T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KARMAŞIK MERTEBEDEN Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ SINIFININ KATSAYI TAHMİNLERİ

Taner TURAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

OCAK – 2021

KARS

ONAY SAYFASI

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Taner TURAÇ'ın Prof. Dr. Nizami MUSTAFA danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "**Karmaşık Mertebeden Bi-ünivalent Fonksiyonların Belli Sınıfının Katsayı Tahminleri**" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

28 / 01 / 2021

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	**:** Prof. Dr. Sadulla JAFAROV	
Üye	**:** Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	**:** Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 202… gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Taner TURAÇ

28/01/2021

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

KARMAŞIK MERTEBEDEN Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ SINIFININ KATSAYI TAHMİNLERİ

Taner TURAÇ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Bu tez çalışmasında amacımız bi-ünivalent fonksiyonların yeni bir altsınıfını tanımlamak ve incelemektir.

Ayrıca, tez çalışmamızda tanımlanan fonksiyon sınıfının katsayıları için üst sınır tahminleri vermeyi hedefliyoruz.

Dahası, tez çalışmamızda tanımlanan altsınıf için Fekete-Szegö probleminin çözümünü de veriyoruz.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyonlar, Bi-Ünivalent Fonksiyonlar, Katsayı Sınırları

2021 , 54 sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Coefficient Estimates for the Certain Subclass
Bi-univalent Functions of the Complex Order

Taner TURAÇ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

In this thesis, our aim is to define and examine a new subclass of bi-univalent functions.

Also, we aim to provide upper bound estimates for the coefficients of the function class defined in our thesis.

Moreover, we give the solution of the Fekete-Szegö problem for the subclass defined in our thesis.

Key Words: Analytic functions, bi-ünivalent functions, coefficient bounds

2021, 54 pages

ÖNSÖZ

“Karmaşık mertebeden bi-ünivalent fonksiyonların belli sınıfının katsayı tahminleri” adlı bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Tez çalışmamın her aşamasında bana bilgi ve deneyimlerinden yararlanma imkânı sunarak rehberlik eden, umut ve güç veren değerli danışman hocam Prof. Dr. Nizami MUSTAFA’ya ve bu eğitim sürecinde her türlü maddi ve manevi katkılarıyla desteğini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli eşim Özge’ye kızım Ebrar İlke’ye, anneme , babama ,arkadaşlarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Taner TURAÇ

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	**:** Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	**:** Karmaşık düzlem
$\mathbb{R}$	**:** Reel sayılar
U	**:** $U=\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<1\}$ Karmaşık düzlemde açık birim disk
$f(U)$	**:** U açık birim diskinin f fonksiyonu altında görüntüsü
A	**:** U 'da analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulunu sağlayan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, a_n\in\mathbb{C}, n=2,3,...$ fonksiyonlarının sınıfı
S	**:** A 'nın ünivalent fonksiyonlarından oluşan alt sınıfı
C	**:** U 'da konveks fonksiyonların sınıfı
S^*	**:** U 'da yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$S^*(\alpha)$	**:** $S^*(\alpha)=\left\{f\in S:\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\ z\in U\right\}$
$C(\alpha)$	**:** $C(\alpha)=\left\{f\in S:\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha,\ z\in U\right\}$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bilindiği üzere, analitik fonksiyonların belli bir altsınıfının katsayı problemi, Fekete-Szegö problemi, Hankel determinantı için üst sınır problemi önemli ve çok çalışılan konulardandır. Bu konuda birçok araştırmacıların çok sayıda çalışmaları mevcuttur [1,5,16,18,21-31,38,42,45,46].

Yukarıda adı geçen problemler karmaşık düzlemin $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ merekezil açık birim diskinde incelenmektedir. Bunun ana sebeplerinden biri Riemann dönüşüm teoremi gereğince karmaşık düzlemin basit bağlantılı bir bölgesinin birim diske konform dönüştürülebilmesidir. Öte yandan, bilindiği üzere konform dönüşüm altında bölgelerin birçok özellikleri korunmaktadır. Ayrıca, analitik fonksiyonlar merkezil açık birim diskte yakınsak seriye açılabilmektedir. Bu sebeplerden dolayı, bir bölgede çalışmaktansa birim diskte çalışmak tercih edilmektedir.

Analitik fonksiyonlar teorisindeki birçok çalışmalar karmaşık düzlemde $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ açık birim diskte analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ normalleştirme koşulunu sağlayan fonksiyonların bir sınıfında yoğunlaşmıştır.

Aynı zamanda U açık birim diskte analitik fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanıtıyor ve araştırıyoruz. Bu sınıflara ait fonksiyonların bazı ilginç özelliklerini inceliyor ve aynı sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı tahminleri ile Fekete-Szegö probleminin çözümünü veriyoruz.

Bu tez çalışmasında, U açık birim diskte analitik fonksiyonların bir yeni $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$ alt sınıfı tanımlanmış, bu sınıfın katsayı problemleri ve Fekete-Szegö problemleri incelenmiştir. Parametrelerin özel değerlerinde elde edilen sonuçların kaynaklarda mevcut olan sonuçlarla çakıştığı da saptanmıştır.

1.2 Kuramsal Temeller

Bu alt başlıkta tezimizin konusuyla ilgili temel kavramlar sunuldu. Bu kavramlar için Ponnusamy ve Silverman'ın [35] kaynağından faydalanıldı.

Tanım1.2.1. (r-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere,

$$U(z_0, r) = \{z_0 \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \tag{1.2.1}$$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının r komşuluğu) denir.

$\bar{U}(z_0, r)$ ile $U(z_0, r)$'nin kapanışı $\partial U(z_0, r)$ ile de onun sınırı gösterilir.

Dolayısıyla,

$$\bar{U}(z_0, r) = \{z_0 \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \text{ ve } \partial U(z_0, r) = \{z_0 \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Özel durumda orijin merkezli r yarıçaplı disk $U(0, r) = U_r$ ile, orijin merkezli açık birim disk de $U = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.2. (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $U(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 1.2.3. (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer, S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 1.2.4. (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir.

Tanım 1.2.5. (Ayrık Küme): Ortak elemanı olmayan kümeye ayrık küme denir.

Tanım 1.2.6. (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2, S \cap S_1 \neq \emptyset$ ve $S \cap S_2 \neq \emptyset$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir.

Tanım 1.2.7. (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Örneğin karmaşık düzlemde her komşuluk bir bölgedir.

Tanım 1.2.8. (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer, f fonksiyonu S kümesinin her noktasında sürekli ise f 'ye S kümesi üzerinde sürekli fonksiyon denir.

S kümesi üzerinde sürekli fonksiyonların kümesini $C(S)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.2.9. (Diferansiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.2.2}$$

sonlu limiti varsa f fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında f fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Dolayısıyla, (1.2.2) limiti sonlu ise

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.2.10. (Analitiklik): Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $U(z_0, \varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f , z_0 noktasında analitiktir denir.

Eğer, f fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f 'ye S kümesi üzerinde analitik denir. S kümesinde analitik fonksiyonların kümesi (çoğu kaynaklarda) $H(S)$ ile gösterilir.

Karmaşık düzlemin tamamında analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

Örneğin, e^z fonksiyonu bir tam fonksiyondur.

$z = x + iy$ olmak üzere, karmaşık değişkenli karmaşık değerli bir $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{1.2.3}$$

ya da

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 y} = 0 \tag{1.2.4}$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann koşulları sağlanıyor.

Tanım 1.2.11.(Kapalı Eğri): Başlangıç ile bitiş noktaları aynı olan eğriye kapalı eğri denir.

Tanım 1.2.12.(Pozitif Yönlü Eğri): Parametrenin artışı eğri üzerinde saat yönünün tersi yönüne karşılık geliyorsa böyle eğrilere pozitif yönlü eğri denir. Aksi durumda negatif yönlü eğri denir.

Teorem 1.2.1. (Cauchy-Türev Formülü): Bir f fonksiyonu pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisinin sınırladığı bölgede ve γ eğrisi üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin sınırladığı bölgenin içinde bir nokta ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad . \tag{1.2.5}$$

(1.2.5) formülüne analitik fonksiyonlar için Cauchy Türev formülü denir.

Cauchy türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: Bir bölgede analitik bir fonksiyonun bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir.

Bu durumda, f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \; a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \qquad (1.2.6)$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

Fakat bu hüküm reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar için genelde doğru değil. Yani, her reel değişkenli reel değerli fonksiyonun bir noktada birinci mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemiyoruz.

Örneğin, $f(z)=x^{3/2}$ reel değişkenli reel değerli fonksiyonunun $x=0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x=0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur.

<u>Tanım 1.2.13. (Ünivalent (yalınkat) Fonksiyon</u>**):** f, $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1)=f(z_2)$ olması $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1)\neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat) fonksiyon denir [9].

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f 'ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

<u>Teorem 1.2.2. (Yerel Ünivalentlik Kriteri):</u> Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0)\neq 0$ olmasıdır [9].

Fakat $f'(z_0)\neq 0$ şartı f fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şart olup yeterli değildir. Yani, f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0)\neq 0$ fakat tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

<u>Örnek 1.2.1.:</u> $f(z)=z^2$ fonksiyonu $A=\{z:1<|z|<2, 0<\arg z<3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir.

Gerçekten $f(z)=z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0)\neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}+i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}}-i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=i\frac{25}{9} \tag{1.2.7}$$

olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer, $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise bu durumda $z\in A$ noktasında f' fonksiyonu f 'nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme ve yerel dönme etkenleridir.

Ayrıca, bilindiği üzere $f:A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z)=|f'(z)|^2$ olarak tanımlanmaktadır. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür.

