T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KARMAŞIK MERTEBEDEN ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARININ ÇEŞİTLİ ÖZELLİKLERİ

Oğuzhan DERYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

ŞUBAT-2021

KARS

ONAY SAYFASI

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Oğuzhan DERYA'nın Prof. Dr. Nizami MUSTAFA danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "**Karmaşık Mertebeden Analitik Fonksiyonların Belli Alt Sınıflarının Çeşitli Özellikleri**" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . . . . ile kabul edilmiştir.

11 / 02 / 2021

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	**:** Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	
Üye	**:** Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	**:** Doç. Dr. Veysel NEZİR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 2021 gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Oğuzhan DERYA

11.02. 2021

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

KARMAŞIK MERTEBEDEN ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARININ ÇEŞİTLİ ÖZELLİKLERİ

Oğuzhan DERYA

Kafkas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Bu tez çalışmasında amacımız Karmaşık Mertebeden Analitik Fonksiyonların Belli Alt Sınıflarının Çeşitli Özelliklerini incelemektir.

Bu tezde, açık birim diskte analitik fonksiyonların dört yeni $A(\alpha,\beta,\gamma)$, $T(\alpha,\beta,\gamma)$, $A(\alpha,\beta,\tau)$ ve $T(\alpha,\beta,\tau)$ sınıflarını tanımlıyor ve araştırıyoruz.

Bu sınıfların katsayı problemleri, distortion teoremleri, konvekslik ve yıldızıllık yarıçapı gibi çeşitli geometrik özelliklerini inceliyoruz.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyonlar, Bi-Ünivalent Fonksiyonlar, Katsayı Sınırları

2021, 55 sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Various Properties of Certain Subclasses of
Analytic Functions of Complex Order.

Oğuzhan DERYA

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

In this thesis, our aim is to examine the Various Properties of Certain Subclasses of Complex Order Analytic Functions.

In this thesis, we introduce and investigate four new classes $A(\alpha,\beta,\gamma)$, $T(\alpha,\beta,\gamma)$, $A(\alpha,\beta,\tau)$ and $T(\alpha,\beta,\tau)$ of analytic functions on the open unit disk.

We investigete various geometric properties of these classes such as coefficient problems, distortion theorems, radius ofconvexity and starlikeness.

Key Words: Analytic functions, bi-ünivalent functions, coefficient bounds

2021, 55 pages

ÖNSÖZ

“Karmaşık Mertebeden Analitik Fonksiyonların Belli Alt Sınıflarının Çeşitli Özellikleri” adlı bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışma süresince bana derin bilgi ve deneyiminden yararlanma fırsatı sunan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Nizami MUSTAFA’ya ve her türlü maddi ve manevi katkılarını esirgemeyen anneme, babama, kardeşim Cengizhan’a, nişanlım Burcu’ya ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Oğuzhan DERYA

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks düzlem

$\mathbb{R}$: Reel sayılar

U : $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ Kompleks düzlemde merkezil açık birim disk

$f(U)$: U diskinin f fonksiyonu altında görüntüsü

A : U diskinde analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulunu sağlayan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, a_n\in\mathbb{C}, n=2,3,...$ fonksiyonlarının sınıfı

S : A sınıfının ünivalent fonksiyonlarından oluşan alt sınıfı

C : U diskinde konveks fonksiyonların sınıfı

S^* : U diskinde yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı

$S^*(\alpha)$: $S^*(\alpha)=\left\{f\in S:\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\ z\in U\right\}$

$C(\alpha)$: $C(\alpha)=\left\{f\in S:\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha,\ z\in U\right\}$

$A(\alpha,\beta;\gamma)$: $\left\{f\in A:\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\gamma[\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)]+(1-\gamma)z}\right)>\alpha, z\in U\right\}$

$T(\alpha,\beta;\gamma)$: $\left\{f\in T:\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\gamma[\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)]+(1-\gamma)z}\right)>\alpha, z\in U\right\}$

$A(\alpha,\beta,\tau)$: $\left\{f\in A:\ \mathrm{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right\}>\alpha, z\in U\right\}$

$TA(\alpha,\beta,\tau)$: $\left\{f\in T:\ \mathrm{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right\}>\alpha, z\in U\right\}$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Geometrik fonksiyonlar teorisinde analitik fonksiyonların belli bir altsınıfının katsayı problemi, distorsion teoremleri, konvekslik ve yıldızıllık yarıçapları gibi konular önemli ve çok çalışılan konulardandır. Bu konuda çok sayıda çalışmalar mevcuttur (örnek için bakınız [1-4, 6, 8-15]).

Bilindiği üzere, yukarıda adı geçen problemler fonksiyonların tanımlı olduğu bölgede incelenmek yerine merkezi orijinde olan (merkezil) açık birim dairede incelenmektedir. Çok iyi bilinen Riemann dönüşüm teoremi gereğince karmaşık düzlemin basit bağlantılı bir bölgesini birim diske konform dönüştüren bir fonksiyon vardır. Öte yandan, konform dönüşüm altında bölgelerin birçok özelliklerinin korunduğu da bilinmektedir.

Yukarıdaki sebeplerden dolayı belli bir bölgede çalışmaktansa birim diskte çalışmak tercih edilmektedir.

Analitik fonksiyonlar teorisindeki çoğu çalışmalar karmaşık düzlemde $U=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\right\}$ merkezil açık birim diskte analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ *normalleştirme* koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfında yoğunlaşmıştır.

Sunulan Yüksek Lisans tez çalışmamızda biz, merkezil açık birim diskte analitik fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanıtıyor ve araştırıyoruz.

Bu tez çalışmasında, merkezil açık birim diskte analitik fonksiyonların bazı yeni $A(\alpha,\beta,\gamma)$, $T(\alpha,\beta,\gamma)$, $\alpha\in[0,1)$, $\beta,\gamma\in[0,1]$ ve $A(\alpha,\beta,\tau)$ ve $TA(\alpha,\beta;\tau)$, $\alpha\in[0,1)$, $\beta\in[0,1]$, $\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ alt sınıfları tanımlanıyor. Bu sınıfların katsayı problemleri, bozulma (distortion) ve büyüme (growth) teoremleri ve konvekslik ve yıldızıllık yarıçapı gibi çeşitli özellikleri inceleniyor.

1.2 Kuramsal Temeller

Tezimizin konusuyla ilgili temel kaynaklar bu alt başlıkta veriliyor. Bunun için genellikle Ponnusamy ve Silverman'ın [16] kaynağından faydalanıldı.

Tanım1.2.1 (r-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \tag{1.2.1}$$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının r açık komşuluğu) denir.

$\bar{U}(z_0, r)$ ile $U(z_0, r)$'nin kapanışı $\partial U(z_0, r)$ ile de onun sınırı gösterilir.

Dolayısıyla,

$$\bar{U}(z_0, r) = \{z_0 \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\} \text{ ve}$$

$$\partial U(z_0, r) = \bar{U}(z_0, r) - U(z_0, r) = \{z_0 \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Orijin merkezli r yarıçaplı disk $U(0, r) = U_r$ ile orijin merkezli açık birim disk de $U = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.2 (İç Nokta): Karmaşık düzlemde verilen bir kümenin belli bir komşuluğuyla kümeye ait olan noktasına bu kümenin bir iç noktası denir.

Tanım 1.2.3 (Açık Küme): Karmaşık düzlemde verilen bir kümenin her noktası bu kümenin bir iç noktası ise bu kümeye açık küme denir.

Not 1.2.1: Bir S kümesinin iç noktaları kümesi $\overset{\circ}{S}$ ile gösterilir. Buna göre S bir açıktır $\Leftrightarrow S=\overset{\circ}{S}$.

