T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

CARATHÉODORY FONKSİYONLARI İÇİN KATSAYI TAHMİNİ

Kadir BİLGİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Erhan DENİZ

ŞUBAT-2021

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Kadir BİLGİR'in Prof. Dr. Erhan DENİZ'in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "***Carathéodory Fonksiyonları İçin Katsayı Tahmini***" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy …….. ile kabul edilmiştir.

../../2021

Adı ve Soyadı **İmza**

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

KADİR BİLGİR

Kars-2021

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Carathéodory Fonksiyonları İçin Katsayı Tahmini

Kadir BİLGİR

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

Bu tez çalışmasında, genelde kompleks analizde özelde ise ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli yer işgal eden Carathéodory fonksiyonları ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır. Özellikle bu fonksiyonların katsayıları üzerine yapılan çalışmalara odaklanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Carathéodory fonksiyonu, Katsayı sınırı, Subordinasyon,

2021, 69 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Coefficient Estimate For Carathéodory Functions

Kadir BİLGİR

Kafkas University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

In this thesis study, Caratheodory functions which has a crucial place in univalent function theory as a special subject of more general field complex analysis is investigated thoroughly. Especially, researches on coefficient estimates for these types of functions are focused on.

Key Words: Analytic function, Univalent function, Caratheodory function, Coefficient bound, Subordination.

2021, 69 pages

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanan bir yüksek lisans tezidir. Tez çalışmasında Carathéodory Fonksiyonları İçin Katsayı Tahmini üzerine yapılan çalışmaların incelemesi yapılmıştır. Öncelikle beni öğrencisi olarak kabul edip danışmanlığımı üstlenen, bilgi ve deneyimlerini bana aktaran ve bu tezi en iyi şekilde yazabilmem için yönlendirmelerini yapan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Erhan Deniz'e, akademik anlamda ilerlemem için beni her koşulda hep destekleyen canım aileme teşekkürü bir borç bilirim.

KADİR BİLGİR

Kars-2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET .... **iii**
ABSTRACT .... **iv**
ÖNSÖZ .... **v**
SİMGELER DİZİNİ .... **vi**
1 GENEL BİLGİLER **1**
1.1 Giriş 1
1.2 Kuramsal Temeller 3
1.2.1 Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar 5
1.2.2 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar 9
1.2.3. Caratheodory Sınıfı ve Temel Sınıfları 16
2. MATERYAL VE YÖNTEM **28**
3 BULGULAR **32**
4 TARTIŞMA VE SONUÇ **56**
5 KAYNAKÇA **57**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
U	$\{z : \lvert z\rvert < 1, z \in \mathbb{C}\}$ kümesi
$U(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$H(U)$	U da analitik olan fonksiyonların sınıfı
A	$\left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, z \in U \right\}$ kümesi
S	$\{ f \in A : \forall z \in U$ için f ünivalent$\}$ kümesi
P	Caratheodory sınıfı
Ω	Schwarz fonksiyonlar sınıfı
S^*	Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
C	Konveks fonksiyonlar sınıfı
K	Konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı
$S^*(\alpha)$	$\alpha -$ Mertebeden yıldızıl (starlike) fonksiyonlar sınıfı
$C(\alpha)$	$\alpha -$ Mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$\arg f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı

1 GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Geometrik fonksiyonlar teorisi kompleks fonksiyonların analitik ve geometrik özelliklerini inceleyen analiz ve fonksiyonlar teorisinin en önemli dallarından biridir. 1851 yılında Riemann tarafından doktora tezi olarak sunulan Riemann Dönüşüm Teoremi geometrik fonksiyonlar teorisi için bir başlangıç noktası olmuştur. Geometrik fonksiyonlar teorisinin de en önemli dallarından biri şüphesiz ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Ünivalent fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalar $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan analitik ve birebir fonksiyonların kısaca ünivalent fonksiyonların oluşturduğu S sınıfı üzerine olmuştur. Bu sınıf üzerine ilk çalışma 1914 yılında Gronwall tarafından verilmiş olan Alan Teoremidir. Bu teorem birim diskin S sınıfına ait bir fonksiyon altındaki görüntüsünün alanını belirler.

Alan Teoremi ilk defa S sınıfına ait bir fonksiyonun ikinci katsayısının kesin üst sınırını belirlemede kullanılmıştır. Böylece ünivalent fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalarda fonksiyonların katsayıları hakkında bilgi edinmek bir temel problem haline gelmiştir. Problem ile ilgili ilk adım 1916 yılında L. Bieberbach [9] tarafından atılmıştır. S sınıfına ait f normalize edilmiş fonksiyonları

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde Taylor-Maclaurin serisi olarak ifade edilir. Bieberbach, Alan Teoremini kullanarak $|a_2| \leq 2$ olduğunu ispatlamış ve $n = 2,3,4,...$ değerleri için $|a_n| \leq n$ katsayı tahminini ortaya koymuştur. Bu tahmin üzerine birçok ünlü matematikçi çalışmış ve önemli sonuçlar elde etmişlerdir (bkz. [68]). Nihayet bu tahmin 1984 yılında L. De Branges [10] tarafından tüm $n = 2,3,4,...$ değerleri için ispatlanmıştır. $|a_n| \leq n$ için eşitliği sağlayan fonksiyon $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonudur. Bu tahminin tarihsel serüveni 2019 yılında Tokkan [68] tarafından yüksek lisans tez çalışmasında ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde S sınıfı kadar önemli bir sınıf vadır ki bu Caratheodory (P sınıfı) sınıfıdır. Bu sınıfa ait fonksiyonlar da Caratheodory fonksiyonları olarak adlandırılır. Bu fonksiyonlar U birim diskinde $p(0)=1$ ve $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşulu sağlar. Caratheodory fonksiyonlarıyla ilgili ilk çalışmayı kendisi 1907 yılında katsayıların üst sınırı üzerine yapmıştır (bkz [13]). Çalışmasında $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in P$ için $|p_n| \leq 2\ (n=1,2,\cdots)$ kesin eşitsizliğini bulmuştur. Bu eşitsizlik yardımıyla başta yıldızıl ve konveks fonksiyonlar olmak üzere ünivalent fonksiyonların birçok altsınıfındaki fonksiyonlar için katsayı problemi çözülmüştür. Şöyle ki, $F(0)=0, F'(0)=1$ ve $\operatorname{Re} F'(z)>0$ koşulunu sağlayan ünivalent fonksiyonların bir alt sınıfı M olsun. Bu durumda Caratheodory fonksiyonları ile M sınıfına ait fonksiyonlar arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki şu şekildedir:

$$F \in M \Leftrightarrow F' \in P.$$

Örneğin $F'(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ ve $F'(z)=1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ alınırsa M sınıfı sırasıyla yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfına indirgenir. Dolayısıyla, P sınıfındaki fonksiyonların özellikleri bilindiğinde M sınıfına ait fonksiyonlar hakkında bilgi sahibi olabiliriz. Mesela, P sınıfı için $|p_n| \leq 2\ (n=1,2,\cdots)$ kullanılarak yıldızıl ve konveks fonksiyonların katsayı üst sınırı elde edilmiştir. Benzer şekilde diğer altsınıflar için yine bu eşitsizlik önemli bir araçtır. Özellikle son zamanlarda popüler olan bi-ünivalent fonksiyonların başlangıç katsayılarının üst sınırlarını bulmada yine bu eşitsizlik önemli bir rol oynar. Caratheodory fonksiyonlarının katsayıları arasında oluşturulan farklı kombinasyonların üst sınırı birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir [14,15,35]. Yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıflarının belli altsınıflarına ait fonksiyonların bazı özel katsayılarının kesin üst sınırlarının belirlenmesinde, Fekete-Szegö probleminde ve Hankel determinantının üst sınırının bulunmasında bu sonuçlar kullanılır.

Caratheodory fonksiyonlarının bir diğer uygulaması yarıçap problemi üzerinedir. Bu fonksiyonlar için bükülme ve büyüme teoremleri kullanılarak ünivalent fonksiyonların belli altsınıfları için yarıçap problemi çözülebilir.

Biz bu çalışmada ünivalent fonksiyonlar teorisi için oldukça önemli olan Caratheodory fonksiyonlarının geometrik özellikleri ve katsayıları üzerine yapılan tüm çalışmaları araştırmacılar tarafından bütüncül olarak ulaşılabilecekleri bir kaynak haline getirmeyi hedefledik. Bunu yaparken özellikle Nak Eun Cho, Virendra Kumar, V. Ravichandran [14] yazarlarının "A Survey On Coefficient Estimates For Carathéodory Functions" isimli çalışmasından faydalandık.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört ayrı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde -giriş- çalışmaya giriş yapılmış ve tezde değinilen konular, bu konular üzerine yapılan çalışmalar ve kuramsal temeller verilmiştir.

İkinci bölümde -materyal ve yöntem- Caratheodory fonksiyonlarının katsayılarının belirlenmesinde rol oynayan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde -bulgular- Caratheodory fonksiyonlarının katsayıları üzerine yapılan çalışmalar ayrıntılı olarak verilmiştir

Dördüncü bölümde ise sonuç ve tartışmalara yer verilmiştir.

1.2 Kuramsal Temeller

Bu bölümde Ponnusamy ve Silverman'ın [55] kitabından yararlanılarak genel tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1: (Komşuluk) $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ koşuluyla $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının r komşuluğu) denir.

$U(z_0, r)$'ın kapanışı $\overline{U}(z_0, r)$, sınırı $\partial U(z_0, r)$ ve (0,0) merkezli r yarıçaplı disk de $U(0, r) = U_r$ ile gösterilecektir.

Özel olarak orijin merkezli açık birim disk $U=\{z:|z|<1, z\in\mathbb{C}\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.2: (İç nokta) $H\subset\mathbb{C}$ verilsin. $z_0\in H$ noktası için $U(z_0,r)\subset H$ koşulunu sağlayan $r>0$ sayısı varsa z_0 noktasına H kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 1.2.3: (Açık küme) $H\subset\mathbb{C}$ kümesinin her noktası aynı zamanda bir iç nokta ise H kümesine açık küme denir.

Tanım 1.2.4: (Kapalı küme) $H\subset\mathbb{C}$ kümesinin tümleyeni açık ise H kümesine kapalı küme denir.

Tanım 1.2.5: (Bağlantılı küme) $H\subset H_1\cup H_2$, $H\cap H_1\neq\varnothing$, $H\cap H_2\neq\varnothing$, $H\cap H_1\cap H_2=\varnothing$ koşullarını sağlayacak H_1 ve H_2 gibi boş olmayan iki açık ve ayrık küme yoksa $H\subset\mathbb{C}$ kümesine bağlantılı küme denir.

Bağlantılı olmayan kümeye bağlantısız küme denir.

Tanım 1.2.6: (Bölge) Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 1.2.7: (Süreklilik) $H\subset\mathbb{C}$, $f:H\to\mathbb{C}$ fonksiyonu ve $z_0\in H$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $|z-z_0|<\delta$ iken $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(z_0,\varepsilon)>0$ sayısı bulunuyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasında sürekli fonksiyon denir.

Tanım 1.2.8: (Eğri) $[x,y]\subset\mathbb{R}$ olsun. $\gamma:[x,y]\to\mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ ’de bir eğri (yol) denir.

Eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları sırasıyla $\gamma(x)$ ve $\gamma(y)$ noktalarıdır.

Tanım 1.2.9: (Kapalı eğri) $\gamma:[x,y]\to\mathbb{C}$ eğrisi için $\gamma(x)=\gamma(y)$ (başlangıç ve bitiş noktaları aynı) ise γ eğrisine kapalı eğri denir.

Tanım 1.2.10: (Basit eğri) Uç noktalarının kesişmesi hariç kendi kendini kesmeyen eğrilere basit eğri denir.

Bir eğri hem kapalı hem de basit ise basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi olarak adlandırılır. Bu eğri düzlemi iki bölgeye ayırır: Eğrinin iç bölgesi ve eğrinin dış bölgesi. İç bölgeye Jordan bölgesi denir.

γ eğrisi $[x, y]$ aralığında türevlenebilir, γ' sürekli ve $\gamma' \neq 0$ ise γ düzgün eğridir denir. x'ten y'e artan k için $\gamma(k)$ değerlerinin $\gamma(x)$ ten $\gamma(y)$ e doğru olan sıralanması verilen eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğride iki yön vardır: pozitif ve negatif. Eğri kapalı bir eğri ise yönü başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru bir sıralama ile oluşur.

1.2.1 Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde analitik ve ünivalent fonksiyonlar için önemli olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1.1: (Diferensiyellenebilme) $A \subset \mathbb{C}$ olsun. $f : A \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir (veya türevlenebilirdir) denir. Burada limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir. $f'(z_0)$ ifadesi $z = z_0$ noktasındaki f fonksiyonunun türevidir [55].

Tanım 1.2.1.2: (Analitik Fonksiyon) $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemde bir z_0 noktasında ve z_0 noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir [55].

Tüm düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

Örneğin; $f(z) = 2z$, $f(z) = e^z$, $f(z) = \sin z$ fonksiyonları birer tam fonksiyonlardır.

$f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun singüler (tekil) noktası denir.

$z = z_0$ noktası $f(z)$ fonksiyonunun singüler noktası ise bu durumda $f(z)$ fonksiyonu, z_0 merkezli bir kuvvet serisine açılamaz. Fakat $z = z_0$ çıkarılmış singüler nokta civarında $f(z)$ yi $(z - z_0)$ ın hem pozitif hem de negatif tam sayı kuvvetlerini içinde bulunduran Laurent serisi olarak seri gösterimi aşağıdaki gibi yapılabilir.

z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun singüler noktası ve $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

serisine $f(z)$ fonksiyonunun z_0 merkezli Laurent serisi denir. Burada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ serisi Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ serisi ise Laurent serisinin analitik kısmıdır. z_0, f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olduğunda bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisinin göz önüne alınsın. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terimi varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun kutup noktası denir. Serinin esas kısmında paydadaki $(z - z_0)$ ın en büyük kuvveti 1 ise z_0 noktası f fonksiyonunun basit kutup noktasıdır.

Analitik fonksiyonların önemini belirten teoremlerden biri Cauchy-Türev formülüdür.

Teorem 1.2.1.3: $f(z)$ fonksiyonu pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta olsun. Bu durumda $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

sağlanır [55].

Cauchy-Türev formülünden çıkarılabilecek en önemli sonuç: “ $f(z)$ bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler o bölgede analitiktir” dır. Bu durumda $f(z)$ analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\ ,\quad a_n=f^{(n)}(z_0)/n! \qquad (1.2.1.1)$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

Tanım 1.2.1.4: (Meromorf Fonksiyon) Bir $f(z)$ fonksiyonunun bir B bölgesindeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise $f(z)$ fonksiyonuna B bölgesinde meromorf fonksiyon denir [55].