Böylece, analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

<u>Tanım 1.2.14. (Düzgün Eğri):</u> $\gamma(t)$ eğrisi verilsin. Eğer $[a,b]$ de türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir.

<u>Tanım 1.2.15. (Konform dönüşüm):</u> Eğer, bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer, bir f fonksiyonu, bir $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir.

Örneğin, $f(z)=e^x$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzlemin tamamında konformdur.

<u>Teorem 1.2.3:</u> f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z)\neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur. Dolayısıyla, bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur.

Teorem 1.2.3'de verilen koşul ünvalentlik için yeterli koşul olup gerekli değil.

En önemli konform dönüşümlerinden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm $a,\ b,\ c,\ d$ karmaşık sabitler olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc \neq 0 \tag{1.2.8}$$

ve genişletilmiş karmaşık düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

1851 yılında Riemann, z - düzlemindeki $D \subset \mathbb{C}(D \neq \mathbb{C})$ bölgesini, w - düzlemindeki D_1 bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonun varlığını aşağıdaki teoremle ispatlamıştır.

Teorem 1.2.4. (Riemann Dönüşüm Teoremi): Karmaşık düzlemin her $D \subset \mathbb{C}(D \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in D$ olmak üzere $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ koşullarını sağlayan ve D'yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşümü vardır [9].

Tezimizin bu alt bölümünde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları ve ünivalent fonksiyonlar sınıfının bazı altsınıflarını biraz daha ayrıntılı sunacağız.

Bilindiği üzere, analitik olarak bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken, geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürüyor. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürüyor.

Riemann dönüşüm teoremi gereğince, keyfi basit bağlantılı bir bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U açık birim diskte tanımlı ünivalent bir f fonksiyonu seçilebilir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Tezimizin bu başlığında kullanacağımız materyal ve yöntemleri verdik.

$f(0)=0$, $f'(0)=1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (1.2.6) serisi

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \ , \ z \in U \tag{2.1}$$

şeklini alır.

(2.1) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir.

U'da normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını A ile göstereceğiz ve kısaca

$$A=\left\{ f : U \text{'da analitik ve } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right\} \tag{2.2}$$

yazacağız.

Şimdi ünivalent fonksiyonların sınıfını tanımlayalım.

<u>Tanım 2.1 (S Sınıfı):</u> U birim diskinde ünivalent olan $f \in A$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa S sınıfı denir ve kısaca

$$S=\left\{ f \in A : f \text{ fonksiyonu } U \text{'da ünivalenttir} \right\} \tag{2.3}$$

şeklinde gösterilir [9,13,34] .

Ayrıca, her $f \in S$ fonksiyonu

$$f^{-1}(w)=w+A_2w^2+A_3w^3+A_4w^4+\cdots \ , w \in D \text{ ve } A_2=-a_2 \ , \ A_3=2a_2^2-a_3 \ ,$$

$$A_4=-5a_2^3+5a_2a_3-a_4$$

olacak şekilde

$$f^{-1}(f(z))=z \ , \ z \in U \ , \ f\left(f^{-1}(w)\right)=w \ , \ w \in D=\left\{w : |w|<r_0(f)\right\} \ , \ r_0(f) \geq \frac{1}{4} \tag{2.4}$$

biçiminde bir ters fonksiyona sahip olduğu bilinmektedir [10] .

S sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir.

(i) $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\operatorname{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} / \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} / (-\infty, -1/4)$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca, şunu da belirtelim ki, S sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı S sınıfına ait olmayabilir.

Örneğin,

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \in S \quad \text{ve} \quad f_2(z) = \frac{z}{1+iz} \in S\,. \tag{2.5}$$

Fakat

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{ve} \quad f_{(2)}'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2} \tag{2.6}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2} \tag{2.7}$$

elde edilir ki $z = \dfrac{1+i}{2} \in U$ noktasında

$$f_1'(z) + f_2'(z) = 0 \tag{2.8}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, $f_1 + f_2$ fonksiyonu için ünivalentliğin gereklilik koşulu sağlanmamış olur. Yani, $f_1 + f_2 \notin S$.

Bununla beraber S sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Tanım 2.2 (P Sınıfı): U birim diskinde $p(0)=1,\ \operatorname{Re}(p(z))>0$ koşullarını sağlayan $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklinde fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya P sınıfı denir.

Örneğin, $p(z)=(1+z)/(1-z), z\in U$ fonksiyonu P sınıfına ait olup, U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür.

Ayrıca, P sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez.

Örneğin, $p(z)=1+z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N}_{0,}\ n\geq 2$ için ünivalent değildir.

Her ünivalent fonksiyon da Caratheodory sınıfına ait değildir.

Örneğin, $f(z)=z$ fonksiyonu ünivalent olmasına rağmen P sınıfına ait değildir.

Şimdi de S sınıfının bazı önemli altsınıflarından bahsedelim.

Tanım 2.3 (S* Sınıfı): $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir z_0 noktasını keyfi $z\in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B 'ye z_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. z_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir.

Eğer, bir f fonksiyonu U birim diskini w düzleminin w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu U birim diskini yıldızıl kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir.

S sınıfındaki tüm yıldızıl fonksiyonların kümesi $S*$ ile gösterilir.

Kısaca, yıldızıl fonksiyonları

$$S^*=\left\{f\in S:\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0, z\in U\right\} \tag{2.9}$$

şeklinde gösterebiliriz

Tanım 2.3 yıldızıl fonksiyonlar sınıfının geometrik tanımıdır.

Aşağıdaki teorem bir fonksiyonun yıldızıl olması için gerekli ve yeterli koşulu ifade etmekle beraber yıldızıl fonksiyonlar sınıfının analitik tanımını vermektedir.

Teorem 2.1: $f \in S$ olsun. O halde,

$$f \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in P . \tag{2.10}$$

Ayrıca, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^* \Rightarrow |a_n| \leq n$ tahmini doğrudur [13,34].

S sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \ z \in U \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur.

Bu fonksiyonu

$$k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right] \tag{2.12}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 2.4 (C Sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B 'ye konveks küme denir. Eğer, bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. S sınıfındaki tüm konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir [9,34].

C sınıfını kısaca $C=\left\{ f\in S:\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0, z\in U \right\}$ şeklinde gösterebiliriz.

Tanım 2.4. konveks fonksiyonlar sınıfının geometrik tanımıdır.

Aşağıdaki teorem bir fonksiyonun konveks olması için gerekli ve yeterli koşulu ifade etmekle beraber konveks fonksiyonlar sınıfının da analitik tanımını vermektedir.

Teorem 2.2: $f\in S$ olsun. Bu durumda,

$$f(z)\in C \Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\in P \ . \qquad (2.13)$$

Ayrıca, $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in C \Rightarrow |a_n|\le 1$ değerlendirmesi doğrudur [13,34]. Bir analitik fonksiyonun ünivalentliğini garanti eden en kullanışlı şart şudur: f fonksiyonu konveks bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z\in D$ için $\mathrm{Re} f'(z)>0$ ise f fonksiyonu D bölgesi üzerinde ünivalenttir. Bu kriter Noshiro-Warschawski-Wolff kriteri olarak bilinir. Bu sonuç ile Caratheodory sınıfı arasında yakın bir ilişki vardır [9,13,34].

Teorem 2.1. ve 2.2.'in bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem S^* ve C sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

Teorem 2.3 (Alexander Teoremi): $f\in S$ ve $z\in U$ olmak üzere, $g(z)=zf'(z)$ olsun.

Bu durumda, $f\in C$ olması için gerek ve yeter şart $g\in S^*$ olmasıdır $\left(f\in C \Leftrightarrow g\in S^*\right)$ [9,13,34].

Ayrıca, yukarıdaki tanımlardan anlaşıldığı üzere, bu sınıflar arasında

$$C \subset S^* \subset S \subset A \tag{2.14}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Tanım 2.5 ($S^*(\alpha)$ Sınıfı): Her $z \in U$ ve $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \tag{2.15}$$

koşulunu sağlayan $f \in S$ fonksiyonuna α mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $S^*(\alpha)$ ile gösterilir [13,36].

Tanım 2.6. ($C(\alpha)$ Sınıfı): Her $z \in U$ ve $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \tag{2.16}$$

koşulunu sağlayan $f \in S$ fonksiyonuna α mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $C(\alpha)$ ile gösterilir [13,36].

Kolaylık sağlaması için yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sırasıyla $S^* = S^*(0)$ ve $C = C(0)$ şeklinde gösterilecektir.

S 'nin önemli bir alt sınıfı aşağıdaki şekilde tanımlanan $\Re(\alpha,\beta)$ sınıfıdır

$$\Re(\alpha,\beta) = \left\{ f \in S : \operatorname{Re}\left[f'(z) + \beta z f''(z) \right] > \alpha, z \in U \right\}, \alpha \in [0,1), \beta \geq 0 \tag{2.17}$$

Gao ve Zhou [12] çalışmasında $\Re(\alpha,\beta)$ sınıfını incelemiş ve bu alt sınıfın bazı dönüşüm özelliklerini göstermişlerdir.

Özel durumda $\alpha = 0$ için

$$\Re(\beta) = \left\{ f \in S : \mathrm{Re}\left[f'(z) + \beta z f''(z) \right] > 0, z \in U \right\}, \beta \geq 0 \qquad (2.18)$$

$\Re(\beta)$ altsınıfını elde ederiz.