Tanım 1.2.4 (Kapalı Küme): Tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.

Tanım 1.2.5 (Ayrık Küme): Ortak elemanı olmayan kümelere ayrık kümeler denir.

Tanım 1.2.6 (Bağlantılı Küme): Eğer $S\subset S_1\cup S_2, S\cap S_1\neq\varnothing$ ve $S\cap S_2\neq\varnothing$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S\subset\mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir.

Tanım 1.2.7 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Örneğin karmaşık düzlemde her komşuluk bir bölgedir.

Tanım 1.2.8 (Süreklilik): $A\subset\mathbb{C}$, $f:A\rightarrow\mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0\in A$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $|z-z_0|<\delta$ olduğunda $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ olacak biçimde $\delta=\delta(z_0,\varepsilon)>0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında sürekli fonksiyon denir.

Not 1.2.2: Tanım kümesinin her noktasında sürekli fonksiyona tanım kümesi üzerinde sürekli fonksiyon denir.

A kümesi üzerinde sürekli fonksiyonların kümesini $C(A)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.2.9 (Diferansiyallenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölgesi, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve $z_0 \in A$ verilsin. Eğer, sonlu

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.2.2}$$

limiti varsa f fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında f fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Dolayısıyla, (1.2.2) limiti sonlu ise z_0 noktasında f fonksiyonunun türevi

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.2.10 (Analitiklik): Tanım kümesinden bir noktanın belli bir komşuluğunun tamamında diferansiyellenebilen fonksiyona bu noktada analitik fonksiyon denir.

Eğer, f fonksiyonu bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ’ye A kümesi üzerinde analitik denir. A kümesinde analitik fonksiyonların kümesi (çoğu kaynaklarda) $H(A)$ ile gösterilir.

Karmaşık düzlemin tamamında analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

e^z fonksiyonu bir tam fonksiyon örneğidir

Karmaşık değişkenli karmaşık değerli bir $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu $z = x + iy$ noktasında analitik ise

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{1.2.3}$$

eşitlikleri ya da

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 y} = 0 \tag{1.2.4}$$

denklemi sağlanıyor.

(1.2.3) koşulları literatürde Cauchy-Riemann koşulları, (1.2.4) denklemi de Laplace denklemi olarak bilinmektedir.

Tanım 1.2.11 (Kapalı Eğri): Başlangıç ile bitiş noktaları aynı olan eğrilere kapalı eğriler denir.

Tanım 1.2.12 (Pozitif Yönlü Eğri): Parametrenin artışı eğri üzerinde saat yönünün tersi yönüne karşılık geliyorsa böyle eğrilere pozitif yönlü eğriler, aksi durumda negatif yönlü eğriler denir.

Teorem 1.2.1 (Cauchy-Türev Formülü): Karmaşık değişkenli karmaşık değerli bir $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisinin sınırladığı bölgede ve γ eğrisi üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin sınırladığı bölgenin içinde keyfi bir nokta ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \ . \tag{1.2.5}$$

(1.2.5) formülüne analitik fonksiyonlar için Cauchy Türev formülü denir.

Cauchy türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: Bir bölgede analitik bir fonksiyonun bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de analitiktir.

Bu durumda**,** f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n , \; a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{1.2.6}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

Fakat bu hüküm reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar için genelde doru değil. Yani, her reel değişkenli reel değerli fonksiyonun bir noktada birinci mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemiyoruz.

Örneğin, $f(x)=x^{3/2}$ reel değişkenli reel değerli fonksiyonunun $x=0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x=0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur.

<u>Tanım 1.2.13 (Ünivalent (yalınkat) Fonksiyon</u>**):** f, $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1)=f(z_2)$ olması $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa (ya da $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1)\neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat) fonksiyon denir.

Eğer, f fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f 'ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

<u>Teorem 1.2.2 (Yerel Ünivalentlik Kriteri):</u> Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır.

Fakat $f'(z_0) \neq 0$ şartı f fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şart olup yeterli değildir. Yani, f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ fakat tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

<u>Örnek 1.2.1:</u> $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir.

Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = i\frac{25}{9} \tag{1.2.7}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise bu durumda $z \in A$ noktasında f' fonksiyonu f 'nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme ve yerel dönme etkenleridir.

Ayrıca, bilindiği üzere $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonunun Jacobian determinantı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ olarak tanımlanmaktadır. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece, analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 1.2.14 (Düzgün Eğri): $\gamma(t)$ eğrisi verilsin. Eğer $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir.

Tanım 1.2.15 (Konform dönüşüm): Eğer, bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer, bir f fonksiyonu, bir $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir.

Örneğin, $f(z)=e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzlemin tamamında konformdur.

Teorem 1.2.3: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z)\neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur. Dolayısıyla, bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur.

Teorem 1.2.3'de verilen koşul konformluk için yeterli koşul olup gerekli değil.

En önemli konform dönüşümlerinden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm $a,\ b,\ c,\ d$ $ad-bc\neq 0$ koşulunu sağlayan karmaşık sayılar olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \tag{1.2.8}$$

ve genişletilmiş karmaşık düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

1851 yılında Riemann, z - düzlemindeki $D \subset \mathbb{C}(D \neq \mathbb{C})$ bölgesini, w - düzlemindeki D_1 bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonun varlığını aşağıdaki teoremle ispatlamıştır.

Teorem 1.2.4. (Riemann Dönüşüm Teoremi): Karmaşık düzlemin her $D \subset \mathbb{C}(D \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in D$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve D'yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır.

Bilindiği üzere, analitik olarak bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken, geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürüyor. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürüyor.

Riemann dönüşüm teoremi gereğince, keyfi basit bağlantılı bir bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U açık birim diskte tanımlı ünivalent bir f fonksiyonu seçilebilir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

$U=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ merkezil açık birim diskte analitik fonksiyonların normalleştirme koşulunu sağlayan ve aşağıdaki şekilde seri açılımına sahip olan fonksiyonların sınıfını A ile gösterelim

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\ ,\ a_n\in\mathbb{C}\,. \tag{2.1}$$

A sınıfının ünivalent fonksiyonlarının oluşturduğu küme S olsun.

Ayrıca T ile A 'nın aşağıdaki şekilli negatif katsayılı altsınıfını gösterelim

$$f(z)=z-a_2z^2-a_3z^3-\cdots-a_nz^n-\cdots=z-\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\ ,\ a_n\geq 0\ . \tag{2.2}$$

$S^*(\alpha),\ C(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ ile S 'nin iyi bilinen sırasıyla, α $(\alpha\in[0,1))$ mertebeden yıldızıl, konveks ve g fonksiyonuna gore konvekse yakın fonksiyonların sınıfını gösterelim.

Bilindiği üzere, tanım gereğince (bkz. [5, 7])

$$S^*(\alpha)=\left\{f\in A:\ \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha,\ z\in U\right\}, \tag{2.3}$$

$$C(\alpha)=\left\{f\in A:\ \mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha,\ z\in U\right\} \tag{2.4}$$

ve

$$K(\alpha)=\left\{f\in A:\ \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right)>\alpha,\ z\in U,\ g\in S^*\right\}.$$

Özel durumda,

$$S^* = S^*(0),\ C = C(0)\ \text{ve}\ K = K(0)$$

sınıfları U'da iyi bilinen yıldızıl, konveks ve konvekse yakın fonksiyonların sınıflarıdır.

Bu sınıflar için $C \subset S^* \subset K \subset S$ koşulunun sağlandığı kolayca gösterilebilir. Bu sınıflar hakkında detaylı bilgi için Goodman'ın [7] numaralı çalışmasına bakınız.