Örneğin; $f(z)=e^z/z$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ de bir meromorf fonksiyondur.

Teorem 1.2.1.5: (Maksimum Prensibi) f fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon A bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alamaz [55].

Maksimum prensibinden şöyle bir sonuç çıkarılablir; A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 1.2.1.6: (Schwarz Lemması) $f(z)$ fonksiyonu U birim diskinde analitik bir fonksiyon ve $f(0)=0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq|z|$ dır. Eşitlik $\theta\in\mathbb{R}$ için $f\left(z\right)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile sağlanır [55].

Tanım 1.2.1.7: (Ünivalent Fonksiyon) $f(z)$, $B\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir analitik fonksiyon olsun. Her $z_1,z_2\in B$ için $f(z_1)=f(z_2)$ olması sadece $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1\neq z_2$ olduğunda $f(z_1)\neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) $f(z)$ fonksiyona B bölgesinde ünivalent (veya schlicht) fonksiyonu denir [17].

Eğer $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise $f(z)$ fonksiyonuna yerel ünivalent fonksiyon denir [17].

Teorem 1.2.1.8: Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeter şart $f'\left(z_0\right) \neq 0$ olmasıdır [17].

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı, $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerekli fakat yeterli değildir. Yani $f(z)$ analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ olur. Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örneğin; $f(z) = z^2$ fonksiyonu $E = \left\{z : 0 < |z| < 1, 0 < \arg z < 2\pi\right\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent fonksiyon değildir.

Tanım 1.2.1.9: (Konform Dönüşüm) Eğer bir dönüşüm, belli bir z_0 noktasından geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme z_0 noktasında konformdur denir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu, bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, $f(z)$ fonksiyonu B bölgesinde konformdur denir [55].

Örneğin; $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 2.1.10: $f(z)$ fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu konformdur [55].

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon aynı zamanda konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri de Möbiüs dönüşümüdür. Bu dönüşüm, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

şeklindedir Bu dönüşüm, genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

1851 yılında Riemann, $z-$ düzlemindeki $D \subset \mathbb{C}(D \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$ düzlemindeki D_1 bölgesi üzerine resmeden f konform fonksiyonunun varlığından söz etmiştir.

Teorem 1.2.1.11 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin $D \subset \mathbb{C}(D \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in D$ olmak üzere $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ şartlarını sağlayan D yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [17, 54, 55].

1.2.2 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin alt dallarından olan ünivalent fonksiyonların detaylı anlatımı verilecektir. Analitik olarak düşünüldüğünde ünivalent fonksiyonun türevi sıfıra eşit değilken, geometrik olarak düşünüldüğünde basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Bir başka değişle ünivalent fonksiyon basit bağlantılı bölgeleri yine basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden yararlanılarak keyfi basit bağlantılı bir bölgede tanımlanan ünivalent f fonksiyonu yerine açık birim diskte tanımlı ünivalent f fonksiyonu kullanılabilir. Seçilen f fonksiyonu için $f(0)=0,\quad f'(0)=1$ normalize şartları dikkate alınarak (1.2.1.1) ile verilen seri

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in U)$$

analitik fonksiyonuna dönüşür.

A ile normalize edilmiş analitik fonksiyonların kümesini gösterelim. Böylece

$$A=\left\{ f : \forall z \in U \text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right\}$$

yazılır.

Tanım 1.2.2.1: (S Sınıfı) U birim diskinde ünivalent olan $f \in A$ fonksiyonların oluşturduğu sınıfa S sınıfı denir ve kısaca

$$S=\{f\in A:\forall z\in U \text{ için } \quad f-\text{ünivalent}\}$$

şeklinde gösterilir [17,19,20,54,55].

Aşağıda S sınıfına ait fonksiyonlardan bazı örnekler verilmiştir.

i. $w=f(z)=z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\text{Re}(w)>-1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

ii. $f(z)=z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}-\{(-\infty,-1/2]\cup(1/2,\infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

iii. $f(z)=z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}-(-\infty,-1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

S sınıfı bir çok özelliği sağladığı gibi bazı özellikleri de sağlamıyor. Örneğin; S sınıfı toplama işlemine göre kapalı değildir. Bunun için $f_1(z)=\dfrac{z}{1-z}$ ve $f_2(z)=\dfrac{z}{1+iz}$ fonksiyonları S sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu iki fonksiyonun toplamı olan $\dfrac{1}{2}[f_1(z)+f_2(z)]$ fonksiyonun S sınıfına ait olup olmadığını kontrol edelim. Bunun için

$f_1'(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ ve $f_2'(z)=\dfrac{z}{(1+iz)^2}$ türevlerinden

$\dfrac{1}{2}\left[f_1'(z)+f_2'(z)\right]=\dfrac{1-(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$ yazılır ve $z=\dfrac{1+i}{2}\in U$ alınırsa

$\dfrac{1}{2}\left[f_1'(z)+f_2'(z)\right]=0$ olduğu görülür. Sonuç olarak S sınıfına ait iki fonksiyonun toplamının S sınıfına ait olmadığı görülür.

Aşağıda S sınıfına ait birçok özelliğin korunduğu dönüşümler verilmiştir.

<u>Teorem 1.2.2.2:</u> $f\in S$ fonksiyonu için aşağıda verilen ifadeler doğrudur.

i. Eşlenik alma:

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \bar{a}_2 z^2 + \ldots$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

ii. Rotasyon (Döndürme): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak koşuluyla

$$h(z) = e^{-i\theta} f\left(e^{i\theta} z\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n \quad \left(z \in U\right)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

iii. Genişleme: $0 < r < 1$ olma koşuluyla

$$k(z) = r^{-1} f\left(rz\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n \quad \left(z \in U\right)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

iv. Disk Otomorfizmi (Koebe ve Biebarch Dönüşümü): $z_0 \in U$ olmak koşuluyla

$$l\left(z\right) = \frac{f\left(\dfrac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right) - f\left(z_0\right)}{\left(1 - \left|z_0\right|^2\right) f'\left(z_0\right)} \quad \left(z \in U\right)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

v. Değer bölgesi dönüşümü: $\psi\left(0\right) = 0$ ve $\psi'(0) = 1$ şartlarını sağlayan ve $f\left(U\right)$ da ünivalent olan bir ψ foksiyonu için $\psi \circ f \in S$ dir.

vi. Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(U)$ olsun. Bu durumda

$$p(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w} \quad \left(z \in U\right)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

v. n. kök dönüşümü: Eğer $n = 2, 3, \ldots$ ise, bu durumda

$$v(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + \ldots,$$

fonksiyonu S sınıfına aittir [17,19,20,54,55].

Tanım 1.2.2.3: (Bükülme Teoremi) Her $f \in S$ için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak Koebe fonksiyonu ile sağlanır [17,19,20,54].

Tanım 1.2.2.4: (Büyüme Teoremi) Her $f \in S$ için

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak Koebe fonksiyonu ile sağlanır [17,19,20,54].

Bieberbach varsayımı (Bieberbach 1916): $f \in S \Rightarrow |a_n| \leq n$ dir. Eşitlik ancak ve ancak Koebe fonksiyonu için sağlanır.

Tanım 1.2.2.5: (S^* Sınıfı) $H \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. H kümesindeki y_0 sabit noktasını $\forall y \in H$ noktası ile birleştiren doğru parçasının tümü bu kümede kalıyorsa H kümesine y_0 noktasına göre yıldızıl kümedir denir. y_0 noktası özel olarak orjin seçilirse kümeye kısaca yıldızıl küme de denilir. y_0 noktasına göre U birim diskini yıldızıl bir kümeye dönüştüren f fonksiyonuna y_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel olarak U birim diskini yıldızıl bir kümeye dönüştüren f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f \in S$ yıldızıl fonksiyonlarının sınıfı S^* ile gösterilir [17,19,20,54].

Yıldızıl fonksiyonları analitik olarak ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.2.2.6 : $f \in S$ verilsin. Bu durumda $f \in S^*$ olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olmasıdır. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^* \Rightarrow |a_n| \leq n$ dir [17,19,20,54].

Dolayısıyla yıldızıl fonksiyonlar kümesi

$$S^* = \left\{ f \in S : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

şeklinde yazılır. Örneğin $f(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu yıldızıldır. Çünkü Teorem 1.2.2.6'da $z = re^{i\theta}$ ve $\left(0 \le r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi\right)$ alınırsa

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \right) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \ge \frac{1+r}{1-r} > 0$$

elde edilir.

<u>Tanım 1.2.2.7:</u> (C Sınıfı) $H \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\forall y_1, y_2 \in C$ için y_1 noktasını y_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen H içinde kalıyorsa H'ye konveks küme denir. U birim diskini konveks kümeye dönüştüren f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $f \in S$ konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir [17,19,20,54].

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

<u>Teorem 1.2.2.8:</u> $f \in S$ verilsin. Bu durumda $f \in C$ olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

olmasıdır. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in C \Rightarrow |a_n| \le 1$ dir [17,19,20,54].

Yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasındaki bağıntıyı analitik olarak ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

<u>Teorem 1.2.2.9:</u> (Alexander Teoremi) $f(z) \in C$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in S^*$ olmasıdır [17,19,20,54].

<u>Tanım 1.2.2.10:</u> (Hadamard Çarpımı) $f, g \in A$ fonksiyonları verilsin.

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \text{ ve } g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonların Hadamard çarpımı

$$(f*g)(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır [17,19,20].

Tanım 1.2.2.11: (Subordinasyon) f ve g fonksiyonları U birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. U birim diskinde $f(z)=g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega\in\Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu U da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f\prec g$ ile gösterilir [17,19,20,54].

Örneğin; $1+z\prec 1+2z$ dir. Eğer g ünivalent ise $f\prec g \Leftrightarrow f(0)=g(0)$ ve $f(U)\subseteq g(U)$ gerektirmesi doğrudur.

Teorem 1.2.2.12: (Lindelöf prensibi) f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve ünivalent, g fonksiyonu da U birim diskinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $g(0)=f(0)$ ve $g(U)\subset f(U)$ ise, bu durumda U_r diskinde her $r<1$ için $|g'(0)|\le|f'(0)|$ ve $g(U_r)\subset f(U_r)$ dir [17,19,20,54].

Subordinasyonun katsayılar üzerinde önemli bir katkısı vardır. Şöyle ki; $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ ve $G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n z^n$ fonksiyonlarının birim diskte analitik olduğunu kabul edelim. Bu durumda eğer $g(z)\prec G(z)$ ise $|b_n|\le|B_n|$ dir (bkz [17,19,20]).

Tanım 1.2.2.13: ($S^*(\alpha)$ Sınıfı) $f(z)\in A$ ve $0\le\alpha<1$ verilsin. Bu durumda

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $S^*(\alpha)$ ile gösterilir [20]

Tanım 1.2.2.14: ($C(\alpha)$ Sınıfı) $f(z)\in A$ ve $0\le\alpha<1$ verilsin. Bu durumda

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $C(\alpha)$ ile gösterilir [20].

Subordinasyon özelliği kullanılarak $C(\alpha)$ ve $S^*(\alpha)$ sınıflarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$S^*(\alpha)=\left\{f\in A:\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z},0\le\alpha<1\right\}$$

$$C(\alpha)=\left\{f\in A:1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z},0\le\alpha<1\right\}.$$

Ayrıca $S^*(0)=S^*$ ve $C(0)=C$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $S^*(\alpha)\subset S^*$ ve $C(\alpha)\subset C$ dır.

Tanım 1.2.2.15: ($K(\alpha)$ Sınıfı) $f(z)\in A$ ve $0\le\alpha<1$ verilsin. Bu durumda

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \alpha$$

şartını sağlayan $g \in S^*$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyon, bu fonksiyonların sınıfına da $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyonların sınıfı denir ve $K(\alpha)$ ile gösterilir [17,19,20,54].

Ayrıca konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı $K(0)=K$ ile gösterilir ve bu sınıfa ait olan fonksiyonlar konvekse yakın fonksiyon olarak adlandırılır.

Son olarak bahsi geçen sınıflar arasında aşağıda verilen bağıntı vardır:

$$C \subset S^* \subset K \subset S \subset A.$$

1.2.3. Caratheodory Sınıfı ve Temel Sınıfları

Bu bölümde Caratheodory sınıfının tanımı ve önemli özellikleri verilecektir.

<u>Tanım 1.2.3.1:</u> (Caratheodory sınıfı veya P Sınıfı) U birim diskinde $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ şeklindeki fonksiyonlara Caratheodory fonksiyonları denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da Caratheodory sınıfı veya (P sınıfı) adı verilir [17,19,20,54].

Örneğin; $p(z) = (1+z)/(1-z)$, $(z \in U)$ fonksiyonu P sınıfına ait olup bu fonksiyon U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden konform bir dönüşümdür. P sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez.

Örneğin; $p(z)=1+z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ için ünivalent değildir. Çünkü $z=re^{i\theta}$ alınırsa $p(z)=1+z^n=1+r^n e^{in\theta}$ olup $\operatorname{Re} p(z)=1+r^n\cos n\theta>0$ olur. Dolayısıyla $1+z^n\in P$ dır. Fakat $z=0$ için $p'(z)=nz^{n-1}=0$ olduğundan birebir değildir.

<u>Tanım 1.2.3.2:</u> (Ω Sınıfı) U birim diskinde $f(0)=0$ ve $|f(z)|<1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonlara Schwarz fonksiyonları denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir [17,19,20,54].

Ayrıca P sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$f(z)\in\Omega \Leftrightarrow p(z)=\frac{1+f(z)}{1-f(z)}\in P.$$

Bu nedenle, P sınıfındaki fonksiyonların özellikleri Ω sınıfının özelliklerinden çıkarılabilir ve bu tersi için de geçerlidir. İlerleyen kısımlarda, bu sınıflardaki fonksiyonların katsayıları arasındaki ilişkiyi kurmak için bu ilişkiden yararlanacağız.

Alexander-Noshiro-Warschawski [1,52,69] kriteri olarak literatürde yerini alan "konveks bir bölgede $f\in A$ fonksiyonu için eğer $\operatorname{Re} f'(z)>0$ ise ünivalenttir" sonucu yine P sınıfının oluşumunda önemli bir rol oynamıştır.

