

33 633

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ  
YAPI ANA BİLİM DALI DOKTORA TEZİ  
Yöneten : Prof. Dr. İzak KAYA

DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN  
VİSKOELASTİK MALZEMELİ PLAKLARIN  
GERİLME - DEFORMASYON - ZAMAN  
İLİŞKİLERİNİN BELİRLENMESİ VE  
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

İnş. Yük. Müh. Serap KAHRAMAN

İzmir - 1993

## ÖNSÖZ

Yükleme altındaki cisimlerin zamana bağlı davranışı, *sünme (creep)*, *geri dönüş (recovery)* ve *yumuşama (relaxation)* olarak incelenmektedir. Özellikle *sünme davranışı*, viskoelastik malzemeli elemanlar ve inşaat mühendisliği uygulamaları açısından oldukça önem taşımaktadır. *Stasyoner olmayan sünme* probleminde gerilmelerin zamana bağlı olarak hesaplanmasında, problemin fiziksel karışıklığından çok matematiksel güçlüklerle karşılaşmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, mesnet çökmeleri, sıcaklık değişimleri gibi etkilerden arınmış, tek boyutlu hiperstatik sistemler için geçerliliği gösterilen gerilme - deformasyon - zaman ilişkisinden hareketle, viskoelastik malzemeli plaklarda stasyoner olmayan sünme durumu için geçerli gerilme - deformasyon - zaman ve moment - eğrilik - zaman ilişkilerinin elde edilmesidir. Ayrıca, viskoelastik malzemeli plak problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözülebilirliğinin gösterilmesi amaçlanmış ve bu tür problemlerin çözümünde kullanılacak formülasyonlar elde edilmiştir.

Tez konusunun seçilip yürütülmesinde büyük katkıları bulunan tez yöneticisi *Prof.Dr. İzak KAYA*'ya; çeşitli konuları tartışma ve değerli görüşlerinden yararlanma olanağı sağlayan *Prof.Dr. Seracettin BİLYAP*; *Prof.Dr. Ömer Z. ALKU*; *Prof.Dr. Saim AKYÜZ*; *Prof.Dr. Vural CİNEMRE* ve *Prof.Dr. Nahit KUMBASAR*'a; doktora yetenek sınavı jüri üyeleri *Prof.Dr. Sadık DOST* ve *Y.Doç.Dr. M. Emin KURAL*'a; değerli katkılarını esirgemeyen eşim *Mak.Yük.Müh. Necdet KAHRAMAN* ve başta *Dr.Müh. Türkay BARAN* olmak üzere, tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Eylül, 1993

Serap KAHRAMAN

**Kahraman, S. (1993) :** *Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Viskoelastik Malzemeli Plakların Gerilme - Deformasyon - Zaman İlişkilerinin Belirlenmesi ve Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü.* İzmir, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yapı Ana Bilim Dalı Doktora Tezi.

## ÖZET

Zorlanma etkisindeki cisimlerin davranışı, elastik, plastik ve viskoelastik olmak üzere üç tipe ayrılabilir. Viskoelastik davranışta, yükleme hızı şekil değiştirmeleri önemli ölçüde etkiler. Yükleme altındaki cisimlerin zamana bağlı davranışı, *sünme (creep)*, *geri dönüş (recovery)* ve *yumuşama (relaxation)* olarak incelenir (Findley v.d., 1989).

Özellikle *sünme davranışı*, viskoelastik malzemeli elemanlar ve inşaat mühendisliği uygulamaları açısından oldukça önem taşımaktadır. Doğrusal ve doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plaklarda *stasyonery olmayan sünme* durumu için gerilme - deformasyon - zaman ilişkilerinin belirlenmesi ve elde edilen ilişkilerin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü bu çalışmanın amacını oluşturmaktadır.

Çalışmada, doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plaklarda sabit gerilme durumu için geçerli gerilme - deformasyon - zaman ilişkileri belirlenerek, şekil olarak Boltzmann süperpozisyon ilkesine oldukça benzer bir ifade ile değişken gerilme durumuna (*stasyonery olmayan sünme*) da uygulanabilecek hale getirilmiştir. Analitik olarak elde edilen sözkonusu ilişkilerin yapılacak bazı değişikliklerle doğrusal malzemeli plaklar için de kullanılacağı gösterilmiş ve doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plaklarda stasyonery olmayan sünme durumunda geçerli gerilme - deformasyon - zaman ilişkilerinden yararlanılarak moment - eğrilik - zaman bağıntıları elde edilmiştir.

Viskoelastik malzemeli plak probleminin, sonlu elemanlar yöntemi ile de çözülebileceğinin gösterilmesi amacı ile sözkonusu moment - eğrilik - zaman ifadeleri kullanılarak, doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plak probleminin sonlu elemanlar yöntemi formülasyonu elde edilmiş ve formülasyondaki bazı değişikliklerle doğrusal viskoelastik malzemeli plak için de geçerli hale getirilmiştir.

Elde edilen bağıntıların kullanılabilirliğinin gösterilmesi amacı ile, analitik olarak elde edilen bağıntılar ve sonlu elemanlar yöntemi formülasyonu için ayrı ayrı hazırlanan bilgisayar programları kullanılarak; üniform yüklü, basit mesnetli kare bir plak için çözüm yapılmış, doğrusal ve doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plak için elde edilen eğrilik - zaman, deformasyon - zaman, gerilme - zaman değerlerinin değişimleri grafikler ile gösterilmiştir.

Uygulama sonucunda, sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan çözümün analitik yöntem ile elde edilen sonuçlara oldukça yakın olduğu görülmüştür. Bu sonuç, sonlu elemanlar yönteminin viskoelastik malzemeli plak problemlerinin çözümünde güvenle kullanılabileceğini göstermektedir.

## SYNOPSIS

The behaviour of materials under stress can be divided into three groups, namely; elastic, plastic and viscoelastic. In the viscoelastic behaviour, the loading rate has a great effect on the deformations. The time-dependent behaviour of the materials under loading are analysed in terms of *creep*, *recovery* and *relaxation* (Findley et al., 1989).

Especially, *creep behaviour* has a great importance for the elements with viscoelastic material and civil engineering applications. To determine the relation between stress, deformation and time for *non-stationary creep* of linear and nonlinear plates and obtain the solutions giving those relations by the finite element method compose the main intent of this study.

In this study, the relations between stress, deformation and time are determined for plates with nonlinear viscoelastic material. These relations are expressed as similar to that of the Boltzmann superposition principle, so they may be applied to the cases of non-stationary creep. The relations obtained between stress - deformation and time for plates with viscoelastic material are used to derive the relations between moment - curvature and time.

These relations between moment, curvature and time are used to obtain the finite element formulation of nonlinear viscoelastic material problems to show the validity of the finite element method in the problem of plates with viscoelastic materials. These formulations are improved with some changes and made valid for the linear problem.

The analytical approach and finite element developed are applied to a uniform loaded square plate with simple support, and the changes of curvature versus time, deformation versus time, stress versus time for the plate with viscoelastic materials and the results are shown grafically.

The comparison showed that, the solutions obtained by using analytical approach and finite element developed are in good agreements and the finite element method can be safely applied in the problems of plates with viscoelastic materials.

# İÇİNDEKİLER

<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
1.1 Sünme Problemi	1
1.2 Amaç	3
<b>2. VISKOELASTİSİTE</b>	<b>6</b>
2.1 Genel	6
2.2 Sünme (Creep)	14
2.2.1 Tarihçe	14
2.2.2 Mevcut Çalışmalar	15
2.3 Sünme Davranışı	18
2.3.1 Sünme Davranışını Belirleyen Matematiksel Bağlıntılar	18
2.3.2 Reolojik Modeller	26
<b>3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ</b>	<b>33</b>
3.1 Tarihçe	33
3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemine Genel Bakış	34
3.3 Sonlu Eleman Tipleri	37
3.4 Sonlu Elemanlar Yönteminde Esas Bağlıntılar	39
3.5 Plakların Eğilme Probleminin Çözümü için Sonlu Elemanlar Yönteminin Kullandığı Çalışmalar	44
3.6 Viskoelastik Problemlerin Çözümünde Sonlu Elemanlar Yönteminin Kullanılması ile ilgili çalışmalar	48
<b>4. YÖNTEM</b>	<b>50</b>
4.1 Analitik Yöntem	50
4.1.1 Doğrusal Olmayan Viskoelastik Malzemeli Plaklarda Sabit Gerilme Durumunda Gerilme - Deformasyon - Zaman İlişkisi	50

4.1.2 <i>Doğrusal Olmayan Viskoelastik Malzemeli Plaklarda Değişken Gerilme Durumunda Gerilme - Deformasyon - Zaman İlişkisi</i>	56
4.1.3 <i>Doğrusal Olmayan Viskoelastik Malzemeli Plaklarda Yumuşama Fonksiyonları Kullanılması Durumunda Gerilme - Deformasyon - Zaman İlişkisi</i>	61
4.1.4 <i>Doğrusal Olmayan Viskoelastik Malzemeli Plaklarda Moment - Eğrilik - Zaman İlişkisinin Yumuşama Fonksiyonları Kullanılarak Elde Edilmesi</i>	64
4.2. Moment - Eğrilik - Zaman İlişkilerinin Sonlu Eleman Yöntemi Formülasyonu	70
<b>5. UYGULAMA</b>	76
5.1. Viskoelastik Malzemeli Plakların Analitik Yöntem ile Çözümü	76
5.2. Viskoelastik Malzemeli Plakların Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü	80
<b>6. SONUÇ ve ÖNERİLER</b>	90
<b>KAYNAKÇA</b>	93
<b>EK 1 : İNTEGRAL İFADELERİNİN AÇIK GÖSTERİMLERİ</b>	104
<b>EK 2 : BİLGİSAYAR PROGRAMLARI</b>	108

## TABLO LİSTESİ

<b>Tablo 3.1 : Sonlu Elemanlar Soy Ağacı</b>	35
--	----

## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1: Zorlanma etkisindeki cisimlerin davranış biçimleri (a) Gerilme-zaman, (b) Şekil değiştirme-zaman değişimleri	7
Şekil 2.2: Tipik sünme( $\epsilon$ ) ve sünme deformasyon hızı( $\dot{\epsilon}$ ) değişim eğrileri	8
Şekil 2.3: Sabit gerilme altında, sünme ve yük kaldırıldıktan sonra geri dönüş davranışları	9
Şekil 2.4: Sabit deformasyon altında yumuşama davranışı	9
Şekil 2.5: Lineer (doğrusal) viskoelastik davranış ve Boltzmann süperpozisyon prensibinin uygulanması	11
Şekil 2.6: Doğrusal olmayan malzemeler için,değişik gerilmeler altında sünme deformasyonlarının değişimi	18
Şekil 2.7: Gerilmenin arttırılması durumunda zaman sertleşmesi ve deformasyon sertleşmesi yaklaşımları	23
Şekil 2.8: Birleştirilmiş teori yaklaşımı ile değişken gerilme etkisi altında sünme deformasyonları	24
Şekil 2.9: Reolojik modellerde Hooke cismi ve lineer elastik davranış	27
Şekil 2.10: Reolojik modellerde Newtonyen sıvısı ve viskoz davranışı	27
Şekil 2.11: Reolojik modellerden (a) Kelvin ve (b) Maxwell modelleri	28
Şekil 2.12: Dört elemanlı reolojik model ve davranışı	31
Şekil 2.13: Genelleştirilmiş Kelvin ve Maxwell modelleri	32



<b>Şekil 3.1:</b> Yaygın olarak kullanılan sonlu eleman tipleri	38
<b>Şekil 3.2:</b> Dikdörtgen plak elemanına ait düğüm noktası serbestlikleri ve düğüm noktası kuvvetleri	45
<b>Şekil 3.3:</b> Çeşitli üçgen plak elemanları	46
<b>Şekil 3.4:</b> Bazı kompozit dörtgen elemanlar	46
<b>Şekil 5.1 :</b> Viskoelastik malzemeli, üniform yüklü ve dört kenarından basit mesnetli kare plak ve kesiti	77
<b>Şekil 5.2 :</b> Tanımlanmış olan kare plak için, (a) doğrusal (b) doğrusal olmayan durumlarda eğrilik değerlerinin ( $w_{xx}, w_{yy}$ ) adım sayısına (s) bağlı olarak değişimi	77
<b>Şekil 5.3 :</b> Kare plak için, doğrusal halde, deformasyon değerlerinin adım sayısına bağlı olarak kesit boyunca değişimi (1) $z=h/2$ , (2) $z=3h/8$ , (3) $z = h / 4$ , (4) $z = h / 8$	78
<b>Şekil 5.4 :</b> Kare plak için, doğrusal halde, gerilme değerlerinin adım sayısına bağlı olarak kesit boyunca değişimi (1) $z = h / 2$ , (2) $z = 3 h / 8$ , (3) $z = h / 4$ , (4) $z = h / 8$	78
<b>Şekil 5.5 :</b> Kare plak için, doğrusal olmayan durumda deformasyon değerlerinin adım sayısına bağlı olarak kesit boyunca değişimi (1) $z = h / 2$ , (2) $z = 3 h / 8$ , (3) $z = h / 4$ , (4) $z = h / 8$	79
<b>Şekil 5.6 :</b> Kare plak için, doğrusal olmayan durumda, gerilme değerlerinin adım sayısına bağlı olarak kesit boyunca değişimi (1) $z = h / 2$ , (2) $z = 3 h / 8$ , (3) $z = h / 4$ , (4) $z = h / 8$	79
<b>Şekil 5.7 :</b> Kare plak için, deformasyon değerlerinin adım sayısına bağlı olarak kesit boyunca değişimi ( $z=h/2$ ) (a) doğrusal (b) doğrusal olmayan durum	80

<b>Şekil 5.8</b> : Kare plak problemi için, eleman ve düğüm noktalarına ait serbestlik derecelerinin numaralandırılması	86
<b>Şekil 5.9</b> : Kare plak için, doğrusal halde, deplasman değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) 7 No'lu ve (b) 13 No'lu düğüm noktaları	87
<b>Şekil 5.10</b> : Kare plak için, doğrusal olmayan durumda, deplasman değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) 7 No'lu ve (b) 13 No'lu düğüm noktaları	87
<b>Şekil 5.11</b> : Kare plak için, doğrusal halde, eğrilik değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) 7 No'lu ve (b) 13 No'lu düğüm noktaları	88
<b>Şekil 5.12</b> : Kare plak için, doğrusal olmayan durumda eğrilik değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) 7 No'lu ve (b) 13 No'lu düğüm noktaları	88
<b>Şekil 5.13</b> : Doğrusal hal için, plağın orta noktasındaki eğrilik değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) Analitik çözüm (b) Sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm	89
<b>Şekil 5.14</b> : Doğrusal olmayan hal için, plağın orta noktasındaki eğrilik değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) Analitik çözüm (b) Sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm	89

## SEMBOL LİSTESİ

Bölüm	Sembol	
1	$\epsilon$	Elemana ait deformasyon
	$\sigma_0$	Sabit gerilme
	$A_i$	Malzemenin gerilme değerine bağlı mekanik özellikleri
	$f_i(t)$	Sünme fonksiyonu
	$\tau$	Zaman değişkeni
	$\sigma(t)$	Zamana bağlı gerilme değerleri
2	$\epsilon_0$	$t=0$ anında gerçek ani deformasyon
	$\epsilon_c$	Sünme deformasyonu
	$\dot{\epsilon}$	Deformasyon hızı
	$\alpha_i, \beta_j$	Malzeme özelliklerine bağlı katsayılar
	$m_i, n_j$	Malzeme sabitleri
	$\epsilon(t)$	Zamana bağlı deformasyon değerleri
	$K, n$	Malzeme sabitleri
	$J(t-\tau)$	Çekirdek fonksiyonu (memory function)
	$l_0$	Başlangıç anında çubuk uzunluğu
	$l$	Herhangi bir $t$ anında çubuk uzunluğu
	$k, \beta$	Malzeme özelliklerine, gerilmenin mertebesine ve sıcaklığa bağlı katsayılar
	$\epsilon_i$	Ani deformasyon
	$F(\sigma)$	Ani deformasyon
	$G(\sigma)$	Sünme deformasyon hızı
	$E', k', \sigma_k$	Sünme durumunda malzeme katsayıları
	$\sigma^+, p, c, D$	Malzeme katsayıları
	$\dot{\epsilon}_c, g(\sigma(t))$	
	$h(\sigma, \epsilon_c)$	Sünme deformasyon hızı
	$E$	Elastisite modülü
	$C, \gamma, \delta$	Malzeme sabitleri
	$\Phi(\sigma)$	Gerilme fonksiyonu
	$\varphi(t)$	Sünme fonksiyonu

Bölüm	Sembol	
2	$\alpha$	Malzeme sabiti
	$\eta$	Viskozite katsayısı
	$\sigma$	Gerilme değişim hızı
3	$\langle \rangle$	Satır vektör
	$[ ]^{-1}$	Matris tersi
	$\{ \}^T$	Matrisin transpozu
	$u$	Elemanın davranışını belirleyen genel deplasman fonksiyonu
	$\langle p \rangle$	$x$ ve $y$ 'ye bağlı, deplasman sayısı kadar bileşen içeren polinom matrisi
	$\{ a \}$	Katsayılar matrisi
	$\{\Delta\}$	Elemanın düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme vektörü
	$[A]$	Elemanın düğüm noktası koordinatları gösteren kare matris
	$\{\epsilon\}$	Elemana ait şekil değiştirme vektörü
	$[B]$	Düğüm noktası deplasmanlarını şekil değiştirmelere bağlayan matris
	$\{\sigma\}$	Elemana ait gerilme vektörü
	$[E]$	Elemana ait elastisite matrisi
	$V$	Elemanın hacmi
	$U$	Elemanın şekil değiştirme enerjisi
	$W$	Eleman için dış yüklerin potansiyel enerjisi
	$I$	Toplam potansiyel enerji
	$\{f\}$	Düğüm noktaları kuvvet vektörü
	$[k]$	Eleman rijitlik matrisi
	$\{F\}_s$	Sistem dış yük vektörü
	$[K]_s$	Sistem rijitlik matrisi
	$\{\Delta\}_s$	Sistem deplasman vektörü
	$\{\Delta_i\}$	Düğüm noktası serbestlikleri
	$\{f_i\}$	Düğüm noktası kuvvetleri
$w_i$	Düğüm noktası deplasmanları	
$\theta_{xi}, \theta_{yi}$	Düğüm noktası dönmeleri	

**Bölüm Sembol**

4	$\sigma_{x0}, \sigma_{y0}, \tau_{xy0}$	Sabit gerilme değerleri
	$\nu$	Poisson oranı
	$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	Plak deformasyonları
	$A_{ix}, A_{iy}, A_{ixy}, \alpha_{ix}$	
	$\alpha_{iy}, \alpha_{ixy}$	Malzeme katsayıları
	$q_i$	Zaman boyutunda katsayılar
	$E_x, E_y, E_{xy}$	Ortalama hata değerleri
	$t_D$	Deney süresi
	$F_{0j}, F_{ij}$	Deney süresinde toplam sünme
	[F]	Toplam sünme matrisi
	H(t)	Birim adım fonksiyonu olmak üzere
	$B_{ix}, B_{iy}, B_{ixy}, \beta_{ix}$	Malzemenin mekanik özelliklerine bağlı
	$\beta_{iy}, \beta_{ixy}$	katsayılar
	$g_i(t)$	Yumuşama fonksiyonları
	$\lambda_i$	Zaman boyutunda katsayı
	$\psi_x, \psi_y, \psi_{xy}$	Malzeme özelliklerine bağlı yumuşama fonksiyonları
	$w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}$	Plak eğrilikleri
	$k_0, k_i, p_0, p_i$	Malzeme katsayıları
	$I_0, I_{p0}, I_{pi}$	Atalet momentleri
	$M_x, M_y, M_{xy}$	Plağa ait kesit momentleri
	s	Adım sayısı
	{ $\epsilon$ (s)}	Eğrilik vektörü
	[D]	Elastisite Matrisi
	q	Yayıllı yük
	h	Plak yüksekliği
	b, c	Plak boyutları
	B	$1/(1-\nu^2)$ biçiminde tanımlanan bir katsayı

# 1. GİRİŞ

## 1.1. Sünme Problemi

Zorlanma etkisindeki cisimlerin davranışı, elastik, plastik ve viskoelastik olmak üzere üç tipe ayrılabilir. Viskoelastik davranışta, yükleme altındaki cisimde önce ani bir uzama, sonra hızı zamanla azalan devamlı bir uzama görülür. Yük kaldırıldığında ise, ani bir geri dönüşü, zamanla azalan bir geri dönüş izler. Yüksek sıcaklıkta metaller, ahşap, plastikler ve beton bu tip davranış gösterir.

Viskoelastik davranışta, yükleme hızı şekil değiştirmeleri önemli ölçüde etkiler. Yükleme altındaki cisimlerin zamana bağlı davranışı, *sünme (creep)*, *geri dönüş (recovery)* ve *yumuşama (relaxation)* olarak incelenir (Findley v.d., 1989).

Özellikle *sünme davranışı*, viskoelastik malzemeli elemanlar ve inşaat mühendisliği uygulamaları açısından oldukça önem taşımaktadır. Bu çalışmada da, doğrusal ve doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plakların gerilme - deformasyon - zaman ilişkilerinin elde edilerek sünme davranışının belirlenmesi ve sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü amaçlanmıştır.

*Sünme*, sabit yük altında malzeme deformasyonunun zamana bağlı olarak değişmesidir. Makine ve yapı elemanlarının davranışını belirlemede malzemenin sünmesi zaman zaman önemli rol oynar. Örneğin, yüksek ısı altındaki metal elemanlarda sünme etkisinin genellikle göz önüne alınması gerekmektedir. Deformasyonların uzun süre devam etmesi sonucunda ya eleman boyutlarında kabul edilemez değişiklikler ortaya çıkar ya da kırılma oluşur.

Sünmenin en belirgin etkisi, yapı elemanlarının şekil ve boyutlarında yaratacağı değişikliklerdir. Gerilme ve sıcaklığın üniform olmaması durumunda sünme

deformasyonları elemandan elemana değişecek ve sonuçta yapı eğrilecektir. Büyük deformasyonlar söz konusu olduğunda, bunların mertebesinin hassasiyetle hesaplanması ve yapının ömrü süresince emniyet sınırları içinde kalabilmesini sağlamak gerekmektedir (Patel v.d., 1962; Kaya, 1973).

Sünmenin ikinci etkisi, sistemlerin gerilme dağılımında yol açtığı değişikliklerdir (Ting, 1970). Sünmenin önemli olduğu durumlarda, deformasyonlar zamana bağlı olarak değiştirdiğinden ve sadece gerilmenin o andaki değerine bağlı olmadığından, Hooke kanunu geçerli değildir. Yapı elemanlarında, genellikle sünme deformasyonları ile gerilme arasındaki ilişki lineer olmamaktadır (Neis v.d., 1967). Bu durum gerilme dağılımını önemli ölçüde etkilemekte ve gerilmelerin zamana bağlı olarak hesaplanmasında da büyük güçlükler neden olmaktadır (Patel v.d., 1962; Hult, 1962; Lin, 1962; Kaya, 1973).

Tek boyutlu elemanlar için, sabit gerilme durumunda geçerli gerilme - deformasyon - zaman ilişkisi,

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left\{ A_0(\sigma_0) + \sum_{i=1}^n A_i(\sigma_0) f_i(t) \right\} \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilmiştir. (1.1) bağıntısında,  $\sigma_0$  sabit gerilmenin değerini,  $\epsilon$  elemanın zamana bağlı olarak değişen deformasyonunu,  $A_i$  malzemenin gerilme değerine bağlı mekanik özelliklerini,  $f_i(t)$  ise sünme fonksiyonlarını belirtmektedir (Kaya, 1973).

(1.1) denkleminde, değişken gerilme durumunda geçerli kabul edilebilecek, ve

$$\epsilon(t) = \sigma(t) A_0(\sigma(t)) - \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma(\tau) A_i(\sigma(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t - \tau) d\tau \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilebilen gerilme - deformasyon - zaman ilişkisine geçilebilir (Kaya, 1973).

Tek boyutlu elemanlar için geliştirilmiş olan (1.2) ifadesinden hareketle, değişken gerilme hali için geçerli ve stasyoner olmayan krip olarak adlandırılan davranışı yansıtan gerilme - deformasyon - zaman ilişkisinin belirlenmesi de mümkündür (Kaya, 1973).

## 1.2 Amaç

*Stasyoner olmayan sünme* terimi herhangi bir sistem içerisinde, gerilme dağılımının zamana bağlı değişimini ifade etmektedir. Doğrusal davranmayan malzemelerin incelenmesinde, genellikle Boltzmann süperpozisyon ilkesinden hareketle yalnız stasyoner sünme problemine uygun çözümler getirilmiştir. Gerilme dağılımının zamana bağlı olarak değişmesi (*stasyoner olmayan sünme*) problemi ise ancak basit birkaç hal için ele alınmıştır. Bunun nedeni, problemin matematiksel formülasyonunda karşılaşılan güçlüklerdir.

Değişken gerilme hali için geçerli, uygun bir gerilme - deformasyon - zaman ilişkisinin uygulanması, çözümün pratik değerini tehlikeye düşürecek ölçüde karışık hesaplara yol açmaktadır. Diğer taraftan, yalnız sabit gerilme hali için geçerli olabilecek gerilme - deformasyon - zaman ilişkileri ile hesap yapmak ise, gerçeği yansıtmayan sonuçlar elde edilmesine yol açmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, iki boyutlu elemanlar için, sıcaklık değişimleri gözönüne alınmaksızın, yüzeye dik yükler etkisi altında oluşan, stasyoner olmayan sünme ve iç kuvvet dağılımındaki zamana bağlı değişikliklerin belirlenebilmesi için bir yöntem geliştirmek ve aynı tür problemin çözümünde sonlu elemanlar yönteminin kullanılabilmesi için gerekli ifadeleri belirlemektir.



Çalışmada izlenen yöntemin açıklanmasına geçmeden önce, genel olarak viskoelastisite kavramı, farklı gerilme - deformasyon - zaman ilişkileri ve viskoelastisite alanında yapılmış çalışmalar 2. Bölümde ele alınmış; sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili temel bilgiler, yöntemin plakların eğilme problemine ve viskoelastisiteye uygulanabilirliği ile bu konuda yapılmış çalışmalar 3. Bölümde sunulmuştur.

4. Bölümde yöntem ele alınmış, 4.1. bölümünde, doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plaklar için, sabit ve değişken gerilme durumunda geçerli gerilme - deformasyon - zaman ilişkileri *analitik* olarak elde edilmiştir. 4.2. bölümünde ise söz konusu gerilme - deformasyon - zaman ilişkilerinin *sonlu eleman* formülasyonu elde edilmiş ve lineer elastik malzemeli plaklar için geçerli rijitlik matrisinin bazı değişikliklerle kullanılabilirliği gösterilmiştir.

Doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli bir plağının davranışını yansıtan gerilme -deformasyon - zaman ilişkisini belirlemek amacı ile önerilen yöntemin matematiksel olarak fazla karmaşık olmaması gerekmektedir. Bu amaçla, 4.1 bölümünde önerilen ve ayrıntılı olarak ele alınan yaklaşım sonucu elde edilen ifadeler, Boltzmann süperpozisyon ilkesine oldukça benzer olup, değişken gerilme şartlarına uygulanabilecek durumdadır. Formülasyona uygun olarak geliştirilen ve Ek 2 'de sunulan bilgisayar programları kullanılarak, ele alınan plak problemlerinin çözümü mümkündür. 4.2. bölümünde sonlu elemanlar yöntemi ile benzer problemlerin çözümüne yönelik formülasyonlar geliştirilmiştir. Bu formülasyonlara uygun olarak geliştirilen ve Ek 2' de sunulmuş olan bilgisayar programlarının kullanılması sonucunda, doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plakların gerilme - deformasyon - zaman ilişkilerinin sonlu elemanlar yöntemiyle de çözümünün mümkün olduğu görülmektedir.

Yöntem bölümünde sunulmuş olan formülasyonların pratik problemlere uygulanması ve elde edilen sonuçların karşılaştırılması amacı ile kare bir plak üzerindeki, sabit yük altında gerilme - deformasyon - zaman ilişkilerinin değişimi incelenmiş ve *Ek 2'* de sunulan bilgisayar programları yardımı ile elde edilmiş olan sonuçlar *5. Bölümde* sunulmuştur.

Elde edilmiş olan sonuçların irdelenmesi ve öneriler ise çalışmanın *6. Bölümünü* oluşturmaktadır.

## 2. VİSKOELASTİSİTE

### 2.1 Giriş

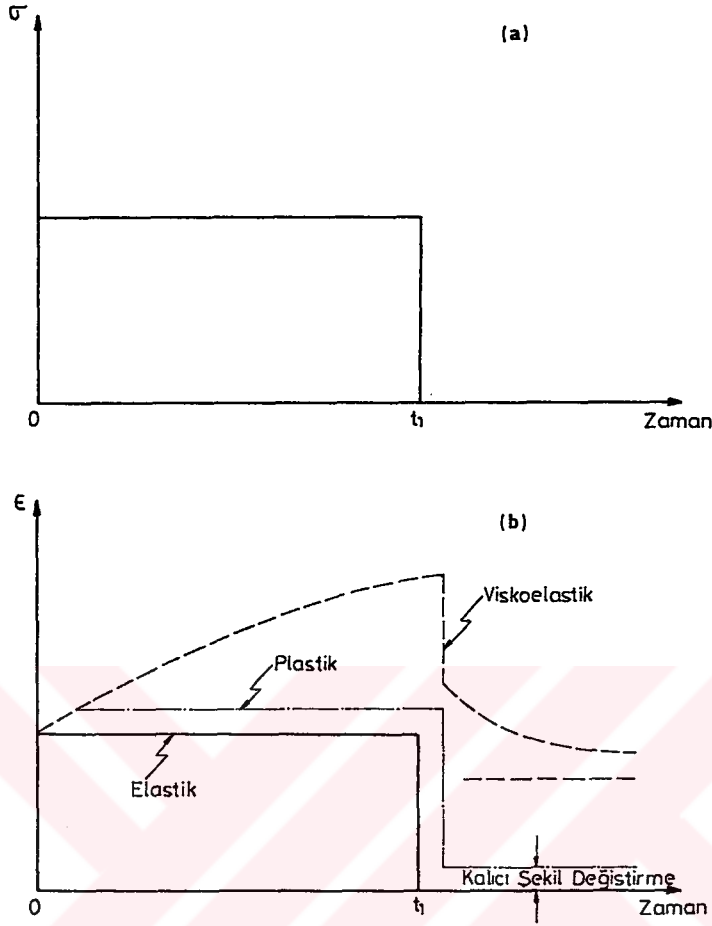
Zorlanma etkisindeki cisimlerin davranışı üç tipe ayrılabilir (*Şekil 2.1*). En basit davranış elastik olup, karakteristik özelliği tersinir oluşudur. Elastik davranışta, şekil değiştirme - zaman eğrisi, gerilme - zaman eğrisinin belirli bir ölçekle ötelenmesi ile elde edilebilir.

İkinci tip davranış, plastik davranış olarak adlandırılır. Plastik davranışta, gerilmeler belirli bir sınırı aşınca başlangıçta büyük şekil değiştirmeler oluşur ve kısa bir süre sonra şekil değiştirmede artış görülmemeye başlar. Ancak, yük kaldırıldığında da, tam bir geri dönüş olamaz, bir miktar kalıcı şekil değiştirme görülür.

Üçüncü tip davranış ise viskoelastik davranış olup, *Şekil 2.1*'de görülen yükleme altında, önce ani bir uzama, sonra hızı zamanla azalan devamlı bir uzama görülür. Yük kaldırıldığında, ani bir geri dönüşü zamanla azalan bir geri dönüş izler. Yüksek sıcaklıkta metaller, beton, plastikler ve ahşap bu tip davranış gösterir.

Elastik ve plastik davranışta, herhangi bir andaki şekil değiştirme yükleme hızına bağlı değildir. Viskoelastik davranışta ise, yükleme hızı şekil değiştirmeleri önemli ölçüde etkiler.

Viskoelastisite kavramı ve viskoelastisite teorisinin temelleri, Boltzmann (1874) ve Volterra (1900)'nın *süperpozisyon ve heredite prensiplerini* ortaya koyan ve şekil değiştirmenin geçmişteki büyüklüklere bağlılığını matematik olarak ifade eden çalışmaları ile atılmıştır. Daha sonra Leaderman (1943) ve Alfrey (1944), elastisite teorisindeki prensiplerden hareketle mikroelastisite teorisini daha da geliştirmişlerdir (Onaran, 1968).

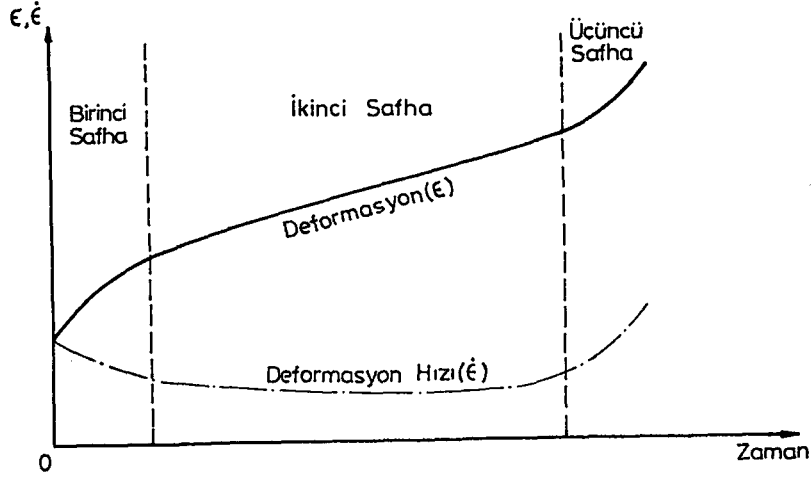


**Şekil 2.1 :** Zorlanma etkisindeki cisimlerin davranış biçimleri. (a) Gerilme - zaman, (b) Şekil değiştirme - zaman değişimleri.

Cisimlerin çeşitli faktörler altında davranışlarını en iyi biçimde formüle etmek için sürekli ortam mekaniği kapsamında devamlı olarak çaba sarfedilmektedir. Cisimlerin zamana bağlı davranışı, sünme (*creep*), geri dönüş (*recovery*) ve yumuşama (*relaxation*) davranışları ile karakterize edilebilir (Findley v.d., 1989).

Zamana bağlı olarak değişen bu üç olay aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

Sünme (*creep*), sabit gerilme altında malzemenin yavaş ve sürekli şekil değiştirmesidir. Şekil 2.2'de, tipik sünme ve sünme deformasyon (*şekil değiştirme*) hızı değişim eğrileri görülmektedir. Sünme deformasyon hızının süratle azaldığı birinci safha *geçici sünme*, sabitleşip minimum olduğu ikinci safha da *sabit sünme* olarak adlandırılır. Bu ikinci



Şekil 2.2 : Tipik sünme ( $\epsilon$ ) ve sünme deformasyon hızı ( $\dot{\epsilon}$ ) değişim eğrileri.

bazı malzemeler için çok uzun sürebilir. Deformasyon hızının tekrar arttığı safha üçüncü sünme safhasıdır ve kırılmaya kadar devam eder.

Lineer malzemelerle yapılan sünme deneylerinde, herhangi bir  $t$  anındaki toplam deformasyon ( $\epsilon$ );  $t = 0$  anındaki ani deformasyon ( $\epsilon_0$ ) ile sünme deformasyonunun ( $\epsilon_c$ ) toplamı olarak bulunur.