$\beta \in [0,1]$ için $K(\alpha)$ sınıfının bir genelleştirmesi olarak $K(\alpha, \beta; g)$ sınıfını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz

$$K(\alpha, \beta; g) = \left\{ f \in A:\ \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z) + \beta z^2 f''(z)}{g(z)} \right) > \alpha,\ z \in U,\ g \in S^* \right\}.$$

Özel durumda, $K(\alpha, \beta; z) = K(\alpha, \beta)$ olarak göstereceğiz.

Ayrıca, $K(\alpha, 0; g) = K(\alpha)$ ve $K(\alpha, 1; zf') = C(\alpha)$ eşitlikleri açıktır.

Not 2.1: Şunu belirtelim ki, $K(\alpha, \beta; z) = K(\alpha, \beta)$ sınıfı ilk defa Mustafa [11] tarafından tanımlanmıştır.

Belirtelim ki, eğer $f \in T$ ise $S^*(\alpha),\ K(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ sınıfları yerine, sırasıyla, $TS^*(\alpha),\ TK(\alpha)$ ve $TC(\alpha)$ kullanacağız.

Şimdi, $\beta \in [0,1]$ için $S^*(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ sınıflarının bir birleşimi olarak aşağıdaki şekilde tanımlanan $A(\alpha, \beta)$ sınıfını verelim

$$A(\alpha, \beta) = \left\{ f \in A: \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z) + \beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z) + (1-\beta) f(z)} \right) > \alpha, z \in U \right\}. \tag{2.5}$$

Özel durumda, yazarız

$$A(\alpha, 0) = S^*(\alpha) \quad \text{ve} \quad A(\alpha, 1) = C(\alpha). \tag{2.6}$$

$T(\alpha, \beta)$ ile aşağıdaki sınıfı göstereceğiz

$$T(\alpha,\beta)=\left\{ f\in T:\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}\right)>\alpha, z\in U\right\}. \tag{2.7}$$

Bu sınıflar için ikinci Hankel determinantının üst sınır değerlendirmesi ve Fekete-Szegö problem Mustafa [12] tarafından incelenmiştir.

$T(\alpha,\beta)$ sınıfı Altıntaş Et al. tarafından [2,3,4] ve Irmak Et al. tarafından [8] numaralı çalışmalarda incelenmiştir.

Şimdi, $\gamma\in[0,1]$ için $A(\alpha,\beta;\gamma)$ ile $A(\alpha,\beta)$ ve $K(\alpha,\beta)$ sınıflarının bir genelleştirilmesi olan ve $A(\alpha,\beta,\gamma)$ ile gösterilen sınıfı aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$A(\alpha,\beta,\gamma)=\left\{ f\in A:\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\gamma\left[\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)\right]+(1-\gamma)z}\right)>\alpha, z\in U\right\}. \tag{2.8}$$

Özel durumda,

$$A(\alpha,\beta,1)=A(\alpha,\beta) \text{ ve } \quad A(\alpha,\beta,0)=K(\alpha,\beta) \tag{2.9}$$

yazacağız.

$f\in T$ durumunda $A(\alpha,\beta,\gamma)$ yerine $T(\alpha,\beta,\gamma)$ kullanacağız.

Böylece,

$$T(\alpha,\beta,\gamma)=\left\{ f\in T:\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\gamma\left[\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)\right]+(1-\gamma)z}\right)>\alpha, z\in U\right\}. \tag{2.10}$$

Özel durumda, $T(\alpha,\beta,1)=T(\alpha,\beta)$ yazarız.

Yukarıda bahsedilen çalışmalardan esinlenerek, analitik fonksiyonların bir alt sınıfını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 2.1: (2.1) tarafından verilen $f \in S$ fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlarsa diyeceğiz ki bu fonksiyon $A(\alpha,\beta,\tau)$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in [0,1]$, $\tau \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ sınıfına aittir

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right\} > \alpha, z \in U .$$

Dolayısıyla,

$$A(\alpha,\beta,\tau)=\left\{f \in S:\ \operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right\} > \alpha, z \in U\right\}.$$

Özel durumda, $\tau = 1$ için $A(\alpha,\beta;1) = A(\alpha,\beta)$ elde ederiz. $TA(\alpha,\beta;\tau) = T \cap A(\alpha,\beta;\tau)$ notasyonunu da kullanacağız.

Ayrıca, $TA(\alpha,\beta;1) = TA(\alpha,\beta)$ ve $TA(\alpha,0;\tau) = T \cap S^*(\alpha;\tau) = TS^*(\alpha,\tau)$, $TA(\alpha,1;\tau) = T \cap C(\alpha;\tau) = TC(\alpha;\tau)$ yazarız.

3. BULGULAR

3.1. $A(\alpha,\beta;\gamma)$ ve $T(\alpha,\beta;\gamma)$ sınıfları için katsayı problemi

Bu bölümde U merkezil açık birim diskte analitik fonksiyonların $A(\alpha,\beta;\gamma)$ ve $T(\alpha,\beta;\gamma)$ alt sınıfları üzerine bazı sonuçları vereceğiz.

$A(\alpha,\beta;\gamma)$ sınıfı için yeterli bir koşul aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem 3.1.1: $f \in S$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun $A(\alpha,\beta;\gamma)$ sınıflarına ait olması için

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n| \leq 1-\alpha \tag{3.1.1}$$

koşulunu sağlaması yeterlidir.

Sonuç

$$f_n(z) = z + \frac{1-\alpha}{(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

İspat: $f \in A(\alpha,\beta;\gamma), \alpha \in [0,1), \beta,\gamma \in [0,1]$ olsun. Buna göre,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\gamma\left[\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)\right]+(1-\gamma)z}\right\} > \alpha$$

yazarız.

Rahatlıkla gösterebiliriz ki

$$\left|\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\gamma\left[\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)\right]+(1-\gamma)z} - 1\right| \leq 1-\alpha \tag{3.1.2}$$

ise yukarıdaki koşul sağlanır.

Bu sebepten dolayı teoremi ispatlamak için teoremin varsayımı altında sonuncu eşitsizliğin sağlanacağını göstermek yetecektir.

(2.1)'den yararlanarak basit hesaplama ile

$$\left|\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\gamma\left[\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)\right]+(1-\gamma)z}-1\right|=\left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]a_n z^n}{z+\sum_{n=2}^{\infty}\gamma\left[1+\beta(n-1)\right]a_n z^n}\right|$$

$$\leq\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-\gamma)\left[1+(n-1)\beta\right]|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\gamma\left[1+(n-1)\beta\right]|a_n|}$$

elde ederiz.

Görüldüğü üzere, eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|\leq(1-\alpha)\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\gamma\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|\right\} \qquad (3.1.3)$$

eşitsizliği sağlanırsa (3.1.2) eşitsizliği sağlanıyor.

(3.1.3) eşitsizliği (3.1.1)'e denktir. Böylece, (3.1.3) veya (3.1.1) sağlanıyorsa, (3.1.2) sağlanır. Yani, $f\in A(\alpha,\beta;\gamma)$.

Şimdi elde edilen eşitsizliğin

$$f_n(z)=z+\frac{1-\alpha}{(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]}z^n,\ z\in U, n=2,3,...$$

fonksiyonu için kesin olduğunu görelim. Gerçekten de (3.1.1) eşitsizliğinde f_n fonksiyonu için her kaydedilmiş $n=2,3,...$ değeri için

$$a_n=\frac{1-\alpha}{(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]}$$

alınırsa,

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|=\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]\frac{1-\alpha}{(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]}=1-\alpha$$

eşitliğinin gerçekleştiği görülür.