Yukarıda da bahseldiği üzere

$$p(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

P sınıfına aittir. Bu fonksiyon S sınıfının extremal fonksiyonu olan Koebe fonksiyonu kadar önemli bir rol oynar. $p(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu P sınıfı için $|p_n|$ nin sınırını maksimize eder. Yani bu fonksiyon P sınıfı için bir extremal fonksiyondur. Böyle P

sınıfı için $n \geq 2$ olması durumunda $p_n = 2$ olacak şekilde biri diğerine dönüştürülmesiyle elde edilmeyen birçok başka fonksiyon vardır. Örneğin, $n = 2$ ise $\frac{1+z^2}{1-z^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} \in P$ olup $p_n = 2$ dır. Benzer şekilde $n \geq 2$ değeri için farklı fonksiyonlar bulunabilir (bkz. [13,19]). Ayrıca $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu U da ünivalent bir fonksiyon ve birim diski sağ yarı düzleme dönüştürdüğünden $p(0) = 1$ ile normalize edilmiş bir analitik p fonksiyonu P sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart U da $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ olmasıdır. Ayrıca P konveks bir kümedir ve U'da analitik fonksiyonlar kümesinin kompakt bir altkümesidir (bkz. [21]). Caratheodory fonksiyonları ile yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasında yakından bir bağ vardır. Şöyle ki; $f \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$ ve $f \in C \Leftrightarrow \frac{1+zf''(z)}{f'(z)} \in P$ yazılabilir. Buradan şu çıkarımlar yapılabilir, P sınıfındaki fonksiyonların özellikleri bilindiğinde yıldızıl ve konveks fonksiyonların nasıl özelliklere sahip oldukları hakkında bilgi edinilebilir. Örneğin, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ sağlayan bir fonksiyon olsun. Böylece $f'(z) = p(z) \in P$ ve bazı $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in P$ fonksiyonlar için $a_n = p/n$ olur. Dolayısıyla Caratheodory fonksiyonlarının katsayılarının bilinmesiyle $|a_n|$ ile ilgili tahminler kolayca elde edilir.

1970 yılında Janowski [27] $P_M := \{ p \in P : |p(z) - M| < M \}$ sınıfını tanımladı ve P_M sınıfındaki fonksiyonlar için $\operatorname{Re} p(z)$ ve $\operatorname{Re} \frac{zp'(z)}{p(z)}$ değerlerinin sınırlarını araştırdı. Ayrıca bu sınırlar Janowski [27] tarafından P_M sınıfı ile bağlantılı yıldızıl fonksiyonlar için büyüme, bükülme teoremleri ve katsayı tahminlerini araştırmak için kullanıldı. Daha sonra böyle fonksiyonlar için $|a_n| \leq \frac{2}{n}$ olduğu bilgisine değinilecektir. Şimdi P

sınıfının bir alt sınıfını tanımlayalım. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\operatorname{Re} p(z) > \alpha$ şartını sağlayan $p \in P$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa $P(\alpha)$ sınıfı denir. Bu durumda

$$P(\alpha) = \left\{ p \in P : p(z) \prec \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}, 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

yazılır.

P sınıfının genelleştirilmiş sınıflarından biri

$$P[A,B] = \left\{ p \in P : p(z) \prec \frac{1+Az}{1+Bz} =: p_{A,B}, -1 \leq B < A \leq 1 \right\}$$

şeklindedir. Bu sınıf ilk olarak 1973 yılında Janowski [28] tarafından tanımlandı ve çalışıldı. Özel olarak $P[1-2\alpha,-1] =: P(\alpha)$ $(0 \leq \alpha < 1)$ ve $P[1,-1] = P$ dır. Ayrıca aynı çalışmada Janowski sırasıyla Janowski yıldızıl ve konveks fonksiyonları olarak bilinen

$$S^*[A,B] := \left\{ f \in S : \frac{zf'(z)}{f(z)} \in P[A,B] \right\},$$
$$C[A,B] := \left\{ f \in S : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P[A,B] \right\}$$

alt sınıflarını da tanımladı.

Sonrasında, 1997 yılında Ravichandran ve arkadaşları [58] tüm $n \in \mathbb{N}$ için genel bir sınıf olan

$$P_n[A,B] = \left\{ p(z) = 1 + p_n z^n + p_{n+1} z^{n+1} + \ldots : p(z) \prec p_{A,B}(z) \right\}$$

sınıfını tanımladılar. Kolaylık olması açısından ihtiyaç duyulan yerlerde şu notasyonları kullanacağız:

$$P_1[A,B] = P[A,B] \, , P_n(\alpha) := P_n[1-2\alpha,-1] \text{ ve } P_n := P_n[1,-1].$$

Şimdi Carathéodory sınıfı ve onun alt sınıfları için büyüme ve bükülme teoremleri gibi çeşitli geometrik özellikleri ihtiva eden birçok başka sonuç verelim. Bu çalışmada ele alınan sonuçlar, birkaç istisna dışında, başka bir çalışmalarda da bulunabilir ve bu nedenle ispatları yapılmamıştır.

Aşağıdaki sonuç, bir fonksiyonun P sınıfında yer alması için yeterli şartı verir.

<u>Teorem 1.2.3.3</u>: μ, $[0,2\pi]$ aralığında azalan olmayan bir fonksiyon ve $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 2\pi$ olsun. Bu durumda

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_0(ze^{-it}) d\mu(t) \quad (z \in U), \qquad (1.2.3.1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon P sınıfındandır [19].

1911 yılında Herglotz [25], (1.2.3.1) 'in gerekli olduğunu da ispatladı. Yani, her $p \in P$ için $[0,2\pi]$ aralığında $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 2\pi$ ve (1.2.3.1) olacak şekilde $\mu(t)$ azalan olmayan fonksiyonu vardır. Herglotz aynı çalışmasında $p \in P$ fonksiyonu için Stieltjes integralleri yardımıyla (olasılık ölçüleri)

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} d\mu(t) \quad (z \in U), \qquad (1.2.3.2)$$

formülünü verdi. Burada $\mu(t)$, $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ şartları altında $[0,2\pi]$ aralığında azalan olmayan fonksiyondur. Bu bize P sınıfındaki fonksiyonlar ile ∂U üzerindeki olasılık ölçümleri kümesi arasındaki birebir eşleşmeyi verir. Bu temel bulgular ise S 'nin alt sınıflarının integral temsilleri hakkında genel teorileri yazmamızda öncülük eder. Bu şekilde tanımlanan μ sembolüne $p \in P$ fonksiyonun Herglotz ölçümü denir.

Bir sonraki teorem P sınıfındaki fonksiyonların hangi dönüşümler altında korunduğu ile alakalıdır.

Teorem 1.2.3.4 : h, h_1 ve h_2 P sınıfına ait fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki H fonksiyonu P sınıfındadır [19]:

1. $H(z) = h(e^{it}z) \quad (t \in \mathbb{R})$,
2. $H(z) = h(z)^t$ or $H(z) = h(tz) \quad (t \in [-1,1])$,
3. $H(z) = \dfrac{1}{h(z)}$,
4. $H(z) = (h(z))^{t_1}(h(z))^{t_2} \quad (t_1, t_2, t_1 + t_2 \in [0,1])$,
5. $H(z) = \dfrac{1}{a}\left[h\left(\dfrac{z+\lambda}{1+\bar{\lambda}z}\right) - ib\right] (h(z) = a + ib,\ \lambda \in U)$,
6. $H(z) = \dfrac{h(z)+ib}{1+ibh(z)} \quad (b \in \mathbb{R})$.

Bunun gibi P sınıfının korunduğu başka dönüşümleri görmek için [36] çalışmasına bakınız. Bu dönüşümler ardışık katsayıları tahminlerini elde etmede oldukça kullanışlıdır. Aşağıdaki teorem Helly seçim teoremi ile ispatlanmıştır (bkz. [54]).

Teorem 1.2.3.4: $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ birim disk U da analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar denktir [54]:

1. $p \in P$,
2. (1.2.3.2) olacak şekilde $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ koşulunu sağlayan $[0, 2\pi]$ aralığında bir $\mu(t)$ artan fonksiyonu vardır,
3. $p - k = \bar{p}_k \ (k \geq 1)$ şartı altında $m = 1, 2, 3, \cdots$ değerleri için $\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} p_{k-l}\lambda_k\bar{\lambda}_l \ (\lambda_i \in \mathbb{C},\ i = 0, 1, 2, ...m)$ negatif değildir.

(1.2.3.2) deki gösterim doğrudan sırasıyla aşağıdaki büyüme ve bükülme tahminlerini verir:

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \operatorname{Re} p(z) \le |p(z)| \le \frac{1-|z|}{1+|z|}$$

$$|p'(z)| \le \frac{2\operatorname{Re} p(z)}{1-|z|^2} \le \frac{2}{\left(1-|z|\right)^2}.$$

Her iki durumda da $p(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonun eşitliği sağladığı açıktır. Carathéodory fonksiyonlarının daha yüksek mertebeden türevlerinin modülü üzerindeki üst sınırla ilgili daha genel bir sonuç [19] çalışmasında verilmiştir. Bulunan sonuç

$$\left|p^{(k)}(z)\right| \le \frac{2\left(k!\right)}{\left(1-|z|\right)^{k+1}} \quad \left(k \ge 0\right)$$

şeklindedir.

Özellikle, $k=1$ için, yukarıdaki eşitsizlik Carathéodory fonksiyonları için yukarıdaki büyüme tahminini vermektedir. Her sabit $z \in U$ için $p \in P$ fonksiyonu

$$\left|p(z) - \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}\right| \le \frac{2|z|}{1-|z|^2} \tag{1.2.3.3}$$

diski tarafından ihtiva edilir.

Yine (1.2.3.3) eşitsizliğinden yararlanarak büyüme tahmini elde edilebilir. Ayrıca, büyüme tahmininden P sınıfının yerel düzgün sınırlı bir sınıf olduğu ve dolayısıyla normal aile olduğu sonucu da çıkarılabilir. Aslında P sınıfı kompakt bir ailedir (bkz. [21]).

$\left[0,2\pi\right]$ aralığında $\mu\left(2\pi\right)-\mu(0)=1$ şartıyla $\mu(t)$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $p \in P(\alpha)$ fonksiyonu için Herglotz temsil formülünden (bkz. [19])

$$p\left(z\right)=\int_0^{2\pi} \frac{1+\left(1-2\alpha\right)ze^{-it}}{1-ze^{-it}} d\mu(t) = \int_0^{2\pi} p_\alpha(ze^{-it}) d\mu(t) \quad (z \in U), \tag{1.2.3.4}$$

elde edilir. Burada $p_\alpha(z) := (1+(1-2\alpha)z)/(1-z)$ dır. (1.2.3.4) daki formülünden $p \in P(\alpha)$ fonksiyonları için aşağıdaki büyüme ve bükülme tahminleri elde edilir:

$$\frac{1-(1-2\alpha)|z|}{1+|z|} \leq \operatorname{Re} p(z) \leq \frac{1+(1-2\alpha)|z|}{1-|z|} \text{ ve } |p'(z)| \leq \frac{2(\operatorname{Re} p(z)-\alpha)}{1-\alpha}\frac{1}{1-|z|^2}.$$

Buradan kolaylıkla $h(z) = (p(z)-\alpha)/(1-\alpha)$ fonksiyonun P sınıfının üyesi olduğu söylenebilir (bkz. [19]).

1963 yılında MacGregor [48] $p \in P_n$ için

$$\left|\frac{zp'(z)}{p(z)}\right| \leq \frac{2n|z|^{n-1}}{1-|z|^{2n}}$$

olduğunu ispatladı.

MacGregor (1.2.3.4) deki ikinci eşitsizliğe alternatif ve kısa ispatını verdi ve bu sonuçları yarıçap problemlerinde kullandı. Sonrasında, Shah [66] aşağıda verilen teoremde MacGregor'un sonuçlarını genelleştirdi. Ayrıca Shah aynı çalışmada α-mertebeden yıldızıl fonksiyonlar ve diğer başka sınıflar için yarıçap problemlerini inceledi.

<u>Teorem 1.2.3.5</u>: Eğer $p \in P_n(\alpha)$ ise, bu durumda

$$\left|\frac{zp'(z)}{p(z)}\right| \leq \frac{2(1-\alpha)n|z|^n}{(1+|z|^n)(1+(1-2\alpha)|z|^n}$$

dır [66].

<u>Teorem 1.2.3.6</u>: Eğer $p \in P_n(\alpha)$ ise, bu durumda

$$\operatorname{Re} p(z) \geq \frac{1+(2\alpha-1)|z|^n}{1+|z|^n}$$

dır [66].

1973 yılında Janowski [28] $P[A,B]$ sınıfındaki bir p fonksiyonunun aynı zamanda P sınıfına ait olması için gerek ve yeterli koşulun bazı $l \in P$ fonksiyonları için

$$p(z) = \frac{(1+A)l(z)+1-A}{(1+B)l(z)+1-B}$$

şeklinde olması gerektiğini ispatlamıştır.

Ayrıca $p \in P[A,B]$ fonksiyonu için Herglotz temsil formülü

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+Aze^{-it}}{1+Bze^{-it}} d\mu(t) = \int_0^{2\pi} p_{A,B}(ze^{-it}) d\mu(t) \qquad (z \in U)$$

şeklindedir. Janowski aynı çalışmasında (1.2.3.3) eşitsizliğinin genel versiyonunu

$$\left| p(z) - \frac{1-AB|z|^2}{1-B^2|z|^2} \right| \leq \frac{(A-B)|z|}{1-B^2|z|^2} \tag{1.2.3.5}$$

şeklinde vermiştir.

Janowski ayrıca varyasyonel metodu kullanarak $P[A,B]$ sınıfı için $\operatorname{Re}\left(p(z)+zp'(z)/p(z)\right)$, $\operatorname{Re}\left(zp'(z)/p(z)\right)$ ve $\operatorname{Re} p(z)$ değerlerinin sınırlarını elde etmiştir. Bu sonuçlar daha sonra Janowski yıldız fonksiyonların konvekslik yarıçapını elde etmek için kullanılmıştır. Geometrik olarak, $p \in P[A,B]$ olması için gerek ve yeter şartın $p(0)=1$ ve $p(U)$ görüntü bölgesinin reel eksen üzerinde başlangıç ve bitim noktaları $d_1 := (1-A)/(1-B) = p_{A,B}(-1)$ ve $d_2 := (1+A)/(1+B) = p_{A,B}(1)$ olan bir açık disk tarafından ihtiva edilmesidir. Başka diğer değişle, $0 < d_1 < 1 < d_2$ olmak üzere $p(U)$ nun başlangıç ve bitim noktaları d_1 ve d_2 olan bir açık diskin içinde kalacak şekilde $-1 \leq B < A \leq 1$ koşulunu sağlayan A ve B reel sayılarının var olmasıdır. Kolayca görülebilir ki, A ve B nin özel değerlerinin seçiminde $P[A,B]$ sınıfı bilinen birçok alt sınıflara indirger (bkz [20]). 1979 yılında Junega ve Mogra [29] normalleştirilmiş bir analitik fonksiyonun türevinin $P[A,B]$ sınıfına ait olduğu bir sınıfı çalışmıştır. $P[A,B]$ sınıfı ile ilgili daha fazla sonuç için [28] çalışmasına bakılabilir. Carathéodory fonksiyonlarının Herglotz temsilinden faydalanarak, Kaczmarski [30], $[0,2\pi]$ aralığında $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ koşulu altında μ azalan olmayan fonksiyonu ve $-1\leq B<A\leq 1$ için

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+Aze^{it}}{1+Bze^{it}}d\mu(t) \qquad (z\in U)$$

şeklindeki p fonksiyonların kümesi olan $\tilde{P}[A,B]$ sınıfını tanımlamıştır. Kacmarski $\tilde{P}[A,B]$ kümesi için konvekslik yarıçapını ve $|B|<1$ olması durumunda $\tilde{P}[A,B]\neq P[A,B]$ olduğunu ispatladı. 1993 yılında Ma ve Owa [47], (1.2.3.3)'ün bir başka genelleştirilmiş versiyonunu aşağıdaki teoremle verdi.