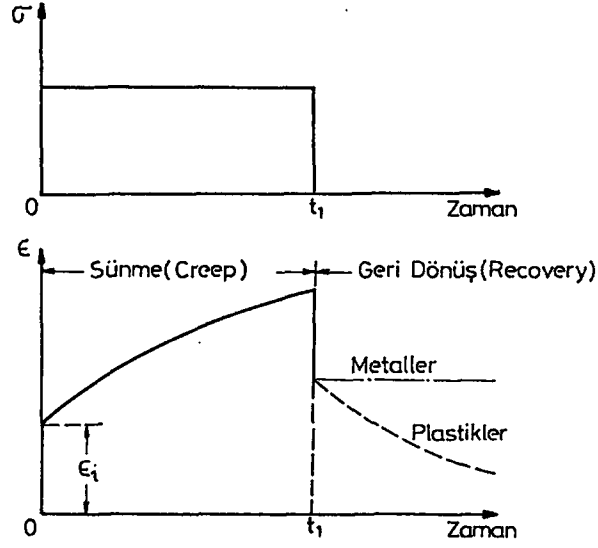
$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_c \quad (2.1)$$

Deformasyon hızı da (2.1) ifadesininin zamana göre türevi alınarak,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_c}{dt} = \dot{\epsilon} \quad (2.2)$$

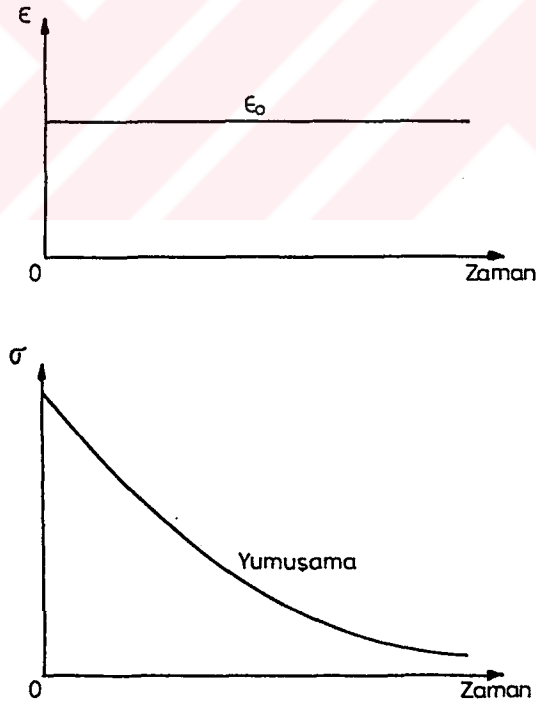
şeklinde bulunur.

Geri dönüş (*recovery*), yük boşaldıktan sonra, şekil değiştirmenin zamanla yavaş ve devamlı azalışıdır. Ancak, her zaman tam olarak geri dönüş meydana gelmeyebilir ve bir miktar kalıcı deformasyon oluşabilir. Kalıcı deformasyon, metaller için zamana bağlı sünme deformasyonunun oldukça büyük bir kısmını; plastikler için ise, çok küçük bir kısmını içerir. Öyle ki, bazı plastiklerde yeterli zaman verilirse, tam geri dönüş görülebilir (Şekil 2.3).



**Şekil 2.3 :** Sabit gerilme altında, sünme ve yük kaldırıldıktan sonra geri dönüş davranışları.

Yumuşama (*relaxation*), viskoelastik malzemelerde sabit deformasyon altında gerilmenin zamanla azalışıdır (Şekil 2.4).



**Şekil 2.4 :** Sabit deformasyon altında yumuşama davranışı

Gerçekte malzemelerin maruz kaldıkları zamana bağlı olaylar, bu üç olaydan (*sünme, geri dönüş ve yumuşama*) veya bunların karışımlarından meydana gelir (Findley v.d., 1989).

Gerilme altında malzemenin davranışı, uygulanan gerilmenin şiddetine bağlı olarak *linear (doğrusal)* veya *nonlinear (doğrusal olmayan)* olarak incelenebilir.

Bir malzemeye uygulanan yük belirli bir oranda arttırıldığı zaman, şekil değiştirmeler de aynı oranda artarsa, o malzemeye *linear malzeme*, davranışa da *linear davranış* denir. Linear teori üzerinde geniş ölçüde çalışmalar yapılarak önemli ilerlemeler kaydedilmiştir (Gross, 1953; Bland, 1960; Flügge, 1967; Penny v.d., 1971; Odqvist, 1974).

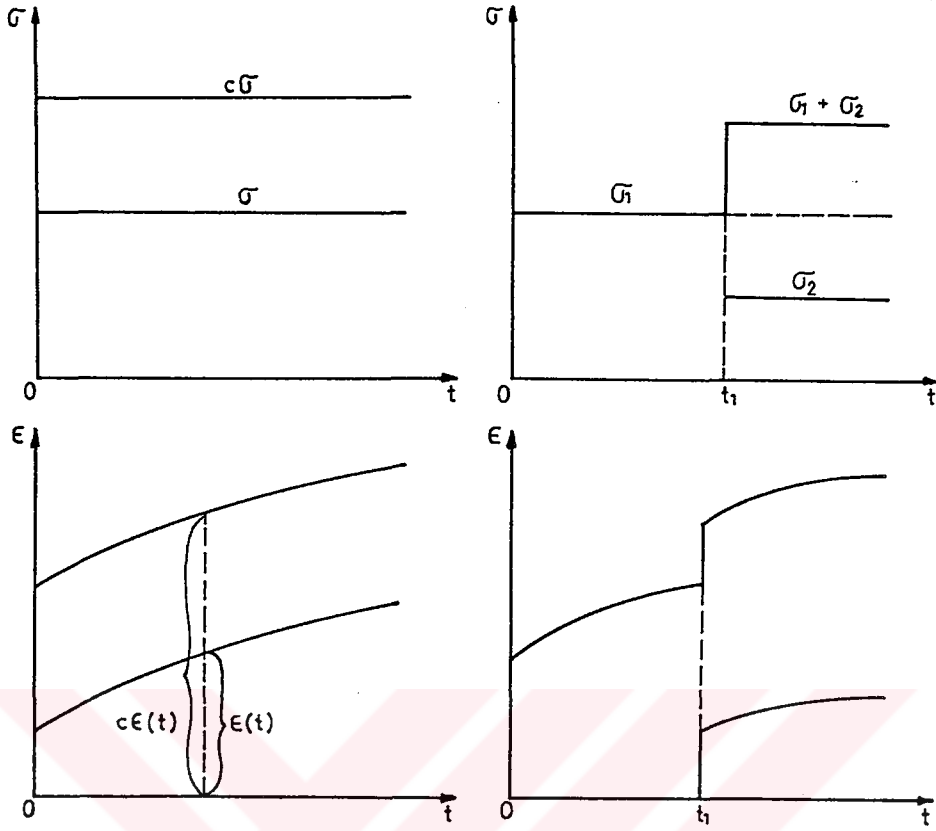
Beton, ahşap, plastik türü malzemelerde, gerilmenin şiddeti kırılma mukavemetinin yaklaşık üçte birinden az olduğu sürece, deformasyon - gerilme ilişkisinin linear olduğu kabul edilebilir (Aroutiounian, 1957). Gerilme - deformasyon ilişkisi linear kabul edildiğinde, süperpozisyon geçerli olacağından, lineerlik koşulu aşağıdaki iki denklemlerle ifade edilebilmektedir:

$$\epsilon [ c \sigma(t) ] = c \epsilon [ \sigma(t) ] \quad (2.3)$$

$$\epsilon [ \sigma_1(t) + \sigma_2(t-t_1) ] = \epsilon [ \sigma_1(t) ] + \epsilon [ \sigma_2(t-t_1) ] \quad (2.4)$$

(2.3) ve (2.4) denklemlerinde  $c$  bir katsayı,  $\epsilon(t)$  ise uygulanan  $\sigma(t)$  gerilmesi sonucu oluşan şekil değişimidir.

(2.4) denklemi, genelde Boltzmann süperpozisyon prensibi olarak isimlendirilir (Boltzmann, 1876). (2.3) ve (2.4) denklemlerinde sözü edilen davranış Şekil 2.5'te gösterilmiştir. Bu durumda Hooke kanununun, zamanı da bir parametre olarak içine alan, genelleştirilmiş halinin geçerli olduğu düşünülebilir. Bu durumda şekil değiştirme, gerilme ve zamanın bir fonksiyonu olarak



Şekil 2.5 : Linear (doğrusal) viskoelastik davranış ve Boltzmann süperpozisyon prensibinin uygulanması.

$$\epsilon = \sigma_0 \left\{ \frac{1}{E} \sum_{i=1} \alpha_i t^{m_i} + \sum_{j=1} \beta_j t^{n_j} \right\} , \quad 0 < m < 1 , \quad n > 1 \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.5) denkleminde,  $\alpha_i$  ve  $\beta_j$  gerilmenin mertebesine bağlı olmayan, malzeme özelliklerini belirleyen katsayılardır.

Linear viskoelastik malzemenin davranışı genellikle, mekanik modeller ile benzerlikler kurularak belirtilmeye çalışılmıştır (Achenbach, 1962). Mekanik modeller, ideal elastik malzeme yay, ideal viskoz malzeme de sönüm kutusu ile temsil edilerek, bunların çeşitli şekillerde birleştirilmesi ile oluşturulmuştur. Bu modeller kullanılarak, lineer



viskoelastik malzemeler için gerilme - deformasyon - zaman ilişkileri, lineer diferansiyel denklemler biçiminde ifade edilebilir (Gross,1953; Kalsky, 1953; Lee,1960; Bland, 1960; Findley v.d.,1989).

Geçmişte, söz konusu iki yoldan biri seçilerek lineer viskoelastik malzemeler için uygun bir sünme teorisi geliştirildikten sonra, elastik - viskoelastik benzerlik ile Laplace ve Fourier dönüşümlerinden yararlanılarak, sünme ile ilgili birçok probleme çözüm getirilebilmiştir (Lubliner, 1962; Sackman, 1962; Corneliussen vd, 1962; Valanis, 1965; Kaya, 1973).

Viskoelastik cisimlerde herhangi bir t anındaki şekil değiştirme, gerilmenin geçmişte aldığı bütün değerlere bağlıdır. Bu şekilde geçmişe bağlılığı ifade etmek için en uygun yol integral gösterim olabilir. Boltzmann süperpozisyon ilkesi kullanılarak herhangi bir t anındaki şekil değiştirme için,

$$\epsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.6)$$

ifadesi yazılabilir. Volterra (1909) tarafından önerilen ve *heredite integrali* olarak da adlandırılan bu tür integralin çekirdek fonksiyonu olan  $J(t-\tau)$ , gerilmenin geçmişini tanımlayan bir bellek fonksiyonudur (*memory function*) (Findley v.d., 1989).

Gerilmelerin, kırılma mukavemetinin 1/3 ünü aşması halinde gerilmelerle sünme deformasyonları arasında lineer olmayan bağıntıların kullanılması ve sabit gerilme hali için geçerli gerilme - deformasyon - zaman ilişkilerini, süperpozisyon işlemini kullanmadan, değişken gerilme hali için de geçerli olacak şekilde ifade etmek gerekir (Aroutiounian, 1957; Kaya, 1973).

Davranışı lineer olmayan malzemeler teknik yayınlarda iki bölümde incelenmektedir: *Yarı doğrusal* olarak isimlendirilen malzeme grubunda, ani deformasyonun, gerilmenin

mertebesi ne olursa olsun, gerilmeye lineer olarak bağılı olduğu, ikinci grupta toplanan malzemeler için ise gerek ani, gerekse daha sonraki zamanlardaki gerilme - deformasyon ilişkilerinin doğrusal olmadığı kabul edilir (Marin, 1962; Kaya, 1973). Yapılan deneysel gözlemlerden plastiklerin genel olarak birden fazla şekil değiştirme bölgesinde doğrusal olmayan bir davranış gösterdiği anlaşılmıştır (Stuart, 1956). Metallerin sünmesi ise gerilmenin yüksek dereceden doğrusal olmayan bir fonksiyonudur. Sabit hızlı ikinci sünme bölgesinde, sünme hızı,

$$\dot{\epsilon} = K \sigma^n \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. (2.6) denkleminde K ve n malzeme sabitleri olup,  $3 < n < 7$  dir. (Onaran, 1968).

Doğrusal olmayan viskoelastik davranışın bünye denklemleri için bazı kabuller yapılarak çeşitli amprik ifadeler önerilmiştir (Finnie v.d., 1959; Johnson, 1960; Hoff, 1968). Genel olarak bu denklemler zamana bağıllık özelliğini yeterince ifade edemezler (Onaran, 1968). Son yıllarda, doğrusal olmayan viskoelastik malzemelerin davranışını olabildiğince genel ilişkilerle belirlemek için yapılan analitik çalışmalar, teknik yayınlarda geniş yer tutmaktadır (Distefano v.d., 1967; Findley v.d., 1968; Pipkin v.d., 1968). Bu çalışmalarda, genel olarak,

$$\epsilon(t) = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) \dots \sigma(\tau_n) f_n(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilen gerilme - deformasyon - zaman ilişkileri ile ilgilenilmektedir. Ayrıca, bu konu ile ilgili deneysel çalışmalar da yapılmıştır (Lockett, 1965; Onaran v.d., 1965; Neis v.d., 1967; Gottenberg v.d., 1969; Onaran v.d., 1971). Bununla birlikte, (2.8) tipi gerilme - deformasyon ilişkilerini uygulamada kullanmanın, genel olduğu oranda güç olacağını da kabul etmek gerekir (Kaya, 1973).

(2.8) denkleminde olduğu gibi, n tane çekirdek fonksiyonu ve n katlı integral içeren denklemler, modifiye edilmiş süperpozisyon yöntemi (*modified süperposition method*) kullanılarak,

$$\epsilon(t) = f(\sigma, t) \quad (2.9)$$

denkleminde indirgenebilir (Findley v.d., 1955; Findley v.d., 1967; Findley v.d., 1968; Lai v.d., 1968). (2.9) denkleminde  $f(\sigma, t)$ , gerilmenin doğrusal olmayan bir fonksiyonudur (Findley v.d., 1989).

## 2.2 Sünme (Creep)

### 2.2.1 Tarihçe

Sünme, sabit yük altında malzeme deformasyonunun zamana bağlı olarak değişmesidir. Makine veya yapı elemanlarının davranışını belirlemede sünme oldukça önemli rol oynar. Yüksek ısı altındaki metal elemanlarda sünme etkisini genellikle gözönüne almak gerekir. Uzun zaman değişmeye devam eden deformasyonlar, sonuçta ya eleman boyutlarında kabul edilemeyecek değişikliklere yol açar ya da kırılmaya neden olur. Buhar güçlü ünitelerde sünme, emniyet gerilmelerini belirleyen esas unsurdur. Özellikle süpersonik hızlarda seyreden bir uçakta oluşan sünme olayı proje mühendisini yakından ilgilendiren bir konudur (Hoff, 1954; Rabotnov, 1962, Kaya, 1973).

Beton üzerinde ilk deneysel sünme çalışmaları McMillan (1915) ve Smith (1917) tarafından yapılmıştır. İlk araştırmalar hakkında daha ayrıntılı bir rapor Davis tarafından 1931'de yayınlanmıştır (Davis v.d., 1931; Baradan, 1978).

Metallerdeki sünme olayı, deneysel ve metalurjik açıdan, ilk olarak Norton (1929) ve Tapsell (1931) tarafından incelenmiş, bunları Hoff (1958), Finnie-Heller (1959), Kachonov (1960), Lubahn-Felgar (1961), Dorn (1961), Odqvist-Hult (1962), Kennedy

(1963), Odqvist (1966), Hult (1966), Rabotnov (1969) ve Smith-Nicholson (1971) izlenmiştir (Findley v.d., 1989).

## 2.2.2 Mevcut Çalışmalar

Sünme olayını, sistemli bir şekilde gözleyip ilk rapor eden Vicat'dır (Vicat, 1834). Daha sonra, Thurstan (1895) sünme davranışının üç safhada incelenebileceğini (*Şekil 2.2*) göstermiştir (Findley v.d., 1989).

Sünme ile ilgili ilk sistemli araştırmalar 1910 yıllarında Andrade tarafından yürütülmüştür (Andrade, 1910). Andrade, çok sayıda metal ve alaşım üzerinde yaptığı deneyler sonucunda, çekme etkisi altındaki bir çubuğun sünme özelliklerinin,

$$l = l_0 ( 1 + \beta t^{1/3} ) e^{kt} \quad ( 2.10 )$$

şeklinde ifade edebileceğini göstermiştir. (2.10) denkleminde  $l$  çubuğun herhangi bir  $t$  anındaki uzunluğunu,  $l_0$  ise çubuğun deneyin başlangıç anındaki ( $t = 0$ ) uzunluğunu belirtmektedir.  $\beta$  ve  $k$  sabitleri malzemenin özelliklerine, gerilmenin mertebesine ve sıcaklığa bağlı katsayılardır (Kaya, 1973; Findley v.d., 1989).

Elastik problemlerin çözümünde, basit bir formül yardımı ile belirlenebilen sabitlerle, analitik ve sonlu eleman çözümlerinin süperpoze edilebileceği gösterilmiştir (Yamamoto, 1971). Daha sonra, doğrusal olmayan yapı mekaniği analizlerinde de analitik ve sonlu elemanlar yöntemi sonuçlarının süperpoze edilebileceğinin gösterildiği bir çalışmada, önerilen yöntem ile zamana bağlı sünme probleminin çözümünde oldukça iyi sonuçlar elde edildiği belirtilmiş; konsol bir kirişin sünme deformasyonları belirlenip kıyaslamalar yapılmış ve aynı yöntemin gerek doğrusal olmayan kabuk problemlerinin çözümünde, gerekse üç boyutlu yapılar için de kullanılabileceği belirtilmiştir (Yagawa v.d., 1977).

Viskoelastik gerilme analizlerinde malzeme fonksiyonlarının genelde *Prony serileri* ile ifade edildiğinin belirtildiği bir başka çalışmada (Taylor v.d., 1970), gerilme analizi yönteminin bir yumuşama fonksiyonu tanımını gerektirdiği belirtilmiştir. Taylor sonraki bir çalışmada, Prony serilerinin tersinin etkili ve güvenilir bir şekilde alınabileceği bir yöntem geliştirmiştir (Taylor, 1973).

Çok eksenli basınç altında betonun sünme davranışı ile, Poisson oranı arasındaki ilişkinin incelendiği bir çalışmada, *sünme Poisson oranındaki* değişimlerin çeşitli değişkenlere bağlı olarak ifade edilebilmesi için yapılan deneyler ele alınarak, sonuçlar ayrıntılı bir şekilde irdelenmiş; tek eksenli ya da çok eksenli gerilme altında sünme Poisson oranının zamanla sistemli bir şekilde değişmediği, çok eksenli gerilme durumunda 0.09 ile 0.17 arasında, tek eksenli gerilme durumunda ise 0.17 ile 0.20 arasında değerler aldığı belirtilmiştir (Gopalakrishnan v.d., 1969).

Sabit sıcaklık ve sabit su içeriğine sahip beton için, sünme oranının; yükleme süresi, yükleme yaşı ve betonun bulunulan andaki yaşının kuvvet fonksiyonlarının çarpımı ile ifade edildiği bir sünme ifadesinin geliştirildiği bir çalışmada, betondaki sünmenin belirlenmesi için kullanılan diğer ifadelerle kıyaslamalar yapılmış, sunulan formülasyonun sünme tahminlerindeki hataları azaltmadığı; ancak sünme eğrilerindeki ıraksama oluşumlarını önemli bir şekilde azalttığı vurgulanmıştır (Bažant v.d., 1985).

Sabit nem oranı ve sıcaklığa sahip betonun sünme davranışı için, lineer süperpozisyon prensibinden hareketle elde edilen tek eksenli gerilme - deformasyon ilişkisinin sunulduğu bir başka çalışmada, literatürdeki deney sonuçlarıyla karşılaştırmalar yapılarak söz konusu formülasyonun doğruluğu saptanmıştır (Bažant v.d., 1983).

Sürekli ortam mekaniği çerçevesinde, Maxwell ve Kelvin - Voigt viskoelastik malzemelerinin, basit sonlu deformasyon modellemesinin geliştirildiği bir çalışmada, farklı malzeme modellerinden elde edilen teorik tahminler arasında ayrıntılı bir kıyaslama yapılmış, malzemenin davranışı klasik Maxwell ve Kelvin - Voigt malzemelerinin üç boyutlu genelleştirilmesiyle modellenmiştir (Durban v.d., 1990).

Homojen, izotropik, viskoelastik malzemelerde sabit gerilme altında küçük sünme deformasyonları için kabul edilebilir gerilme durumlarının incelendiği bir çalışmada,

- *Sıkıştırılabilir lineer malzemelerde, aynı zamanda harmonik de olan herhangi bir doğrusal elastik gerilme durumunun;*
- *Sıkıştırılabilir nonlineer malzemelerde, yalnız homojen gerilme durumlarının;*
- *Sıkıştırılmayan lineer malzemelerde, tüm sıkıştırılmayan lineer elastik gerilme durumlarının;*
- *Sıkıştırılmayan nonlineer malzemelerde, tüm homojen gerilme durumlarının kabul edilebilir olduğu; burulma ve eğilme gibi çeşitli kontrol edilebilir sünme deformasyonlarını içeren sünme deneylerinin yararlı olduğu belirtilmiştir (Carroll, 1971).*

Üç eksenli basınç gerilmesi altında, iki değişik sıcaklıkta ve değişik ortamlarda, beton numuneler üzerinde iki yıl boyunca sürdürülen deneylerin sonuçlarının sunulduğu bir çalışmada,

- *İlk yapılan araştırmaların aksine, çok eksenli gerilme altında sünme deformasyonlarının, tek eksenli gerilme durumu için bulunan sünme deformasyonlarına kıyasla daha az olduğu;*
- *Hidrostatik basınç altında da önemli ölçüde sünme olayının gerçekleştiği;*
- *Sünme Poisson oranının iki yıl sürecince fazla değişmediği;*
- *İki yıl 73 °C'de tutulan numunenin elastisite modülünün, 27 °C'de tutulan numunenin elastisite modülünün % 88'i mertebesinde bulunduğu belirtilmiştir (Hannatt, 1969; Baradan, 1978).*

## 2.3 Sünme Davranışı

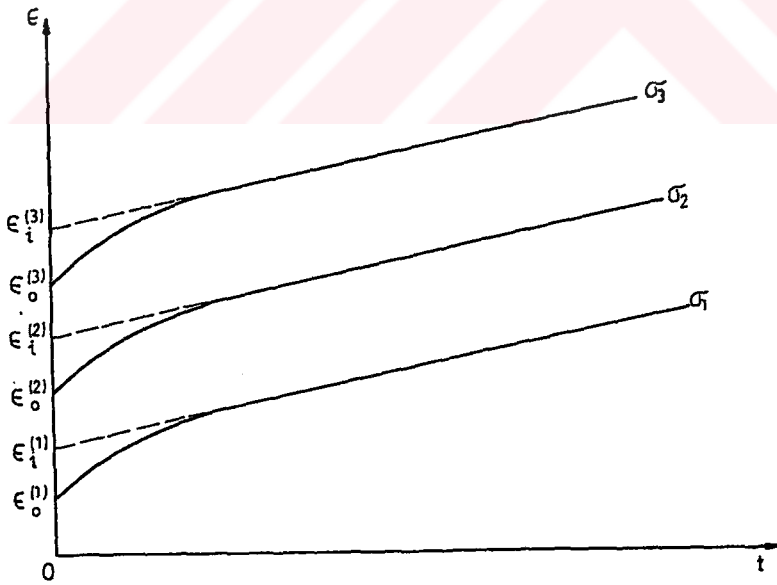
### 2.3.1 Sünme Davranışını Belirleyen Matematiksel Bağlımlar

Davranışı doğrusal olmayan malzemeler için, değişik gerilmeler altında sünme deformasyonları Şekil 2.6'da verilmiştir.

Geçici sünme ihmal edilebilecek kadar kısa bir süreyi kapsıyorsa, sabit sünme için bazı basitleştirici kabuller yapılabilir. Örneğin, sabit sünme yaklaşık olarak bir doğru olduğundan sabit sünme doğrusunu  $t = 0$ 'a kadar uzatarak (Şekil 2.6), sabit gerilme hali için, deformasyon ( $\epsilon$ ), ani deformasyon ( $\epsilon_i$ ) ve sünme deformasyonunun ( $\epsilon_c$ ) toplamı şeklinde aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\epsilon = \epsilon_i + \epsilon_c \quad (2.11)$$

(2.11) denkleminde ani deformasyon ( $\epsilon_i$ ) ve sünme deformasyonu ( $\epsilon_c$ ),



Şekil 2.6: Doğrusal olmayan malzemeler için, değişik gerilmeler altında sünme deformasyonlarının değişimi.

$$\epsilon_i = F ( \sigma ) \quad ( 2.12 )$$

$$\epsilon_c = t G ( \sigma ) \quad ( 2.13 )$$

olarak alınabilir. (2.13) ifadesinde  $G(\sigma)$  sünme deformasyon hızını göstermektedir. (2.12) ve (2.13) kullanılarak, (2.11) ifadesi;

$$\epsilon = F ( \sigma ) + t G ( \sigma ) \quad ( 2.14 )$$

biçiminde yazılır.

(2.12) ve (2.14) ifadelerindeki  $F(\sigma)$  için en çok kullanılan formül,

$$F ( \sigma ) = \frac{1}{E'} \sigma + \left( \frac{\sigma}{\sigma_{k'}} \right)^{k'} \quad ( 2.15 )$$

olup, burada  $E'$ ,  $k'$  ve  $\sigma_{k'}$  malzemeye bağlı katsayılardır (Hult, 1966; Kaya, 1973). Ancak, (2.14) denklemi bu biçimi ile, değişken gerilme durumu için genelleştirilemez.  $t = t_1$  anında gerilmenin değeri  $\sigma_1'$ 'den  $\sigma_2'$ 'ye yükseltildiğinde, deformasyon artışı,

$$\Delta \epsilon = \Delta F( \sigma ) + t_1 \Delta G( \sigma ) \quad ( 2.16 )$$

biçiminde elde edilecektir. Bununla birlikte, deneyler  $\Delta \epsilon$  un yaklaşık olarak  $\Delta F(\sigma)$  kadar olacağını göstermektedir. Bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için (2.14) denklemi

$$\epsilon = F( \sigma ) + \int_0^t G( \sigma ) d\tau \quad ( 2.17 )$$

şeklinde ifade edilmektedir.  $t = t_1$  anında gerilmenin değeri  $\sigma_1'$ 'den  $\sigma_2'$ 'ye yükseltildiğinde (2.17) denkleminde

$$\Delta \epsilon = \Delta F( \sigma ) \quad ( 2.18 )$$



bulunur ki bu denklem, deney sonuçlarına da uygundur. (2.17) ifadesinin zamana göre türevi alındığında,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d}{dt} F(\sigma) + G(\sigma) \quad (2.19)$$

ifadesine ulaşılır. (2.14) formülasyonu *tüm deformasyon teorisi*, (2.17) ve (2.19) ise *kısmi artış deformasyon teorisi* olarak adlandırılır (Hult, 1966). Bazı durumlarda (2.14) denklemi daha basit olduğu için tercih edilmekle birlikte, (2.17) ya da (2.19) yaklaşımının sistem davranışına daha uygun olduğu söylenebilir.

Sünme hızı ( $G(\sigma)$ ) için farklı bağıntılar önerilmiştir. Ludwig (1909), sabit sünme safhasındaki sünme hızı için,

$$G(\sigma) = k e^{\sigma/\sigma^*} \quad (2.20)$$

biçiminde üstel bir fonksiyon önermiştir.

Düşük gerilme altında sabit sünme (*steady creep*) için, Bailey (1929) ve Norton (1929) tarafından, deney sonuçları ile oldukça uyumlu olan,

$$G(\sigma) = k \sigma^p \quad (2.21)$$

biçiminde amprik bir ifade önerilmiştir (Kaya, 1973).

(2.20) ifadesinde, herhangi bir anda gerilme etkisi kalktığında, sünme hızı sıfır olarak bulunur. (2.20) bağıntısındaki bu aksaklık Soderberg tarafından giderilerek, sünme hızı ifadesi

$$G(\sigma) = c (e^{\sigma/\sigma^*} - 1) \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Soderberg, 1936).

Nadai (1937) sünme hızını, Prandtl (1928) tarafından önerilen sinüs hiperbolik fonksiyonunu kullanarak ifade etmiştir:

$$G(\sigma) = D \sinh\left(\frac{\sigma}{\sigma^+}\right) \quad (2.23)$$

(2.20), (2.21), (2.22) ve (2.23) denklemlerinde  $k$ ,  $p$ ,  $\sigma^+$ ,  $c$  ve  $D$  malzemeye bağlı katsayılardır.  $G(\sigma)$  sünme hızı ve  $\sigma$  uygulanan gerilme olup,  $p$  değerleri tek boyutlu hal için 3 ile 7 arasında bulunmuştur (Hult, 1966; Kaya, 1973; Findley v.d., 1989).

Geçici sünme safhasının gözardı edilemeyeceği durumlarda ise deformasyonlar,

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_c = F(\sigma) + G(\sigma, t) \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.24) denkleminde  $\epsilon_0$  gerçek ani deformasyon değeri olup,

$$\epsilon_0 = \frac{1}{E} + \left(\frac{\sigma}{\sigma_k}\right)^k \quad (2.25)$$

biçiminde ifade edilebilir. (2.24) denkleminde

$$\epsilon_c = G(\sigma, t) \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlanabilir. (2.26) bağıntısının zamana göre türevi alındığında, sünme hızı

$$\dot{\epsilon}_c = \frac{d G(\sigma, t)}{dt} = g(\sigma, t) \quad (2.27)$$

biçiminde elde edilir. (2.26) ve (2.27) denklemleri arasında zaman yok edilirse, sünme hızı için

$$\dot{\epsilon}_c = h(\sigma, \epsilon_c) \quad (2.28)$$

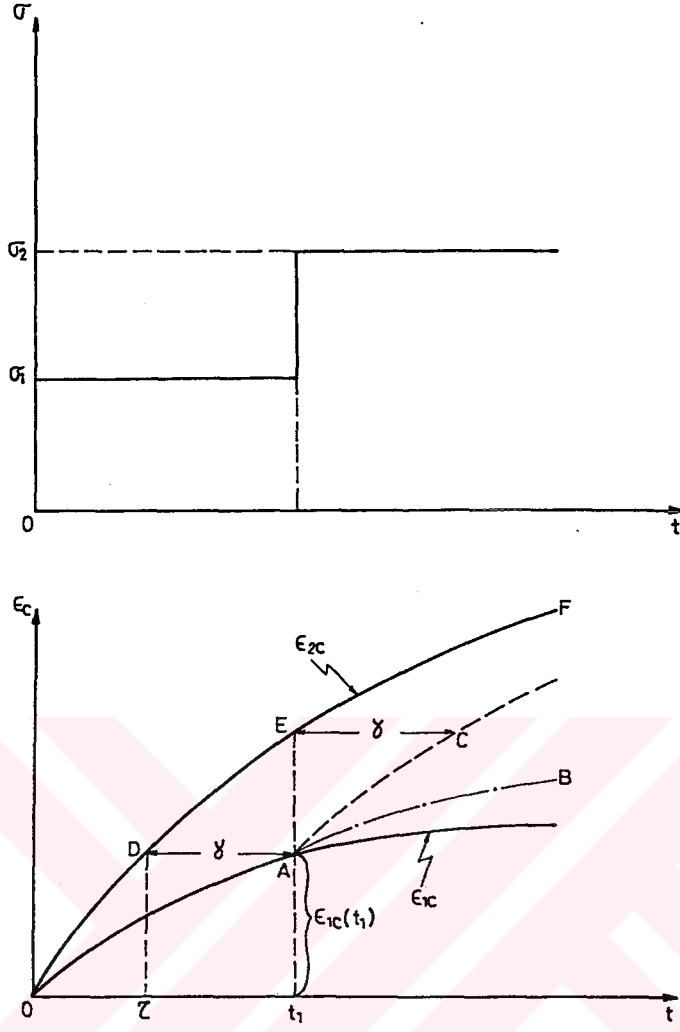
ifadesi bulunur. (2.28) denkleminde sünme hızı, gerilmenin ve toplam sünme deformasyonunun (*accumulated creep strain*) fonksiyonudur.

Sabit gerilme hali için tamamen eşdeğer olan (2.27) ve (2.28) denklemleri, değişken gerilme hali için farklı sonuç verirler. Şekil 2.7' den görüleceği gibi, gerilmenin  $t=t_1$  anında  $\sigma_1$ 'den  $\sigma_2$ 'ye yükseltildiği kabul edildiğinde;  $\epsilon_{1c}$  ve  $\epsilon_{2c}$ , sabit  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$  sonucu oluşan, sünme deformasyonu eğrileri olarak elde edilir.  $t = t_1$  anına dek sabit  $\sigma_1$  gerilmesi altında (2.27) ve (2.28) ifadeleri aynı eğrileri verir (OA eğrisi).  $t = t_1$ 'den sonraki zaman için (2.27) denklemi AB eğrisini verir. Bu eğri EF eğrisinin AE kadar aşağıya kaydırılmış şeklidir. Bunun nedeni (2.27) denklemine göre,  $\dot{\epsilon}_c$  değerinin  $\sigma$  ve  $t$ 'ye bağlı olmasıdır. Başka bir deyişle,  $t = t_1$ 'den sonra sünme deformasyon hızının sadece  $\sigma_2$ 'ye ve yüklemekten itibaren geçen süreye bağlı olduğu düşünülmektedir.  $t = t_1$  anından sonrası için ise, (2.28) denklemi AC eğrisini verir. Bu eğri ise, DEF eğrisinin AD kadar sağa kaydırılmış şeklidir. Bunun nedeni de (2.28) denklemine göre sünme deformasyon hızının  $\sigma$  ve  $\epsilon_c$  değerlerine bağlı olmasıdır. Diğer bir deyişle,  $t = t_1$  anından sonra  $\epsilon_c$ , yalnız  $\sigma_2$  gerilmesine ve o andaki sünme miktarına bağlıdır.

Geçici sünme safhasında sünme hızının azalması *sertleşme* olarak isimlendirilir. (2.27) denkleminde sertleşmenin nedeni zaman faktörü olup, *zaman sertleşmesi* olarak isimlendirilir.

(2.28) denkleminde ise, sertleşmenin nedeni sünme deformasyonları olarak kabul edilir ve bu yaklaşım *deformasyon sertleşmesi* olarak isimlendirilir (Finnie v.d., 1959; Penny v.d., 1971; Kaya, 1973; Findley v.d., 1989).

*Deformasyon sertleşmesi* yaklaşımı gerçeğe çok yakın sonuçlar verdiği halde kullanılması oldukça zordur (Lin, 1962). *Zaman sertleşmesi* yaygın olarak kullanılmasına karşın, büyük gerilme değişimleri söz konusu olan problemlerde gerçek davranıştan uzak sonuçlar verebilmektedir (Kaya, 1973). Metal ve plastiklerde ise *deformasyon sertleşmesi* daha uygun sonuçlar vermektedir (Findley v.d., 1955; Finnie v.d., 1959, Findley v.d., 1989).

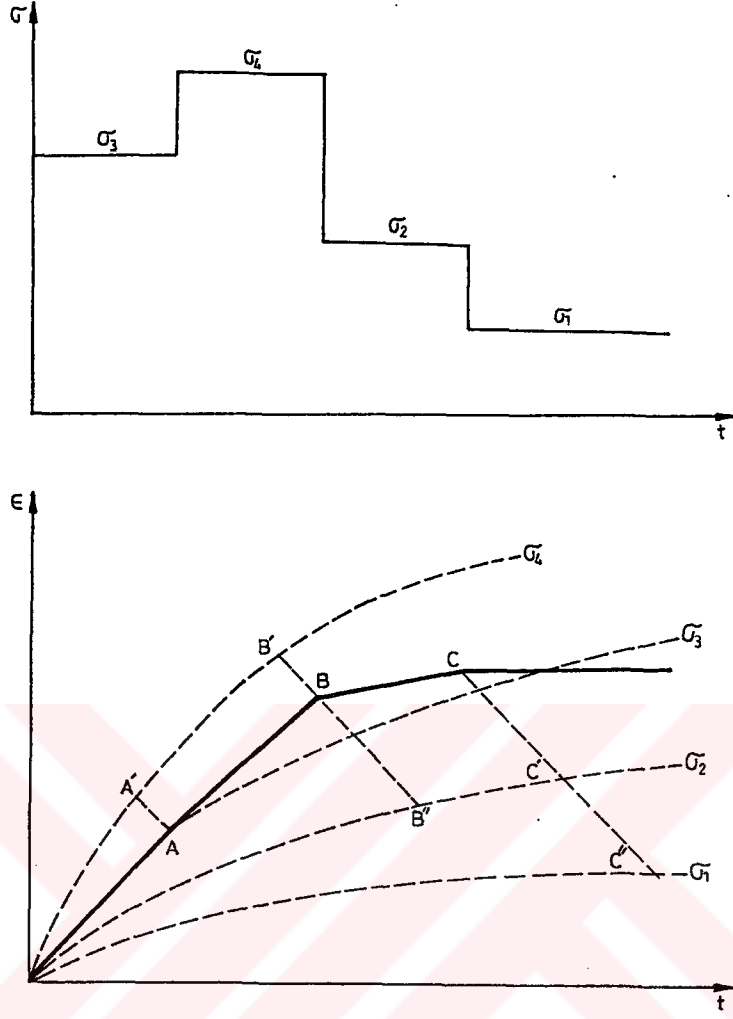


Şekil 2.7 : Gerilmenin artırılması durumunda zaman sertleşmesi ve deformasyon sertleşmesi yaklaşımları.