Böylece, Teorem 3.1.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.1'de $\gamma=1$ alırsak, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.1: (2.1) ile verilen f fonksiyonunun katsayıları için

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|\leq 1-\alpha$$

koşulu sağlanırsa $f\in A(\alpha,\beta)$.

Sonuç

$$f_n(z)=z+\frac{1-\alpha}{(n-\alpha)\left[1+\beta(n-1)\right]}z^n, z\in U, n=2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Sonuç 3.1.1'de $\beta=0$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.2: [17, s.110, Teorem 1] (2.1) ile verilen f fonksiyonu aşağıdaki koşul sağlandığında $S^*(\alpha)$ sınıfına aittir

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|\leq 1-\alpha$$

Sonuç

$$f_n(z)=z+\frac{1-\alpha}{n-\alpha}z^n, z\in U, n=2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Sonuç 3.1.1'de $\beta = 1$ alınarak, aşağıdaki sonuca varıyoruz.

Sonuç 3.1.3: [17, s.110, Teorem 1'in sonucu]. (2.1) ile verilen f fonksiyonu, aşağıdaki koşul sağlandığında $C(\alpha)$ sınıfına aittir

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \le 1-\alpha.$$

Sonuç

$$f_n(z) = z + \frac{1-\alpha}{n(n-\alpha)} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Teorem 3.1.1'de $\gamma = 0$ yazarsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.4: (2.1) ile verilen f fonksiyonu aşağıdaki koşul sağlandığında $K(\alpha,\beta)$ sınıfına aittir

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n| \le 1-\alpha.$$

Sonuç

$$f_n(z) = z + \frac{1-\alpha}{n\left[1+\beta(n-1)\right]} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Sonuç 3.1.4'de $\beta = 0$ alarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.5: (2.1) ile verilen f fonksiyonu, aşağıdaki koşul sağlandığında $K(\alpha)$ sınıfına aittir

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1-\alpha.$$

Sonuç

$$f_n(z) = z + \frac{1-\alpha}{n} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

$T(\alpha, \beta; \gamma)$ sınıfından olan fonksiyonlar için Teorem 3.1.1'in tersi de doğrudur.

Teorem 3.1.2: $f \in T$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun $T(\alpha, \beta; \gamma)$ sınıflarına ait olması için gerek ve yeter koşul (3.1.1)'in sağlanmasıdır.

Sonuç

$$f_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

İspat: $f \in T(\alpha, \beta; \gamma), \alpha \in [0,1), \beta, \gamma \in [0,1]$ olsun. Teorem (3.1.1)'in ışığında, sadece teoremin gerekliliğini kanıtlamamız yetecektir.

$f \in T(\alpha, \beta; \gamma), \alpha \in [0,1), \beta, \gamma \in [0,1]$ olduğunu varsayalım. Bu durumda tanım gereğince

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zf'(z) + \beta z^2 f''(z)}{\gamma\left[\beta zf'(z) + (1-\beta) f(z)\right] + (1-\gamma) z} \right\} > \alpha, z \in U. \quad (3.1.4)$$

(2.2) formülü gereğince (3.1.4)’ten elde ederiz

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z-\sum_{n=2}^{\infty} n\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n||z^n|}{z-\sum_{n=2}^{\infty} \gamma\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n||z^n|}\right\}>\alpha .$$

Açıktır ki, z reel seçilirse

$$\frac{z-\sum_{n=2}^{\infty} n\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n||z^n|}{z-\sum_{n=2}^{\infty} \gamma\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n||z^n|}$$

ifadesi reeldir. Bu durumda, yukarıdaki son eşitsizlikte $z \to 1^{-}$ iken limite geçersek

$$\frac{1-\sum_{n=2}^{\infty} n\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} \gamma\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|}\geq \alpha ,$$

yani

$$1-\sum_{n=2}^{\infty} n\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n| \geq \alpha\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty} \gamma\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|\right\}$$

elde ederiz. Sonuncu eşitsizlik (3.1.1)’e denktir.

Teoremin hükmünün

$$f_n(z)=z-\frac{1-\alpha}{(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]}z^n, z\in U, n=2,3,...$$

fonksiyonu için kesin olduğu kolayca ispatlanır.

Böylece, Teorem 3.1.2’nin ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.2’de $\gamma=1$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.6: (2.2) ile verilen f fonksiyonunun $T(\alpha,\beta), \alpha \in [0,1), \beta \in [0,1]$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n| \leq 1-\alpha$$

sağlanmasıdır.

Hatırlatma 3.1.1: Sonuç 3.1.6'da elde edilen sonuç [3]'deki Teorem 1'i doğrular.

Sonuç 3.1.6'da $\beta = 0$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.7: [17, p.110, Teorem 2] (2.2) ile verilen f fonksiyonunun $TS^*(\alpha)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

sağlanmasıdır.

Sonuç 3.1.6'da $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.1.8: [17, p.111, Sonuç 2] (2.2) ile verilen f fonksiyonunun $TC(\alpha)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

sağlanmasıdır.

Teorem 3.1.2'de $\gamma = 0$ alınarak aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.1.9: (2.2) ile verilen f fonksiyonunun $TK(\alpha,\beta)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n| \leq 1-\alpha$$

sağlanmasıdır.

Sonuç 3.1.9'da $\beta = 0$ alınarak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.1.10: (2.2) ile verilen f fonksiyonu $TK(\alpha)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1-\alpha$$

sağlanmasıdır.

Şimdi $T(\alpha,\beta;\gamma)$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı sınırları üzerine aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1.1: (2.2) ile verilen f fonksiyonu $T(\alpha,\beta;\gamma)$ sınıfından olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)} \text{ ve } \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}.$$

İspat: $f \in T(\alpha,\beta;\gamma)$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta,\gamma \in [0,1]$ olsun. O halde, Teorem 3.1.2'yi kullanarak yazabiliriz

$$(2-\alpha\gamma)(1+\beta)\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n| \leq 1-\alpha.$$

Bu eşitsizlikten Lemma'nın birinci hükmü elde edilir.

Benzer şekilde yazarız:

$$\left(1+\beta\right)\sum_{n=2}^{\infty}\left(n-\alpha\gamma\right)\left|a_n\right|\leq\sum_{n=2}^{\infty}\left(n-\alpha\gamma\right)\left[1+\beta\left(n-1\right)\right]\left|a_n\right|\leq 1-\alpha.$$

Buradan, basit sadeleştirme ile elde ederiz.

$$\left(1+\beta\right)\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right|\leq 1-\alpha+\left(1+\beta\right)\alpha\gamma\sum_{n=2}^{\infty}\left|a_n\right|.$$

Son eşitsizlikte Lemma'nın birinci kısmını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız.

$$\left(1+\beta\right)\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right|\leq 1-\alpha+\left(1+\beta\right)\alpha\gamma\frac{1-\alpha}{\left(1+\beta\right)\left(2-\alpha\gamma\right)}=\frac{2\left(1-\alpha\right)}{2-\alpha\gamma}$$

Buradan, lemmanın ikinci eşitsizliğinin doğru olduğunu kolayca görebiliriz.

Böylece, Lemma 3.1.1'in ispatı tamamdır.

Lemma 3.1.1'de $\gamma=1$ alınarak aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.1.11: (2.2) tarafından verilen $f\left(z\right)$ fonksiyonu $T\left(\alpha,\beta\right)$ sınıfından olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|a_n\right|\leq\frac{1-\alpha}{\left(2-\alpha\right)\left(1+\beta\right)}\text{ ve }\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right|\leq\frac{2\left(1-\alpha\right)}{\left(2-\alpha\right)\left(1+\beta\right)}.$$

Hatırlatma 3.1.2: Sonuç 3.1.11'de elde edilen sonuç [3]'de ki Lemma 2'yi doğrular.