<u>Teorem 1.2.3.7</u>: $p\in P$ olsun. Bu durumda $0<\gamma\leq 1$ için

$$\left|\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}-p^{\gamma}(z)\right|\leq\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}-\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\gamma}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç kesindir [47] (ayrıca bkz [6]).

1997 yılında Ravichandran ve arkadaşları [58], (1.2.3.5) 'in genellemesi olan aşağıdaki sonucu vermiştir.

<u>Teorem 1.2.3.8</u>: $p\in P_n[A,B]$ olsun. Bu durumda

$$\left|p(z)-\frac{1-AB|z|^{2n}}{1-B^2|z|^{2n}}\right|\leq\frac{(A-B)|z|^n}{1-B^2|z|^{2n}}$$

eşitsizliği sağlanır [58].

Özellikle $p \in P_n(\alpha)$ için

$$\left| p(z) - \frac{1-(1-2\alpha|z|^{2n}}{1-|z|^{2n}} \right| \le \frac{2(1-\alpha)|z|^{n}}{1-|z|^{2n}}$$

olduğu elde edilir.

Onlar pozitif mertebeden yıldızıllık ve konveks fonksiyonların, düzgün konvekslik ve yıldızıl fonksiyonların özel bazı alt sınıflarının özelliklerini de araştırmışlardır. 2011 yılında Ali ve arkadaşları [4] $A \neq B$ ve $|B| \le 1$ olmak üzere herhangi A ve B kompleks sayıları için Teorem 1.2.3.8 genelleştirmişlerdir.

2015 yılında Arif ve arkadaşları [7], $-1 \le B < A \le 1,\ 0 \le \alpha < 1$ ve $0 < \beta \le 1$ için $p(0) = 1$ ile

$$p(z) \prec \alpha + (1-\alpha)\left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^{\beta} =: p_{A,B}^{\alpha,\beta}(z)$$

koşulunu sağlayan p fonksiyonlarının genel bir $P_\beta[A,B,\alpha]$ sınıfını tanımlamışlardır.

Açık olarak görülür ki; $p_{A,B}^{0,1}(z) =: p_{A,B}(z)$ ve $P_1[A,B,0] =: P[A,B]$ dır. Ayrıca $P_\beta[A,B,0] =: P_\beta[A,B]$ olsun.

Onlar aynı çalışmada $[0,2\pi]$ aralığında $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 2\pi$ koşuluyla μ azalan olmayan fonksiyon olmak üzere $p \in P_\beta[A,B,\alpha]$ fonksiyonları için Herglotz temsil formülünü (bkz. [7])

$$p(z) = \alpha + \frac{1-\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{(1+Aze^{-it}}{1+Bze^{-it}}\right)d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_{A,B}^{\alpha,\beta}(ze^{-it})\,d\mu(t) \quad (z \in U)$$

şeklinde elde etmişlerdir. Yine bunlara ek olarak aşağıdaki büyüme tahminini de belirlediler.

<u>Teorem 1.2.3.9</u>: $p \in P_\beta[A,B]$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{1-A|z|}{1-B|z|}\right)^\beta \leq \operatorname{Re} p(z) \leq |p(z)| \leq \left(\frac{1+A|z|}{1+B|z|}\right)^\beta$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç $p_{A,B}^{0,\beta}(z)$ fonksiyonu için kesindir [7].

Arif ve arkadaşları aynı çalışmada $P_\beta[A,B,\alpha]$ sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizliğini vermişlerdir.

<u>Teorem 1.2.3.10</u>: $p(z)=1+p_1z+p_2z+.......\in P_\beta\left[A,B,\alpha\right]$ olsun. Bu durumda

$$|p_n| \leq \beta(1-\alpha)(A-B)$$

dır. Sonuç $p_{A,B}^{\alpha,\beta}(z)$ ekstremal fonksiyonu için kesindir [7].

Yukarıdaki iki teoremden, özellikle $P\left[A,B\right]$ sınıfındaki fonksiyonlar için büyüme teoremini ve katsayı sınırlarını elde edebiliriz. P sınıfı ve onun altsınıfları ile ilgili diğer detaylı bilgiler, Robertson [60,61,62], Bernardi [8], Ruscheweyh ve Singh [64] 'ın çalışmalarında mevcuttur.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Caratheodory fonksiyonlarının P sınıfı, Geometrik Fonksiyon Teorisinde önemli bir rol oynar. Bu önem, ünivalent fonksiyonlar sınıfının alt sınıflarının çoğunun bu P sınıfı ile ilişkili olması gerçeğinden anlaşılabilir. Bu bölümde, Caratheodory fonksiyonlar için çeşitli katsayı tahminlerinde kullanılan yöntemlere yer verilmiştir.

Bundan sonra özel olarak belirtilmediği sürece $w \in \Omega$ fonksiyonu $w(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$ biçiminde ve $p \in P$ fonksiyonu da $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots$ biçiminde olduğu anlaşılacaktır. Önceki bölümün başında da belirtildiği üzere Ω ve P sınıfları arasında

$$w(z) \in \Omega \Leftrightarrow p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \in P$$

bağıntısı mevcuttur. Bundan yararlanarak w ve p fonksiyonlarının katsayıları arasında

$$p_{n:=}\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \cdots & b_1 & -1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_2 & b_1 \end{vmatrix}$$

ve

$$b_n := \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\begin{vmatrix} p_1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & p_{n-4} & \cdots & p_1 & 2 \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots & p_2 & p_1 \end{vmatrix}$$

şeklinde bir ilişki vardır (bkz [19]).

Bu determinatların bazı özel durumlarında

$$\begin{cases} p_1 = 2b_1 \\ p_2 = 2b_2 + 2b_1^2 \\ p_3 = 2b_3 + 4b_1b_2 + 2b_1^3 \\ p_4 = 2b_4 + 4b_1b_3 + 2b_2^2 + 6b_1^2b_2 + 2b_1^4 \end{cases} \tag{2.1}$$

ve

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{p_1}{2} \\ b_2 = \dfrac{2p_2 - p_1^2}{4} \\ b_3 = \dfrac{4p_3 - 4p_1p_2 + p_1^3}{8} \\ b_4 = \dfrac{8p_4 - 8p_1p_3 - 4p_2^2 + 6p_1^2p_2 - p_1^4}{16} \end{cases} \tag{2.2}$$

sonuçlar elde edilir.

Böylece Schwarz fonksiyonlarının ve Carathéodory fonksiyonlarının katsayıları için sınırlar bunlardan herhangi birinin sınırının bilinmesi durumunda elde edilebilir. Üçgen eşitsizliği ve Schwarz fonksiyonları için iyi bilinen $|b_i| \leq 1 \ (i \in \mathbb{N})$ kullanılırsa (2.2) den

$$|p_1| \leq 2,$$

$$|2p_2 - p_1^2| \leq 4,$$

$$|4p_3 - 4p_1p_3 + p_1^3| \leq 8$$

ve

$$|8p_4 - 8p_1p_3 - 4p_2^2 + 6p_1^2p_2 - p_1^4| \leq 16$$

sonuçlarına varabiliriz.

Özellikle Caratheodory fonksiyonlarının $k = 2,3,...$ için p_k katsayılarının p_1 katsayısı cinsinden yazılımını sağlayan önemli bir araç Teoplitz determinantıdır. Bu sayede gerek Caratheodory sınıfındaki fonksiyonların katsayıları arasındaki bağıntıların gerekse ünivalent fonksiyonların altsınıflarındaki fonksiyonların katsayıların üstsınırı için daha iyi sonuçlar elde edilebilir. Aşağıdaki sonuç Caratheodory [12] tarafından ispatlanmıştır.

<u>Teorem 2.1:</u> $p \in P$ kuvvet serilerinin P 'de yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$D_n := \begin{vmatrix} 2 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p-1 & 2 & p_1 & \cdots & p_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ p_{n-1} & p_{-n+1} & p_{-n+2} & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

Teoplitz determinantlarının ve $p_{-k} = \overline{p}_k$ ların negatif olmamasıdır. Onların hepsi $p_k > 0$ ve $t_k \neq t_j$, $k \neq j$ için $p(z) = \sum_{k=1}^{m} p_k (1+e^{itk}z)(1-e^{itk}z)$ haricinde tümü pozitiftir. Ayrıca $n < m-1$ için $D_n > 0$, $n \geq m, n \in \mathbb{N}$ için de $D_n = 0$ dır [12,33].

Teorem 2.1'i uygulayarak Libera ve Zlotkiewicz [40], p_2 ve p_3 katsayılarının p_1 cinsinden alternatif bir temsilini sağlayan aşağıdaki sonucu kanıtlamışlardır. Bu temsiller, başlangıç katsayılarının ve Hankel determinantının üst sınırını bulmak için oldukça faydalıdır.

<u>Teorem 2.2:</u> $p \in P$ ise bu durumda $|x| \le 1$ ve $|y| \le 1$ şartını sağlayan bazı x ve y değerleri için

$$2p_2 = p_1^2 + x(4 - p_1^2)$$

ve

$$4p_3 = p_1^3 + 2p_1(4 - p_1^2) - p_1(4 - p_1^2)x^2 + 2(4 - p_1^2)(1 - |x|^2)y$$

dır [40].

2009 yılında Hayami ve Owa [23], α mertebeden Caratheodory fonksiyonları için benzer bir temsili aşağıdaki teoremle vermiştir.

<u>Teorem 2.3:</u> $\operatorname{Re} p(z) > \alpha$ ve $p(z) = b_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$ olsun. $\alpha \in [0, b_0)$ olmak üzere $|x| \le 1$ ve $|y| \le 1$ şartını sağlayan bazı x ve y değerleri için

$$2(b_0 - \alpha)\, p_2 = p_1^2 + x(4(b_0 - \alpha)^2 - p_1^2)$$

ve

$$\begin{aligned} 4(b_0 - \alpha)\, p_3 = p_1^2 + 2p_1(4(b_0 - \alpha)^2 - p_1^2)x - p_1(4(b_0 - \alpha)^2 - p_1^2)x^2 \\ + 2(b_0 - \alpha)\left(4(b_0 - \alpha)^2 - p_1^2\right)(1 - |x|^2)y \end{aligned}$$

dır [23].

2018 yılında Ohno ve Sugawa (bkz. [15,35]) katsayı üst sınırlarında daha iyi sonuçlar veren aşağıdaki lemmayı vermişlerdir.

<u>Lemma 2.4</u>: a, b ve c herhangi reel saylar olmak üzere $Y(a,b,c) := \max_{z \in \bar{U}} \left\{ |a + bz + cz^2| + 1 - |z|^2 \right\}$ olsun. Bu durumda;

i. Eğer $ac \geq 0$ ise,

$$Y(a,b,c)=\begin{cases} |a|+|b|+|c| & \left(|b| \geq 2(1-|c|)\right) \\ 1+|a|+\dfrac{b^2}{4(1-|c|)} & \left(|b| < 2(1-|c|)\right) \end{cases}$$

dır.

ii. Eğer $ac < 0$ ise,

$$Y(a,b,c)=\begin{cases} 1-|a|+\dfrac{b^2}{4\left(1-|c|\right)} & \left(-4ac(c^{-2}-1) \leq b^2;\ |b| < 2(1-|c|)\right) \\ 1+|a|+\dfrac{b^2}{4\left(1+|c|\right)} & \left(b^2 < \min\left\{4\left(1+|c|\right)^2, -4ac(c^{-2}-1)\right\}\right) \\ R(a,b,c) & \left(Diğer\ durumlarda\right) \end{cases}$$

dır. Burada

$$R(a,b,c)=\begin{cases} |a|+|b|-|c| & \left(|c|(|b|+4|a|) \leq |ab|\right) \\ -|a|+|b|+|c| & \left(|ab| \leq |c|(|b|-4|a|)\right) \\ \left(|a|+|c|\right)\sqrt{1-\dfrac{b^2}{4ac}} & \left(Diğer\ durumlarda\right) \end{cases}$$

şeklindedir.

3 BULGULAR

Caratheodory fonksiyonlarının katsayı sınırları üzerine ilk çalışma Caratheodory [13] tarafından 1907 yılında yapılmıştır. Çalışmasında (1.2.3.2) Herglotz dönüşüm formülünü kullanarak aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 3.1: $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in P$ olsun. Bu durumda

$$p_n = 2\int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t)$$

ve dolayısıyla

$$|p_n| \le 2$$

dır. Buradaki 2 sınırı kesindir. Kesinliği sağlayan fonksiyon şu şeklindedir. $k = 1, 2, 3.....n_0$ için $\mu_k \ge 0$ ve $\sum_{k=1}^{n_0} \mu_k = 1$ olmak üzere eğer $\eta = e^{2\pi i/n_0}$ ve

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n_0} \mu_k \frac{1+\eta^k z}{1-\eta^k z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

ise, bu durumda $F \in P$ ve $p_{n_0} = 2$ dır [13, 19].

Özel olarak, $n_0 = 1$ alınırsa $\mu_1 = \eta = 1$ olacağından eşitliği sağlayan fonksiyon

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

şeklinde olur. Ünivalent fonksiyonların alt sınıfları genelde Caratheodory sınıfı ile yakından alakalı olduğu için bu sınıflar için katsayı probleminde $|p_n| \le 2$ eşitsizliği önemli bir araçtır.

Literatürde, Teorem 3.1 Caratheodory teoremi olarak da bilinir. Teorem 3.1 in literatürde farklı birçok ispati vardır (bkz. [19,26,57]).

Caratheodory fonksiyonlarının katsayıları üzerine bir diğer eşitsizlik aşağıdaki teoremde verilmiştir.

<u>Teorem 3.2:</u> $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in P$ olsun. Bu durumda

$$\left| p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right| \le 2 - \frac{|p_1|^2}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç $p(z)=\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu ile kesindir [21].

Bu eşitsizlik ünivalent fonksiyonların alt sınıflarının katsayı problemlerinde daha iyi sonuç almada kullanılır.