Finnie ve Heller (1959), Manson (1961) ve Johnson (1963), sünme hızını gerilme, zaman ve sünme deformasyonlarının fonksiyonu olarak

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = C \sigma^\gamma \epsilon_c^\delta t^n \quad (2.29)$$

biçiminde ifade etmişlerdir. *Birleştirilmiş teori* olarak isimlendirilen (2.29) ifadesinde  $C$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  ve  $n$  malzeme sabitleridir. (2.29) ifadesinden, değişik gerilmeler altında oluşan sünme deformasyon davranışı Şekil 2.8'de görülebileceği gibi belirlenebilir (Penny v.d., 1971).



**Şekil 2.8** : Birleştirilmiş teori yaklaşımı ile değişken gerilme etkisi altında sünme deformasyonları.

Bazı teknik yayınlarda *stasyoner sünme* terimi sabit sünme ile aynı anlamda kullanılmış ise de, gerçekte *stasyoner sünme*, zaman içinde sünme deformasyon hızının değişmediğini değil, gerilme dağılımının zamana göre sabit kaldığı hali ifade eder (Kaya, 1973). Çeşitli yüklemeler söz konusu olduğunda ise; gerilme mutlak değerce aynı kalmamakta, ancak gerilme dağılımı sabit kalmaktadır. Başka bir deyişle, gerilmeler her yerde uygulanan yükle orantılı olarak değişmektedir (Penny v.d., 1971).

Stasyonere sünme problemini, *elastik anoloji*den yararlanılarak da çözmek mümkündür. Gerilme dağılımı zaman içinde sabit kalan bir sistem ele alındığında, (2.26) denklemi

$$\epsilon_c = G(\sigma, t) = \Phi(\sigma) \varphi(t) \quad (2.30)$$

şeklinde alınırsa, (2.24) denklemi

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_c = F(\sigma) + \Phi(\sigma) \varphi(t) \quad (2.31)$$

biçiminde elde edilir.  $F(\sigma)/\Phi(\sigma)$  oranı  $\sigma'$  dan bağımsız bir sabit olarak düşünüldüğünde (2.31) ifadesi

$$\epsilon = F(\sigma) \{ 1 + \alpha \varphi(t) \} \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanacaktır. Bu durumda sistem içindeki herhangi iki nokta arasındaki deformasyon oranı

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{F(\sigma_1)}{F(\sigma_2)} \quad (2.33)$$

olacak, malzeme, C bir sabit olmak üzere

$$\epsilon = C F(\sigma) \quad (2.34)$$

şeklinde elastik kabul edildiğinde de aynı oran geçerli olacaktır. Böylece, stasyoner sünme problemlerinde benzer bir elastik problem çözülerek, gerilme ve deformasyon dağılımını hesaplamak mümkündür. Zamanın yok edildiği bu yaklaşıma *elastik analogi* adı verilir.

*Stasyoner olmayan sünme* terimi ise herhangi bir sistem içerisinde gerilme dağılımının zamana bağlı olarak değişimini ifade eder. Genellikle bir sistemde mesnet çökmeleri, sıcaklık değişimleri, ve imalat hataları olmadığı kabul edildiği takdirde, (2.31) denkleminde  $F(\sigma) / \Phi(\sigma)$ ,  $\sigma'$  ya bağlı bir oran olduğu sürece, sistemdeki gerilme dağılımında zaman içinde bir dağılım söz konusu olacaktır.

### 2.3.2. Reolojik Modeller

Reolojik modellerde, elastik ve viskoz davranışlar sırası ile, bir yay ve bir sönüm kutusu kullanılarak temsil edilmektedir. İdeal özellikli bu cisimlere sırasıyla Hooke cismi ve Newtonyen sıvısı denir. Gerçekte bu mekanik elemanlar yalnızca simgesel olarak gerçek cismin gerilme - deformasyon davranışını göstermektedir.

Yay, tümüyle bir elastik eleman olup, doğrusal elastisite teorisinin bilinen Hooke yasasına uyar (*Şekil 2.9*).

Sönüm kutusu ise tümüyle viskoz bir elemandır ve davranışı *Şekil 2.10* 'da görülmektedir.

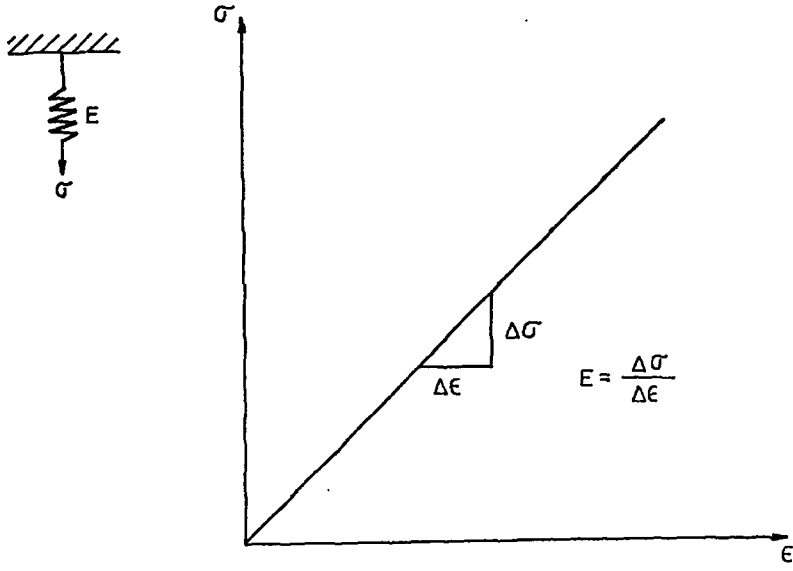
Viskoz davranışı gösteren denklem;

$$\sigma = \eta \frac{d\epsilon}{dt} = \eta \dot{\epsilon} \quad ( 2.35 )$$

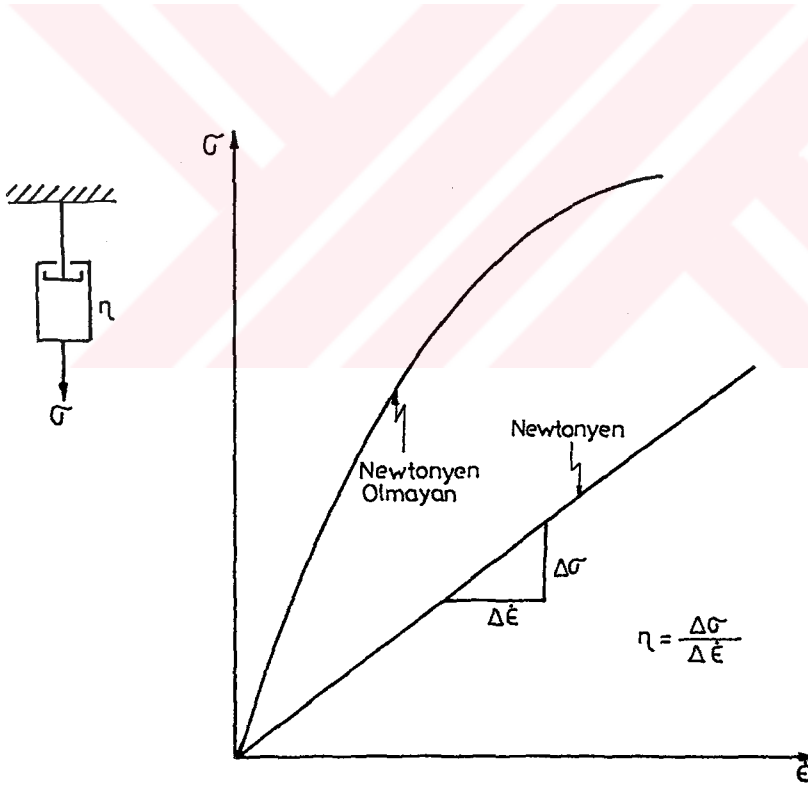
biçiminde ifade edilebilir. (2.35) ifadesinde,  $\eta$  viskozite katsayısıdır. Newtonyen olmayan davranışta,  $\eta$  katsayısının deformasyon hızı ile değiştiği *Şekil 2.10* 'da da görülmektedir.

Malzemenin olası reolojik davranışını anolojik olarak yansıtabilmek için yaylar ve sönüm kutuları çeşitli şekillerde düzenlenir. En önemli reolojik modeller Kelvin ve Maxwell modelleridir. *Şekil 2.11* 'de, söz konusu modeller ve davranışları görülmektedir. Bu iki modelden Maxwell modeli sıvıyı, Kelvin modeli katıyı daha iyi temsil etmekte olup, iki modelin çeşitli düzenlemeleri karmaşık modellerin esas elemanlarını oluştururlar.

Kelvin modeli, yay elemanı ve sönüm kutusu elemanının, paralel olarak birleştirilmesinden oluşmakta olup (*Şekil 2.11(a)*) yay ve sönüm kutusu için gerilme - deformasyon ilişkileri,

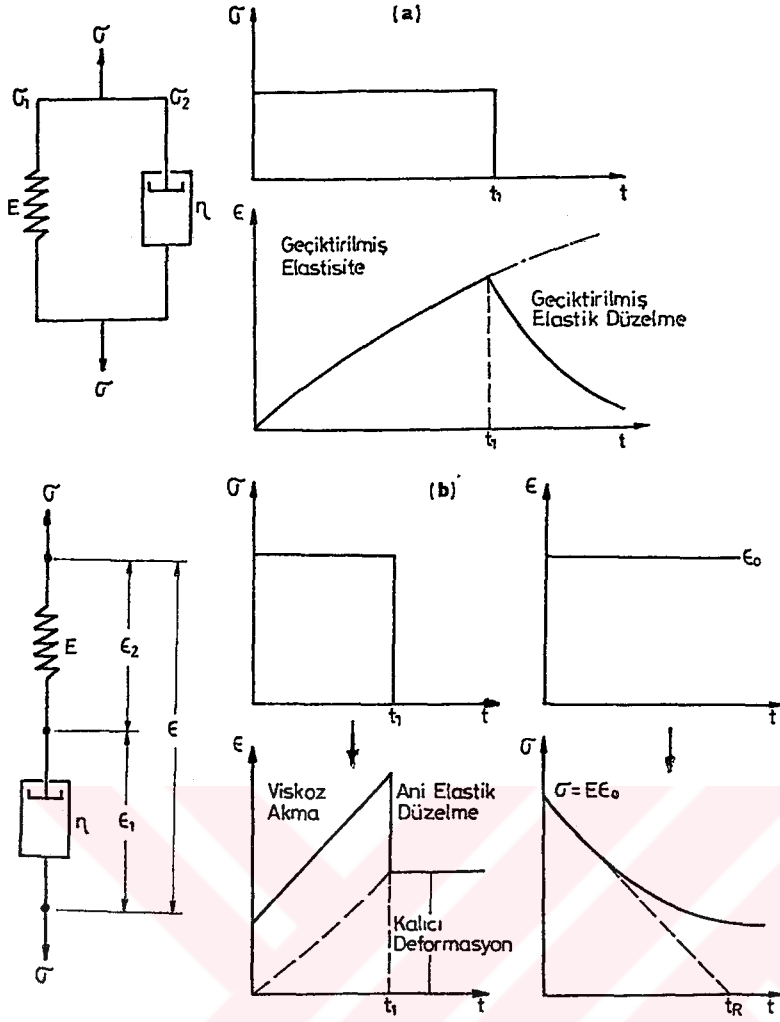


Şekil 2.9 : Reolojik modellerde Hooke cismi ve lineer elastik davranış.



Şekil 2.10 : Reolojik modellerde Newtonyen sıvısı ve viskoz davranışı





Şekil 2.11: Reolojik modellerden (a) Kelvin ve (b) Maxwell modelleri.

$$\sigma_1 = E \epsilon \quad (2.36)$$

$$\sigma_2 = \eta \dot{\epsilon} \quad (2.37)$$

şeklindedir.

Kelvin modelinde toplam gerilme

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (2.38)$$

olarak elde edilebilir. (2.36), (2.37) ve (2.38) ifadelerinden  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$  yok edilirse,  $\sigma$  gerilmesi ve  $\epsilon$  deformasyonu arasında

$$\dot{\epsilon} + \frac{E}{\eta} \epsilon = \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.39)$$

ilişkisi yazılabilir.

Sünme için,  $t=0$  anında sabit bir  $\sigma_0$  gerilmesi altında, (2.39) denkleminin çözümü

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-Et/\eta}) \quad (2.40)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$t = t_1$  anında  $\sigma_0$  yüklemesi kaldırılırsa, geri dönüş sırasında (2.40) ifadesi,

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} e^{-Et/\eta} \{ e^{Et_1/\eta} - 1 \} \quad (2.41)$$

şeklini alır.

Şekil 2.11(a)'dan görüleceği üzere  $t$ 'nin büyük değerlerinde, deformasyonlar sıfır olma eğilimindedir. Bazı malzemeler kısmi geri dönüş gösterirken, bazılarında tam geri dönüş görülmektedir (Findley v.d., 1989).

Maxwell modeli doğrusal yay elemanı ile doğrusal viskoz sönüm kutusu elemanının seri olarak birleştirilmesinden oluşmakta olup (Şekil 2.11(b)), yay ve sönüm kutusu için gerilme -deformasyon ilişkileri

$$\sigma = E \epsilon_1 \quad (2.42)$$

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilir. Seri bağlı bu iki elemanda oluşacak toplam deformasyon

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (2.44)$$

ve deformasyon hızı,

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 \quad (2.45)$$

biçiminde tanımlanabilir. (2.42) ve (2.44) ifadesinden  $\epsilon_1$  ve  $\epsilon_2$  yok edilirse, (2.45) ifadesi

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.46)$$

şeklini alır. *Çeşitli gerilme durumlarında deformasyon - zaman ya da verilen deformasyon altında gerilme - zaman ilişkileri* (2.46) ifadesindeki diferansiyel denklemin çözümü ile elde edilir.

Şekil 2.11(a)'da görülen  $\sigma_0$  başlangıç gerilmesi altında, (2.46) denklemini  $t = t_0$  anında  $\sigma = \sigma_0$  başlangıç koşulu ile integre edilerek, deformasyon - zaman ilişkisi

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \quad (2.47)$$

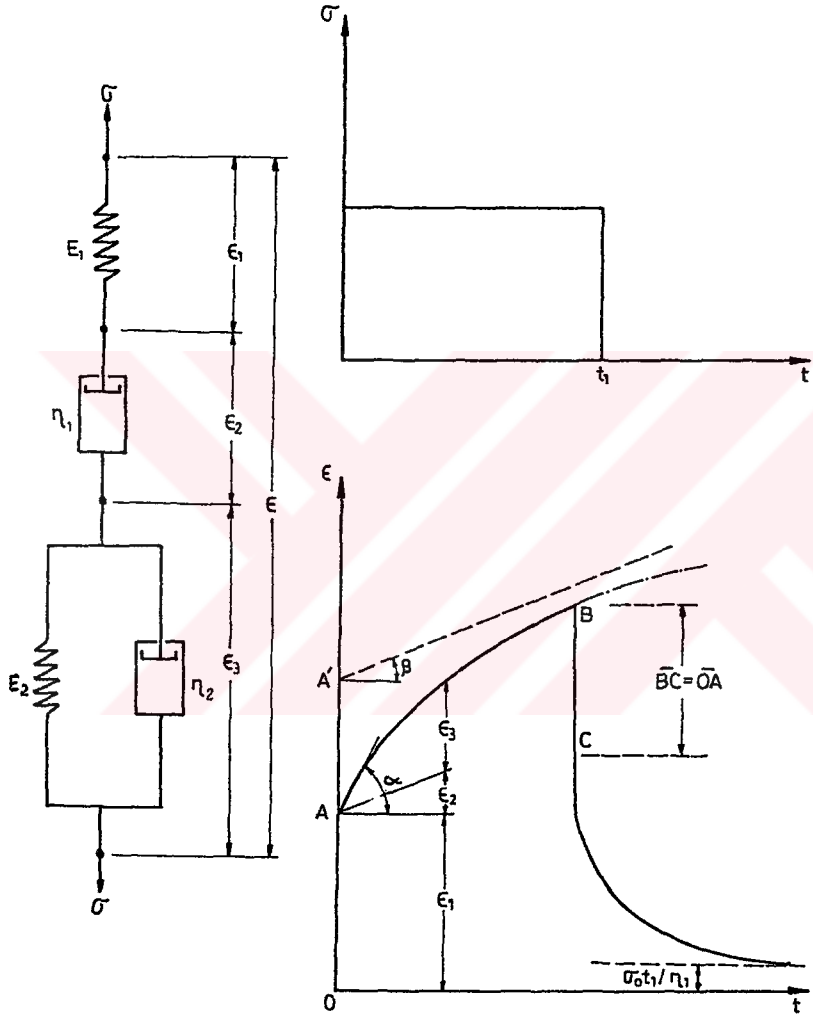
şeklinde elde edilebilir.

Şekil 2.11(b)'deki  $\epsilon_0$  deformasyonuna bağlı olarak, (2.46) denklemini çözüldüğünde, gerilme - zaman ilişkisinin

$$\sigma(t) = E \epsilon_0 e^{-Et/\eta} \quad (2.48)$$

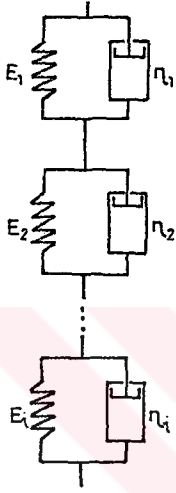
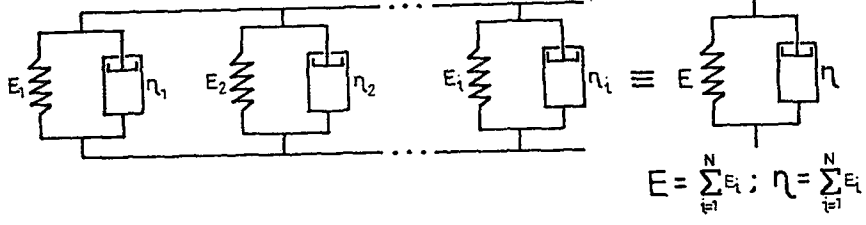
olduğu görülür.

Yay ve sönüm kutularını çeşitli şekillerde düzenleyerek malzemenin gerçek davranışlarına yaklaşan modeller elde etmek mümkündür. Şekil 2.12'de dört elemanlı bir model ve davranışı; Şekil 2.13'de ise, genelleştirilmiş Maxwell ve Kelvin modelleri görülmektedir (Findley v.d., 1989).



Şekil 2.12: Dört elemanlı reolojik model ve davranışı.

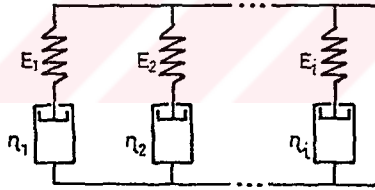
Genelleştirilmiş paralel bağlı Kelvin modeli



Genelleştirilmiş  
seri bağlı  
Kelvin modeli



Genelleştirilmiş  
seri bağlı  
Maxwell modeli



Genelleştirilmiş  
paralel bağlı  
Maxwell modeli

Şekil 2.13 : Genelleştirilmiş Kelvin ve Maxwell modelleri.

### 3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

#### 3.1 Tarihçe

Karmaşık bir sistemin davranışının ne olacağına sistemi bütün olarak ele alıp karar vermek yerine, onu parçalar veya *elemanlar* düzeyinde inceleyip, ayrı ayrı davranışlar anlaşıldıktan sonra tekrar orijinal sisteme dönüp bütünüün davranışına karar vermek mühendisler, bilim adamları ve hatta ekonomistler tarafından da kullanılan bir yoldur.

Bazı durumlarda sistemi, sonlu sayıda iyi tanımlanmış bileşene ayırmak olanaklıdır. Bu tür problemlere *ayrık (discrete)* problemler denir. Ancak, kimi zaman bölme işlemi tanımsız bir şekilde uzar ve problem sonsuz küçük bir parçanın matematiksel benzeşimiyle tanımlanabilir. Bu tür sistemler için *sürekli* terimi kullanılır. Ayrık sistemler, eleman sayısı fazla olsa da bilgisayarlar yardımı ile çözülebilir. Sürekli sistemlerin çözümü için ise çeşitli matematiksel teknikler geliştirilmektedir.

Ayrık problemlerdeki çözümlerin yaklaşıklığının gerçek çözüme yakınsaklığını sağlamak için mühendisler ve matematikçiler zaman içinde farklılaşarak çeşitli ayırma (*discretization*) teknikleri geliştirmektedir. Diferansiyel denklem içeren problemlere doğrudan uygulanabilecek olan sonlu farklar yaklaşımı, çeşitli *ağırlıklı kalan yöntemleri (weighted residual procedure)* veya *fonksiyonelleri* belirlemek için yaklaşık teknikler ilk olarak geliştirilmiş genel tekniklerdir.

Başlangıçta mühendisler sezgisel olarak problemlere ayrık elemanlarla, sürekli ortamın sonlu parçaları arasında bir analogi yaratmaya çalışarak yaklaşmışlardır. Katı mekaniği alanında McHenry (1943), Hrenikoff (1941) ve Newmark (1949) bu yaklaşımla mantıklı sonuçlar alındığını göstermişlerdir. Daha sonra, Argyris (1960) ve Turner vd. (1956), sürekli bir ortamı küçük parçalar veya *elemanlarla* temsil etmenin basitleştirilmiş ve kullanılabilir bir yol olduğunu matematiksel olarak kanıtlamışlardır. Ancak, *sonlu eleman* terimini ilk kullanan Clough (1960) olmuştur.

Daha sonraki yıllarda *sonlu eleman yöntemi* gelişmiş, yapı mühendisleri, her bir eleman için kuvvet - deplasman ilişkilerinden yola çıkarak, tüm sisteme geçip, bilinmeyen deplasmanları elde edebilmişlerdir. Benzer şekilde elektrik mühendisleri, su kaynakları mühendisleri de benzer bağıntıları eleman için kurup, daha sonra asıl sisteme geçmektedirler (Zienkiewicz, 1977).

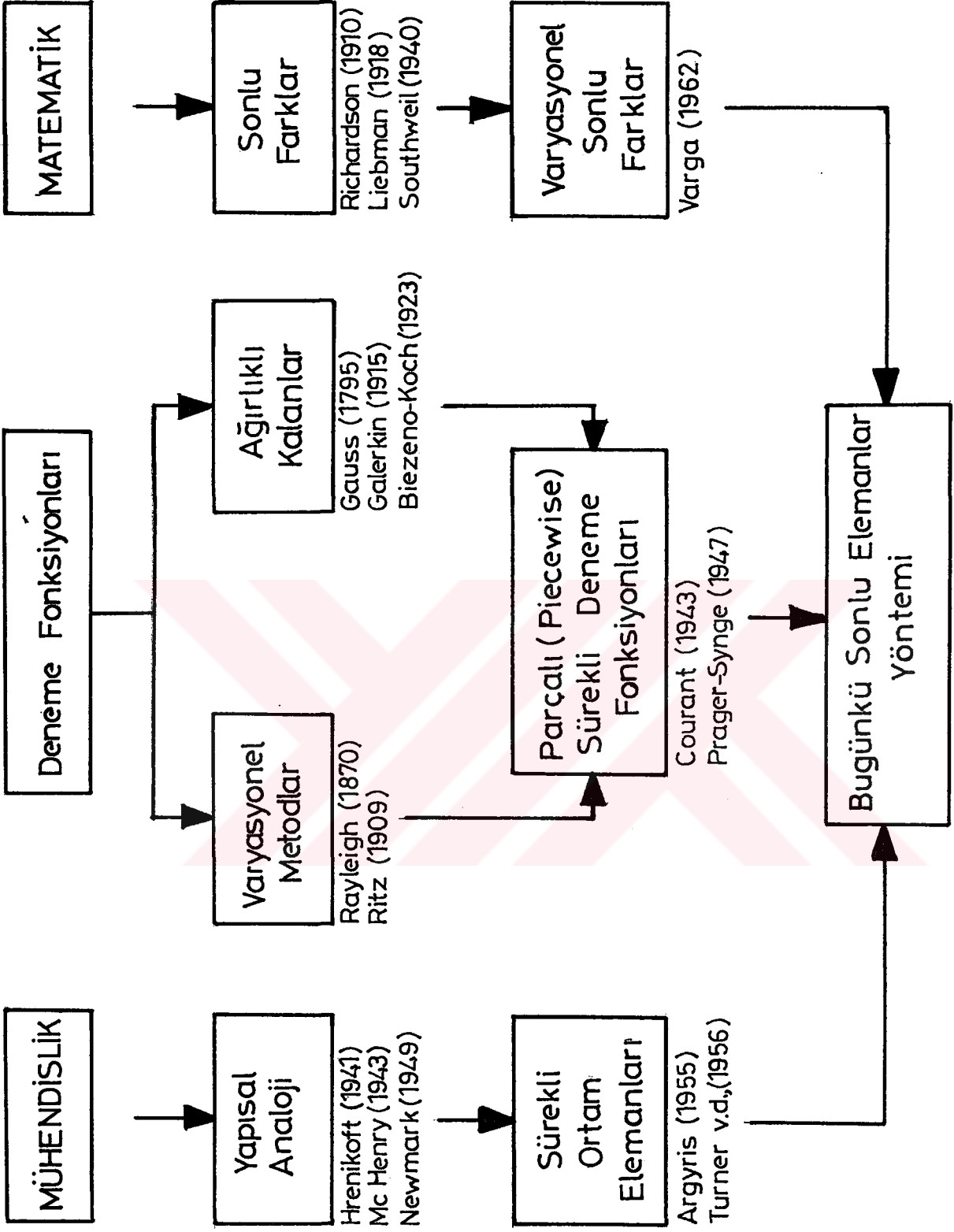
*Tablo 3.1* den görülebileceği gibi, başlangıçtan bugüne dek bilim adamları ve mühendisler, bir yandan gerçeğe daha yakın sonuçlar verebilecek eleman türleri ararlarken, bir yandan da sonlu eleman yönteminin teorik temelleri, varyasyonel hesap yöntemleri, kullanılan sonlu elemanın yakınsaklığı gibi konular üzerinde durmuşlardır (Oliveria, 1968; Tong v.d., 1969; Wolf, 1973; Zienkiewicz, 1977; Stenberg, 1988).

### 3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemine Genel Bakış

*Sonlu elemanlar yöntemi* ile hesaplanan yapı sistemleri sonlu sayıda ve sonlu uzaklıktaki düğüm noktalarında temas halinde bulunan elemanların bir birleşimi olarak incelenir. Böylece, her bir elemanın davranış denklemlerinin çözülmesi sonucunda, tüm taşıyıcı sistemin davranışı belirlenmiş olur. *Sonlu Elemanlar Yönteminde* çözümün gerçeğe yakınlığı ile sistemin veya ortamın bölündüğü eleman sayısı arasında bir ilişki vardır.

Sonlu elemanlar yönteminin yaklaşık bir yöntem olmasının nedenleri

- *Eleman rijitlik matrisinin yaklaşık olması,*
  - *Süreklilik şartlarının ve denge denklemlerinin yalnızca bağlantı noktalarında sağlanması,*
  - *Sınır şartlarının, yalnızca düğüm noktalarında sağlanması,*
  - *Sistemin üzerinde verilen yüklerin, eşdeğer düğüm noktaları kuvvetlerine çevrilmesi*
- olarak açıklanabilir.



Tablo 3.1: Sonlu Elemanlar: Yönteminin Soy Ağacı



## Sonlu Elemanlar Yöntemini

a) *Deplasman yöntemi,*

b) *Kuvvet yöntemi,*

c) *Karışık formülasyon*

olmak üzere üç tipe ayırmak mümkündür. En yaygın olarak kullanılan yöntem, *deplasman yöntemi*dir. Bu çalışmada da kullanılmış olan bu yöntemin uygulanmasında genelde izlenen yol şu şekilde özetlenebilir:

a) *Yapı sistemi veya sürekli ortam, fiktif çizgiler ve yüzeylerle belirli sayıda elemana ayrılır. Elemanların birbirine bağlandığı köşe noktalarına düğüm noktaları adı verilir.*

b) *Elemanların, sınırlar üzerinde bulunan belirli sayıda düğüm noktasında temas halinde olduğu varsayılır. Her düğüm noktasında, elemanın davranışına uygun olarak tarif edilen düğüm noktası deplasmanları, problemin asıl bilinmeyen parametrelerini oluşturur.*

c) *Elemanın kendi içindeki deplasman durumunu tanımlamak üzere, düğüm noktası deplasmanları ve koordinatlarına bağlı polinom tipinde fonksiyonlar (Şekil fonksiyonu) seçilir. Bu amaçla seçilecek polinomun terim sayısının düğüm noktalarının deplasman bileşenleri sayısına (elemanın toplam serbestlik derecesine) eşit olması gerekir. Bir sonlu elemanda düğüm noktasının deplasman bileşen sayısı ne kadar büyükse, deplasmanlar için seçilecek fonksiyonun derecesi de o kadar büyük olacaktır. Özellikle deplasmanlarda, sürekli ortamı bölmekten kaynaklanan hatalar azalacaktır. Buna karşılık, bilinmeyen sayısının artması sonucu rijitlik matrisinin boyutlarının büyümesinden dolayı hesaplamanın uzaması ve bilgisayar bellek kapasitesi gibi sorunlar ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, eleman büyüklükleri ve düğüm noktalarının serbestlik dereceleri dengeli bir biçimde seçilmelidir.*

- d) Eleman içindeki deformasyon durumunu, düğüm noktalarının deplasmanları cinsinden tanımlayan seçilmiş deplasman fonksiyonları gerekli türevler alınarak, malzemenin elastik özellikleri ile birlikte, eleman sınırlarında her noktadaki gerilme durumunu tanımlarlar.
- e) Düğüm noktalarına yoğunlaştırılan dış yükler ile düğüm noktalarının deplasmanları arasındaki ilişkiyi kuran eleman rijitlik matrisleri elde edilir.
- f) Eleman rijitlik matrislerinden, kodlama yöntemi ile toplam sistem rijitlik matrisine geçilir.
- g) Sistem rijitlik matrisi yardımıyla, sistemin gerçek davranış denklemleri kurularak, düğüm noktalarının deplasmanları, daha sonra da sistemin şekil değiştirme ve gerilme bileşenleri elde edilir.

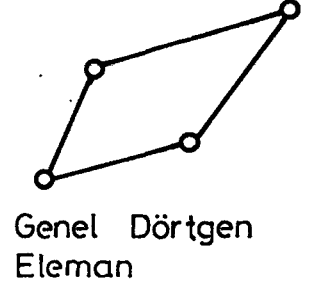
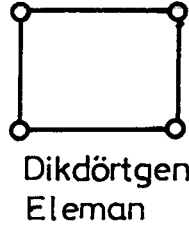
### 3.3. Sonlu Eleman Tipleri

Belirtildiği gibi, sonlu elemanlar yönteminin uygulanmasında yapılacak ilk iş, sürekli ortamı veya sistemi sonlu sayıda elemana bölmektir. Şekil 3.1’de çok sık kullanılan elemanlardan bazıları verilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminin uygulanmasında, çeşitli sayıda düğüm noktasına sahip üçgen elemanlar yaygın olarak kullanılmaktadır. Bunun nedenlerinden biri, bu tip elemanların, verilen geometriye kolaylıkla uyabilmesidir. Uygun bir geometri söz konusu olduğunda dörtgen elemanlar da kullanılmaktadır.

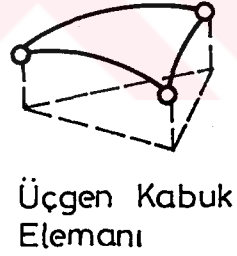
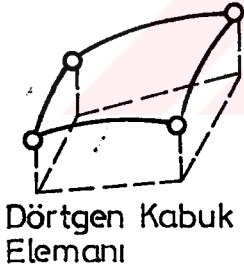
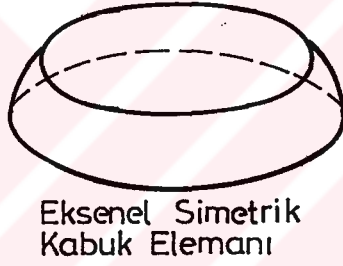
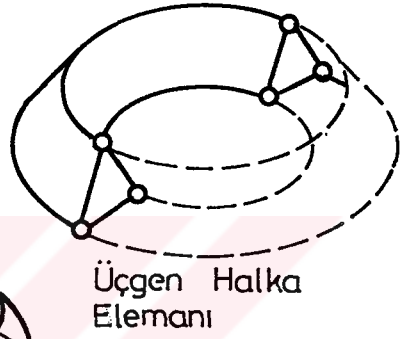
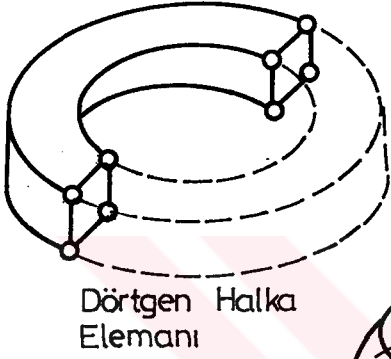
Sürekli ortamın nasıl bölüneceğine dair genel bir yöntem vermek olanaksız olmakla birlikte, bir kaç kural önerilebilir:

- a) Sürekli ortam olabildiğince düzenli şekiller elde edilecek tarzda bölünmeli ve bir elemanın kenarı diğerinden fazla uzun olmamalıdır.

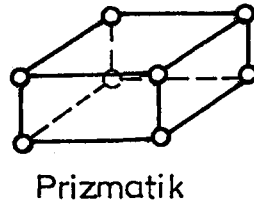
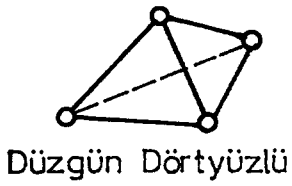
## DÜZLEM ELEMANLAR



## EKSENEL SİMETRİK ELEMANLAR



## ÜÇ BOYUTLU ELEMANLAR



Şekil 3.1 : Yaygın olarak kullanılan sonlu eleman tipleri

b) Gerilme yığılmalarının olabileceği bölgeler daha küçük elemanlara bölünmelidir.

c) Gerçek çözümü bilinmeyen bir problem ile ilgileniliyorsa, çözümün doğruluğuna karar verebilmek için, ayrı problem farklı sayıda eleman için çözülmeli ve eleman sayısı artırıldığında sonuçların yakınsaklığı kontrol edilmelidir.

### 3.4 Sonlu Elemanlar Yönteminde Temel Bağıntılar

Sonlu elemanlar yönteminde, eleman rijitlik matrisini elde etmenin birçok yolu vardır. Bu bölümde deplasman fonksiyonlarından yola çıkılarak rijitlik matrisinin elde edilmesi için izlenecek yol ele alınmıştır. *Sonlu elemanlar yöntemi* ile, bir elemanın veya sistemin rijitlik matrisinin elde edilmesinde

$$u = \langle p \rangle \{ a \} \quad (3.1)$$

bağıntısı ile başlanır. Burada,

- $u$  : Elemanın davranışını belirleyen genel deplasman fonksiyonu,
- $\langle p \rangle$  :  $x$  ve  $y$ 'ye bağlı, deplasman sayısı kadar bileşen içeren satır vektör,
- $\{ a \}$  : Katsayılar vektörüdür.