Altintaş Et al. [2] tarafından çalışmasında

$$f \in T, \left| \frac{1}{\gamma}\left[f'(z) + \beta z f''(z) - 1 \right] \right| \leq \alpha, z \in U, \beta \in [0,1], \alpha \in (0,1], \gamma \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}. \qquad (2.19)$$

koşullarını sağlayan f fonksiyonlarından oluşan analitik ve bi-ünivalent fonksiyonların bir $\Re(\alpha,\beta,\gamma)$ alt sınıfını incelemişlerdir.

Burada, T U açık birim diskte analitik olan

$$f(z) = z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \ldots = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, a_n \geq 0, \qquad (2.20)$$

şekilli f fonksiyonlarının sınıfıdır.

Altintaş Et al. [2] çalışmasında bir fonksiyonun bu sınıfa ait olması için yeterli ve gerekli şartları bulmuşlar.

f ve f^{-1}nin her ikisi de kendi tanımlı bölgelerinde tanımlı ise $f \in A$ fonksiyonuna U da bi-ünivalent fonksiyon denir. U birim diskinde bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfı Σ ile gösteriliyor.

1967'de Lewin [20] (2.1) şekilli her $f \in \Sigma$ fonksiyonunun ikinci katsayısı için $|a_2| < 1.51$ değerlendirmesinin doğruluğunu göstermiştir. 1967'de Brannan ve Clunie [3] $f \in \Sigma$ fonksiyonunun ikinci katsayısı için $|a_2| < \sqrt{2}$ tahminini söylemişlerdir. 1984 yılında Tan [41] Σ sınıfından olan fonksiyonlar için bilinen en iyi tahmin olan $|a_2| < 1.485$ değerlendirmesini elde etmiştir. 1985 yılında Kedzierawski [17] bi-starlike fonksiyonlar için Brannan-Clunie tahminini ispatlamıştır. Brannan ve Taha [4] α mertebeden bi-starlike ve bi- konveks fonksiyonların ilk $|a_2|$ve $|a_3|$ iki katsayıları üzerine tahminler elde etmişlerdir.

Bi-ünivalent fonksiyonların incelenmesi son yıllarda Srivastava Et al. [34] tarafından yeniden canlandırılmıştır ve Srivastava Et al. [37] çalışmaları literatürde oldukça fazla sayıda rağbet görmüştür.

Özellikle, Σ'nın çeşitli alt sınıfları için başlangıç $|a_2|$,$|a_3|$ ve $|a_4|$ katsayılarının tahminleri üzerine çok sayıda sonuç bulunmuştur (bakınız örneğin [7,10,15,32,39,40,43 ve 44]).

Son zamanlarda Deniz [8] ve Kumar Et al. [19] analitik fonksiyonlar arasında subordine prensibine dayanıp sınıfları genelleştirerek Brannan ve Taha'nın [4]'deki sonuçlarını genişletmiş ve geliştirmişlerdir.

Yukarıdaki adı geçen çok sayıdaki çalışmalara rağmen, Σ sınıfına ait olan fonksiyonların $|a_n|(n=2,3,...)$ katsayıları için tahminler hala açık bir problem olarak kalmaktadır.

Yukarıda bahsi geçen çalışmalardan esinlenerek Σ bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfının bir altsınıfını tanımlayalım.

<u>Tanım 2.7:</u> (2.1) ile verilen $f \in \Sigma$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[f'(z)+\beta z f''(z)-1\right]\right\}>\alpha, z\in U, \tag{2.21}$$

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[g'(w)+\beta w g''(w)-1\right]\right\}>\alpha, w\in D. \tag{2.22}$$

sağlıyorsa $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$, $\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}, \alpha\in[0,1), \beta\geq 0$ sınıfına aittir denir.

<u>Hatırlatma 2.1:</u> Tanım 2.7.'de $\tau=1$ alınırsa

$$\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,1)=\Re_{\Sigma}(\alpha,\beta), \alpha\in[0,1), \beta\geq 0$$

sınıfını elde ederiz.

Yani,

$$f \in H_{\Sigma}(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(f'(z)+\beta z f''(z)\right) > \alpha, z \in U, \tag{2.23}$$

$$\operatorname{Re}\left(g'(w)+\beta w g''(w)\right) > \alpha, w \in D. \tag{2.24}$$

Hatırlatma 2.2: Tanım 2.7.'de $\beta = 0$ alırsak $\Im_{\Sigma}(\alpha,0,\tau)$, $\alpha \in [0,1)$, $\tau \in \mathbb{C}^{*} - \{0\}$ sınıfını elde ederiz, yani

$$f \in \Im_{\Sigma}(\alpha,0,\tau) \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[f'(z)-1\right]\right\} > \alpha, z \in U, \tag{2.25}$$

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[g'(w)-1\right]\right\} > \alpha, w \in D. \tag{2.26}$$

Hatırlatma 2.3: Tanım2.7.'de $\beta = 0,\ \tau = 1$ alınırsa $\Im_{\Sigma}(\alpha,0,1) = \Re_{\Sigma}(\alpha,0)$, $\alpha \in [0,1)$ fonksiyon sınıfını elde ederiz, yani

$$f \in \Re_{\Sigma}(\alpha,0) \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(f'(z)\right) > \alpha, z \in U, \tag{2.27}$$

$$\operatorname{Re}\left(g'(w)\right) > \alpha, w \in D. \tag{2.28}$$

Hatırlatma 2.4: Tanım2.7.'de $\beta = 1$ alarak $\Im_{\Sigma}(\alpha,1,\tau), \alpha \in [0,1), \tau \in \mathbb{C}^{*} = \mathbb{C} - \{0\}$ fonksiyonun sınıfını elde ederiz, yani

$$f \in \Im_{\Sigma}(\alpha,1,\tau) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[f'(z)+zf''(z)-1\right]\right\} > \alpha, z \in U \\ \qquad \operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[g'(w)+wg''(w)-1\right]\right\} > \alpha, w \in D \end{array} \right\}. \tag{2.29}$$

Hatırlatma 2.5: Tanım 2.7.'de $\beta = 1, \tau = 1$ alınırsa $\Im_{\Sigma}(\alpha,1,1) = \Re_{\Sigma}(\alpha,1)$, $\alpha \in [0,1)$ fonksiyon sınıfını elde ederiz, yani

$$f \in \Re_{\Sigma}(\alpha,1) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\big(f'(z)+zf''(z)\big)>\alpha, z\in U\,, \tag{2.30}$$

$$\mathrm{Re}\big(g'(w)+wg''(w)\big)>\alpha, w\in D\,. \tag{2.31}$$

$\Im_{\Sigma}(\alpha,0,1)=\Re_{\Sigma}(\alpha,0)=N_{\Sigma}(\alpha)$ sınıfı Srivastava Et al. [39] ve Çağlar Et al. [6] tarafından araştırılmıştır.

2011 yılında Frasin [11] $2(1-\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\beta n+1}\le 1$ koşulu ile $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,1)=H_{\Sigma}(\alpha,\beta)$, $\alpha\in[0,1)$, $\beta>0$ alt sınıfını araştırmıştır. O bu sınıfa ait olan fonksiyonların ilk iki katsayısı için tahminler bulmuştur.

Bu tezde amacımız $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$ sınıfına ve özel durumlarına ait fonksiyonların $|a_2|$, $|a_3|$ ve $|a_4|$ ilk üç katsayıları için üst sınır tahminleri bulmaktır. Ayrıca, bu tez çalışmamızda $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$ sınıfı için Fekete-Szegö problemini de çözmeyi hedefliyoruz.

Ana sonuçlarımızı kanıtlamak için aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız olacaktır.

Lemma 2.1: (Örneğin bakınız [33]) Eğer, $p\in P$ ise o zaman $|p_n|\le 2, n=1,2,3,...$ kesin tahminler sağlanır. Burada, P U birim açık diskte analitik ve $p(0)=1$, $\mathrm{Re}\big(p(z)\big)>0\,(z\in U)$ koşullarını sağlayan

$$p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n,\; z\in U \tag{2.32}$$

şekilli fonksiyonların sınıfıdır.

Lemma 2.2: (Örneğin bakınız [14]) Eğer, p (2.32) serisi ile verilen bir fonksiyonsa

$$2p_2 = p_1^2+\left(4-p_1^2\right)x, \tag{2.33}$$

$$4p_3 = p_1^3+2\left(4-p_1^2\right)p_1x-\left(4-p_1^2\right)p_1x^2+2\left(4-p_1^2\right)\left(1-|x|^2\right)z \tag{2.34}$$

eşitlikleri $|x| \le 1$ ve $|z| \le 1$ koşullarını sağlayan bazı x ve z için doğrudurlar.

3. BULGULAR

3.1. $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$ Fonksiyon Sınıfı için Katsayı Problemi

Tezin bu bölümünde $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$ sınıfına ait olan fonksiyonun ilk üç katsayısı için üst sınır tahminleri vereceğiz.

Teorem 3.1.1: (2.1) ile verilen f fonksiyonu $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$ sınıfına ait olsun.

Bu durumda,

$$|a_2| \le \frac{(1-\alpha)|\tau|}{1+\beta}, \tag{3.1.1}$$

$$|a_3| \le \begin{cases} \dfrac{2(1-\alpha)|\tau|}{3(1+2\beta)}, & \text{eğer } |\tau| \in (0,\tau_0), \\[2ex] \dfrac{(1-\alpha)^2|\tau|^2}{(1+\beta)^2}, & \text{eğer } |\tau| \in [\tau_0,+\infty), \end{cases} \tag{3.1.2}$$

burada $\tau_0 = \dfrac{2(1+\beta)^2}{3(1-\alpha)(1+2\beta)}$ ve

$$|a_4| \le \frac{(1-\alpha)|\tau|}{2(1+3\beta)} \tag{3.1.3}$$

tahminleri doğrudur.