Caratheodory teoreminin uygulamalarından biri Schwarz fonksiyonlarının katsayı eşitsizliklerini elde etmektir. Yani $|p_n|\leq 2$ ve (2.1) birlikte düşünüldünde

$$|b_1|\leq 1,\quad |b_2+b_1^2|\leq 1,\quad |b_3+2b_1b_2+b_1^3|\leq 1 \text{ ve } |b_4+2b_1b_3+b_2^2+3b_1^2b_2+b_1^4|\leq 1$$

sonuçları elde edilir.

Ayrıca $\operatorname{Re} f'(z)>0 \quad (z\in U)$ şartını sağlayan normalize analitik fonksiyonlar için $|p_n|\leq 2$ kullanılarak $|a_n|=\frac{|p_n|}{n}\leq\frac{2}{n}$ elde edilir.

1973 yılında Leutwiler ve Schober [38], Grunsky-Nehari'nin [50] eşitsizliklerini ve Schiffer ve Tammi [65] tarafından bu eşitsizliklerin genelleştirmelerini kullanarak, pozitif reel kısmı olan fonksiyonlarla ilgili birçok sonucu inceledi. Özellikle, Toeplitz'in [67] bulgularından yola çıkarak aşağıdaki sonuçları kanıtladılar.

Teorem 3.3: $p\in P$ olsun. Bu durumda

$$\left|\sum_{m,n=0}^{n_0} p_{m+n}x_mx_n\right|\leq\sum_{m,n=0}^{n_0} p_{m-n}x_m\overline{x}_n \quad \left(x_0,x_1,\ldots x_{n_0}\in\mathbb{C}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $p_0=2$ ve $p_{-n}=\overline{p}_n \; (n=1,2,\cdots)$ şeklindedir [38].

Yukarıdaki teoremdeki eşitsizliğin x_0 a göre ekstrem değerini alarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.4: $p\in P$ olsun. Bu durumda

$$\left|\sum_{m,n=1}^{n_0}\left(p_{m+n}-\frac{p_mp_n}{2}\right)x_mx_n\right|\leq\sum_{m,n=1}^{n_0}\left(p_{m-n}-\frac{p_m\overline{p}_n}{2}\right)x_m\overline{x}_n \quad \left(x_0,x_1,\ldots x_{n_0}\in\mathbb{C}\right)$$

eşitsizliği sağlanır [38].

Bu teoremde x_i için belirli özel değerler seçerek, Caratheodory fonksiyonları için bazı klasik sonuçlar elde edilebilir. Özellikle, $x_k = 1$ ve $x_n = 0$ $(n \neq k)$ seçimi aşağıdaki sonucu verir.

<u>Teorem 3.5:</u> $p \in P$ olsun. Bu durumda

$$\left| p_{2k} - \frac{p_k^2}{2} \right| \leq 2 - \frac{\left| p_k^2 \right|}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik

$$p(z) = \frac{2 + (p_k + \eta \overline{p}_k) z^k + 2\eta z^{2k}}{2 - (p_k - \eta \overline{p}_k) z^k - 2\eta z^{2k}} \quad \left(|\eta| \leq 1 \right)$$

fonksiyonu ile sağlanır [38].

$w \in \Omega$ için $w_1(z) = -w(z) \in \Omega$ olduğundan $\left| b_4 - 2b_1b_3 + b_2b_1^2 \right|$ ve $\left| b_4 + 2b_1b_3 + b_2b_1^2 \right|$ fonksiyonelleri aynı üst sınıra sahiptir. Ayrıca (2.2) kullanarak $2\left(b_4 + 2b_1b_3 + b_2b_1^2 \right) = p_4 - p_2^2/2$ olduğunu görebiliriz. Teorem 3.5 de, $\left| p_n \right| \leq 2$ kullanılırsa $\left| p_4 - p_2^2/2 \right| \leq 2 - \left| p_2 \right|^2 / 2 \leq 2$ olur. Buradan $\left| b_4 + 2b_1b_3 + b_2b_1^2 \right| \leq 1$ sonucuna ulaşılır. Dorff ve Szynal [16] bu sonuçları kullanarak yüksek mertebeden Schwarzian türevleri için kesin sınır elde etmiştir. Diğer bir çalışma herhangi μ ve v reel sayıları ve b_i komplex katsayılı w Schwarz fonksiyonu için $\psi\left(\mu, v, w\right) := \left| b_3 + \mu b_1 b_2 + v b_1^3 \right|$ fonksiyoneli üzerinde tahminlerdir. Bununla alakalı sonuç Prokhorov ve Szynal [56] tarafından araştırıldı (ayrıca bkz [16]). Sonra 2001 yılında Kiepiela ve arkadaşları [32] w Schwarz fonksiyonunun b_i katsayılarının reel olmasını kabul ederek $\psi\left(\mu, v, w\right)$ üzerindeki keskin sınırı araştırdılar. Son zamanlarda Ali ve arkadaşları [5] bu fonksiyonelin üst sınırı üzerine çalışma yapmıştır.

Hayami ve Owa [23] çalışmalarında $\alpha-$mertebeden $p-$valent yıldızıl fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantının üst sınırı problemini araştırıken, Carathéodory fonksiyonlarının $n.$ katsayı sınırının bir genellemesini elde etmiştir.

<u>Teorem 3.6:</u> $\operatorname{Re} p(z)>\alpha$ ve $p(z)=b_0+p_1z+p_2z^2+p_3z^3+...$ olsun. Bu durumda $\alpha\in[0,b_0)$ için $|p_n|\leq 2(b_0-\alpha)$ eşitsizliği doğrudur. Eşitlik

$$p(z)=\frac{b_0+(b_0-2\alpha)z}{1-z}$$

fonksiyonu ile sağlanır [23].

<u>İspat</u>. $\operatorname{Re} p(z)>\alpha$ olduğundan

$$q_{b_0,\alpha}(z)=\frac{p(z)-\alpha}{b_0-\alpha}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{b_0-\alpha}$$

fonksiyonu P sınıfına aittir. Carathéodory fonksiyonlarının katsayısı 2 ile sınırlı olduğu için $\left|\frac{p_n}{b_0-\alpha}\right|\leq 2$ olup dolayısıyla $|p_n|\leq 2(b_0-\alpha)$ elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$|p_n|\leq 2$ eşitsizliğinin bir diğer genellemesi Peng [53] tarafından 2010 yılında aşağıdaki teoremle verilmiştir.

<u>Teorem 3.7:</u> $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n\prec\frac{1+Az}{1+Bz}$ olsun. Bu durumda $|p_n|\leq B-A$ $(-1\leq A<B\leq 1)$ eşitsizliği sağlanır. Sonuç kesindir [53].

Teorem 3.6 nın ispatında görülür ki;

$$q_{1,\alpha}(z)=\frac{p(z)-\alpha}{1-\alpha}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{1-\alpha}$$

fonksiyonu P sınıfına aittir. Bundan yola çıkarak Liu ve ark. [41] $P(\alpha)$ sınıfı için aşağıdaki sonucu vermiştir (ayrıca bkz. [42]).

Teorem 3.8: $p \in P(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$\left| p_2 - \frac{p_1^2}{2(1-\alpha)} \right| \leq 2(1-\alpha) - \frac{|p_1|^2}{2(1-\alpha)}$$

ve

$$\left| p_3 - \frac{p_1 p_2}{(1-\alpha)} + \frac{p_1^3}{4(1-\alpha)^2} \right| \leq 2(1-\alpha) - \frac{|p_1|^2}{2(1-\alpha)}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca

$$|p_1| \leq 2(1-\alpha)$$

ve

$$\left| p_2 - \frac{p_1^2}{(1-\alpha)} \right| \leq 2(1-\alpha)$$

doğrudur [41].

1969'da Livingston [43] konvekse yakın fonksiyonların katsayıları üzerine sınırı araştırken aşağıdaki sonucu ispatladı.

Teorem 3.9: $\operatorname{Re} p(z) > 0$ ve $p(z) = b_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$ olsun. Bu durumda $1 \leq s \leq n-1$ için

$$\left| \frac{p_n}{b_0} - \frac{p_s p_{n-s}}{b_0^2} \right| \leq 2 \left| \frac{\operatorname{Re} b_0}{b_0} \right| \leq 2$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikler tüm n ve s değerleri için kesindir. Eşitlik

$$p(z) = (\operatorname{Re} b_0)\frac{1+z}{1-z} + i \operatorname{Im} b_0 \quad (\operatorname{Re} b_0 > 0)$$

fonksiyonu ile sağlanır [43].

Bu eşitsizlik daha sonra Libera ve Zlotkiewicz [40] tarafından konveks fonksiyonların tersi için katsayı problemi çalışmalarında kullanılmıştır. Özellikle $b_0 = 1$ ise, yukarıdaki sonuç aşağıdaki iyi bilinen Livingston eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.10: $p \in P$ olsun. Bu durumda $1 \le s \le n-1$ için

$$\left| p_n - p_s p_{n-s} \right| \le 2$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikler tüm n ve s değerleri için kesindir. Eşitlik

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu ile sağlanır [43].

Yukarıdaki teoremlerdeki eşitsizliklerden P sınıfındaki fonksiyonların katsayı fonksiyonelleri için başka sınırlar bulmak mümkündür. Örneğin $p_n - p_s^2 p_{n-2s} = p_n - p_s p_{n-s} + p_s(p_{n-s} - p_s p_{n-2s})$ eşitliğinde üçgen eşitsizliği kullanılırsa $\left| p_n - p_s^2 p_{n-2s} \right| \le \left| p_n - p_s p_{n-s} \right| + \left| p_s(p_{n-s} - p_s p_{n-2s}) \right|$ yazılır. Bu eşitsizlikte Teorem 3.10 daki eşitsizlik ve $|p_n| \le 2$ kullanılırsa $\left| p_n - p_s^2 p_{n-2s} \right| \le 6$ elde edilir (bkz [70]).

2010 yılında Hayami ve Owa [24] Teorem 3.9 un başka bir genel formunu verdi.

Teorem 3.11: $\operatorname{Re} p(z) > 0$ ve $p(z) = b_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ olsun. Bu durumda $1 \le s \le n-1$ için

$$\left| \mu \frac{p_n}{b_0} - \frac{p_s p_{n-s}}{b_0^2} \right| \le \begin{cases} 2\dfrac{\operatorname{Re} b_0}{|b_0|} \sqrt{\mu^2 + 4\left(\dfrac{\operatorname{Re} b_0}{|b_0|}\right)^2 (1-\mu)} \le 2(2-\mu) & (\mu \le 1), \\ 2\mu \dfrac{\operatorname{Re} b_0}{|b_0|} \le 2\mu & (\mu \ge 1) \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik

$$p(z) = (\operatorname{Re} b_0)\frac{1+z^d}{1-z^d} + i \operatorname{Im} b_0 \;\; (\mu \le 1) \text{ ve } p(z) = (\operatorname{Re} b_0)\frac{1+z^l}{1-z^l} + i \operatorname{Im} b_0 \;\; (\mu \ge 1)$$

fonksiyonları için doğrudur [24].

Yukarıdaki teoremde özel olarak $h(z)=p(z)-\alpha=1-\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}p_k z^k \quad (0\le\alpha<1)$ alınırsa, $\operatorname{Re}h(z)>0$ ve $b_0=1-\alpha>0$ elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

<u>Sonuç 3.12:</u> $p\in P(\alpha)$ olsun. Bu durumda $1\le s\le n-1$ için

$$\left|(1-\alpha)\mu p_n - p_s p_{n-s}\right| \le \begin{cases} 2(1-\alpha)^2(2-\mu), & (\mu\le 1) \\ 2(1-\alpha)^2\mu, & (\mu\ge 1) \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik

$$p(z)=\frac{1+(1-2\alpha)z^d}{1-z^d}\ (\mu\le 1) \text{ ve } p(z)=\frac{1+(1-2\alpha)z^l}{1-z^l}\ (\mu\ge 1)$$

fonksiyonları için doğrudur [24].

Hayami ve Owa bu sonuçları, genelleştirilmiş Hankel determinantı için kesin bir sonuç elde etmede kullandılar.

2016 yılında Efraimidis [18] Teoremi 3.10’u genelleştirdi ve Livingston'a [43] göre çok daha basit bir ispatını verdi. Sonuçlarını sunmadan önce bazı tanımlara ve gösterimlere ihtiyacımız vardır. $n\in\mathbb{N}$ ve n. dereceden birim kök kümesi $D_n=\{e^{2k\pi i/n}:k=1,2,3,...,n\}$ olsun. $n=0$ için $D_0=\partial U=T$ yazılır. (X,T) topolojik uzay olsun. Bir μ ölçümünün supportu; x’in her N_x açık komşuluğu pozitif bir ölçüme sahip olacak şekildeki tüm $x\in X$ noktalarının kümesi olarak tanımlanır. μ sembolü p 'nin Herglotz ölçümü olup onun supportu $\operatorname{supp}(\mu)$ dir ve

$$\operatorname{supp}(\mu):=\{\ x\in X : x\in N_x,\ \mu(N_x)>0\ \}$$

şeklindedir.

O, aşağıdaki sonucu $|1-2v|\le 1$ olacak şekilde tüm v değerleri için ispatladı.

<u>Teorem 3.13:</u> $p \in P$ olsun. Bu durumda $v \in \mathbb{C}$ ve $1 \le s \le n-1$ şartını sağlayan tüm n ve s tamsayıları için

$$\left| p_n - v p_s p_{n-s} \right| \le 2 \max \left\{ 1, \left| 1 - 2v \right| \right\}$$

dır. v, $p \in P$ fonksiyonunun Hertglotz ölçümü olsun. $\left|1-2v\right| < 1$ durumunda eşitlik ancak ve ancak bazı $\varphi \in \left[0, 2\pi\right)$ değerleri için $p_k = 0$ ve $\operatorname{supp}\left(\mu\right) \subseteq e^{i\varphi} U_n$ olması ile sağlanır. $\left|1-2v\right| > 1$ durumunda eşitlik ancak ve ancak bazı $\theta, \varphi \in \left[0, 2\pi\right)$ değerleri için $\operatorname{supp}\left(\mu\right) \subseteq e^{i\theta} U_k \cap e^{i\varphi} U_n$ olursa sağlanır. $\left|1-2v\right| = 1$ için eşitlik $\operatorname{supp}\left(\mu\right)$ tek bir noktadan oluşursa sağlanır [18].

$v \in \mathbb{C}$ ve $p \in P$ için Efraimidis

$$A_{k,n}\left(v\right) := \begin{vmatrix} p_{n+k} & p_{n+k-1} & p_{n+k-2} & \cdots & p_{n+1} & p_n \\ v p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ v p_2 & v p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v p_{k-1} & v p_{k-2} & v p_{k-3} & \cdots & 1 & 0 \\ v p_k & v p_{k-1} & v p_{k-2} & \cdots & v p_1 & 0 \end{vmatrix}$$

determinantını tanımladı ve aşağıdaki sonucu ispatladı.