Elemanın düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler için ise,

$$\{ \Delta \} = [ A ] \{ a \} \quad (3.2)$$

ifadesi ile yazılabilir. (3.2) ifadesinde,

- $\{ \Delta \}$  : Elemanın düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme vektörü,
- $[ A ]$  :  $\{ \Delta \}$  düğüm noktası yer değiştirme vektörü ile  $\{ a \}$  katsayılar vektörünü birbirine bağlayan kare matristir.

(3.2)'den katsayılar vektörü

$$\{ a \} = [ A ]^{-1} \{ \Delta \} \quad ( 3.3 )$$

biçiminde elde edilir ve (3.1) ifadesinde yerleştirilirse, deplasman fonksiyonu

$$u = \langle p \rangle [ A ]^{-1} \{ \Delta \} \quad ( 3.4 )$$

şeklinde bulunur. Şekil fonksiyonu

$$N = \langle p \rangle [ A ]^{-1} \quad ( 3.5 )$$

olarak alındığında, (3.4) denklemi

$$u = \langle N \rangle \{ \Delta \} \quad ( 3.6 )$$

biçimini alacaktır. (3.6) ifadesinde yer alan  $\langle N \rangle$  şekil fonksiyonlarını içeren satır vektördür.

Bazı durumlarda, problemin çözümüne deplasman fonksiyonu seçilerek değil, doğrudan şekil fonksiyonlarının seçilmesi ile başlanabilir. Başka bir deyişle, elemanın davranışını şekil fonksiyonları yardımı ile düğüm noktalarının deplasmanları cinsinden ifade ederek çözüme başlamak da mümkündür.

İzoparametrik sonlu eleman formülasyonunda ise temel yaklaşım, eleman koordinatları ve eleman deplasmanlarını, elemanın doğal koordinat sistemini kullanarak ifade etmektir (Zienkiewicz, 1977; Bathe, 1982).

Bundan sonra deplasman ile şekil değiştirme arasındaki uygunluk şartından yararlanılarak, şekil değiştirmeler için

$$\{ \epsilon \} = [ B ] \{ \Delta \} \quad ( 3.7 )$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadede;

$\{\epsilon\}$  : Bir düğüm noktasına ait olan ve  $\{\epsilon\} = \{-w_{xx} \ -w_{yy} \ 2w_{xy}\}^T$  şeklinde tanımlanan şekil değiştirme vektörü,

$[B]$  : Düğüm noktası deplasmanlarını şekil değiştirmelere bağlayan,

$[B] = [-\langle N \rangle_{xx} \ -\langle N \rangle_{yy} \ 2\langle N \rangle_{xy}]^T$  biçiminde tanımlanan bir matristir.

Şekil değiştirmeler için elde edilen ( 3.7 ) denkleminde homojen, izotropik, lineer elastik malzemeler için gerilme - şekil değiştirme ilişkisi (*Hooke kanunu*),

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad (3.8)$$

şeklinde yazılır. (3.8) ifadesinde

$\{\sigma\}$  : Elemana ait gerilme vektörü,

$[E]$  : Elemana ait elastisite matrisidir.

Eleman için, elastik şekil değiştirme enerjisi ise, gerilme ve şekil değiştirmelerin bir fonksiyonu olarak,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.9) denkleminde,

$U$  : Elemanın şekil değiştirme enerjisi,

$V$  : Elemanın hacmi

$\{\epsilon\}^T$  :  $\{\epsilon\}$  vektörünün transpozesidir.

(3.9) ifadesinde yer alan gerilme ve şekil değiştirme terimleri için ( 3.7 ) ve ( 3.8 ) ifadeleri kullanılarak, (3.9) denklemi

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\}^T [B]^T [E] [B] \{\Delta\} dV \quad (3.10)$$

biçiminde elde edilir.

Şekil değiştirme enerjisini tanımlayan (3.10) denkleminde  $\{\Delta\}$  matrisi  $V$ 'ye bağlı olmadığından, integral dışına alınabilir. Böylece (3.10) ifadesi

$$U = \frac{1}{2} \{ \Delta \}^T \int_V [ B ]^T [ E ] [ B ] dV \{ \Delta \} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanabilecektir.

Şekil değiştirme enerjisinin (3.11) tanımından sonra, elemandaki toplam potansiyel enerjiyi yazabilmek için öncelikle, dış yüklerin potansiyel enerjisini belirlemek gerekecektir. Eleman için dış yüklerin potansiyel enerjisi

$$W = \{ \Delta \}^T \{ f \} \quad (3.12)$$

şeklinde olacaktır. Burada  $\{f\}$  elemanın düğüm noktalarının yük vektörüdür. Böylece, elemandaki toplam potansiyel enerji

$$I = U - W \quad (3.13)$$

biçiminde yazılabilecektir. (3.11) ve (3.12) ifadeleri (3.13) denkleminde yerlerine yazılacak olursa,

$$I = \frac{1}{2} \{ \Delta \}^T \int_V [ B ]^T [ E ] [ B ] dV \{ \Delta \} - \{ \Delta \}^T \{ f \} \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilecektir.

Elemandaki toplam potansiyel enerji için (3.14) ifadesi elde edildikten sonra, sistemde geometrik sınır şartlarını sağlayan tüm konumlar arasında, gerçek konumu yazmak gerekecektir. Bu konum, toplam potansiyel enerjiyi minimum yapan konum olup, bunun için gerekli durum

$$\frac{\partial I}{\partial \{ \Delta \}^T} = \int_V [ B ]^T [ E ] [ B ] dV \{ \Delta \} - \{ f \} = 0 \quad (3.15)$$

şartının sağlanmasıdır. Bu ifadeden yararlanılarak,  $\{ f \}$  kuvvet vektörü;

$$\{ f \} = \int_V [ B ]^T [ E ] [ B ] dV \{ \Delta \} \quad (3.16)$$

şeklinde yazılabilir. (3.16) denkleminde, elemanın rijitlik matrisi

$$[ k ] = \int_V [ B ]^T [ E ] [ B ] dV \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanabilir. Her bir eleman için elde edilen  $[ k ]$  rijitlik matrislerinden,  $[ K ]_s$  sistem rijitlik matrisine geçmek amacı ile kodlama yöntemi kullanılabilir. Böylece, tüm sistem için dış kuvvet vektörü

$$\{ F \}_s = [ K ]_s \{ \Delta \}_s \quad (3.18)$$

bağıntısı ile tanımlanabilir. Sisteme ait deplasmanlar ise,

$$\{ \Delta \}_s = [ K ]_s^{-1} \{ F \}_s \quad (3.19)$$

bağıntısıyla bulunabilir. Bu tarz sonlu eleman formülasyonu ile elde edilen deplasman değerleri, gerçeğe oldukça yakın çıkmaktadır. Ancak, sonuçların doğruluğunun arttırılması için,

- Eleman sayısının arttırılması,
- Eleman deplasmanları için seçilen polinomun derecesinin arttırılması,
- Elemanın serbestlik derecesinin, ya varolan düğüm noktalarına serbestlikler eklenerek ya da elemana düğüm noktaları eklenerek arttırılması önerilmektedir (Petyt, 1990).

Sonlu elemanlar yönteminde, (3.19) ifadesi yardımı ile sistemdeki tüm düğüm noktalarının deplasmanları bulunduktan sonra, eleman bazında işlem yapılır. Her bir eleman için şekil değiştirme ve gerilmeler, (3.7) ve (3.8) ifadelerinden yararlanılarak hesaplanır.



Ancak, pratikte elemandan elemana geçişte, gerilmelerde süreksizlikler görülmektedir. Eleman sayısının artırılması veya daha uygun eleman seçimi ile, aynı nokta için elde edilen gerilme değerleri arasındaki farklılıklar azalmaktadır. Bu sorunun çözümünde önerilen yollardan biri de söz konusu gerilme değerlerinin ortalamasının alınmasıdır.

Elemandaki bazı noktalarda bulunan gerilme değerleri gerçek çözüme diğer noktalarda bulunan değerlerden daha yakındır (Bathe, 1982). Örneğin kenar ortalarında da düğüm noktasına sahip bir dikdörtgen elemanda, söz konusu düğümler için bulunan gerilme değerleri gerçek çözüme oldukça yakındır.

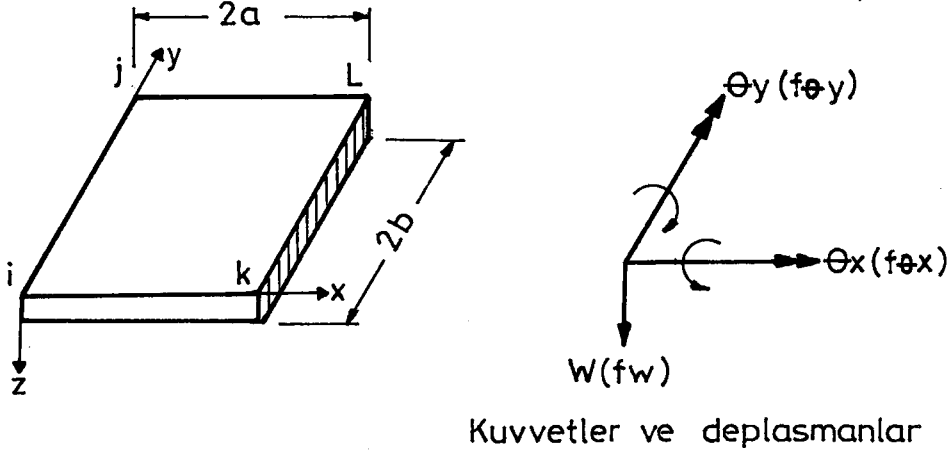
### 3.5 Plakların Eğilme Probleminin Çözümü İçin Sonlu Elemanlar Yönteminin Kullanıldığı Çalışmalar

Plakların eğilme probleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünde en yaygın olarak kullanılan eleman, her düğüm noktasında üç serbestlik derecesine sahip dikdörtgen elemandır ( Şekil 3.2 ). Bir düğüm noktasına ait serbestlikler (  $\Delta_i$  ) ve düğüm noktası kuvvetleri (  $f_i$  ),

$$\Delta_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix} \quad ( 3.20 )$$

$$f_i = \begin{Bmatrix} f_{w_i} \\ f_{\theta_{x_i}} \\ f_{\theta_{y_i}} \end{Bmatrix} \quad ( 3.21 )$$

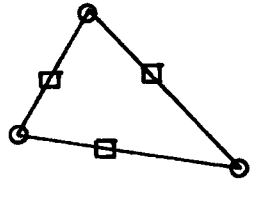
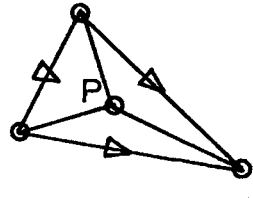
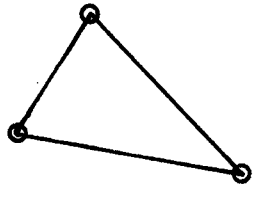
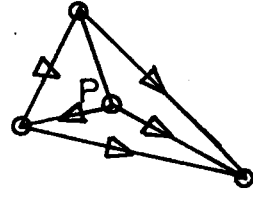
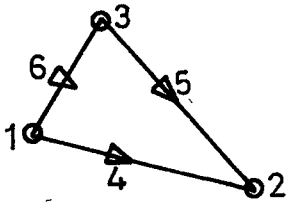
şeklinde belirlenebilir.  $w$  deplasmanı için, daha önce (3.1) bağıntısında belirtildiği gibi bir deplasman fonksiyonu seçilecektir (Ghali v.d., 1977; Zeinkiewicz, 1977).



Şekil 3.2 : Dikdörtgen plak elemanına ait düğüm noktası serbestlikleri ve düğüm noktası kuvvetleri

Şekil 3.2’de görülen dikdörtgen eleman için kullanılacak şekil fonksiyonları *Hermit polinomları* şeklinde de olabilir. Bu tarz şekil fonksiyonlarına dayanan bir eleman Bogner v.d., (1965) tarafından geliştirilmiş ve başarıyla kullanılmıştır (Zienkiewicz, 1977).

Zienkiewicz (1977), plakların eğilme probleminin, farklı sayıda düğüm noktasına ve farklı serbestlik derecesine sahip üçgen elemanlarla da çözülebileceğini göstermiştir (Şekil 3.3). Bu üçgen elemanların birleştirilmesi ile iç serbestlik derecelerine sahip olan veya olmayan dörtgen elemanlar yaratılmıştır (Şekil 3.4). İç serbestlik derecelerine sahip elemanlarda, üçgen elemana kıyasla gerçek değerlere yakınsaklığın arttığı gösterilmiştir (Clough v.d., 1968; Zienkiewicz, 1977).



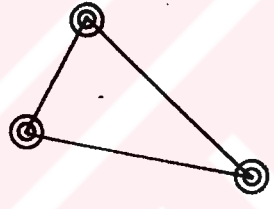
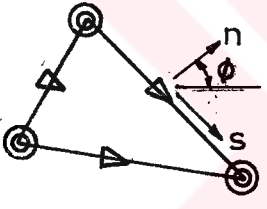
Serbestlik dereceleri

○  $(w, -\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x})_i$

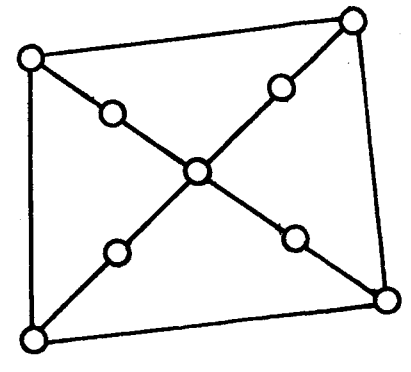
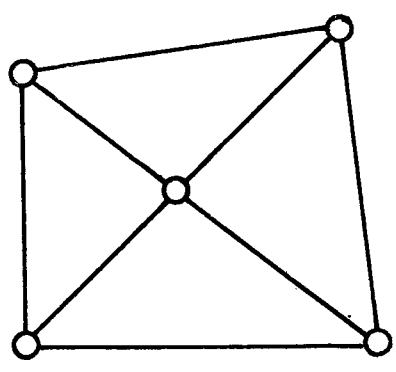
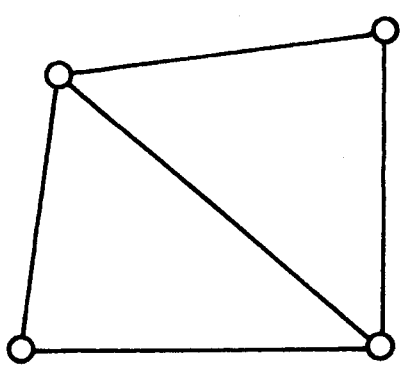
△  $(\frac{\partial w}{\partial n})_i$

□  $(w, \frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s})_i$

◎  $(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})_i$



Şekil 3.3 : Çeşitli üçgen plak elemanları



Şekil 3.4 : Bazı kompozit dörtgen elemanlar

Söz konusu elemanlarla, basit bir problem çözümlü, elde edilen sonuçların karşılaştırıldığı çalışmalar sonucunda, doğru sonuca yakınsama hızları farklı olsa da, tüm elemanların güvenle kullanılabilmesi gösterilmiştir (Clough v.d., 1965; Clough v.d., 1968; Razzaque, 1972, Zienkiewicz, 1977).

Plakların eğilme probleminin çözümünde, *karışık sonlu eleman yönteminin* geliştirildiği bir çalışmada ise, elemandaki deplasmanlar için polinomlar seçilmiş, gerilmeler de kısmen bağımsız, kısmen de deplasmanların fonksiyonu olarak alınmıştır. Oldukça basit olan bu yöntemde, eleman matrisleri küçük boyutludur. Aynı çalışma kapsamında, Hermann (1967) tarafından önerilen yöntemle, sözü edilen çalışmada geliştirilen yöntem arasındaki benzerlikler ve ayrımlar belirtilmiştir (Poceski, 1975).

Plakların eğilme probleminin sonlu eleman yöntemi ile çözümü için önerilen farklı tipteki elemanların bir değerlendirilmesinin yapıldığı bir başka çalışmada, gerçek çözüme yakınsaklığının olumlu olarak değerlendirildiği bir çok elemanın fazla sayıda serbestlik içerdiği, bu elemanların genelde doğrusal sistemler için geliştirildiği belirtilmiş ve bunların yerine, doğrusal sistemler için olduğu kadar doğrusal olmayan sistemler için de basit ve etkili bir şekilde kullanılacak her biri üç serbestlik derecesine sahip dört düğüm noktalı dikdörtgen bir eleman geliştirilerek, bu eleman bir kiriş, bir de plak probleminin çözümünde kullanılmış ve sonuçların yakınsaklığı gösterilmiştir (Hoghes v.d., 1977).

İdeal bir elemanın, rijitlik matrisinin nümerik integrasyona gerek duyulmadan basit bir şekilde elde edilebilmesi, daha doğru deplasman ve gerilme değerleri vermesi; sayısal sonuçların güvenilir olması gibi özelliklere sahip olması gereğinin belirtildiği bir çalışmada, bu kurallar gözönüne alınarak dörtgen bir eleman geliştirilmiştir. *Etkili dörtgen plak eğilme elemanı* olarak isimlendirilen bu eleman, basit mesnetli, sabit yayılı  $q$  yükü etkisi altındaki bir plağın çözümünde kullanılmış ve farklı sayıda eleman ile çözüm yapılarak elde edilen sonuçlar Ming v.d.,(1987) ve Ping v.d.,(1985) tarafından

yapılan çözümlerle kıyaslanarak, geliştirilen elemanın daha doğru sonuçlara yakınsadığı ve yakınsaklık hızının yüksek olduğu gösterilmiştir (He-xiang v.d., 1989).

### **3.6 Viskoelastik Problemlerin Çözümünde Sonlu Elemanlar Yönteminin Kullanılması ile İlgili Çalışmalar**

Karmaşık geometrilere sahip olan sistemlerde de, elastik durumda başarı ile kullanılan sonlu eleman yönteminin, viskoelastik problemler için de kullanılabilirliği White (1958), Zienkiewicz v.d., (1968) ve Webber (1969) tarafından gösterilmiştir. Daha sonra, Carpenter (1972) viskoelastik problem için, genel bir viskoelastik malzeme tanımına ve çok katlı integrasyon formüllerine izin veren bir formülasyon önermiştir (Carpenter, 1972).

Brilla (1974), viskoelastik malzemeli iki boyutlu problemlerin çözümünde sonlu eleman yönteminin geliştirildiği çalışmada, bir plak üzerindeki farklı noktaların zamana bağlı deplasmanlarını elde etmiştir (Brilla v.d.,1974).

İnce plakların, doğrusal olmayan stasyoner sünme eğilmesi problemine sonlu eleman yönteminin uygulandığı bir çalışmada, üçgen plak elemanları kullanılmış; önerilen yöntemin, gerek karmaşık geometri ve yükleme durumları, gerekse üç boyutlu problemler için de kolayca kullanılabileceği belirtilmiştir (Hrudey, 1973).

Sünme probleminin, sonlu elemanlar analizi ile çözümü için, mevcut yöntemlerden daha hızlı bir çözüm yönteminin geliştirildiğinin vurgulandığı bir çalışmada; plastik deplasmanlar ihmal edilerek, deplasmanlar elastik sünme ve ısı deplasmanlarının toplamı olarak ifade edilmiş ve zaman integrasyonu tekniği kullanılarak elde edilen sonuçlar, Snyder v.d.,(1981) tarafından sonlu elemanlar analizi ile bulunan sonuçlarla kıyaslanmıştır (Heaps v.d., 1986).

Sünme probleminin, sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünde gerekli olan malzeme modellemesi için hızlı, sayısal bir algoritmanın sunulduğu bir çalışmada; birinci, ikinci veya üçüncü safha sünme davranışını temsil edebilen genel bir bünye denklemi geliştirilmiş, söz konusu algoritmanın geniş boyutlu sınır değer problemlerinin nonlinear sonlu eleman formülasyonu ile çözümünde de kullanılabileceği belirtilmiş, yöntemin hızlı, güvenilir ve doğru olduğu çok sayıda sayısal örnek üzerinde de gösterilmiştir (Whirley v.d., 1992).



## 4. YÖNTEM

### 4.1. Analitik Yöntem

#### 4.1.1. Doğrusal Olmayan Viskoelastik Malzemeli Plaklarda Sabit Gerilme Durumunda Gerilme-Deformasyon-Zaman İlişkisi

Tek boyutlu elemanlar için, sabit gerilme durumunda geçerli kabul edilen ve

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left\{ A_0(\sigma_0) + \sum_{i=1}^n A_i(\sigma_0) f_i(t) \right\} \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilen gerilme - deformasyon - zaman ilişkisi bu çalışmanın da temelini oluşturmaktadır. (4.1) ifadesinde  $\epsilon(t)$  zamanla değişen deformasyon,  $\sigma_0$  sabit gerilme değeri,  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) malzemenin gerilme değerine bağlı mekanik özellikleri ve  $f_i(t)$  de sünme fonksiyonlarının ifadesidir.

(4.1) ifadesi, doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plak deformasyonları için

$$\epsilon_x(t) = [\sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0}] \left\{ A_{0x}(\sigma_{x0}, \sigma_{y0}) + \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma_{x0}, \sigma_{y0}) f_i(t) \right\} \quad (4.2)$$

$$\epsilon_y(t) = [\sigma_{y0} - \nu \sigma_{x0}] \left\{ A_{0y}(\sigma_{x0}, \sigma_{y0}) + \sum_{i=1}^n A_{iy}(\sigma_{x0}, \sigma_{y0}) f_i(t) \right\} \quad (4.3)$$

$$-\gamma_{xy}(t) = [2(1+\nu) \tau_{xy}] \left\{ A_{0xy}(\tau_{xy0}) + \sum_{i=1}^n A_{ixy}(\tau_{xy0}) f_i(t) \right\} \quad (4.4)$$

şeklinde ifade edilebilir.

(4.2), (4.3) ve (4.4) denklemlerinde  $\epsilon_x(t)$ ,  $\epsilon_y(t)$  ve  $\gamma_{xy}(t)$  zamana bağlı olarak değişen plak deformasyonlarını,  $\nu$  Poisson oranını,  $\sigma_{x0}$ ,  $\sigma_{y0}$  ve  $\tau_{xy0}$  sabit gerilme değerlerini,  $A_{ix}$ ,  $A_{iy}$  ve  $A_{ixy}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) malzemenin gerilme değerine bağlı mekanik özelliklerini

tanımlamaktadır. Sıcaklık sabit kabul edildiğinden,  $A_i$  malzeme katsayıları  $T$  sıcaklık değişkenini içermemektedir.

( 4.2 ), ( 4.3 ) ve ( 4.4 ) ifadelerinde,

$$\begin{aligned} n = 0 \quad , \quad f_0(t) = 1 \\ A_{0x}(\sigma_{x0}, \sigma_{y0}) = A_{0x}(\sigma_0) \quad , \quad A_{0y}(\sigma_{x0}, \sigma_{y0}) = A_{0y}(\sigma_0) , \\ A_{0x}(\sigma_0) = A_{0y}(\sigma_0) = A_{0xy}(\tau_{xy0}) = \frac{1}{E} \end{aligned} \quad ( 4.5 )$$

alınarak, lineer elastik malzemeli plak için geçerli bir ilişki elde edilmiş olur.( 4.5 ) ifadesinde  $E$  malzemenin elastisite modülünü göstermektedir. (4.2), (4.3) ve (4.4) denklemleri  $n > 1$  ve malzeme katsayıları

$$\begin{aligned} A_{ix}(\sigma_0) &= \alpha_{ix} \\ A_{iy}(\sigma_0) &= \alpha_{iy} \quad (i= 0, 1, 2, \dots n) \\ A_{ixy}(\tau_{xy0}) &= \alpha_{ixy} \end{aligned} \quad ( 4.6 )$$

olarak kabul edildiğinde

$$\epsilon_x(t) = [ \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0} ] \left\{ \alpha_{0x} + \sum_{i=1}^n \alpha_{ix} f_i(t) \right\} \quad ( 4.7 )$$

$$\epsilon_y(t) = [ \sigma_{y0} - \nu \sigma_{x0} ] \left\{ \alpha_{0y} + \sum_{i=1}^n \alpha_{iy} f_i(t) \right\} \quad ( 4.8 )$$

$$-\gamma_{xy}(t) = [ 2(1 + \nu) \tau_{xy} ] \left\{ \alpha_{0xy} + \sum_{i=1}^n \alpha_{ixy} f_i(t) \right\} \quad ( 4.9 )$$

şeklinde yazılarak lineer viskoelastik malzemeli plaklar için geçerli hale getirilmiş olur.

$f_i(t)$  sünme fonksiyonları için, sünme deneylerinde zamana bağlı davranışı oldukça iyi yansıtan,



$$f_0(t) = 1, f_i(t) = 1 - e^{-q_i t} \quad (4.10)$$

ifadeleri tanımlanabilir. (4.10)'daki  $q_i$  katsayıları, saniye, dakika, saat, gün, v.b. boyutlarında, her biri bir zaman aralığını kapsayacak şekilde seçilir.

Değişik  $\sigma_{x0}$ ,  $\sigma_{y0}$  ve  $\tau_{xy0}$  değerleri için,  $A_{ix}$ ,  $A_{iy}$  ve  $A_{ixy}$  katsayılarının alacağı değerleri Gallerkin yöntemini kullanarak elde etmek mümkündür.  $A_{ix}$ ,  $A_{iy}$ ,  $A_{ixy}$  deney süresi boyunca ortalama hatayı minimum yapacak şekilde seçilmelidir. Deneylerden elde edilecek gerçek sünme değerleri  $\epsilon_x(t)$ ,  $\epsilon_y(t)$  ve  $\gamma_{xy}(t)$  ve doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plak için sünme deformasyonları

$$\dot{\epsilon}_{1x}(t) = [ \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0} ] \{ A_{0x}(\sigma_0) + \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma_0) f_i(t) \} \quad (4.11)$$

$$\dot{\epsilon}_{1y}(t) = [ \sigma_{y0} - \nu \sigma_{x0} ] \{ A_{0y}(\sigma_0) + \sum_{i=1}^n A_{iy}(\sigma_0) f_i(t) \} \quad (4.12)$$

$$-\dot{\gamma}_{1xy}(t) = [ 2(1 + \nu) \tau_{xy} ] \{ A_{0xy}(\tau_{xy0}) + \sum_{i=1}^n A_{ixy}(\tau_{xy0}) f_i(t) \} \quad (4.13)$$

olarak alındığında ortalama hata değerleri ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_{xy}$ ),

$$E_x = \int_0^{t_D} [ \epsilon_{1x}(t) - \epsilon_x(t) ]^2 dt \quad (4.14)$$

$$E_y = \int_0^{t_D} [ \epsilon_{1y}(t) - \epsilon_y(t) ]^2 dt \quad (4.15)$$

$$E_{xy} = \int_0^{t_D} [ \gamma_{1xy}(t) - \gamma_{xy}(t) ]^2 dt \quad (4.16)$$

şeklinde ifade edilir. ( 4.14 ), ( 4.15 ) ve ( 4.16 ) denklemlerinde  $t_D$  deney süresini göstermekte olup, hataların minimum olabilmesi için,

$$\frac{\partial E_x}{\partial A_{jx}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial E_y}{\partial A_{jy}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial E_{xy}}{\partial A_{jxy}} = 0 \quad ( 4.17 )$$

koşulları sağlanmalıdır. ( 4.14 ) ifadesinin  $A_{jx}$  e göre türevi alındığında,

$$\frac{\partial E_x}{\partial A_{jx}} = 2 \int_0^{t_D} [ \epsilon_{1x}(t) - \epsilon_x(t) ] \frac{\partial \epsilon_{1x}(t)}{\partial A_{jx}} dt = 0 \quad , \quad j=1,2,\dots,n \quad ( 4.18 )$$

elde edilir. ( 4.18 ) denklemini

$$\frac{\partial E_x}{\partial A_{jx}} = 2 \int_0^{t_D} [ \epsilon_{1x}(t) \frac{\partial \epsilon_{1x}(t)}{\partial A_{jx}} - \epsilon_x(t) \frac{\partial \epsilon_{1x}(t)}{\partial A_{jx}} ] dt = 0 \quad ( 4.19 )$$

şeklinde yazılır. ( 4.19 ) un sağ tarafındaki ilk terim

$$\int_0^{t_D} \epsilon_{1x}(t) \frac{\partial \epsilon_{1x}(t)}{\partial A_{jx}} dt = [ \sigma_{x0} - v \sigma_{y0} ]^2 \int_0^{t_D} \{ A_{0x}(\sigma_0) + \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma_0) f_i(t) \} f_j(t) dt \quad ( 4.20 )$$

veya

$$\int_0^{t_D} \epsilon_{1x}(t) \frac{\partial \epsilon_{1x}(t)}{\partial A_{jx}} dt = [ \sigma_{x0} - v \sigma_{y0} ]^2 \{ A_{0x}(\sigma_0) \int_0^{t_D} f_j(t) dt + \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma_0) \int_0^{t_D} f_i(t) f_j(t) dt \} \quad ( 4.21 )$$

şeklinde elde edilir. ( 4.21 ) denklemini,

$$\int_0^{t_D} f_j(t) dt = F_{0j} \quad (4.22)$$

ve

$$\int_0^{t_D} f_i(t) f_j(t) dt = F_{ij} \quad (4.23)$$

eşitlikleri gözönüne alındığında

$$\int_0^{t_D} \epsilon_{ix}(t) \frac{\partial \epsilon_{ix}(t)}{\partial A_{jx}} dt = [ \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0} ]^2 \{ A_{0x}(\sigma_0) F_{0j} + \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma_0) F_{ij} \} \quad (4.24)$$

şeklini alacaktır. (4.19) un sağ tarafındaki ikinci terim ise

$$\int_0^{t_D} \epsilon_x(t) \frac{\partial \epsilon_{ix}(t)}{\partial A_{jx}} dt = [ \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0} ] \int_0^{t_D} \epsilon_x(t) f_j(t) dt \quad (4.25)$$

şeklinde ifade edilir. (4.25) denkleminde,

$$\int_0^{t_D} \epsilon_x(t) f_j(t) dt = M_{xj} \quad (4.26)$$

alınarak, (4.24) ve (4.25) denklemleri buna bağlı olarak ifade edilirse (4.19) denklemi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial A_{jx}} &= [ \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0} ]^2 \{ A_{0x}(\sigma_0) F_{0j} \\ &+ \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma_0) F_{ij} \} - [ \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0} ] M_{xj} = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

veya

$$[ \sigma_{x0} + \nu \sigma_{y0} ] \{ A_{0x}(\sigma_0) F_{0j} + \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma_0) F_{ij} \} = M_{xj} \quad (4.28)$$

şeklinde yazılabilir. (4.28) denkleminin matris formu

$$[ \sigma_0 - \nu \sigma_{y0} ] \begin{bmatrix} F_{00} & F_{01} & \dots & F_{0n} \\ F_{10} & F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{n0} & F_{n1} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0x} \\ A_{1x} \\ \cdot \\ A_{nx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{x0} \\ M_{x1} \\ \cdot \\ M_{xn} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

şeklinde. Buradan,  $F_{ij}$  katsayıları,  $f_i(t)$  fonksiyonları, (4.10) da belirtildiği şekilde alınarak, doğrudan integrasyonla ve  $M_{xj}$  değerleri de, bir deneyin  $\epsilon_x(t)$  sünme değerleri bilindiğinde, Yamuk veya Simpson kuralı gibi sayısal integrasyon teknikleri ile hesaplanabileceğinden  $\sigma_{x0}$  ve  $\sigma_{y0}$  gerilmeleri için  $A_{0x}, A_{1x}, \dots, A_{nx}$  katsayıları

$$\{ A_x \} = \frac{1}{[ \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0} ]} [ F ]^{-1} \{ M \} \quad (4.30)$$

denklemden elde edilebilir.

Benzer biçimde  $A_{iy}(\sigma_0)$  ve  $A_{ixy}(\tau_{xy0})$  katsayıları

$$\{ A_y \} = \frac{1}{[ \sigma_{y0} - \nu \sigma_{x0} ]} [ F ]^{-1} \{ M \} \quad (4.31)$$

$$\{ A_{xy} \} = \frac{1}{2(1 + \nu) \tau_{xy0}} [ F ]^{-1} \{ M \} \quad (4.32)$$

denklemlerinden hesaplanabilir.

Bu işlemler değişik  $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \dots, \sigma_{xk}; \sigma_{y1}, \sigma_{y2}, \dots, \sigma_{yk}$  ve  $\tau_{xy1}, \tau_{xy2}, \dots, \tau_{xyk}$  gerilmeleri için yapıldığında,  $A_{ix}, A_{iy}$  ve  $A_{ixy}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) katsayılarının değişik gerilmelerdeki

değerleri elde edilmiş olur.  $A_{ix}$ ,  $A_{iy}$  ve  $A_{ixy}$  katsayılarının elde edilen tüm değerleri için interpolasyon yapılarak her biri için sırası ile en uygun  $A_{ix}(\sigma)$ ,  $A_{iy}(\sigma)$  ve  $A_{ixy}(\tau_{xy})$  fonksiyonları bulunabilir.

#### 4.1.2. Doğrusal Olmayan Viskoelastik Malzemeli Plaklarda Değişken Gerilme Durumunda Gerilme - Deformasyon - Zaman İlişkisi

Değişken gerilme hali için uygun bir gerilme - deformasyon - zaman ilişkisi, ( 4.2 ), (4.3) ve ( 4.4 ) denklemlerinden yararlanılarak belirlenebilir. Bu amaçla,  $\sigma_{x1}$ ,  $\sigma_{y1}$  ve  $\tau_{xy1}$  gerilmeleri,

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x0} + \Delta \sigma_x \quad ( 4.33 )$$

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y0} + \Delta \sigma_y \quad ( 4.34 )$$

$$\tau_{xy1} = \tau_{xy0} + \Delta \tau_{xy} \quad ( 4.35 )$$

şeklinde tanımlandığında, ( 4.2 ) ifadesi;

$$\epsilon_x(t) = [ \sigma_{x1} - \nu \sigma_{y1} ] \left\{ A_{0x}(\sigma_1) + \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma_1) f_i(t) \right\} \quad ( 4.36 )$$

şeklini alacaktır. ( 4.36 ) denklemi, ( 4.33 ) ve ( 4.34 ) ifadelerinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \epsilon_x(t) &= [ \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0} ] \left\{ A_{0x}(\sigma_0) + \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma_0) f_i(t) \right\} \\ &+ \left\{ [ \sigma_{x1} - \nu \sigma_{y1} ] A_{0x}(\sigma_1) - [ \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0} ] A_{0x}(\sigma_0) \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ [ \sigma_{x1} - \nu \sigma_{y1} ] A_{ix}(\sigma_1) - [ \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0} ] A_{ix}(\sigma_0) \right\} f_i(t) \end{aligned} \quad ( 4.37 )$$

şeklinde tanımlanır. (4.37) denklemindeki ilk terim,  $\sigma_{x0}$  ve  $\sigma_{y0}$  değerlerine bağlı deformasyon miktarını tanımlamaktadır. İkinci ve üçüncü terimlerin ise,  $\Delta \sigma_x$  ve  $\Delta \sigma_y$  artışından dolayı deformasyonlardaki değişimi gösterdiği kabul edilir.

