


$A \subset \mathbb{R}$ $f: A \to B$ $a \in A$ Her $\varepsilon > 0$ $0 < |x-a| < \delta$ old.
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ $\delta > 0$ olduğu için $f(x)$'i sürekli kabul ettik

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon$

Şekil 4.127. Bilge'nin ispatı

4.5.3. Öğretmen adaylarının türev konusundaki argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişki

Bu bölümde öğretmen adaylarının türev konusunda, argümantasyon ve ispat süreçleri arasındaki ilişkilere yönelik bulgular sunulmuştur. Bu bölümün bulguları öğretmen adaylarına sunulan reel değişkenli ve değerli fonksiyonlar için "*Bir fonksiyonun bir aralıkta türevi pozitif ise o aralıkta fonksiyon monoton artandır.*" doğru önermesi yardımıyla elde edilmiştir. Bu önermenin doğru olduğuna ikna olmak için girilen argümantasyon süreci ile doğruluğunu göstermek için girilen ispat süreci arasındaki ilişki yapısal olarak incelenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda beş farklı durum ile karşılaşılmıştır. Aşağıda bu durumlar hakkında bilgiler sunulmuştur.

1. *Dedüktif Argümantasyondan Dedüktif İspat*

Bu durumdaki öğretmen adayları Adem ve Aysun'dur. Aysun önermenin doğruluğuna ikna olmak için tanımlar üzerinden muhakeme ederek türev ile monoton artan fonksiyon tanımları arasında ilişki kurmuştur. Adem ise önermenin doğru olduğuna ikna olmak için ispat yapmaya çalışmıştır. Bu öğretmen adaylarının gerekçe tipinin dedüktif gerekçe tiplerinden dönüşümsel gerekçe tipinde oldukları söylenebilir. Bu öğretmen adaylarının ispatlarına bakıldığında tanımlar arasında ilişki kurularak ispatın yapıldığı tespit edilmiştir. Buna göre Adem ve Aysun'un ispat yapısının da dedüktif olduğu sunucuna ulaşılmıştır. Buna göre öğretmen adaylarının argümantasyon süreci ile ispat süreci arasında yapısal bir sürekliliğin olduğu söylenebilir. İspatlarında yapısal süreklilik olan bu öğretmen adayları ispat yapmada başarılı olmuşlardır.

2. *Algısal Argümantasyondan Algısal İspat*

Bu durumdaki öğretmen adayları Ahu ve Aziz'dir. Öğretmen adayları önermenin doğru olduğuna ikna olmak için kavram imajlarını kullanmışlardır. Bu öğretmen adayları türevlenebilen fonksiyon imajlarının bir noktada çizilen teğetin eğimi olduğu ortaya çıkmıştır. Bu algılarını görselleştirmek için grafik çizmişlerdir. Bu algıdan hareket ederek önermenin doğru olduğuna ikna olmuşlardır. Üretilen bu argümanlar zihinsel olarak üretilen yetersiz gösterimler olarak değerlendirilmiştir. Bu nedenle öğretmen adaylarının algısal gerekçe tipine sahip oldukları söylenebilir. Yaptıkları ispatlarda da bu yapılarını koruyan öğretmen adayları ispatlarında da tanımları, kavram imajlarını ve şekilleri kullanmışlardır. Bu öğretmen adaylarının ispatları da yetersiz zihinsel gösterimler olarak değerlendirilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının ispat şemalarının algısal olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının bu yapısal sürekliliği geçerli bir ispat yapmalarını sağlamamıştır.

3. *Tümevarımsal Argümantasyondan Tümevarımsal ispat*

Bu durumdaki öğretmen adayları Barış ve Buse'dir. Öğretmen adayları, bir örnek üzerinden önermenin doğru olduğunu göstererek ikna olmuşlardır. Tümevarımsal gerekçe tipinde olan öğretmen adaylarına göre önermenin doğru olması için bir örnek ile doğrulanması yeterlidir. Ürettikleri ispatlar incelendiğinde argüman yapılarını ispat yapılarına transfer ettikleri belirlenmiştir. İspatlarında da bir örnek ile önermenin doğru olduğunu göstermeye çalışmışlardır. Öğretmen adaylarının ispat yapısı da tümevarımsal bir yapıdır. Sahip olunan bu yapısal süreklilik başarılı bir ispat yapılmasını desteklememiştir.

4. *Tümevarımsal Argümantasyondan Otoriter İspat*

Bu durumdaki öğretmen adayı Bilge'dir. Bilge önermeye ikna olmak için bir örnek üzerinden muhakeme etmiştir. Göz önüne aldığı örneğe dayanarak önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Bilge'nin tümevarımsal gerekçe tipine sahip olduğu belirlenmiştir. Bilge ispatında ise bu yapısını değiştirmiştir. Tanımlardan hareket ederek ispat yapmaya çalışsa da daha önce yapılan ispatları hatırlamaya çalışarak bir prosedürü takip etmeye çalıştığı belirlenmiştir. İspatını tamamlayamayan Bilge'nin otoriter ispat şemasında olduğu söylenebilir. Bilge'nin argümantasyon süreci ile ispat süreci arasındaki yapısal boşluk, ispat yapmada başarılı olmasını engellediği düşünülmüştür.

5. *Otoriter Argümantasyondan Tümevarımsal İspat*

Bu durumdaki öğretmen adayı olan Belma, önermeye ikna olmak için bir argüman oluşturma sürecine girmemiştir. Bu önermenin doğru olduğunu daha önceden bildiğini ifade ederek otoriter bir yapı sergilemiştir. Buna göre Belma'nın argüman oluşturmak için düşünce sürecine girmeden önermenin doğruluğu hakkında karar verdiği tespit edilmiştir. Belma önermenin ispatını yaparken bir örnek üzerinden doğrulama yapmıştır. İspatında kullandığı örneklerin önermeyi doğrulayan bir örnek olduğunu açıklarken örnek fonksiyonlarının şekillerini çizmiştir. Çizdiği şekillere dayanarak açıklamalar yapmıştır. Bu bakımdan Belma'nın ispat yapısının tümevarımsal olduğu söylenebilir. Belma'nın iki süreci arasındaki bu boşluk, başarılı bir ispat yapamamasında etkili olmuştur.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

5.1. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Görüşlerine İlişkin Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu bölümde araştırmanın ilk alt problemine yönelik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinden elde edilen sonuç, tartışma ve öneriler sunulmuştur.

Öğretmen adaylarına ilk olarak matematiksel ispata ne anlam yüklediklerini tespit edebilmek için "Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?" sorusu yöneltilmiştir. Alınan yanıtlar incelendiğinde, öğretmen adaylarının yarısının (Ahu, Adem, Barış, Belma) ispata sembolik açıklama, mantıklı açıklama ve neyin nereden geldiğini öğrenme anlamlarını yükledikleri tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarından üçünün (Adem, Barış, Belma) ispatın açıklama fonksiyonunu vurguladıkları, Ahu'nun ispatı sembolik açıklama olarak nitelendirerek ispatın sistematikleştirme fonksiyonuna işaret ettiği söylenebilir. Aziz ve Aysun ise ispata doğruluk anlamını yüklemişlerdir. Buna göre Aziz ve Aysun'un ispatın doğrulama fonksiyonunu dikkate aldıkları söylenebilir. Buse'nin ispatın birşeyin açığa çıkarılması olduğunu ifade ederek ispatın kısmen de olsa keşfetme fonksiyonuna vurgu yaptığı ortaya çıkmıştır. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunlukla ispatın açıklama, doğrulama, sistematikleştirme ve keşfetme fonksiyonuna yönelik anlamlar yükledikleri tespit edilmiştir. Bilge ise ispat deyince aklına ispatlama yöntemlerinin geldiğini ve ispatın daha önceden yapılmış şeylerin tekrar edilmesi olduğunu ifade etmiştir. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar ispatların doğrulama, açıklama, sistematikleştirme ve keşfetme fonksiyonlarının olduğu yönündeki araştırma sonuçları ile uyumludur (Bell, 1976; De Villers, 1999; Hanna, 2000). Bu araştırmalarda ispatın doğrulama fonksiyonu ile bir ifadenin doğruluğu ile ilgilenilir, açıklama fonksiyonu ile bir ifadenin neden doğru olduğu üzerinde durulur, sistematikleştirme fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar dedüktif bir sistem içinde düzenlenir ve keşfetme fonksiyonu ile yeni sonuçların bulunması dikkate alınır. İspatın fonksiyonları arasından açıklama ve doğrulama fonksiyonlarına yönelik anlamlar yükleyen öğretmen adaylarının çoğunlukta olduğu belirlenmiştir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, öğretmen adaylarının ispata çoğunlukla açıklama ve doğrulama anlamlarını yüklediklerini ortaya koyan çalışma sonuçları ile paralellik göstermiştir (Kaplan, Doruk ve Özdemir, 2015). Çalışmada öğretmen adaylarının çoğunluğu ispatlara olumlu anlamlar yüklemişlerdir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç matematik öğretmeni adaylarının ispatlara yönelik olumlu anlamlar yükledikleri araştırma sonuçları ile desteklenmektedir (Doruk ve Güler, 2014).

Öğretmen adaylarının ispatın amacına yönelik görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarının yarısının (Ahu, Bilge, Aysun, Aziz) ispatın amacının bir ifadenin doğruluğunun gösterilmesi olduğunu düşündükleri ortaya çıkmıştır. İki öğretmen adayı (Ahu, Buse) ispatın amacının keşfetmek olduğunu belirtirken birer öğretmen adayı ispatın neyin nereden geldiğini bilmek olduğunu (Barış) ve ispatın, konuları daha iyi kavratma (Belma) gibi bir amacının olduğunu dile getirmiştir. Adem ispatın matematiksel ifadeler üzerindeki şüpheleri ortadan kaldırdığını ifade etmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının ispatın başlıca amacının bir ifadenin doğrulunun gösterilmesi olduğunu düşündükleri söylenebilir. İspatın diğer amaçlarının ise keşfetmek, şüpheyi ortadan kaldırmak, neyin nereden geldiğini bilmek ve konuları daha iyi kavratmak olduğu ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının bu görüşleri, ispatın ana amacının sonuçların doğruluğunu göstermek olmasına rağmen ispatın matematikte açıklama, sistemizasyon, keşif, iletişim, bir deneysel teorinin inşası, varsayımların sonuçlarının ve tanımların keşfedilmesi ve iyi bilinen bir gerçeğin yeni bir sisteme-yapıya katılması gibi amaçlarının olduğu yönündeki düşünceleri desteklemektedir (Yackel ve Hanna, 2003 akt., Ko, 2010). Ayrıca öğretmen adaylarının ispatın amaçları arasından doğrulama fonksiyonunu daha çok vurguladıkları ortaya çıkmıştır. Bu durum, bir ispatın en belirgin fonksiyonunun doğrulama olduğu ve açıklama ya da sistemizasyon gibi fonksiyonların daha az ilgi çektiği yönündeki görüşleri desteklemektedir (Coe ve Ruthven, 1994). Çalışmadan elde edilen sonuçlar, matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatların amacına yönelik düşüncelerinin sorgulandığı ve ispatın doğrulama fonksiyonuna yönelik görüşlerin ön plana çıktığı çalışmalarla da desteklenmektedir (Güler, 2013; İmamoğlu, 2010; Kaplan, Doruk ve Özdemir, 2015).

Öğretmen adaylarının ispatın neden önemli olduğuna yönelik görüşleri incelendiğinde, öğretmen adaylarının geneli matematiksel ispatlarla birlikte matematiksel bilgilerin doğruluğu üzerindeki şüphenin ortadan kalktığını ve kavramsal bilgilerin kuvvetlendiğini ifade etmişlerdir. Birer öğretmen adayı ispatın zor işleri kolaylaştırdığı, bilgilerin devamlılığını sağladığı ve neyin nereden geldiğini açıkladığı için önemli olduğunu ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının bu ifadeleri, matematiksel ispatların matematiksel bilgilerin üzerinden şüpheyi kaldırarak matematiksel iddialara önce kendilerinin daha sonra başkalarının ikna olmasını sağladığı yönündeki görüşleri desteklemiştir (Bell, 1976; De Villiers, 1999; Harel ve Sowder, 2007; Stylianou, Chea ve Blanton, 2006). Bell (1976) ispatların esasında ikna olmayı sağlayan bir sosyal aktivite olduğunu ifade etmiştir. Aziz'in belirttiği gibi matematiksel ispatların problem çözümü için yeni metotlar sunarak problem çözümünü kolaylaştırdığı da bilinmektedir (Rav, 1999). Kısacası öğretmen adaylarının ispatların önemine yönelik olumlu görüşler bildirdikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Öğretmen adaylarına matematiksel ispatların kendilerine neden öğretildiği sorulmuştur. Öğretmen adayları çoğunlukla matematiksel ispatların öğretiminin akademik kariyer yapacaklar için, kuralların nereden geldiğini bilmek için ve alanda uzman olmak için yapıldığını ifade etmişlerdir. Üç öğretmen adayı matematiksel ispatların bilgilerin kalıcılığını sağladığı ve farklı bakış açısı geliştirdiği için öğretiminin yapıldığını dile getirmiştir. Diğer öğretmen adaylarından farklı olarak Ahu, meraklı öğrencilere yanıt verebilmek için ispatların öğretildiğini ifade ederken Adem, matematiksel ispatların başkalarını ikna etmek ve matematiksel düşünceyi geliştirmek için öğretildiğini belirtmiştir. Belma ise ispatların öğretimine yönelik olumsuz ve net bir tutum sergileyerek ispatların sadece ezber yapmak için öğretildiğini iddia etmiştir. Belma'nın bu ifadesi öğretmen adaylarının ispatları bir ezberleme aktivitesi olarak gördükleri çalışma sonuçları ile paralellik göstermektedir (Baştürk, 2010; Concradie ve Frith, 2000; Doruk ve Kaplan, 2013b). Öğretmen adaylarının ispatların öğretimine yönelik görüşleri genel olarak incelendiğinde, birçok kategoriye yönelik görüş bildirdikleri ve üç öğretmen adayının (Aziz, Barış ve Buse) ispat öğretimine yönelik hem olumlu hem de olumsuz görüş bildirdikleri ortaya çıkmıştır. Ortaya çıkan bu tablodan, öğretmen adaylarının ispatların öğretimine yönelik görüşlerinde kararsızlık yaşadıkları yönünde yorum yapılabilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı ve ispat yapmanın matematik ve matematik öğretimi açısından öneminin farkında olmadıkları yönündeki görüşler ile örtüşmektedir (Moralı vd., 2006).

Öğretmen adaylarının öğrendikleri matematiksel ispatların onlara matematiksel anlamda yarar sağlayıp sağlamadığına yönelik görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarına sorulan bu soru, onların matematiksel ispatlara yönelik gerçekten olumlu tutum içinde olup olmadıklarına yönelik belirleyici olmuştur. Öğretmen adaylarının yarısından çoğu ispatlar sayesinde düşünme kapasitelerinin geliştiğini, matematiğe bakış açıklarının değiştiğini, soru çözümlerinin kolaylaştığını, ilişkilendirme becerileri ve dersteki başarılarının arttığını, kalıcı bilgilerin sağlandığını, kavramların iyi bilinmesi adına farkındalık düzeylerinin arttığını, matematiği sevdirdiği ve işlemsel becerilerinin arttığını dile getirmişlerdir. Bu görüşlerden hareket ederek öğretmen adaylarının çoğunun ispatlar sayesinde matematiğe yönelik bilişsel, duyuşsal beceriler kazandıkları ve farkındalık düzeylerinin arttığını düşündükleri söylenebilir. Bu öğretmen adaylarından özellikle Aziz ve Adem'in samimi bir şekilde dört farklı olumlu görüş bildirmesi, onların matematiksel ispatların amacı, önemi ve yararı konusunda istenen görüşlere sahip oldukları izlenimi uyandırmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, matematiksel ispatların öğrencilere bilişsel ve duyuşsal anlamda yarar sağladığı yönündeki araştırma sonuçlarını desteklemektedir (Güven vd., 2005; Hanna ve Barbeau, 2008; Hersh, 1993; Rav, 1999; Ross, 1988; Tucker, 1999). Benzer şekilde Dede ve Karakuş (2014) ispat yapma sürecinde öğrencilerin denemeler yaparak keşfetme sürecine girdiklerini, matematiğin estetik yönünü fark ettiklerini ve analitik düşünme becerilerini geliştirebileceklerini ifade etmişlerdir. Güven ve diğerleri (2005) de ispatlama etkinlikleri yoluyla öğrencilerinin bir yandan matematiğin aksiyomatik yapısını tanıma fırsatı yakalarken bir yandan da muhakeme becerilerini geliştirebileceklerini dile getirmiştir. Bu olumlu ve umut verici görüşlere karşın Barış, Belma ve Buse'nin ispata yönelik olumsuz tutum içinde oldukları ortaya çıkmıştır. Barış, Belma ve Buse matematiksel ispatların kendilerine matematiksel anlamda yararlı olmadığını ve olamayacağını belirtmişlerdir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, bazı öğrenciler için ispat kavramının anlaşılması zor, faydasız, anlamsız ve gereksiz yapılan bir etkinlik olarak düşündükleri yönündeki araştırma sonuçları ile uyumludur (Doruk ve Kaplan, 2013a, 2015b; Knuth, 2002).

Öğretmen adaylarının ne tür ispatlarda başarılı olduklarını öğrenmek için “Hangi ispatlarda başarılı oluyorsunuz?” sorusu ile ilgili yanıtları incelendiğinde, öğretmen adaylarından üçü (Ahu, Aziz, Belma) sayısal ispatlarda başarılı olduklarını ifade etmişlerdir. Üçü de (Bilge, Buse, Barış) ispatlama yöntemine bağlı olarak görüş bildirmişlerdir. Bu öğretmen adayları tümevarım ve olmayana ergi yöntemi ile yapılan ispatlarda daha başarılı olduklarını ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının ispatlama yöntemine yönelik görüş bildirmeleri araştırmacının dikkatini çekmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlama yöntemine yönelik bilgileri sorgulanmıştır. Yapılan inceleme sonucunda ironik bir durum ile karşılaşılmıştır. İspatlama yöntemiyle ilişkili görüş bildiren öğretmen adaylarının ispatlama yöntemlerini ayırt etmekte güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Bilge, Buse ve Barış’ın özellikle çelişki bulma ve olmayana ergi ispatlama yöntemleri arasındaki farkı açıklayamadıkları ve birbiri yerine kullandıkları belirlenmiştir. İki öğretmen adayı (Ahu, Aysun) çözüm yöntemi açık olan ispatlarda başarılı olduklarını söylerken bir öğretmen adayı (Adem) kısa olan ispatlarda başarılı olduğunu dile getirmiştir. Öğretmen adaylarından elde edilen bu görüşler Doruk ve Kaplan (2013a) tarafından yapılan çalışmada elde edilen kategoriler ile benzerlik göstermiştir.

Öğretmen adaylarının başarılı oldukları ispatlara yönelik görüşlerinin alınmasının ardından ispatlarda başarılı olabilmek için nelerin gerekli olduğuna yönelik görüşleri alınmıştır. Belma dışındaki öğretmen adayları ispatın ilgili olduğu tanımların kavramsal boyutta bilinmesinin ve ispatların ezberlenmemesinin gerekli olduğunu ifade etmişlerdir. İki öğretmen adayı ispatların üzerinde yoğunlaşmanın gerekli olduğunu belirtmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunun ispatların öğrenimi konusunda olumlu görüşlere sahip oldukları söylenebilir. Belma ve Bilge ise ispatlarda başarılı olabilmek için ezber yapılmasının şart olduğunu belirterek olumsuz görüş bildirmişlerdir. Bu durum Concradie ve Fritch’in (2000) öğretmen adaylarının dersleri geçebilmek için ispatları anlamadan ezberledikleri görüşünü desteklemektedir. Bir öğretmen adayı (Adem) ispatın adımları arasındaki gerekçeleri anlamanın şart olduğunu ifade ederken bir öğretmen adayı da (Bilge) ispatlama yöntemlerini ayırt edebilmenin gerekli olduğunu belirtmiştir. Bilge ispatların öğretimine yönelik bir eleştiri yaparak ispatların öğretimi sırasında öğrencilerin ispat yapabilmeleri için fırsat verilmesi gerektiğini dile getirmiştir. Bilge’nin bu eleştirisi üniversite seviyesindeki matematik derslerinde ispatlar yapılırken öğrencilerin pasif bir şekilde gözlem yaptıkları ve ders hocasının son ürünlerini sadece kopyaladıkları yönündeki görüşü desteklemiştir (Weber, 2004).

Öğretmen adaylarının doğru yapılmış bir ispatta bulunması gereken özelliklere yönelik görüşleri incelendiğinde, ispatların doğruluğunu dört farklı boyutta ele aldıkları ortaya çıkmıştır. Bu boyutlar argüman incelemesi, yapısal inceleme, dilsel-mantıksal inceleme ve otoriter incelemedir. Öğretmen adaylarının tamamına yakını (Aysun hariç) ispatların içerisindeki argümanların incelenmesine yönelik görüş bildirmişlerdir. Bu öğretmen adaylarından dördü (Ahu, Belma, Bilge, Buse) ispatlardaki argümanlarda gerekçe olarak bilinen gerçeklerin kullanılması gerektiğini, üçü (Ahu, Adem, Barış) ispatın içerisindeki ifadelerin matematiksel gerçeklerle uyumlu olması gerektiğini, ikisi (Ahu, Aziz) ispatın adımlarında işlemsel bir hatanın bulunmamasını, bir öğretmen adayı da (Aziz) ispatta mantıksal bağlantıları sağlayan kilit ifadelerin bulunması gerektiğini ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının yarısı (Aysun, Belma, Buse, Ahu) ispatı yapısal ya da yüzeysel olarak incelediklerine yönelik görüş bildirmişlerdir. Bu kategorideki öğretmen adayları argüman incelemesinde bahsedilen ispatın içeriğine yönelik ispat basamaklarını incelemek yerine ispatlara yüzeysel olarak bakmışlardır. Doğru yapılmış ispatlarda teoremin hipotezinin kullanılarak hükmün bulunması gerektiğini ifade etmişler, ispatta teoremin hükmünün kullanılması durumunda ispatın yanlış olacağını belirtmişlerdir. Üç öğretmen adayı (Ahu, Aysun, Buse) kullanılan ispatlama yönteminin uygun olması gerektiğini belirtmiştir. Üç öğretmen adayı (Aysun, Bilge, Aziz) ispatları dilsel ve mantıksal olarak inceleyeceklerine yönelik görüş bildirmişlerdir. Bu öğretmen adayları ispatın dilinin açık ve anlaşılır olmasının, yapılacak işlemlere zemin hazırlanmasının ve ispatın ikna edici olmasının gerekli olduğunu dile getirmişlerdir. Son olarak Aysun ispatlara otoriter bir bakış açısı ile yaklaşarak ispatların kitaptaki gibi olması gerektiğini ifade etmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunun ispatları incelerken satır satır inceleme yaparak ispatın adımlarında işlemsel ve mantıksal hata olup olmadığına yönelik görüş bildirdikleri söylenebilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç öğretmen adaylarının ispatları incelerken satır satır inceleme eğiliminde oldukları yönündeki çalışma sonuçları ile desteklenmektedir (Alcock ve Weber, 2005; Selden ve Selden, 2003). Çalışmadan elde edilen kategoriler Uygan, Tanışlı ve Köse (2014) tarafından yapılan çalışma ile farklılık göstermiştir. Uygan ve diğerlerinin (2014) üç ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün son sınıfında öğrenim gören öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmada, öğretmen adaylarının doğru yapılmış bir ispatın tümdengelimli, sonucu genellenebilir ve anlaşılabilir olması gerektiğini ifade ettiklerini belirtmişlerdir. Bu çalışmada ise öğretmen adayları doğru yapılmış bir ispatın tümdengelimli ve sonucu genellenebilir olması ile ilgili en azından doğrudan bir ifade kullanmamışlardır.