<u>Teorem 3.14:</u> Eğer $p \in P$ ise, bu durumda tüm $v \in \mathbb{C}$, $k \ge 0$ ve $n \ge 1$ için kesin olan $\left| A_{k,n}\left(v\right) \right| \le 2 \max \left\{ 1; \left|1-2v\right|^k \right\}$ eşitsizliği doğrudur. μ, $p \in P$ fonksiyonunun Hertglotz ölçümü olsun. $\left|1-2v\right| < 1$ durumunda eşitlik ancak ve ancak bazı $\varphi \in \left[0, 2\pi\right)$ değerleri için $p_k = 0$ ve $\operatorname{supp}\left(\mu\right) \subseteq e^{i\varphi} U_{n+k}$ olması ile sağlanır. $\left|1-2v\right| \ge 1$ ise eşitlik $\operatorname{supp}\left(\mu\right)$ tek bir noktadan oluşursa sağlanır [18].

Teorem 3.13 ve 3.14, pozitif reel kısmı olan normalize edilmemiş $p(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ fonksiyonları için benzer bir versiyonlara sahiptir. Böyle p

fonksiyonları için $b_0 = x + iy\,(x>0)$ ve $q(z) = \dfrac{p(z) - iy}{x}$ alınırsa $q \in P$ olduğu açıktır. Bu durumda $q_0 = 1$ ve $q_n = \dfrac{p_n}{x}$ $(n \in \mathbb{N})$ katsayılarına sahiptir. Sonra Teorem 3.13 ve 3.14 deki eşitsizliklerin her iki tarafını x/b_0 ile çarpıp ve v nin yerine vx/b_0 yazılırsa

$$\left|\frac{p_n}{b_0} - v\frac{p_k p_{n-k}}{b_0^2}\right| \le 2\frac{\operatorname{Re} b_0}{|b_0|}\max\left\{1;\left|1 - 2v\frac{\operatorname{Re} b_0}{b_0}\right|\right\}$$

ve

$$\left|A^{*}_{k,n}(v)\right| \le 2\frac{\operatorname{Re} b_0}{|b_0|}\max\left\{1;\left|1 - 2v\frac{\operatorname{Re} b_0}{b_0}\right|^{k}\right\}$$

elde edilir.

Burada p_j tüm j'ler için p_j / b_0 ile yer değiştirildiğinde $A^{*}_{k,n}(v)$, $A_{k,n}(v)$'nın modifiye edilmiş formu olur.

Bu yöndeki en popüler sonuçlardan biri Ma ve Minda [45] tarafından aşağıda verilmiştir. Bu sonuç Fekete-Szegö katsayı problemlerinde önemli bir araç rolü üstlenir.

<u>Teorem 3.15:</u> Eğer $p \in P$ ise, bu durumda

$$\left|p_2 - vp_1^2\right| \le \begin{cases} -4v + 2 & (v \le 0), \\ 2 & (0 \le v \le 1), \\ 4v - 2 & (v \ge 1) \end{cases}$$

eşitsizliği doğrudur. $v < 0$ veya $v > 1$ olduğunda eşitlik ancak ve ancak $p(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ ya da onun rotasyonlarıyla sağlanır. $0 < v < 1$ için eşitlik ancak ve ancak $p(z) = \dfrac{1+z^2}{1-z^2}$ ya da onun rotasyonlarıyla sağlanır. $v = 0$ için eşitlik ancak ve ancak

$$p(z)=\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{1+z}{1-z}+\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)\frac{1-z}{1+z} \quad (0\le\gamma\le 1,\ z\in U)$$

ya da onun rotasyonlarıyla sağlanır. $v=1$ için eşitlik ancak ve ancak $v=0$ durumundaki fonksiyonlardan birinin $\frac{1}{p(z)}$ hali için sağlanır. Ayrıca $0<v<1$ için,

$$\left|p_2-vp_1^2\right|+v\left|p_1\right|^2\le 2 \quad (0<v\le 1/2)$$

ve

$$\left|p_2-vp_1^2\right|+(1-v)\left|p_1\right|^2\le 2 \quad (1/2\le v<1)$$

eşitsizlikleri doğrudur [45].

Herhangi bir kompleks v için yukarıdaki eşitsizlik Keogh ve Merkes [31] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir

Teorem 3.16: Eğer $p\in P$ ise, bu durumda herhangi bir v kompleks sayısı için

$$\left|p_2-vp_1^2\right|\le 2\max\{1;|2v-1|\}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak

$$p(z)=\frac{1+z^2}{1-z^2} \text{ ve } p(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonlarıyla gerçeklenir [31,59].

Herhangi bir v reel sayısı için $\left|p_2-vp_1^2\right|$ fonksiyonel ile ilgili başka bir tahmin, Mishra ve Gochhayat [49] (ayrıca bkz [17]) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.17: Eğer $p\in P$ ise, bu durumda herhangi bir v reel sayısı için

$$\left|p_2 - vp_1^2\right| \le \begin{cases} 2+(v-1)\left|p_1\right|^2 & (v > 1/2), \\ 2-\dfrac{1}{2}\left|p_1\right|^2 & (v = 1/2), \\ 2-v\left|p_1\right|^2 & (v \le 1/2) \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır [49].

Schwarz lemmasının bir sonucu olarak $p \in P$ için $\left|p_n\right| \le 2$ de eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $|x| = 1$ için $p(z) = \dfrac{1+xz}{1-xz}$ olmasıdır. Buradan

$$p \in P,\ p_1 = 2x \ \ (|x| = 1) \Rightarrow p(z) = \frac{1+xz}{1-xz}$$

yazılır.

Aşağıdaki sonuçlar Caratheodory teoreminin birer sonuçlarıdır.

<u>Teorem 3.18:</u> Eğer $p \in P$ ise, bu durumda aşağıdaki mutlak değerlerin hepsi 2 ile sınırlıdır:

$i.\left|p_1^2 - p_2\right|,$

$ii.\left|p_1^3 - 2p_1p_2 + p_3\right|,$

$iii.\left|p_1^4 + 2p_1p_3 + p_2^2 - 3p_1^2p_2 - p_4\right|,$

$iv.\left|p_1^5 + 3p_1p_2^2 + 3p_1^2p_3 - 4p_1^3p_2 - 2p_1p_4 - 2p_1p_3 + p_5\right|,$

$v.\left|p_1^6 + 6p_1^2p_2^2 + 4p_1^3p_3 + 2p_1p_5 + 2p_2p_4 - 2p_1p_3 + p_3^2 - p_2^2 - 5p_1^4p_2 - 3p_1^2p_4 - 6p_1p_2p_3 - p_6\right|.$

Burada 2 sınırı kesindir [22, 40].

Aşağıdaki eşitsizlikler Libera and Zlotkiewicz’ın [40] bir sonucundan elde edilebilir:

$i. \left|2p_1^2 - p_2\right| \le 6,$

$ii. \left|-6p_1^3 + 7p_1p_2 - 2p_3\right| \le 24,$

$iii. \left|24p_1^4 - 46p_1^2p_2 + 22p_1p_3 + 7p_2^2 - 6p_4\right| \le 120,$

$iv. \left|-120p_1^5 + 96p_1p_4 + 50p_2p_3 + 326p_1^3p_2 - 202p_1^2p_3 - 127p_1p_2^2 - 24p_5\right| \le 720.$

1985 yılında Livingston [44] elemanları, reel kısmı pozitif olan bir fonksiyonun katsayısı olan belirli determinantların modülü üzerinde kesin sınırlar elde etti. Bu eşitsizlikleri, çok değerli fonksiyonların belirli bir alt sınıfı için katsayı problemlerini çözmede kullandı. Aynı makalede Livingston, Teorem 3.9'u da şu şekilde genelleştirmiştir.

Teorem 3.19: $\operatorname{Re} b_0 > 0$ ve p fonksiyonu

$$p(z) = (\operatorname{Re} b_0)\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{1+ze^{it_j}}{1-ze^{it_j}} + i\operatorname{Im} b_0 = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

şeklinde verilsin. Burada ve t_j ve λ_j sayıları $j = 1,2,3...$ için $\lambda_j \ge 0$ ve $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$ koşullarını sağlayan reel sayılardır. Tüm s, k ve n doğal sayıları için $Q_k^{(s)}$ determinantı

$$Q_k^{(s)} := \begin{vmatrix} e^{i(n+s-2)tk} & p_{(n+s-2)}/b_o & p_{n+s-3} & \cdots & p_n/b_o \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ e^{itk} & p_1/b_o & 1 & \cdots & 0 \\ e^{2itk} & p_2/b_o & p_1/b_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i(s-2)tk} & p_{s-2}/b_o & p_{s-3}/b_o & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $n \ge 2$ ve $s \ge 1$ tam sayıları için $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left|Q_k^{(s)}\right|^2 = 1$ doğrudur [44].

Livingston aynı çalışmada Teorem 3.19'u kullanarak $p(z)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n$ şeklindeki pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar için $\operatorname{Re} b_0>0$ olması durumunda aşağıdaki sonuçları vermiştir.

Teorem 3.20: $p(z)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n$ fonksiyonu $\operatorname{Re} p(z)>0$ $(z\in U)$ ve $\operatorname{Re} b_0>0$ şartlarını sağlasın. Ayrıca tüm s doğal sayıları için $A_k^{(s)}$ determinantı

$$A_k^{(s)}:=\begin{vmatrix} p_{n+s}/b_0 & p_{n+s-1}/b_0 & p_{n+s-2}/b_0 & \cdots & p_n/b_0 \\ p_1/b_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2/b_0 & p_1/b_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_s/b_0 & p_{s-1}/b_0 & p_{s-2}/b_0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $n\geq 1$ ve $s\geq 1$ tam sayıları için

$$\left|A_k^{(s)}\right|\leq 2\left|\frac{\operatorname{Re} b_0}{b_0}\right|\leq 2$$

eşitsizliği doğrudur. Eşitlik $p(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu ile sağlanır [44].

Teorem 3.21: $p(z)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n$ fonksiyonu $\operatorname{Re} p(z)>0$ $(z\in U)$ ve $\operatorname{Re} b_0>0$ şartlarını sağlasın. Ayrıca $1/p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n z^n$ verilsin. Bu durumda tüm $m\geq 1,\ t\geq 0$ ve $n\geq m$ tam sayıları için

$$\left|\sum_{k=t}^{m}q_{k-t}p_{n-k}\right|\leq 2\left|\frac{\operatorname{Re} b_0}{b_0}\right|\leq 2$$

eşitsizliği sağlanır [44].

1957 yılının başlarında Nehari ve Netanyahu [51] aşağıdaki sonuçları ispatladı.

<u>Teorem 3.22:</u> $p(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$ ve $q(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k$ fonksiyonları P sınıfına ait olsun. Bu durumda $r(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k q_k}{2} z^k$ fonksiyonu da P sınıfına aittir [51].

<u>Teorem 3.23:</u> $p(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k=1+G(z)$ ve $h(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k$ fonksiyonları P sınıfına ait olsun. Eğer

$$\gamma_k=\frac{1}{2^k}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k}\binom{k}{m}\beta_m\right) \quad (\gamma_0=1)$$

olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\gamma_{k-1}G^k(z)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k z^k$$

ise, bu durumda $|A_n|\leq 2$ dir [51].

Nehari ve Netanyahu, Teorem 3.23 ve 3.24'ü kullanarak meromorfik yıldız fonksiyonların başlangıç katsayılarının kesin sınırını elde etmişlerdir.

Caratheodory fonksiyonları ilgili katsayı problemlerinden bir diğeri ardışık katsayılar için kesin bir üst sınır bulmaktır. P sınıfını koruyan birkaç dönüşüm vardır (bkz. [36]). Özellikle, $p\in P$ ise

$$q(z)=\frac{1-z^2}{z}-\frac{(1-z)^2}{z}p(z)$$

fonksiyonu için $\operatorname{Re} q(z)>0 \quad (z\in U)$ dır.

Bu özelliği kullanarak, Robertson [63], 1981 yılında pozitif reel kısma sahip fonksiyonların ardışık katsayılarıyla ilgili aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

<u>Teorem 3.24:</u> $p\in P$ olsun. Bu durumda $n\geq 3$ için

$$\left|p_{n+1}-p_n\right|\le(2n+1)\left|2-p_1\right|$$

ve

$$\left\|p_{n+1}\right|-\left|p_n\right\|\le(2n+1)\left|2-p_1\right|$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $2n+1$ en iyi sınırdır. Eşitlik

$$p(z)=\frac{1-z^2}{1-2z\cos\phi+z^2}$$

fonksiyonuyla sağlanır [63].

Robertson bu sonucu kullanarak, yıldız ve konveks fonksiyonlar için ardışık katsayıların farkı üzerine kesin bir tahmin de elde etti. Goodman [19], sabit p_1 için $\left|p_{n+1}-p_n\right|$ üzerindeki kesin sınır hakkında bir soru sordu. Bu soruya kısmi bir cevap Teorem 3.10 da $b_0=1,\ p_1=1$ ve $s=n-1$ alarak elde edilebilir. Buradan $\left|p_{n+1}-p_n\right|\le 2$ elde edilir. Eğer $b_0=1,\ p_1=2$ ve $s=n-1$ alınırsa da $\left|p_{n+1}-2p_n\right|\le 2$ olur.

$f(z)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k$ ve $g(z)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k\in P$ fonksiyonları için

$$(f*g)(z)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_kz^k$$

Hadamard çarpımı göz önünde alınarak, 1958 de Komatu [34], eğer $f,g\in P$ ise $f*g\in P$ olduğunu göstermiştir. Bu sonucu kullanarak 2010 yılında Brown [11] pozitif reel fonksiyonların ardışık katsayıları ile ilgili aşağıdaki sonuçları bulmuştur.

<u>Teorem 3.25:</u> $p\in P$ olsun. Bu durumda $m,n\in\mathbb{N}$ ve $v\in\mathbb{R}$ için

$$\left|e^{iv}p_{n+m}-p_n\right|\le 2\sqrt{2-\operatorname{Re}\left(e^{iv}p_m\right)}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç kesindir [11].

2016 yılında Efraimidis [18], Teorem 3.25'in alternatif ve kolay bir ispatını vermiştir. Teorem 2.35'de $m=1$ ve $v=0$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Teorem 3.26: $p \in P$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$\left|p_{n+1}-p_n\right| \leq 2\sqrt{2-\operatorname{Re}\left(p_1\right)}$$

eşitsizliği doğrudur. Eşitlik $\alpha=\arccos\left(b/2\right)$ ve $\operatorname{Re} b_1=2b$ olmak üzere $p(z)=\left(1+e^{i\alpha}z\right)/\left(1-e^{i\alpha}z\right)$ fonksiyonu için sağlanır [11].