Aşağıdaki lemma , $T\left(\alpha,\beta;\gamma\right)$ kümesinin konveksliği üzerinedir.

Lemma 3.1.2: Açık birim diskte analitik fonksiyonların $T\left(\alpha,\beta;\gamma\right)$ kümesi konveks bir kümedir.

İspat: $f, g \in T(\alpha, \beta; \gamma)$ ve $g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| z^n$ olsun.

Bu durumda, her $\lambda \in [0,1]$ için, yazabiliriz

$$\varphi(z) = \lambda f(z) + (1-\lambda) g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| z^n,$$

burada, $|c_n| = \lambda |a_n| + (1-\lambda)|b_n|, n = 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]|c_n| &= \lambda\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n| + (1-\lambda)\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]|b_n| \\ &\le \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1-\alpha) = 1-\alpha\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 3.1.2 gereğince $\varphi \in T(\alpha, \beta; \gamma)$.

Bununla, Lemma 3.1.2'nin ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.2'den, aşağıdaki sonuca kolayca ulaşabiliriz.

Sonuç 3.1.12: Eğer, $f \in T(\alpha, \beta; \gamma)$ ise

$$|a_n| \le \frac{1-\alpha}{(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]}, n = 2, 3, \ldots \ .$$

3.2. $T(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfı için bozulma ve büyüme teoremleri

Bu bölümde $T(\alpha, \beta; \gamma)$ sınıfı için bozulma ve büyüme teoremleri vereceğiz.

3.1. başlıkta katsayı sınırları üzerine bulduğumuz sonuçlar aşağıdaki teoremleri ispatlamamızı sağlar.

Teorem 3.2.1: Eğer $f \in T(\alpha,\beta;\gamma)$ ise o zaman

$$r-\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}r^2 \le |f(z)| \le r+\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}r^2, |z|=r, r\le 1 \tag{3.2.1}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Elde edilen sonuç

$$f(z)=z-\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}z^2, z=\pm r$$

fonksiyonu için kesindir

İspat: $f \in T(\alpha,\beta;\gamma)$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta,\gamma \in [0,1]$ olsun. Bu durumda, Teorem 3.1.2'yi kullanarak yazarız

$$(2-\alpha\gamma)(1+\beta)\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \le \sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha\gamma)[1+\beta(n-1)]|a_n| \le 1-\alpha$$

Buradan,

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \le \frac{1-\alpha}{(2-\alpha\gamma)(1+\beta)} \tag{3.2.2}$$

yazarız.

O halde,

$$|f(z)| \le r+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \le r+r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$$

ve de $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ için (3.2.2) değerlendirmesini kullanırsak

$$|f(z)| \le r+\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}r^2 \tag{3.2.3}$$

elde ederiz.

Diğer yandan, benzer şekilde

$$\left|f(z)\right| \geq r-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \geq r-r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \geq r-\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}r^2 \tag{3.2.4}$$

yazarız.

(3.2.3) ve (3.2.4)'ten (3.2.1) eşitsizliklerinin ispatı tamamdır.

Şimdi elde edilen sonucun kesin olduğunu görelim.

Doğrudan da (3.2.1) eşitsizliğinde sol tarafın

$$f(z)=z-\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}z^2, z=\pm r$$

fonksiyonu için eşitlik olarak gerçekleştiği görülür, yani bu fonksiyon için

$$\left|f(r)\right|=\left|r-\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}r^2\right|=r\left[1-\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}r\right], r\leq 1$$

olur.

Böylece, Teorem 3.2.1'in ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 3.2.1'de $\gamma=1$ alınarak aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.2.1: Eğer $f\in T(\alpha,\beta)$ ise o zaman

$$r-\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha)}r^2 \leq \left|f(z)\right| \leq r+\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha)}r^2, |z|=r, r\leq 1$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Elde edilen sonuç

$$f(z)=z-\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha)}z^2, z=\pm r$$

fonksiyonu için kesindir.

Sonuç 3.2.1'de $\beta = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2: (bkz [17, s. 111, Teorem 4]) $f \in T$ olsun. Eğer $f \in TS^{*}(\alpha)$ ise o zaman

$$r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \le |f(z)| \le r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2, |z| = r, r \le 1$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Elde edilen sonuç

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} z^2, z = \pm r$$

fonksiyonu için kesindir

Sonuç 3.2.1'de $\beta = 1$ alınarak şu sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.2.3: (bkz [17, s.112,Teorem 4'ün sonucu]) $f \in T$ olsun. Eğer $f \in TC(\alpha)$ ise o zaman

$$r - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \le |f(z)| \le r + \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2, |z| = r, r \le 1$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Elde edilen sonuç

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} z^2, z = \pm r$$

fonksiyonu için kesindir.

Teorem 3.2.1'de $\gamma = 0$ alınarak aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.2.4: $f \in T$ olsun. Eğer $f \in TK(\alpha, \beta)$ ise o zaman

$$r - \frac{1-\alpha}{2(1+\beta)} r^2 \le |f(z)| \le r + \frac{1-\alpha}{2(1+\beta)} r^2, |z| = r, r \le 1$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Elde edilen sonuç

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2(1+\beta)} z^2, z = \pm r$$

fonksiyonu için kesindir.

Sonuç 3.2.4'de $\beta = 0$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.5: $f \in T$ olsun. Eğer $f \in TK(\alpha)$, o zaman

$$r - \frac{1-\alpha}{2} r^2 \le |f(z)| \le r + \frac{1-\alpha}{2} r^2, |z| = r, r \le 1$$

eşitsizlikleri doğrudur. Elde edilen sonuç

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2} z^2, z = \pm r$$

fonksiyonu için kesindir.

Teorem 3.2.2: Eğer $f \in T(\alpha, \beta; \gamma)$ ise o zaman

$$1 - \frac{2(1-\alpha)}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)} r \le |f'(z)| \le 1 + \frac{2(1-\alpha)}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)} r, |z| = r, r \le 1 \qquad (3.2.5)$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat: $f \in T(\alpha,\beta;\gamma)$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta,\gamma \in [0,1]$ olsun.

Basit hesaplama ile elde ederiz

$$f'(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{3.2.6}$$

yazarız. O halde,

$$|f'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z^{n-1}| \leq 1 + r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \tag{3.2.7}$$

doğrudur.

Teorem 3.1.2'den

$$(1+\beta)\left[\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| - \alpha\gamma\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\right] \leq \sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n| \leq 1-\alpha$$

yazabiliriz.

Buradan

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{1-\alpha}{1+\beta} + \alpha\gamma\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \tag{3.2.8}$$

elde ederiz.

(3.2.2) eşitsizliğini (3.2.8)'de dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}.$$

Bu değerlendirmeyi (3.2.7)'de dikkate alırsak teoremde istenen eşitsizliklerden sağ taraftaki eşitsizliğin doğru olduğu görülür.

Benzer şekilde,

$$\left|f'(z)\right| \geq 1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\left|z^{n-1}\right| \geq 1-r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \tag{3.2.9}$$

eşitsizliğinde (3.2.9) değerlendirmesini kullanırsak

$$\left|f'(z)\right| \geq 1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\left|z^{n-1}\right| \geq 1-r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1-\frac{2(1-\alpha)}{(1+\beta)(2-\alpha\gamma)}r \tag{3.2.10}$$

elde ederiz.