Gerilmelerdeki  $\Delta\sigma_x$  ve  $\Delta\sigma_y$  artışının  $t = 0$  da uygulanmayıp  $t = \Delta t = \tau_1$  de uygulandığı varsayıldığında,

$$\sigma_{x0} = \sigma_x(0) , \quad \sigma_{y0} = \sigma_y(0) \quad \sigma_{x1} = \sigma_x(\tau_1) , \quad \sigma_{y1} = \sigma_y(\tau_1) \quad (4.38)$$

kabulleri altında,  $\epsilon_x(t)$  deformasyonu,  $H(t)$  birim adım fonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} \epsilon_x(t) = & [ \sigma_x(0) - \nu \sigma_y(0) ] \{ A_{0x}(\sigma(0)) \\ & + \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma(0)) f_i(t) \} H(t) + \{ [ \sigma_x(\tau_1) - \nu \sigma_y(\tau_1) ] A_{0x}(\sigma(\tau_1)) \\ & - [ \sigma_x(0) - \nu \sigma_y(0) ] A_{0x}(\sigma_0) \} + \sum_{i=1}^n \{ [ \sigma_x(\tau_1) - \nu \sigma_y(\tau_1) ] A_{ix}(\sigma(\tau_1)) \\ & - [ \sigma_x(0) - \nu \sigma_y(0) ] A_{ix}(\sigma(0)) \} f_i(t - \tau_1) \} H(t - \tau_1) \} \end{aligned} \quad (4.39)$$

şeklinde ifade edilir.  $t = 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, k\Delta t$  değerleri sırası ile  $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_k$  olarak tanımlanır ve bu zamanlarda  $\Delta\sigma_x$  ve  $\Delta\sigma_y$  gerilme artışlarının olduğu kabul edilirse (4.39) denkleminde,

$$\begin{aligned} & \{ [ \sigma_x(\tau_j) - \nu \sigma_y(\tau_j) ] A_{0x}(\sigma(\tau_j)) - [ \sigma_x(\tau_{j-1}) - \nu \sigma_y(\tau_{j-1}) ] \\ & A_{0x}(\sigma(\tau_{j-1})) + \sum_{i=1}^n \{ [ \sigma_x(\tau_j) - \nu \sigma_y(\tau_j) ] A_{ix}(\sigma(\tau_j)) \\ & - [ \sigma_x(\tau_{j-1}) - \nu \sigma_y(\tau_{j-1}) ] A_{ix}(\sigma(\tau_{j-1})) \} f_i(t - \tau_j) \} H(t - \tau_j) \\ & \quad j = 2, 3, \dots, k \end{aligned} \quad (4.40)$$

tipi terimlerin eklenmesi gerekecektir. Böylece (4.40) denkleminde

$$[ \sigma_x(\tau_j) - \nu \sigma_y(\tau_j) ] A_{ix}(\sigma(\tau_j)) = K_{ix}(\tau_j) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (4.41)$$

olarak alınırsa,  $\epsilon_x(t)$  deformasyonu,

$$\begin{aligned} \epsilon_x(t) = & \{ K_{0x}(0) + \sum_{i=1}^n K_{ix}(0) f_i(t) \} H(t) \\ & + \{ \Delta K_{0x}(\tau_1) + \sum_{i=1}^n \Delta K_{ix}(\tau_1) f_i(t - \tau_1) \} H(t - \tau_1) \\ & + \dots + \{ \Delta K_{0x}(\tau_k) + \sum_{i=1}^n \Delta K_{ix}(\tau_k) f_i(t - \tau_k) \} H(t - \tau_k) \end{aligned} \quad (4.42)$$

şeklinde elde edilecektir. (4.42) denklemini  $\Delta t$  'nin sıfıra yaklaşması durumundaki,  $\sigma_x(t)$  ve  $\sigma_y(t)$  sürekli fonksiyonları için (4.41) ifadesi,

$$\Delta K_{ix}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} K_{ix}(\tau) d\tau \quad (4.43)$$

şeklinde olacağından,

$$\begin{aligned} \epsilon_x(t) = & \{ K_{0x}(0) + \sum_{i=1}^n K_{ix}(0) f_i(t) \} \\ & + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} K_{0x}(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} K_{ix}(\tau) f_i(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.44)$$

biçiminde ifade edilebilir. (4.44) denklemindeki integraller kısmi integrasyon ile hesaplanacak olursa,

$$\begin{aligned} \epsilon_x(t) = & \{ K_{0x}(0) + \sum_{i=1}^n K_{ix}(0) f_i(t) \} + K_{0x}(t) \Big|_0^t + \\ & \sum_{i=1}^n K_{ix}(t) f_i(t - \tau) \Big|_0^t - \sum_{i=1}^n \int_0^t K_{ix}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.45)$$

şeklinde elde edilir. (4.45) denklemini, (4.41) eşitliği gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned} \epsilon_x(t) = & [ \sigma_x(t) - v \sigma_y(t) ] \{ A_{0x}(\sigma(t)) + \sum_{i=1}^n A_{ix}(\sigma(t)) f_i(0) \} \\ & - \sum_{i=1}^n \int_0^t [ \sigma_x(\tau) - v \sigma_y(\tau) ] A_{ix}(\sigma(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.46)$$

biçiminde yazılabilir. (4.46) denklemini  $f_i(0) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) olduğundan

$$\begin{aligned} \epsilon_x(t) = & [ \sigma_x(t) - v \sigma_y(t) ] A_{0x}(\sigma(t)) \\ & - \sum_{i=1}^n \int_0^t [ \sigma_x(\tau) - v \sigma_y(\tau) ] A_{ix}(\sigma(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.47)$$

şeklinde tanımlamak da mümkündür. Benzer biçimde,  $\epsilon_y(t)$  ve  $\gamma_{xy}(t)$  ifadeleri de,

$$\begin{aligned} \epsilon_y(t) &= [ \sigma_y(t) - \nu \sigma_x(t) ] A_{0y}(\sigma(t)) \\ - \sum_{i=1}^n \int_0^t [ \sigma_y(\tau) - \nu \sigma_x(\tau) ] A_{iy}(\sigma(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} - \gamma_{xy}(t) &= [ 2(1 + \nu) \tau_{xy}(t) ] A_{0xy}(\tau_{xy}(t)) \\ - \sum_{i=1}^n \int_0^t [ 2(1 + \nu) \tau_{xy}(\tau) ] A_{ixy}(\tau_{xy}(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.49)$$

şeklinde elde edilebilir.  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ve  $\tau_{xy}$  gerilmelerinin zamana bağlı değişimi bilindiğinde, (4.30), (4.31) ve (4.32) denklemleri kullanılarak  $A_{ix}(\sigma(\tau))$ ,  $A_{iy}(\sigma(\tau))$  ve  $A_{ixy}(\tau_{xy}(\tau))$  değerleri elde edilebileceğinden, değişken gerilme durumunda, doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plak için  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  deformasyonlarının zamana bağlı ifadeleri (4.47), (4.48) ve (4.49) bağıntılarından elde edilebilir.

(4.47), (4.48) ve (4.49) ifadeleri, (4.5) eşitlikleri göz önüne alındığında,

$$\epsilon_x(t) = \frac{1}{E} [ \sigma_x(t) - \nu \sigma_y(t) ] \quad (4.50)$$

$$\epsilon_y(t) = \frac{1}{E} [ \sigma_y(t) - \nu \sigma_x(t) ] \quad (4.51)$$

$$- \gamma_{xy}(t) = \frac{1}{E} [ 2(1 + \nu) \tau_{xy}(t) ] \quad (4.52)$$

şeklinde Hooke kanununu ve

$$n > 1, \quad A_{ix}(\sigma) = \alpha_{ix}, \quad A_{iy}(\sigma) = \alpha_{iy}, \quad A_{ixy}(\tau_{xy}) = \alpha_{ixy}$$



$$\alpha_{0x} = \varphi_x(0), \quad \varphi_x(t) = \varphi_x(0) + \sum_{i=1}^n \alpha_{ix} f_i(t)$$

$$\alpha_{0y} = \varphi_y(0), \quad \varphi_y(t) = \varphi_y(0) + \sum_{i=1}^n \alpha_{iy} f_i(t)$$

$$\alpha_{0xy} = \varphi_{xy}(0), \quad \varphi_{xy}(t) = \varphi_{xy}(0) + \sum_{i=1}^n \alpha_{ixy} f_i(t)$$

olarak kabul edildiğinde ise, ( 4.47 ), ( 4.48 ) ve ( 4.49 ) ifadeleri,

$$\epsilon_x(t) = [\sigma_x(t) - \nu \sigma_y(t)] \varphi_x(0) + \int_0^t [\sigma_x(\tau) - \nu \sigma_y(\tau)] \sum_{i=1}^n \alpha_{ix} \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t-\tau) d\tau$$

$$= [\sigma_x(t) - \nu \sigma_y(t)] \varphi_x(0) - \int_0^t [\sigma_x(\tau) - \nu \sigma_y(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_x(t-\tau) d\tau \quad ( 4.51 )$$

$$\epsilon_y(t) = [\sigma_y(t) - \nu \sigma_x(t)] \varphi_y(0) + \int_0^t [\sigma_y(\tau) - \nu \sigma_x(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_y(t-\tau) d\tau \quad ( 4.52 )$$

$$-\gamma_{xy}(t) = [2(1+\nu)\tau_{xy}(t)] \varphi_{xy}(0) - \int_0^t [2(1+\nu)\tau_{xy}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_{xy}(t-\tau) d\tau \quad ( 4.53 )$$

şeklinde lineer viskoelastik malzemeli plaklar için kullanılan Boltzmann süperpozisyon prensibini vermektedir.

#### 4.1.3 Doğrusal Olmayan Viskoelastik Malzemeli Plaklarda Yumuşama Fonksiyonları Kullanılması Durumunda Gerilme - Deformasyon - Zaman İlişkisi

Yumuşama kavramı ile çalışılması gerektiğinde  $\epsilon_{x0}$ ,  $\epsilon_{y0}$ ,  $\gamma_{xy0}$  deformasyonları sonucu oluşan  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  gerilmelerinin zamana bağlı ifadesi, deformasyonların mertebesine bağlı olarak malzemenin mekanik özellikleri  $\{ B_{ix}, B_{iy}, B_{ixy} (i=0,1,2,...n) \}$  ve *yumuşama fonksiyonları*  $\{ g_i(t) \}$  cinsinden,

$$\sigma_x(t) = \frac{1}{(1-\nu^2)} [ \epsilon_{x0} + \nu\epsilon_{y0} ] \{ B_{0x}(\epsilon_0) + \sum_{i=1}^n B_{ix}(\epsilon_0) g_i(t) \} \quad (4.54)$$

$$\sigma_y(t) = \frac{1}{(1-\nu^2)} [ \epsilon_{y0} + \nu\epsilon_{x0} ] \{ B_{0y}(\epsilon_0) + \sum_{i=1}^n B_{iy}(\epsilon_0) g_i(t) \} \quad (4.55)$$

$$\tau_{xy}(t) = \frac{1}{2(1+\nu)} [-\gamma_{xy0}] \{ B_{0xy}(\gamma_{xy0}) + \sum_{i=1}^n B_{ixy}(\gamma_{xy0}) g_i(t) \} \quad (4.56)$$

şeklinde tanımlanabilir. Yumuşama davranışını en uygun şekilde yansıtan  $g_i(t)$  fonksiyonları,

$$g_i(t) = e^{-t/\lambda_i}, \quad g_0(t) = 1, \quad g_i(0) = 1 \quad (4.57)$$

şeklinde seçilebilir. Buna göre örneğin  $\sigma_x$  gerilmesinin,  $t=0$  ve  $t=\infty$ 'daki değeri, sırası ile

$$\sigma_x(0) = \frac{1}{1-\nu^2} [ \epsilon_{x0} + \nu\epsilon_{y0} ] \{ B_{0x}(\epsilon_0) + \sum_{i=1}^n B_{ix}(\epsilon_0) \}$$

$$\sigma_x(\infty) = \frac{1}{1-\nu^2} [ \epsilon_{x0} + \nu\epsilon_{y0} ] B_{0x}(\epsilon_0) \quad (4.58)$$

şeklinde elde edilir. (4.54), (4.55) ve (4.56) ifadelerinden, 4.1.2 bölümünde kullanılan yöntemin uygulanması halinde, değişken deformasyon durumunda  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  gerilmeleri için,

$$\sigma_x(t) = \frac{1}{1-\nu^2} \{ [ \epsilon_x(t) + \nu \epsilon_y(t) ] \{ B_{0x}(\epsilon(t)) + \sum_{i=1}^n B_{ix}(\epsilon(t)) \} - \sum_{i=1}^n \int_0^t [ \epsilon_x(\tau) + \nu \epsilon_y(\tau) ] B_{ix}(\epsilon(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} g_i(t-\tau) d\tau \} \quad (4.59)$$

$$\sigma_y(t) = \frac{1}{1-\nu^2} \{ [ \epsilon_y(t) + \nu \epsilon_x(t) ] \{ B_{0y}(\epsilon(t)) + \sum_{i=1}^n B_{iy}(\epsilon(t)) \} - \sum_{i=1}^n \int_0^t [ \epsilon_y(\tau) + \nu \epsilon_x(\tau) ] B_{iy}(\epsilon(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} g_i(t-\tau) d\tau \} \quad (4.60)$$

$$\tau_{xy}(t) = \frac{1}{2(1+\nu)} \{ [ -\gamma_{xy}(t) ] \{ B_{0xy}(\gamma_{xy}(t)) + \sum_{i=1}^n B_{ixy}(\gamma_{xy}(t)) \} - \sum_{i=1}^n \int_0^t [ -\gamma_{xy}(\tau) ] B_{ixy}(\gamma_{xy}(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} g_i(t-\tau) d\tau \} \quad (4.61)$$

şeklinde gerilme - deformasyon - zaman ilişkileri elde edilir.

(4.59), (4.60) ve (4.61) denklemleri,  $g_i(t)=1$ ,  $B_{ix}(\epsilon) = B_{iy}(\epsilon) = B_{ixy}(\gamma) = B_i = \text{sabit}$  ve  $\{ B_0 + \Sigma B_i \} = E$  olarak kabul edildiğinde ise,

$$\sigma_x(t) = \frac{E}{1-\nu^2} [ \epsilon_x(t) + \nu \epsilon_y(t) ]$$

$$\sigma_y(t) = \frac{E}{1-\nu^2} [ \epsilon_y(t) + \nu \epsilon_x(t) ]$$

$$\tau_{xy}(t) = \frac{E}{2(1+\nu)} [ -\gamma_{xy}(t) ] \quad (4.62)$$

şeklinde Hooke kanununu verir. İfadelerde yer alan parametre değerleri,

$$B_{ix}(\epsilon) = \beta_{ix} \quad , \quad B_{iy}(\epsilon) = \beta_{iy} \quad , \quad B_{ixy}(\gamma_{xy}) = \beta_{ixy}$$

$$\Psi_x(0) = \beta_{0x} + \sum_{i=1}^n \beta_{ix}, \quad \Psi_y(0) = \beta_{0y} + \sum_{i=1}^n \beta_{iy}, \quad \Psi_{xy}(0) = \beta_{0xy} + \sum_{i=1}^n \beta_{ixy}$$

$$\Psi_x(t) = \beta_{0x} + \sum_{i=1}^n \beta_{ix} g(t), \quad \Psi_y(t) = \beta_{0y} + \sum_{i=1}^n \beta_{iy} g(t),$$

$$\text{ve } \Psi_{xy}(t) = \beta_{0xy} + \sum_{i=1}^n \beta_{ixy} g(t)$$

olarak alındığında ise, gerilme değerleri,

$$\sigma_x(t) = \frac{1}{1-\nu^2} \{ [\epsilon_x(t) + \nu \epsilon_y(t)] \Psi_x(0) - \int_0^t [\epsilon_x(\tau) + \nu \epsilon_y(\tau)] \sum_{i=1}^n \beta_{ix} \frac{\partial}{\partial \tau} g_i(t-\tau) d\tau \}$$

$$= \frac{1}{1-\nu^2} \{ [\epsilon_x(t) + \nu \epsilon_y(t)] \Psi_x(0) - \int_0^t [\epsilon_x(\tau) + \nu \epsilon_y(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t-\tau) d\tau \} \quad (4.63)$$

$$\sigma_y(t) = \frac{1}{(1-\nu^2)} \{ [\epsilon_y(t) + \nu \epsilon_x(t)] \Psi_y(0) - \int_0^t [\epsilon_y(\tau) + \nu \epsilon_x(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t-\tau) d\tau \} \quad (4.64)$$

$$\tau_{xy}(t) = \frac{1}{2(1+\nu)} \{ [-\gamma_{xy}(t)] \Psi_{xy}(0) - \int_0^t [-\gamma_{xy}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t-\tau) d\tau \} \quad (4.65)$$

ifadeleri ile belirlenebilir. Lineer olmayan viskoelastik malzemeli plak çözümünde, denge ve uygunluk denklemleri, Hooke kanunu yerine (4.47), (4.48), (4.49) ya da (4.63), (4.64), (4.65) denklemleri ile takviye edildiğinde sınır koşulları ile birlikte, problemin çözümü için gerekli denklem sayısı tamamlanmış olur.

#### 4.1.4 Doğrusal Olmayan Viskoelastik Malzemeli Plaklarda Moment - Eğrilik - Zaman İlişkisinin Yumuşama Fonksiyonları Kullanılarak Elde Edilmesi

Yüzeğe dik yükler altında eğilmeye maruz bir plağın, herhangi bir kesitindeki moment değerleri sabit olmakla birlikte, doğrusal (lineer) olmayan viskoelastik malzemeli plakta, gerilme dağılımı zamana bağlı olarak değişir. 4.1.3. bölümünde  $\sigma_x$  gerilmesi için elde edilen,

$$\sigma_x(t) = \frac{1}{1-\nu^2} \{ [\epsilon_x(t) + \nu\epsilon_y(t)] \psi_x(0) - \int_0^t [\epsilon_x(\tau) + \nu\epsilon_y(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(t-\tau) d\tau \} \quad (4.66)$$

şeklindeki gerilme-deformasyon zaman ilişkisi, Bernoulli - Navier hipotezi geçerli kabul edilerek, deformasyon ile eğrilikler arasındaki,

$$\epsilon_x = -z w_{xx}(t) \quad , \quad \epsilon_y = -z w_{yy}(t) \quad (4.67)$$

ilişkisi kullanılarak yazılacak olursa

$$\sigma_x(t) = - \frac{z}{1-\nu^2} \{ [w_{xx}(t) + \nu w_{yy}(t)] \psi_x(0) - \int_0^t [w_{xx}(\tau) + \nu w_{yy}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_x(t-\tau) d\tau \} \quad (4.68)$$

şeklini alır. (4.68) deki  $w_{xx}$  , xz düzlemine paralel bir düzlemdeki eğriliği,  $w_{yy}$  , yz düzlemine paralel bir düzlemdeki eğriliği, z, tarafsız yüzeyden uzaklığı ve  $\psi(t)$  terimleri yumuşama fonksiyonlarını göstermektedir. Denge şartı gereğince, kesitteki  $M_x$  momenti,

$$M_x = \int_z \sigma_x(t) z dz \quad (4.69)$$

ifadesinden ya da (4.68) kullanılarak,

$$M_x = \frac{1}{1-u^2} \left\{ \int_z \{ [-z w_{xx}(t) + u (-z w_{yy}(t))] \} \psi_x(0) - \int_0^t [-z w_{xx}(\tau) + u (-z w_{yy}(\tau))] \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_x(t-\tau) d\tau \right\} z dz \quad (4.70)$$

ifadesinden elde edilir. (4.70) ifadesinde, yumuşama  $\{ \psi_x(t) \}$  fonksiyonları,

$$\psi_x(t) = B_{0x} + \sum_{i=1}^n B_{ix} g_i(t) \quad (4.71)$$

şeklinde alınabilir, burada;

$$B_{0x} = E - k_0 |\epsilon_x|^{p_0-1}, \quad g_0(t) = 1, \quad E > k_0 |\epsilon_x|^{p_0-1}, \quad p_0 \geq 1 \quad (4.72)$$

$$B_{ix} = k_i |\epsilon_x|^{p_i-1}, \quad k_0 \geq \sum_{i=1}^n k_i, \quad p_i \geq 1, \quad p_0 \leq p_i \quad (4.73)$$

$$g_i(t) = e^{-\lambda_i t} \quad (4.74)$$

olarak tanımlanabilir. Malzeme davranışı çekme ve basınçta aynı olduğundan,  $B_{ix}(\epsilon_x)$  terimlerinin belirlenmesinde deformasyonlar mutlak değer olarak alınmaktadır.

Gerilme değerini belirlemekte kullanılan (4.66) ifadesi sabit  $\epsilon_{x0}$  ve  $\epsilon_{y0}$  deformasyonları için,

$$\sigma_x(t) = - \frac{1}{1-u^2} [ \epsilon_{x0} + u \epsilon_{y0} ] \psi_x(0) = \frac{1}{1-u^2} [ \epsilon_{x0} + u \epsilon_{y0} ] \bar{E}(\epsilon_x, t) \quad (4.75)$$

şeklini alacaktır. (4.72) ve (4.73) ifadelerinin elde edilmesinde malzeme özellikleri ile ilgili yapılan kabuller,

- $t$  değeri arttıkça  $\bar{E}(\epsilon_x, t)$  değerinin azalması,
- $\bar{E}(\epsilon_x, t)$ 'nin alabileceği en büyük değerin  $E$  olması,

- $\epsilon_x$ 'in küçük değerleri için  $\bar{E}(\epsilon_x, t)$ 'nin yaklaşık olarak  $E$ 'ye eşit olması,
- $\epsilon_x$  değeri arttıkça  $\bar{E}(\epsilon_x, t)$ 'nin azalması olarak sıralanabilir.

Bu özellikleri sağlayacak  $B_{ix}(\epsilon)$  ve  $g_i(t)$  fonksiyonlarının farklı şekillerde belirlenmesi mümkün olabilir. Kullanılan malzeme için, gerçek malzemenin davranışını yansıtan yukarıdaki özelliklerin sağlanmaması durumunda, gerçeğe uymayan sonuçlar elde edilebilir. (4.72) ve (4.73) ifadelerinde  $p_i=0$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) olarak alındığında doğrusal elastik malzemeli plak,  $p_i=1$  alındığında ise, doğrusal viskoelastik malzemeli plak için geçerli katsayılar elde edilir.

(4.71) kullanılarak,  $\partial \psi_x(t - \tau) / \partial \tau$  terimi,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \psi(t - \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\lambda_i} \left| -z w_{xx}(\tau) \right|^{p_i-1} e^{-(t-\tau)/\lambda_i} \quad (4.76)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.70) ifadesi, (4.71), (4.72), (4.73), (4.74) ve (4.76) ifadeleri de kullanılarak;

$$\begin{aligned} M_x = & B \left[ E \int_z [-z w_{xx}(t)] z dz - k_0 \int_z [-z w_{xx}(t)] \left| -z w_{xx}(t) \right|^{p_0-1} z dz \right. \\ & + \sum_{i=1}^n k_i \int_z [-z w_{xx}(t)] \left| -z w_{xx}(t) \right|^{p_i-1} z dz \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\lambda_i} \int_0^t \left[ \int_z [-z w_{xx}(\tau)] \left| -z w_{xx}(\tau) \right|^{p_i-1} z dz \right] e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau \\ & + E \nu \int_z [-z w_{yy}(t)] z dz + k_0 \nu \int_z [-z w_{yy}(t)] \left| -z w_{xx}(t) \right|^{p_0-1} z dz \\ & + \sum_{i=1}^n k_i \nu \int_z [-z w_{yy}(t)] \left| -z w_{xx}(t) \right|^{p_i-1} z dz \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{k_i \nu}{\lambda_i} \int_0^t \left[ \int_z [-z w_{yy}(\tau)] \left| -z w_{xx}(\tau) \right|^{p_i-1} z dz \right] e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau \left. \right] \quad (4.77) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabilir. (4.77) denklemi,  $z$  değişkenine bağlı integrallerin çözümünde,

$$I_0 = \frac{h^3}{12}, \quad I_{p_0} = \frac{2}{p_0+2} \left\{ \frac{h}{2} \right\}^{p_0+2} \quad \text{ve} \quad I_{p_i} = \frac{2}{p_i+2} \left\{ \frac{h}{2} \right\}^{p_i+2} \quad (4.78)$$

olarak tanımlandığında, (integrallerin çözümleri ve (4.78) ifadeleri,  $E_k I$  'de gösterilmiştir)

$$\begin{aligned}
 M_x = & B \{ -E I_0 w_{xx}(t) + k_0 I_{p0} w_{xx}(t) | w_{xx}(t) |^{p_0-1} - \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} w_{xx}(t) | w_{xx}(t) |^{p_i-1} \\
 & + \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} \int_0^t w_{xx}(\tau) | w_{xx}(\tau) |^{p_i-1} e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau - E I_0 v w_{yy}(t) \\
 & + k_0 I_{p0} v w_{yy}(t) | w_{xx}(t) |^{p_0-1} + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} v w_{yy}(t) | w_{xx}(t) |^{p_i-1} \\
 & - \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} v \int_0^t w_{yy}(\tau) | w_{xx}(\tau) |^{p_i-1} e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau \} \quad (4.79)
 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.  $M_x$  momentini içeren,  $w_{xx}$  eğriliğinin zamana bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
 w_{xx}(t) = & - M_x \{ B [ E I_0 - k_0 I_{p0} | w_{xx}(t) |^{p_0-1} + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} | w_{xx}(t) |^{p_i-1} \\
 & - \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} \frac{1}{w_{xx}(t)} \int_0^t w_{xx}(\tau) | w_{xx}(\tau) |^{p_i-1} e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau + E I_0 v \frac{w_{yy}(t)}{w_{xx}(t)} \\
 & - k_0 I_{p0} v \frac{w_{yy}(t)}{w_{xx}(t)} | w_{xx}(t) |^{p_0-1} + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} v \frac{w_{yy}(t)}{w_{xx}(t)} | w_{xx}(t) |^{p_i-1} \\
 & - \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} v \frac{1}{w_{xx}(t)} \int_0^t w_{yy}(\tau) | w_{xx}(\tau) |^{p_i-1} e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau ] \}^{-1} \quad (4.80)
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilebilir. (4.80) de bulunan  $\tau$  değişkenine bağlı integrallere,  $s$  adım sayısı ve  $t = s \Delta t$ , ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) olmak üzere yamuk kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{s\Delta t} w_{xx}(t) | w_{xx}(t) |^{p_i-1} e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau = & \frac{\Delta t}{2} \{ w_{xx}(0) | w_{xx}(0) |^{p_i-1} e^{-s\Delta t/\lambda_i} \\
 & + 2 \sum_{k=1}^{s-1} w_{xx}(k) | w_{xx}(k) |^{p_i-1} e^{-(s\Delta t-k\Delta t)/\lambda_i} + w_{xx}(s) | w_{xx}(s) |^{p_i-1} \} \quad (4.81)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \int_0^{s\Delta t} w_{yy}(t) | w_{xx}(t) |^{p_i-1} e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau = & \frac{\Delta t}{2} \{ w_{yy}(0) | w_{xx}(0) |^{p_i-1} e^{-s\Delta t/\lambda_i} \\
 & + 2 \sum_{k=1}^{s-1} w_{yy}(k) | w_{xx}(k) |^{p_i-1} e^{-(s\Delta t-k\Delta t)/\lambda_i} + w_{yy}(s) | w_{xx}(s) |^{p_i-1} \} \quad (4.82)
 \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Benzer biçimde,



$$M_y = \int_z \sigma_y(t) z dz \quad \text{ve} \quad M_{xy} = - \int_z \tau_{xy}(t) z dz \quad (4.83)$$

bağıntılarında

$$\sigma_y(t) = \frac{1}{(1-\nu^2)} \left\{ [\epsilon_y(t) + \nu \epsilon_x(t)] \psi_y(0) - \int_0^t [\epsilon_y(\tau) + \nu \epsilon_x(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(t-\tau) d\tau \right\} \quad (4.84)$$

ve

$$\tau_{xy}(t) = \frac{1}{2(1+\nu)} \left\{ [-\gamma_{xy}(t)] \psi_{xy}(0) - \int_0^t [-\gamma_{xy}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(t-\tau) d\tau \right\} \quad (4.85)$$

$$\gamma_{xy} = 2 z w_{xy}(t) \quad (4.86)$$

eşitlikleri kullanılarak sırası ile

$$\begin{aligned} w_{yy}(t) = & -M_y \left\{ B [ E I_0 - k_0 I_{p0} | w_{yy}(t) |^{p_0-1} + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} | w_{yy}(t) |^{p_i-1} \right. \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} \frac{1}{w_{yy}(t)} \int_0^t w_{yy}(\tau) | w_{yy}(\tau) |^{p_i-1} e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau + E I_0 \nu \frac{w_{xx}(t)}{w_{yy}(t)} \\ & - k_0 I_{p0} \nu \frac{w_{xx}(t)}{w_{yy}(t)} | w_{yy}(t) |^{p_0-1} + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} \nu \frac{w_{xx}(t)}{w_{yy}(t)} | w_{yy}(t) |^{p_i-1} \\ & \left. - \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} \nu \frac{1}{w_{yy}(t)} \int_0^t w_{xx}(\tau) | w_{yy}(\tau) |^{p_i-1} e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} w_{xy}(t) = & M_{xy} \left\{ B_{xy} [ E I_0 - k_0 I_{p0} | w_{xy}(t) |^{p_0-1} + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} | w_{xy}(t) |^{p_i-1} \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} \frac{1}{w_{xy}(t)} \int_0^t w_{xy}(\tau) | w_{xy}(\tau) |^{p_i-1} e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (4.88)$$

ifadeleri elde edilecektir. (4.88) denkleminde,  $B_{xy} = (1 - \nu)$  olarak tanımlanmıştır.

Plakın herhangi bir kesitindeki dış yüklemenden doğan  $M_x$ ,  $M_y$  ve  $M_{xy}$  momentleri elastik çözümden elde edilebilir. Aynı zamanda elastik çözümden bulunan  $w_{xx}$ ,  $w_{yy}$  ve  $w_{xy}$  eğrilikleri (4.80), (4.87) ve (4.88) denklemleri kullanılarak,  $t = 0$  için yapılan iterasyonda başlangıç değerleri olarak alınır, istenilen hassaslıkta eğrilikler bulunur. Bulunan bu değerleri kullanarak yapılan iterasyon sonucunda ise  $t = \Delta t, \dots, s\Delta t$  anlarındaki eğrilikler hesaplanmış olur. Bu tür iteratif çözüm için hazırlanan bilgisayar programları Ek 2 'de sunulmuştur.

$w_{xx}$ ,  $w_{yy}$  ve  $w_{xy}$  eğriliklerinin zamana bağlı ifadeleri elde edildikten sonra, kesitteki  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ve  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımları,

$$\sigma_x(t) = -\frac{z}{1-\nu^2} \left\{ [w_{xx}(t) + \nu w_{yy}(t)] \psi_x(0) - \int_0^t [w_{xx}(\tau) + \nu w_{yy}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_x(t-\tau) d\tau \right\} \quad (4.89)$$

$$\sigma_y(t) = -\frac{z}{(1-\nu^2)} \left\{ [w_{yy}(t) + \nu w_{xx}(t)] \psi_y(0) - \int_0^t [w_{yy}(\tau) + \nu w_{xx}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_y(t-\tau) d\tau \right\} \quad (4.90)$$

$$\tau_{xy}(t) = -\frac{z}{2(1+\nu)} \left\{ 2 w_{xy}(t) \psi_{xy}(0) - \int_0^t w_{xy}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{xy}(t-\tau) d\tau \right\} \quad (4.91)$$

denklemlerinden elde edilebilir. Lineer viskoelastik malzemeli plak için ise,

$$E_v = E - k_0 + \sum_{i=1}^n k_i, \quad k_{iv} = \frac{k_i}{\lambda_i}, \quad I_0 = \frac{h^3}{12} \quad (4.92)$$

olarak alınacak olursa, (4.79) denklemi

$$M_x = B \left\{ -E_v I_0 [w_{xx}(t) + \nu w_{yy}(t)] + \sum_{i=1}^n k_{iv} I_0 \left\{ \int_0^t w_{xx}(\tau) e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau + \nu \int_0^t w_{yy}(\tau) e^{-(t-\tau)/\lambda_i} d\tau \right\} \right\} \quad (4.93)$$

şeklinde yazılabilir. (4.93) den, zamana bağlı olarak değişen eğrilikler,

$$w_{xx}(t) = - M_x \left\{ B I_0 \left[ E_v - \sum_{i=1}^n \frac{k_{iv}}{w_{xx}(t)} \int_0^t w_{xx}(\tau) e^{-(t-\tau)\lambda_i} d\tau \right. \right. \\ \left. \left. + v E_v \frac{w_{yy}(t)}{w_{xx}(t)} - \sum_{i=1}^n \frac{k_{iv} v}{w_{xx}(\tau)} \int_0^t w_{yy}(\tau) e^{-(t-\tau)\lambda_i} d\tau \right] \right\}^{-1} \quad (4.94)$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.2. Moment - Eğrilik - Zaman İlişkilerinin Sonlu Eleman Yöntemi Formülasyonu

Elemanları kesit momentleri olan gerilme vektörü,

$$\{ \sigma \} = \{ M_x \quad M_y \quad M_{xy} \}^T \quad (4.95)$$

olarak tanımlanabilir. Burada  $M_x$ ,  $M_y$  ve  $M_{xy}$  değerleri (4.80), (4.87) ve (4.88) ifadelerinden yazılır ve

$$\{ \epsilon(s) \} = \{ -w_{xx}(s) \quad -w_{yy}(s) \quad 2 w_{xy}(s) \}^T$$

$$\{ [\epsilon(s)]^{p_i} \} = \{ -w_{xx}(s) | w_{xx}(s) |^{p_i-1} \quad -w_{yy}(s) | w_{yy}(s) |^{p_i-1} \quad 2w_{xy}(s) | 2w_{xy}(s) |^{p_i-1} \}^T$$

$$\{ [\epsilon(s)]^{p_i-1} \} = \{ - | w_{xx}(s) |^{p_i-1} \quad - | w_{yy}(s) |^{p_i-1} \quad | 2 w_{xy}(s) |^{p_i-1} \}^T$$

$$(s = 1,2,3, \dots, s) \quad (i = 0,1,2, \dots, n)$$

$$[ D ] = \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \quad [ Y ] = \begin{bmatrix} w_{yy}(s) & 0 & 0 \\ 0 & w_{xx}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa (4.95) denklemi,

$$\begin{aligned}
\{ \sigma \} = & B \{ E I_0 [ D ] \{ \epsilon(s) \} - k_0 I_{p0} \{ [ \epsilon(s) ]^{p_0} \} - k_0 I_{p0} v [ Y ] \{ [ \epsilon(s) ]^{p_0-1} \} \\
& + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} \{ [ \epsilon(s) ]^{p_i} \} + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} v [ Y ] \{ [ \epsilon(s) ]^{p_i-1} \} \\
& - \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} [ D ] \{ e^{-s \Delta t / \lambda_i} \{ [ \epsilon(0) ]^{p_i} \} \\
& + 2 \sum_{k=1}^{s-1} e^{-(s \Delta t - k \Delta t) / \lambda_i} \{ [ \epsilon(k) ]^{p_i} \} + \{ [ \epsilon(s) ]^{p_i} \} \}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

şeklinde matris formunda ifade edilir. (4.96) denkleminde,

$\{ \epsilon ( s ) \}$  : Eğrilik vektörü

$[ D ]$  : Elastisite matrisidir.

Kare bir plak probleminin çözümü ele alındığında ise, (4.96) denklemi,

$$\begin{aligned}
\{ \sigma \} = & B \{ E I_0 [ D ] \{ \epsilon ( s ) \} - k_0 I_{p0} [ D ] \{ [ \epsilon(s) ]^{p_0} \} \\
& + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} [ D ] \{ [ \epsilon(s) ]^{p_i} \} - \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} [ D ] \{ e^{-s \Delta t / \lambda_i} \{ [ \epsilon(0) ]^{p_i} \} \\
& + 2 \sum_{k=1}^{s-1} e^{-(s \Delta t - k \Delta t) / \lambda_i} \{ [ \epsilon(k) ]^{p_i} \} + \{ [ \epsilon(s) ]^{p_i} \} \}
\end{aligned} \tag{4.97}$$

biçiminde yazılacak ve

$$\{ \epsilon( s ) \} = [ B ] \{ \Delta( s ) \} \tag{4.98}$$

bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\{ \sigma \} &= B \{ E I_0 [ D ] [ B ] \{ \Delta( s ) \} \\
&- k_0 I_{p0} [ D ] [ B ] \{ [\Delta(s)]^{p_0} \} + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} [ D ] [ B ] \{ [\Delta(s)]^{p_i} \} \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} [ D ] [ B ] \{ e^{-s\Delta t/\lambda_i} \{ [\Delta(0)]^{p_i} \} \\
&+ 2 \sum_{k=1}^{s-1} e^{-(s\Delta t - k\Delta t)/\lambda_i} \{ [\Delta(k)]^{p_i} \} + \{ [\Delta(s)]^{p_i} \} \}
\end{aligned} \tag{4.99}$$

şeklinde ifade edilebilecektir.