İspat: $f \in \Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau), \alpha \in [0,1), \beta \in [0,1], \tau \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ ve $g = f^{-1}$ olsun.

Bu durumda,

$$1+\frac{1}{\tau}\left[f'(z)+\beta zf''(z)-1\right]=\alpha+(1-\alpha)\,p(z) \tag{3.1.4}$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left[g'(w)+\beta wg''(w)-1\right]=\alpha+(1-\alpha)\,q(w), \tag{3.1.5}$$

$p(z)=1+p_1z+p_2z^2+...$ve $q(w)=1+q_1w+q_2w^2+...$ fonksiyonları P sınıfındandır. $(3.1.4)$ ve $(3.1.5)$'deki sağ ve sol taraflardaki polinomların katsayılarını karşılaştırırsak

$$a_2=\frac{\tau(1-\alpha)}{2(1+\beta)}p_1, \tag{3.1.6.a}$$

$$a_3=\frac{\tau(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}p_2, \tag{3.1.6.b}$$

$$a_4=\frac{\tau(1-\alpha)}{4(1+3\beta)}p_3 \tag{3.1.6.c}$$

ve

$$-a_2=\frac{\tau(1-\alpha)}{2(1+\beta)}q_1, \tag{3.1.7.a}$$

$$2a_2^2-a_3=\frac{\tau(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}q_2, \tag{3.1.7.b}$$

$$-5a_2^3+5a_2a_3-a_4=\frac{\tau(1-\alpha)}{4(1+3\beta)}q_3. \tag{3.1.7.c}$$

elde ederiz.(3.1.6.a) ve (3.1.7.a)'dan

$$\frac{\tau(1-\alpha)}{2(1+\beta)}p_1=a_2=-\frac{\tau(1-\alpha)}{2(1+\beta)}q_1,\quad p_1=-q_1 \tag{3.1.8}$$

buluruz.

Ayrıca, (3.1.6.b)'den (3.1.7.b)'yi çıkarır, (3.1.8)'i de dikkate alıp sadeleştirirsek a_3 katsayısı için

$$a_3 = \frac{\tau^2(1-\alpha)^2}{4(1+\beta)^2} p_1^2 + \frac{\tau(1-\alpha)}{6(1+2\beta)}(p_2 - q_2) \tag{3.1.9}$$

yazarız.

(3.1.7.c) eşitliğini (3.1.6.c) eşitliğinden çıkartarak (3.1.8)'i de göz önünde bulundurursak a_4 için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$a_4 = \frac{5\tau^2(1-\alpha)^2}{24(1+\beta)(1+2\beta)} p_1(p_2 - q_2) + \frac{\tau(1-\alpha)}{8(1+3\beta)}(p_3 - q_3). \tag{3.1.10}$$

$p_1 = -q_1$ olduğunu dikkate alırsak Lemma 2.2'den $|x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1$ ve $|w| \le 1$ koşullarını sağlayan bazı x, y, w ve z için

$$\left.\begin{aligned} 2p_2 &= p_1^2 + (4 - p_1^2)x, \\ 2q_2 &= q_1^2 + (4 - q_1^2)y \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_2 - q_2 = \frac{4 - p_1^2}{2}(x - y) \tag{3.1.11}$$

ve

$$\left.\begin{aligned} 4p_3 &= p_1^3 + 2(4 - p_1^2)p_1 x - (4 - p_1^2)p_1 x^2 + 2(4 - p_1^2)(1 - |x|^2)z, \\ 4q_3 &= q_1^3 + 2(4 - q_1^2)q_1 y - (4 - q_1^2)q_1 y^2 + 2(4 - q_1^2)(1 - |y|^2)w \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{3.1.12}$$

$$p_3 - q_3 = \frac{p_1^3}{2} + \frac{p_1(4 - p_1^2)}{2}(x + y) - \frac{p_1(4 - p_1^2)}{4}(x^2 + y^2) + \frac{4 - p_1^2}{2}\left[(1 - |x|^2)z - (1 - |y|^2)w\right] \tag{3.1.13}$$

yazabiliriz.

$|p_1| \le 2$ olduğundan, herhangi bir kısıtlama olmadan $t \in [0, 2]$ olduğu varsayılabilir. Burada $t = |p_1|$.

(3.1.8)'den aşağıdaki eşitsizliği kolayca yazarız

$$|a_2| \le \frac{(1-\alpha)|\tau|}{2(1+\beta)} t,\ t \in [0,2], \tag{3.1.14}$$

dolayısıyla,

$$|a_2| \le \frac{(1-\alpha)|\tau|}{1+\beta}. \tag{3.1.15}$$

(3.1.11) ifadesini (3.1.9)'da yerine koyar ve üçgen eşitsizliğini kullanır ve $|x| = \xi,\ |y| = \eta$ alırsak $|a_3|$ için aşağıdaki eşitsizliği yazarız

$$|a_3| \le C_1(t)(\xi+\eta) + C_2(t) := F(\xi,\eta), \tag{3.1.16}$$

burada

$$C_1(t) = \frac{(1-\alpha)|\tau|(4-t^2)}{12(1+2\beta)},\ C_2(t) = \frac{(1-\alpha)^2|\tau|^2}{4(1+\beta)^2} t^2,\ t \in [0,2]. \tag{3.1.17}$$

Şimdi $\Omega = \{(\xi,\eta) : \xi,\eta \in [0,1]\}$ kapalı karesinde $F(\xi,\eta)$ fonksiyonunu maksimize etmemiz gerekiyor.

$F(\xi,\eta)$ fonksiyonunun $C_1(t)$ ve $C_2(t)$ katsayıları t değişkeninden bağlı olduğundan, $F(\xi,\eta)$ fonksiyonunun maksimumunu $t=0$, $t=2$ ve $t \in (0,2)$ durumlarında araştırmamız gerekmektedir.

$t=0$ olsun. Bu durumda,

$$F(\xi,\eta) = \frac{|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}(\xi+\eta) \tag{3.1.18}$$

yazarız.

$F(\xi,\eta)$ fonksiyonunun maksimum değerini $(\xi,\eta) = (1,1)$ noktasında aldığı ve

$$\max\{F(\xi,\eta) : \xi,\eta \in [0,1]\} = F(1,1) = \frac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)} \tag{3.1.19}$$

olduğu kolayca görülür.

$t=2$ için $F(\xi,\eta)$ fonksiyonu değişkenlerin sabit fonksiyonu olup

$$F(\xi,\eta)=\frac{(1-\alpha)^2|\tau|^2}{(1+\beta)^2} \tag{3.1.20}$$

şekildedir.

Şimdi $t\in(0,2)$ olsun. Bu durumda her kayıt edilmiş $t\in(0,2)$ değerleri için

$$\max\{F(\xi,\eta):\xi,\eta\in[0,1]\}=F(1,1)=2C_1(t)+C_2(t) \tag{3.1.21}$$

yazabiliriz.

Şimdi $G:(0,2)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$G(t)=2C_1(t)+C_2(t). \tag{3.1.22}$$

$C_1(t)$ ve $C_2(t)$ 'nin (3.1.17)'deki değerlerini (3.1.22)'de yerine koyarsak elde ederiz

$$G(t)=A(\alpha,\beta;\tau)t^2+B(\alpha,\beta;\tau), \tag{3.1.23}$$

burada,

$$A(\alpha,\beta;\tau)=\frac{3(1-\alpha)^2|\tau|^2}{12(1+2\beta)(1+\beta)^2}\left[|\tau|-\frac{2(1+\beta)^2}{3(1-\alpha)(1+2\beta)}\right], \tag{3.1.24}$$

$$B(\alpha,\beta;\tau)=\frac{2(1-\alpha)|\tau|}{3(1+2\beta)}. \tag{3.1.25}$$

Şimdi $(0,2)$ aralığında $G(t)$ fonksiyonunun maksimumunu araştırmamız gerekmektedir.

Basit hesaplamayla

$$G'(t) = 2A(\alpha,\beta;\tau)t \tag{3.1.26}$$

buluruz.

(3.1.26)'dan görüldüğü üzere, $A(\alpha,\beta;\tau) < 0$ olduğunda, dolayısıyla, $|\tau| \in \left(0, \dfrac{2(1+\beta)^2}{3(1-\alpha)(1+2\beta)}\right)$ olduğunda $G'(t) < 0$ eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır.

O halde, $|\tau| \in (0,\tau_0)$ için G fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. Burada, $\tau_0 = \dfrac{2(1+\beta)^2}{3(1-\alpha)(1+2\beta)}$.

Buna göre,

$$\max\{G(t) : t \in (0,2)\} = G(0+) = 2C_1(0) = \frac{2(1-\alpha)|\tau|}{3(1+2\beta)}. \tag{3.1.27}$$

Ayrıca, $|\tau| \geq \tau_0$ için $G'(t) \geq 0$, yani $G(t)$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur.