(3.2.7) ve (3.2.10) eşitsizliklerinin birleşimi bize (3.2.5) eşitsizliklerinin ispatını veriyor. Böylece, Teorem 3.2.2'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.2'de $\gamma=1$ alınarak aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.2.6: Eğer $f\in T(\alpha,\beta)$ ise o zaman

$$1-\frac{2(1-\alpha)}{(1+\beta)(2-\alpha)}r \leq \left|f'(z)\right| \leq 1+\frac{2(1-\alpha)}{(1+\beta)(2-\alpha)}r, |z|=r, r\leq 1$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Sonuç 3.2.6'da $\beta=0$ alırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.2.7: (bkz [17, s.112,Teorem6]). Eğer $f\in TS^*(\alpha)$ ise o zaman

$$1-\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}r \leq \left|f'(z)\right| \leq 1+\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}r, |z|=r, r\leq 1$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Sonuç 3.2.6’da $\beta = 1$ yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.8: (bkz [17, s.112,Teorem 6’nın sonucu]) Eğer $f \in TC(\alpha)$ ise o zaman

$$1-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r \leq |f'(z)| \leq 1+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r, |z| = r, r \leq 1$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Teorem 3.2.2’de $\gamma = 0$ alınarak aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.2.9: Eğer $f \in TK(\alpha,\beta)$ ise o zaman

$$1-\frac{1-\alpha}{1+\beta}r \leq |f'(z)| \leq 1+\frac{1-\alpha}{1+\beta}r, |z| = r, r \leq 1$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Sonuç 3.2.9’da $\beta = 1$ yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.10: Eğer $f \in TK(\alpha)$ ise o zaman

$$1-\frac{1-\alpha}{2}r \leq |f'(z)| \leq 1+\frac{1-\alpha}{2}r, |z| = r, r \leq 1$$

eşitsizlikleri doğrudur.

3.3. $T(\alpha,\beta;\gamma)$ sınıfı için konvekslik yarıçapı

Bu bölümde, $T(\alpha,\beta;\gamma)$ sınıfının konvekslik yarıçapını belirledik.

Teorem 3.3.1: $f \in T(\alpha,\beta;\gamma)$ fonksiyonu

$$|z| \le r = r(\alpha, \beta; \gamma)$$

diskinde konvekstir.

Burada,

$$r(\alpha, \beta; \gamma) = \inf\left\{\left(\frac{(n-\alpha\gamma)(1+\beta(n-1))}{(1-\alpha)n^2}\right)^{1/(n-1)} : n = 2, 3, \ldots\right\}.$$

İspat: $f \in T(\alpha, \beta; \gamma)$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta, \gamma \in [0,1]$ olsun.

Teoremi ispatlamak için $U_{r(\alpha,\beta;\gamma)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r(\alpha, \beta; \gamma)\}$ diskinde $|zf''(z)/f'(z)| \le 1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Basit hesaplama ile bulabiliriz

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| = \left|\frac{-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| z^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| z^{n-1}}\right| \le \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}}. \qquad (3.3.1)$$

Buradan görüldüğü üzere,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n||z|^{n-1} \le 1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \qquad (3.3.2)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart (3.3.1) eşitsizliğin sağ tarafındaki kesrin 1 ile sınırlı olmasıdır.

(3.3.1) eşitsizliğinin aşağıdaki eşitsizliğe denk olduğu kolayca görülebilir.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n||z|^{n-1} \le 1. \qquad (3.3.3)$$

Teorem 3.1.2 gereğince

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha\gamma)[1+\beta(n-1)]|a_n| \le 1-\alpha,$$

dolayısıyla,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]}{1-\alpha}|a_n|\leq 1 \tag{3.3.4}$$

yazarız.

(3.3.4) ve (3.3.3)'den görüyoruz ki, eğer

$$n^2|z|^{n-1}\leq\frac{(n-\alpha\gamma)\left[1+\beta(n-1)\right]}{1-\alpha},\, n=2,3,... \tag{3.3.5}$$

sağlanırsa (3.3.3) eşitsizliği gerçekleşiyor.

O halde, sonuncu eşitsizliği sağlayan z değerleri için fonksiyon konvekstir.

(3.3.5) eşitsizliğini $|z|$ bilinmeyenine göre çözersek,

$$|z|\leq\left\{\frac{(n-\alpha\gamma)(1+\beta(n-1))}{(1-\alpha)n^2}\right\}^{1/(n-1)},\, n=2,3,... \tag{3.3.6}$$

elde ederiz. (3.3.6) eşitsizliği her $n=2,3,...$ için sağlandığından

$$|z|\leq\inf\left\{\left(\frac{(n-\alpha\gamma)(1+\beta(n-1))}{(1-\alpha)n^2}\right)^{1/(n-1)}:n=2,3,...\right\}$$

eşitsizliği için de sağlanır.

Bununla Teorem 3.3.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.3.1'de $\gamma=1$ alınarak aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.3.1: $f \in T(\alpha,\beta)$ fonksiyonu

$$|z| < r = r(\alpha,\beta)$$

diskinde konvekstir.

Burada,

$$r(\alpha,\beta) = \inf\left\{\left(\frac{(1+\beta(n-1))}{(1-\alpha)n}\right)^{1/(n-1)} : n = 2,3,...\right\}.$$

Sonuç 3.3.1'de $\beta = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.3.2: (bkz [17, s.113, Teorem 8]) $f \in S^*(\alpha)$ fonksiyonu

$$|z| < r = r(\alpha)$$

diskinde konvekstir.

Burada,

$$r(\alpha) = \inf\left\{\left(\frac{1}{(1-\alpha)n}\right)^{1/(n-1)} : n = 2,3,...\right\}.$$

Özel durumda aşağıdaki sonuca varırız.

Sonuç 3.3.3: $f \in S^*$ fonksiyonu

$$U_{1/2} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\right\}$$

diskinde konvekstir.

3.4. $A(\alpha,\beta;\tau)$ ve $TA(\alpha,\beta;\tau)$ sınıfları için katsayı sınırları

Bu bölümde, merkezil açık birim diskte analitik fonksiyonların $A(\alpha,\beta;\tau)$ ve $TA(\alpha,\beta;\tau)$ alt sınıflarının bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

$S^*C(\alpha,\beta;\tau)$ sınıfındaki fonksiyonlar için yeterli bir koşul aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 3.4.1: $f\in A$ olsun. f fonksiyonunun $A(\alpha,\beta;\tau)$ sınıfına ait olması için aşağıdaki koşulun sağlanması yeterlidir

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right]\left[1+(n-1)\beta\right]|a_n|\le(1-\alpha)|\tau|.$$

Sonuç

$$f_n(z)=z+\frac{(1-\alpha)|\tau|}{\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right]\left[1+(n-1)\beta\right]}z^n,\ z\in U,\ n=2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

İspat: Tanım 2.1'e göre, bir f fonksiyonunun $A(\alpha,\beta;\tau)$, $\alpha\in[0,1)$, $\beta\in[0,1]$, $\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ sınıfına ait olması için yeterli ve gerekli koşulun

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right\}>\alpha$$

olduğu tarafımızca ispatlandı.

Bu koşulun sağlanması için

$$\left|\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right|<1-\alpha \qquad (3.4.1)$$

koşulunun sağlanmasının yeterli olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

O halde, bizim sonuncu koşulun sağlandığını göstermemiz yeterli olacaktır.

(2.1) göz önüne alındığında, basit hesaplama ile

$$\left|\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right|=\left|\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[1+\beta(n-1)\right]a_n z^n}{z+\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+\beta(n-1)\right]a_n z^n}\right]\right|\le\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|}{|\tau|\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|\right\}}$$

yazarız.