İspatlama sürecinde bir iddianın doğruluğuna önce kendini daha sonra başkalarını ikna etme gibi iki alt süreç mevcuttur (Harel ve Sowder, 2007). Stylianou, Chea ve Blanton (2006) da benzer şekilde, ispatın bir kişinin iddiasını doğrulamasını, kendisini ve başkalarını ikna etmeyi sağlayan mantıksal argüman olarak matematikte başrole sahip olduğunun kabul edildiğini ifade etmişlerdir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının ispatlama sürecinin iki alt süreci olan kendini ve diğerlerini matematiksel bilgiye ikna etme süreçlerine yönelik bilgiler elde edilmeye çalışılmıştır. Öğretmen adaylarına ilk olarak matematiksel bir önermenin doğruluğu hakkında şüpheye düştüklerinde kendilerini nasıl ikna edecekleri sorulmuştur. Alınan yanıtlar incelendiğinde öğretmen adaylarının çoğunluğunun (Barış ve Belma hariç) tanımlar (Ahu, Aysun, Belma, Bilge) ve teoremler (Ahu, Aysun, Bilge) üzerinden muhakeme ederek ya da ispatlayarak (Adem, Aysun, Aziz) önermenin doğru olduğuna ikna olacaklarını belirtmişlerdir. Bu kategorilerdeki öğretmen adaylarının dedüktif tarzda argümanlar üreterek kendilerini matematiksel bir önermenin doğruluğuna ikna edeceklerine yönelik görüş bildirdikleri söylenebilir. Öğretmen adaylarının yarısı da (Barış, Bilge, Buse, Belma) önermenin doğru olduğuna ikna olmak için birkaç özel örnekle deneme yapacaklarını (Barış, Belma Bilge, Buse) ya da önermeye ait şekiller çizmeye çalışarak (Barış, Belma, Buse) ikna olacaklarını belirtmişlerdir. Bu kategorideki öğretmen adaylarının ikna olmak için tümevarımsal ve görsel argümanlar gibi informel argümanlar üretecekleri söylenebilir. Elde edilen kategoriler bireysel olarak incelendiğinde Adem, Aziz, Aysun ve Ahu'nun önermenin doğru olduğuna ikna olmak için sadece tanım, teorem ve ispatlardan yaralanacaklarını ifade ettikleri belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları, önermeye ikna olma için dedüktif tarzda argümanlar üreteceklerini belirtmişlerdir. Barış ve Buse ise önermenin doğru olduğuna ikna olmak için örnek ya da şekilleri kullanacaklarını dile getirmişlerdir. Bu öğretmen adayları önermeye ikna olmak için genellikle tümevarımsal ve görsel tarzda argümanlar üreteceklerini ifade etmişlerdir. Bilge hem tümevarımsal hem de dedüktif tarzda argümanlar ürettiğini söylemiştir. Belma ise tüm argüman üretme tarzlarında görüş bildirmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının matematiksel bir ifadeye ikna olma şekillerinin birbirinden farklı olabileceği düşüncesini ve öğrencilerden bazılarının ikna olma adına informel yolları tercih edecekleri yönündeki araştırma sonuçlarını desteklemiştir (Harel ve Sowder, 1998; Miyazaki, 2000).

Buse'nin dışındaki öğretmen adayları önermenin yanlış olduğuna ikna olmak için ters örnek üretmeye çalışacaklarını belirtmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunun ters örnek ile yapılan ispatlara yönelik bilgilerinin olduğu söylenebilir. Buse ise önermenin yanlış olduğuna ikna olmak için açıklama yapmaya çalışacağını belirtmiştir. Buna göre Buse'nin ters örnek ile yapılan ispatlar hakkındaki bilgilerinde eksiklik olduğu söylenebilir. Buse'nin ters örneklerin önermelerin yanlışlığını göstermedeki gücünün farkında olmadığı söylenebilir. Bundan dolayı ispatlama yöntemlerinin öğretiminin yapıldığı Soyut Matematik derslerinde ters örneklerin önemi vurgulanmalı, bir önermenin doğruluğunun ispatlanması kadar, yanlışlanmasının da matematiğin gelişmesinde önemli bir yere sahip olduğu (Lakatos, 1976) ve matematikte genellikle ters örnekler olarak sunulduğu (Lampert, 1990) vurgulanmalıdır.

Son olarak öğretmen adaylarının doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını savunurken ne tür gerekçeler kullandıklarına yönelik görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarının beşi tanımları (Ahu, Adem, Aziz, Aysun, Bilge) ve üçü teoremleri (Ahu, Aziz, Aysun) gerekçe olarak kullandıklarını ifade etmişlerdir. Bu gerekçeler dedüktif gerekçe altında toplanmıştır. Üç öğretmen adayı ise (Belma, Bilge ve Buse) iddialarını savunurken şekillerden yararlandıklarını belirtmiştir. Buna göre bu üç öğretmen adayının görsel gerekçelerle iddialarını savundukları söylenebilir. İki öğretmen adayı (Barış ve Bilge) matematiksel iddialarını savunurken özel örneklerden yararlandıklarını belirtmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının iddialarını savunurken tümevarımsal gerekçeler kullandıkları söylenebilir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunun dedüktif gerekçeler kullandıklarına yönelik görüş bildirdikleri ortaya çıkmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonucun sebebi öğretmen adaylarının matematik derslerinde üretilen argümanların çoğunlukla dedüktif argümanlar üretildiği için öğrencilerin de bu şekilde argümanlar üretme eğiliminde olduğu düşünülmektedir. Bu düşünce, Dinçer'in (2011) yaptığı çalışma ile desteklenmektedir. Dinçer (2011) üç dönem boyunca analiz derslerinde üretilen argümanları incelemiş ve ders esnasında üretilen argümanların çoğunlukla dedüktif olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarının matematiksel iddialarını savunurken kullandıklarını söyledikleri gerekçeler bireysel olarak analiz edildiğinde Ahu, Aziz, Adem ve Aysun'un net bir şekilde dedüktif gerekçeler kullandıklarını ifade ettikleri görülmüştür. Belma ve Buse görsel gerekçeler kullandıklarını belirtmişlerdir. Barış sadece tümevarımsal gerekçeler kullandığını ifade etmiştir. Bilge ise her üç gerekçeyi de kullandığına yönelik görüş bildirmiştir. Bilge'nin her kategoriye yönelik görüş bildirmesi onun bu tarz bir aktiviteye yönelik deneyiminin az olduğundan kaynaklandığı düşünülmüştür. Ayrıca çalışmadan elde edilen bu sonuç, öğrencilerin genel bir ifadenin doğruluğunun gösterilmesinde bir ya da birkaç özel örnek üzerinden gösterilmesi olan tümevarımsal argümanlar ürettikleri yönündeki çalışma sonuçlarını teyit etmiştir (Barkai, Tsamir, Tirosh ve Dreyfus, 2002; Galbraith,1981; Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002; Weber, 2001).

İspata yönelik görüşler genel olarak değerlendirildiğinde, öğretmen adaylarının ispatın anlamına, matematikteki amacına ve önemine yönelik görüşlerinin çoğunlukla olumlu olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlarda başarılı olunabilmesi için yapılması gerekenlere ve matematiksel ispatların kendilerine matematiksel anlamda yarar sağlayıp sağlamadığına yönelik görüşleri alındığında, bazı öğretmen adaylarının ispata karşı ön yargıları ve olumsuz görüşleri ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarından Ahu, Aziz, Adem ve Aysun'un ispatın amacı, önemi ve matematiksel anlamda kendilerine sağladığı faydaların farkında oldukları belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının ispata yönelik olumlu tutum içinde oldukları söylenebilir. Belma, Barış ve Buse ise ispatın amacına ve önemine ilişkin olumlu görüşler belirtirken matematiksel ispatların öğretim amacının ezber yapmak olduğunu, bunun için de ispatlara en iyi çalışma metodunun ezberlemek olduğunu ifade etmişlerdir. Şu ana kadar öğrendikleri ispatların kendilerine matematiksel anlamda bir yararının olmadığını dile getirmişlerdir. Bu bakımdan Belma, Barış ve Buse'nin ispata karşı olumsuz bir tutum içinde oldukları ortaya çıkmıştır. Bilge ise matematiksel ispatın anlamına yönelik olumsuz görüş olarak değerlendirilebilecek anlamlar yüklemiş ve ispatlarda başarılı olabilmek için ezberlenmesinin gerekli olduğunu belirtmiştir. Bilge'nin aynı soru için hem olumlu hem de olumsuz görüş bildirdiği belirlenmiştir. Buna göre Bilge'nin ispata yönelik ne olumlu ne de olumsuz bir tutum içinde olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmadan elde edilen bu genel durum, matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşlerinin tam olarak oluşmadığı yönündeki çalışma sonuçlarını desteklemiştir (Doruk ve Güler, 2014; Moralı vd., 2006). Çalışmada öğretmen adayları ispatın fonksiyonlarına yönelik olumlu görüşler bildirirken ispatın matematik eğitimindeki yerine yönelik görüşlerinin aynı oranda olumlu olmadığı tespit edilmiştir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, Knuth'un (2002) çalışmasından elde ettiği sonucu akıllara getirmiştir. Knuth (2002) çalışmasının sonucunda, matematik öğretmenlerinin ispatın matematikteki rolüne yönelik birçok görüş belirtmelerine rağmen (doğrulama, açıklama, iletişim, keşfetme, sistemizasyon) ispatın matematik öğretimindeki rolüne yönelik görüş bildirmedikleri ortaya çıkmıştır.

İspata karşı olumlu görüşe sahip olan öğretmen adayları matematiksel önermelere ikna olurken ve matematiksel iddialarını savunurken ürettikleri argümanlarda genellikle dedüktif gerekçeler kullandıklarını belirtmişlerdir. İspata karşı olumsuz tutum içinde olan öğretmen adaylarının da ürettikleri argümanlarda çoğunlukla tümevarımsal gerekçeler kullandıklarını dile getirmişlerdir. İspata karşı olumlu ya da olumsuz tam bir tutum geliştiremeyen Bilge, bu yapısını matematiksel önermelere ikna olmak ve iddialarını savunmak için ürettiği argümanlarda kullandığı gerekçelere yönelik görüşlerine yansıtmıştır. Bilge ürettiği argümanlarda birden çok tipte gerekçe kullanacağını dile getirmiştir. Çalışmanın bu bulguları, ispata yönelik görüşlerin matematiksel önermelere ikna olmak ve iddialarını savunmak için üretilen argümanların yapısını etkileyebileceği ile ilgili ipucu vermiştir. Öğretmen adaylarının argümanları tanımları anlamak, ispat yapmak ve problem çözmek için kullanabileceği düşünüldüğünde (Dinçer, 2011), ispata yönelik görüşlerin bu tarz aktivitelerdeki tekrarlama ya da başarı durumunu etkileyebileceği düşünülmüştür. Bu durumda öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin olumlu olması adına ispat ağırlıklı derslere önem verilmeli, ispatın anlamı, önemi, yararı, matematik ve matematik eğitimindeki rolü açıklanmalıdır. Bu sayede, öğretmen adaylarına ispatın matematiğin ruhu olduğu (Schoenfeld, 2009) ve özünün ispatlarda yattığı (Ross, 1998) hissettirilebilir.

5.2. Öğretmen Adaylarının Analizin Temel Konularındaki Kavramları Anlamalarına Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki (fonksiyonlar, diziler, limit ve süreklilik, türev) tanımları anlama şekillerinin kavramsal anlama, hatalı anlama, sembolik anlama ve kavram karmaşası olmak üzere dört kategori altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Söz konusu tanımları matematiksel gerçeklerle uyumlu, sembollerin altında yatan anlamaların farkında olarak kendi cümleleri ile açıklayabilen öğretmen adaylarının anlayışları kavramsal anlama olarak değerlendirilmiştir. Akademik başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin çoğunlukla kavramsal anlayışa sahip oldukları belirlenmiştir.

Sembolik anlamaya sahip öğretmen adayları kendilerine sunulan formel tanımı kendi cümleleri ile açıklayamayan, tanımı kendisine sunulan bir şekilde tekrarlamaya çalışan ve tanımda bulunan ifadelerin altında yatan anlamların farkında olmayan öğretmen adaylarıdır. Tanımlara yönelik kavramsal olmayan anlayışların yarısından fazlasının sembolik anlamalar olduğu ortaya çıkmıştır. Çalışmada sembolik anlayışa sahip öğretmen adayları olarak Barış ve Belma dikkati çekmiştir. Barış ve Belma'nın analizin temel kavramlarının çoğunluğunda sembolik anlamaya sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Buna göre Belma ve Barış'ın analizin temel tanımlarının çoğuna yönelik kavramsal bilgiye sahip olmadıkları ve ezber odaklı bir anlayışa sahip oldukları söylenebilir.

Kavramsal olmayan anlayışların bir kısmı da kavram karmaşası kategorisi altında değerlendirilmiştir. Kavram karmaşası kategorisinde değerlendirilen öğretmen adayları söz konusu tanımı kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışmış fakat yaptıkları tanımlamalar tarif edilmek istenen tanımdan uzaklaşarak başka kavramların tanımlarını işaret etmiştir. Kavram karmaşası yaşayan öğretmen adaylarından Bilge dikkati çekmiştir. Bilge mülakatların çoğunda bu yönde açıklamalarda bulunmuştur.

Kavramsal anlayışa sahip olmayan öğretmen adaylarında son sırada görülen anlayış şeklinin hatalı anlama olduğu görülmüştür. Hatalı anlamaya sahip öğretmen adayları kendilerine sunulan tanımı kendi cümleleri ile açıklamaya çalışsa da açıklamalarında matematiksel hatalar ya da eksiklikler mevcuttur.

Öğretmen adaylarının tanımları anlayış şekillerine yönelik yapılan bu genel değerlendirmeden sonra, kavramlara yönelik sahip oldukları güçlükler incelenmiş ve aşağıda bölümler halinde sunulmuştur.

5.2.1. Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki kavramları anlamalarına yönelik sonuç, tartışma ve öneriler

Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki kavramlara yönelik anlayışları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarına ilk olarak formel fonksiyon tanımı verilmiş ve bu tanımdan ne anladıklarını kendi cümleleri ile izah etmeleri istenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda altı öğretmen adayının (Aziz, Ahu, Aysun, Adem, Bilge, Barış) fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile matematiksel olarak doğru bir şekilde tanımlayabildikleri tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının fonksiyon tanımına yönelik anlamlarının kavramsal boyutta olduğu ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adaylarının kavram imajlarının fonksiyon tanımının özelliklerini barındırdığı tespit edilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının çoğunun fonksiyon tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin yeterli düzeyde olduğu söylenebilir. Buna karşın fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile ifade edemeyen, diğer kavramlar ile karıştıran öğretmen adayları da tespit edilmiştir. Buse fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile açıklamış fakat bu açıklamasının matematiksel olarak hatalı olduğu tespit edilmiştir. Buse'nin fonksiyon tanımına yönelik hatalı anlamasının olduğu ortaya çıkmıştır. Fonksiyon kavramına yönelik imajının tanım kümesindeki bir elemanın görüntü kümesinden bir eleman ile eşleşmesi şeklinde olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durumda Buse'nin kavram imajının fonksiyon tanımının özelliklerini tam olarak yansıtmadığı belirlenmiştir. Buse'nin sahip olduğu kavram imajı, Polat ve Şahiner (2007) tarafından tespit edilen fonksiyon tanımına yönelik kavram yanılgıları ile örtüşmektedir. Polat ve Şahiner (2007) fonksiyonlar konusunda öğrencilerde bulunan kavram yanılgılarından birinin, fonksiyonu "birebir eşlenen bağıntı" şeklinde görmeleri olduğunu tespit etmiştir.

Belma fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile izah etmeye çalışmıştır. Yaptığı fonksiyon tanımında fonksiyon, bağıntı, birebir fonksiyon ve örten fonksiyon tanımlarını birbiri ile karıştırdığı belirlenmiştir. Belma'nın fonksiyon tanımına yönelik kavram karmaşası yaşadığı ortaya çıkmıştır. Belma birebir ve örten bağıntının fonksiyon olduğunu belirtmiştir. Belma'nın fonksiyon kavramına yönelik imajının birebir ve örten bağıntı olduğu ortaya çıkmıştır. Belma'nın sahip olduğu kavram imajı fonksiyonun tanımı ile uyuşmamaktadır ve öğrencilerde görülen kavram yanılgılarından biridir. Polat ve Şahiner (2007) sınıf öğretmenliği bölümü öğrencilerinin kavram yanılgılarını tespit etmek amacıyla yaptığı çalışmanın önemli bir bulgusu olarak, öğrencilerin %40 oranında "bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için gerekli koşul birebir ve örten olmasıdır" cevabını verdikleri tespit edilmiştir. Kavram yanılgılarını azaltmaya yönelik yapılan öğretim sonucunda bu kavram yanılgısı %5 oranında devam etmiştir. Ayrıca bu sonuç, Vinner'in (1983) öğrencilerin bir kısmının fonksiyon kavramına yönelik kavram imajının örtenlik ve birebirlik olduğu yönündeki bulgularını desteklemektedir.

Öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımına yönelik anlamaları sorgulandığında, öğretmen adaylarının yarısının (Ahu, Aysun, Adem, Aziz) birebir fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile doğru bir şekilde açıklayabildikleri belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının birebir fonksiyon tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal düzeyde olduğu ortaya çıkmıştır. Barış ve Belma birebir fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile matematiksel olarak hatalı bir şekilde izah etmişlerdir. Buna göre bu öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımına yönelik hatalı anlamalarının mevcut olduğu söylenebilir. Barış ve Belma birebir fonksiyon tanımını "elemanlar eşit iken görüntüler de eşittir" şeklinde yaptıkları belirlenmiştir. Barış ve Belma'da görülen bu hatalı ifadenin onlarda bulunan bir kavram yanılgısı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adayları bu hatalı düşüncelerini savunmuş ve yapılan etkinliklerde sıklıkla kullanmışlardır. Buse ve Bilge birebir fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışmış fakat bu ifadelerin birebir fonksiyon tanımından daha çok fonksiyon tanımını çağrıştırdığı ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımına yönelik kavram karmaşası yaşadığı belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının yarsının birebir fonksiyon tanımına yönelik bilgileri kavramsal bilgi düzeyinde iken diğer yarısının ise bu düzeyde olmadığı tespit edilmiştir.

Öğretmen adaylarının tümünün örten fonksiyon tanımına yönelik kavramsal anlamaya sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının örten fonksiyon tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal bilgi düzeyinde olduğu söylenebilir.

Öğrencilerin örten fonksiyona yönelik sahip oldukları kavram imajı “fonksiyonun görüntü kümesinde açıkta eleman kalmaması” şeklindedir.

Çalışma sonucunda bazı öğretmen adaylarının fonksiyon tanımını anlamada güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Elde edilen bu sonuç öğrencilerin fonksiyon tanımını anlamakta güçlük yaşadıkları yönündeki çalışma sonuçları ile uyum içindedir (Abdullah, 2010; Hatısaru ve Erbaş, 2010). Öğretmen adaylarının bir kısmının birebir fonksiyon tanımına yönelik kavram yanılgılarının olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerde bulunan bu kavram yanılgısının giderilmesi için gerekli çalışmalar yapılmalıdır. Birebir fonksiyon tanımı üzerinde durulmalı, söz konusu kavram yanılgısı öğrencilerle tartışılmalı ve bu yanılgının mantıksal-matematiksel açıklaması öğrencilere yapılmalıdır.

Bazı öğretmen adayları da fonksiyon tanımı ile birebir fonksiyon tanımını birbiri ile karıştırmış, birbiri yerine kullanmışlardır. Elde edilen bu sonuca daha önce yapılan çalışmalarda da değinilmiştir (Bayazıt, 2013; Polat ve Şahiner, 2007; Vinner, 1983). Öğretim sırasında öğrencilerin sahip oldukları bu güçlükler dikkate alınarak öğretim yapılmalıdır. Söz konusu kavramların birbirinden farkları üzerine sınıf ortamında tartışmalar yapılabilir. Öğrencilerin bu tanımları kavramsal boyutta öğrenip öğrenmediği sorgulanmalıdır. Çünkü öğretilen kavramlar ne kadar temel ya da basit olursa olsun, bazen öğretildiği düşünülen kavram ile öğrencilerin gerçekten öğrendiği kavram arasında büyük bir uçurum olabilmektedir (Tall ve Bakar, 1992).

5.2.2. Öğretmen adaylarının diziler konusundaki kavramları anlamalarına yönelik sonuç, tartışma ve öneriler

Öğretmen adaylarının diziler konusundaki tanımları anlayış şekilleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu bölümde öğretmen adaylarının yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarını anlayışları üzerine elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Öğretmen adaylarının yarısının (Aziz, Aysun, Ahu, Adem) yakınsak dizi tanımını kendi cümleleri ile doğru bir şekilde ifade ettikleri belirlenmiştir. Buna göre, bu öğretmen adaylarının yakınsak dizi tanımına yönelik anlamalarının kavramsal olduğu ortaya çıkmıştır. Barış ve Belma yakınsak dizi tanımını kendi cümleleri ile ifade edemeyerek kendilerine sunulan tanımdaki ifadeleri tekrarlamışlardır. Bu öğretmen adaylarının yakınsak dizi tanımına yönelik anlamalarının sembolik olduğu söylenebilir. Buse ise yakınsak dizi tanımını kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışsa da başarılı olamamıştır. Buse'nin yakınsak dizi tanımına yönelik hatalı anlamaya sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Bilge'nin yakınsak dizi tanımını kendi cümleleri ile ifade ederken birden çok farklı kavrama yönelik ifadeler üretmiştir. Bilge yakınsak dizi kavramını sürekli fonksiyon ve Cauchy dizisi kavramları ile karıştırdığı ya da aradaki ayrımın farkında olmadığı ortaya çıkmıştır. Buna göre, Bilge'nin kavram karmaşası yaşadığı söylenebilir.

Öğretmen adaylarının Cauchy dizisi tanımına yönelik anlamalarının yakınsak dizi tanımına yönelik anlamaları ile benzerlik gösterdiği tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal bilgi düzeyinde olduğu, diğer öğretmen adaylarının bilgilerinin ise bu düzeyde olmadığı belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının, yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarına yönelik kavramsal bilgilerini sorgularken ve bu kavramlara ilişkin yapılan etkinliklerde birçok güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Bu güçlükler aşağıda sıralanmıştır.

Öğretmen adaylarının yarısının yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımında bulunan n_0 teriminin tanımlardaki işlevi hakkında bilgi sahibi olmadıkları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının bu güçlüğü, onların bu tanımlara yönelik kavramsal bilgi düzeyinde olup olmadığının bir belirleyicisi olmuştur. Tanımlara yönelik kavramsal anlamaya sahip olan öğretmen adayları, bu terimin işlevi hakkında doğru bilgilere sahip iken diğer öğretmen adaylarının yeterli bilgiye sahip olmadıkları ortaya çıkmıştır. Yakınsak dizinin tanımına yönelik kavramsal anlamaya sahip olmayan öğretmen adayları, bu terimin tanımdaki rolünü belirtmek yerine onun nasıl bulunacağına yönelik işlemsel bilgiler vermeye çalışmışlardır. Elde edilen bu sonuçlar, Mamona-Downs (2001) tarafından yapılan çalışmanın sonuçları ile benzerlik göstermiştir. Mamona-Downs (2001), öğrencilerin çoğunun yakınsak dizinin tanımını anlamada zorluk yaşadıklarını ifade etmiştir. Tanımda bulunan ve bazı pozitif tamsayıları temsil eden n_0 kesme noktasının işlevini anlamakta güçlük yaşandığını ifade etmiştir. Ona göre, öğrencilerin bu terimi anlamada huzursuz olmasının iki sebebi vardır. Birincisi, bu terimin yakınsak dizi tanımında yer alan eşitsizlik gibi ilk anda odaklanılan ana özellik olmamasıdır. İkincisi ise, bu terimin daha çok nasıl bulunacağının araştırılmasıdır. Öğrencilerin matematik geçmişleri algoritmik temellere dayandığı için bu terimin tanımdaki rolünü belirlemede başarısız olmuşlardır (Mamona-Downs, 2001).

Öğretmen adaylarının bir kısmının tanımlarda bulunan topolojik ifadeler ve matematiksel notasyonlar hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları ve anlamlandıramadıkları belirlenmiştir. Yakınsak dizi kavramı ile sürekli fonksiyon kavramını birbiri ile karıştırmışlardır. Fonksiyonların limitini bulmak için yapılan işlemleri dizilerin yakınsak olup olmadığını tespit etmek için kullanmışlardır. Örneğin, bazı öğretmen adayları bir dizinin yakınsak olduğunu tespit edebilmek için limiti özel noktalarda aramışlar ve dizinin limitini bulmak için sağ ve sol limitleri incelediklerini ifade etmişlerdir. Ayrıca öğretmen adayları dizi ile seri kavramını birbiri ile karıştırmışlardır. Yakınsak dizi için yapılan incelemelerde serilerin yakınsaklığını belirlemek için kullanılan kriterlerden yararlanmaya çalışmışlardır.