Bu durumda,

$$\max\{G(t) : t \in (0,2)\} = G(2-) = C_2(2) = \frac{(1-\alpha)^2|\tau|^2}{(1+\beta)^2}. \tag{3.1.28}$$

Şimdi $|a_4|$ için değerlendirme bulalım. (3.1.11) ve (3.1.13) ifadelerini (3.1.10) 'de yerine koyar ve üçgen eşitsizliğini kullanarak $|x| = \zeta,\ |y| = \varsigma$ alırsak $|a_4|$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$|a_4| \leq c_1(t)\left(\zeta^2+\varsigma^2\right) + c_2(t)(\zeta+\varsigma) + c_3(t) := \phi(\zeta,\varsigma), \tag{3.1.29}$$

burada,

$$c_1(t) = \frac{(1-\alpha)\left(4-t^2\right)(t-2)|\tau|}{32(1+3\beta)}, \tag{3.1.30}$$

$$c_2(t) = \frac{(1-\alpha)\left(4-t^2\right)|\tau|t\left[5|\tau|(1-\alpha)(1+3\beta)+3(1+\beta)(1+2\beta)\right]}{48(1+\beta)(1+2\beta)(1+3\beta)}, \tag{3.1.31}$$

$$c_3(t)=\frac{(1-\alpha)|\tau|}{16(1+3\beta)}t^3+\frac{(1-\alpha)|\tau|(4-t^2)}{8(1+3\beta)},\ \ t\in[0,2]. \tag{3.1.32}$$

Şimdi kapalı $\Omega=\{(\zeta,\varsigma):\zeta,\varsigma\in[0,1]\}$ karesi üzerinde $\phi:\Omega\to\mathbb{R}$ ϕ fonksiyonunun maksimumunu inceleyelim.

ϕ fonksiyonunun $c_1(t)$, $c_2(t)$ ve $c_3(t)$ katsayıları t değişkeninden bağımlı olduğundan bu fonksiyonun maksimumunu $t=0$, $t=2$ ve $t\in(0,2)$ durumlarında inceleyeceğiz.

$t=0$ olsun. Bu durumda

$$\phi(\zeta,\varsigma)=-\frac{(1-\alpha)|\tau|}{4(1+3\beta)}(\zeta^2+\varsigma^2)+\frac{(1-\alpha)|\tau|}{2(1+3\beta)}. \tag{3.1.33}$$

eşitliğini yazarız.

ϕ fonksiyonunun maksimum değerini $\Delta(\zeta,\varsigma)=\phi_{\zeta\zeta}(\zeta,\varsigma)\phi_{\varsigma\varsigma}(\zeta,\varsigma)-[\phi_{\zeta\varsigma}(\zeta,\varsigma)]^2$ ifadesinin işaretine göre inceleyelim.

Basit bir hesaplama ile

$$\phi'_{\zeta}(\zeta,\varsigma)=-\frac{|\tau|(1-\alpha)}{2(1+3\beta)}\zeta,\phi'_{\varsigma}(\zeta,\varsigma)=-\frac{|\tau|(1-\alpha)}{2(1+3\beta)}\varsigma \tag{3.1.34}$$

ve

$$\phi_{\zeta\varsigma}(\zeta,\varsigma)=\phi_{\varsigma\zeta}(\zeta,\varsigma)=0,\phi''_{\zeta\zeta}(\zeta,\varsigma)=\phi''_{\varsigma\varsigma}(\zeta,\varsigma)=-\frac{|\tau|(1-\alpha)}{2(1+3\beta)},(\zeta,\varsigma)\in\Omega \tag{3.1.35}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Böylece,

$$\Delta(\zeta_0,\varsigma_0)=\left(\frac{|\tau|(1-\alpha)}{4(1+3\beta)}\right)^2>0\ \text{ve}\ \phi''_{\zeta\zeta}(\zeta_0,\varsigma_0)<0, \tag{3.1.36}$$

dolayısıyla $(\zeta_0,\varsigma_0)=(0,0)$ noktası ϕ fonksiyonunun bir maksimum noktasıdır. O halde, $t=0$ durumunda

$$\max\left\{\phi(\zeta,\varsigma):\zeta,\varsigma\in[0,1]\right\}=\phi(0,0)=\frac{(1-\alpha)|\tau|}{2(1+3\beta)} \tag{3.1.37}$$

yazarız.

$t=2$ için ϕ fonksiyonu değişkenlerin aşağıdaki şekilli bir sabit fonksiyonudur

$$\phi(\zeta,\varsigma)=c_3(2)=\frac{(1-\alpha)|\tau|}{2(1+3\beta)}. \tag{3.1.38}$$

Şimdi $t\in(0,2)$ olsun. Bu durumunda ϕ fonksiyonunun maksimumunu $\Delta(\zeta,\varsigma)=\phi_{\zeta\zeta}(\zeta,\varsigma)\phi_{\varsigma\varsigma}(\zeta,\varsigma)-\left[\phi_{\zeta\varsigma}(\zeta,\varsigma)\right]^2$ işaretine göre inceleyeceğiz.

Basit bir hesaplama ile

$$\phi'_{\zeta}(\zeta,\varsigma)=2c_1(t)\zeta+c_2(t),\phi'_{\varsigma}(\zeta,\varsigma)=2c_1(t)\varsigma+c_2(t) \tag{3.1.39}$$

ve

$$\phi''_{\zeta\varsigma}(\zeta,\varsigma)=\phi''_{\varsigma\zeta}(\zeta,\varsigma)=0, \tag{3.1.40}$$

$$\phi''_{\zeta\zeta}(\zeta,\varsigma)=\phi''_{\varsigma\varsigma}(\zeta,\varsigma)=2c_1(t),(\zeta,\varsigma)\in\Omega \tag{3.1.41}$$

buluruz.

Dolayısıyla, $(\zeta_0,\varsigma_0)=\left(\frac{-c_2(t)}{2c_1(t)},\frac{-c_2(t)}{2c_1(t)}\right)$ noktası $(\zeta_0,\varsigma_0)\in\Omega$ durumunda ϕ fonksiyonunun bir kritik noktasıdır.

$(\zeta_0,\varsigma_0)\in\Omega$ olduğunu varsayıyoruz. $\Delta(\zeta_0,\varsigma_0)=4c_1^2(t)>0$ ve $\phi''_{\zeta\zeta}(\zeta_0,\varsigma_0)=2c_1(t)<0$ olduğundan (ζ_0,ς_0) noktası ϕ fonksiyonu için maksimum noktadır.

Buna göre her $t\in(0,2)$ için

$$\max\left\{\phi(\zeta,\varsigma):(\zeta,\varsigma)\in\Omega\right\}=\phi(\zeta_0,\varsigma_0)=c_3(t)-\frac{c_2^2(t)}{2c_1(t)} \tag{3.1.42}$$

bulunur.

Dolayısıyla,

$$|a_4|\leq\inf\left\{c_3(t)-\frac{c_2^2(t)}{2c_1(t)}:t\in(0,2)\right\} \tag{3.1.43}$$

yazabiliriz.

Şimdi $(0,2)$ aralığında $c_3(t)-\dfrac{c_2^2(t)}{2c_1(t)}$ ifadesinin infimumunu araştıralım.

$$\inf\left\{c_3(t):t\in(0,2)\right\}=\frac{25(1-\alpha)|\tau|}{54(1+3\beta)},\ \inf\left\{c_2(t):t\in(0,2)\right\}=0 \tag{3.1.44}$$

ve

$$\sup\left\{-c_1(t):t\in(0,2)\right\}=-\inf\left\{c_1(t):t\in(0,2)\right\}=\frac{|\tau|(1-\alpha)}{4(1+3\beta)} \tag{3.1.45}$$

olduğundan

$$\inf\left\{c_3(t)-\frac{c_2^2(t)}{2c_1(t)}:t\in(0,2)\right\}\leq\frac{25(1-\alpha)|\tau|}{54(1+3\beta)}. \tag{3.1.46}$$

O halde, (3.1.37), (3.1.38) ve (3.1.43), (3.1.46)’dan

$$|a_4|\leq\max\left\{\frac{(1-\alpha)|\tau|}{2(1+3\beta)},\frac{25(1-\alpha)|\tau|}{54(1+3\beta)}\right\}=\frac{(1-\alpha)|\tau|}{2(1+3\beta)} \tag{3.1.47}$$

elde ederiz.

Böylece, (3.1.15), (3.1.16), (3.1.19), (3.1.20) , (3.1.21), (3.1.27), (3.1.28) ve (3.1.47)’den Teorem 3.1.1’in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.1'in özel durumlarında aşağıdaki sonuçlara varırız.

<u>Sonuç 3.1.1:</u> (2.1) ile verilen f fonksiyonu, $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,1)=H_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ sınıfından olsun. Bu durumda,

$$|a_2|\le\frac{1-\alpha}{1+\beta}, \tag{3.1.48}$$

$$|a_3|\le\begin{cases}\dfrac{(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}, & \text{eğer} \quad \alpha\in[0,\alpha_0],\\[2ex] \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}, & \text{eğer} \quad \alpha\in(\alpha_0,1),\end{cases} \tag{3.1.49}$$

burada

$$\alpha_0=1-\frac{2(1+\beta)^2}{3(1+2\beta)} \tag{3.1.50}$$

ve

$$|a_4|\le\frac{1-\alpha}{2(1+3\beta)}. \tag{3.1.51}$$

<u>Sonuç 3.1.2:</u> (2.1) ile verilen f fonksiyonu $\Im_{\Sigma}(\alpha,0,\tau)$ sınıfından olsun.