Görüldüğü üzere, yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki kesrin $1-\alpha$ ile sınırlı olması için

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|\le|\tau|(1-\alpha)\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n|\right\}$$

koşulunun sağlanması gerekli ve yeterlidir.

Bu ise

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right]\left[1+(n-1)\beta\right]|a_n|\le(1-\alpha)|\tau| \qquad (3.4.2)$$

eşitsizliğine denktir.

Dolayısıyla, koşul (3.4.2) sağlanırsa eşitsizlik (3.4.1) doğrudur. O halde $f\in A(\alpha,\beta;\tau)\cdot$

Elde ettiğimiz eşitsizliğin

$$f_n(z)=z+\frac{(1-\alpha)|\tau|}{\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right]\left[1+(n-1)\beta\right]}z^n,\ z\in U,\ n=2,3,...$$

fonksiyonları için eşitlik olarak sağlanacağı kolayca gösterilir.

Böylece, Teorem 3.4.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.4.1'de $\tau=1$ alınarak aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.4.1: $f \in A$ olsun. f fonksiyonunun $A(\alpha,\beta)$ sınıfına ait olması için aşağıdaki koşulun sağlanması yeterlidir

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\left[1+\beta(n-1)\right]|a_n| \leq 1-\alpha .$$

Sonuç

$$f_n(z)=z+\frac{(1-\alpha)|\tau|}{(n-\alpha)\left[1+(n-1)\beta\right]}z^n, z\in U, n=2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Sonuç 3.4.1'de $\beta=0$ seçilirse, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4.2: (bkz [17, s.110, Teorem 1]) $f \in A$ olsun. f fonksiyonunun $S^*(\alpha)$ sınıfına ait olması için aşağıdaki koşulun sağlanması yeterlidir

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha .$$

Sonuç

$$f_n(z)=z+\frac{(1-\alpha)|\tau|}{n-\alpha}z^n, z\in U, n=2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Sonuç 3.4.1'de $\beta=1$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.4.3: (bkz.[17, s.110, Teorem 1 sonucu]) $f \in A$ olsun. f fonksiyonunun $C(\alpha)$ sınıfına ait olması için aşağıdaki koşulun sağlanması yeterlidir

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

Sonuç

$$f_n(z) = z + \frac{(1-\alpha)|\tau|}{n(n-\alpha)} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Aşağıdaki teoremden $TA(\alpha,\beta;\tau)$ sınıfından olan fonksiyonlar için $\tau \in \mathbb{R} - \{0\}$ durumunda Teorem 3.4.1'in tersinin de doğru olduğunu görüyoruz.

Teorem 3.4.2: $f \in T$ olsun. f fonksiyonunun $TA(\alpha,\beta;\tau)$ sınıfına ait olması için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekli ve yeterlidir

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n + (1-\alpha)|\tau| - 1\right]\left[1 + (n-1)\beta\right]|a_n| \leq (1-\alpha)|\tau|.$$

Sonuç

$$f_n(z) = z - \frac{(1-\alpha)|\tau|}{\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right]\left[1+(n-1)\beta\right]} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

İspat: Teoremin yeterliliğinin ispatı Teorem 3.4.1'in ispatına benzer şekilde yapıldığından yeterliliğin ispatını vermiyoruz.

Biz burada sadece teoremin gerekliliğini ispatlayacağız.

Farz edelim ki $f \in TS^*C(\alpha,\beta;\tau), \alpha \in [0,1), \beta \in [0,1], \tau \in \mathbb{R}^*$. Yani

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z) + \beta z^2 f''(z)}{\beta z f'(z) + (1-\beta) f(z)} - 1\right]\right\} > \alpha, z \in U. \tag{3.4.3}$$

Basit sadeleştirmelerle (3.4.3)'ü aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[1+\beta(n-1)\right]a_n z^n}{\tau\left\{z-\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+\beta(n-1)\right]a_n z^n\right\}}\right\} > \alpha-1.$$

Açıktır ki, eğer z parametresi reel seçilirse

$$\frac{-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[1+\beta(n-1)\right]a_n z^n}{\tau\left\{z-\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+\beta(n-1)\right]a_n z^n\right\}}$$

ifadesi reeldir. O halde, bu ifadede $z \to 1^-$ olarak limite geçersek

$$\frac{-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[1+\beta(n-1)\right]a_n}{\tau\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+\beta(n-1)\right]a_n\right\}} \geq \alpha-1 \tag{3.4.4}$$

elde ederiz.

Sonuncu eşitsizliği τ parametresinin farklı işaret durumlarına bağlı olarak inceleyeceğiz.

$\tau > 0$ olsun. Bu durumda, (3.4.4)'den

$$-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[1+\beta(n-1)\right]a_n \geq (\alpha-1)\tau\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+\beta(n-1)\right]a_n\right\}$$

elde ederiz.

Buradan, basit sadeleştirmeyle yazarız:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n+(1-\alpha)\tau-1\right]\left[1+\beta(n-1)\right]a_n \leq (1-\alpha)|\tau| \tag{3.4.5}$$

Şimdi $\tau < 0$ olsun. O zaman , $\tau = -|\tau|$ ve (3.4.4)'den

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[1+\beta(n-1)\right]a_n}{|\tau|\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+\beta(n-1)\right]a_n\right\}} \geq \alpha-1 \ ,$$

yani,

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[1+\beta(n-1)\right]a_n \geq (\alpha-1)|\tau|\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+\beta(n-1)\right]a_n\right\}.$$

O halde,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n+(\alpha-1)|\tau|-1\right]\left[1+\beta(n-1)\right]a_n \geq -(1-\alpha)|\tau|.$$

$\alpha<1$ (veya $1-\alpha>\alpha-1$) olduğundan, son eşitsizlikten,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right]\left[1+\beta(n-1)\right]a_n \geq -(1-\alpha)|\tau|. \qquad (3.4.6)$$

Böylece , (3.4.6) ve (3.4.5)'den teoremin gerekliliğinin ispatı tamamdır.

Elde edilen sonucun

$$f_n(z)=z-\frac{(1-\alpha)|\tau|}{\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right]\left[1+(n-1)\beta\right]}z^n, z\in U, n=2,3,...$$

fonksiyonları için kesin olduğu rahatlıkla gösterilir.

Bununla teoremin ispatı tamamdır.

Teorem 3.4.2'nin özel durumu Altıntaş tarafından [3, $\tau=1$ ve $p=n=1$ için] ispatlanmıştır.

Teorem 3.4.2'de $\tau = 1$ alınarak aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.4.4: $f \in T$ olsun. f fonksiyonunun $TA(\alpha, \beta)$ sınıfına ait olması için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekli ve yeterlidir

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)\left[1+(n-1)\beta\right]|a_n| \leq 1-\alpha .$$

Sonuç

$$f_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{(n-\alpha)\left[1+(n-1)\beta\right]} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Hatırlatma 3.4.1: Sonuç 3.4.4'te elde edilen sonuç [3]'deki Teorem 1'i doğrular.

Sonuç 3.4.4'te , $\beta = 0$ alırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.4.5: (bkz. [17, s.110, Teorem 2]) $f \in T$ olsun. f fonksiyonunun $TS^*(\alpha)$ sınıfına ait olması için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekli ve yeterlidir

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha .$$

Sonuç

$$f_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{n-\alpha} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Sonuç 3.4.4'te $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4.6: (bkz [17, p.111, Sonuç 2]) $f \in T$ olsun. f fonksiyonunun $TC(\alpha)$ sınıfına ait olması için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekli ve yeterlidir

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha .$$

Sonuç

$$f_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{n(n-\alpha)} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Teorem 3.4.2'de $\beta = 0$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4.7: $f \in T$ olsun. f fonksiyonunun $TA(\alpha,\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^*$ sınıfına ait olması için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekli ve yeterlidir

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n + (1-\alpha)|\tau| - 1 \right] |a_n| \leq (1-\alpha)|\tau|.$$

Sonuç

$$f_n(z) = z - \frac{(1-\alpha)|\tau|}{n + (1-\alpha)|\tau| - 1} z^n, z \in U, n = 2,3,...$$

fonksiyonları için kesindir.