Elastik şekil değiştirme enerjisi (  $U$  ),

$$\dot{U} = \frac{1}{2} \int_V \{ \epsilon( s ) \}^T \{ \sigma \} dV \tag{4.100}$$

ve dış yüklerin potansiyel enerjisi (  $W$  ),

$$W = \{ \Delta( s ) \}^T \{ f \} \tag{4.101}$$

olarak alındığında, elemandaki toplam potansiyel enerji (  $I$  ),

$$I = U - W \tag{4.102}$$

şeklinde yazılabilecektir. (4.102) denklemini, (4.99), (4.100), (4.101) ve (4.98) in transpozesi olan

$$\{ \epsilon( s ) \}^T = \{ \Delta( s ) \}^T [ B ]^T \tag{4.103}$$

eşitliği alınarak düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
I = & \frac{B}{2} \{ \Delta(s) \}^T \{ E I_0 \int_V [B]^T [D] [B] dV \{ \Delta(s) \} \\
& - k_0 I_{p0} \int_V [B]^T [D] [B] dV \{ [ \Delta(s) ]^{p_0} \} \\
& + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} \int_V [B]^T [D] [B] dV \{ [ \Delta(s) ]^{pi} \} \\
& - \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{\lambda_i} [ e^{-s\Delta t/\lambda_i} \int_V [B]^T [D] [B] dV \{ [ \Delta(0) ]^{pi} \} \\
& + 2 \sum_{k=1}^{s-1} e^{-(s\Delta t - k\Delta t)/\lambda_i} \int_V [B]^T [D] [B] dV \{ [ \Delta(k) ]^{pi} \} \\
& + \int_V [B]^T [D] [B] dV \{ [ \Delta(s) ]^{p_0} \} - \{ \Delta(s) \}^T \{ f \}
\end{aligned} \tag{4.104}$$

biçiminde yazılabilir. Toplam potansiyel enerjiyi minimum yapan konumu bulmak için gerekli olan,

$$\frac{\partial I}{\partial \{ \Delta(s) \}^T} = 0 \tag{4.105}$$

denkleminde

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = [k] \tag{4.106}$$

tanımı kullanılırsa, bir elemandaki düğüm noktalarına ait kuvvet vektörü

$$\begin{aligned}
\{ f \} = & B [k] \{ E I_0 \{ \Delta(s) \} - k_0 I_{p0} \{ [ \Delta(s) ]^{p_0} \} \\
& + \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} \{ [ \Delta(s) ]^{pi} \} + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} \{ e^{-s \Delta t/\lambda_i} \{ [ \Delta(0) ]^{pi} \} \\
& + 2 \sum_{k=1}^{s-1} e^{-(s\Delta t - k\Delta t)/\lambda_i} \{ [ \Delta(k) ]^{pi} \} + \{ [ \Delta(s) ]^{pi} \} \}
\end{aligned} \tag{4.107}$$

şeklinde ifade edilecektir. (4.106) dan, her bir eleman için elde edilen [k] rijitlik matrisi hesaplanarak kodlama yöntemi ile [K]<sub>s</sub> sistem rijitlik matrisine geçmek mümkündür.

Tüm sistem için dış kuvvetler matrisi,

$$\begin{aligned}
 \{ F \}_s &= B [ k ]_s \{ E I_0 \{ \Delta(s) \}_s - k_0 I_{p0} \{ [ \Delta(s) ]^{p_0} \}_s \\
 &+ \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} \{ [ \Delta(s) ]^{pi} \}_s - \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^n k_i I_{pi} \{ e^{-s\Delta t/\lambda_i} \{ [ \Delta(0) ]^{pi} \}_s \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^{s-1} e^{-(s\Delta t - k\Delta t)/\lambda_i} \{ [ \Delta(k) ]^{pi} \}_s + \{ [ \Delta(s) ]^{pi} \}_s \}
 \end{aligned} \quad (4.108)$$

bağıntısı ile elde edilebilir. (4.108) bağıntısından,  $\{ \Delta(s) \}_s$  sisteme ait deplasman vektörü için,

$$\begin{aligned}
 \{ \Delta(s) \}_s &= \frac{1}{B E I_0} [ K ]_s^{-1} \{ F \}_s + \frac{k_0 I_{p0}}{E I_0} \{ [ \Delta(s) ]^{p_0} \}_s \\
 &- \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{E I_0} \{ [ \Delta(s) ]^{pi} \}_s + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^n \frac{k_i I_{pi}}{E I_0} \{ e^{-s\Delta t/\lambda_i} \{ [ \Delta(0) ]^{pi} \}_s \\
 &+ 2 \sum_{k=1}^{s-1} e^{-(s\Delta t - k\Delta t)/\lambda_i} \{ [ \Delta(k) ]^{pi} \}_s + \{ [ \Delta(s) ]^{pi} \}_s \}
 \end{aligned} \quad (4.109)$$

yazılabilir.

Lineer viskoelastik malzemeli plak için,  $p_0 = p_i = 1$  ve  $I_0 = I_{p0} = I_{pi}$  olarak kabul edildiğinde gerilme vektörü,

$$\begin{aligned}
 \{ \sigma \} &= B I_0 \{ E_v [ D ] \{ \epsilon(s) \} - \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^n \frac{k_{iv}}{\lambda_i} \{ e^{-s\Delta t/\lambda_i} \{ \epsilon(0) \} \\
 &+ 2 \sum_{k=1}^{s-1} e^{-(s\Delta t - k\Delta t)/\lambda_i} \{ \epsilon(k) \} + \{ \epsilon(s) \} \}
 \end{aligned} \quad (4.110)$$

biçiminde belirlenebilecektir. (4.110) dan hareketle, daha önce izlenen yöntemle, sistem deplasmanlarının hesaplanabilmesi için,

$$\begin{aligned} \{ \Delta( s ) \}_s = & \frac{1}{B I_0 E_v} [ K ]_s^{-1} \{ F \}_s + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^n \frac{k_{iv}}{\lambda_i E_v} \{ e^{-s\Delta t / \lambda_i} \{ \epsilon( 0 ) \} \\ & + 2 \sum_{k=1}^{s-1} e^{-(s\Delta t - k\Delta t) / \lambda_i} \{ \epsilon( k ) \} + \{ \epsilon( s ) \} \} \end{aligned} \quad ( 4.111 )$$

denklemleri kullanılabilir.

Hesaplamalara  $t = 0$  anında başladığında, ilk adım olarak  $\{ \Delta( 0 ) \}_s$  için elastik çözümden bulunan değerler alınarak iterasyona başlamak mümkündür. İstenen hassasiyeti veren değer elde edilene kadar iterasyona devam edilerek,  $t = 0$  anı için gerçek deplasman değerleri belirlenebilir. Bu değerler,  $t = \Delta t$  anı için başlangıç değerleri olarak kabul edilerek, iterasyon ile  $t = \Delta t, \dots, s\Delta t$  anları için  $\{ \Delta( s ) \}_s$  deplasman değerleri bulunabilir. Bu değerler bulunduğundan sonra eleman bazında işlem yapılarak,  $\{ \epsilon( s ) \}$  eleman düğüm noktalarındaki eğriliklerin zamana bağlı değerlerini elde etmek mümkündür.



## 5. UYGULAMA

### 5.1. Viskoelastik Malzemeli Plakların Analitik Yöntem ile Çözümü

4.1.4 bölümünde analitik yöntem için elde edilen ifadeler, doğrusal ve doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli, dört kenarından basit mesnetli ve üniform yüklü kare plak problemine uygulanmış ( Şekil 5.1 ), malzemeye bağlı katsayılar ve kesit özellikleri,

$$\begin{aligned} E &= 3 * 10^5 \text{ kg/cm}^2, & k_0 &= 1 * 10^5 \text{ kg/cm}^2, & k_1 &= 0.75 * 10^5 \text{ kg/cm}^2 \\ \lambda_1 &= 20 \text{ dak}, & \Delta t &= 5 \text{ dakika}, & p_0 &= 1.1 \\ p_1 &= 1.105, & \nu &= 0.3, & h &= 10 \text{ cm} \\ b_x &= c = 100 \text{ cm}, & q &= 0.05 \text{ kg/cm}^2, & M_x &= M_y = 23.95 \text{ kg cm / cm} \end{aligned}$$

olarak alınmıştır. İfadelerin uygulanabilmesi için gerekli parametre değerleri,

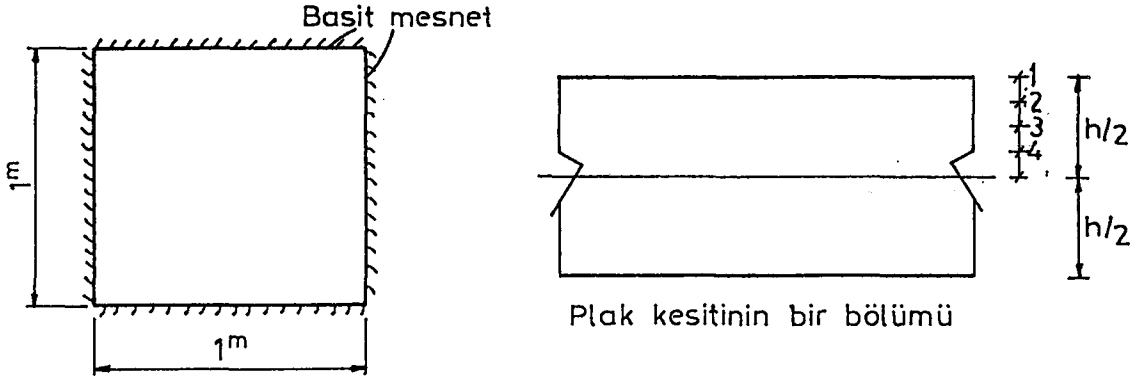
$$(M_x)_{\max} = (M_y)_{\max} = \beta q b^2, \quad \beta = 0.0479$$

$$N = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

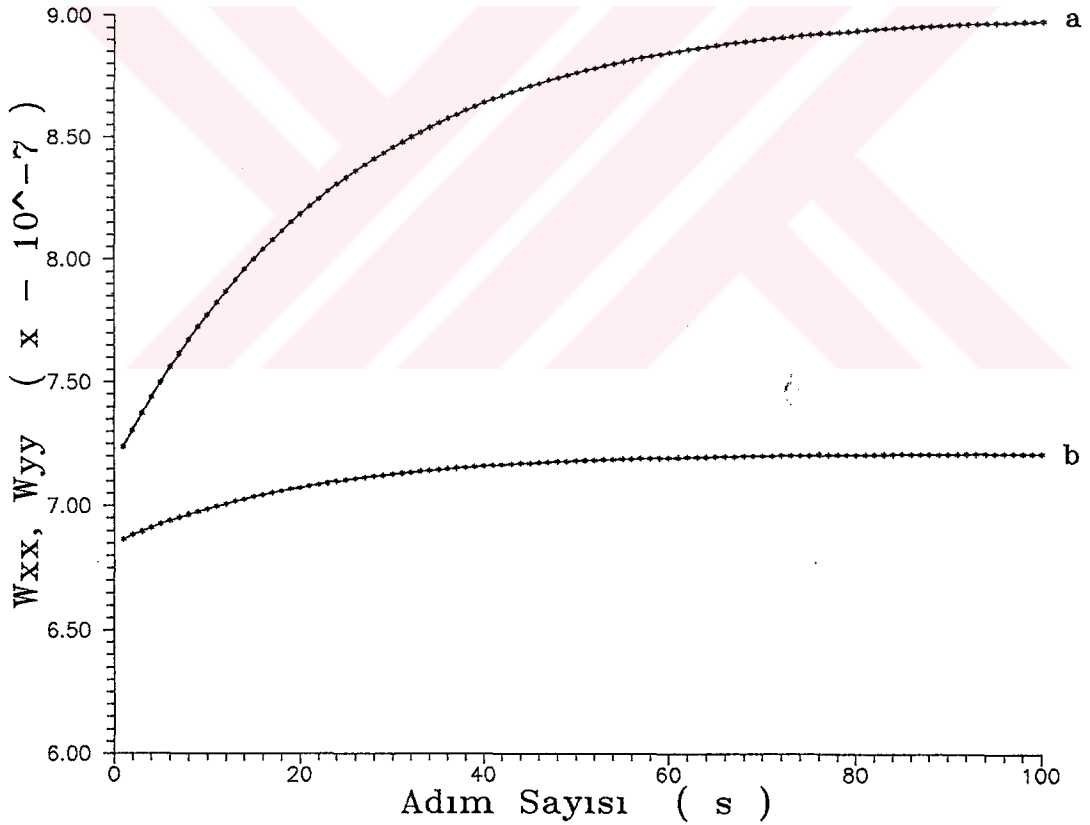
alındığında (Timoshenko, 1950),  $t = 0$  anında iterasyona başlama değerleri,

$$w_{xx}^0 (0) = w_{yy}^0 (0) = - \frac{\beta q b^2}{N (1 + \nu)} = -6.706 * 10^{-7}$$

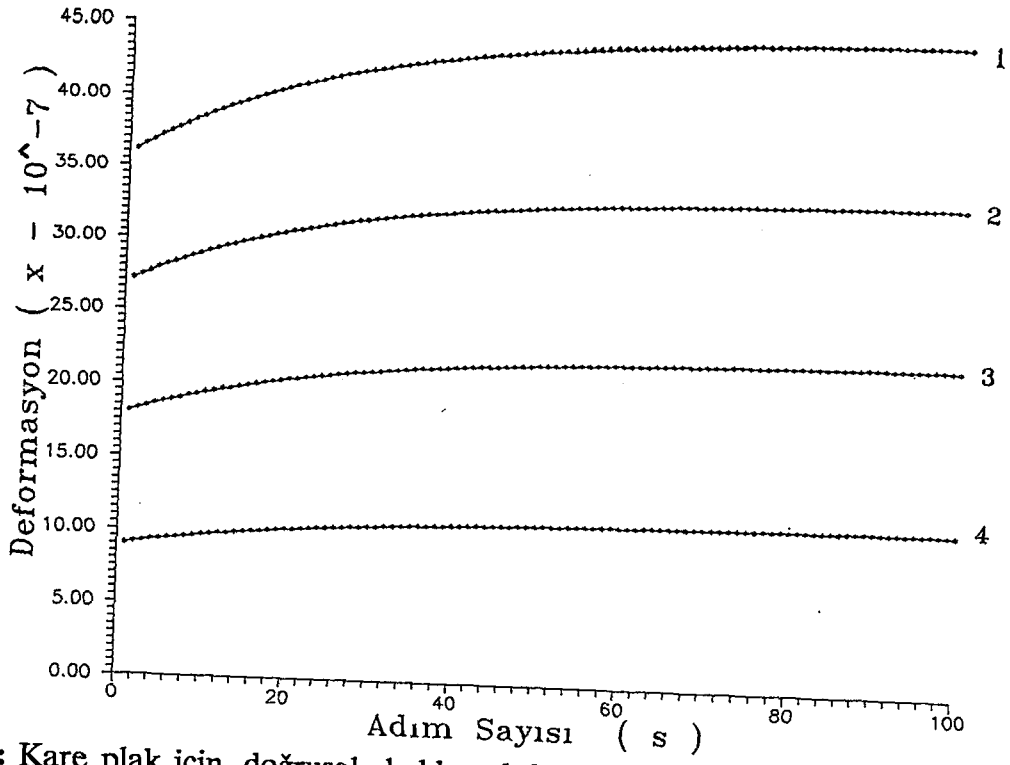
bulunur. İncelenen kare plak probleminde, lineer viskoelastik durum için  $p_0 = p_1 = 1$  kabulü ile , Ek 2 'de sunulan bilgisayar programı (iteratif yaklaşım) kullanılarak plağın orta noktasındaki eğrilik, deformasyon ve gerilmelerin zamana bağlı değerleri doğrusal ve doğrusal olmayan malzemeli plak için elde edilmiş ve sonuçlar Şekil 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 ve 5.6 'da sunulmuştur. Doğrusal ve doğrusal olmayan durumda deformasyon değerlerinin karşılaştırılabilmesi amacıyla, plağın ortasındaki kesitin en dış lifinde oluşan deformasyonların adım sayısına bağlı olarak aldığı değerlerin değişimi Şekil 5.7 'de sunulmuştur.



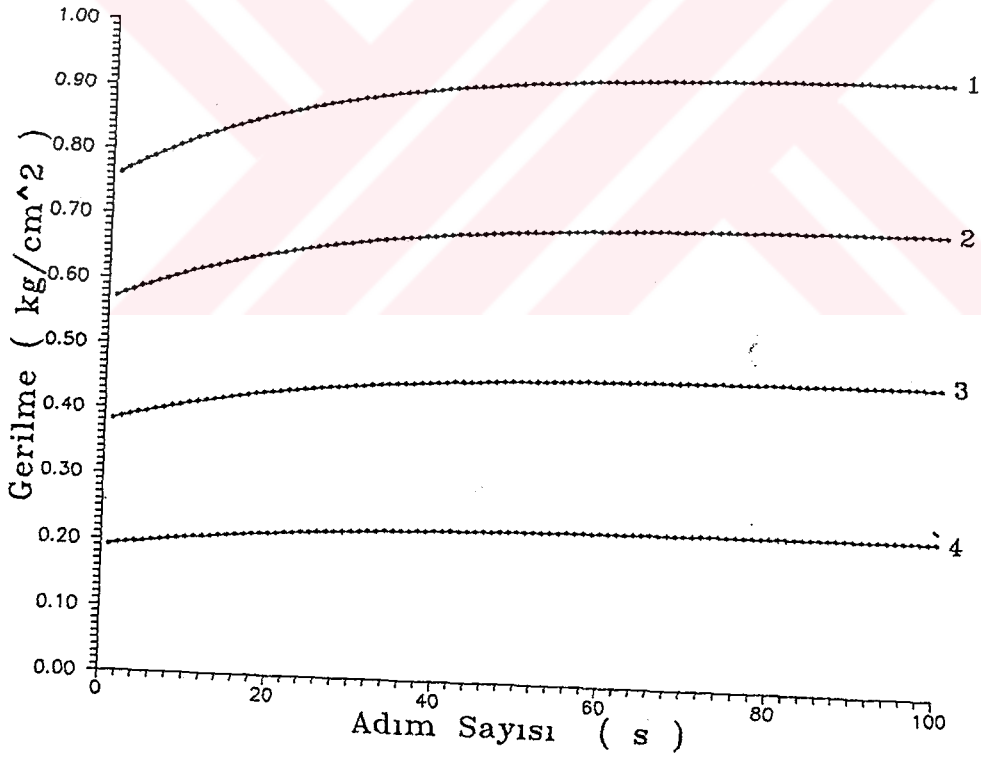
Şekil 5.1 : Viskoelastik malzemeli, üniform yüklü ve dört kenarından basit mesnetli kare plak ve kesiti



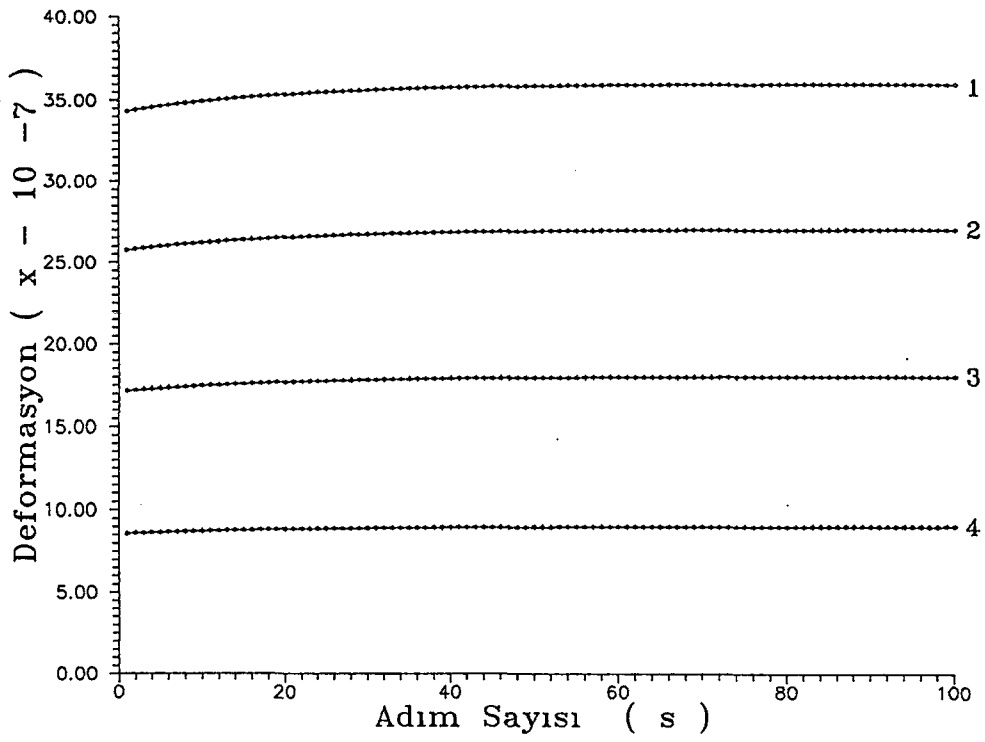
Şekil 5.2 : Tanımlanmış olan kare plak için, (a) doğrusal (b) doğrusal olmayan durumlarda eğrilik değerlerinin ( $w_{xx}, w_{yy}$ ) adım sayısına (s) bağlı olarak değişimi



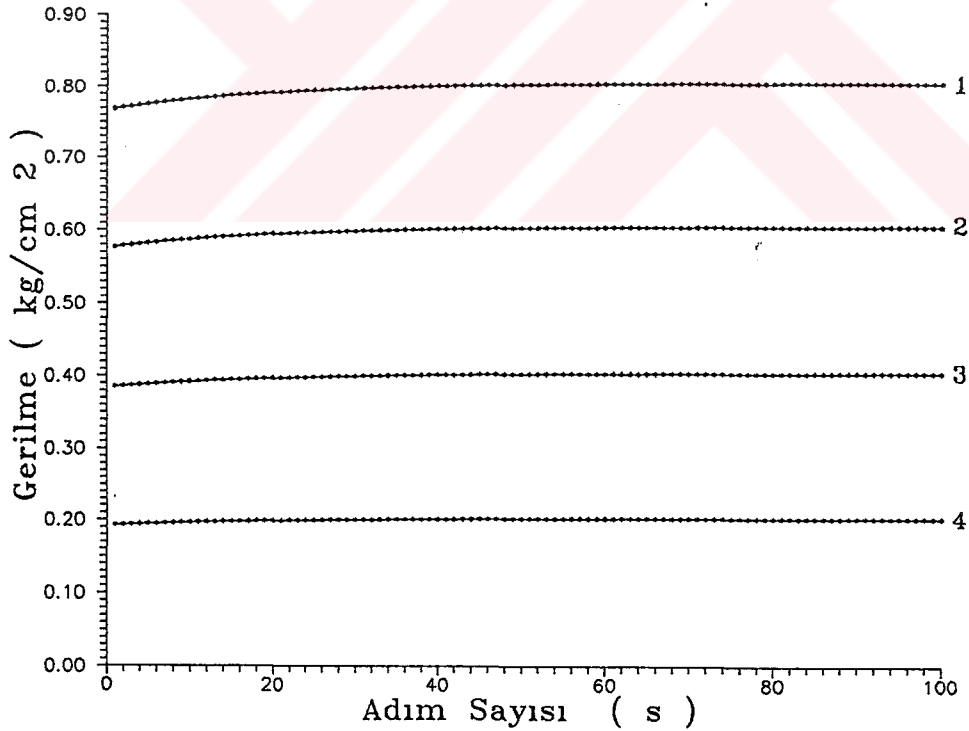
Şekil 5.3 : Kare plak için, doğrusal halde, deformasyon değerlerinin adım sayısına bağlı olarak kesit boyunca değişimi (1)  $z = h/2$ , (2)  $z = 3h/8$ , (3)  $z = h/4$ , (4)  $z = h/8$



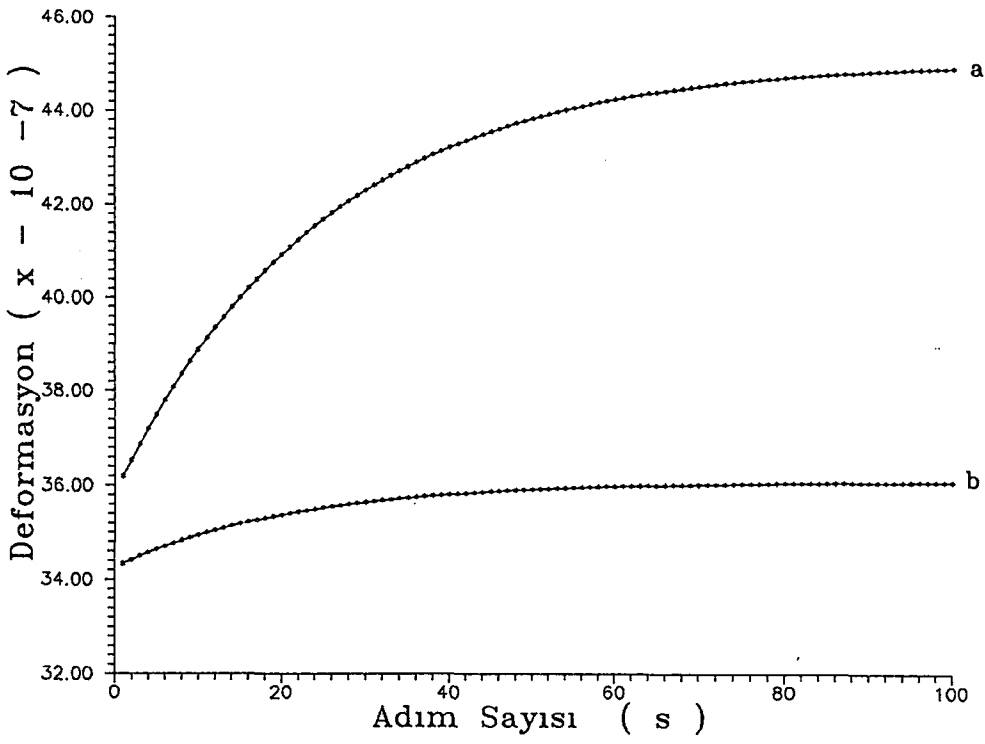
Şekil 5.4 : Kare plak için, doğrusal halde, gerilme değerlerinin adım sayısına bağlı olarak kesit boyunca değişimi (1)  $z = h/2$ , (2)  $z = 3h/8$ , (3)  $z = h/4$ , (4)  $z = h/8$



Şekil 5.5 : Kare plak için, doğrusal olmayan durumda deformasyon değerlerinin adım sayısına bağlı olarak kesit boyunca değişimi (1)  $z = h/2$ , (2)  $z = 3 h / 8$ , (3)  $z = h/4$ , (4)  $z = h/8$



Şekil 5.6 : Kare plak için, doğrusal olmayan durumda, gerilme değerlerinin adım sayısına bağlı olarak kesit boyunca değişimi (1)  $z = h/2$ , (2)  $z = 3 h/8$ , (3)  $z = h/4$ , (4)  $z = h/8$



Şekil 5.7 : Kare plak için, deformasyon değerlerinin adım sayısına bağlı olarak kesit boyunca değişimi ( $z = h/2$ ) (a) doğrusal (b) doğrusal olmayan durum

## 5.2. Viskoelastik Malzemeli Plakların Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü

4.2 bölümünde viskoelastik malzemeli plakların çözümü için elde edilen sonlu eleman formülasyonu, 5.1 bölümünde özellikleri tanımlanmış olan kare plak problemine uygulanmıştır. Sonlu eleman formülasyonunun uygulanabilmesi amacıyla (3.1) bağıntısında, yer alan parametre değerleri,

$$\langle p \rangle = \langle 1 \quad x \quad y \quad ; \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad ; \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad ; \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3 \rangle$$

$$\{ a \} = \{ A_1, A_2, \dots, A_{12} \}^T$$

alınarak, deplasman fonksiyonu ve dönme değerleri,

$$w = \langle p \rangle \{ a \} \quad (5.1)$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{ve} \quad \theta_y = - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.2)$$

ifadeleri ile tanımlanmıştır. Problemin çözümü için, dikdörtgen bir eleman seçildiğinde (Şekil 3.2), bu elemana ait  $\{ \Delta \}$  deplasman vektörü,

$$\{ \Delta \} = \{ w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi} ; w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj} ; w_k, \theta_{yk}, \theta_{xk} ; w_l, \theta_{yl}, \theta_{xl} \}^T \quad (5.3)$$

şeklinde elde edilir.  $\{ \Delta \}$  deplasman vektörünün içerdiği  $\theta_x$  ve  $\theta_y$  terimleri ise,

$$\theta_y = \{ A_2 + 2A_4x + A_5y + 3A_7x^2 + 2A_8xy + A_9y^2 + 3A_{11}x^2y + A_{12}y^3 \} \quad (5.4)$$

$$\theta_x = \{ A_3 + A_5x + 2A_6y + A_8x^2 + 2A_9xy + 3A_{10}y^2 + A_{11}x^3 + 3A_{12}xy^2 \} \quad (5.5)$$

olarak bulunur.  $i, j, k$  ve  $l$  düğüm noktalarının koordinatları, sırası ile ,

$$\left(-\frac{c}{2}, -\frac{b}{2}\right), \left(-\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right), \left(\frac{c}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad \text{ve} \quad \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

olup, (5.3), (5.4) ve (5.5) ifadelerine yerleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} a_1 &= c/2, & a_2 &= b/2, & a_3 &= c^2/4 \\ a_4 &= b^2/4, & a_5 &= cb/4, & a_6 &= c^3/8 \\ a_7 &= b^3/8, & a_8 &= c^3b/16, & a_9 &= b^3c/16 \\ b_1 &= c^2b/8, & b_2 &= cb^2/8, & b_3 &= c, & b_4 &= b \\ b_5 &= cb/2, & b_6 &= 3b^2/4, & b_7 &= 3cb^2/8 \\ b_8 &= 3c^2b/8, & b_9 &= cb/2, & c_1 &= 3c^2/4 \end{aligned}$$

olmak üzere,  $\{ \Delta \}$  deplasman vektörü ile  $\{ a \}$  katsayılar vektörünü birbirine bağlayan  $[ A ]$  matrisi,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & a_3 & a_5 & a_4 & -a_6 & -b_1 & -b_2 & -a_7 & a_8 & a_9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_1 & -b_4 & 0 & a_3 & -b_9 & b_6 & -a_6 & -b_7 \\ 0 & -1 & 0 & b_3 & a_2 & 0 & -c_1 & -b_5 & -a_4 & 0 & b_8 & a_7 \\ 1 & -a_1 & a_2 & a_3 & -a_5 & a_4 & -a_6 & b_1 & -b_2 & a_7 & -a_8 & -a_9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_1 & b_4 & 0 & a_3 & -b_9 & b_6 & -a_6 & -b_7 \\ 0 & -1 & 0 & b_3 & -a_2 & 0 & -c_1 & b_5 & -a_4 & 0 & -b_8 & -a_7 \\ 1 & a_1 & -a_2 & a_3 & -a_5 & a_4 & a_6 & -b_1 & b_2 & -a_7 & -a_8 & -a_9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_1 & b_4 & 0 & a_3 & -b_9 & b_6 & a_6 & b_7 \\ 0 & -1 & 0 & -b_3 & a_2 & 0 & -c_1 & b_5 & -a_4 & 0 & b_8 & a_7 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 & a_4 & a_6 & b_1 & b_2 & a_7 & a_8 & a_9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_1 & b_4 & 0 & a_3 & b_9 & b_6 & a_6 & b_7 \\ 0 & -1 & 0 & -b_3 & -a_2 & 0 & -c_1 & -b_5 & -a_4 & 0 & -b_8 & -a_7 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

şeklinde bulunur.  $\{a\}$  katsayılar vektörü için,

$$\{a\} = [A]^{-1} \{\Delta\} \quad (5.7)$$

ifadesi yazılarak, (5.1) denklemi,

$$w = \langle p \rangle [A]^{-1} \{\Delta\} \quad (5.8)$$

şeklinde tanımlanabilir ve şekil fonksiyonları,

$$\langle N \rangle = \langle p \rangle [A]^{-1} \quad (5.9)$$

ifadesi ile elde edilir.

Plak elemanın herhangi bir noktasındaki eğrilikler ,

$$\{\epsilon\} = \{-w_{xx} \quad -w_{yy} \quad 2w_{xy}\}^T \quad (5.10)$$

olarak tanımlandığında, şekil fonksiyonlarının gerekli türevlerini içeren [ B ] matrisi,

$$[ B ] = \begin{bmatrix} - \langle N \rangle_{xx} \\ - \langle N \rangle_{yy} \\ 2 \langle N \rangle_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

biçiminde yazılarak, eğrilikler için elde edilen,

$$\{ \epsilon \} = [ B ] \{ \Delta \} \quad (5.12)$$

ifadesinden de yararlanarak, eleman rijitlik matrisi [ k ],

$$[ k ] = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} [ B ]^T [ D ] [ B ] dx dy \quad (5.13)$$

bağıntısı ile hesaplanır.