O halde,

$$|a_2|\le|\tau|(1-\alpha), \tag{3.1.52}$$

$$|a_3|\le\begin{cases}\dfrac{2|\tau|(1-\alpha)}{3} & \text{eğer} \quad |\tau|\in(0,\tau_0),\\[2ex] |\tau|^2(1-\alpha)^2 & \text{eğer} \quad |\tau|\in[\tau_0,+\infty),\end{cases} \tag{3.1.53}$$

burada

$$\tau_0 = \frac{2}{3(1-\alpha)} \tag{3.1.54}$$

ve

$$|a_4| \le \frac{(1-\alpha)|\tau|}{2} + \frac{(1-\alpha)|\tau|\left\{\left[5(1-\alpha)|\tau|+6\right]\left[\left(5(1-\alpha)|\tau|+3\right)^2-9\right]+3\left[\left(5(1-\alpha)|\tau|+3\right)^2+9\right]\right\}}{2\left[5(1-\alpha)|\tau|+6\right]^3}. \tag{3.1.55}$$

Sonuç 3.1.3: (2.1) ile verilen f fonksiyonu $\Im_\Sigma(\alpha,0,1)=\Re_\Sigma(\alpha,0)=N_\Sigma(\alpha)$ sınıfından olsun. O zaman,

$$|a_2| \le 1-\alpha, \tag{3.1.56}$$

$$|a_3| \le \begin{cases} (1-\alpha)^2, & \text{eğer} \quad \alpha \in \left[0,\frac{1}{3}\right], \\ \frac{2(1-\alpha)}{3}, & \text{eğer} \quad \alpha \in \left(\frac{1}{3},1\right), \end{cases} \tag{3.1.57}$$

ve

$$|a_4| \le \frac{1-\alpha}{2} + \frac{(1-\alpha)\left\{\left[5(1-\alpha)|\tau|+6\right]\left[\left(5(1-\alpha)+3\right)^2-9\right]+3\left[\left(5(1-\alpha)+3\right)^2+9\right]\right\}}{2\left[5(1-\alpha)+6\right]^3}. \tag{3.1.58}$$

Sonuç 3.1.4: (2.1) ile verilen f fonksiyonu $\Im_\Sigma(\alpha,1,\tau), \alpha\in[0,1)$ sınıfından olsun. Bu durumda,

$$|a_2| \le \frac{|\tau|(1-\alpha)}{2}, \tag{3.1.59}$$

$$|a_3| \le \begin{cases} \dfrac{2|\tau|(1-\alpha)}{9}, & \text{eğer} \quad |\tau| \in (0,\tau_0), \\ \dfrac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{4} & \text{eğer} \quad |\tau| \in [\tau_0,+\infty), \end{cases} \tag{3.1.60}$$

burada

$$\tau_0 = \frac{8}{9(1-\alpha)} \tag{3.1.61}$$

ve

$$|a_4| \le \frac{(1-\alpha)|\tau|}{8} + \frac{(1-\alpha)|\tau|\left\{2\left[5(1-\alpha)|\tau|+9\right]\left[\left(10(1-\alpha)|\tau|+9\right)^2-81\right]+9\left[\left(10(1-\alpha)|\tau|+9\right)^2+81\right]\right\}}{64\left[5(1-\alpha)|\tau|+9\right]^3}. \tag{3.1.62}$$

<u>Sonuç 3.15.:</u> (2.1) ile verilen f fonksiyonu $\Im_\Sigma(\alpha,1,1)=\Re_\Sigma(\alpha,1)$ sınıfından olsun.

O halde,

$$|a_2| \le \frac{1-\alpha}{2}, \tag{3.1.63}$$

$$|a_3| \le \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)^2}{4}, & \text{eğer} \quad \alpha \in \left[0,\dfrac{1}{9}\right], \\ \dfrac{2(1-\alpha)}{9}, & \text{eğer} \quad \alpha \in \left(\dfrac{1}{9},1\right) \end{cases} \tag{3.1.64}$$

ve

$$|a_4| \le \frac{1-\alpha}{8} + \frac{(1-\alpha)\left\{2\left[5(1-\alpha)+9\right]\left[\left(10(1-\alpha)+9\right)^2-81\right]+9\left[\left(10(1-\alpha)+9\right)^2+81\right]\right\}}{64\left[5(1-\alpha)+9\right]^3}. \tag{3.1.65}$$

3.2. $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$ Fonksiyon Sınıfı için Fekete-Szegö Problemi

Bu bölümde, $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$ fonksiyon sınıfının Fekete-Szegö problemi üzerine aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 3.2.1: (2.1) ile verilen f fonksiyonu $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$ sınıfından ve $\mu\in\mathbb{C}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki tahmin doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}\dfrac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}, & \text{eğer } |1-\mu|\in[0,\mu_0),\\ |1-\mu|\dfrac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}, & \text{eğer } |1-\mu|\in[\mu_0,+\infty),\end{cases} \tag{3.2.1}$$

burada, $\mu_0=\dfrac{2(1+\beta)^2}{3|\tau|(1-\alpha)(1+2\beta)}$.

Teoremde elde edilen sonuç kesindir.

İspat 3.2.1: $f\in\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau),\alpha\in[0,1),\beta\in[0,1],\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ ve $\mu\in\mathbb{C}$ olsun.

(3.1.8) ve (3.1.9)'dan kolayca

$$a_3-\mu a_2^2=(1-\mu)\frac{(1-\alpha)^2}{4(1+\beta)^2}p_1^2+\frac{\tau(1-\alpha)}{6(1+2\beta)}(p_2-q_2). \tag{3.2.2}$$

eşitliğini yazarız.

p_2-q_2 için (3.1.11) ifadesini (3.2.2)'de yerine yazarsak

$$a_3-\mu a_2^2=(1-\mu)\frac{(1-\alpha)^2}{4(1+\beta)^2}p_1^2+\frac{\tau(1-\alpha)(4-p_1^2)}{12(1+2\beta)}(x-y) \tag{3.2.3}$$

elde ederiz. Burada, x ve y, sırasıyla, $|x|\le1$ ve $|y|\le1$ koşullarını sağlayan parametrelerdir.

(3.2.3) eşitliğine üçgen eşitsizliğini uygular, $t=|p_1|, |x|=\xi, |y|=\eta$ alırsak kolayca elde ederiz

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \le d_1(t)+d_2(t)(\xi+\eta) \equiv \varphi(\xi,\eta), \tag{3.2.4}$$

burada,

$$d_1(t)=|1-\mu|\frac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{4(1+\beta)^2}t^2 \ge 0 \quad \text{ve} \quad d_2(t)=\frac{|\tau|(1-\alpha)(4-t^2)}{12(1+2\beta)} \ge 0. \tag{3.2.5}$$

Açıkça görülüyor ki, $\varphi(\xi,\eta)$ fonksiyonu en büyük değerine $(\xi,\mu)=(1,1)$ noktasında ulaşıyor.

O halde,

$$\varphi(\xi,\eta) \le \max\{\varphi(\xi,\eta):\xi,\eta\in[0,1]\}=\varphi(1,1)=d_1(t)+2d_2(t) \tag{3.2.6}$$

yazarız.

Şimdi sabit $\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ için $H:[0,2]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$H(t)=d_1(t)+2d_2(t). \tag{3.2.7}$$

$d_1(t)$ ve $d_2(t)$'nin (3.2.5)'deki ifadelerini (3.2.7)'de yerine koyarsak H fonksiyonu için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$H(t)=C(\alpha,\beta,\mu;\tau)t^2+D(\alpha,\beta,\mu), \tag{3.2.8}$$

burada

$$\begin{aligned} C(\alpha,\beta,\mu;\tau)&=\frac{(1-\alpha)^2|\tau|^2}{4(1+\beta)^2}\left[|1-\mu|-\frac{2(1+\beta)^2}{3(1-\alpha)|\tau|(1+2\beta)}\right], \\ D(\alpha,\beta;\tau)&=\frac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Şimdi $[0,2]$ aralığında H fonksiyonunun maksimum değerini inceleyelim.

Basit bir hesaplamayla yazarız

$$H'(t) = 2C(\alpha,\beta,\mu;\tau)t\,. \tag{3.2.10}$$

1. $C(\alpha,\beta,\mu;\tau)\geq 0$ olsun. Bu durumda, $H'(t)\geq 0$, dolayısıyla H artan bir fonksiyondur.

O halde,

$$H(t)\leq \max\{H(t): t\in(0,2)\} = H(2) = d_1(2) = |1-\mu|\frac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}\,. \tag{3.2.11}$$

2. Şimdi $C(\alpha,\beta,\tau;\tau)<0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda, $H'(t)<0$, yani H azalan bir fonksiyondur.

Bu yüzden

$$H(t)\leq \max\{H(t): t\in(0,2)\} = H(0) = 2d_2(0) = \frac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}. \tag{3.2.12}$$

Böylece, (3.2.8)'den görüldüğü üzere, eğer $|1-\mu|\geq \mu_0$ ise

$$H(t)\leq \max\{H(t): t\in(0,2)\} = |1-\mu|\frac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2} \tag{3.2.13}$$

ve eğer $|1-\mu|<\mu_0$ ise

$$H(t)\leq \max\{H(t): t\in(0,2)\} = \frac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)} \tag{3.2.14}$$

elde edilir. Burada, $\mu_0 = \dfrac{2(1+\beta)^2}{3|\tau|(1-\alpha)(1+2\beta)}$.

Böylece (3.2.4), (3.2.13) ve (3.2.14) eşitsizliklerinden teoremde istenen tahminin doğruluğu görülür.

Şimdi, teoremde elde edilen sonucun kesin olduğunu gösterelim. (3.2.2) eşitliğinden görüldüğü üzere, eğer $p_1 = 0$ ve $p_2 = 2$, $q_2 = 0$ (ya da $p_2 = 0$, $q_2 = 2$) olursa birinci eşitsizlik eşitlik olarak gerçekleşir. Ayrıca, yine de (3.2.2) eşitliğinden görüldüğü üzere, eğer $p_1 = 2$ ve $p_2 = q_2$ olursa ikinci eşitsizlik eşitlik olarak gerçekleşir.

Bununla, Teorem 3.2.1'in ispatı tamamdır.

Özel durumda, Teorem 3.2.1'den aşağıdaki sonuçlara ulaşabiliriz.