Teorem 3.4.2'den $TA(\alpha,\beta;\tau)$ sınıfına ait fonksiyonların katsayıları için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.4.3: (2.2) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $TA(\alpha,\beta;\tau), \tau \in \mathbb{R}^*$ sınıfına ait olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq \frac{(1-\alpha)|\tau|}{(1+\beta)\left[1+(1-\alpha)|\tau|\right]} \tag{3.4.7}$$

ve

$$\sum_{n=2}^{\infty} n.|a_n| \leq \frac{2.(1-\alpha)|\tau|}{(1+\beta)\left[1+(1-\alpha)|\tau|\right]}. \tag{3.4.8}$$

İspat: $f \in TA(\alpha,\beta;\tau), \tau \in \mathbb{R}^*$ olsun. Teorem 3.4.2'yi kullanarak,

$$\left[1+(1-\alpha)|\tau|\right](1+\beta)\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right].\left[1+(n-1)\beta\right]|a_n| \leq (1-\alpha)|\tau|$$

elde ederiz.

Buradan, (3.4.7) eşitsizliğinin doğruluğu görülür.

Benzer şekilde yazıyoruz

$$(1+\beta)\sum_{n=2}^{\infty}\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right]|a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right].\left[1+(n-1)\beta\right]|a_n| \leq (1-\alpha)|\tau|;$$

yani,

$$(1+\beta)\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq (1-\alpha)|\tau| + \left[1-(1-\alpha)|\tau|\right](1+\beta)\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|.$$

Son eşitsizlikte (3.4.7) kullanarak

$$(1+\beta)\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)|\tau|}{1+(1-\alpha)|\tau|}$$

elde ederiz ki buradan (3.4.8) eşitsizliğinin doğruluğu kolayca görülür.

Böylece, Teorem 3.4.3'ün ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 3.4.3'de $\tau = 1$ alınarak aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.4.8: (2.2) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $TA(\alpha,\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \le \frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2-\alpha)}$$

ve

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le \frac{2(1-\alpha)}{(1+\beta)(2-\alpha)}.$$

Hatılatma 3.4.2: Sonuç 3.4.7'de elde edilen sonuç [3]'deki Lemma 2'yi ($n = p = 1$ ile) doğrular.

Teorem 3.4.2'den $TA(\alpha,\beta;\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^*$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı sınır tahminlerinden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4.9: Eğer, $f \in TA(\alpha,\beta;\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^*$ ise katsayılar için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_n| \le \frac{(1-\alpha)|\tau|}{\left[n+(1-\alpha)|\tau|-1\right]\left[1+(n-1)\beta\right]}, n = 2,3,...$$

Hatılatma 3.4.3: Sonuç 3.4.9'dan ilgili parametrelerin çeşitli değerleri için çok sayıda sonuç elde edilebilir. Bu sonuçların bazıları konuyla ilgili daha önceki çalışmalarda verilmiştir (bakınız örneğin [2,17,18]).

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, $\alpha \in [0,1)$, $\beta, \gamma \in [0,1]$ ve $\tau \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ için orijin merkezli açık birim diskte analitik fonksiyonların bazı yeni $A(\alpha, \beta, \gamma)$, $T(\alpha, \beta, \gamma)$, $A(\alpha, \beta, \tau)$ ve $TA(\alpha, \beta; \tau)$ alt sınıflarını tanımladık.

Analitik fonksiyonların bu sınıflarının bazı geometrik özelliklerini inceledik.

Ayrıca, bu sınıfların katsayı problemleri, distortion teoremleri ve konvekslik ve yıldızıllık yarıçapı gibi çeşitli özelliklerini inceledik.

Tezimizde tanımlanan sınıflar için Fekete-Szegö fonksiyoneli ve ikinci Hankel determinantının üst sınır problemi ve diğer geometrik özellikler de incelenebilir.

Biz bu tezde (bkz. Teorem 3.4.2) bir analitik fonksiyonun $TA(\alpha, \beta; \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^*$ sınıfına ait olması için yeterli ve gerekli koşulu verdik. Bu teorem $\tau \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ durumunda yapılabilirse daha iyi sonuçlar elde edilebilir. Bu araştırmacılar için bir çalışma konusu olabilir. Ayrıca, Teorem 3.4.3'de $\tau \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ durumunda incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1]. Ali, R. M. Coefficients of the inverse of strongly starlike functions. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2003; 26(1), 63-71.

[2]. Altintaş, O., On a subclass of certain starlike functions with negative coefficient, Math. Japon., 1991; 36, 489-495.

[3]. Altintaş, O., Irmak, H. and Srivastava, H. M., Fractional calculus and certain starlike functions with negative coefficients, Comput. Math. Appl., 1995; 30, No. 2, 9-16.

[4]. Altintaş, O., Özkan, Ö. and Srivastava, H. M., Neighborhoods of a Certain Family of Multivalent Functions with Negative Coefficients, Comput. Math. Appl., 2004; 47, 1667-1672.

[5]. Duren, P. L., Univalent Functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenshaften, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[6]. Frasin, B. A. and Aouf, M., New subclasses of bi-univalent functions.Applied Mathematics Letters, 2011; 24(9), 1569-1573.

[7]. Goodman, A. W., Univalent Functions, Volume I, Polygonal, Washington, 1983.

[8]. Irmak, H., Lee, S. H. and Cho, N. E., Some multivalently starlike functions with negative coefficients and their subclasses defined by using a differential operator, Kyungpook Math. J., 1997; 37, 43-51.

[9]. Kulshrestha, P., Coefficients for alpha-convex univalent functions.Bulletin of the American Mathematical Society, 1974; 80(2), 341-342.

[10]. Libera, R. J. and Zlotkiewicz, E. J., Early coefficients of the inverse of a regular convex function.Proceedings of the American Mathematical Society, 1982; 85(2), 225-230.

[11]. Mustafa, N., Characteristic properties of the new subclasses of analytic functions. Dokuz Eylul University-Faculty of Engineering Journal of Science and Engineering 2017; 19, No. 55, 247-257.

[12]. Mustafa, N., Fekete-Szegö problem for certain subclass of analytic and bi-univalent functions, Journal of Scientific and Engineering Research, 2017; 4(8), 390-400.

[13]. Mustafa, N., Derya, O., Coefficient Bound Etimates for Certain Class of Analytic Functions. Journal of Scientific and Engineering Research. 2020; 7(4), 191-197.

[14]. Mustafa, N., Derya, O., Coefficient Bound Etimates for Certain Subclass of Analytic Functions of Complex Order. Journal of Scientific and Engineering Research. 2020; 7(6), 30-39.

[15]. N. Mustafa, O. Derya, Radius of Convexity of Cetain Subclass of Analytic Functions. Joural of Scientific and Engineering Research. 2021, 8(1): 156-166.

[16]. Ponnusamy, S. and Silverman, H., Complex variables with applications.Springer Science & Business Media, 2007.

[17]. Silverman, H., Univalent Functions with Negative Coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 1975; 51, No. 1, 106-116.

[18]. Srivastava, H. M., Owa, S. and Chatterjea, S. K., A note on certain classes of starlike functions. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1987; 77, 115-124.