(5.13) ifadesinden eleman rijitlik matrisi [ k ],

$$A_1 = 60 p^{-2} + 60 p^2 - 12 \nu + 42$$

$$A_3 = (20 p^{-2} - 4 \nu + 4) c^2$$

$$A_5 = 15 \nu$$

$$A_7 = -30 p^2 + 3 \nu - 3$$

$$A_9 = 10 p^2 + \nu - 1$$

$$A_2 = (20 p^2 - 4 \nu + 4) b^2$$

$$A_4 = 30 p^2 + 12 \nu + 3$$

$$A_6 = 30 p^{-2} - 60 p^2 + 12 \nu - 42$$

$$A_8 = -15 p^{-2} + 12 \nu + 3$$

$$B_1 = 10 p^{-2} + 4 \nu - 4$$

$$B_3 = -30 p^{-2} - 30 p^2 - 12 \nu + 42$$

$$B_5 = 30 p^{-2} + 12 \nu + 3$$

$$B_7 = -15 p^{-2} + 3 \nu - 3$$

$$B_9 = 5 p^2 - \nu + 1$$

$$B_2 = -60 p^{-2} + 30 p^2 + 12 \nu - 42$$

$$B_4 = 15 p^2 + 3 \nu - 3$$

$$B_6 = 30 p^{-2} - 3 \nu + 3$$

$$B_8 = -15 p^2 - 12 \nu - 3$$

$$C_1 = 10 p^{-2} + 4 \nu - 4$$

$$C_3 = 5 p^{-2} - \nu + 1$$

$$C_2 = -10 p^{-2} + \nu - 1$$

$$p = c / b$$





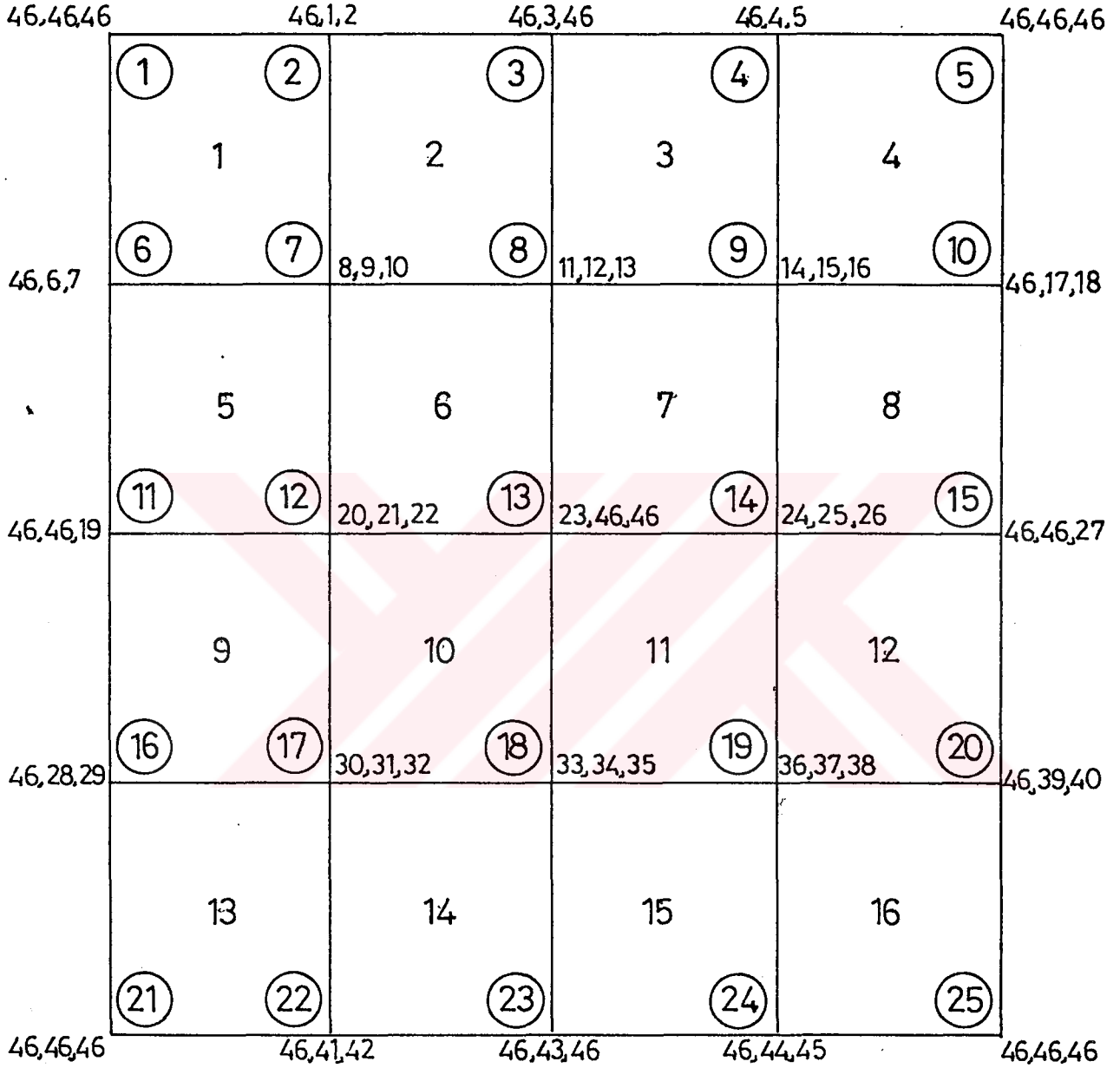
$$INC = \begin{bmatrix} 46 & 46 & 46 & 46 & 6 & 7 & 46 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 \\ 46 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 46 & 3 & 46 & 11 & 12 & 13 \\ 46 & 3 & 46 & 11 & 12 & 13 & 46 & 4 & 5 & 14 & 15 & 16 \\ 46 & 4 & 5 & 14 & 15 & 16 & 46 & 46 & 46 & 46 & 17 & 18 \\ 46 & 6 & 7 & 46 & 46 & 19 & 8 & 9 & 10 & 20 & 21 & 22 \\ 8 & 9 & 10 & 20 & 21 & 22 & 11 & 12 & 13 & 23 & 46 & 46 \\ 11 & 12 & 13 & 23 & 46 & 46 & 14 & 15 & 16 & 24 & 25 & 26 \\ 14 & 15 & 16 & 24 & 25 & 26 & 46 & 17 & 18 & 46 & 46 & 27 \\ 46 & 46 & 19 & 46 & 28 & 29 & 20 & 21 & 22 & 30 & 31 & 32 \\ 20 & 21 & 22 & 30 & 31 & 32 & 23 & 46 & 46 & 33 & 34 & 35 \\ 23 & 46 & 46 & 33 & 34 & 35 & 24 & 25 & 26 & 36 & 37 & 38 \\ 24 & 25 & 26 & 36 & 37 & 38 & 46 & 46 & 27 & 46 & 39 & 40 \\ 46 & 28 & 29 & 46 & 46 & 46 & 30 & 31 & 32 & 46 & 41 & 42 \\ 30 & 31 & 32 & 46 & 41 & 42 & 33 & 34 & 35 & 46 & 43 & 46 \\ 33 & 34 & 35 & 46 & 43 & 46 & 36 & 37 & 38 & 46 & 44 & 45 \\ 36 & 37 & 38 & 46 & 44 & 45 & 46 & 39 & 40 & 46 & 46 & 46 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiştir.

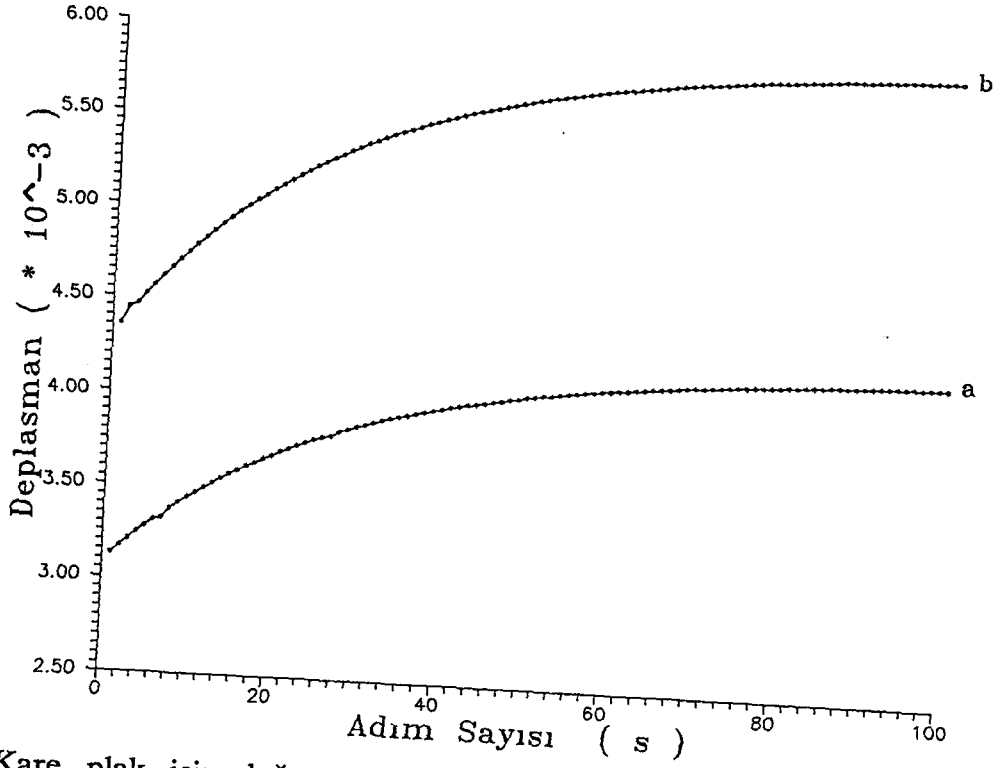
*Bölüm 5.1* 'de, doğrusal ve doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plağın orta noktasındaki  $w_{xx}$  eğriliğinin  $t = 0$  anında iterasyona başlama değerleri,

$$w_{xx}^0(0) = w_{yy}^0(0) = 0.03684 \frac{q}{N}$$

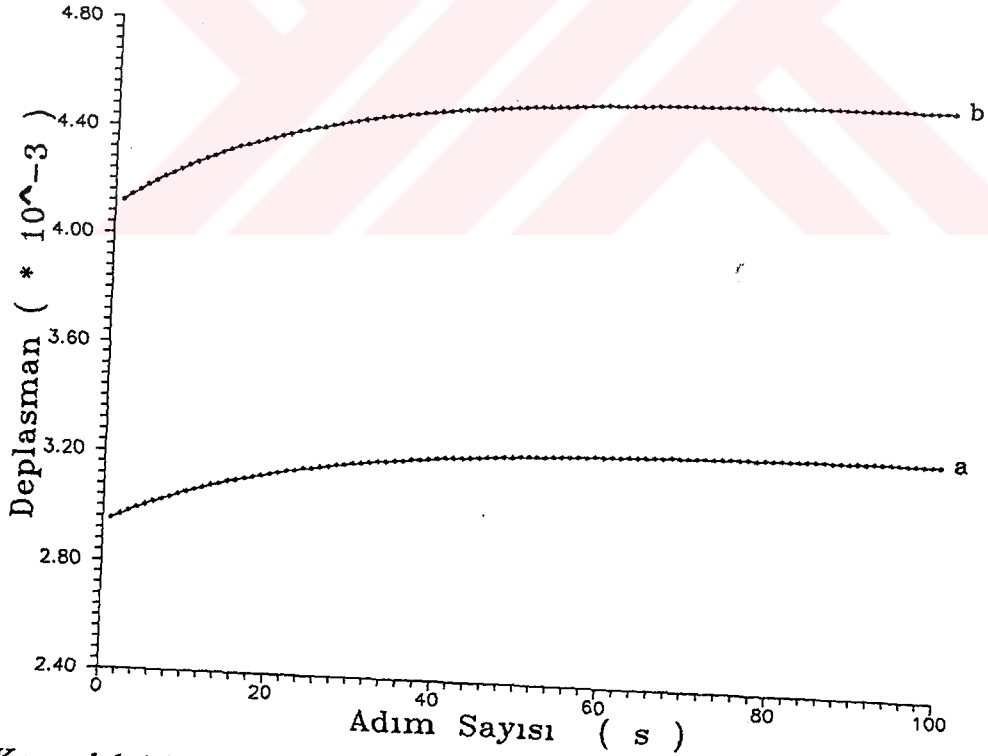
alınarak, elde edilen analitik çözüm değerleri ve sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm sonucu bulunan değerler *Şekil 5.13 ve 5.14* 'de sunulmaktadır.



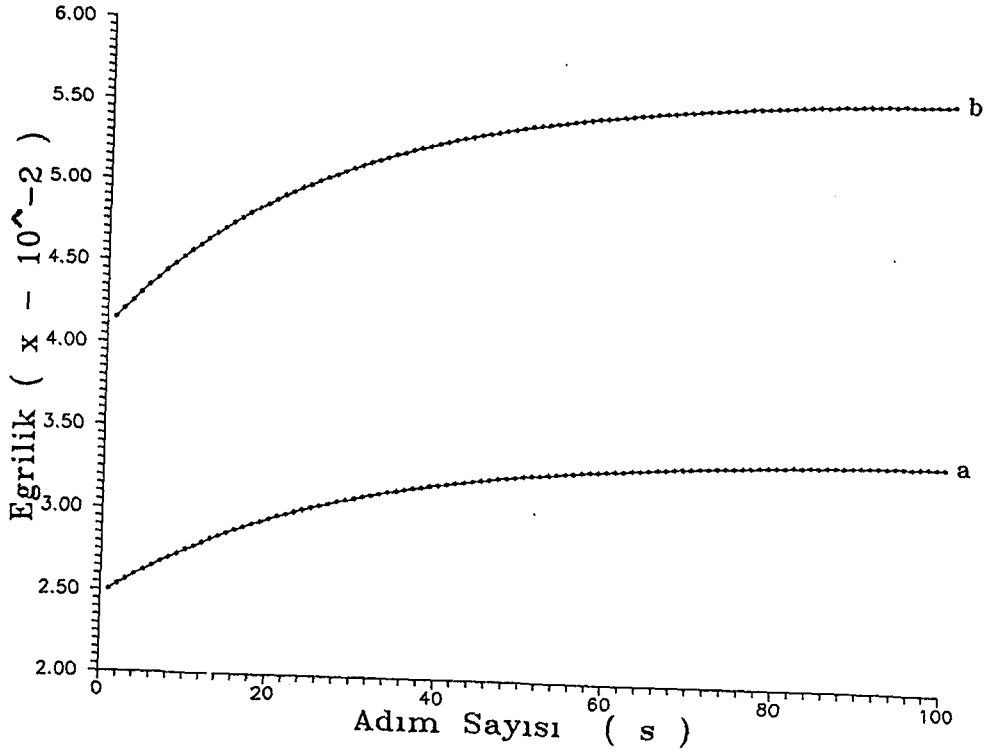
**Şekil 5.8 :** Kare plak problemi için, eleman ve düğüm noktalarına ait serbestlik derecelerinin numaralandırılması



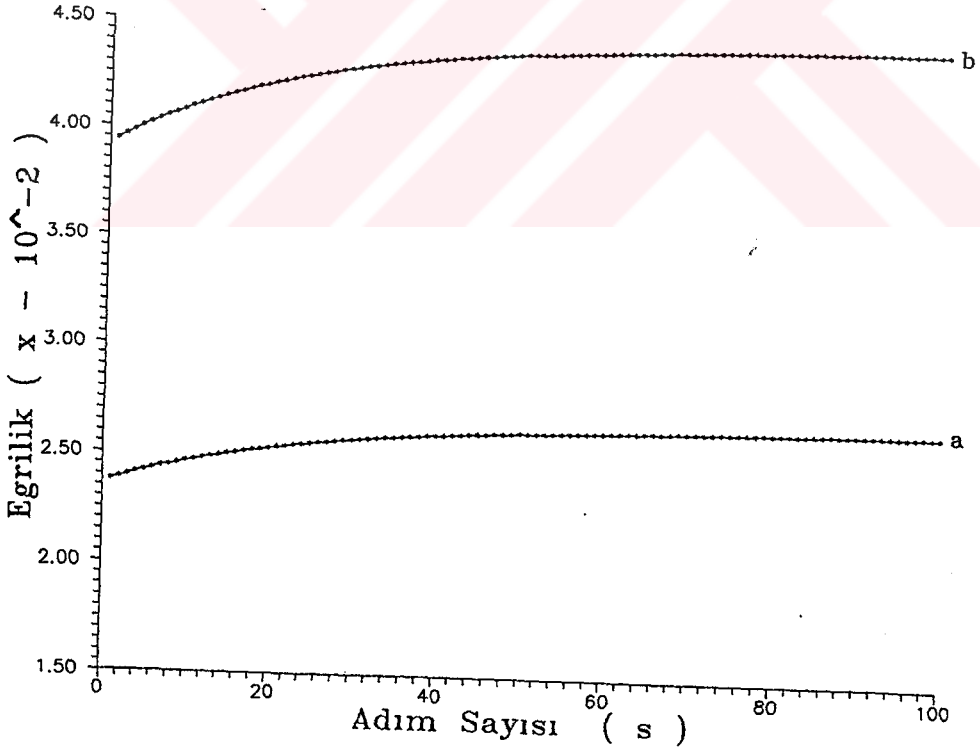
Şekil 5.9 : Kare plak için, doğrusal halde, deplasman değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) 7 No'lu ve (b) 13 No'lu düğüm noktaları



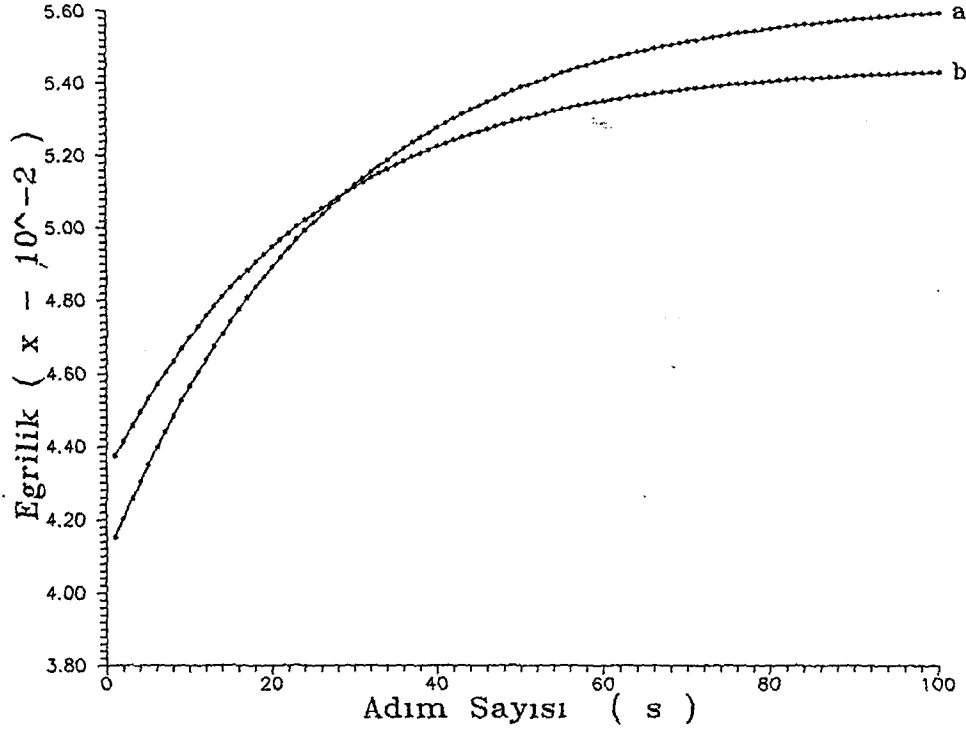
Şekil 5.10 : Kare plak için, doğrusal olmayan durumda deplasman değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) 7 No'lu ve (b) 13 No'lu düğüm noktaları



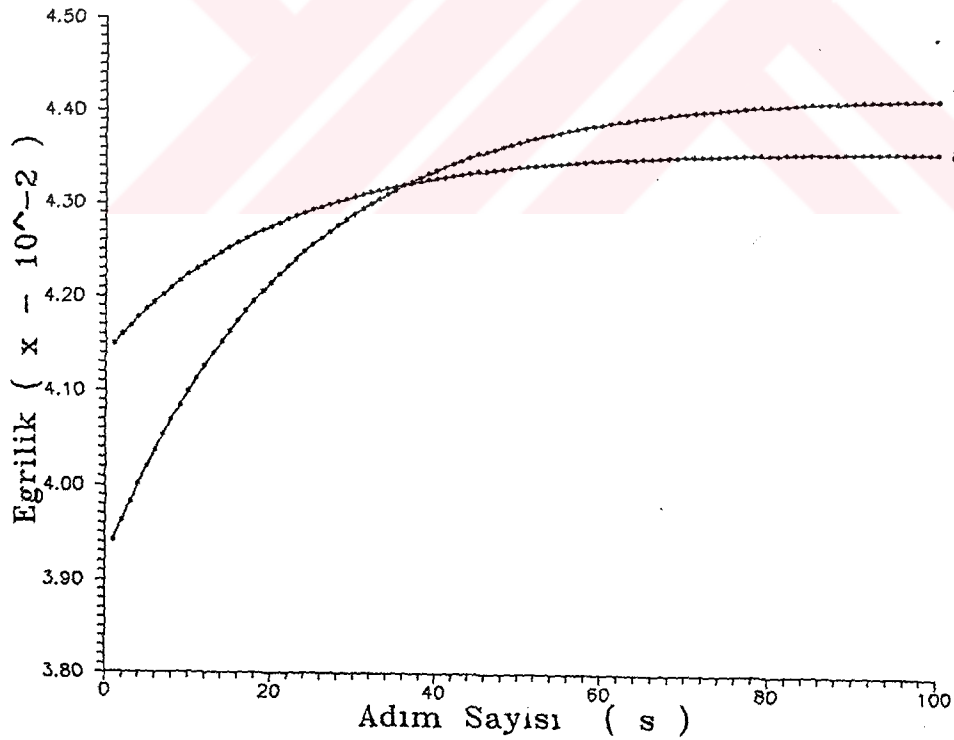
Şekil 5.11 : Kare plak için, doğrusal halde, eğrilik değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) 7 No'lu ve (b) 13 No'lu düğüm noktaları



Şekil 5.12 : Kare plak için, doğrusal olmayan durumda eğrilik değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) 7 No'lu ve (b) 13 No'lu düğüm noktaları



Şekil 5.13 : Doğrusal hal için, plağın orta noktasındaki eğrilik değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) Analitik çözüm (b) Sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm.



Şekil 5.14 : Doğrusal olmayan hal için, plağın orta noktasındaki eğrilik değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi (a) Analitik çözüm (b) Sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm

## 6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, ilk olarak doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plaklarda, stasyoner olmayan sünme durumu için geçerli *gerilme - deformasyon - zaman* ve *moment - eğrilik - zaman* ilişkileri elde edilmiş ve doğrusal olmayan durum için en genel halde ifade edilen bu bağıntıların içerdiği  $p$  sabitlerinin  $p_i = 1$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) alınması ile doğrusal viskoelastik malzemeli plaklar için de geçerli kabul edilebilecek ifadeler bulunmuştur. İkinci aşamada, analitik olarak elde edilen moment - eğrilik - zaman ilişkilerinden yararlanarak, kare plaklar için geçerli sonlu elemanlar yöntemi formülasyonu elde edilmiştir. Sonlu elemanlar formülasyonunda, doğrusal elastik malzemeli plaklar için elde edilmiş rijitlik matrisi ve malzeme sabitlerinin yanısıra, deplasman değerlerinin geçmişine bağlı terimler de yer almaktadır.

Analitik olarak elde edilen bağıntıların kullanılabilmesi için hazırlanan ve *Ek 2* 'de sunulan bilgisayar programları; sonlu elemanlar yöntemi formülasyonunun uygulanabilmesi için ise APL tipinde hazırlanan ve *Ek 2* 'de sunulmuş olan bilgisayar programları kullanılarak, *5. Bölüm*'de özellikleri tanımlanmış olan, sabit ve üniform yüklü, doğrusal ve doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli kare plak için örnek çözüm yapılmış ve elde edilen grafikler *5. Bölüm*'de sunulmuştur. Bu grafiklerin incelenmesi ile varılan sonuçlar aşağıda sunulmaktadır.

- *4.1 Bölümünde elde edilmiş olan moment - eğrilik - zaman ilişkileri, elastik çözümü bilinen, çeşitli yükleme durumlarına ve mesnet koşullarına sahip kare ve dikdörtgen plaklar için kullanılabilir niteliktedir.*

- *Örnek çözüm olarak sunulmuş olan plağın ortasındaki kesitin en dış lifinde oluşan deformasyon değerlerinin adım sayısına bağlı olarak değişimi incelendiğinde (Şekil 5.7), seçilen  $p_0$  ve  $p_1$  değerleri için doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plağa ait*

deformasyon değerlerinin, doğrusal viskoelastik malzemeli plağa ait deformasyon değerlerinden, başlangıçta % 5 mertebesinde daha küçük değerler aldığı ve adım sayısına bağlı olarak daha yavaş bir değişim gösterdiği görülmektedir. Kesitin farklı liflerindeki deformasyon değerlerinin değişimi de benzer bir gidiş göstermektedir (Şekil 5.3 ve 5.5).

- Gerilmeler, başlangıçta yaklaşık değerler almakta, ancak adım sayısına bağlı olarak değişim hızı doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plakta daha yavaş gerçekleşmektedir (Şekil 5.4 ve 5.6).

- Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen formülasyonların aynı probleme uygulanması ile elde edilen sonuçlar incelendiğinde (Şekil 5.9, 5.10, 5.11 ve 5.12) doğrusal olmayan viskoelastik plağa ait gerek deplasman ve gerekse eğrilik değerlerinin başlangıçta % 10 mertebesinde daha küçük olduğu ve adım sayısına bağlı olarak daha yavaş değiştiği görülmüştür.

- Sonlu elemanlar yöntemi ve analitik çözüm sonuçları birlikte değerlendirildiğinde (Şekil 5.13 ve 5.14 ), doğrusal viskoelastik malzemeli plakta sonlu elemanlar yönteminin verdiği sonuçlar başlangıçta % 5 mertebesinde daha büyük olmakla birlikte, her iki yöntemin sonuçlarının adım sayısı arttıkça birbirine yakınsadığı görülmektedir. Doğrusal olmayan durumda ise, başlangıçta analitik çözüm sonuçları % 10 mertebesinde büyük değerler vermekte, ancak doğrusal hale benzer biçimde adım sayısına bağlı olarak her iki yöntemin verdiği sonuçlar birbirine yakınlaşmaktadır.

- Çalışma sonucunda elde edilen sonuçlar arasında büyük farklılıklar olmaması, doğrusal ve doğrusal olmayan viskoelastik malzemeli plakların gerilme - deformasyon - zaman ilişkilerinin belirlenmesinde gerek analitik yöntemin, gerekse sonlu elemanlar yönteminin kullanılabilir nitelikte olduğunu göstermiştir.



- Çalışma sırasında, sünme davranışının malzeme sabitlerine önemli ölçüde bağlı olduğu ve sabitlerdeki küçük değişimlerin sistem davranışını önemli ölçüde etkilediği saptanmıştır.

Bu çalışma kapsamında ele alınamayan, ancak bu alanda yapılacak bundan sonraki çalışmalarda ele alınabilecek konular :

- Farklı malzemelere sahip plaklarda malzeme sabitlerinin [  $A_i(\sigma(t))$ ,  $B_i(\epsilon(t))$  ] sabit sıcaklık ve sıcaklık değişimlerine bağlı olarak deneylerle belirlenmesi;

- Analitik yöntem ile elde edilen bağıntıların sıcaklık değişkenini de kapsayacak biçimde geliştirilmesi;

- Viskoleastik malzemeli kabuklar ve üç boyutlu problemler için de, çalışmada elde edilen ilişkilere benzer gerilme - deformasyon - zaman ilişkilerinin elde edilmesi;

olarak sıralanabilir.

## K A Y N A K Ç A

**Achenbach, J.D.; Chao, C.C. (1962):** *A Three-parameter Viscoelastic Model Paritcularly Suited for Dynamic Problems.* J. Mech. Phys. Solids, Vol 10, 245 p.

**Alfrey, T. (1944):** *Mn-homogeneous Stresses in Viscoelastic Media.* Quart. Appl. Math., 113 p.

**Andrade, E.N. de C. (1910):** *The Viscous Flow in Metals and Allied Phenomena.* London, *Proceedings of Roy. Soc.*, A 84:1.

**Argyris, J.H. (1960):** *Energy Theorems and Structural Analysis.* Butterworth (reprinted from Aircraft Engineering 1954-55).

**Aroutiounian, N. Kh. (1957):** *Application de la Théorie du Fluage.* Paris, Editions Eyrolles.

**Bailey, R.W. (1929):** *Creep of Steel under Simple and Compound Stresses and The Use of High Initial Temperature in Steam Power Plants.* Tokyo, *Tokyo Sectional Meeting of the World Power Conference*, p. 1089.

**Baradan, B. (1978):** *Betonun Kısa Süredeki Sünme Davranışı için Reolojik Model Parametrelerinin Araştırılması.* İzmir, Ege Üniversitesi, Mühendislik Bilimleri Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yapı Ana Bilim Dalı Doktora Tezi.

**Bathe, K.J. (1982):** *Finite Element Procedures in Engineering Analysis.* New Jersey, Prentice - Hall, 729 p.

**Bažant, Z.P.; Tsubaki, T.; Celep, Z. (1983):** *Singular History Integral for Creep Rate of Concrete.* J. of Eng. Mech Vol. 109, No: 3 (June).

**Bažant, Z.P.; Chern, J-C. (1985):** *Triple Power Law for Concrete Creep.* J. of Eng. Mech., Vol. 111, No: 1 (January).

**Biezeno, C.B.; Koch, J.J. (1923):** *Over een Nieuwe Methode ter Berekening van Vlokke Platen.* Ing. Grav., No: 38, pp. 25 - 36.

**Bland, D.R. (1960):** *The Theory of Linear Viscoelasticity.* London, Pergamon Press, 125 p.

**Bogner, F.K.; Fox, R.L.; Schmit, L.A. (1965):** The Generation of Interelement-compatible Stiffness and Mass Matricws by the Use of Interpolation Formulae. Ohio, *Proceedings of Conferance on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A.F. Base.

**Boltzman, L. (1874):** *Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung.* Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademic der Wissenschaften, 275 s

**Boltzman, L. (1876):** *Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung.* Pogg. Ann. Physik, Vol. 7, 624 s.

**Brilla, J.; Lichardus, S.; Neméthy, A. (1974):** The Generalitization of the Finite Element Method for the Solution of Visco-elastic Two-dimensional Problems. Sweden, *Proceedings in IUTAM Symposium Mechanics of Visco-elastic Media and Bodies (Ed: J. Hult)*, Springer-Verlag.

**Carpenter, W.C. (1972):** *Viscoelastic Stress Analysis.* Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 4, pp. 357 - 366.

**Corneliussen, A.H.; Lee, E.H. (1962):** *Stress Distrubition Analysis for Linear Viscoelastic Materials.* International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM).

**Clough, R.W. (1960):** The Finite Element in Plane Stress Analysis. *Proceedings of 2nd A.S.C.E. Conference on Electronic Computation*, Pittsburg, Pa., September 1960.

**Clough, R.W.; Tocher, J.L. (1965):** Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plates in Bending. Ohio, Air Force Inst. of Tech., *Proc. Conf. Matrix Method in Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F. Base.

**Clough, R.W.; Felippa, C.A. (1968):** A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending. Ohio, Air Force Inst. of Tech., *Proc. 2nd Conf. Matrix Method in Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F. Base.

**Courant, R. (1943):** *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration*. Bull. Am. Math. Soc., No: 49, pp. 1 - 23.

**Davis, R.E.; Davis, H.E. (1931):** *Flow of Concrete under the Action of Sustained Loads*. Proc. ACI 27.

**Distefano, J.N.; Sackman, J.L. (1967):** Creep Buckling of a Nonlinearly Visco-elastic Beam-Column. Berkeley, *University of California, Structural Engineering Laboratory, Report No: 67-5*, March 1967.

**Dorn, J.E. (1961):** *Mechanical Behaviour of Materials at Elevated Temperature (Editor)*. New York, Mc Graw Hill Book Co.

**Durban, D.; Zeitoun, D.G.; Benaim, H.E. (1990):** *Finite Linear Viscoelasticity*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 116, No: 11, pp. 2449 - 2462.

**Flügge, W. (1967):** *Viscoelasticity*. Blaisdel Publishing Co.

**Findley, W.N.; Onaran, K. (1968):** *Product Form of Kernel Functions for Nonlinear Viscoelasticity of PVC Plastic under Constant Rate Stressing*. Trans Society of Rheology, Vol. 12, Issue 2, p. 217.

**Findley, W.N.; Khosla, G. (1955):** *Application of the Superposition Principle and Theories of Mechanical Equation of State, Strain and Time Hardening to Creep of Plastic under Changing Loads*. Journal of Applied Physics, Vol. 26, p. 821.

**Findley, W.N.; Lai, J.S. (1967):** *A Modified Superposition Principle to Creep of Nonlinear Viscoelastic Material under Abrupt Changes in State of Combined Stress*. Trans. Society of Rheology, Vol. 11, Issue 3, p. 361.

**Findley, W.N.; Stanley, C.A. (1968):** *Combined Stress Creep Experiments on Rigid Polyurethane Foam in the Nonlinear Region with Application to Multiple Integral and Modified Superposition Theory.* ASTM J. Mater., Vol. 4, p. 916.

**Findley, W.N.; Lai, J.S.; Onaran, K. (1989):** *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials.* New York, Dover Publications, 369 p.

**Finnie, I.; Heller, W.R. (1959):** *Creep of Engineering Materials.* Mc Graw - Hill Book Company.

**Galerkin, B.G. (1915):** *Series Solution of Some Problems of Elastic Equilibrium of Rods and Plates (Russian).* Vestn. Inzh. Tech., No: 19, pp. 897 - 908.

**Gauss, C.F. (1871):** *Carl Friedrich Gauss Werks.* Göttingen, Vol. VII.

**Ghali, A.; Neville, A.M. (1983):** *Structural Analysis.* New York, Chapman and Hall, 779 p.

**Gopalakrishnan, K.S.; Neville, A.M.; Ghali, A. (1969):** *Creep Poisson's Ratio of Concrete under Multiaxial Compression.* ACI Journal (December), pp. 66 - 90.

**Gottenberg, W.G.; Bird, J.O.; Agrawal, G.L. (1969):** *An Experimental Study of a Nonlinear Viscoelastic Solid in Uniaxial Tension.* Trans. of the ASME Applied Mechanics Division, September 1969.

**Gross, B. (1953):** *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity.* Paris, Hermann and Co.

**Hannatt, D.J. (1969):** *Creep and Creep Recovery of Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stress.* ACI Journal (May).

**Heaps, C.W.; Mansfield, L. (1986):** *An Improved Solution Procedure for Creep Problems.* Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 23, pp. 525 - 532.

**Hermann, L. (1967):** *Finite Element Bending Analysis for Plates*. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, No: 93, pp. 13 - 26.

**He-xiang, L.; Shu-ning, X. (1989):** An Effective Quadrilateral Plate Bending Element. International J: for Num. Meth. in Eng., Vol. 28, pp. 1145 - 1160.

**Hrenikoff, A. (1941):** *Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method*. J. Applied Mechanics, A8, pp. 169 - 175.

**Hrudey, T.M. (1973):** *A Creep Bending Analysis of Plates by the Finite Element Method*. Int. Journal of Solids Structures, Vol. 9, pp. 291 - 303.

**Hoff, N.J. (1954):** *Approximate Analysis of Structures in the Presence of Moderately Large Creep Deformations*. Quart. Appl. Math., Vol. 12, No: 1, p. 49.

**Hoff, N.J. (1958):** *High Temperature Effects in Aircraft Structures (Editor)*. London, Pergamon Press.

**Hoff, N.J. (1968):** *Mechanics Applied to Creep Testing*. The William M.Murray Lecture, Stanford University.

**Hughes, T.J.R.; Taylor, R.L.; Kanoknukulchai, W.(1977):** *A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 1529 - 1543.

**Hult, J. (1962):** *Oil Canning Problems in Creep*. New York, IUTAM; Creep in Structures (Ed. by N.J. Hoff), Academic Press Inc. Publishers.

**Hult, J. (1966):** *Creep in Engineering Structures*. Blaisdell Pub. Co., Waltham, Mass.

**Johnson, A.E. (1960):** *Complex - Stress Creep of Metals*. Metallurgical Reviews, Vol 5, No:20.

**Johnson, A.E.; Henderson, J.; Khan, B. (1963):** *Multiaxial Creep Strain / Complex Stress / Time Relations for Metallic Alloys with Some Applications to Structures.* New York, London, Paper 26, *ASME / ASTM / I. Mech. E., Proc. Int. Creep*

**Kachanov, L.M. (1960):** *Theory of Creep.* Moscow, Gos. Izdat. Fis.- Mat. Lit.

**Kaya, İ. (1973):** *Viskoelastik Malzemeler için Geçerli bir Gerilme-Deformasyon-Zaman İlişkisinin Tesbiti ve Uygulanması.* Ege Üniversitesi, M.B.F.

**Kennedy, A.J. (1963):** *Processes of Creep and Fatigue in Metals.* New York, Wiley.

**Kolsky, H. (1953):** *Stress Waves in Solids.* Oxford, Clarendon Press.

**Lai, J.S. ; Findley, W.N. (1968):** *Stress Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Material under Uniaxial Strain.* Trans. Society of Rheology, Vol. 12, Issue 2, p. 259.

**Lee, E.H. (1960):** *Viscoelastic Stress Analysis.* Proceedings of *First Symposium on Naval Structural Mechanics.* London, Pergamon Press, 456 p.

**Leaderman, H. (1943):** *Elastic and Creep Properties of Filamentous Materials.* Washington D.C., The Textile Foundation.

**Lin, T.H. (1962):** *Bending of a Plate with Nonlinear Strain Hardening Creep.* IUTAM, *Creep in Structures (Ed. by N.J. Hoff).* Academic Press Inc. Publishers.

**Liebman, H. (1918):** *Die angenäherte Ermittlung: harmonischen functionen end konformer Abbildung.* München, Sitzber Math. Physik Kl. Bayer Akad. Wiss., No: 3, pp. 65 - 75.

**Lockett, F.J. (1965):** *Creep and Stress Relaxation Experiment for Nonlinear Materials.* International Journal of Engineering Science, Vol. 3, p. 59.

**Lubahn, J.D.; Felgar, R.P. (1961):** *Plasticity and Creep of Metals.* New York, John Wiley Book Co.

**Lubliner, J. (1962):** *Cylindrical Wave in a Viscoelastic Solid*. Journal of Acoustical Society of America, Vol. 34, No. 11, p.1706.