Sonuç 3.2.1: (2.1) şeklinde verilen f fonksiyonu $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,1)$ sınıfından ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}, & \text{eğer } |1-\mu| \in [0,\mu_0), \\ |1-\mu| \dfrac{(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}, & \text{eğer } |1-\mu| \in [\mu_0,+\infty), \end{cases} \tag{3.2.15}$$

burada, $\mu_0 = \dfrac{2(1+\beta)^2}{3(1-\alpha)(1+2\beta)}$.

Sonuç 3.2.2: (2.1) şeklinde verilen f fonksiyonu $\Im_{\Sigma}(\alpha,0,\tau)$ sınıfından ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{2|\tau|(1-\alpha)}{3}, & \text{eğer } |1-\mu| \in [0,\mu_0), \\ |1-\mu||\tau|^2 (1-\alpha)^2, & \text{eğer } |1-\mu| \in [\mu_0,+\infty), \end{cases} \tag{3.2.16}$$

burada, $\mu_0 = \dfrac{2}{3|\tau|(1-\alpha)}$.

Sonuç 3.2.3: (2.1) şeklinde verilen f fonksiyonu $\Im_{\Sigma}(\alpha,1,\tau)$ sınıfından ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}\dfrac{2|\tau|(1-\alpha)}{9}, & \text{eğer } |1-\mu|\in[0,\mu_0),\\ |1-\mu|\dfrac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{4}, & \text{eğer } |1-\mu|\in[\mu_0,+\infty),\end{cases} \tag{3.2.17}$$

burada, $\mu_0=\dfrac{2(1+\beta)^2}{9|\tau|(1-\alpha)}$.

μ parametresinin reel değerleri için Fekete-Szegö problemi üzerine aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.2.2: (2.1) şeklinde verilen f fonksiyonu $\Im_\Sigma(\alpha,\beta,\tau)$ sınıfından ve $\mu\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki tahmin doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}(1-\mu)\dfrac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}, & \text{eğer } \mu\le 1-\mu_0,\\ (\mu-1)\dfrac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}, & \text{eğer } 1+\mu_0\le\mu,\\ \dfrac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}, & \text{eğer } 1-\mu_0\le\mu\le 1+\mu_0,\end{cases} \tag{3.2.18}$$

burada, $\mu_0=\dfrac{2(1+\beta)^2}{3|\tau|(1-\alpha)(1+2\beta)}$.

Teoremde elde edilen tahminler kesindir.

İspat 3.2.2: $f\in\Im_\Sigma(\alpha,\beta,\tau),\alpha\in[0,1),\beta\in[0,1],\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ ve $\mu\in\mathbb{R}$ olsun.

(3.1.8) ve (3.1.9)'dan kolayca bulabiliriz

$$a_3-\mu a_2^2=(1-\mu)\frac{(1-\alpha)^2}{4(1+\beta)^2}p_1^2+\frac{\tau(1-\alpha)}{6(1+2\beta)}(p_2-q_2). \tag{3.2.19}$$

p_2-q_2 için (3.1.11) ifadesini (3.2.2)'de yerine yazarsak

$$a_3 - \mu a_2^2 = (1-\mu)\frac{(1-\alpha)^2}{4(1+\beta)^2} p_1^2 + \frac{\tau(1-\alpha)(4-p_1^2)}{12(1+2\beta)}(x-y) \qquad (3.2.20)$$

elde ederiz.

Burada, x ve y, sırasıyla, $|x| \le 1$ ve $|y| \le 1$ koşullarını sağlayan parametrelerdir. (3.2.20) eşitliğine üçgen eşitsizliğini uygular, $t = |p_1|, |x| = \xi, |y| = \eta$ alırsak kolayca elde ederiz

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le d_1(t) + d_2(t)(\xi + \eta) \equiv \psi(\xi, \eta), \qquad (3.2.21)$$

burada,

$$d_1(t) = |1-\mu|\frac{|\tau|^2 (1-\alpha)^2}{4(1+\beta)^2} t^2 \ge 0 \text{ ve } d_2(t) = \frac{|\tau|(1-\alpha)(4-t^2)}{12(1+2\beta)} \ge 0. \qquad (3.2.22)$$

Açıkça görüldüğü üzer, $\psi(\xi, \eta)$ fonksiyonu en büyük değerine $(\xi, \mu) = (1,1)$ noktasında ulaşıyor.

O halde,

$$\psi(\xi, \eta) \le \max\{\psi(\xi, \eta) : \xi, \eta \in [0,1]\} = \varphi(1,1) = d_1(t) + 2d_2(t) \qquad (3.2.23)$$

yazarız.

Sabit $\tau \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ için $H_1 : [0, 2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$H_1(t) = d_1(t) + 2d_2(t). \qquad (3.2.24)$$

$d_1(t)$ ve $d_2(t)$ 'nin (3.2.22)'deki ifadelerini (3.2.24)'de yerine koyarsak H_1 fonksiyonu için aşağıdaki ifadeyi yazarız

$$H_1(t) = C(\alpha, \beta, \mu; \tau)t^2 + D(\alpha, \beta, \mu), \qquad (3.2.25)$$

burada

$$C(\alpha,\beta,\mu;\tau)=\frac{(1-\alpha)^2|\tau|^2}{4(1+\beta)^2}\left[|1-\mu|-\frac{2(1+\beta)^2}{3(1-\alpha)|\tau|(1+2\beta)}\right],$$
$$D(\alpha,\beta;\tau)=\frac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}. \tag{3.2.26}$$

Şimdi $[0,2]$ aralığında H_1 fonksiyonunun en büyük değerini inceleyelim.

Basit bir hesaplamayla yazarız

$$H_1'(t)=2C(\alpha,\beta,\mu;\tau)t'. \tag{3.2.27}$$

1. $C(\alpha,\beta,\mu;\tau)\geq 0$ olsun. Bu durumda, $H_1'(t)\geq 0$, dolayısıyla H_1 artan bir fonksiyondur.

O halde,

$$H_1(t)\leq \max\{H(t):t\in(0,2)\}=H_1(2)=d_1(2)=|1-\mu|\frac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}. \tag{3.2.28}$$

2. Şimdi $C(\alpha,\beta,\tau;\tau)<0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda, $H_1'(t)<0$, yani H_1 azalan bir fonksiyondur.

Bu yüzden

$$H_1(t)\leq \max\{H_1(t):t\in(0,2)\}=H_1(0)=2d_2(0)=\frac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}. \tag{3.2.29}$$

Böylece, (3.2.8)'den görüldüğü üzere, eğer $|1-\mu|\geq \mu_0$, yani $\mu\leq 1-\mu_0$ ya da $\mu\geq 1+\mu_0$ ise

$$H_1(t)\leq \max\{H_1(t):t\in(0,2)\}=|1-\mu|\frac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2} \tag{3.2.30}$$

ve eğer $|1-\mu|\leq \mu_0$, yani $1-\mu_0\leq \mu\leq 1+\mu_0$ ise

$$H_1(t) \leq \max\{H_1(t) : t \in (0,2)\} = \frac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)} \tag{3.2.31}$$

elde edilir. Burada, $\mu_0 = \dfrac{2(1+\beta)^2}{3|\tau|(1-\alpha)(1+2\beta)}$.

Böylece (3.2.21), (3.2.30) ve (3.2.31) eşitsizliklerinden teoremde istenen tahminin doğruluğu görülür.

Şimdi, teoremde elde edilen sonucun kesin olduğunu gösterelim.

(3.2.19) eşitliğinden görüldüğü üzere, eğer $p_1 = 0$ ve $p_2 = 2$, $q_2 = 0$ (ya da $p_2 = 0$, $q_2 = 2$) olursa birinci eşitsizlik eşitlik olarak gerçekleşiyor. Ayrıca, yine de (3.2.19) eşitliğinden görüldüğü üzere, eğer $p_1 = 2$ ve $p_2 = q_2$ olursa ikinci eşitsizlik eşitlik olarak gerçekleşiyor.

Bununla, Teorem 3.2.2'nin ispatı tamamdır.

Özel durumda, Teorem 3.2.2'den aşağıdaki sonuçlara ulaşabiliriz.

<u>Sonuç 3.2.4:</u> (2.1) şeklinde verilen f fonksiyonu $\Im_\Sigma(\alpha,\beta)$ sınıfından ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} (1-\mu)\dfrac{(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}, & \text{eğer } \mu \leq 1-\mu_0, \\ (\mu-1)\dfrac{(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}, & \text{eğer } 1+\mu_0 \leq \mu, \\ \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}, & \text{eğer } 1-\mu_0 \leq \mu \leq 1+\mu_0, \end{cases} \tag{3.2.32}$$

burada, $\mu_0 = \dfrac{2(1+\beta)^2}{3(1-\alpha)(1+2\beta)}$.

Sonuç 3.2.5: (2.1) şeklinde verilen f fonksiyonu $\Im_{\Sigma}(\alpha,0,\tau)$ sınıfından ve $\mu\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}(1-\mu)|\tau|^2(1-\alpha)^2, & \text{eğer } \mu\le 1-\mu_0,\\ (\mu-1)|\tau|^2(1-\alpha)^2, & \text{eğer } 1+\mu_0\le\mu,\\ \dfrac{2|\tau|(1-\alpha)}{3}, & \text{eğer } 1-\mu_0\le\mu\le 1+\mu_0,\end{cases} \tag{3.2.33}$$

burada, $\mu_0=\dfrac{2(1+\beta)^2}{3|\tau|(1-\alpha)}$.