Bazı öğretmen adayları Cauchy dizisi tanımında bulunan ve dizinin iki farklı terimini temsil eden s_n ve s_m terimlerinin iki farklı dizi olduğunu düşünmüşlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının diziler konusunda birçok güçlük yaşadıkları söylenebilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar, öğrencilerin analiz derslerinde yakınsak dizi tanımını anlamakta güçlük yaşadıkları çalışma sonuçlarını desteklemiştir (Doruk ve Kaplan, 2015a; Roh, 2008; Tall ve Vinner, 1981). Roh (2008) çalışmasında öğrencilerin yakınsak dizi kavramına yönelik kavram imajlarının, yakınsak dizi tanımını öğrenmeleri üzerinde etkili olduğunu belirtmiştir. Bu anlamda yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarının öğretimi sırasında öğrencilerin doğru kavram imajlarına sahip olmaları adına gerekli çalışmalar yapılmalıdır. Bu çalışmalardan ilk akla gelen yöntem öğretim sırasında görselleştirmeden yararlanılmasıdır. Her ne kadar ileri matematik derslerinde görselleştirme ile öğrenmenin yararlı olmadığını düşünen araştırmacılar olsa da (Alcock ve Simpson, 2004), reel analizin öğreniminde olumlu katkılar sağlayacağını düşünen araştırmacılar da mevcuttur (Pinto ve Tall, 2002). Öğrencilerin bu kavramalara yönelik doğru kavram imajlarına sahip olmaları adına en azından, kavramların tanıtımı sırasında yardımcı bir araç olarak görsellikten yararlanılabilir. Ayrıca, bu güçlüklerin üstesinden gelebilmek için diziler konusunun öğretimi sırasında dizilerin ne olduğu, yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımında bulunan ifadelerin ve sembollerin ne anlama geldiği, yakınsak dizi ile bir noktadaki fonksiyonun limiti kavramları arasındaki farklar vurgulanmalıdır. Weber (2004) yaptığı çalışmada, üniversite matematik lisans derslerinde yakınsak dizi kavramının öğretiminde çoğunlukla öğrencileri ezber yapmaya sevk eden formel ve prosedürel bir öğretim yaklaşımının sergilendiğini ifade etmiştir. Bu derslerin öğretiminden sorumlu öğretim elemanlarına öğretim yöntemlerini gözden geçirerek öğretmen adaylarının en azından bu kavramların ne olduğuna yönelik kavramsal anlamalarını geliştirecek uygulamalar yapmaları önerilebilir.

5.2.3. Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularındaki kavramları anlamalarına yönelik sonuç, tartışma ve öneriler

Bu bölümde öğretmen adaylarının limit kavramının formel tanımına yönelik anlayışlarına ve sürekli fonksiyon algılarına yönelik yapılan incelemenin sonuçları sunulmuştur.

Dört öğretmen adayının (Aysun, Aziz, Ahu, Adem) limit tanımını kendi cümleleri ile ve doğru bir şekilde ifade edebildikleri tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının tanıma yönelik anlamalarının kavramsal boyutta olduğu ortaya çıkmıştır. Buse, Belma ve Barış limit tanımını kendi cümleleri ile ifade edememiştir. Bu öğretmen adayları kendilerine sunulan limit tanımındaki ifadeleri tekrarlamışlardır. Öğretmen adaylarının limit tanımına yönelik sembolik bir anlamaya sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Bilge ise limit tanımını kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışmış fakat limit tanımının belirttiği düşünceyi yansıtmayan, daha çok düzgün süreklilik kavramını anımsatan ifadeler kullanmıştır. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının limit tanımına yönelik kavramsal anlamaya sahip iken diğer öğretmen adaylarının ise kavramsal anlamaya sahip olmadıkları tespit edilmiştir.

Öğretmen adaylarının limit tanımını kendi cümleleri ile ifade edememelerinin nedenin ise limit tanımında bulunan topolojik ifadelerin anlamlandırılamaması olduğu tespit edilmiştir. Tanımı kendi cümleleri ile doğru bir şekilde ifade edebilen öğretmen adayları bu ifadelerin ne anlama geldiği konusunda bilgi sahibi iken diğer öğretmen adaylarının bu ifadelerin anlamına yönelik doğru bir anlayışta olmadıkları tespit edilmiştir. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar Williams (1991) ve Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas vd. (1996) tarafından yapılan çalışmalar ile paralellik göstermektedir. Williams (1991) öğrencilerin çoğunun limitin formel tanımı ile ilişkili bir görüş benimseyemediklerini ifade etmiştir. Cottrill vd. (1996) çalışmalarındaki çok az sayıda öğrencinin limitin formel tanımını anlayabildiklerini ve öğrencilerin hiçbirinin özel durumlarda limit tanımını uygulayamadıklarını tespit etmişlerdir. Yapılan araştırmalar öğrenciler arasında limit kavramının tam olarak anlaşılmasının oldukça güç olduğunu ortaya çıkarmıştır (Tall ve Vinner, 1981; Williams, 1991).

Öğrencilerin limit tanımına yönelik kavramsal bilgiler elde etme adına hiç şüphesiz dersin öğretiminden sorumlu öğretim elamanlarına büyük iş düşmektedir. Öğretmen adaylarının limit tanımı hakkında kavramsal düzeyde bilgilere sahip olabilmeleri için öğretim sırasında öğrencilerin algılamakta güçlük çektikleri noktalar üzerinde durulması yararlı olacaktır. Bezuidenhout (2001) da analiz dersinin öğretiminden sorumlu olan öğretim elemanlarının öğrenci anlayışlarının kaynağı ve muhtemel kavram yanılgılarının farkında olmasını önermiştir. Ayrıca öğrencilerin sınavlarda değerlendirilmesinde işlemsel becerinin gerekli olduğu problemlerin yanında, limit tanımına yönelik kavramsal bilgi gerektiren soruların da sorulması önerilebilir. Bu sayede, öğrencilerin limitin formel tanımı üzerine yoğunlaşmaları ve anlamak için gayret göstermeleri sağlanabilir. Öğrencilere derslerde ve sınavlarda sorulan sorular kavramsal bilgiye ihtiyaç duyulmadan çözülebildiği için öğrenciler, limit kavramının kavramsal yapısından çok limitin kolay, pratik uygulama modellerini tercih etmektedirler (Williams, 1991). Öğretmen adaylarının sürekliliğin formel tanımına yönelik anlayış şekillerinin limitin tanımına yönelik anlayışları ile birebir örtüştüğü ortaya çıkmıştır.

Öğretmen adaylarının sürekli fonksiyon kavramına yönelik zihinlerindeki imajlarını ortaya çıkarmak için “Sürekli bir fonksiyon denince aklınıza ne geliyor?” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının sürekli fonksiyon imajları hakkında genel bir değerlendirme yapıldığında, çoğunun reel değişkenli ve reel değerli sürekli fonksiyonlara yönelik zihinlerinde doğru kavram imajları oluşturdukları tespit edilmiştir. Cevapları sorgulandığında beş öğretmen adayının (Adem, Aziz, Ahu, Buse, Bilge) sürekli fonksiyon kavramına şekilsel olarak yaklaştıkları belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları sürekli bir fonksiyonun grafiğinde kopukluk olmaması gerektiğini ifade etmişlerdir. Dört öğretmen adayının (Ahu, Aysun, Barış, Belma) ise sürekli fonksiyon kavramına işlemsel olarak yaklaştıkları tespit edilmiştir. Bu öğretmen adayları fonksiyonun bir noktada sürekli olması için o noktada tanımlı, limitli ve limitinin görüntüsü olması gerektiğini belirtmişlerdir. Bilge sürekli fonksiyona ilişkin şekilsel algısını devam ettirerek sürekli fonksiyonun grafiğinde sıçramanın olmaması gerektiğini ifade etmiştir. Aysun'un sürekli fonksiyona yönelik diğer imajı, fonksiyonun grafiğinde diklik olmamasıdır. Aysun türevlenebilen fonksiyonlara ilişkin bir bilgi sunmuştur. Buna göre Aysun'un sürekli fonksiyonlar ile türevlenebilen fonksiyonlar arasındaki ilişkiye yönelik bilgilerinde bir eksikliğin olduğu söylenebilir. Aysun'un bu görüşü, Bezuidenhout (2001) tarafından öne sürülen görüşleri desteklemiştir. Bezuidenhout (2001) öğrencilerin limit tanımında yaşadıkları güçlüklerin sebeplerinden birinin limit tanımının analizin önemli kavramları olan süreklilik, türev, integral gibi kavramlar ile arasındaki ilişkiye yönelik uygun olmayan ve zayıf zihinsel bağlantılar olabileceğini ifade etmiştir.

5.2.4. Öğretmen adaylarının türev kavramını anlamalarına yönelik sonuç, tartışma ve öneriler

Bu bölümde öğretmen adaylarının türev tanımı anlamalarına ve türevlenebilen fonksiyon kavramı ile ilgili algılarını ortaya çıkarmaya yönelik yapılan analizlerden elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Öğretmen adaylarına türev tanımı formel olarak sunulmuş ve bu tanımdan ne anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda beş öğretmen adayının (Barış, Belma, Bilge, Buse, Aysun) türev tanımını kendi cümleleri ile ifade edemedikleri ve kendilerine sunulan tanımdaki ifadeleri tekrarladıkları tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik anlamalarının sembolik olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Adem, Aziz ve Ahu'nun türev tanımını kendi cümleleri ile doğru bir şekilde ifade edebildikleri belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik anlamalarının kavramsal düzeyde olduğu ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik kavram imajlarının "fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limiti" şeklinde olduğu ortaya çıkmıştır. Çalışmanın bu sonucu, Bingölbali ve Monaghan'ın (2008) çalışmalarındaki matematik bölümü öğrencilerinin kavram imajları ile uyumludur. Ayrıca, öğrencilerin bu türev anlayışı, Hartter'ın (1995) belirlediği türev anlama düzeylerinin en üst düzeyi olan üçüncü düzey anlamaya karşılık gelmektedir. Öğretmen adaylarının çoğunun türev tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal bilgi düzeyinde olmadığı söylenebilir. Bu durumda türev tanımının altında yatan sezgisel düşüncenin öğrencilerin çoğu tarafından bilinmediğini söylemek mümkündür. Çalışmadan elde edilen bu sonuç türev kavramının öğrencilerin anlamakta ve anlamlandırmakta zorlandıkları bir kavram olduğu görüşlerini desteklemektedir (Bingölbali, 2008; Habre ve Abboud, 2006).

Öğrencilerin türev tanımına yönelik kavramsal anlamaya sahip olamamalarının sebepleri arasında öğrencilerin türevin formel tanımını önemsememeleri olduğu düşünülmektedir. Yapılan araştırmalarda öğrencilerin birçok problemi formel tanıma gereksinim duymadan çözebileceklerini düşündükleri ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin bu yaklaşımı onların türev tanımını önemsememelerine ve kavramsal bilgiye sahip olamamalarına yol açmıştır. Örneğin Habre ve Abboud (2006) çalışmalarında öğrencilerin yarısından azının türevin formel tanımını ifade edebildiklerini, çok azının ise türevin tanımına yönelik kavramsal bilgi gerektiren basit bir problemi çözebildiklerini belirtmiştir. Bu anlamda matematik öğretmeni yetiştiren kurumlardaki ilgili derslerde türev tanımının altında yatan düşünceler vurgulanmalıdır. Derslerde türev tanımına yönelik kavramsal bilgiler gerektiren problemlere yer verilmesi ve değerlendirmede kullanılması önerilebilir.

Öğretmen adaylarının türevlenebilen fonksiyon kavramına yönelik zihinlerinde oluşturdukları imajı ortaya çıkarabilmek için “Türevlenebilen fonksiyon denince aklınıza ne geliyor?” sorusu sorulmuştur. Alınan cevaplar analiz edildiğinde beş öğretmen adayı (Ahu, Aziz, Adem, Barış, Belma) türevlenebilen fonksiyon denince fonksiyonun sürekli olmasını algıladıklarını belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarının yarısı (Buse, Belma, Bilge, Aysun) türevlenebilen fonksiyon denildiğinde türev alma işlemi ile ilgili özelliklerin zihinlerinde canlandığını belirtmişlerdir. Adem, Ahu ve Barış türevlenebilen fonksiyon denilince eğimi algıladıklarını belirtmişlerdir. Barış ve Ahu türevlenebilen fonksiyonun grafiğinde sivrilik olmaması gerektiğini ifade etmişlerdir. Barış sağ türevin sol türeve eşit olmasını algılarken Ahu türevlenebilen fonksiyondan anlık hız ve değişimi algıladığını dile getirmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunluğunun türevlenebilen fonksiyondan süreklilik ve türev alma işlemini algıladıkları ortaya çıkmıştır. Sadece Adem, Barış ve Ahu’nun türev kavramının altında yatan eğim, sivrilik, sağ ve sol türev, anlık hız ve değişim özelliklerine yönelik görüş bildirdikleri ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin türevlenebilen fonksiyona yönelik bu algıları Scher'in (1993) öğrencilerin türevle ilgili çoklu temsillerinin grafiksel, sembolik ve tablo şeklinde olabileceği görüşünü desteklemektedir (Akt., Hartter, 1995).

Öğretmen adaylarının türevlenebilen fonksiyon imajlarının daha çok işlemsel ve şekilsel temellere dayandığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının türevlenebilen fonksiyona işlemsel anlamlar yüklemelerinin sebebi, türevi bulmak için mekanik metotları kullanmaları (Habre ve Abboud, 2006) ve algoritmik temellere dayanan matematik geçmişleri (Mamona-Downs, 2001) olabilir. Öğretmen adayları şekilsel olarak türevlenebilen fonksiyona doğru bir imaj olan sivrilik imajının yanı sıra süreklilik gibi kavram yanılgısına da müsait bir imaj geliştirmişlerdir. Bu imajın "sürekli her fonksiyon türevlidir" şeklinde yanlış bir bilginin sahiplenilmesi potansiyeli vardır. Türevlenebilen fonksiyona yönelik süreklilik imajına sahip öğretmen adaylarından Barış ve Belma'nın bu yanlış bilgiye sahip oldukları tespit edilmiştir. Buna göre ilgili matematik derslerinin öğretimi sırasında türev ile süreklilik arasındaki ilişkiler üzerinde durulması önerilebilir.

5.3. Öğretmen Adaylarının Analizin Temel Konularındaki Argümantasyon Süreçlerine Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu bölümde öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri kapsamında matematiksel bir önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına nasıl ikna oldukları ve doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını nasıl savundukları incelenerek elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Öğretmen adaylarına ilk olarak matematiksel önermelerin doğruluğunu değerlendirme becerilerini ortaya çıkarabilmek için dördü doğru, dördü yanlış olmak üzere toplam sekiz önerme sunulmuştur. Öğretmen adaylarından önermelerin doğru ya da yanlış olduklarına karar vermeleri istenmiştir. Böylelikle öğretmen adaylarının önermelerin doğruluğunu belirlerken kendilerini nasıl ikna ettikleri ortaya çıkarılmak istenmiştir. Önermelerin doğruluğu için verilen kararlar incelendiğinde, önermelerin doğru olup olmadığını belirleme başarılarının istenen seviyede olmasa da ortalamanın üzerinde olduğu tespit edilmiştir (%70). Öğretmen adaylarının doğru ve yanlış önermeleri seçme becerileri ayrı ayrı incelendiğinde ilginç bir durum ile karşılaşılmıştır.

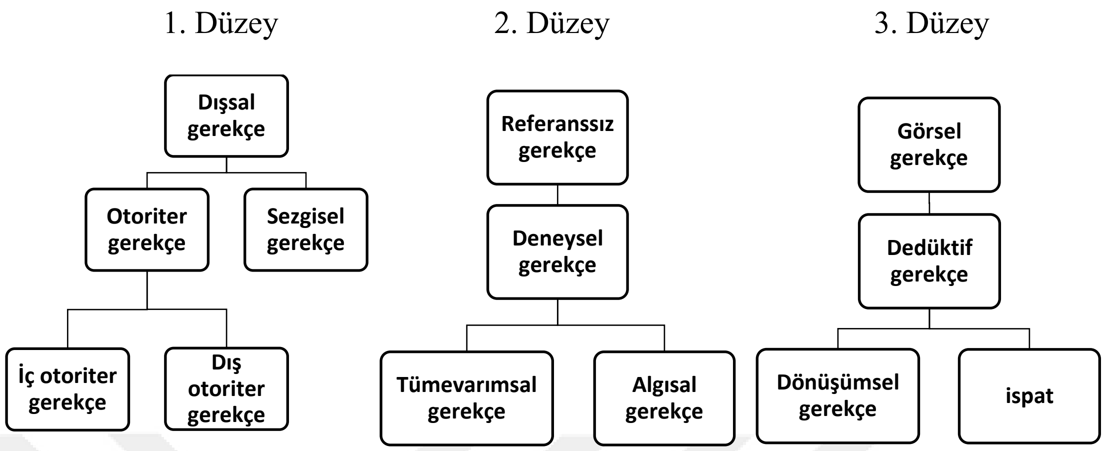
Öğretmen adaylarının doğru önermeleri seçme becerilerinin oldukça yüksek olduğu tespit edilmesine rağmen (%94) yanlış önermeleri seçme becerilerinin düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır (%46). Buna göre öğretmen adaylarının yanlış önermeleri seçme becerilerinin doğru olanları seçmeye oranla daha düşük olduğu ortaya çıkmıştır.

Sadece Aziz tüm önermelerin doğruluk değerlerini belirleyebilmiştir. Diğer öğretmen adaylarının yanlış önermeleri belirleme becerileri incelendiğinde Aziz'i bir yanlış ile Ahu takip etmiştir. Aysun, Adem ve Buse iki önermeyi doğru bir şekilde belirleyerek yanlış önermelerin belirlenmesinde ortalama bir başarı gösterirken Barış ve Bilge birer önermenin yanlış olduğunu belirleyerek oldukça düşük bir başarı göstermişlerdir. Belma ise hiçbir yanlış önermeyi seçemeyerek başarısız olmuştur. Buna göre Aziz ve Ahu'nun önermelerin doğruluğunu belirlemede başarılı bir performans sergiledikleri, diğer öğretmen adaylarının başarı oranının düşük olduğu ve yanlış önermeleri seçmede güçlük yaşadıkları söylenebilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç öğretmen adaylarının yanlış önermeleri belirleme becerilerinin düşük olduğu araştırma sonuçları ile örtüşmektedir (Goetting, 1995; Ko, 2010; Ko ve Knuth, 2009; Riley, 2003). Ko (2010) doktora tez çalışmasında lisans matematik öğrencilerinden ikisi yanlış, dördü doğru olan altı önermenin doğruluğunu değerlendirmelerini istemiştir. Öğrencilerin yanlış önermeleri belirleme oranı yaklaşık %15 iken doğru önermeleri belirleyebilme oranının yaklaşık %93 olduğu ortaya çıkmıştır. Goetting 40 lisans öğrencisinin yarısına yakınının sayılar teorisi alanında sorulan yanlış önermeyi doğru olarak kabul ettiklerini ifade etmiştir. Öğrencilerin doğru önermeleri belirleme becerilerinin ise yüksek olduğu tespit edilmiştir. Benzer şekilde Riley (2003) 23 matematik öğretmeni adayının %56'sının geometrideki yanlış önermenin doğru olduğuna inandıklarını belirtmiştir. Ko ve Knuth (2009) da benzer sonuçlara ulaşmıştır. Lisans matematik öğrencilerine sürekli fonksiyon konusundaki iki yanlış önerme sunulmuştur. İlk önerme için 36 öğrenciden 14'ünün, ikinci önerme için ise altı öğrencinin önermenin doğru olduğunu düşündükleri belirlenmiştir. Genel olarak öğrencilerin yaklaşık %27'sinin bu önermelerin doğru olduğunu belirttiklerini ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarının doğru önermeleri seçmede başarılı iken yanlış önermeleri seçmede başarısız olmalarının sebebinin üniversite matematik derslerinin öğretim yöntemi olduğu düşünülmüştür. Çünkü lisans matematik derslerinde genellikle doğru önermeler irdelenmekte ve sınavlarda doğru önermelerin gösterilmesi istenmektedir (Buchbinder ve Zaslavsky, 2007). Dolayısıyla öğrenciler yanlış önermelerle genellikle karşılaşmamakta ve onları sorgulayamamaktadırlar. Bu durumun bir yansıması olarak muhtemelen, birçok öğrenci matematiksel önermeleri doğru olarak görmekte ve inanmaktadırlar (Smith, 2006). Ayrıca çalışmada elde edilen bu sonuçlar Whiteley'in (2009) görüşleri ile örtüşmüştür. Whiteley (2009), matematik lisans öğrencilerinin koşullu önermeleri değerlendirmede ve bir iddia için ters örnek üretmede zorluk yaşadıklarını ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarının doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını savunma becerilerini incelemek için her mülakatta bir tane olmak üzere toplam dört adet problem sorulmuştur. Problemlerde doğru olduğu ifade edilen bir iddia verilmiş ve öğretmen adaylarından bu iddianın doğruluğunu göstermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının iddialarını savunmak için ürettikleri argümanların az bir kısmı (%32) matematiksel olarak ikna edici bulunmuştur. Buna göre öğretmen adaylarının iddialarını matematiksel olarak mantıklı bir şekilde savunma becerilerinin oldukça düşük olduğu söylenebilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç Güler'in (2013) yaptığı çalışmadan elde ettiği sonuçlarla örtüşmektedir.

Öğretmen adaylarının matematiksel önermelerin doğruluğuna ikna olmak ve matematiksel iddialarını savunmak için ürettikleri argümanlar incelendiğinde, birbirinden farklı tipte argümanların üretildiği tespit edilmiştir. Bazı öğretmen adaylarının argüman yapılarına sıkı sıkıya bağlı kaldıkları ve ikna olma şekillerini etkilediği belirlenmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının ürettikleri argümanların yapılarını temsil eden gerekçe tipleri ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının üç düzeyde gerekçe tiplerine sahip oldukları tespit edilmiştir. Her düzey kendi içinde hiyerarşik olarak farklı gerekçe tiplerine ayrılmıştır. Aşağıda bu gerekçe tipleri sunulmuştur.



Şekil 5.1. Öğretmen adaylarının gerekçe tipleri

Birinci düzeydeki dışsal gerekçeye sahip öğretmen adayları dışarıdan gelen, doğruluğu sorgulanmayan ve genellikle doğru olmayan bilgileri ikna olmak için kullanırlar. Bu öğretmen adayları matematiksel bir ifadenin doğruluğu hakkında şüpheye düştüklerinde düşünce sürecine girmezler. Dışsal gerekçeler, otoriter gerekçe ve sezgisel gerekçe olarak iki gruba ayrılır. Sezgisel gerekçeye sahip öğretmen adayları ifadenin içeriğinden çok görünüşü ile ilgilenirler. Bu öğretmen adaylarının bir ifadenin doğruluğuna ikna olmaları için kulağa mantıklı gelmesi yeterlidir. Otoriter gerekçe tipine sahip öğretmen adayları bir ifadenin doğru olduğuna ikna olmak için düşünce sürecine girmezler. Daha önceden ve genellikle yanlış olan bilgilerine güvenirler. Bu öğretmen adaylarının en çok kullandıkları gerekçe, herhangi bir ifadenin doğruluğu ya da yanlışlığını bilmeleri, duymaları ya da görmeleridir. İç otoriteye sahip öğretmen adayları herhangi bir ifadenin doğru olup olmadığını sorgulamazlar, bildiklerini ifade ederler. Öğretmen adaylarının iç otoritelerine göre verdikleri kararlar çoğunlukla onları yanıltmıştır. Dış otoriter gerekçeye sahip öğretmen adayları bir ifadenin doğru olduğuna bu ifadenin daha önceden sınıfta arkadaşları, hocası tarafından söylendiği ya da ders kitabında gördüğü için ikna olurlar. Çalışmadan elde edilen birinci düzey gerekçe tipleri çoğunlukla Harel ve Sowder'ın (1998) dışsal ispat şemalarından otoriter ve ritüel ispat şemaları ile benzerlik göstermiş olup ilk defa gerekçe tipi olarak tespit edilmiştir. Bu düzeydeki öğretmen adayı olan Belma kendisine yöneltilen önermelerin doğruluğuna ikna olmak için çoğunlukla düşünce sürecine girmemiştir. Arkadaşlarından farklı olarak, önermenin doğru olup olmadığına düşünce sürecine girmeden birkaç saniye içinde karar vermiştir. Söz konusu önermeleri daha önce duyduğunu, gördüğünü ya da bildiğini iddia etmiştir. Bazı önermelerin doğruluğunu değerlendirirken önermenin kulağa mantıklı geldiği için doğru olabileceğini belirtmiştir.