**Ludwig, P. (1909):** *Elemente der Technologischen Mechanik*. Berlin, Springer.

**Manson, S.S. (1961):** Creep under Non-steady Temperatures and Stresses. *Contribution to Mechanical Behaviour of Materials at Elevated Temperatures (Ed. J.E.Dorn)*, Mc Graw Hill Book Company.

**Marin, J. (1962):** Mechanics of Creep and Combined Stresses. New York, *IUTAM, Creep in Structures (Ed.by N.J.Hoff)*, Academic Press Inc. Publishers.

**McHenry, D. (1943):** *A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems*. J. Inst. Civil Engineering, No: 21, pp. 59-82.

**Ming, P.G.; Fa, L.S. (1987):** *A New Element Used in the Non-Orthogonal Boundary Plate Bending Theory - An Arbitrarily Quadrilateral Element*. Int. J. Numer. Meth. in Eng., Vol. 24, pp. 1031 - 1042.

**Nadai, A. (1937):** *On the creep of Solids at Elevated Temperatures*. Journal of Applied Physics, Vol. 8, p. 418.

**Neis, V.V.; Sackman, J.L. (1967):** *An Experimental Study of a Nonlinear Material with Memory*. Trans Society of Rheology, Vol. 11, p. 307.

**Newmark, N.M. (1949):** Numerical Methods of Analysis in Bars Plates and Elastic Bodies. *Numerical Methods in Analysis in Engineering (Ed. L.E.Grinter)*. Mac Millan Book Company.

**Norton, F.H. (1929):** *The Creep of Steel at High Temperature*. New York, Mc Graw Hill.

**Odqvist, F.K.G.; Hult, J. (1962):** *Creep Strength of Metallic Materials*. Berlin, Springer.



**Odqvist, F.K.G. (1966):** *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*. London, Oxford Mathematics Monographs.

**Odqvist, F.K.G. (1974):** *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*. London, Oxford University Press, 200 p.

**Oliveria, E.R. de A. (1968):** *Theoretical Foundations of the Finite Element Method*. International Journal of Solids Structures, Vol. 4, pp. 929 - 952.

**Onaran, K. ; Findley, W.N. (1968):** *Combined Stress Creep Experiments on a Nonlinear Viscoelastic Materials to Determine the Kernel Functions for a Multiple Integral Representation of Creep*. Trans. Society of Rheology, Vol. 9, Part 2, p. 299.

**Onaran, K. ; Findley, W.N. (1971):** *Experimental Determination of Some Kernel Functions in the Multiple Integral Method for Nonlinear Creep of Polyvinyl Chloride*. Journal of Applied Mechç Trans. ASME, Vol 38, p. 30.

**Onaran, K. (1968):** Viskoelastisite. İstanbul, *Sürekli Ortamlar Mekaniği I. Yaz Okulu*, s. III-1, III-26.

**Patel, A.S.; Vankatemann, B. (1962):** *On the Creep Stress Analysis of Some Structures*. New York, IUTAM; Creep in Structures (Ed. by N.J. Hoff), Academic Press Inc. Publishers.

**Penny, R.K.; Marriott, D.L. (1971):** *Design for Creep*. London, Mc Graw-Hill Company, 291 p.

**Petyt, M. (1990):** *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge University Press.

**Ping, H.; Rang, X.H. (1985):** *An Effective Quadrilateral Mixed/Hybrid Plate Element*. Journal Ji Ling Technical University (China), No: 3.

**Pipkin, A.C.; Rogers, T.G. (1968):** *Nonlinear Integral Representation for Viscoelastic Behaviour.* Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol 16, p. 59.

**Poceski, A. (1975):** *A Mixed Finite Element Method for Bending of Plates.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, pp. 3 - 15.

**Prager, W.; Synge, J.L. (1947):** *Approximation in Elasticity Based on the Concept of Function Space.* Q. J. Appl. Math., No: 5, pp. 241 - 269.

**Prandtl, L. (1928):** *Ein Gedankenmodell zur Kinetischen Theorie der Festen Körper.* Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 8, s. 85.

**Rabotnov, Y.N. (1962):** *Some Problems on the Theory of Creep.* National Advisory Committee for Aeronautics, NASA Technical Memorandum, No: 1353.

**Rabotnov, Y.N. (1969):** *Creep Problems in Structural Members.* Amsterdam, North - Holland Pub. Co.

**Rayleigh, Lord (Strutt, J.W.) (1870):** *On the Theory of Resonance.* London, Trans. Roy. Soc., A 161, pp. 77 - 118.

**Razzaque, A. (1972):** *Finite Element Analysis of Plates and Shells.* Swansea, Univ. of Wales, Civil Engineering Department, Ph.D. Thesis.

**Richardson, L.F. (1910):** *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems.* London, Trans. Roy. Soc., A 210, pp. 307 - 357.

**Ritz, W. (1909):** *Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variations - Probleme der mathematischen Physik.* J. Reine Angew. Math., No: 135, pp. 1 - 61.

**Sackman, J.L. (1962):** *Uniformly Processing Surface Pressure an a Viscoelastic Half-Plane.* Proceedings of 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics, Vol 2, p. 1067.

**Smith, A.I.; Nicolson, A.M. (1971):** *Advances in Creep Design (Editors)*. London, A.E. Johnson Memorial Volume, Applied Science Publishers.

**Snyder, M.D.; Bathe, K.J. (1981):** *A Solution Procedure for Thermo-elastic and Creep Problems*. Nucl. Eng. Des., Vol. 64, pp. 49 - 80.

**Southwell, R.V. (1946):** *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Clarendon Press.

**Stenberg, R. (1988):** *A Family of Mixed Finite Elements for the Elasticity Problem*. Numerical Math., Vol. 53, No: 5, pp. 513 - 538.

**Stuart, H.A. (1956):** *Die Physik der Hochpolymeren*. Band I, Springer Verlag.

**Tapsell, H.J. (1931):** *Creep of Metals*. Oxford University Press.

**Taylor, R.L. (1973):** *Inversion of Prony Series Characterization for Viscoelastic Analysis*. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 5, pp. 499 - 502.

**Taylor, R.L.; Pister, K.S.; Goudreau, G.L. (1970):** *Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids*. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 2, pp. 45 - 59.

**Thurstan, R.H. (1895):** *Materials of Construction*. New York, John Wiley.

**Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger, S. (1959):** *Theory of Plates and Shells*. New York, McGraw-Hill Book Company, 580 p.

**Ting, E.C. (1970):** *Stress Analysis for a Nonlinear Viscoelastic Cylinder with Ablating Inner Surfaces*. Journal of Applied Mechanics Trans. ASME, Series E, Vol. 37, p. 44.

**Tong, P.; Pian, H.H.T. (1969):** *Convergence of Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems*. Int. J. Solids Structures, Vol. 3, pp. 865 - 879.

**Turner, M.J.; Clough, R.W.; Martin, H.C.; Topp, L.J. (1956):** *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*. J. Aero. Science, No: 23; pp. 805 - 823.

**Valanis, K.C. (1965):** *Wave Propagation in Viscoelastic Solids with Measured Relaxation or Creep Functions.* New York, Proceedings of *4th International Congress on Rheology*, Part II, Interscience Publ., 261 p.

**Varga, R.S. (1962):** *Matrix Iterative Analysis.* Prentice - Hall.

**Vicat, L.T. (1834):** Note Sur L'Allongement Progressif du Fil de Fer Soumis a Diverses Tensions. *Annales, Ponts et Chaussées, Mémoires et Docum.*, Vol 7.

**Volterra, V. (1909):** *Sulle Equazioni Integro-differenziali della Teoria del Elasticita.* Atti della Reale Accademia dei Lincei, 295 p.

**Webber, J.P.H. (1969):** *Stress Analysis in Viscoelastic Bodies Using Finite Elements and a Correspondence Rule with Elasticity.* J. Strain Analysis, Vol. 4, pp. 236 - 243.

**Whirley, R.G.; Henshall, A.G. (1992):** *Creep Deformation Analysis Using an Efficient Numerical Algorithm.* Int. J. of Num. Meth. in Eng., Vol. 35, pp. 1427 - 1442.

**White, J.L. (1958):** Finite Elements in Linear Viscoelasticity. Ohio, *Proceedings of Conference on Structural Mechanics.*

**Wolf, J.P. (1973):** *Generalized Hybrid Stress Finite Element Models.* AIAA Journal, Vol. 11, No: 3, pp. 386 - 388.

**Yagawa, G.; Miyazaki, N.; Ando, Y. (1977):** *Superposition Method of Finite Element and Analytical Solutions for Transient Creep Analysis.* Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 11, pp. 1107 - 1115.

**Yamamoto, Y. (1971):** Finite Element Approaches with the Aid of analytical Solutions. Alabama, *In Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design* (Ed. R.H. Gallanger, Y. Yamada and J.T. Oden), The University of Alabama Press.

**Zienkiewicz, O.C. (1977):** *The Finite Element Method.* London, McGraw-Hill Book Company, p. 787.

**Zienkiewicz, O.C.; Watson, M.; King, I.P. (1968):** *A Numerical Method of Viscoelastic Stress Analysis.* Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 807 - 827.

## EK 1: İNTEGRAL İFADELERİNİN AÇIK GÖSTERİMLERİ

(4.77) ifadesinde yer alan  $z$  değişkenine bağlı integrallerin hesabı:

A.

$$\begin{aligned} \int_z [-z w_{xx}(t)] z dz &= -w_{xx}(t) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \\ &= -w_{xx}(t) \left[ \frac{z^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} \right] \\ &= -w_{xx}(t) \left[ \frac{h^3}{12} \right] \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.1})$$

$$I_0 = \frac{h^3}{12} \quad (\text{Ek 1.2})$$

olarak alındığında;

$$\int_z [-z w_{xx}(t)] z dz = -w_{xx}(t) I_0 \quad (\text{Ek 1.3})$$

şeklinde elde edilecektir.

B.

Mutlak Değerli Terimler içeren integrallerin hesaplanmasında kullanılan işaret fonksiyonu (*Signum Function*),

$$|F(x)| = F(x) \operatorname{sgn} F(x)$$

$$F(x) \neq 0 \text{ ise } \operatorname{sgn}^2 F(x) = 1 \quad (\text{Ek 1.4})$$

şeklinde tanımlanabilir. a herhangi bir sayı ve b bir tamsayı olduğunda, integral ifadesi,

$$\int |x|^a x^b dx \quad \begin{array}{l} \text{b tek ise} \\ \frac{|x|^{a+b+1}}{a+b+1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b çift ise} \\ \frac{|x|^{a+b+1}}{a+b+1} \operatorname{sgn} x \end{array} \quad (\text{Ek 1.5})$$

şeklinde elde edilebilir (Hult, 1966).

$$\int_z [-z w_{xx}(t)] | -z w_{xx}(t) |^{p_0-1} z dz = -\frac{1}{w_{xx}(t)^{-h/2}} \int_{-h/2}^{h/2} | -z w_{xx}(t) |^{p_0-1} (-z w_{xx}(t))^2 dz$$

$$-z w_{xx}(t) = X \quad ; \quad -w_{xx}(t) dz = dX \quad (\text{Ek 1.6})$$

dönüşümleri yapıldığında,

$$\frac{1}{w_{xx}^2(t)} \int |X|^{p_0-1} X^2 dX = \frac{1}{w_{xx}^2(t)} \frac{|X|^{p_0+2}}{p_0+2} \operatorname{sgn} X \quad (\text{Ek 1.7})$$

$$\frac{1}{w_{xx}^2(t)} \frac{|-z w_{xx}(t)|^{p_0+2}}{p_0+2} \operatorname{sgn}(-z w_{xx}(t)) \Big|_{-h/2}^{h/2}$$

biçiminde tanımlanabilecektir. (Ek 1.7) ifadesinin değeri, gerek pozitif ve gerekse negatif  $w_{xx}$  değerleri için,

$$-w_{xx}(t) \frac{2}{p_0 + 2} \left(\frac{h}{2}\right)^{p_0+2} |w_{xx}(t)|^{p_0-1} \quad (\text{Ek 1.8})$$

ifadesi ile elde edilebilir. İfadede yer alan,

$$\frac{2}{p_0+2} \left(\frac{h}{2}\right)^{p_0+2} = I_{p_0} \quad (\text{Ek 1.9})$$

olarak alındığında, integral ifadesi,

$$\int_z [-z w_{xx}(t)] | -z w_{xx}(t) |^{p_0-1} z dA = -w_{xx}(t) |w_{xx}(t)|^{p_0-1} I_{p_0} \quad (\text{Ek 1.10})$$

şeklinde elde edilecektir.

C.

$$\int_z [-z w_{xx}(t)] | -z w_{xx}(t) |^{p_0-1} z dz$$

$$-z w_{xx}(t) = X \quad -w_{xx}(t) dz = dX \quad (\text{Ek 1.11})$$

dönüşümleri yapıldığında,

$$= \frac{w_{yy}(t)}{w_{xx}^3(t)} \int |X|^{p_0-1} X^2 dX \quad (\text{Ek 1.12})$$

$$= \frac{w_{yy}(t)}{w_{xx}^3(t)} \frac{|X|^{p_0+2}}{p_0 + 2} \text{sgn}X \quad (\text{Ek 1.13})$$

$$= \frac{w_{yy}(t) | -z w_{xx}(t) |^{p_0+2}}{w_{xx}^3(t) (p_0 + 2)} \operatorname{sgn}(-z w_{xx}(t)) \Big|_{-h/2}^{h/2} \quad (\text{Ek 1.14})$$

şeklinde elde edilir. (Ek 1.12) ila (Ek 1.14) ifadelerinin değeri pozitif ve negatif  $w_{xx}$  değerleri için hesaplandığında, integral ifadesi,

$$\int_z [-z w_{yy}(t)] | -z w_{xx}(t) |^{p_0-1} z dz = -w_{yy}(t) | w_{xx}(t) |^{p_0-1} I_{p_0} \quad (\text{Ek 1.15})$$

biçiminde ifade edilebilir.



## EK 2: BİLGİSAYAR PROGRAMLARI

```
REM YUMUSAMA FONKSİYONLARININ KULLANILMASI İLE
' MOMENT - EGRİLİK - ZAMAN İLİŞKİLERİNİN BELİRLENMESİ
CLS
OPTION BASE 0
OPEN "RELAX1L.DAT" FOR OUTPUT AS #3
PRINT "HESAPLANACAK NOKTA SAYISINI GIRINIZ"
INPUT SSON
DIM WXX(SSON), WYY(SSON), WXXI(SSON), WYYI(SSON), AWXX(SSON), AWYY(SSON)
READ MX, MY, MXY, H, NU, K0, E, DT
READ WXX(0), WYY(0), WXY(0), P(0)
DATA 23.95,23.95,0,10,3, 100000, 300000 , 1
DATA -6.7E-7, -6.7E-7,0, 1
' M: MALZEME İNDİSİ
PRINT "MALZEME İNDİSİNİ GIRINIZ"
INPUT M
TK = 0
AWXX(0) = ABS(WXX(0))
AWYY(0) = ABS(WYY(0))
FOR I = 1 TO M
READ LAMDA(I), K(I), P(I)
DATA 20, 75000, 1
TK = TK + K(I)

$$IP(I) = 2 / (P(I) + 2) * (H / 2) ^ (P(I) + 2)$$

NEXT I

$$I0 = H ^ 3 / 12$$


$$IP0 = 2 / (P(0) + 2) * (H / 2) ^ (P(0) + 2)$$


$$B = 1 / (1 - NU ^ 2)$$

' t: ZAMAN ; dt: ZAMAN ARALIGI ;s: BULUNULAN NOKTA
' integral ifadelerinin hesabı
FOR S = 1 TO SSON
WXX(S) = WXX(S - 1)
WYY(S) = WYY(S - 1)
10 SWXKT(1) = 0: SWYKT(1) = 0: INTWXX(1) = 0: INTWYY(1) = 0
SWXYT(1) = 0: SWYXT(1) = 0: INTWXYT(1) = 0: INTWYXT(1) = 0
```

```

AWXX(S) = ABS(WXX(S))
AWYY(S) = ABS(WYY(S))
T = S * DT
WXXIP0 = K0 * IP0 * AWXX(S) ^ (P(0) - 1)
WYKIP0 = K0 * IP0 * AWYY(S) ^ (P(0) - 1)
MALZEME DONGUSU
FOR I = 1 TO M
KWX(I) = K(I) * IP(I) / (LAMDA(I) * WXX(S))
KWY(I) = K(I) * IP(I) / (LAMDA(I) * WYY(S))
KWXIY(I) = K(I) * IP(I) * NU / (LAMDA(I) * WXX(S))
KWYIY(I) = K(I) * IP(I) * NU / (LAMDA(I) * WYY(S))
IF S > 1 THEN GOTO 100
INTWXT(I) = .5 * DT * (WXX(0) * AWXX(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) + (WXX(S)
    * AWXX(S) ^ (P(I) - 1)))
INTWYT(I) = .5 * DT * (WYY(0) * AWYY(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) + (WYY(S)
    * AWYY(S) ^ (P(I) - 1)))
GOTO 110
100 FOR K = 1 TO S - 1
SWXKT(I) = SWXKT(I) + WXX(K) * AWXX(K) ^ (P(I) - 1) * EXP(-(S * DT - K * DT) /
    LAMDA(I))
SWYKT(I) = SWYKT(I) + WYY(K) * AWYY(K) ^ (P(I) - 1) * EXP(-(S * DT - K * DT) /
    LAMDA(I))
SWXYT(I) = SWXYT(I) + WYY(K) * WXX(K) * AWXX(K) ^ (P(I) - 1) * EXP(-(S * DT - K * DT)
    / LAMDA(I))
SWYXT(I) = SWYXT(I) + WXX(K) * WYY(K) * AWYY(K) ^ (P(I) - 1) * EXP(-(S * DT - K * DT)
    / LAMDA(I))
NEXT K
INTWXT(I) = .5 * DT * (WXX(0) * AWXX(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) + 2 *
    SWXKT(I) + (WXX(S) * AWXX(S) ^ (P(I) - 1)))
INTWYT(I) = .5 * DT * (WYY(0) * AWYY(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) + 2 *
    SWYKT(I) + (WYY(S) * AWYY(S) ^ (P(I) - 1)))
INTWXYT(I) = .5 * DT * (WYY(0) * WXX(0) * AWXX(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I))
    + 2 * SWXYT(I) + (WYY(S) * WXX(S) * AWXX(S) ^ (P(I) - 1)))
INTWYXT(I) = .5 * DT * (WXX(0) * WYY(0) * AWYY(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I))
    + 2 * SWYXT(I) + (WXX(S) * WYY(S) * AWYY(S) ^ (P(I) - 1)))
110 NEXT I

```

```

SUMXX = 0: SUMXY = 0: SUMYY = 0: SUMYX = 0
SWXKP = 0: SWYKP = 0: SWXKY = 0: SWYKY = 0
FOR I = 1 TO M
  UP1 = P(I) - 1
SUMXX = SUMXX + KWX(I) * INTWXT(I)
SUMXY = SUMXY + KWXIY(I) * INTWXYT(I)
SUMYY = SUMYY + KWIY(I) * INTWYT(I)
SUMYX = SUMYX + KWIYI(I) * INTWYXT(I)
SWXKP = SWXKP + K(I) * IP(I) * AWXX(S) ^ UP1
SWYKP = SWYKP + K(I) * IP(I) * AWYY(S) ^ UP1
SWXKY = SWXKY + K(I) * IY(I) * AWXX(S) ^ UP1
SWYKY = SWYKY + K(I) * IY(I) * AWYY(S) ^ UP1
NEXT I
KNX = K0 * NU * WYY(S) * IY0 * AWXX(S) ^ (P(0) - 1)
KNY = K0 * NU * WXX(S) * IY0 * AWYY(S) ^ (P(0) - 1)
REM
'      ( TUM TERIMLER HESAPLANDI )
'      EGRILIK DEGERLERININ HESABI
REM
WYWX = WYY(S) / WXX(S)
WXWY = WXX(S) / WYY(S)
WXXI(S) = -MX / (B * (E * I0 - WXKIP0 + SWXKP - SUMXX + E * NU * WYWX * I0 - KNX +
NU * WYY(S) * SWXKY - SUMXY))
WYI(S) = -MY / (B * (E * I0 - WYKIP0 + SWYKP - SUMYY + E * NU * WXWY * I0 - KNY +
NU * WXX(S) * SWYKY - SUMYX))
DELWXX = ABS(WXX(S) - WXXI(S))
DELWYY = ABS(WYY(S) - WYI(S))
IF DELWXX < .0000001# AND DELWYY < .0000001# THEN GOTO 210
WXX = WXX(S): WYY = WYY(S)
WXX(S) = WXXI(S): WYY(S) = WYI(S): GOTO 10
210 WXX(S) = WXXI(S): WYY(S) = WYI(S)
PRINT #3, USING " ###   ###.####   ###.####"; S; WXX(S) * 10 ^ 7; WYY(S) * 10 ^ 7
PRINT USING " ###   ###.####   ###.####"; S; WXX(S) * 10 ^ 7; WYY(S) * 10 ^ 7
NEXT S
END

```

```
REM          YUMUSAMA FONKSIYONLARININ KULLANILMASI ILE
'           MOMENT - EGRILIK - ZAMAN ILISKILERININ BELIRLENMESI
'           EGRILIK DEGERLERINDEN GERILME ve DEFORMASYON DEGERLERINE GECIS
CLS
```

```
OPTION BASE 0
```

```
OPEN "RELAX.DAT" FOR INPUT AS #1
```

```
INPUT "CIKTI KUTUGUNUN ADINI GIRINIZ (UZANTISIZ)==> ", CIK$
```

```
CIK$ = CIK$ + ".DAT"
```

```
OPEN CIK$ FOR OUTPUT AS #3
```

```
INPUT "HESAPLANACAK ADIM SAYISINI GIRINIZ ==> ", SSON
```

```
DIM WXX(SSON), WYY(SSON), WXY(SSON), WYX(SSON), AWXX(SSON), AWYY(SSON),
```

```
DIM SIGX1(SSON), SIGX2(SSON), SIGX3(SSON), SIGX4(SSON), SIGY1(SSON), SIGY2(SSON),
```

```
DIM SIGY3(SSON), SIGY4(SSON), SXBI(SSON), SYBI(SSON), SXYBI(SSON), SYXBI(SSON),
```

```
DIM INTWXT(SSON), INTWYT(SSON), INTWXYT(SSON), INTWYXT(SSON), SUMXX(SSON),
```

```
DIM SUMYY(SSON), B0Y(SSON), B0X(SSON), B1X(SSON), B1Y(SSON), XFI0(SSON), YFI0(SSON)
```

```
REM KULLANILAN DATA KUTUGUNE BAGLI PARAMETRE DEGERLERI
```

```
NU = .3: E = 300000: P(0) = 1.1: P(1) = 1.105: H = 10
```

```
K0 = 100000: K(1) = 75000: LAMDA(1) = 20
```

```
WXX(0) = -6.7E-07: WYY(0) = -6.7E-07: DT = 1
```

```
INPUT "MALZEME INDISINI GIRINIZ ==> ", M
```

```
INPUT " HESAP YAPILACAK KESITIN YUKSEKLIGINI H CINSINDEN GIRINIZ ==> ", Z
```

```
FOR I = 1 TO SSON
```

```
INPUT #1, J, WXX(I), WYY(I)
```

```
WXX(I) = WXX(I) * Z * 10 ^ (-7)
```

```
WYY(I) = WYY(I) * Z * 10 ^ (-7)
```

```
NEXT I
```

```
B = 1 / (1 - NU ^ 2)
```

```
REM integral ifadelerinin hesabi
```

```
SXBI(1) = 0: SYBI(1) = 0: INTWXT(1) = 0: INTWYT(1) = 0
```

```
SXYBI(1) = 0: SYXBI(1) = 0: INTWXYT(1) = 0: INTWYXT(1) = 0
```

```
SUMXX(1) = 0: SUMYY(1) = 0
```

```
FOR S = 1 TO SSON
```

```
AWXX(S) = ABS(WXX(S))
```

```
AWYY(S) = ABS(WYY(S))
```

```
T = S * DT
```

```
WXY(S) = WXX(S) + NU * WYY(S)
```

```
WYX(S) = WYY(S) + NU * WXX(S)
```

```

BOX(S) = E - K0 * AWXX(S) ^ (P(0) - 1)
BOY(S) = E - K0 * AWYY(S) ^ (P(0) - 1)
REM      MALZEME DONGUSU
      FOR I = 1 TO M
BIX(S) = K(I) * AWXX(S) ^ (P(I) - 1)
BIY(S) = K(I) * AWYY(S) ^ (P(I) - 1)
G = EXP(-T / LAMDA(I))
XF10 = BOX(S) + BIX(S)
YF10 = BOY(S) + BIY(S)
IF S > 1 THEN GOTO 100
INTWXT(S) = .5 * DT * (WXX(0) * AWXX(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) +
(WXX(S) * AWXX(S) ^ (P(I) - 1)))
INTWYT(S) = .5 * DT * (WYY(0) * AWYY(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) +
(WYY(S) * AWYY(S) ^ (P(I) - 1)))
INTWXYT(S) = .5 * DT * (WYY(0) * AWXX(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) +
(WYY(S) * AWYY(S) ^ (P(I) - 1)))
INTWYXT(S) = .5 * DT * (WXX(0) * AWYY(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) +
(WYY(S) * AWYY(S) ^ (P(I) - 1)))
GOTO 110
100   FOR K = 1 TO S - 1
SXBI(K) = SXBI(K) + WXX(K) * AWXX(K) ^ (P(I) - 1) * EXP(-(S * DT - K * DT) / LAMDA(I))
SYBI(K) = SYBI(K) + WYY(K) * AWYY(K) ^ (P(I) - 1) * EXP(-(S * DT - K * DT) / LAMDA(I))
SXYBI(K) = SXYBI(K) + WYY(K) * AWXX(K) ^ (P(I) - 1) * EXP(-(S * DT - K * DT) /
LAMDA(I))
SYXBI(K) = SYXBI(K) + WXX(K) * AWYY(K) ^ (P(I) - 1) * EXP(-(S * DT - K * DT) /
LAMDA(I))
NEXT K
INTWXT(S) = .5 * DT * (WXX(0) * AWXX(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) + 2 *
SXBI(S) + (WXX(S) * AWXX(S) ^ (P(I) - 1)))
INTWYT(S) = .5 * DT * (WYY(0) * AWYY(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) + 2 *
SYBI(S) + (WYY(S) * AWYY(S) ^ (P(I) - 1)))
INTWXYT(S) = .5 * DT * (WYY(0) * AWXX(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) + 2 *
SXYBI(S) + (WYY(S) * AWXX(S) ^ (P(I) - 1)))
INTWYXT(S) = .5 * DT * (WXX(0) * AWYY(0) ^ (P(I) - 1) * EXP(-S * DT / LAMDA(I)) + 2 *
SYXBI(S) + (WXX(S) * AWYY(S) ^ (P(I) - 1)))
110 SUMXX(S) = SUMXX(S) + K(I) / LAMDA(I) * (INTWXT(S) + NU * INTWXYT(S))
SUMYY(S) = SUMYY(S) + K(I) / LAMDA(I) * (INTWYT(S) + NU * INTWYXT(S))
NEXT I

```

REM

,

( TUM TERIMLER HESAPLANDI )

,

DEFORMASYON VE GERILME DEGERLERININ HESABI

REM

SIGX1(S) = B \* (WXY(S) \* XF10 - SUMXX(S))

SIGY1(S) = B \* (WYX(S) \* YF10 - SUMYY(S))

PRINT #3, USING " ### ###.#### ###.#### ###.#### ###.####"; S; SIGX1(S);  
SIGY1(S); WXX(S) \* 10 ^ 7; WYY(S) \* 10 ^ 7

PRINT USING " ### ###.#### ###.#### ###.#### ###.####"; S; WXX(S) \* 10  
^ 7; WYY(S) \* 10 ^ 7; SIGX1(S); SIGY1(S)

NEXT S

END



[ 0] DEPV  
 [ 1]  $H \leftarrow 10$   
 [ 2]  $DT \leftarrow 1$   
 [ 3]  $I0 \leftarrow (H * 3) \div 12$   
 [ 4]  $P0 \leftarrow 1.1$   
 [ 5]  $P1 \leftarrow 1.105$   
 [ 6]  $IP0 \leftarrow (2 \div (P0 + 2)) \times ((H \div 2) * (P0 + 2))$   
 [ 7]  $IP1 \leftarrow (2 \div (P1 + 2)) \times ((H \div 2) * (P1 + 2))$   
 [ 8]  $E \leftarrow 3E5$   
 [ 9]  $K0 \leftarrow 1E5$   
 [10]  $K1 \leftarrow .75E5$   
 [11]  $K0X \leftarrow (K0 \times IP0) \div (E \times I0)$   
 [12]  $K1X \leftarrow (K1 \times IP1) \div (E \times I0)$   
 [13]  $DV1 \leftarrow DEP$   
 [14]  $S \leftarrow 0$   
 [15]  $DVD \leftarrow DV1$   
 [16]  $L1 : DV1 \leftarrow DVD$   
 [17]  $S \leftarrow S+1$   
 [18]  $DVD \leftarrow DEP + (K0X \times (DV1 \times |DV1 * (P0 - 1)|)) +$   
 $(-K1X \times (DV1 \times |DV1 * (P1 - 1)|))$   
 [19]  $FR \leftarrow (N+1) \rho 0$   
 [20]  $FR \leftarrow |DVD - DV1$   
 [21]  $F \leftarrow (N+1) \rho ((N+1) \rho 1E-9$   
 [22]  $\rightarrow (\sim x / , (F \geq FR)) / L1$   
 [23]  $DV1 \leftarrow DVD$   
 [24]  $\nabla$

- [ 0] DEPV1
- [ 1] LD ← 20
- [ 2] KIXL ← ( K1 x IP1 ) ÷ ( LD x E x I0 )
- [ 3] SM ← 1 (N+1) 1 ρ 0
- [ 4] DPE ← 1 (N+1) 1 ρ DEP
- [ 5] DVE ← 1 (N+1) 1 ρ DV1
- [ 6] DP ← 1 (N+1) 1 ρ DEP
- [ 7] DP ← DPE x ( |DPE \* ( P1 - 1 ) )
- [ 8] S ← 0
- [ 9] VD ← DVE
- [10] L1 : DVE ← VD
- [11] DV0 ← DVE x ( |DVE \* ( P0 - 1 ) )
- [12] DVI ← DVE x ( |DVE \* ( P1 - 1 ) )
- [13] SM ← .5 x DT x KIXL x ((( \* ( - DT ÷ LD )) x DP ) + DVI )
- [14] VD ← DPE + ( K0X x DV0 ) + (-1) x KIX x DVI ) + SM
- [15] S ← S + 1
- [16] FR ← 1 (N+1) 1 ρ 0
- [17] FR ← |DVE - VD
- [18] F ← 1 (N+1) 1 ρ 1E-9
- [19] → ( ~ x / , ( F ≥ FR )) / L1
- [20] DVE ← VD
- [21] ▽



```

[ 0] DEPV 2
[ 1] T ← 100
[ 2] SM ← T (N+1) 1 ρ SM
[ 3] DVI ← T (N+1) 1 ρ DVI
[ 4] DV0 ← T (N+1) 1 ρ DVE
[ 5] DVI ← T (N+1) 1 ρ DVE
[ 6] VD ← T (N+1) 1 ρ VD
[ 7] DVE ← T (N+1) 1 ρ DVE
[ 8] I ← 1
[ 9] SMK ← T (N+1) 1 ρ 0
[10] 11 : I ← I+1
[11] S ← 0
[12] VD[I;;] ← DVE[I;;]
[13] ITE1 : DVE[I;;] ← VD[I;;]
[14] S ← S + 1
[15] K ← 0
[16] SMK[I;;] ← 0
[17] L2 : K ← K+1
[18] IK ← (( K x DT ) - ( I x DT )) ÷ LD
[19] SMK[I;;] ← SMK[I;;] + (( * ( IK )) x DVE[K;;] x ( |DVE[K;;] * ( P1 -1 )))
[20] → ( K < ( I-1 )) / L2
[21] DV0[I;;] ← DVE[I;;] x ( |DVE[I;;] * ( P0 - 1 ))
[22] DVI[I;;] ← DVE[I;;] x ( |DVE[I;;] * ( P1 - 1 ))
[23] DP[I;;] ← ( * (-I x DT ÷ LD )) x DPE[1;;] x ( |DPE[1;;] * ( P1 - 1 ))
[24] SM[I;;] ← .5 x DT x KIXL x ( DP[1;;] + ( 2 x SMK[I;;] ) + DVI[I;;]
[25] VD[I;;] ← DPE[1;;] + ( K0X x DV0[I;;] ) + (-KIX x DVI[I;;] ) + SM[I;;]
[26] FR ← T (N+1) 1 ρ 0
[27] FR[I;;] ← |VD[I;;] - DVE[I;;]
[28] F ← T (N+1) 1 ρ ( T (N+1) 1 ρ 1E-9 )
[29] → ( ~ x / , ( F[I;;] ≥ FR[I;;] )) / ITE1
[30] → ( I < T ) / L1
[31] ▽

```

[ 0] STIFF  
 [ 1] GB ← BIP + .x ( [] K )  
 [ 2] CB ← 1 12 12 ρ GB  
 [ 3] R ← 0  
 [ 4] D1 ← T 12 1 ρ 0  
 [ 5] EG ← ( T x 16 ) 12 1 ρ 0  
 [ 6] L2 : R ← R+1  
 [ 7] S ← 0  
 [ 8] L3 : S ← S + 1  
 [ 9] D1[S;;] ← VD[S; INC [R;] ; 1 ]  
 [10] J ← ( T x ( R - 1 ) ) + S  
 [11] EG[J;;] ← GB[1;;] + .x D1[S;;]  
 [12] → ( S < T ) / L3  
 [13] → ( R < 16 ) / L2  
 [14] ▽

[ 0] RIJIT  
 [ 1] SR ← (N+1) (N+1) ρ 0  
 [ 2] SR[N+1;N+1] ← 1  
 [ 3] S1 ← 1  
 [ 4] L2 : S2 ← S1  
 [ 5] A1 ← INC = S1  
 [ 6] L1 : A2 ← INC = S2  
 [ 7] SR[S1;S2] ← + / ( 1 1 O( A1 + .x ( KK + .x O A2 )))  
 [ 8] SR[S2;S1] ← SR[S1;S2]  
 [ 9] → L1 x iN ≥ S2 ← S2 + 1  
 [10] → L2 x iN ≥ S1 ← S1 + 1  
 [11] RS ← []SR  
 [12] DEP ← RS + .x Q  
 [13] ▽

[ 0] STIFF1

[ 1]  $X \leftarrow 4 \rho (-B \div 2), (-B \div 2), (B \div 2), (B \div 2)$

[ 2]  $Y \leftarrow 4 \rho (-C \div 2), (C \div 2), (-C \div 2), (C \div 2)$

[ 3]  $I \leftarrow 0$

[ 4]  $BB \leftarrow 4 \ 3 \ 12 \ \rho \ 0$

[ 5]  $L1 : I \leftarrow I + 1$

[ 6]  $BI \leftarrow (3 \ \rho \ 0), (-2), 0, 0, (-6 \times X[I]), (-2 \times Y[I]), 0, 0, (-6 \times X[I] \times Y[I]), 0$

[ 7]  $BI \leftarrow BI, (5 \ \rho \ 0), (-2), 0, 0, (-2 \times X[I]), (-6 \times Y[I]), 0, (-6 \times X[I] \times Y[I]), 4 \ \rho \ 0$

[ 8]  $BI \leftarrow BI, 2, 0, 0, (4 \times X[I]), (4 \times Y[I]), 0, (6 \times (X[I]^2)), (6 \times (Y[I]^2))$

[ 9]  $BI \leftarrow 3 \ 12 \ \rho \ BI$

[10]  $BB[I;;] \leftarrow BI$

[11]  $\rightarrow (I < 4) / L1$

[12]  $BIP \leftarrow 12 \ 12 \ \rho \ BB$

[14]  $\nabla$