Teorem 3.25 ardışık katsayılarının kuvvetlerine de genelleştirilebilir.

Teorem 3.27: $p \in P$ ve $v \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $m,n,N \in \mathbb{N}$ için

$$\left|e^{iv}p_{n+m}^N-p_n^N\right| \leq 2^N\sqrt{2^N-2^{1-N}\operatorname{Re}\left(e^{iv}p_m^N\right)}$$

eşitsizliği doğrudur [11].

Teorem 3.28: $p \in P$ olsun. Bu durumda $n \geq 3$ için

$$\left|(p_{n+1}-p_n)-(p_{n-1}-p_{n-2})\right| \leq 2\sqrt{\left(\operatorname{Re}\left(2-p_1\right)\right)\left(\operatorname{Re}\left(2-p_2\right)\right)}$$

eşitsizliği doğrudur [11].

P sınıfındaki fonksiyonlar özelliklerini belirli dönüşümler altında koruduğu gerçeğini kullanarak, 2000 yılında Lecko [36] aşağıdaki sonucu vermiştir.

Teorem 3.29: Sabit $\alpha \in [0,1)$ ve $\zeta \in \bar{U}$ için $p \in P(\alpha)$ olsun. Bu durumda $n \geq 2$ için

i. $$\left|\zeta p_2-\left(1+|\zeta|^2\right)p_1+2(1-\alpha)\bar{\zeta}\right| \leq 2\left[\left(1+|\zeta|^2\right)(1-\alpha)-\operatorname{Re}\left(\zeta p_1\right)\right],$$

ii. $\left|\zeta p_{n+1}-\left(1+|\zeta|^2\right)p_n+\bar{\zeta}p_{n-1}\right|\le 2\left[\left(1+|\zeta|^2\right)(1-\alpha)-\mathrm{Re}\left(\zeta p_1\right)\right],$

iii. $\left|\left(\left||\zeta|p_{n+1}-p_n\right|\right)-|\zeta|\left(\left||\zeta|p_n-p_{n-1}\right|\right)\right|\le 2\left[\left(1+|\zeta|^2\right)(1-\alpha)-|\zeta|\mathrm{Re}\left(p_1\right)\right],$

eşitsizlikleri doğrudur. Eşitlik

$$p(z)=\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$$

fonksiyonu için sağlanır [36].

Teoremde 3.29'da $\alpha=0$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

<u>Teorem 3.30:</u> $\zeta\in\bar{U}$ için $p\in P$ olsun. Bu durumda $n\ge 2$ için

i. $\left|\zeta p_2-\left(1+|\zeta|^2\right)p_1+2\bar{\zeta}\right|\le 2\left[\left(1+|\zeta|^2\right)-\mathrm{Re}\left(\zeta p_1\right)\right],$

ii. $\left|\zeta p_{n+1}-\left(1+|\zeta|^2\right)p_n+\bar{\zeta}p_{n-1}\right|\le 2\left[\left(1+|\zeta|^2\right)-\mathrm{Re}\left(\zeta p_1\right)\right],$

iii. $\left|\left(\left||\zeta|p_{n+1}-p_n\right|\right)-|\zeta|\left(\left||\zeta|p_n-p_{n-1}\right|\right)\right|\le 2\left[\left(1+|\zeta|^2\right)-|\zeta|\mathrm{Re}\left(p_1\right)\right],$

eşitsizlikleri doğrudur. Eşitlik

$$p(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu için sağlanır [36].

Teorem 3.30' un (i) eşitsizliğinde ζ 'ya uygun değerler vererek aşağıdaki özel sonuçlar elde edilir:

1. $\zeta = 1$ için $|p_2 - 2p_1 + 2| \leq 2(2 - \operatorname{Re}(p_1))$,
2. $\zeta = -1$ için $|p_2 + 2p_1 + 2| \leq 2(2 + \operatorname{Re}(p_1))$,
3. $\zeta = i$ için $|p_2 + 2ip_1 - 2| \leq 2(2 + \operatorname{Im}(p_1))$,
4. $\zeta = -i$ için $|p_2 - 2ip_1 - 2| \leq 2(2 - \operatorname{Im}(p_1))$.

Teorem 3.30' un (ii) eşitsizliğinde ζ 'ya uygun değerler vererek aşağıdaki özel sonuçlar elde edilir:

1. $\zeta = 1$ için $|p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}| \leq 2(2 - \operatorname{Re}(p_1))$,
2. $\zeta = -1$ için $|p_{n+1} + 2p_n + p_{n-1}| \leq 2(2 + \operatorname{Re}(p_1))$,
3. $\zeta = i$ için $|p_{n+1} + 2ip_n - p_{n-1}| \leq 2(2 + \operatorname{Im}(p_1))$,
4. $\zeta = -i$ için $|p_{n+1} - 2ip_n + p_{n-1}| \leq 2(2 - \operatorname{Im}(p_1))$,
5. $\zeta = 1/n \ (n = 2,3,4...)$ için
$$\left| p_{n+1} - \left(n + \frac{1}{n} \right) p_n + p_{n-1} \right| \leq 2\left(n + \frac{1}{n} - \operatorname{Re}(p_1) \right),$$
6. $\zeta = 1 - 1/n \ (n = 2,3,4...)$ için
$$\left| p_{n+1} - \left(\frac{n}{n-1} + \frac{n-1}{n} \right) p_n + p_{n-1} \right| \leq 2\left(\frac{n}{n-1} + \frac{n-1}{n} - \operatorname{Re}(p_1) \right).$$

Teorem 3.30' un (iii) eşitsizliğinde $|\zeta| = 1$ alınırsa

$$\big| |p_{n+1} - p_n| - |p_n - p_{n-1}| \big| \leq 2(2 - \operatorname{Re}(p_1))$$

elde edilir.

Lecko [36] çalışmasında ardışık katsayılarla alakalı aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

<u>Teorem 3.31:</u> Sabit $\alpha \in [0,1)$ ve $\zeta \in \bar{U}$ için $p \in P(\alpha)$ olsun. Bu durumda $n \geq 2$ için

$$\left|\zeta p_{n+1}-p_n\right|\leq\begin{cases}2\dfrac{1-|\zeta|^n}{1-|\zeta|}\left[(1-\alpha)\left(1+|\zeta|^2\right)-\operatorname{Re}\left(\zeta p_1\right)\right]+\left|2(1-\alpha)-\zeta p_1\right|\left|\zeta\right|^n, & |\zeta|<1;\\ (2n+1)\left|2(1-\alpha)-\zeta p_1\right|, & |\zeta|=1\end{cases}$$

ve

$$\left|\left|\zeta p_{n+1}\right|-\left|p_n\right|\right|\leq\begin{cases}2\dfrac{1-|\zeta|^n}{1-|\zeta|}\left[(1-\alpha)\left(1+|\zeta|^2\right)-\operatorname{Re}(\zeta)\left|p_1\right|\right]+\left|2(1-\alpha)-\zeta\left|p_1\right|\right|\left|\zeta\right|^n, & |\zeta|<1;\\ (2n+1)\left|2(1-\alpha)-\zeta\left|p_1\right|\right|, & |\zeta|=1\end{cases}$$

eşitsizlikleri doğrudur. $\forall\zeta\in\left[0,1\right]$ için sonuçlar kesindir. Eğer $\zeta\in[0,1)$ ise eşitlik

$$p(z)=\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$$

fonksiyonu ile, $\zeta=1$ ise yeterince küçük $\theta\in\left[0,2\pi\right)$ için

$$p(z)=\frac{1-2\left(\alpha\cos\theta\right)z-\left(1-2\alpha\right)z^2}{1-2\left(\cos\theta\right)z+z^2}=1+2\left(1-\alpha\right)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\cos n\theta\right)z^n$$

fonksiyonu ile sağlanır [36].

Şimdi P sınıfına ait fonksiyonların katsayıları arasındaki kombinasyonların kesin bir üst sınırı için yapılan çalışmalar verilecektir. Bu sınırlar çoğunlukla A sınıfının belli altsınıflarına ait fonksiyonların dördüncü ve beşinci katsayılarının keskin sınırlarının bulunmasında faydalı olmuştur.

f ve g fonskiyonları U birim diskinde analitik fonksiyon olsun. Leverenz [39], $\left|g\left(z\right)\right|\leq\left|f\left(z\right)\right|$ $\left(z\in U\right)$ eşitsizliğine denk olan eşdeğer pozitif yarı-tanımlı Hermitian formunun yeni bir türevini verdi ve bunu ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları için Hermitian formlarını araştırmak için kullandı. Aşağıdaki sonuç bunula alakalıdır.

<u>Teorem 3.32:</u> $p\in P$ olması için gerek ve yeter şart $\varlimsup_{k\to\infty}\left|z_k\right|^{1/k}<1$ şartını sağlayan sağlayan $\left\{z_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ kompleks dizisi için

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\left|2z_j+\sum_{k=1}^{\infty}p_k z_{k+j}\right|^2-\left|\sum_{k=1}^{\infty}p_{k+1}z_{k+j}\right|^2\right\}\geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [39].

1996 yılında Ali ve Singh [3] Teorem 3.32' yi kullanarak aşağıdaki sonucu vermiştir.

<u>Teorem 3.33:</u> $p\in P$ olsun. Bu durumda

$$\left|p_4-\left(p_1p_3+\alpha p_2^2\right)+\alpha p_1^2 p_2\right|\leq\begin{cases}2, & 0<a\leq 1;\\ 2(2\alpha-1), & \alpha\geq 1\end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik $|\varepsilon|=1$ olmak üzere; ilk durum için $p(z)=\left(1+\varepsilon z^4\right)/\left(1-\varepsilon z^4\right)$ fonksiyonu ile, ikinci durum için de $p(z)=\left(1+\varepsilon z^2\right)/\left(1-\varepsilon z^2\right)$ veya $p(z)=\left(1+\varepsilon z\right)/\left(1-\varepsilon z\right)$ fonksiyonlarından biriyle sağlanır [3].

Ali ve Singh, Teorem 3.23, 3.32 ve Teorem 3.33'ü kullanarak güçlü yıldızıl fonksiyonların dördüncü ve beşinci katsayıları için keskin üst sınır elde etmişlerdir. Ancak, Lecko ve Sim [37] Teorem 3.33'ün ispatında bazı eksikliler olduğunu belirterek ispatın doğru versiyonunu vermiştir. 1993'de Ma ve Minda [46], P sınıfındaki fonksiyonların katsayıları ile ilgili aşağıdaki sonuçları vermiştir.

<u>Teorem 3.34:</u> $p\in P$ olsun. Bu durumda

i. $\left|p_{2n}-\frac{1}{2}p_n^2\right|\leq 2-\frac{1}{2}|p_n|^2$,

ii. $\left|\mu p_{2n}p_n^2-p_n^4\right|\leq 8(\mu-2)\quad(\mu\geq 4)$,

iii. $\left|\mu p_{2n}p_n-p_n^3\right|\leq 4(\mu-2)\quad(\mu\geq 6)$

eşitsizlikleri doğrudur [46].

Teorem 3.32 özellikle bazı analitik fonksiyonların dördüncü ve beşinci katsayılarının kesin sınırını elde etmek için oldukça faydalıdır. Örneğin, Ali [2], bu teoremi kullanarak Teorem 3.34'ün farklı bir ispatını vermiştir. Ali [2] Teorem 3.32'de $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin özel bir değeri için aşağıda sonucu vermiştir.

Teorem 3.35: $p \in P$ olsun. Bu durumda $0 \le \beta \le 1$ ve $\beta(2\beta - 1) \le \delta \le \beta$ için

$$\left| p_3 - 2\beta p_1 p_2 + \delta p_1^3 \right| \le 2$$

eşitsizliği sağlanır [2].

Teorem 3.35'de $\delta = \beta$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edelir.

Teorem 3.36: $p \in P$ ve $0 \le \beta \le 1$ olsun. Bu durumda,

$$\left| p_3 - 2\beta p_1 p_2 + \beta p_1^3 \right| \le 2$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak; $\beta = 0$ ise $\lambda_k > 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ olduğunda

$$p(z) = p_3(z) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \frac{1 + \varepsilon e^{(-2\pi ik)z/3}}{1 - \varepsilon e^{(-2\pi ik)z/3}} \quad (|\varepsilon| = 1)$$

fonksiyonuyla, $\beta = 1$ ise $\dfrac{1}{p_3(z)}$ fonksiyonuyla, $0 < \beta < 1$ ise de $p(z) = (1 + \varepsilon z)/(1 - \varepsilon z)$ veya $p(z) = \left(1 + \varepsilon z^3\right)/\left(1 - \varepsilon z^3\right)$ $(|\varepsilon| = 1)$ fonksiyonuyla sağlanır [2].

Teorem 3.37: $p \in P$ olsun. Bu durumda,

$$\left| p_3 - (\mu + 1) p_1 p_2 + \mu p_1^3 \right| \le \begin{cases} 2, & 0 \le \mu \le 1; \\ 2|\mu - 1|, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır [2].

Ali [2], Teorem 3.35 ve 3.36'yı güçlü yıldızıl fonksiyonların tersinin ilk dört katsayısı için kesin sınırları ve Fekete-Szegö fonksiyonelliğine ilişkin tahmini belirlemede kullanmıştır. 2015 yılında Ravichandran ve Verma [57] Theorem 3.32'yi kullanarak aşağıdaki sonuçları vermiştir.

Teorem 3.38: α, β, γ ve a sayıları $0 < \alpha < 1$, $0 < a < 1$ ve

$$8a(1-a)\left[(\alpha\beta-2\gamma)^2+\left(\alpha(a+\alpha)-\beta^2\right)\right]+\alpha(1-\alpha)(\beta-2a\alpha)^2\le 4a\alpha^2(1-\alpha)^2(1-\alpha)$$

eşitsizliklerini sağlasın. Eğer $p\in P$ ise, bu durumda

$$\left|\gamma p_1^4+ap_2^2+2\alpha p_1p_3-(3/2)\beta p_1^2p_2-p_4\right|\le 2$$

eşitsizliği sağlanır [57].

Teorem 3.38'in bir uygulaması olarak, Ravichandran ve Verma [57] yıldızıl fonksiyonların bazı alt sınıfları için beşinci katsayısındaki kesin sınırla ilgili bazı varsayımları kanıtladılar. Onlar ayrıca katsayılar problemlerinde anahtar rol üstlenen bir başka sonucu da ispatlamışlardır. Bu sonuç aşağıda verilmiştir.