İkinci düzey öğretmen adayları matematiksel ifadelere ikna olmak ve iddialarını savunmak için argüman üretmeye başlarlar. Verdikleri kararları bir gerekçeye dayandırmaya çalışırlar. Referanssız gerekçe tipine sahip öğretmen adayları matematiksel bir ifadeye ikna olmak ya da bu ifadeyi savunmak için çoğunlukla doğru olmayan bilgiler kullanırlar. Matematiksel olarak temeli olmayan bilgiler, kurallar ve işlem sonuçları işe koşulur. Bu gerekçe tipi Harel ve Sowder (1998) ve Ko ve Knuth (2009) tarafından belirtilen referanssız-sembolik ispat şeması ve ispatlama kategorisi ile benzerlik göstermektedir. Deneysel gerekçe tipine sahip öğretmen adayları matematiksel ifadelere ikna olurken ve onları savunurken bir veya birkaç durumu göz önüne alır ya da yetersiz zihinsel gösterimleri kullanırlar. Bu öğretmen adaylarından tümevarımsal gerekçe tipine sahip öğretmen adayları, matematiksel ifadelere birkaç durum veya örnek ile ikna olur ve savunurlar. Bu gerekçe tipi Inglis ve diğerlerinin (2007) Harel ve Sowder'dan (1998) uyarladığı tümevarımsal gerekçe tipi ve Pedemonte'nin (2007) belirttiği tümevarımsal argümantasyon yapısı ile birebir örtüşmektedir. Bu çalışmada öğretmen adayları genellemeye ulaşmak için genellikle tek, nadiren birkaç durumun iddialarını destekleyip desteklemediğini düşünerek ikna olmuşlardır. Bu bakımdan tümevarımsal gerekçe tipine sahip öğretmen adaylarının çoğunlukla sonuç örnek genellemesi yaptıklarını söylemek mümkündür. Tümevarımsal gerekçe tipindeki bu öğretmen adayları argümantasyon ve ispat aktivitelerinde başarılı olamamışlardır. Ortaya çıkan bu durum Pedemonte'nin (2007) görüşlerini desteklemiştir. Pedemonte (2007) çalışmasında iki tip genelleme olan sonuç örnek genellemesi (result pattern generalisation) ve süreç örnek genellemesine (process pattern generalisation) analizlerinde yer vermiştir. Sonuç örnek genellemesinin ortaya çıkan sonuçların düzenliliği üzerine, süreç örnek genellemesinin ise sürecin düzenliliği üzerine yoğunlaştığını ifade etmiştir. Öğrencilerin tümevarımsal ispat yapabilmeleri için süreç örnek genellemesini yapmalarının şart olduğunu ve sonuç örnek genellemesinin tümevarımsal ispat yapmanın önündeki güçlüklerden olduğunu ifade etmiştir. Bu çalışmada da sonuç örnek genellemesi yapmanın analiz alanındaki dedüktif ispat yapmanın önündeki engellerden biri olduğu açığa çıkmıştır. Algısal gerekçe tipine sahip öğretmen adayları iddialarına ikna olurken ve savunurken yetersiz zihinsel ya da bilişsel gösterimde bulunurlar. Bu öğretmen adayları iddialarını savunurken yeterli olmayan şekil, grafik gibi gösterimden yararlanır ya da kavram imajlarından gelen bilgileri kullanarak yetersiz gösterim yaparlar. Bu gruptaki öğretmen adaylarını referanssız gerekçe tipinden ayıran temel özellik, referanssız gerekçe tipindeki öğretmen adaylarının matematiksel olarak doğru olmayan gerekçeler kullanmalarına karşın algısal gerekçe tipindeki öğretmen adaylarının matematiksel olarak doğru sayılabilecek bilgiler kullanarak yeterli gösterimde bulunamamalarıdır. Algısal gerekçe tipi kısmen Inglis ve arkadaşlarının (2007) yapısal-sezgisel gerekçe tipi ile benzerlik göstermektedir. Yapısal-sezgisel gerekçe tipi terimi bir sonuca ikna olmak için görsel veya başka türden olan bazı zihinsel yapı üzerine deney ya da gözlem yapan biri için kullanılmaktadır. Sıklıkla fakat her zaman olmamakla birlikte, bu gerekçe tipinde yapılan muhakeme sezgisel tip olarak görülür (Inglis vd., 2007). Çalışmada tespit edilen algısal gerekçe tipini yapısal-sezgisel gerekçe tipinden ayıran taraf algısal gerekçe tipinde yapılan doğrulamanın yetersiz olmasıdır. Harel ve Sowder'a (1998) göre algısal ispat şemasına sahip öğrenci ikna olmak için gelişmemiş zihinsel imajlarını kullanır. Gelişmemiş zihinsel imajın en önemli özelliği nesneler üzerindeki dönüşümlerin ihmal edilmesi ya da dönüşümlerin sonuçlarının tam olarak ve doğru bir şekilde tahmin etmede başarısız olunmasıdır. Buna göre tespit edilen algısal gerekçe tipinin algısal ispat şeması ile örtüştüğü söylenebilir. Bu düzeyde bulunan en belirgin öğretmen adayı Barış'tır. Barış matematiksel önermelerin doğruluğuna ikna olabilmek için çoğunlukla önermelerin doğruluğunu özel örneklerle denemiştir. İddialarını savunurken de sıklıkla özel örnekler kullanmıştır.

Üçüncü düzeydeki öğretmen adaylarının akademik başarı düzeyi yüksek öğretmen adayları oldukları tespit edilmiştir. Bu düzeydeki öğretmen adayları olarak Aziz, Adem ve Ahu ön plana çıkmıştır. Öğretmen adaylarından bazıları iddialara ikna olurken ya da savunurken geçerli görsel gerekçeler (Şekil, grafik *vb.*) kullanarak matematiksel olarak doğru gösterim yaparlar. Görsel gerekçe tipini dedüktif gerekçeden ayıran durum gösterimde tanım, teorem, ispat gibi formel elemanların gerekçe olarak kullanılmaması, algısal gerekçeden ayıran taraf ise yeterli ve ikna edici bir gösterime ulaşılabilmesidir. Bu gerekçe tipi literatürde bulunmayan bir gerekçe tipi olmuştur. Çalışmada Aziz görsel argümanları yoğun bir şekilde olmasa da kullanmıştır. Çalışmadan elde edilen görsel gerekçe tipi Knipping'in (2008) yaptığı çalışmada elde edilen görsel argümantasyon durumunu kapsamaktadır. Görsel argümantasyonlarda şekilleri referans almak ön plandadır. Deneysel-görsel (empirical-visual) ve kavramsal-görsel (conceptual-visual) olmak üzere iki düzeydedir. Deneysel-görsel düzeydeki argümanlar özel bir grafik ve bu grafikteki belirgin ilişkiler ile ilgili olan argümanlardır. Matematiksel özellikler ve ilişkiler şekil ile bağlantılı olmak zorundadır ve sezgiler ile ulaşılabilen bilgi olarak tartışılır. Kavramsal-görsel düzeyde ise grafikler bir düşüncenin gösterimi olarak ele alınır (Knipping, 2008). Dedüktif gerekçeye sahip öğretmen adayları argümanlarında tanım, teorem ve aksiyomlar gibi formel matematiksel gerçekleri kullanır ya da bir ifadenin doğruluğuna veya yanlışlığına sadece ispat yaparak karar verirler. Dedüktif gerekçe; dönüşümsel gerekçe ve ispat olarak ikiye ayrılır. Dönüşümsel gerekçeye sahip olan öğretmen adayları önermelere ikna olmak ve iddialarını savunmak için tanım, teorem veya aksiyomları kullanırlar. Bu gerekçe tipine sahip öğretmen adayı olarak Ahu örnek verilebilir. İspat gerekçe tipine sahip öğretmen adayları ise dönüşümsel gerekçeye ek olarak matematiksel ifadenin doğru olduğuna sadece ispat yapılınca ikna olurlar. Bu gerekçe tipine sahip olan öğretmen adayı Adem'dir. Adem matematiksel ifadelerin doğruluğuna ya da yanlışlığına sadece ispat yaparak ikna olmaya çalışmıştır. Çalışmada elde edilen dedüktif gerekçe tipi Inglis vd. (2007) ve Pedemonte (2007) tarafından belirlenen dedüktif gerekçe tipi ile aynı özelliktedir. Dedüktif gerekçe, öne sürülen argümanın sonucu için formel matematiksel doğrulamaların gerekçe olarak kullanılmasıdır. Aksiyomlardan elde edilen çıkarımlar, cebirsel manipülasyonlar ya da ters örnek kullanımı dedüktif gerekçe olarak sınıflandırılmıştır (Inglis vd., 2007). Çalışmada ortaya çıkan, dedüktif gerekçe tipini ayrıntılı olarak betimleyen dönüşümsel ve ispat gerekçe tipi literatüre önemli bir yenilik getirmiştir. Bir öğretmen adayı sadece bir gerekçe tipinde olabilirken bazı öğretmen adaylarının birden fazla tipte olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durum öğrencilerin birden farklı ispat şemalarının özelliklerini gösterebileceği çalışma sonuçları ile uyuşmaktadır (Cusi ve Malara, 2007; Harel ve Sowder, 1998; Sarı vd., 2007).

Öğretmen adaylarının önermelerin doğruluğunu değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelendiğinde bu stratejilerin; örnek kullanma, ters örnek arama, kavramlar üzerinden muhakeme etme, tanımlar üzerinden muhakeme etme, ispat yapma, ispatı düşünme, sezgisel düşünme ve geçmiş bilgiye dayanarak karar verme olduğu ortaya çıkmıştır. Üç öğretmen adayı ise birden fazla strateji uygulamıştır. Ahu yanlış önermeyi incelerken ters örnek aramış, bulamayınca kavram algısını kullanarak önermenin doğru olduğuna ikna olmaya çalışmıştır. Adem önermenin doğru olduğuna ikna olmak için ispat yapmaya çalışmış, ispatı yapamayınca yine kavram algısını kullanarak önermenin doğru olduğuna ikna olmaya çalışmıştır. Önermelerin doğruluğunu değerlendirme becerisi en yüksek öğretmen adayı olan Aziz ise önermenin doğruluğuna ikna olmak için ispat yapmaya çalışmış, ispatını ilerletemeyince ters örnek arayarak doğru sonuca ulaşmıştır. Aziz'in bu durumu başarılı öğrencilerin önermelerin değerlendirilmesinde ispatlarda sıkışınca ters örnek arama yoluna gittikleri yönündeki araştırma sonuçlarını desteklemiştir (Weber, 2009). Önermelerin doğruluğunu belirleme becerisi yüksek olan bir diğer öğretmen adayı olan Adem ise önermelerin doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna olmak için ispat ya da ters örnek üretmeye çalışmıştır. Sadece bu şekilde önermenin doğru olup olmadığına ikna olabileceğini dile getirmiş ve bu yapısını çoğunlukla korumuştur. Adem'in bu stratejisi, başarılı öğrencilerin önermelere ikna olmak için ilk önce ispat yaptıkları şeklindeki araştırma sonucunu teyit etmektedir (Weber, 2009). Çalışmadan elde edilen stratejilerden bazıları daha önce yapılan çalışmalarda da ortaya çıkmıştır (Galbraith, 1981; Goetting, 1995; Ko, 2010). Goetting (1995) öğrencilerin bir kısmının kendilerine yöneltilen tanıdık olmayan önermelerin doğruluğunu değerlendirirken sayılarla deneme eğiliminde olduklarını ifade etmiştir. Galbraith (1981) çalışmasında, bazı öğrencilerin matematiksel bir önermenin doğruluğunu belirlerken en küçük ve en büyük sayıları deneyerek karar verdiklerini belirtmiştir. Ko (2010) öğrencilerin önermelerin doğruluğunu değerlendirirken kullandıkları stratejileri; örnek temelli muhakeme, karışık muhakeme, ilkel (naive) muhakeme ve sofistike muhakeme kategorilerinde incelemiştir. Örnek temelli muhakemede öğrenciler, önermeleri doğrulamak için sayılar ya da şekillere güvenirler. Karışık muhakemede öğrenciler hem ilgili yapıyı veya örüntüyü belirlemek için örnekleri kullanır hem de doğru tanım, teorem ve özellikleri manipüle ederek önermeyi ispatlayan ya da yanlışlayan örnekleri tespit etmeye çalışırlar. İlkel muhakemede öğrenciler önermeyi doğrulamak için sezgisel anlamalarından ya da geçmiş deneyimlerinden gelen kısmen doğru tanımları, özellikleri ve teoremleri kullanırlar.

Sofistike muhakemede ise öğrenciler önermeyi ispatlamak ya da yanlışlamak için doğru tanımları, özellikleri, teoremleri manipüle etmeye çalışırlar. Öğrencilerin genel olarak en çok karışık muhakemeyi daha sonra da sofistike muhakemeyi benimsediklerini ifade etmiştir. Özel olarak analiz alanındaki doğru önermeyi belirlemek için karışık muhakemenin, yanlış önermeyi belirlemek için ise sofistike muhakemenin daha çok kullanıldığını belirtmiştir. Bu çalışmada da Ko'nun (2010) muhakeme şekillerine alternatif olarak analiz alanındaki önermelere ikna olmak için sezgisel, otoriter, tümevarımsal, algısal ve dönüşümsel gerekçe tipleri ortaya çıkmıştır.

Öğretmen adaylarının önermelerin doğruluğu ya da yanlışlığına ikna olmak için ürettikleri argümanların yapıları incelendiğinde, en çok (%45) dedüktif gerekçeler kullandıkları tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının önermelere ikna olmak için tanımları, kavramları ve ispatları sıklıkla kullandıkları anlaşılmıştır. Ayrıca, öğretmen adaylarının önermeler için ürettikleri argümanların %32'sinin dışsal gerekçeler içerdiği belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının matematiksel önermelere ikna olmak için azımsanmayacak kısmının argümanlar üretmek için düşünce sürecine girmedikleri söylenebilir. Diğer yandan, öğretmen adaylarının önermelere ikna olmak için kullandıkları stratejilerin %17'sinin tümevarımsal gerekçeler içermesi, bir önermenin doğru olduğuna ikna olmak için özel örnekler ile önermenin doğruluğunu denedikleri sonucunu ortaya koymaktadır. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar çoğu öğrencinin matematiksel önermelere ikna olurken dedüktif muhakemelere başvurdukları, bazı öğrencilerin de ikna olmak için deneysel delillere güvendikleri yönündeki araştırma sonucunu desteklemektedir (Goetting, 1995).

Öğretmen adaylarının doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını savunurken (problem çözümlerinde) kullandıkları argümanların gerekçeleri incelendiğinde, çoğunlukla dönüşümsel, referanssız, algısal, tümevarımsal, görsel ve otoriter şeklinde tek tipte gerekçeler oldukları anlaşılmaktadır. Bu gerekçelerin yanında öğretmen adaylarının dönüşümsel-görsel, dönüşümsel-algısal, görsel-algısal, dönüşümsel-referanssız, dönüşümsel-tümevarımsal ve tümevarımsal-referanssız şeklinde çoklu gerekçeler de kullandıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının iddialarını savunmak için ürettikleri argümanlarda çoklu gerekçe tiplerinde olması Sarı ve diğerlerinin (2007) çalışmasında belirttiği bir öğretmen adayının birden çok ispat şemasına sahip olabileceği şeklindeki araştırma sonucu ile uyumludur. Öğretmen adaylarının en çok referanssız gerekçe (%25) ve dönüşümsel gerekçe (%18) tipinde oldukları tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının ürettikleri argümanların dörtte birinde matematiksel olarak yanlış bilgiler ve işlemler kullandıkları söylenebilir. Bu durumda öğretmen adaylarının analizin temel konularında matematiksel bilgilerinde eksiklikler olduğu söylenebilir. Öğretmen adayları özellikle, öğrendikleri teoremleri yanlış yorumlamış ve uygulamışlardır. Bu bakımdan ilgili dersin işlenişinden sorumlu öğretim elemanlarının teoremlerin ispatlarının öğretimi sırasında teoremin neden doğru olduğuna yönelik çaba içine girmeleri ve önermenin tersinin doğru olup olmadığı hakkında tartışma sürecine girilmesi önerilebilir. Öğretmen adayları matematiksel iddialarını savunurken genellikle kavram imajları ile hareket etmişlerdir. Bu bakımdan öğrencilerin söz konusu kavramlara yönelik doğru kavram imajı geliştirmeleri önemsenmelidir. Ayrıca iddialarını tanımlar yardımıyla savunmayı tercih eden öğretmen adaylarından bazılarının tanımları doğru bir şekilde uygulayamayarak ikna edici bir çözüme ulaşamadıkları belirlenmiştir. Bundan dolayı öğrencilerin tanımları uygulayabilmesi adına çalışmalar yapılabilir. Öğretmen adaylarının bu eksiklerinin giderilmesi adına gerekli öğretimlerin ilgili kurumlarda yapılması önerilebilir.

Öğretmen adaylarından doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını savunmada en başarılı olanları Adem ve Aziz'dir. Bu öğretmen adayları matematiksel iddialarının hepsini ikna edici bir şekilde savunabilmişlerdir. Adem ve Aziz matematiksel iddialarını savunmak için tanımları kullanmışlardır. Adem ve Aziz'in ürettikleri argümanlarda dönüşümsel gerekçeleri çoğunlukla kullandıkları tespit edilmiştir. Aziz ise iki problem çözümünde dönüşümsel-görsel gerekçe tipinde argümanlar üreterek ikna edici çözümlere ulaşmıştır. Aysun iki problemin çözümünde dönüşümsel argümanlar geliştirerek ikna edici çözümler üretmiştir. Buna göre Aysun'un matematiksel iddialarını savunma becerisinin ortalama düzeyde olduğu söylenebilir. Ahu ise sadece bir problemin çözümü için dönüşümsel argüman üreterek ikna edici çözüme ulaşmıştır. Bu durumda Ahu'nun matematiksel iddialarını savunma becerilerinin oldukça düşük olduğu söylenebilir. Matematiksel iddiaları savunma becerisi yüksek olan öğretmen adaylarının çoğunlukla dönüşümsel argümanlar, başarısız olan öğretmen adaylarının ise referanssız gerekçeler ürettikleri tespit edilmiştir.

Öğretmen adaylarının matematiksel önermelerin doğruluğuna ikna olmak için ürettikleri argümanların yapısı ile matematiksel iddialarını savunurken ürettikleri argümanlar arasında yapısal benzerliklerin olduğu görülmüştür. Matematiksel önermelerin doğruluğuna ikna olmak için dedüktif tarzda argümanlar üreten ve başarılı olan öğretmen adayları benzer şekilde matematiksel iddialarını savunurken de genellikle dedüktif argümanlar üretmişler ve başarılı olmuşlardır. Matematiksel önermelerin doğruluğunu belirlemek için dönüşümsel olmayan dışsal ve tümevarımsal gerekçeler üreterek başarısız olan öğretmen adayları iddialarını savunurken de dönüşümsel olmayan referanssız ve tümevarımsal gerekçeler kullanmışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının ikna olmak için ürettikleri argüman yapılarını, iddialarını savunurken kullandıkları argüman yapılarına transfer ettikleri ortaya çıkmıştır. Bir başka deyişle, öğretmen adaylarının ikna olduğu şekilde iddialarını savunma eğiliminde oldukları söylenebilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının ürettikleri argümanlar Toulmin modeline göre analiz edilmiştir. Toulmin modeli ile yapılan analizlerde, öğretmen adaylarının argümanlarında kavramları yanlış anlamaları ve kavram yanılgıları tespit edilmiştir. Bu durum, argümanlar ve matematiksel ispatların analizinde kullanılan Toulmin modelinin öğrencilerin yanlış anlamaları ve kavram yanılgılarını tespit etmede de kullanışlı bir araç olduğunu göstermiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ürettikleri argümanlarda destek ve çürüten bileşeni sıklıkla kullanılırken niteleyen bileşenin ise tercih edilmediği ortaya çıkmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, Dinçer (2011) tarafından yapılan çalışma ile uyumludur. Öğretmen adaylarının ürettikleri argümanlar incelendiğinde üretilen genel argümanların yanında birçok alt argümanların da üretildiği belirlenmiştir. Tespit edilen bu argümanların Knipping'in (2008) belirttiği lokal ve global argüman tanımlarıyla örtüşmektedir.

5.4. Öğretmen Adaylarının Analizin Temel Konularındaki İspat Süreçlerine Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu bölümde öğretmen adaylarının ispat süreçlerine yönelik elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat süreçleri kapsamında, ispat değerlendirme ve ispat/ters örnek üretme becerileri incelenmiştir. Aşağıda öğretmen adaylarının ispat değerlendirme süreçlerine yönelik elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

5.4.1 Öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki ispat değerlendirme süreçlerine yönelik sonuç, tartışma ve öneriler

Öğretmen adaylarının ispat değerlendirme becerilerini ortaya çıkarmak amacıyla yedi farklı argümanı değerlendirmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarına üç farklı teoremin doğrudan, çelişki bulma ve olmayana ergi yöntemleri ile yapılmış geçerli ispatları sunulmuştur. Bir teoremin ispatında ise önemli bir kilit ifade değiştirilerek geçersiz bir ispat yapılmıştır. Çalışmada bir adet ters örnek yardımıyla yapılan ispat sunulmuştur. Bir teoremin ispatı için tümevarımsal argüman sunulmuştur. Son olarak yanlış bir önermenin doğruluğu için dedüktif tarzda bir argüman üretilmiştir.

Öğretmen adaylarının geçerli ispatları ve geçersiz ispatı değerlendirme becerileri incelendiğinde, öğretmen adaylarının doğrudan, çelişki bulma ve olmayana ergi ispatlama yöntemleri ile yapılmış geçerli ispatları çoğunlukla belirleyebildikleri tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının geçerli ispatları belirleyebildikleri ortaya çıkmıştır. Hiçbir öğretmen adayının geçersiz ispatı belirleyemediği görülmüştür. Öğretmen adaylarından sadece ikisi (Adem ve Aysun) yanlış bir önerme için üretilen dedüktif argümanın doğru bir ispat olmadığını belirleyebilmişlerdir. Buna göre, öğretmen adaylarının geçersiz ispatları belirleyemedikleri ve başarısız oldukları tespit edilmiştir. Bu durumda öğretmen adaylarının geçerli ispatları belirlemede başarılı iken geçersiz ispatları belirlemede başarısız oldukları söylenebilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, üniversite öğrencilerinin geçerli ispatları belirleme becerileri yüksek iken geçersiz ispatları belirleme becerilerinin düşük olduğu çalışmalarla benzerlik göstermektedir (Alcock ve Weber, 2005; Doruk ve Kaplan, 2013; Goetting, 1995; Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989; Segal, 2000; Uygan vd., 2014).

Öğretmen adaylarının çeşitli ispatlama yöntemleriyle yapılmış ispatları değerlendirmeleri incelendiğinde, bazı katılımcıların özellikle çelişki bulma ve olmayana ergi ispatlama yöntemi ile yapılmış ispatların yöntemlerini belirleyemedikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlama yöntemleri ile ilgili bilgileri sorgulandığında, bazılarının bu iki ispatlama yöntemini açıklayamadıkları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adayları olmayana ergi ve çelişki bulma yöntemlerini birbiri ile karıştırmış ya da açıklayamamışlardır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, üniversite öğrencilerinin ispat yaparken uygun ispatlama yöntemini seçmede güçlük yaşadıkları araştırmalarla paralellik göstermektedir (Doruk ve Kaplan, 2014; Güler, 2013; Moore, 1994; Selden ve Selden, 2003). Riley (2003) de bu sonucu destekler nitelikte bir sonuca ulaşmıştır. Çalışmasında öğretmen adaylarının %57'sinin doğrudan ispatlama yöntemi barındıran geçerli bir ispat yapabildiklerini ortaya koymuştur. Dolaylı ispatlama yöntemi ile yapılan ispatları yapma oranının ise sadece %39 olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlama yöntemlerine yönelik tespit edilen bu güçlüklerin giderilmesi adına gerekli çalışmalar yapılmalıdır. İlköğretim matematik öğretmenliği bölümü programında ispatın ve ispatlama yöntemlerinin tanıtıldığı Soyut Matematik dersinde ispatlama yöntemleri üzerinde önemle durulmalıdır. Özellikle öğretmen adaylarının olmayana ergi ve çelişki bulma yöntemlerini ayırt etmede sıkıntı çektikleri dikkate alınarak bu iki yöntem arasındaki temel farklılıklar vurgulanmalıdır.