Sonuç 3.2.6: (2.1) şeklinde verilen f fonksiyonu $\Im_{\Sigma}(\alpha,1,\tau)$ sınıfından ve $\mu\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}(1-\mu)\dfrac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{4}, & \text{eğer } \mu\le 1-\mu_0,\\ (\mu-1)\dfrac{|\tau|^2(1-\alpha)^2}{4}, & \text{eğer } 1+\mu_0\le\mu,\\ \dfrac{2|\tau|(1-\alpha)}{9}, & \text{eğer } 1-\mu_0\le\mu\le 1+\mu_0,\end{cases} \tag{3.2.34}$$

burada, $\mu_0=\dfrac{2(1+\beta)^2}{9|\tau|(1-\alpha)}$.

Teorem 3.2.2'de $\mu=0$ ve μ=1 alırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.2.7: (2.1) şeklinde verilen f fonksiyonu $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$ sınıfından olsun.

Bu durumda, aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$|a_3| \leq \begin{cases} \dfrac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}, & \text{eğer } |\tau| \in (0, \tau_0), \\ \dfrac{|\tau|^2 (1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}, & \text{eğer } |\tau| \in [\tau_0, +\infty), \end{cases} \tag{3.2.35}$$

burada, $\tau_0 = \dfrac{2(1+\beta)^2}{3(1-\alpha)(1+2\beta)}$ ve

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{2|\tau|(1-\alpha)}{3(1+2\beta)}. \tag{3.2.36}$$

Not 3.2.1: Sonuç 3.2.7'nin ilk sonucu Teorem 3.1.1'in ikinci eşitsizliğini doğrular.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, bi-ünivalent fonksiyonların $\Im_{\Sigma}(\alpha,\beta,\tau)$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta \geq 0$, $\tau \in \mathbb{C}^{*} = \mathbb{C} - \{0\}$ sınıfını tanımladık. Analitik fonksiyonların bu sınıfının bazı geometrik özelliklerini inceledik.

Ayrıca, tez çalışmamızda tanımlanan sınıf için Fekete-Szegö probleminin çözümünü de verdik.

Tezimizde tanımlanan sınıf için ikinci Hankel determinantının üst sınır değerlendirmesi ve diğer geometrik özellikler de incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1]. Ali, R. M. Coefficients of the inverse of strongly starlike functions. Bull. Malays. Math. Soc. 2003; 26(2), no. 1, 63-71.

[2]. Altıntaş, O., Özkan, Ö. Neighborhoods of a Class of Analytic Functions with Negative Coefficients. Applied Mathematics Letters, 2000; vol. 13, p. 63-67.

[3]. Brannan, D.A., Clunie J. Aspects of contemporary complex analysis. Proceedings of the NATO Advanced Study Institue held at the University of Durham, Durham, July 120, 1979, Academic Press New York, London,1980.

[4]. Brannan, A., Taha, T.S. On some classes of bi-univalent functions. In: S.M. Mazhar, A. Hamoui, N. S. Faour (Eds.), Math. Anal. and Appl., Kuwait; February 18-21,1985,in: KFAS Proceedings Series, vol. 3, Pergamon Press, Elsevier Science Limited, Oxford, 1988, pp. 53-60. See also Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 1986; 31: 70-77.

[5]. Çağlar, M., Aslan, S. Fekete Szegö inequalities for subclasses of bi-ünivalent functions stasfying subordinate conditions. AIP Conference Proceedings 2016; 1726, 020078, doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4945904.

[6]. Çağlar, M., Deniz, E., Srivastava, H.M. Second Hankel determinant for certain subclasses of bi-univalent functiona. Turk J Math 2017; doi : 10.3906/mat-1602-25.

[7]. Çağlar, M., Orhan, H., Yağmur, N. Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions. Filomat, 2013;27: 1165-1171.

[8]. Deniz, E. Certain subclasses of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions. J Class Anal 2013; 2: 49-60.

[9]. Duren, P. L. Univalent Functions. Grundlehren der Mathematishen Wissenschaften, vol. 259, Springer, New York, 1983.

[10]. Frasin, B. A., Aouf, M. K. New subclasses of bi-univalent functions. Appl Math Lett 2011; 24: 1569-1573.

[11]. Frasin, B.A. Coefficient bounds for certain classes of bi-univalent functions. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2014; 43: 383-389.

[12]. Gao, C. Y., Zhou, S.Q. Certain subclass of starlike functions. Appl Math Comput 2007; 187: 176-182.

[13]. Goodman, A. Univalent functions. Volume I, Polygonal, Washington, 1983.

[14]. Grenander, U., Szegö, G. Toeplitz form and their applications. California Monographs in Mathematical Sciences, University California Press, Berkeley,1958.

[15]. Hamidi, S. G., Jahangiri, J.M. Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-close-to-convex functions. CR Acad Sci Paris Ser-I 2014; 352: 17-20.

[16]. Hummel, J. The coefficient regions of starlike functions. Pacific J Math, 1957; 7: 1381-1389.

[17]. Kedzierawski, A. W. Some remarks on bi-univalent functions. Ann Univ Mariae Curie-Sklodowska Sect A 1985; 39: 77-81.

[18]. Keogh, F. R., Merkes, E. P. A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. Proc Amer Math Soc, 1969; 20: 8-12.

[19]. Kumar, S. S., Kumar, V., Ravichandran, V. Estimates for the initial coefficients of bi-univalent functions. Tamsui Oxford J Inform Math Sci, 2013; 29: 487-504.

[20]. Lewin, M. On a coefficients problem for bi-univalent functions. Proc Amer Math Soc, 1967; 18: 63-68.

[21]. Mustafa, N. Fekete-Szegö problem for certain subclass of analytic and bi-univalent functions. Journal of Scientific and Engineering, (2017) 4.(8): 390-400.

[22]. Mustafa, N., Akbulut, E. Application of the second Chebyshev polinomials to coefficient estimates of analytic functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 2018; 5(6): 143-148.

[23]. Mustafa, N., Ateş, M. On the Coefficient Bounds of Gamma and Beta Starlike Functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 2018; 5(6), 333-341.

[24]. Mustafa, N., Gündüz, M. C. Coefficient bound estimates for alpha-convex functions of order beta. Journal of Scientific and Engineering Research 2018; 5(6), 149-156.

[25]. Mustafa, N., Öztürk, T. On the coefficient bounds of certain subclasses of analytic functions of complex order. Journal of Scientific and Engineering Research 2018; 5(6), 133-136.

[26]. Mustafa, N., Akbulut, E. Application of the second kind Chebyshev polinomial to the Fekete-Szegö problem of certain class analytic functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 2019; 6(2), 154-163.

[27]. Mustafa, N., Turaç, T., On the Upper Bound Etimates for the Coefficiens of Certain Subclasses of Analytic Functions. Journal of Scientific and Engineering Research. 2020; 7(4), 198-202.

[28]. Mustafa, N., Turaç, T., On the Upper Bound Etimates for the Coefficiens of Certain Subclasses of Bi-univalent Functions of Complex Order. Journal of Scientific and Engineering Research. 2020; 7(6), 19-29.

[29]. Mustafa, N., Turaç, T., The Fekete-Szegö Problem for Certain Subclass Bi-nivalent Functions of Complex Order. Journal of Scientific and Engineering Research. 2021; 8(1), 27-37.

[30]. Noonan, J. W. Thomas, D. K. On the second Hankel determinant of a really mean $p-$valent functions. Amer. Math. Soc. 1976; 223, 337-346.

[31]. Orhan, H., Deniz, E., Raducanu, D. The Fekete-Szegö problem for subclasses of analytic functions defined by a differential operatör related to conic domains. Comput Math Appl, 2010; 59: 283-295.

[32]. Orhan, H., Magesh, N., Balaji, V.K. Initial coefficients bounds for a general class of bi-univalent functions. Filomat 2015; 29: 1259-1267.

[33]. Pommerenke, C.H. Univalent Functions. Vandenhoeck and Rupercht, Göttingen, 1975.

[34]. Pommerenke, C. Jensen, G. Univalent functions, vol. 25. Vandenhoeck und Ruprecht, 1975.

[35]. Ponnusamy, S., Silverman, H. Complex variables with applications. Springer Science & Business Media, 2007.

[36]. Srivastava, H.M., Owa, S. Current topics in analytic function theory. World Scientific, 1992.

[37]. Srivastava, H., M., Mishra, A. K., Gochhayat, P. Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions. Appl Mat Lett, 2010; 23: 1188-1192.

[38]. Srivastava, H. M, Xu, Q. H., Wu, G. P. Coefficient estimates for certain subclasses of spiral-like functions of complex order. Appl. Math. Lett. 2010; 23(7), 763-768.

[39]. Srivastava, H. M., Bulut, S., Çağlar, M., Yağmur, N. Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions. Filomat ,2013; 27: 831-842.

[40]. Srivastava, H. M., Eker, S. S., Ali, R. M. Coefficient estimates for a certain class of analytic and bi-univalent functions. Filomat, 2015; 29: 1839-1845.

[41]. Tan, D.L. Coefficient estimates for bi-univalent functions. Chinese Ann Math Ser A 1984; 5: 559-568.

[42]. Thomas, D. K. On the coefficients of gamma-starlike functions. Korean Mat. Soc. 2018; 55(1), 175-184.

[43]. Xu, Q.H., Gui, Y. C., Srivastava, H.M. Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions. Appl Math Lett, 2012; 25: 990-994.

[44]. Xu, Q. H., Xiao, H. G., Srivastava, H. M. A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems. Appl. Math. Comput. 2012; 218, 11461-11465.

[45]. Xu, Q. H., Cai, Q. M., Srivastava, H. M. Sharp coefficient estimates for certain subclasses of starlike functions of complex order. Appl. Math. Comput. 2013; 225,43-49.

[46]. Zaprawa, P. On the Fekete-Szegö problem for classes of bi-univalent functions. Bull Belg Math Soc Simon Stevin 2014; 21: 169-178.