<u>Teorem 3.39:</u> $p\in P$ olsun. Bu durumda tüm $n\in\mathbb{N}$ değerleri için

$$|\mu p_n p_m-p_{n+m}|\le\begin{cases}2, & 0\le\mu\le 1;\\ 2|2\mu-1|, & \textit{diğer değerler için}\end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik; $0<\mu<1$ ise $p(z)=(1+z^{m+n})/(1-z^{m+n})$ fonksiyonuyla, diğer değerler için $p(z)=(1+z)/(1-z)$ fonksiyonuyla sağlanır [57].

<u>Teorem 3.40:</u> $p\in P$ olsun. Bu durumda tüm $n\in\mathbb{N}$ ve $\mu\le 1$ değerleri için

$$\left|\mu p_n p_{2n}-p_n^3\right|\le 4(2-\mu) \text{ ve } \left|\mu p_n^2 p_{2n}-p_n^4\right|\le 8(2-\mu)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik $p(z)=(1+z)/(1-z)$ fonksiyonuyla sağlanır [57].

2017 yılında Zaprawa [70], P sınıfına ait fonksiyonların katsayıları arasında bir bağıntıya ilişkin aşağıdaki sonucu vermiştir.

<u>Teorem 3.41:</u> $p\in P$ olsun. Bu durumda,

$$\left|p_1^5+2p_1^3p_2-4p_1^2p_3+3p_1p_2^2-6p_1p_4+4p_2p_3\right|\le 48$$

eşitsizliği sağlanır [70].

Zaprawa, ikinci Hankel determinantının genel formu olan $J_n = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3}$ için üst sınır problemini ortaya atmıştır. O, çalışmasında Teorem 3.41'i kullanarak yıldızıl fonksiyonlar için $|J_2| \le 2$ olduğunu gösterdi. Ayrıca yıldızıl fonksiyonlar için $|J_n| \le 2$ tahminini ortaya atmıştır.

2019 yılında Kumar ve arkadaşları [35], yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfı için katsayı problemini çözmek için P sınıfına ait fonksiyonların katsayıları arasında aşağıdaki bağıntıları elde etmişlerdir.

<u>Teorem 3.42:</u> $p \in P$ olsun. Bu durumda,

$$\left|\mu p_3 - p_1^3\right| \le \begin{cases} 2|\mu - 4| & \left(\mu \le \dfrac{4}{3}\right) \\ 2\mu\sqrt{\dfrac{\mu}{\mu-1}} & \left(\mu > \dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç kesindir [35].

<u>Teorem 3.43:</u> $p \in P$ olsun. Bu durumda,

$$\left|5p_1^4 - 48p_1p_3 + 36p_2^2\right| \le 256$$

ve

$$\left|-11p_1^5 + 440p_1^3p_2 + 1920p_1^2p_3\right| \le 22048$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu sonuçlar kesindir [35].

2021 yılında Deniz [15], yıldızıl fonksiyonların önemli bir altsınıfı için katsayı problemini çözerken aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

<u>Teorem 3.44:</u> $p \in P$ olsun. Bu durumda,

$$\left|Mp_1^5 + Np_1^3p_2 + Kp_1^2p_3\right| \le 14880\lambda^2 - 8000\lambda - 1728$$

ve

$$
\left|(9\lambda^2+6\lambda+13)p_1^4-192p_1p_3+144p_2^2-24(\lambda-1)p_1^2p_2\right|
\le\begin{cases}\dfrac{4608\lambda^2-9216\lambda-6912}{9\lambda^2-18\lambda-11} & \left(1\le\lambda\le\dfrac{2+\sqrt{21}}{3}\right)\\[2ex] 144\lambda^2-96\lambda+208 & \left(\lambda>\dfrac{2+\sqrt{21}}{3}\right)\end{cases}
$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu sonuçlar kesindir [15].

4 TARTIŞMA VE SONUÇ

Çalışmamıza kompleks analizin en önemli dallarından biri olan geometrik fonksiyonlar teorisi kısaca özetlenerek başlanmıştır. Ardından bu teorinin en önemli konularından biri olan ünivalent fonksiyonların tanımlarına ve özelliklerine yer verilmiştir. Esasen Caratheodory fonksiyon sınıfının tanımlanması, özellikleri ve bu sınıfa ait katsayı sınırlarının belirlenmesi ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir. Bu tez çalışmasında Caratheodory fonksiyonlarının katsayılarının üst sınırı detaylı olarak ele alınmıştır.

Çalışmamız, ünivalent fonksiyonlar teorisinde çalışan ve çalışacak lisansüstü araştırmacılar için bir arşiv niteliğindedir.

5 KAYNAKÇA

[1] Alexander, J. W. (1915). Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. of Math., 1712-22.

[2] Ali, R. M. (2003). Coefficients of the inverse of strongly starlike functions, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 26, 63-71.

[3] Ali, R. M. and Singh, V. (1966). On the fourth and fifth coefficients of strongly starlike functions, Results Math., 29, 197-202.

[4] Ali, R. M., Mohd, H. M., Lee, S. K. and Ravichandran, V. (2011). Radii of starlikeness, parabolic starlikeness and strong starlikeness for Janowski starlike functions with complex parameters, Tamsui Oxf. J. Inf. Math. Sci., 27, 253-267.

[5] Ali, R. M., Ravichandran, V. and Seenivasagan, N. (2007). Coefficient bounds for p-valent functions, Appl. Math. Comput., 187, 35-46.

[6] Al-Kharsani, H. A. and Al-Khal, R. A. (2005). On a class of bounded univalent functions, Soochow J. Math., 31, 487-496.

[7] Arif, M., Dziok, J. and Raza, M. (2015). On some variations of Janowski functions, Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz Ser. Rech. Deform., 65, 61-69.

[8] Bernardi, S. D. (1974). New distortion theorems for functions of positive real part and applications to the partial sums of univalent convex functions, Proc. Amer. Math. Soc., 45, 113-118.

[9] Bieberbach, L. (1916). Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 940-955.

[10] Branges, L. De. (1958). A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math., 154, 137-152.

[11] Brown, J. E. (2010). Successive coefficients of functions with positive real part, Int. J. Math. Anal., 4, 2491-2499.

[12] Caratheodory, C. (1907). Uber den variabilitatsbereich der fourieríschen konstanten von positiven harmonischen funktionen, Rend. Circ. Mat. Palermo, 32, 193-217.

[13] Caratheodory, C. (1907). Uber den variabilitatssbereich der coeffizienten von potenzreihen, die gegebene werte nicht annehmen, Math. Ann., 64, 95-115.

[14] Cho, N. E., Kumar, V. and Ravichandran, V. (2019). A survey on coefficient estimates for Carathéodory functions, Applied Mathematics E-Notes, 19, 370-396.

[15] Deniz, E. (2021). Sharp coefficients bounds for starlike functions associated with generalized telephone numbers, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., (baskıda)

[16] Dorff, M. and Szynal, J. (2009). Higher order Schwarzian derivatives for convex univalent functions, Tr. Petrozavodsk. Gos. Univ. Ser. Mat., 15, 7-11.

[17] Duren, P. L. (1983). Univalent functions, Springer-Verlag, New York.

[18] Efraimidis, I. (2016). A generalization of Livingstonís coefficient inequalities for functions with positive real part, J. Math. Anal. Appl., 435, 369-379.

[19] Goodman, A. W. (1983). Univalent functions. Vol. I, Mariner Publishing Co., Inc., Tampa, FL.

[20] Goodman, A. W. (1983). Univalent functions. Vol. II, Mariner Publishing Co., Inc., Tampa, FL.

[21] Graham, I. and Kohr, G. (2003). Geometric function theory in one and higher dimension, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 255, Marcel Dekker, Inc., New York.

[22] Grenander, U. and Szegö, G. (1958). Toeplitz forms and their applications, California Monographs in Mathematical Sciences, University of California Press, Berkeley.

[23] Hayami, T. and Owa, S. (2009). Hankel determinant for p-valently starlike and convex functions of order, Gen. Math., 17, 29-44.

[24] Hayami, T. and Owa, S. (2010). Generalized Hankel determinant for certain classes, Int. J. Math. Anal., 4, 2573-2585.

[25] Herglotz, G. (1911). Über Potenzreihenm it positiven reellen teil in Einheitskreis, Ber. Ver. Ges. wiss. Leipzig., 63, 501-511.

[26] Holland, F. (1973) The extreme points of a class of functions with positive real part, Math. Ann., 202, 85-87.

[27] Janowski, W. (1970/1971). Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families, Ann. Polon. Math., 23, 159-177.

[28] Janowski, W. (1973). Some extremal problems for certain families of analytic functions. I, Ann. Polon. Math., 28, 297-326.

[29] Juneja, O. P. and Mogra, M. L. (1979). A class of univalent functions, Bull. Sci. Math., 103, 435-447.

[30] Kaczmarski, J. (1973). Some radius of convexity problems in certain family of functions with bounded distortion, Bull. Acad. Polon. Sci. SÈr. Sci. Math. Astronom. Phys., 21, 27-34.

[31] Keogh F. R. and Merkes, E. P. A. (1969). Coefficient inequality for certain classes of analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 20, 8-12.

[32] Kiepiela, K., Pietrzyk, M. and Szynal, J. (2001). The sharp bound for some coeff cient functional within the class of holomorphic bounded functions and its applications, Rocky Mountain J. Math., 31, 313-326.

[33] Koepf, W. (1994). A uniqueness theorem for functions of positive real part, J. Math. Sci., 28, 78-90.

[34] Komatu, Y. (1958). On convolution of power series, Kodai Math. Sem. Rep., 10, 141-144.

[35] Kumar, V., Cho, N. E., Ravichandran, V. and Srivastava, H. M. (2019). Sharp coefficient bounds for starlike functions associated with the Bell Numbers, Math. Slovaca, 69(5), 1053-1064.

[36] Lecko, A. (2000). On coefficient inequalities in the Caratheodory class of functions, Ann. Polon. Math., 75(1), 59-67.

[37] Lecko, A. and Sim, Y. J. (2017). A note on the fourth coe¢ cient of strongly starlike functions, Results Math., 71(3-4), 1185-1189.

[38] Leutwiler, H. and Schober, G. (1973). Toeplitz forms and the Grunsky-Nehari inequalities, Michigan Math., J. 20, 129-135.

[39] Leverenz, C. R. (1984). Hermitian forms in function theory, Trans. Amer. Math. Soc., 286(2), 675-688.

[40] Libera, R. J. and Zlotkiewicz, E. J. (1982). Early coefficients of the inverse of a regular convex function, Proc. Amer. Math. Soc., 85(2), 225-230.

[41] Liu, M. S., Wu, F. and Yang, Y. Sharp inequalities of homogeneous expansions for quasi-convex mappings of type B and almost starlike mappings of order, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., DOI: 10.1007/s40840-017-0472-1, arşiv:1511.06949.

[42] Liu, T. and Xu, Q. (2017). Fekete and Szegö inequality for a subclass of starlike mappings of order on the bounded starlike circular domain in C^n, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., 37(3), 722-731.

[43] Livingston, A. E. (1969). The coefficients of multivalent close-to-convex functions, Proc. Amer. Math. Soc., 21, 545-552.

[44] Livingston, A. E. A. (1985). Coefficient inequality for functions of positive real part with an application to multivalent functions, Proc J. Math., 120(1), 139-151.

[45] Ma, W. C. and Minda, D. (1992). A unified treatment of some special classes of univalent functions, in Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Tianjin, 157-169, Conf. Proc. Lecture Notes Anal., I Int. Press, Cambridge, MA.

[46] Ma, W. C. and Minda, D. (1993). Uniformly convex functions. II, Ann. Polon. Math., 58(3), 275-285.

[47] Ma, W. C. and Owa, S. (1993). Strongly starlike functions, Panamer. Math. J., 3(2), 49-60.

[48] MacGregor, T. H. (1963). The radius of univalence of certain analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 14, 514-520.

[49] Mishra, A. K. and Gochhayat, P. (2011). A coe¢ cient inequality for a subclass of the Caratheodory functions defined using conical domains, Comput. Math. Appl. 61(9), 2816-2820.

[50] Nehari, Z. (1953). Some inequalities in the theory of functions, Trans. Amer. Math. Soc., 75, 256-286.

[51] Nehari, Z. and Netanyahu, E. (1957). On the coefficients of meromorphic schlicht functions, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 15-23.

[52] Noshiro, K. (1934-1935). On the theory of schlicht functions, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Jap., 2(1), 129-155.

[53] Peng, Z. (2010). On a subclass of close to convex functions, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., 30(5), 1449-1456.

[54] Pommerenke, C. (1975). Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

[55] Ponnusamy, S. and Silverman, H. (2006). Complex variables with applications. Birkhauser, Boston.

[56] Prokhorov, D. V. and Szynal, J. (1981). Inverse coefficients for (α,β)-convex functions, Ann. Univ. Mariae Curie-Sk˜odowska Sect. A, 35, 125-143.

[57] Ravichandran, V. and Verma, S. (2015). Bound for the fifth coefficient of certain starlike functions, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 353(6), 505-510.

[58] Ravichandran, V., Ronning, F. and Shanmugam, T. N. (1997). Radius of convexity and radius of starlikeness for some classes of analytic functions, Complex Variables Theory Appl., 33(1-4), 265-280.

[59] Ravichandran, V., Polatoglu, Y., Bolcal, M., and Sen, A. (2005). Certain subclasses of starlike and convex functions of complex order, Hacet. J. Math. Stat., 34, 9-15.

[60] Robertson, M. S. (1937). A representation of all analytic functions in terms of functions with positive real part, Ann. of Math., 38(4), 770-783

[61] Robertson, M. S. (1962). Variational methods for functions with positive real part, Trans. Amer. Math. Soc., 102, 82-93.

[62] Robertson, M. S. (1963). Extremal problems for analytic functions with positive real part and applications, Trans. Amer. Math. Soc., 106, 236-253.

[63] Robertson, M. S. (1981). Univalent functions starlike with respect to a boundary point, J. Math. Anal. Appl., 81(2), 327-345.

[64] Ruscheweyh, S. and Singh, V. (1977). On certain extremal problems for functions with positive real part, Proc. Amer. Math. Soc., 61(2)(1976), 329-334.

[65] Schiffer, M. and Tammi, O. (1969). On the coefficient problem for bounded univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 140, 461-474.

[66] Shah, G. M. (1972). On the univalence of some analytic functions, Pacific J. Math., 43, 239-250.

[67] Toeplitz, O. (1911). Über die fourierísche entwickelung positiver funktionen, Rend. Circ. Mat. Palermo, 32, 131-132.

[68] Tokkan, Y. (2019). 20. Yüzyılın bir matematik problemi: Bieberbach varsayımı, Yüksek lisans tezi, Kafkas Üniversitesi, Kars.

[69] Warschawski, S. E. (1935). On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping, Trans. Amer. Math. Soc., 38(2), 310-340.

[70] Zaprawa, P. (2017). Third Hankel determinants for subclasses of univalent functions, Mediterr. J. Math., 14(1), art. 19, 10 pp.