Öğretmen adaylarının geçersiz ispatlara nasıl yaklaştıklarını belirlemek için öğretmen adaylarına kilit ifadesi değiştirilerek yapılmış geçersiz bir ispat sunulmuştur. Söz konusu ifade teoremin hipotezinden elde edilen verileri düzenleyerek teoremin hükmüne ulaşmak için yapılacak işlemlere zemin hazırlamaktadır. Bu ifadenin işlevinin farkında olmak, ispatın ilgili olduğu tanımlara yönelik kavramsal bilgiyi yorumlama ve kullanabilmeyi gerektirmektedir. Öğretmen adaylarının çoğu bu ifadeye dikkat etmemiştir. İspatı genellikle sonuç odaklı olarak değerlendirmişlerdir. Alcock ve Weber (2005) benzer bir çalışma yürütmüşlerdir. Çalışmalarında öğrencilere sonuç satırı doğru fakat diğer satırları uygun bir şekilde ilerlemeyen geçersiz bir ispat sunulmuştur. Öğrencilerin çoğunun ispatın geçersiz olduğunu belirleyemediklerini ortaya koymuşlardır. Öğrencilerin ispatları değerlendirirken her satırın doğru olup olmadığını kontrol etmenin yanında bir satırın bir önceki ve sonraki satırla ile olan bağlantısını kontrol etmenin gerekli olduğunu ifade etmişlerdir. Yani ispatın satırları arasındaki bağlantıyı sağlayan argümanların gerekçelerinin sorgulanmasını tavsiye etmişlerdir. Doruk ve Kaplan (2013b) yaptıkları çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat değerlendirmede başarısız olduklarını tespit etmişlerdir. İspat değerlendirmede başarısız olmalarının sebebinin öğrencilerin ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmemeleri ve ispatları öğrenmek için düşünce sürecine girmek yerine sadece ispatları ezberlemeleri olduğunu belirtmişlerdir. Raman (2003) ispatların içerisinde anahtar düşüncelerin olduğunu, matematikçilerin kendi çalışmalarında bu anahtar düşüncelere önem verirken öğretim sırasında anahtar fikirlere gerekli vurguyu yapmadıklarını ve değerlendirmede de kullanmadıklarını ifade etmiştir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmedikleri tespit edilmiştir. İspat ağırlıklı derslerin öğretiminden sorumlu öğretim elemanlarının ispatlardaki bu anahtar düşüncelere vurgu yapmaları önerilmektedir.

Öğretmen adaylarının ters örnek ile yapılan ispata yönelik yaptıkları değerlendirmeler incelendiğinde, öğretmen adaylarının çoğunun ters örnekle yapılan ispatı geçerli bir ispat olarak değerlendirdikleri anlaşılmaktadır. İki öğretmen adayı ise bu ispatın doğru bir ispat şekli olmadığını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adayları ispatta öne sürülen ters örneğin söz konusu önermeyi çürütmek için yeterli olmadığını ya da bu önermenin yanlış olduğunu göstermek için daha fazla ters örnek verilmesi gerektiğini dile getirmişlerdir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç öğrencilerin bir kısmının, bir önerme için üretilen doğru ters örneği önermenin istisnası olarak gördükleri ve önermenin hala doğru olduğunu düşündükleri çalışmaları desteklemektedir (Williams, 1979). Benzer şekilde Galbraith (1981), öğrencilerin tek bir ters örneğin, yanlış olan önermeyi çürütmek için yeterli olduğunu bilmediklerini ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının ters örneklerin yeri ve önemi hakkında yeterli bilgiye sahip olmaları adına gerekli çalışmalar yapılmalıdır. Çünkü ters örnekler varsayımların yeniden düzenlenmesini sağlar ve muhakemenin gelişmesine yardımcı olurlar (Whiteley, 2009). Bir matematiksel ispat tüm durumlar için önermenin doğruluğunu gösterirken (Stylianides ve Stylianides, 2009), bir ters örnek mevcut önermenin yanlış olduğunu gösterir (Akkaş vd., 1998; Irmak, 2008; Peled ve Zaslavsky, 1997). Zaslavsky ve Ron (1998) ters örneklerin diğer örneklerden daha güçlü bir konuma sahip olduğunu belirtmiş, tek bir ters örneğin genel sonuçları bozmak için yeterli iken destekleyici ve doğrulayıcı olarak sunulan birçok örneğin yeterli olmadığını ifade etmişlerdir.

Öğretmen adaylarının yarısı bir teorem için sunulan tümevarımsal argümanın geçerli bir ispat olduğunu belirtmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının bir özel örneğin gerekçe olarak kullanıldığı argümanı doğru bir ispat olarak algıladıkları söylenebilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, öğretmen adaylarının tümevarımsal argümanları doğru bir ispat olarak değerlendirdikleri çalışma sonuçlarını desteklemektedir (Gholamazad, Liljedahl ve Zazkis, 2004; Goetting, 1995; Knuth, 2002).

Öğretmen adaylarının çoğu yanlış bir önerme için üretilen dedüktif argümanın doğru bir ispat olduğunu belirtmişlerdir. Sadece iki öğretmen adayı önerme için üretilen argümanın yanlış bir ispat olduğunu belirleyebilmişlerdir. Öğretmen adaylarının bu kararları vermelerinde argümanın yapısının dedüktif tarzda olmasının daha çok ön planda tutulduğu düşünülmüştür. Öğretmen adaylarının çoğunun yanlış da olsa tanım, teorem ve aksiyomların kullanılarak yapılan ispatlara ikna olma eğiliminde oldukları ortaya çıkmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, öğrencilerin yanlış olsa bile dedüktif argümanlara ikna oldukları yönündeki çalışma sonuçları ile örtüşmektedir (Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002; Segal, 2000; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014). Segal (2000) çalışmasının sonucunda, öğrencilerin çoğunun dedüktif argümanı yanlış olsa bile geçerli ispat olduğunu belirttiklerini ifade etmiştir. Öğrencilerin dedüktif argümanları doğru olup olmamasına bakmaksızın geçerli kabul etme eğiliminde olduklarını ifade etmiştir. Martin ve Harel (1989) öğretmen adaylarının %38 ve %52'sinin sırasıyla tanıdık ve tanıdık olmayan önermeler için üretilen yanlış dedüktif argümanları matematiksel olarak doğru kabul ettiklerini belirtmiştir. Uygan ve diğerleri (2014) de çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoğunun yanlış dedüktif argümanı ispat olarak değerlendirdiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca tümevarımsal argümanların doğru bir ispat olduğunu iddia eden öğretmen adaylarının hepsinin dedüktif argümanlar kullanılarak yapılan ispatları da aynı anda ikna edici buldukları tespit edilmiştir. Bu durum Morris'in (2002) öğretmen adaylarının bazılarının hem dedüktif hem de tümevarımsal argümanları ikna edici bulduğu yönündeki çalışma sonucuyla da uyumludur.

Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelendiğinde, ispatların doğruluğunu değerlendirmek için üç kategori altında 15 farklı yaklaşım tarzının sergilendiği belirlenmiştir. Öğretmen adayları ispatları değerlendirirken genel olarak argüman incelemesi, yapısal inceleme ve otoriter inceleme stratejilerini takip etmişlerdir. Yapısal inceleme stratejisi kendi içerisinde yüzeysel inceleme ve ispatlama yöntemi olarak iki gruba ayrılmıştır. Öğretmen adaylarının sergiledikleri yaklaşımların çoğunun yapısal olduğu ortaya çıkmıştır (%58). Yapısal inceleme yüzeysel ve ispatlama yöntemi olarak iki grupta incelendiğinde, yüzeysel incelemenin %38 oranında, ispatlama yönteminin %20 oranında tercih edildiği belirlenmiştir. Yüzeysel incelemede öğretmen adayları, ispatın içeriğini incelemeden ispatta kullanılanları dikkate almışlardır. Bu öğretmen adayları ispatta tanımların, teoremin hipotezinin kullanılmasına ve teoremin hükmüne ulaşılmasına dikkat etmişlerdir. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar, üniversite öğrencilerinin çoğunun ispatları değerlendirirken yüzeysel bir inceleme yaptıklarını ortaya koyan çalışmalarla uyumludur (Alcock ve Weber, 2005; Doruk ve Kaplan, 2013b; Morris, 2002; Selden ve Selden, 2005). Selden ve Selden (2003) öğrencilerin ispatları değerlendirirken önermenin karşıtının ispatlanması ve ispatın içindeki temel matematiksel boşluklar gibi genel hataların yerine cebirsel ifadeler ve sembolik manipülasyonlar gibi yüzeysel hatalara odaklandıklarını ifade etmişlerdir. Doruk ve Kaplan (2013b) çalışmalarında öğrencilerin çoğunu ispatları değerlendirirken sonuç odaklı bir yaklaşım sergilediklerini tespit etmişlerdir. Öğretmen adaylarının kullandıkları stratejilerin bir kısmının ispatlama yöntemine ilişkin olduğu tespit edilmiştir (%20). Bu öğretmen adayları ispatta kullanılan ispatlama yöntemine ve argümanların yapısına dikkat etmişlerdir. Öğretmen adaylarının ispatlama yöntemine ilişkin bu stratejisi daha önce yapılan çalışmalarda da tespit edilen stratejilerden biridir (Knuth, 2002; Ko, 2010).

Öğretmen adaylarının bir kısmı ispatların içerisindeki lokal argümanları incelemişlerdir (%35). Argüman incelemesi yapan öğretmen adayları, ispatın basamakları arasındaki geçişlerin gerekçelerini anlamaya çalışmışlar ya da ispat basamaklarında işlemsel hatanın olup olmadığını göz önüne almışlardır. Öğretmen adaylarının nadiren, ispatlarda bulunan ve ispatın mantıksal bağlantılarını sağlayan kilit ifadelere odaklandıkları ortaya çıkmıştır. Alcock ve Weber (2005) yaptıkları çalışmada, bu çalışmada olduğu gibi, öğrencilerin ispatta bulunan argümanlardaki gerekçeleri kontrol etmede başarısız olduklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerin her satırın doğru olup olmadığını kontrol etmenin yanında, önceki satır ile sonraki satırın birbiri ile bağlantısını kontrol etmenin de gerekli olduğunu düşündükleri anlaşılmıştır.

Öğretmen adaylarının kullandıkları ispat değerlendirme stratejilerinin bir kısmı da (%7) ezber bilgilere yöneliktir. Bu stratejiyi kullanan öğretmen adayları daha önce bu ispatın yapılıp yapılmadığını hatırlamaya çalışmış ya da söz konusu ispat ile benzer olan başka bir ispatı değerlendirme yapmak için kullanmışlardır. Bazı çalışmalarda da öğretmen adaylarının ispatın yapısına dikkat ettikleri ve geçmiş bilgilerini hatırlamaya çalıştıkları yönünde sonuç bildirilmiştir (Ko, 2010; Selden ve Selden, 2003). Ayrıca öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken satır satır inceleme yaptıkları ortaya çıkmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç Ko’nun (2010) çalışmasıyla uyumludur. Diğer yandan öğretmen adaylarının ispatları değerlendirmek için 15 farklı yaklaşım sergilemeleri bu tarz etkinliklere yabancı olduğu için yeterli anlayışa sahip olmadıklarını düşündürmüştür. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, üniversite öğrencilerinin ispatları değerlendirmek için gerekli anlayıştan uzak oldukları yönündeki çalışma sonuçları ile uyumludur (Ko, 2010; Selden ve Selden, 2003).

Çalışma sonucunda, öğretmen adaylarının yanlış olan ispatları değerlendiremedikleri, ispatlama yöntemleri ve ters örnekler hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının bu tarz etkinlikler ile ilk defa karşılaştıkları düşünülmüştür. Çalışmaya katılan öğretmen adayları da bu şekilde görüş bildirmişlerdir. Buna göre ispat ağırlıklı derslerde bu tarz etkinliklerin yapılması, doğru ispat ile yanlış ispat arasındaki farkların vurgulanması ve öğretmen adaylarına bunların hissettirilmesi gerekmektedir. Ek olarak ispatlarda bulunması gereken özelliklere yönelik bilgiler de verilmelidir. Derslerde yanlış bir ispat sunarak ispatta nasıl bir yanlışlığın olduğu ile ilgili etkinlikler yapılabilir. Bu tarz etkinlikler öğrencilerin ispatlara yönelik bilgilerinin artmasına ve mevcut ön yargıların kırılmasına yardımcı olabilmesi açısından önemlidir.

5.4.2 Öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki ispat ve ters örnek üretme süreçlerine yönelik sonuç, tartışma ve öneriler

Öğretmen adaylarından kendilerine sunulan önermelerin doğruluğunu değerlendirmelerinin ardından verdikleri kararlara göre söz konusu önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermeleri istenmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının önermelerin doğruluğunu göstermek için ürettikleri ispatlar ile önermelerin yanlışlığını göstermek için ürettikleri ters örnekler incelenmiştir.

Öğretmen adayları dört doğru önerme için toplam 30 ispat üretmişlerdir. İki öğretmen adayı (Ahu, Adem) diziler konusunda ilk defa sahip oldukları gerekçe tipi olan dedüktif gerekçelerden ayrılarak otoriter gerekçeler kullanmış ve önermenin yanlış olduğunu ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının önermenin doğru olduğunu göstermek için ürettikleri ürünler incelendiğinde, sadece altı adet doğru ispat üretildiği ortaya çıkmıştır. Buna göre öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerinin oldukça düşük olduğu söylenebilir (%20). Bu sonuç öğretmen adaylarının ispat yapmada başarısız oldukları çalışma sonuçlarını desteklemektedir (Doruk ve Kaplan, 2015b; Ko ve Knuth, 2009; Moore, 1994; Riley, 2003; Selden ve Selden, 2003; Weber, 2001, 2009).

Doğru ispatları üreten öğretmen adayları incelendiğinde, Adem'in yaptığı ispatların hepsinin doğru olduğu, Aysun'un yaptığı ispatların yarısının doğru olduğu ve Aziz'in ürettiği ispatların sadece bir tanesinin doğru olduğu belirlenmiştir. Buna göre ispat yapma becerisi en yüksek öğretmen adayının Adem olduğu ortaya çıkmıştır. Aysun ise ortalama bir başarı sergilemiş, Aziz'in başarısının oldukça düşük olduğu görülmüştür. Üretilen iki ispat ise kısmen doğru olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının ürettikleri ispatların çoğunlukla geçersiz ispatlar olduğu tespit edilmiştir (%40). Geçersiz olarak değerlendirilen ispatların çoğunda kilit ifadelere dikkat edilmeyerek yanlışlıklar yapılmış ya da ispatın mantığını yansıtan fakat matematiksel gösterimden uzak ifadeler kullanılmıştır. Geçersiz olarak değerlendirilen bazı ispatların ise tanımların anlamlarını bilmeden kopyalama ya da tanımlardaki ifadeleri manipüle etmekten ibaret olduğu tespit edilmiştir. Bazı öğretmen adayları (Barış, Bilge, Buse) ise ispatlarını tamamlayamamışlardır. İspatlarında sadece tanımları ifade etmişler, önermenin hipotezini yazmış veya ispata başlayarak yarım bırakmışlardır.

Önermenin doğru olduğunu göstermek için üretilen ispatların önemli bir kısmının (%20) tümevarımsal argümanlar olduğu belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları ispatlarında özel örneklere yer vermişlerdir. Öğretmen adaylarından Barış, ispatların çoğunda tümevarımsal argümanlar üretirken Belma ise ispatlarının yarısında bu şekilde argümanlar üretmiştir. Buna göre özellikle Barış'ın Harel ve Sowder'ın (1998) belirttiği tümevarımsal ispat şemasında olduğu ortaya çıkmıştır. Tümevarımsal ispat şemasındaki bir öğrenci iddianın doğru olduğunu bir ya da birkaç örneğin sonuçlarını değerlendirerek karar verir ya da cebirsel bir ifadenin doğruluğunu birkaç özel sayıyı ifadede yerine yazarak elde edilen sonuçlara göre ikna olur (Harel ve Sowder, 1998). Coe ve Ruthven (1994) de çalışmalarına katılan öğrencilerin yaptıkları ispatları deneysel zayıf dedüktif ve güçlü dedüktif kategorilerinde incelemişlerdir. Yaptıkları incelemelerin sonucunda öğrencilerin çoğunluğunun ispatlarında deneysel argümanlar kullanırken çok azının dedüktif ispat yapabildiklerini tespit etmişlerdir.

Çalışmada öğretmen adaylarının önermelerin doğruluğunu göstermek için ürettikleri ispatların doğru ispat, kısmen doğru ispat, geçersiz ispat, açıklama, örnekle doğrulama, tanımları manipüle etme, tanımları kopyalama, tamamlanmamış ispat ve hipotezi yazma kategorileri altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Ko ve Knuth (2009) benzer bir çalışma yürütmüşlerdir. Ko ve Knuth (2009) çalışmalarında üniversite öğrencilerinin doğru önermeler için ürettikleri ispatların tamamlanmış, yapısal (geçerli ispat oluşturmak için geçerli tanım, teorem ve aksiyomların kullanıldığı fakat mantıksal hataların bulunduğu ispatlar), referanssız-sembolik (mantıksal hatalı, ispat oluşturmayan, anlamlarını bilmeden sembollerin manipüle edilmesi), deneysel, ters örnek ve yeniden ifade etme kategorileri altında toplandığını tespit etmişlerdir. Buna göre çalışmadan elde edilen kategorilerin Ko ve Knuth'un (2009) tespit ettiği kategoriler ile büyük oranda örtüştüğü söylenebilir. Literatürdeki mevcut kategoriye ek olarak açıklama kategorisi tespit edilmiştir. Bu kategorideki ispatlarda ispatın mantığı geçerli kavramsal bilgiler, şekiller ile ispata yansıtılmaktadır fakat yeterli matematiksel dil kullanılarak ispat oluşturulamamaktadır. Açıklama kategorisindeki ispatların Raman'ın (2003) belirttiği ve kişinin ispata kendisinin ikna olması ile ilgili olan özel argüman olduğu fakat matematiksel toplulukları ikna edecek genel bir argüman olmadığı söylenebilir. Çalışmada elde edilen kategorilerin Harel ve Sowder'ın (1998) ispatlama şemalarından referanssız-sembolik, tümevarımsal, algısal, dönüşümsel ispat şemaları ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Öğretmen adaylarına sunulan yanlış önermeler için yapılan değerlendirmeler incelendiğinde, verilen toplam kararların 15'inin önermenin yanlış olduğu yönünde iken 17 kararda ise önermenin doğru olduğunun belirtildiği tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarından verdikleri kararların doğruluğunu göstermeleri istendiğinde önermenin yanlış ve doğru olduğunu göstermek için ürünler üretildiği görülmüştür.

Önermenin yanlış olduğunu düşünen öğretmen adaylarının ürettikleri ürünlerin yarısından fazlasının (%60) geçerli ters örnekler olduğu tespit edilmiştir. Buna göre önermenin yanlış olduğunu düşünen öğretmen adaylarının ürettikleri ürünlerin yarısından fazlasının önermeyi çürütecek nitelikte olduğu söylenebilir. Ko ve Knuth (2009) da benzer sonuçlara ulaşmıştır. Bu çalışmada lisans matematik öğrencilerine sürekli fonksiyonlar ile ilgili iki yanlış önerme sunulmuştur. İlk önerme için 36 öğrenciden 14'ünün, ikinci önerme için ise altı öğrencinin önermenin doğru olduğunu düşündükleri belirlenmiştir. Öğrencilerin önermenin yanlış olduğunu göstermek için ürettikleri ters örneklerin sadece dokuzu ve yedisi yeterli ters örnek olarak değerlendirilmiştir. Riley (2003) de öğretmen adaylarının %44'ünün yanlış matematiksel önermeleri seçebilirken, sadece %39'u bu önermelere yönelik geçerli ters örnekler üretebildiklerini belirtmiştir. Whiteley (2009) ispat yapmadaki en yaygın yöntemin ispatın hiçbir ters örnek barındırmadığının gösterilmesi olduğunu ifade etmiştir. Bu tarz ters örneklerde bulunması gereken özellikleri düşünmeye yönelik zorlukların ters örnek üretme ve önemli ya da önemsiz özellikleri bilme yeteneklerine dayandığını belirtmiştir. Öğrencilerin sonuçları yanlışlayan örnekleri kullanmada rahat olmadıkları sürece bu muhakemelerin gelişme olasılığının çok az olduğunu vurgulamıştır. Bu bağlamda öğrencilerin ilgili derslerde ters örnekler üretebilecekleri öğrenme ortamlarının sağlanması önerilebilir.

Öğretmen adaylarının yanlış önermeye yönelik ürettikleri ürünlerin doğru ters örnek, yanlış ters örnek, ters örnek yok, ispatla yanlışlama, ispat kullanma, açıklama yapma, ispat ve örnekle doğrulama kategorileri altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarından Ahu ve Adem yanlış olduğunu düşündükleri önermeler için doğru ters örnekler üreterek ters örnek üretme becerisi en yüksek öğretmen adayları olmuşlardır. Aziz ise dört yanlış önerme için iki doğru ters örnek üreterek ortalama bir başarı yakalamıştır. Buna göre önermenin yanlış olduğunu düşünen öğretmen adaylarının çoğunlukla önermeler için ters örnekler üretebildikleri söylenebilir. İki öğretmen adayının (Aziz, Aysun) bir yanlış önerme için ürettikleri ters örneklerin yanlış örnekler olduğu belirlenmiştir. İki öğretmen adayı da (Aziz, Buse) önermenin yanlış olduğunu göstermek için önermenin ispatını yapmaya çalışmışlar ya da önerme ile ilgili farklı bir ispatı kullanmaya çalışmışlardır. Yanlış önermeler için üretilen ürünlerin çoğunun önermeleri doğrulamaya yönelik olduğu belirlenmiştir. Önermelerin doğru olduğunu düşünen öğretmen adaylarının çoğu (%65) ispat yapmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarının bazıları ilgili ispatları yaptıklarını iddia etmiş, bir kısmı ise ispatlarını tamamlayamamışlardır. Önermelerin doğru olduğunu düşünen diğer öğretmen adayları, özel örnekler kullanarak gösterim yapmışlardır. Bu öğretmen adaylarından Barış önermeleri doğrulamak için çoğunlukla özel örnekler kullanmıştır. Çalışmadan elde edilen kategoriler Ko ve Knuth'un (2009) çalışmalarından elde ettikleri kategorilerle benzerlik göstermiştir. Ko ve Knuth (2009) üniversite öğrencilerinin yanlış önerme için ürettikleri ürünlerin yeterli (doğru ters örnekler), tamamlanmamış (mantıksal hatalı, doğru ters örnekler), yetersiz (yanlış ters örnekler), doğrulama (yanlış önermeyi çürütmek için ters örnek vermek yerine açıklama yapma) ve ispat (yanlış önermenin doğru olduğunu ispatlamaya çalışma) kategorileri altında toplandığını tespit etmiştir. Çalışmada elde edilen doğru ters örnek, yanlış ters örnek, açıklama ve ispat kategorileri literatürde mevcut olan kategoriler ile örtüşmektedir. Ayrıca çalışmada literatüre ek olarak ispatla yanlışlama (önermenin yanlış olduğunu ispattaki çelişkiyi ifade ederek gösterme), ispat kullanma (önermenin yanlış olduğunu farklı bir teoremi ispatlayarak göstermeye çalışma) ve örnekle doğrulama kategorileri tespit edilmiştir. İspatla yanlışlama kategorisinde ürün veren tek öğretmen adayı Aziz olmuştur. Aziz önermenin doğru olduğunu varsayıp ispatına başlamış, ispatında bir çelişki tespit edince elde edilen bu çelişmeye dayanarak önermenin yanlış olduğunu gösterdiğini ifade etmiştir. Aziz'in yaptığını iddia ettiği yanlışlama literatürde bir önermenin yanlışlığını göstermek için aksine örnek bulma yöntemi ile birlikte yer alan çelişme bulma yöntemine benzemektedir. Çelişme bulma yönteminde bir önermenin yanlış mı yoksa doğru mu olduğu bilinmiyorsa, bu önerme doğru varsayılarak önermeden bazı sonuçlar elde edilir. Elde edilen sonuçlar bilinenlerle ya da birbiri ile çelişirse önermenin yanlış olduğu sonucuna varılır (Akkaş vd., 1998). Aziz de çelişme yönteminde olduğu gibi önermeyi doğru varsayarak ispatına başlamış çelişki bularak değil ispat yaparak önermenin yanlış olduğunu ifade etmiştir. Bu anlamda ilgili derslerde öğrencilerin çelişme bulma yöntemini kavrayabilmesi adına gerekli çalışmalar yapılabilir.

5.5. Öğretmen Adaylarının Analizin Temel Konularındaki Argümantasyon süreci ile İspat Süreci Arasındaki İlişkiye Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu bölümde öğretmen adaylarının doğru önermelere ikna olmak için girdikleri argümantasyon süreçleri ile bu önermelerin doğru olduğunu göstermek için girdikleri ispat süreçleri arasındaki ilişki yapısal olarak incelenerek elde edilen sonuçlar sunulmuştur. Öğretmen adaylarının önermenin doğru olduğuna ikna olmak için ürettikleri argümantasyon yapıları gerekçe tiplerine göre, önermenin doğru olduğunu göstermek için ürettikleri ispatların yapıları elde edilen gerekçe tipleri ile paralel olan ispat şemalarına göre değerlendirilmiştir. Yapılan değerlendirmeler sonucunda iki süreç yapısal olarak birbiri ile karşılaştırılmıştır.

Öğretmen adayları tarafından sergilenen 27 adet argümantasyondan ispata geçiş aktivitesi analiz edilmiştir. Analiz dışı bırakılan beş aktiviteden ikisinde öğretmen adaylarının önermenin yanlış olduğunu belirttikleri, üçünde ise ispatlarının ispat şemaları ortaya çıkarılamayacak şekilde yarım bırakıldığı belirlenmiştir. Geçiş aktivitelerinin yarısından fazlasında (%63) argümantasyon süreci ile ispat süreci arasında yapısal benzerlikler tespit edilmiştir. Yapısal benzerliklerin dedüktif argümantasyondan dedüktif ispat, tümevarımsal argümantasyondan tümevarımsal ispat, algısal argümantasyondan algısal ispat ve otoriter argümantasyondan otoriter ispat şeklinde olduğu tespit edilmiştir. Bu geçişlerin çoğunluğu ispatın gerçek yapısı ile uyumlu olan dedüktif argümantasyondan dedüktif ispata geçişlerdir. Öğretmen adaylarının argümantasyonları ile ispatları arasındaki bu yapısal ilişkiye yapısal süreklilik denilmektedir (Pedemonte, 2007). Önermeye ikna olmak için dedüktif argümanlar üreten ve onu dedüktif ispat şemasında ispatlamaya çalışan öğretmen adaylarının çoğunun ispat yapmada başarılı oldukları belirlenmiştir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasında yapısal bütünlük bulunan öğrencilerin ispat yapmada daha başarılı oldukları yönündeki çalışma sonuçlarını desteklemektedir (Pedemonte, 2007; Pedemonte ve Buchbinder, 2011). Argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasında yapısal benzerlikler bulunan diğer öğretmen adaylarının ise ispat yapmada başarılı olamadıkları belirlenmiştir. Bu tarz benzerlikleri Pedemonte (2007), “spontane süreklilik” olarak adlandırmıştır. Argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasında spontane süreklilik bulunan öğretmen adaylarının ispat üretmede başarısız olduklarını ifade etmiştir. Çalışmadan elde edilen bu sonucun Pedemonte’nin (2007) görüşlerini desteklediği ortaya çıkmıştır.

Öğretmen adaylarının bir kısmı da argümantasyon süreçlerinden ispat süreçlerine yapısal bir boşluk ile geçmişlerdir (%37). Argümantasyon yapılarını ispat yapılarına transfer etmemişlerdir. Argümantasyon süreci ile ispat süreci arasında yapısal boşluk bulunan hiçbir öğretmen adayı doğru ispatlar üretmede başarılı olamamıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arsındaki mevcut olan yapısal boşluğun, öğretmen adaylarının ispat yapmadaki bir güçlük olduğu gerçeği ile uyumludur (Martinez ve Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2007).

Analizin temel konularındaki ispatların dedüktif yapısı ile uyumlu olmayan bir şekilde argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasında spontane süreklilik bulunan öğretmen adayları ispat yapmada güçlük yaşarken dedüktif argümantasyon yapısını yaptıkları ispatın yapısına taşıyan öğretmen adaylarının çoğunun geçerli ispatlar üretebildikleri ortaya çıkmıştır. Buna göre, analizin temel konularındaki ispatların dedüktif yapısına uygun bir şekilde argümantasyon sürecine giren öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerinin yüksek olduğu söylenebilir. Başka bir deyişle, ispatlara başlamadan önce dedüktif tarzda başarılı bir argümantasyon süreci geçiren öğretmen adaylarının ispatlarda genellikle başarılı oldukları ortaya çıkmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, ispat yapmadan önce girilen varsayım oluşturma sürecinin ispat yapmayı kolaylaştırdığı şeklindeki çalışma sonuçları ile uyumludur (Garuti vd., 1998; Pedemonte, 2007, 2008; Pedemonte ve Buchbinder, 2011). Garuti vd., (1998) ispat yapmada başarılı olan tüm öğrencilerin ispatlanan önermenin akla mantığa uygun olduğunu göstermek için argümanlar ürettiklerini belirtmişlerdir. Önermenin doğruluğunu keşfetmek için geçirilen süreç ile önermenin ispatlama süreci arasındaki boşluk arttıkça ispatlama sürecindeki güçlüğün de artacağını belirtmişlerdir.

Çalışmada ispatlama sürecinden önce dedüktif argümantasyon üretmeyen öğretmen adaylarının ispat yapmada başarısız oldukları ortaya çıkmıştır. Buna karşın farklı alanlarda yapılan çalışmalarda, argümantasyon ve ispat süreci farklı yapıda olup ispatlarda başarılı olan öğrencilerin mevcut olduğu bilinmektedir (Martinez ve Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2008). Pedemonte (2008) cebir alanındaki dedüktif ispatlar yapılmadan önce abdüktif argümantasyon sürecine giren öğrencilerin ispatı yapabildiklerini ifade etmiştir. Martinez ve Pedemonte (2014) süreç örnek genellemesi ile yapılan tümevarımsal argümantasyon süreci sonunda öğrencilerin aritmetik alandaki dedüktif ispatları yapabildiklerini tespit etmişlerdir. Bu çalışmada analiz alanında sonuç örnek genellemesi ile yapılan tümevarımsal argümantasyon süreci sonucunda geçerli ispata ulaşılamamıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, farklı alanlarda olsa da Martinez ve Pedemonte (2014) tarafından yapılan çalışma sonucunu desteklemiştir.

Bu çalışmada Analiz alanında dedüktif argümantasyonlar sonucunda geçerli dedüktif ispatlara ulaşılabildiği ortaya çıkmıştır. Bu bakımdan öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki ispatlarda başarılı olabilmeleri için ispatlar öncesinde teoremlerin doğruluğuna ikna olma adına dedüktif tarzda argümanlar üretmelerinin yararlı olduğu söylenebilir. Analiz alanında yer alan ispatların çoğunlukla dedüktif yapıdaki ispatlar olduğu düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasında dedüktif sürekliliğin yakalanması önemsenmelidir. Boero (1999) da ispat yapmak için örneklerle yapılan muhakemenin, özel durumları dikkate almanın yeterli olmadığının açıkça görüldüğünü ve dedüktif olarak düzenlenmiş muhakemeler yoluyla ispatların yapılabileceğini ifade etmiştir.

Çalışmada ispatlardan önce önermelerin doğru olup olmadığını tespit etmek için girişilen argümantasyon sürecinin ispat yapmada yararlı olduğu ortaya çıkmıştır. Diğer bir ifadeyle, ispat yapmadan önce geçirilen düşünce sürecinin önemli olduğu tespit edilmiştir. Buna göre ispat ağırlıklı derslerde teoremler ispatlanmadan önce, teoremin neden doğru olduğuna yönelik sınıf içi tartışmalar yapılarak öğrencilerin dedüktif argümanlar üretmeleri sağlanabilir. Derslerde ispatların öncesindeki argümantasyon süreci önemsenmelidir. İspatı yapılacak teoremin neden doğru olduğu ve ispatın nasıl yapılabileceği tartışılmalıdır. Bu bağlamda derslerdeki ispat aktivitelerinin "ispatlayınız" şeklinde verilmesinin yerine problem olarak verilmesinin yararlı olacağı düşünülmektedir. Garuti vd. (1998) "ispatlayınız" tarzı etkinliklerde varsayım üretme sürecine girilmediğini ve bu durumun argümantasyon ile ispat arasındaki bütünlüğü bozduğunu ifade etmiştir. Bu bütünlüğün belki de önermelerin doğruluğunu keşfetme sürecinin yeniden oluşturulmasıyla sağlanabileceğini belirtmişlerdir. Diğer bir deyişle, keşfetme, bir varsayım oluşturma, keşfe geri dönme ve onu bir ispat içinde düzenleme içeren tüm döngünün yeniden inşa edilmesini önermişlerdir.

Matematikçiler matematiksel bilgileri oluştururken sezgi, deneme, yanılma, tahmin, varsayım, ispat zincirini takip etmektedirler (Almeida, 2003). Buradan matematikçilerin ispatlama sürecinde argümantasyon sürecine girdikleri söylenebilir. Matematikçilerin izledikleri yöntem, argümantasyon sürecini içermesine rağmen özellikle üniversite seviyesindeki matematik derslerinin öğretimi sırasında bu zincirin sadece son basamağına odaklanıldığı belirtilmiştir (Almeida, 2000). Almeida (2003) matematikçilerin takip ettiği bu zincirin ispat öğretiminde de yer alması gerektiğini ifade etmiş ve böylelikle öğrencilerin ispatların gerekliliğini keşfetme fırsatının olacağını dile getirmiştir. Bu düşüncelerine ek olarak Almeida (2003), üniversite seviyesindeki matematik derslerinin işlenişinin "teorem-ispat-örnekler" şeklinde olduğunu ifade etmiştir. Bu sıranın takip edilmesi yerine teoremin doğruluğunu gösteren iyi seçilmiş örnekler ile “örnekler-teorem-ispat” ya da “örnekler-ispat-teorem” akışının takip edilmesini önermiştir (Almeida, 2003). Thurston (1994) “tanım-teorem-ispat” modelinin en büyük dezavantajının soruların kaynağının açıklanmaması olduğunu ifade etmiştir. Bu modele varsayımda bulunma, soruların ortaya çıkması, mantıklı tahminler yapma ve doğru olduğu düşünülen şey ile ilgili heuristik argümanlar üretme aşamalarını içeren varsayım oluşturma sürecinin ek bileşen olarak eklenebileceğini vurgulamıştır.

Benzer şekilde Baykul (2014), aksiyomlar ve teoremler halinde verilmiş olan matematikteki prensiplerin öğrenciler tarafından ilk defa bulunuyormuşçasına görülmesi ve sezilmesinin, matematik öğretiminde matematiğin yapısı yönünden göz önüne alınacak önemli hususlar arasında yer aldığını belirtmiştir. Eğer bu zihinsel süreçler yaşanmaz, ispat öğretimi ders hocasının yaptığı ispatların kopyalanması şeklinde olursa (Alcock ve Weber, 2005; Selden ve Selden, 1995), öğrenciler kendilerine yöneltilen matematiksel iddiaları sorgulamadan kabul eder ve otoriter bir öğrenme alışkanlığının kapıları açılır. Öğretimden kaynaklı bu zorlukların üstesinden gelebilmek için birçok araştırmacı, ispatların öğretiminin sadece sunum odaklı olduğunu belirterek, eğitimcilere ispatları doğrudan kendileri yapmak yerine öğrencilere düşünme ve tartışma fırsatı verilmesini önermektedir (Balacheff, 1999; Pedemonte, 2008). Özellikle Balacheff (1999) öğretmenin üretilen şeyin mantıklılığının ve epistemolojik geçerliğinin garantörü konumunda olduğunu belirterek bu durumu eleştirmiştir. Bu şekildeki bir eğitim anlayışının öğrencilerin doğruluk ve ispat sorunsalını tartışmalarını engellediğini ifade etmiştir. İspat öğreniminin önündeki engelleri aşmak için öğrencilere ürettikleri şeylerin matematiksel sorumluluğunu üstlenecekleri durumların araştırılmasını önermektedir. Yapılacak böyle bir yetkilendirmenin derslerdeki problemlerin çözümündeki karar alma sürecinde öğretmenin rolünün zayıflaması, öğrencilerin kendi ispatlama metotlarını geliştirebilmeleri adına çaba harcanması anlamına geleceğini belirtmiştir.

5.6. Öğretmen Adaylarının Akademik Başarıları, İspata Yönelik Görüşleri, Analizin Temel Konularındaki Kavramsal Bilgileri, Argümantasyon ve İspat Süreçleri Arasındaki İlişkilere Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler.

Bu bölümde çalışmanın bölümlerinden elde edilen sonuçlar bütüncül bir şekilde ele alınarak birbiri ile karşılaştırılmaya çalışılmıştır. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının elde ettikleri akademik başarılar ile analizin temel tanımlarını anlayış şekilleri ve ispata yönelik görüşleri genellikle paralellik göstermiştir. Başarılı öğretmen adayları olan Ahu, Aysun, Aziz ve Adem'in analizin temel konularında çoğunlukla kavramsal anlamaya sahip oldukları ve ispata karşı olumlu duygular besledikleri tespit edilmiştir. Orta düzeyde akademik başarıya sahip öğretmen adayları olan Barış, Bilge, Buse ve Belma'nın analizin temel konularına yönelik kavramsal anlamaya sahip olmadıkları, söz konusu kavramlara yönelik genellikle hatalı, sembolik anlamaya sahip oldukları veya kavram karmaşası yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adaylarından Bilge'nin ispata yönelik hem olumlu hem de olumsuz görüşlere sahip olduğu, diğer öğretmen adaylarının ise olumsuz görüşlere sahip oldukları belirlenmiştir.

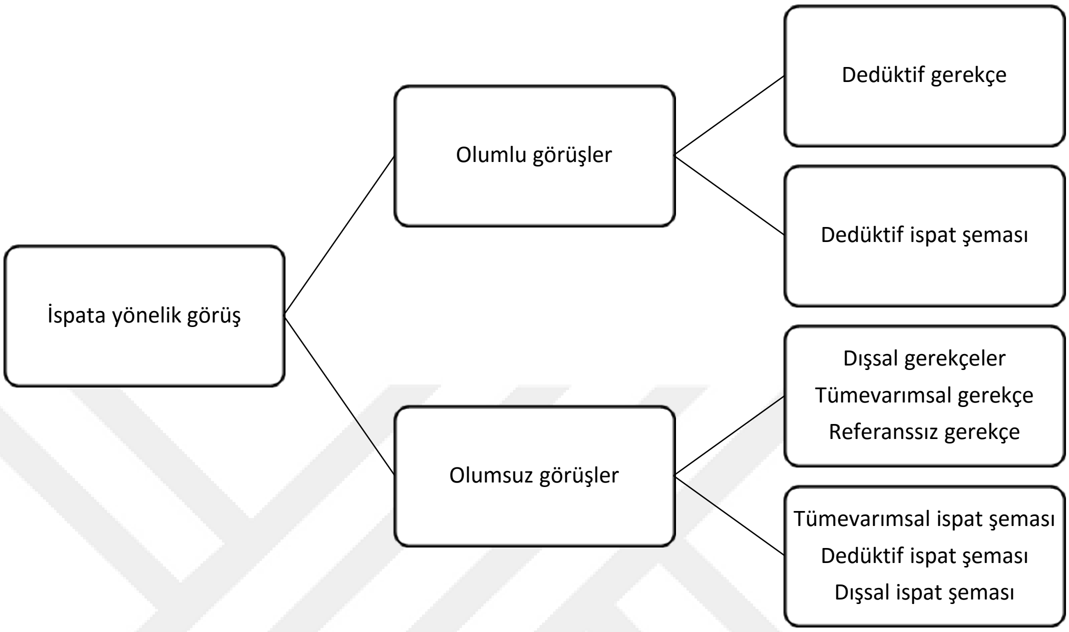
İspata yönelik görüşleri olumlu olan öğretmen adayları ile olumsuz olan öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçleri karşılaştırıldığında, ispata yönelik olumlu görüşler belirterek olumlu tutum içinde oldukları belirlenen öğretmen adaylarının argümantasyon süreçlerinde belirgin bir şekilde dedüktif gerekçeler ürettikleri belirlenmiştir (%68). Buna göre ispata yönelik olumlu görüşte olan öğretmen adaylarının matematiksel önermelere ikna olmak ve iddialarını savunmak için tanım, teoremleri, kavramsal bilgilerini kullanarak muhakeme ettikleri ya da ispat yaptıkları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının da genellikle dedüktif olduğu tespit edilmiştir (%86). Öğretmen adaylarının ispatlarında da tanım, teorem ve aksiyomları kullanarak ispat yaptıkları belirlenmiştir.

İspata yönelik olumsuz tutum sergileyen öğretmen adaylarının argümantasyon sürecinde ürettikleri argümanların daha çok dışsal (%32), tümevarımsal (%25) ve referanssız (%21) tipte olduğu belirlenmiştir. Buna göre ispata yönelik olumsuz görüşte olan bazı öğretmen adaylarının önermelerin doğruluğunu sorgulamadan otoriteye dayalı olarak ikna oldukları ya da önermenin içeriğinden çok görünüşü ile ilgilendikleri ortaya çıkmıştır. Bazı öğretmen adaylarının önermelere ikna olmak ve iddialarını savunmak için bir ya da birkaç durumu dikkate aldıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının bir kısmı da önermelere ikna olurken ve başkalarını ikna ederken matematiksel temeli olmayan bilgiler kullandıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının ispat şemalarına bakıldığında öğretmen adaylarının yarısından fazlasının tümevarımsal (%54), bazılarının dedüktif (%27) ve dışsal şemada (%18) olduğu belirlenmiştir. Buna göre ispata yönelik görüşleri olumsuz olan öğretmen adaylarının çoğunlukla tümevarımsal tarzda ispatlar ürettikleri ortaya çıkmıştır. Bu bulgulara göre öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin argüman ve ispat yapılarının seçiminde etkili olduğu düşünülmüştür. Bu durum öğretmen adayları ile mülakatlar başlamadan önce yapılan görüşmelerde dikkati çekmiştir. Bu görüşmelerde ispata yönelik görüşleri olumlu olan öğretmen adayları önermelere ikna olmak ve iddialarını savunmak için dedüktif gerekçeler üreteceklerini, ispata yönelik olumsuz görüşu olan öğretmen adayları ise daha çok dedüktif olmayan gerekçeler üreteceklerini belirtmişlerdi.

Ortaya çıkan bu durumun sebebinin ne olabileceği düşünüldüğünde, ispata yönelik ön yargılı olan, sevmeyen ve faydalı görmeyen öğretmen adaylarının ispatın mantığını tam anlamıyla anlamada güçlük yaşamaları ihtimali akla gelmektedir. İspatın doğrulama fonksiyonunun mantığını kavrayamamış öğretmen adaylarının da kendilerini ve başkalarını matematiksel bir ifadenin doğruluğuna ikna ederken sevmedikleri dedüktif yapı yerine dedüktif olmayan informel yapıları ikna edici bulmaları beklenen bir durumdur. Bu anlamda öğretmen adaylarının ispatlara karşı ön yargılı olmamaları adına gerekli çalışmalar yapılabilir.

Yapılan araştırmalarda da bu çalışmanın sonuçlarına paralel olarak, matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşleri ile ispat yapma becerilerinin ilişkili olduğu görülmüştür (Bayazıt, 2009; Doruk ve Kaplan, 2015; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; İmamoğlu, 2010). Moore (1994) ispat ve matematiğe yönelik algıların öğrencilerin ispat yapma becerileri üzerinde etkili olduğunu belirtmiş, üniversite seviyesindeki öğrencilerin ispat yaparken karşılaştıkları güçlüklerin arasında olduğunu ifade etmiştir. Furinghetti ve Morselli (2009) inançların sadece duygularla ilişkili olduğu için değil, aynı zamanda ispatlama stratejilerinin seçimi, seçilen stratejiden beklentiler ve karşılaşılan zorluklara karşı tepkiler gibi ispatlama yollarını doğrudan etkilediği için önemli olduğunu ifade etmiştir. Hersh (1993) ispatın matematikteki üstlendiği role yönelik farklı görüşte olan öğretmenlerin sınıflarında öğretim sırasında yer verecekleri ispatların da farklı özellikte olacağı yönünde görüş bildirmiştir. Bell (1976) öğrencilerin çözümleri için matematiksel olarak yeterli doğrulama sağlamada güçlük yaşadıklarını ifade etmiş ve bu güçlüklerin ispatın amacına yönelik eksikliklerinden kaynaklandığını ifade etmiştir.

Çalışmada literatürdeki mevcut tespitlere ek olarak, ispata yönelik görüşlerin üretilen argüman ve ispatların yapılarını da etkileyeceği sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç aşağıdaki şekilde betimlenmiştir.

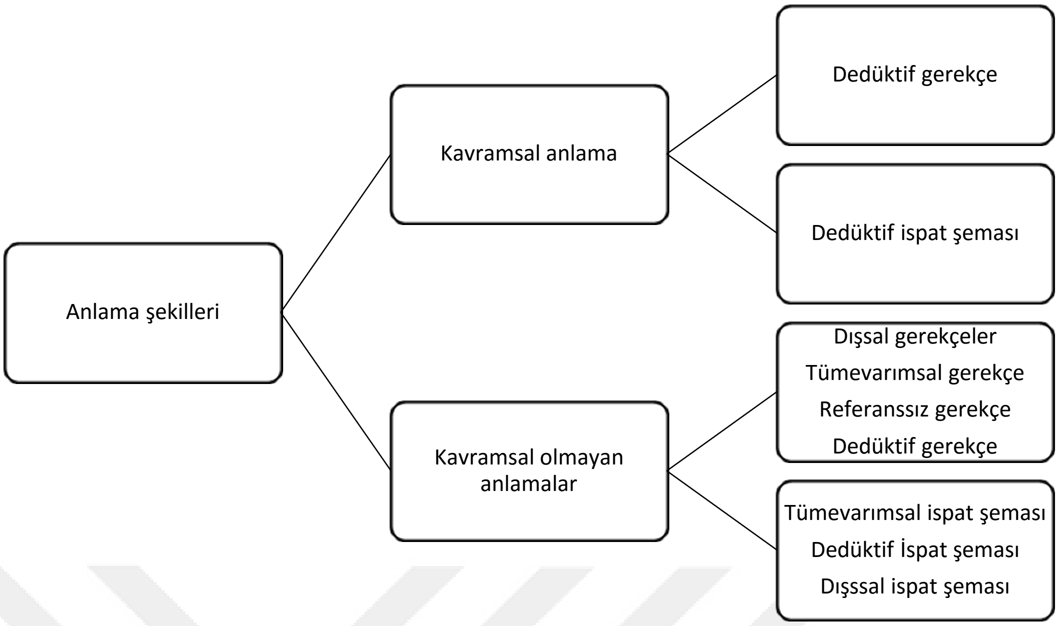


Şekil 5.2. Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerine göre gerekçe tipleri ve ispat şemaları

Öğretmen adaylarının, argümantasyon ve ispat yapma aktivitelerinin ilgili olduğu tanımları anlayış şekillerine göre tercih ettikleri gerekçe tipleri ve ispat şemalarının farklılık gösterdiği belirlenmiştir. Akademik başarısı yüksek öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat aktivitelerinin ilgili olduğu tanımlara yönelik çoğunlukla kavramsal anlamaya sahip oldukları belirlenmiştir. Orta düzeyde akademik başarıya sahip olan öğretmen adaylarının ise çoğunlukla kavramsal olmayan anlayışlara sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adaylarının tanımlara yönelik anlayışlarının çoğunun sembolik anlamalar olduğu tespit edilmiştir. Yani bu gruptaki öğretmen adaylarının çoğu, tanımların altında yatan anlamları bilmemekte, tanımları kendilerine verilen şekilde tekrarlamaktadırlar. Öğretmen adaylarının bir kısmının da tanımlara yönelik hatalı anlamalarının olduğu, bir kısmının kavram karmaşası yaşadığı ortaya çıkmıştır.

Analizin temel konularındaki tanımlara yönelik kavramsal anlamaya sahip olan öğretmen adayları ile olmayanların argümantasyon ve ispat süreçleri incelendiğinde, kavramsal anlamaya sahip olan öğretmen adaylarının ürettikleri argümanların genellikle dedüktif yapıda (%66) olduğu ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adaylarının ürettikleri ispatlarda ise dedüktif ispat şemasına (%85) sahip oldukları tespit edilmiştir. Analizin temel tanımlarına yönelik kavramsal bilgileri yeterli düzeyde olmayan öğretmen adaylarının argümantasyon süreçlerinde ürettikleri argümanlarda birbirine yakın oranlarda dışsal (%27), tümevarımsal (%24), referanssız (%24) ve dedüktif (%19) gerekçeler kullandıkları belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının dedüktif (%42), tümevarımsal (%35) ve dışsal (%21) ispat şemalarında oldukları ortaya çıkmıştır. Kavramsal bilgileri yeterli düzeyde olmayan öğretmen adayları çoğunlukla, iddialarını ikna edici bir şekilde savunamamışlardır. Matematiksel olarak ikna edici argüman ve ispatlar üretmede güçlük çekmişlerdir. Kavramsal anlamaya sahip olmayan öğretmen adaylarının çoğunluğunun matematiksel önermelere ikna olurken ve iddialarını savunurken matematiksel ve mantıksal olarak yanlış gerekçeler kullandıkları tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının matematiksel tanımları kavramsal olarak bilmedikleri ve içselleştiremedikleri için formel tanımlar kendilerine verilmesine rağmen ürettikleri argümanlarda dedüktif tarzda gerekçeler kullanmaya çekindikleri düşünülmüştür. Tanımları kullanırken kendilerini rahat ve güvende hissetmedikleri için dedüktif olmayan yollara başvuruyor olabilirler. Bu durumun aksine tanımları kavramsal boyutta anlayan öğretmen adayları tanımları kullanmak için korkuya kapılmamışlardır. Tanımları çoğunlukla içselleştirdikleri için onları argümantasyon ve ispat aktivitelerinde rahatlıkla kullanabilmişlerdir.

İspat, doğası gereği sentaktik bilgilerin yanında semantik bilgilerin de üst düzeyde kullanıldığı bir aktivitedir. Bu yüzden tanımlara yönelik kavramsal bilgi düzeyinde olmayan öğretmen adaylarının kavramsal bilgi seviyeleri ve üzerindeki bilişsel becerilerin sıklıkla kullanıldığı bu tarz aktivitelerde dedüktif yolları tercih etmemeleri beklenen bir durum olarak algılanabilir. Çalışmada elde edilen bu sonuç aşağıdaki şekilde betimlenmiştir.



Şekil 5.3. Öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki tanımları anlayış şekillerine göre gerekçe tipleri ve ispat şemaları

Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar, kavramsal bilgi eksikliğinin ispat yapmada önemli bir güçlük olduğu araştırma sonuçlarıyla desteklenmektedir (Cusi ve Malara, 2007; Ko ve Knuth, 2009; Moore, 1994). Moore (1994) çalışmasında öğrencilerin matematiksel bilgileri ile kavram imajlarının yeterli olmadığı durumlarda ispata nasıl başlayacaklarını belirlemede güçlük yaşadıklarını tespit etmiştir. Öğrencilerin “kavram imajı→kavram tanımı→kavram kullanımı” zincirini takip etmelerinin yararlı olacağını ifade etmiştir. “kavram imajı→kavram kullanımı” zincirinin takip edilmesi durumunda ise, öğrencilerin iyi bir kavram imajına sahip olsalar bile formel ispat yapmada güçlük yaşayabileceklerini belirtmiştir. Çalışmada kavramsal bilgi eksikliğinin argümantasyon ve ispat süreçlerinde doğru argüman ve ispat üretmenin önündeki engellerden biri olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Akademik başarısı yüksek olan öğretmen adaylarının çalışmadaki performansları incelendiğinde, ispata yönelik görüşleri olumlu olan, tanımları kavramsal olarak anlayan ve kendisine gerekli olan tanımlar yazılı olarak verilen öğretmen adaylarından bazılarının argümantasyon ve ispat aktivitelerinde başarılı olamadıkları ortaya çıkmıştır. Çalışmada tespit edilen bu durum Weber’in (2001) lisans öğrencilerinin ispat yapmak için gerekli olan doğru bilgileri bilmelerine ve önermeyi ispatlayabilmek için uygulayabilmelerine rağmen ispat yapmada başarısız olduklarını belirttiği çalışmasının sonuçları ile benzerlik göstermiştir. Bu çalışmada da bazı öğretmen adaylarının tanımlara yönelik kavramsal bilgiye sahip olmanın yanında tanımları uygulayabilme becerilerininin olmasına rağmen argümantasyon ve ispat aktivitelerinde başarısız oldukları ortaya çıkmıştır. Moore (1994) lisans öğrencilerinin kavram imajlarının yeterince gelişmiş olmasına rağmen tanımları ve sembolleri formel matematiksel bir dil ile yerleştiremedikleri için hala ispat yaparken zorluk yaşadıklarını belirtmiştir. Weber (2001) de ispatlardaki bu başarısızlığın sebebinin, öğrencilerin sahip oldukları sentaktik bilgileri ispat yaparken kullanamamaları olduğunu ifade etmiştir. Sentaktik bilgi, ispat yapmak için tanımları açarak ve sembolleri işe koşarak mantıksal manipülasyonlar yapma olarak tanımlanabilir (Weber, 2001). Ayrıca sentaktik bilginin önemli olmakla beraber ispat yapmak için yeterli olmadığını, aynı zamanda stratejik bilgiye de ihtiyaç olduğunu ifade etmiştir. Stratejik bilgiler ispatlama yönteminin seçimi, özel teorem ya da gerçekler ile sentaktik bilginin ne zaman kullanılıp kullanılamayacağı bilgisidir (Weber, 2001). Buna göre söz konusu öğretmen adaylarının stratejik bilgilerinde eksikliklerin olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının stratejik bilgilerini geliştirme üzerine gerekli çalışmalar yapılması önerilebilir.

Akademik başarı düzeyi yüksek olan öğretmen adaylarından Aziz ve Adem gösterdikleri performanslar ile dikkati çekmiştir. Aziz argümantasyon aktivitelerinde en başarılı öğretmen adayı iken, Adem ise ispat yapmada en başarılı öğretmen adayı olmuştur. Aziz matematiksel iddialara ikna olurken ve iddialarını savunurken ürettiği argümanlarda matematiksel tanımları, tanımlara yönelik kavramsal bilgilerini zaman zaman da kavram imajlarını kullanmıştır. Matematiksel önermelerin doğruluğunu değerlendirirken genellikle kavramsal bilgileri üzerinden hareket etmiştir. Önermenin yanlış olduğuna ikna olmak için ters örnekler bulmaya çalışmıştır. Yanlış bir önermenin doğru olup olmadığını sorgularken önce doğru olduğunu düşünerek ispat yapmaya çalışmış, ispatında ilerleyemeyince ters örnek bulmaya çalışmıştır. Ters örnek bularak önermenin yanlış olduğuna ikna olmuştur. Matematiksel iddialarını savunurken genellikle tanımları doğru bir şekilde uygulamıştır. Tanımları kullanmasının yanında kavram imajlarını kullanarak şekil ve grafiklerden destek almıştır. Bu sayede matematiksel önermeleri doğru bir şekilde değerlendirebilmiş ve matematiksel iddialarını ikna edici bir şekilde savunabilmiştir. İspat yaparken aynı yapısını koruyan

Aziz, başarılı olamamıştır. Buna göre Aziz'in bu yapısının argümantasyon aktivitelerinde yararlı olduğu söylenebilir. Aziz'in bu durumunun semantik yapıdaki öğrencilerle benzerlik gösterdiği düşünülmüştür. Weber (2005) öğrencilerin ispatları prosedürel, sentaktik ve semantik olmak üzere üç farklı şekilde yapabildiğini belirtmiştir. Semantik ispatlarda öğrenciler, ispatlarını yaparken ispatlanan ifadenin neden doğru olduğunu görmek için ilgili kavramların informel ve sezgisel gösterimlerini dikkate alırlar. Bu öğrenciler yapacakları formel çalışmalara yönlendirmesi için informel gösterimleri kullanırlar (Weber, 2005).

Aziz'den faklı olarak Adem, matematiksel önermelerin doğru olup olmadığına sadece ispat yaparak ya da ters örnek göstererek karar vermiştir. Sürekli, tanımları açarak ilerlemeye ve mantıksal manipülasyonlar yaparak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Adem'in bu durumu özellikle yanlış önermeleri değerlendirirken onu yanıltmıştır. Yanlış önermelerin bazıları için doğru ispatlar ürettiğine ikna olmuş, önermenin doğru olduğunu belirterek yanlış değerlendirmeler yapmıştır. Yanlış olduğunu düşündüğü önermeler için ters örnek bulmaya çalışmıştır. Önermelerin doğruluğunu değerlendirmede Aziz kadar başarılı olamamıştır. Matematiksel iddialarını savunurken de tanımları doğru bir şekilde kullanmış ve ikna edici çözümlere ulaşmıştır. İddialarını savunurken de formel tanımları kullanmaya çalışmıştır. Bu yapısından ispatlama etkinliklerinde de ödün vermemiştir. İspatlarını yaparken tanımları açıp mantıksal olarak manipüle etmeye çalışmıştır. Adem'in sentaktik yapıya sıkı sıkıya bağlı olarak ispatlarda başarılı olduğu ortaya çıkmıştır. Sentaktik bilgi, ispat yapmak için tanımları açarak ve sembolleri işe koşarak mantıksal manipülasyonlar yapma olarak tanımlanmıştır (Weber, 2001). Adem'in etkinliklerde sergilediği özellikler Weber'in (2009) çalışmasındaki çok başarılı sentaktik öğrencinin özelliklerine benzemektedir. Weber (2009) çok başarılı sentaktik muhakeme şekline sahip bir lisans matematik öğrencisinin matematiksel bir önermenin doğru olup olmadığına ikna olmak için öncelikle ispat yapmaya çalıştığını belirtmiştir. Bu öğrencinin önermelerin doğruluğunu değerlendirirken ispat ve ters örnek üretme dışında hiçbir stratejiyi uygulamadığını belirtmiştir.

Sarı ve diğerleri (2005) çalışmalarında başarılı öğrencinin dedüktif ve sentaktik ispat yapısına sıkı sıkıya bağlı iken başarı seviyesi düştükçe öğrencilerin deneysel ve dışsal yapılarda olduklarını tespit etmiştir. Öğrencilerin akademik başarı seviyesi düştükçe dedüktif ve sentaktik yapılardan uzaklaşıldığı belirlenmiştir. Bu çalışmada da akademik başarısı yüksek olan öğretmen adaylarının dedüktif gerekçe tipinde ve dedüktif ispat şemasında olduğu belirlenmiştir. Akademik başarıları daha düşük öğretmen adaylarının da çoğunlukla dışsal ve deneysel gerekçe tipleri ve ispat şemalarında oldukları belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının akademik başarı düzeyi düştükçe dedüktif olmayan gerekçeleri ikna edici buldukları ve dedüktif olmayan argümanları ispat olarak kabul etme eğiliminde oldukları ortaya çıkmıştır. Goetting (1995) farklı bölümlerde öğrenim gören üniversite öğrencilerinin ispat anlayışlarını ortaya çıkarmak için yaptığı çalışmasında benzer bir bulguya yer vermiştir. Araştırma grubundaki matematiksel bilgi düzeyi daha yüzeysel olabileceği düşünülen grubun (sınıf öğretmenliği bölümü) ispatı kesinlik gerektirmeyen argümanlar olarak gördüğü ve deneysel argümanları ispat olarak kabul ettiğini belirtmiştir.

Çalışmadan elde edilen sonuçlar ışığında öğretmen adaylarının kendilerine yöneltilen matematiksel ifadelerin doğruluğunu değerlendirmede ve iddialarını matematiksel olarak savunmada güçlük yaşadıkları anlaşılmaktadır. Bu durumun gelecek için kaygı verici olduğunu söylemek mümkündür. Çünkü öğretmen adaylarının bir kısmı kendilerine yöneltilen matematiksel bilgileri sorgulamadan ya da mantıksal olarak anlamsız muhakemeler sonucunda karar vermiştir. Bu şekilde elde edilen matematiksel bilgilerin üzerine inşa edilecek diğer bilgilerin de sağlıklı olamayacağı açıktır. Bu anlamda matematiksel bilgileri sorgulayan, doğru ve yanlışı birbirinden ayırt edebilen, düşüncelerini uygun matematiksel bir dil ile savunabilen bireyler yetiştirmede sorumluluğu olan öğretmenlerde de bu becerilerin üst düzeyde olması beklenmektedir. Matematik öğretmenlerinin öğrencilerine “çıkarımların doğruluğunu ve geçerliğini savunma” ve “mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma (MEB 2013a)” gibi becerileri kazandırabilmeleri için öncelikle kendilerinin bu becerilere sahip olması gerekir. Bu anlamda geleceğin matematik öğretmenleri olan öğretmen adaylarının bu tarz becerilere sahip olup olmadıkları farklı araştırma yaklaşımları ve farklı araştırma grupları ile sınanabilir.

Literatür incelendiğinde ispata yönelik birçok çalışma mevcut iken argümantasyon ve ispat ile olan ilişkisine yönelik çalışmaların oldukça sınırlı olduğu görülmüştür. Bu nedenle, bu alanda yapılacak olan çalışmaların literatüre katkı yapmanın yanında öğrencilerin ispat sürecinde yaşadıkları zorluklara ayna tutacağı düşünülmektedir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri, analizin temel tanımlarını anlama şekilleri, argümantasyon ve ispat süreçlerine yönelik var olan durum ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Ayrıca bu çalışma ispata başlamadan önce geçirilecek argümantasyon sürecinin önemini ortaya koymuştur. Buna göre öğrencilerin ispatlama becerilerini artırmak için argümantasyon süreçlerinin de içinde olduğu ispat öğretim yöntemleri geliştirilebilir ve bu yöntemlerin etkililiği sınanabilir.

KAYNAKLAR

Abdullah, S.A.S. (2010). Comprehending the concept of functions. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 8,* 281-287.

Akkaş, S., Hacısalihoğlu, H. H., Özel, Z., & Sabuncuoğlu, A. (1998). *Soyut matematik.* Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları.

Akkoç, H. (2003). *Students' understanding of the core concept of function*. Unpublished doctoral dissertation, University of Warwick.

Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(1), 1-32.

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and evaluating warrants. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(2), 125-134.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates interaction with proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 869-890.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(4), 479-488.

Altun, M. (2013a). *Ortaokullarda (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi.* (9. Baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Altun, M. (2013b). *Eğitim fakülteleri ve sınıf öğretmenleri için matematik öğretimi.* (18. Baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Altun, M. (2014). *Eğitim fakülteleri ve matematik öğretmenleri için liselerde matematik öğretimi.* (5. Baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Altun, M., & Yılmaz, A. (2010). Lise öğrencilerinin parçalı fonksiyon bilgisini oluşturma ve pekiştirme süreci. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*(1), 311-337.

Anapa, P., & Şamkar, H. (2010). Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 2700-2706.

Arslan, S., & Çelik, D. (2013). Zor sanılan iki kavram: Limit ve süreklilik. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bilgölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 463-487).

Aylar, E. (2014). *7. Sınıf Öğrencilerinin İspata Yönelik Algı ve İspat Yapabilme Becerilerinin İrdelenmesi.* Yayımlanmamış doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Baki, A. (2014). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. (5. Baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Balacheff, N. (1999). Is Argumentation an Obstacle? Invitation to a Debate International *Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical proof*. Retreived from http://www.lettredelapreuve.it

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education*, *40*(3), 501-512.

Balcı, M. (1999). *Matematik analiz I*. (6. Baskı). Ankara: Balcı Yayınları.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. Paper presented at *the annual meeting of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Norwich, England.

Barrier, T., Mathé, A. C., & Durand-Guerrier, V. (2009). Argumentation and proof: A discussion about Toulmin's and Duval's models. In *Proceedings of the 6th CERME International Conference* (pp. 191-200).

Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions mathematical proofs and proving. *Educational Studies, 36(3)*, 283-298.

Baştürk, S. (2011). Perspectives of Turkish pre-service mathematics teachers of elementary level on mathematical proof. In Robert V. Nata (Ed.), *Progress Education Vol.27* (pp. 61-82). Nova Science Publishers, Inc: New York.

Bayazıt, İ. (2008). Fonksiyon konusunun öğreniminde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri. Mehmet Fatih Özmantar, Erhan Bilgölbali ve Hatice Akkoç. (Ed.). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (s. 91-119).

Bayazıt, N. (2009). *Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof.* Unpublished Doctoral Dissertation, Florida State University, Florida.

Baykul, Y. (2014). *Ortaokullarda matematik öğretimi.* (2 baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1), 23-40.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 487–500.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(1), 19-35.

Bingölbali, E. (2008). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. Mehmet Fatih Özmantar, Erhan Bilgölbali ve Hatice Akkoç. (Ed.). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (s. 223-255).

Birgin, O., & Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *22*(2), 529-550.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, *7*(8). Retreived from http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-204). Belo-Horizonte, Brazil: PME.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2007). How to decide? Students' ways of determining the validity of mathematical statements. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 561–570). Larnaca, Cyprus.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (13. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359-387.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41-53.

Committee on the Undergraduate Program in Mathematics. (2004). *Undergraduate programs and courses in the mathematical sciences: CUPM curriculum guide.* Washington, DC: Mathematical Association ofAmerica.

Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). *The mathematical education of teaches*. Washington, DC: American Mathematical Society.

Conradie, J., & Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 225-235.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Creswell J.W. (2013). *Beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni* (Çev. Ed. M. Bütün ve S. B. Demir). Ankara: Siyasal Kitebevi.

Creswell, J.W. (2014). *Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları* (Çev. Ed. S. B. Demir). Ankara: Eğiten Kitap.

Cusi, A., & Malara, N. (2007). *Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions*. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), Proceedings ofthe Fifth Congress ofthe European Societyfor Research in Mathematics Education (pp. 591-600). Cyprus, Larnaca.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. In M. De Villiers (ed.) *Rethinking Proof with Sketchpad*, pp. 3-10.

Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: Önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (s. 15-34). Ankara: Pegem Akademi.

Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(7), 47-71.

Dinçer, S. (2011). *Matematik lisans derslerindeki tartışmaların toulmin modeline göre analizi*. Yayımlanmamış doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Doruk, M., & Güler, G. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi, Ekim,* 71-93.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2013a). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, *2*(1), 241-252.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2013b). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Dizilerin Yakınsaklığı Kavramı Üzerine İspat Değerlendirme Becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, *2*(1), 241-252.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2015a). The relationship among pre-service mathematics teachers' conceptual knowledge, opinions regarding proof and proof skills. *Mevlana International Journal of Education, 5*(1), 45-57.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2015b). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 315-328.

Doruk, M., Özdemir, F., & Kaplan, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz-yeterlik algıları arasındaki ilişki. *K. Ü. Kastamonu Eğitim Dergisi, 23* (2), 861-874.

Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In *European Research in Mathematics Education 1.1, Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 125-139).

Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving: analysis of some undergraduate mathematics students' performances. In *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* , Vol. 2 (pp.273-280). Haifa, Israel.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(3), 271-300.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational studies in mathematics*, *22*(3), 233-261.

Edwards, L.D. (1997). Exploring the territory before proof: Student's generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *2*(3), 187-215.

Ekiz, D. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri.* (2. Baskı). Ankara: Anı Yayıncılık.

Evens, H., & Houssart, J. (2004). Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question:'I know but I can't explain'. *Educational Research*,*46*(3), 269-282.

Freeman, J.B. (2005). Systematizing Toulmin's warrants: An epistemic approach. *Argumentation*, *19*(3), 331-346.

Fukawa-Connelly, T. (2014). Using Toulmin analysis to analyse an instructor's proof presentation in abstract algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(1), 75-88.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(1), 71-90.

Galbraith, P.L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(1), 1-28.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulties of proof. In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2 (pp. 345–352). Stellenbosch, South Africa: PME.

Gholamazad, S., Liljedahl, P. & Zazkis, R. (2004). What counts as proof? Investigation of pre-service elementary teachers' evaluation of presented 'proofs'. In D. E. McDougall & J. O. Ross (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 639–646), University of Toronto, Toronto

Giaquinto, M. (2005). Mathematical activity. In *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics* (pp. 75-87). Springer Netherlands.

Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. InA. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. Ill* (pp. 284-307). Providence, RI: American Mathematical Society.

Glesne, C. (2013). *Nitel araştırmaya giriş.* (Çev. Ed. A. Ersoy ve P. Yağcıoğlu). Ankara: Anı Yayıncılık

Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof* (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9539653).

Griffiths, P.A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *American Mathematical Monthly*, *107*, 1-14.

Güler, G. (2013). Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi. Yayımlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Güler, G., & Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20*(2), 571-590.

Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20(1)*, 219–236.

Güneş, S. (2013). *Matematik eğitiminde argümantasyon ve kanıt süreçlerinin analizi ve karşılaştırılması.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Güven, B., Çelik, D., & Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi, 316,* 35-45.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 57-72.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 5-23.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education, 40,* 345–353.

Hanna, G., Bruyn, Y., Sidoli, N., & Lomas, D. (2004). Teaching proof in the context of physics. *ZDM Mathematics Education, 36(3)*, 82–90.

Harel, G, & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. InA. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 185–212). Norwood, NJ: Ablex.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics* (Vol. 2). NCTM.

Hartter, B.J. (1995). *Concept image and concept definition for the topic of the derivative* (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9603516)

Hatısaru, V., & Erbaş, A. K. (2010). Students' perceptions of the concept of function: The case of Turkish students attending vocational high school on industry. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 3921-3925.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 389-399.

Hoyles, C., & Kuchemann, D. (2002). Students' understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 193-223.

Inglis, M., Meija-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modeling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 3-21.

Irmak, H. (2008). *Soyut matematik.* Ankara: Pegem Akademi.

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

İskenderoğlu, T.A., & Baki, A. (2011). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüşlerinin Nicel Analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 11*(4), 2275-2290.

Jolliff, W. (1998). Text as topos: Using the Toulmin model of argumentation in ıntroduction to literature. *Teaching English in the Two Year College, 25*(2), 151.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 53-60.

Kadıoğlu, E., & Kamali, M. (2003). *Genel matematik*. (3. Baskı). Erzurum: Bakanlar Matbaacılık.

Kaleli Yılmaz, G. (2015). Durum çalışması. Mustafa Metin (Ed.). *Kuramdan uygulamaya eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri* içinde (s. 261-285). Ankara: Pegem Akademi.

Kaplan, A., Doruk, M., & Özdemir, F. (2015). Opinions of pre-service primary mathematics teachers about problem solving and proving. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research,* 14, 31-47.

Karaçay, T. (2009). *Soyut matematiğe giriş.* (2. Baskı). Ankara: Kuban Matbaacılık Yayıncılık.

Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education, 1(2),* 134-141.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentation in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education, 40*, 427–441.

Knuth, E. (1999). *The nature of secondary school mathematics teachers*' *conceptions of proof*. (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9938829)

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Ko, Y.Y. (2010). *Proofs and Counterexamples: Undergraduate Students' Strategies for Validating Arguments, Evaluating Statements, and Constructing Productions*. (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 3437186)

Ko, Y.Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 68-77.

Köğce, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın matematik öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. *Turkish Studies-International Periodical For The Languages, Literature and History of Turkish or Turkic*, *8*(12), 765-776.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60-82.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic ofmathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. *Philosophy of mathematics education journal*, *16*.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational studies in mathematics*, *48*(2-3), 259-288.

Mariotti, M. A., & Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 341–344.

Martin, G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 41-51.

Martinez, M.V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational studies in mathematics*, *86*(1), 125-149.

McIntosh, C. (Ed.). (2013). *Cambridge Advenced Learner's Dictionary.* (4th edition). UK: Cambridge University Press.

Mcmillan, J.H., & Schumacher, S. (2001). *Research in education: A conceptual introduction.* (5th edition). New York: Addison Wesley Longman.

Mejia-Ramos, J.P., & Inglis, M. (2009). What are the argumentative activities associated with proof?. *Research in Mathematics Education*, *11*(1), 77-78.

Merriam, S.B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber*. (Çev. Ed. S. Turan). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013a). *Ortaokul Matematik Dersi 5-8 Sınıflar Öğretim Programı.* Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013b). *Ortaöğretim Matematik Dersi 9-12. Sınıflar Öğretim Programı.* Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41,* 47–68.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics. 27,* 249-266.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 14*, 1, 147-160.

Morris, A.K. (2002). Mathematical Reasoning: Adults' ability to make the inductive-eductive distinction. *Cognition and Instruction, 20*(1), 79-118.

Musayev B., Alp, M., & Mustafayev, N. (2007). *Teori ve çözümlü problemlerle Analiz II.* (2. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2012). 'Warrant'revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standarts for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oxford University. (2010). *Advenced Learner's Dictionary (International students' edition).*(8th edition). New York: Oxford University Press

Patton, M.Q. (2014). Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri. (Çev. Ed. M. Bütün ve S. B. Demir). Ankara: Pegem Akademi.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66,* 23–41.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education, 40*(3), 385–400.

Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*, *43*(2), 257-267.

Pedemonte, B., & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational studies in mathematics*, *76*(3), 281-303.

Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. *For the learning of mathematics*, *22*(1), 2-10.

Polat, Z.S., & Şahiner, Y. (2007). Bağıntı ve fonksiyonlar konusunda yapılan yaygın hataların belirlenmesi ve giderilmesi üzerine boylamsal bir çalışma. *Eğitim ve Bilim, 32*(146), 89-95.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical model*. (2nd ed.). New Jersey: Princeton University Press.

Raman, M. (2001). Beliefs about proof in collegiate calculus', in Robert Speiser (ed.), *Proceedings of the Twenty Second Annual Meeting, North American Chapter for the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Snowbird, Utah.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics, 52(3),* 319-325.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. *Philosophia Mathematica, 7(1),* 5–41.

Riley, K.J. (2003). *An investigate of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proofand refutations* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertation and Theses database. (UMI No. 3083484)

Roh, K.H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational studies in Mathematics*, *69*(3), 217-233.

Ross, K.A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly, 105*(3), 252-255.

Rumsey, C. W. (2012). Advancing fourth-grade students' understanding of arithmetic properties with instruction that promotes mathematical argumentation (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 3520912)

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40(2)*, 295–319.

Schoenfeld, A.H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*(1), 55-80.

Schoenfeld, A.H. (2009). Series editor's foreword: The soul of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proofacross the grades: A K-16 perspective* (pp. xii-xvi). New York, NY: Routledge.

Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: Conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 191-210.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 123-151.

Shipley, A.J. (1999). *An investigation of collage students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs* (Doctoral Dissertation). Available from ProQuest Dissertation and Thesis database. (UMI No. 9940004)

Simon, S. (2008). Using Toulmin's argument pattern in the evaluation of argumentation in school science. *International Journal of Research & Method in Education, 31*(3), 277-289.

Smith, J.C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 73-90.

Sofronas, K.S., DeFranco, T.C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(2), 131-148.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, A.J., & Stylianides, G.J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 237-253.

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. In *Alatorre, S. Cortina, J. and Mendez A.(Eds, 2006). Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapters of the International Group of the Psychology of Mathematics Education. Merida, Mexico*.

Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some? In Z. Usiskin (Ed.), *Mathematics education around the World* (pp.117–136). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(1), 39-50.

Tall. D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 161–177.

Toulmin, S.E. (2003). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., Barkai, R., & Tabach, M. (2009). Should proof be minimal? Ms T's evaluation of secondary school students' proofs. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*, 58-67.

Tucker, T.W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary issues in mathematics education*, *36*, 31-35.

Turğut, M., Yenilmez, K., & Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 6*(13), 227-252.

Türk Dil Kurumu [TDK]. (2015). *Türkçe Sözlük.* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları

Uygan, C., Tanışlı, D., & Köse, N. Y. (2014). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıt Bağlamındaki İnançlarının, Kanıtlama Süreçlerinin ve Örnek Kanıtları Değerlendirme Süreçlerinin İncelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *5*(2), 137-157.

Vinner, S. (1983). Concept definition concept image and the notion of function. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology, 14 (3)*, 293-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-1 19.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 115-133.

Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour*, *24*, 351-360.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 431-459.

Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(2-3), 200-208.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, *56*, 209-234.

Whiteley, W. (2009). Refutations: the role of counter-examples in developing proof. . In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna & M. Villiers (Eds), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, vol. 2* Taipei, Taiwan (pp. 257-262).

Williams, E. (1979). *An investigation ofsenior high school students ' understanding ofthe nature of mathematical proof.* Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Edmonton.

Williams, S.R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.

Wood, T. (1999). Creating a Context for Argument in Mathematics Class Young Children’s Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171–191.

Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education PME-25, vol. 1*, (pp. 1–9). Utrecht (Olanda).

Yalçınkaya, İ. (2012). *Analiz III (Diziler ve Seriler)*. Konya: Dizgi Ofset.

Yasuhiro, S. (1991). *An investigation on proofs and refutations in the mathematics classroom.* Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Atlanta.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (8. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (2014). *Matematiksel düşünme. (10. Baskı).* İstanbul: Remzi Kitapevi.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 67-78.

Zaslavsky, O., & Ron, G. (1998). Students' understanding of the role of counter-examples. In Olivier A. & Newstead K. (Eds.), *Proceedings ofthe Twenty-second Annual Meeting of the International Groupfor the Psychology ofMathematics Education* (Vol. 4, pp. 225-232). Stellenbosch, South Africa.

EKLER

EK 1. MATEMATİKSEL İSPATA YÖNELİK GÖRÜŞME FORMU

Merhabalar sevgili arkadaşlar. İlköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin matematiksel argümantasyon ve ispat süreçlerinin ortaya çıkarılması amacıyla bir çalışma yürütmekteyim. Bu amaç doğrultusunda, yapılacak mülakatlar yardımıyla sizin ispata yönelik görüşlerinizi ortaya çıkarmayı hedeflemekteyim. Görüşmeden elde edilecek bilgiler sadece bilimsel araştırma amacıyla kullanılacak olup size ait bilgiler kesinlikle gizli tutulacaktır. Görüşmelerimiz ses kayıt cihazı yardımıyla kayıt altına alınacaktır. Çalışmada isimleriniz yerine takma isimler kullanılacaktır. Görüşmenin yaklaşık 40 dakika sürmesini planlanmaktayım. Görüşmeye başlamadan sorunuz varsa öncelikle yanıtlamak isterim.

Şimdiden çalışmaya yaptığınız katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Arş. Gör. Muhammet DORUK

1. Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?
2. Matematiksel ispatın matematikteki amacı hakkında ne düşünüyorsunuz?
3. Matematiksel ispatın matematikteki önemi hakkında ne düşünüyorsunuz?
4. Matematiksel ispatlar size neden öğretiliyor?
5. Matematiksel ispatların size matematiksel anlamda yararlı olup olmaması hakkında ne söylersiniz?
6. Hangi tür ispatlarda başarılı oluyorsunuz?
7. Bir öğrencinin ispatlarda başarılı olması için ne yapması gerekir?
8. Doğru yapılmış bir ispatta bulunması gerekenler nelerdir?
9. Matematiksel bir önermenin doğruluğu hakkında şüpheye düştüğünüzde kendinizi nasıl ikna edersiniz?
10. Doğru olduğunu düşündüğünüz matematiksel iddialarınızı nasıl savunursunuz?

EK 2. FONKSİYON KAVRAMINA YÖNELİK KLİNİK MÜLAKAT FORMU

Merhabalar sevgili arkadaşlar. Aşağıda size sorulan soruları sesli bir şekilde düşünerek yanıtlamanız istenmektedir. Yapılan görüşmelerden elde edilen bilgiler, sadece bilimsel araştırma amacıyla kullanılacak ve kişisel bilgiler kesinlikle gizli tutulacaktır. Yapılan çalışmada isminiz yerine takma isim kullanılacaktır. Bu nedenle size sorulan soruları, bu konuda hiçbir kaygı duymadan rahat bir şekilde cevaplayabilirisiniz. Şimdiden çalışmaya yaptığınız katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Arş. Gör. Muhammet DORUK

Tanım: A ve B boştan farklı iki küme olsun. $f \subset \mathrm{AxB}$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu f bağıntısına fonksiyon denir:

i. $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}$ için öyle bir $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$ vardır ki $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in f$ dir.

ii. $(\mathrm{a}, \mathrm{b}_1) \in f$ ve $(\mathrm{a}, \mathrm{b}_2) \in f$ ise $\mathrm{b}_1 = \mathrm{b}_2$ dir.

Tanım: $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{A}$ için $f(\mathrm{x}_1) = f(\mathrm{x}_2)$ iken $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$ oluyorsa f fonksiyonuna birebir fonksiyon denir. Bu tanım şu şekilde de verilebilir; her $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$ iken $f(\mathrm{x}_1) \neq f(\mathrm{x}_2)$oluyorsa f fonksiyonuna birebir fonksiyon denir.

Tanım: $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bir fonksiyon olsun. $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ oluyorsa f fonksiyonuna örten (veya üzerine) fonksiyon denir. Buna göre f örtense her $\mathrm{y} \in \mathrm{B}$ için $f(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ olacak şekilde en az bir $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ vardır.

Tanım: Eğer, bir A kümesinin her bir elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B kümesinin bir alt kümesidir denir.

Tanım: $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ve $g: \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ birer fonksiyon olsunlar. Bu taktirde g fonksiyonu *f*(A) daki her *f*(x) elemanını, C kümesinin bir *g(f(x))* elemanına dönüştürür. Böylece A nın her bir x elemanını C nin bir *z=g(f(x))* elemanına dönüştüren yeni bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyona f ile g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu denir ve gof ile gösterilir.

① Aşağıdaki önermeler için yapılan doğrulamaları inceleyiniz. Yapılan doğrulama hakkındaki değerlendirmenizi yaparak değerlendirmenizin gerekçesini belirtiniz.

(a) $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ ve $g: \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$ birer fonksiyon olsunlar. Eğer f ve g fonksiyonları birebir ise gof fonksiyonu da birebirdir.

⊗ gof fonksiyonunun birebir olduğunu göstermek için $\forall \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{A}$ için $(gof)(\mathrm{x}_1) = (gof)(\mathrm{x}_2) \Rightarrow \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$ olduğunu göstermek gerek ve yeterdir.

$$\forall \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{A} \text{ için } (gof)(\mathrm{x}_1) = (gof)(\mathrm{x}_2) \Rightarrow g(f(\mathrm{x}_1)) = g(f(\mathrm{x}_2))$$

$$\Rightarrow f(\mathrm{x}_1) = f(\mathrm{x}_2)$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$$

O halde gof fonksiyonu birebirdir.

◯ Doğru ◯ Kısmen doğru ◯ Yanlış

Çünkü…

(b) $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ bir fonksiyon ve $\mathrm{D} \subset \mathrm{A}$ olsun. O halde $f^{-1}(f(\mathrm{D})) \subset \mathrm{D}$ dir.

⊗ $\forall \mathrm{x} \in f^{-1}(f(\mathrm{D}))$ olsun. Ters fonksiyonun tanımından,

$\mathrm{x} \in f^{-1}(f(\mathrm{D})) \Longrightarrow f(\mathrm{x}) \in f(\mathrm{D}) \Longrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{D}$ dir. O halde $f^{-1}(f(\mathrm{D}))$ kümesinden alınan her eleman aynı zamanda D kümesinin elemanıdır.

Buna göre verilen ifade doğru olup $f^{-1}(f(\mathrm{D})) \subset \mathrm{D}$ dir.

◯ Doğru ◯ Kısmen doğru ◯ Yanlış

Çünkü…

2 Aşağıdaki önermelerin doğruluğu hakkında bir karara vararak verdiğiniz kararın doğruluğunu gösteriniz.

(a) Bir fonksiyonun tersi de bir fonksiyon ise o zaman fonksiyon birebir ve örten bir fonksiyondur.

Doğru *Yanlış*

(b) Herhangi çarpılabilir olan birebir iki fonksiyonun çarpımı olan yeni fonksiyon da birebirdir.

Doğru *Yanlış*

3 $f\colon \mathrm{R}^{-} \to \mathrm{R}^{+},\ f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz.

EK 3. DİZİ KAVRAMINA YÖNELİK KLİNİK MÜLAKAT FORMU

Merhabalar sevgili arkadaşlar. Aşağıda size sorulan soruları sesli bir şekilde düşünerek yanıtlamanız istenmektedir. Yapılan görüşmelerden elde edilen bilgiler, sadece bilimsel araştırma amacıyla kullanılacak ve kişisel bilgiler kesinlikle gizli tutulacaktır. Yapılan çalışmada isminiz yerine takma isim kullanılacaktır. Bu nedenle size sorulan soruları, bu konuda hiçbir kaygı duymadan rahat bir şekilde cevaplayabilirisiniz. Şimdiden çalışmaya yaptığınız katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Arş. Gör. Muhammet DORUK

Tanım: N={1,2,3,…} olmak üzere, $s\colon \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{R}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona reel sayı dizisi denir.

Tanım (s_n) bir reel sayı dizisi ve $s \in \mathrm{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|s_n - s| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (s_n) dizisi s ye yakınsaktır denir. Yakınsak olmayan diziye ıraksak dizi denir.

Tanım: (s_n) reel terimli bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $|s_m - s_n| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (s_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

① Aşağıdaki önermeler için yapılan doğrulamaları inceleyiniz. Yapılan doğrulama hakkındaki değerlendirmenizi yaparak değerlendirmenizin gerekçesini belirtiniz.

(a) Dizilerin limiti varsa tektir.

⊗ (s_n) dizisinin birbirinden farklı a ve b gibi iki farklı limitinin olduğunu kabul edelim. $\varepsilon \in R^+$ verilmiş olsun.

$$n > n_1 \text{ olduğunda } |s_n - a| < \varepsilon$$

$$n > n_2 \text{ olduğunda } |s_n - b| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı $n_1, n_2 \in N$ vardır.

$$n_0 = \text{maks}\{n_1, n_2\} \text{ olsun. } \forall n > n_0 \text{ için}$$

$$|a - b| = |a - s_n + s_n - b| \leq |a - s_n| + |s_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

olur. Bu durumda $a = b$ dir. O halde dizilerin limiti varsa tektir.

◯ Doğru ◯ Kısmen doğru ◯ Yanlış

Çünkü…

(b) (s_n) bir reel sayı dizisi olsun. (s_n) dizisinin herhangi bir yığılma noktası var ise yakınsaktır.

⊗ $(s_n) = \frac{(-1)^n n}{2n+1}$ dizisini göz önüne alalım. (s_n) dizisinin limiti yoktur. Fakat iki tane yığılma noktası vardır. Bunlar $-\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2}$ noktalarıdır. O halde yukarıda verilen önerme yanlıştır.

◯ Doğru ◯ Kısmen doğru ◯ Yanlış

Çünkü…

② Aşağıdaki önermelerin doğruluğu hakkında bir karara vararak verdiğiniz kararın doğruluğunu gösteriniz.

(a) Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir. Doğru Yanlış

(b) (s_n) yakınsak ve (t_n) ıraksak reel sayı dizisi olmak üzere $(s_n . t_n)$ çarpım dizisi ıraksaktır.

Doğru Yanlış

③ $(s_n) = (\frac{2.4.6 \ldots 2n}{3.5.7 \ldots 2n+1})$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

EK 4. LİMİT VE SÜREKLİLİK KAVRAMLARINA YÖNELİK KLİNİK MÜLAKAT FORMU

Merhabalar sevgili arkadaşlar. Aşağıda size sorulan soruları sesli bir şekilde düşünerek yanıtlamanız istenmektedir. Yapılan görüşmelerden elde edilen bilgiler, sadece bilimsel araştırma amacıyla kullanılacak ve kişisel bilgiler kesinlikle gizli tutulacaktır. Yapılan çalışmada isminiz yerine takma isim kullanılacaktır. Bu nedenle size sorulan soruları, bu konuda hiçbir kaygı duymadan rahat bir şekilde cevaplayabilirisiniz. Şimdiden çalışmaya yaptığınız katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Arş. Gör. Muhammet DORUK

Tanım: $A \subset R$, $f: A \to R$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a noktasına yaklaştığında f fonksiyonunun limiti L dir denir.

Tanım: $A \subset R$, $f: A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. Eğer *f* fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu A üzerinde süreklidir denir.

Tanım: $A \subset R$, $f: A \to R$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayanı her x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) < f(x_2)$ ise *f* fonksiyonuna E üzerinde monoton artan bir fonksiyondur denir.

① Aşağıdaki önermeler için yapılan doğrulamaları inceleyiniz. Yapılan doğrulama hakkındaki değerlendirmenizi yaparak değerlendirmenizin gerekçesini belirtiniz.

(a) $f(\mathrm{x}), h(\mathrm{x}), g(\mathrm{x})$ fonksiyonları $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ noktası hariç bu noktayı ihtiva eden uygun bir açıklıkta tanımlı olsun. Bu aralıkta $g(\mathrm{x}) \leq f(\mathrm{x}) \leq h(\mathrm{x})$ olmak üzere $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} g(\mathrm{x}) = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} h(\mathrm{x}) = \mathrm{L} \Rightarrow \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$.

⊗ $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} g(\mathrm{x}) = \mathrm{L} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0$ vardır öyleki $0 < |\mathrm{x} - \mathrm{a}| < \delta_1$ olduğunda $|g(\mathrm{x}) - \mathrm{L}| < \varepsilon$ olur.

$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} h(\mathrm{x}) = \mathrm{L} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_2 > 0$ vardır öyleki $0 < |\mathrm{x} - \mathrm{a}| < \delta_2$ olduğunda $|h(\mathrm{x}) - \mathrm{L}| < \varepsilon$ olur.

$\delta = \mathrm{maks}\{\delta_1, \delta_2\}$ seçelim.

$$g(\mathrm{x}) \leq f(\mathrm{x}) \leq h(\mathrm{x}) \Rightarrow g(\mathrm{x}) - \mathrm{L} \leq f(\mathrm{x}) - \mathrm{L} \leq h(\mathrm{x}) - \mathrm{L}$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < g(\mathrm{x}) - \mathrm{L} \leq f(\mathrm{x}) - \mathrm{L} \leq h(\mathrm{x}) - \mathrm{L} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < f(\mathrm{x}) - \mathrm{L} < \varepsilon$$

$\Rightarrow |f(\mathrm{x}) - \mathrm{L}| < \varepsilon$ olur ki bu ispatı tamamlar.

◯ Doğru ◯ Kısmen doğru ◯ Yanlış

Çünkü…

②Aşağıdaki önermelerin doğruluğu hakkında bir karara vararak verdiğiniz kararın doğruluğunu gösteriniz.

(a) $A \subset R$, $f: A \to R$ ve $g: A \to R$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar A kümesi üzerinde sürekli olsun. Bu durumda f+g fonksiyonu da A kümesi üzerinde süreklidir. *Doğru* *Yanlış*

(b) Bir küme üzerinde monoton artan her fonksiyon aynı küme üzerinde süreklidir.

Doğru *Yanlış*

③$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu x=0 noktasında süreklidir. Gösteriniz

EK 5. TÜREV KAVRAMINA YÖNELİK KLİNİK MÜLAKAT FORMU

Merhabalar sevgili arkadaşlar. Aşağıda size sorulan soruları sesli bir şekilde düşünerek yanıtlamanız istenmektedir. Yapılan görüşmelerden elde edilen bilgiler, sadece bilimsel araştırma amacıyla kullanılacak ve kişisel bilgiler kesinlikle gizli tutulacaktır. Yapılan çalışmada isminiz yerine takma isim kullanılacaktır. Bu nedenle size sorulan soruları, bu konuda hiçbir kaygı duymadan rahat bir şekilde cevaplayabilirisiniz. Şimdiden çalışmaya yaptığınız katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Arş. Gör. Muhammet DORUK

Tanım $A \subset R$, $a \in A$ ve a, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. $f: A \to R$ fonksiyonu için $lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limiti mevcut ise bu limite *f* nin a noktasındaki türevi denir. *f* a noktasında türevli ise *f* a da diferensiyellenebilirdir denir.

Tanım: Eğer $x\in A$ olduğunda $-x \in A$ oluyorsa A kümesine bir simetrik küme denir. Simetrik bir A kümesi üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için $f(-x)=f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna bir çift fonksiyondur denir. Eğer her $x \in A$ için $f(-x)=-f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu bir tek fonksiyondur denir.

① Aşağıdaki önermeler için yapılan doğrulamaları inceleyiniz. Yapılan doğrulama hakkındaki değerlendirmenizi yaparak değerlendirmenizin gerekçesini belirtiniz.

(a) $A \subset R$, $a \in A$ ve $f: A \to R$ fonksiyon olsun. f fonksiyonu a noktasında sürekli değil ise türevli de değildir.

⊗ Kabul edelim ki f fonksiyonu a noktasında türevli olsun. f, x=a noktasında türevli olduğundan

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

şeklinde ve $A \setminus \{a\}$ da tanımlanan bir fonksiyon vardır. Bu fonksiyonun a noktasındaki limiti $f^{'}(a)$ dır.

Yukarıdaki eşitlikten $f(x) = g(x)(x - a) + f(a)$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\big(g(x)(x - a) + f(a)\big)$$

$$= f(a)$$

O halde f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Bu durumda verilen önerme doğrudur.

◯ Doğru ◯ Kısmen doğru ◯ Yanlış

Çünkü…

(b) Her tek fonksiyonun türevi çift, çift bir fonksiyonun da türevi tek bir fonksiyondur.

⊗ Reel sayılan kümesi üzerinde tanımlanan, biri tek diğeri çift olmak üzere iki fonksiyon göz önüne alalım.

$f(x) = x^2$ ve $g(x) = x$ fonksiyonları böyle foksiyonlardır. $\forall x \in R$ için,

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow$ f çift bir fonksiyondur.

$f'(x) = 2x$ olup $f'(-x) = 2(-x) = -2x \Rightarrow$ $f^{'}$fonksiyonu tek bir fonksiyondur. Benzer şekilde,

$g(-x) = -x = -g(x) \Rightarrow g$ tek bir fonksiyondur.

$g^{'}(x) = 1$ olup $g'(-x) = 1 = g'(x) \Rightarrow$ g' fonksiyonu çift bir fonksiyondur. O halde verilen önerme doğrudur.

Doğru◯ ◯ Kısmen doğru ◯ Yanlış

Çünkü…

2 Aşağıdaki önermelerin doğruluğu hakkında bir karara vararak verdiğiniz kararın doğruluğunu gösteriniz.

(a) Bir fonksiyonun bir aralıkta türevi pozitif ise o aralıkta fonksiyon monoton artandır. *Doğru* *Yanlış*

(b) Herhangi bir noktada sürekli her fonksiyon o noktada türevlidir. *Doğru* *Yanlış*

3 $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 1$ fonksiyonunun [-2,3] kapalı aralığında sürekli ve (-2,3) açık aralığında türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

ÖZGEÇMİŞ

Muhammet DORUK 1986 yılında Denizli'nin Acıpayam ilçesinin Kumafşarı Kasabası'nda doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kumafşarı Kasabası'nda tamamladı. Acıpayam Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı (2005). Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden fakülte birincisi olarak mezun oldu (2009). Aynı yıl Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Matematik Bölümü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı. 2011 yılında "Zaman Skalasında Genelleştirilmiş İntegraller" adlı yüksek lisans tezini bitirdi. 25.09.2010-22.05.2011 tarihleri arasında Uşak Üniversitesi Sürekli Eğitim ve Uygulama Merkezi tarafından verilen Pedagojik Formasyon Eğitimi Sertifika Programı Kursu'nu başarı ile tamamladı. 2010-2011 eğitim öğretim yılında Uşak ilinin Eşme ilçesinde bulunan Şehit Cemalettin Avcı Anadolu Lisesi'nde ücretli matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. Muhammet Doruk'un ilgi alanları arasında matematiksel argümantasyon ve ispat yer almaktadır.