

**T.C**  
**BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ**

**DAĞILIMLI GECİKMELİ BİR AV-AVCI SİSTEMİNDE  
HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**EMİNE DEĞİRMENCİ**

**İstanbul, 2011**



**T.C**  
**BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ**  
**Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**Uygulamalı Matematik Bölümü**

**DAĞILIMLI GECİKMELİ BİR AV-AVCI SİSTEMİNDE  
HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Emine DEĞİRMENCİ**

**Tez Danışman: Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI**

**İstanbul, 2011**

T.C.  
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Uygulamalı Matematik Bölümü

Tezin Başlığı : Dağılımlı Gecikmeli Bir Av-Avcı sisteminde Hopf Çatallanma  
Ve Kararlılık Analizi.  
Örgencinin Adı Soyadı : Emine DEĞİRMENCİ  
Tez Savunma Tarihi : 08/09/20011

Bu yüksek lisans tezi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Doç.Dr. Tunç BOZBURA  
Enstitü Müdürü

Bu tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli görülmüş ve kabul edilmiştir.

Tez Sınav Jürisi Üyeleri :

Doç. Dr. Canan Çelik KARAASLANLI :

Doç. Dr. Mustafa POLAT :

Yard. Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU :

# TEŐEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla sabrımı ve bilgisini benden esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI'ya, en zor zamanlarımda bile bir an olsun yanımdan ayrılmayan DEĞERLİM'e, yardımlarıyla varlıklarımı hep hissettiğim arkadaşlarım Elif EKER'e, Berk AYGÜN'e ve Reyhan TELLİOĞLU'na, her zaman maddi ve manevi desteğiyle beni yalnız bırakmayan aileme teőekkürü bir borç bilirim.

İstanbul, 2011

Emine DEĞİRMENCI

## ÖZET

### DAĞILIMLI GECİKMELİ BİR AV-AVCI SİSTEMİNDE HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ

Değirmenci Emine

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Canan Çelik Karaaslanlı

Eylül, 2011, 78 sayfa

Bu tez çalışmasında dinamik sistemler ve matematiksel biyoloji dallarında büyük önem taşıyan bir dağılımlı gecikmeli bir av-avcı denklemi incelenmiştir. Bu denklemde özel olarak avcı dinamiği lojistik ayrıca taşıma kapasitesi av popülasyonu ile orantılı alınmıştır. İlk olarak gecikme parametresi  $\tau$ , çatallanma parametresi olarak seçilerek sistemin bazı  $\tau$  değerlerinde Hopf çatallanmaya sahip olduğu gösterilmiş, bu analize ek olarak, Poincaré Normal Form ve Center Manifold Teoremi kullanılarak çatallanma değerinde periyodik çözümün yönü, kararlılığı ve periyodu hesaplanmıştır. Ayrıca elde edilen bu teorik sonuçlar nümerik simülasyonlar ile desteklenmiştir

**Anahtar Kelimeler:** Av-avcı sistemi, Gecikmeli diferansiyel denklem, Çatallanma, Hopf çatallanma, Kararlılık.

## ABSTRACT

### HOPF BIFURCATION AND STABILITY ANALYSIS FOR DISTRIBUTED DELAYED PREY-PREDATOR SYSTEMS

Değirmenci,Emine

Supervisor: Associate Professor Dr. Canan Çelik Karaaslanlı

September, 2011, 78 pages

In this thesis, Hopf bifurcation of a predator-prey system with distributed delay which has an important role for dynamical systems and mathematical biology is investigated. In this system, specifically the predator dynamics is logistic with the carrying capacity proportional to prey population. First, by choosing the delay time  $\tau$  as a bifurcation parameter, it has been shown that Hopf bifurcation can occur as the delay time  $\tau$  passes some critical values and in addition to this analysis, the direction, stability and period of a periodic solution of a system is evaluated at bifurcation value by using Poincaré Normal Form and Center Manifold Theorem. Moreover, these theoretical results are supported by some numerical simulation.

**Keywords:** Prey-predator system, Delayed differential equation, Bifurcation, Hopf bifurcation, Stability.

## İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
1.1 AV-AVCI POPÜLASYON MODELİ.....	1
1.2 GECİKMELİ SİSTEMLERE GENEL BAKIŞ.....	3
1.3 LİTERATÜRDE GECİKMELİ SİSTEMLER.....	3
1.4 TEZ ÇALIŞMASININ AMACI.....	6
2. ÇATALLANMA ve HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ.....	8
2.1 ÇATALLANMA TEORİSİ.....	8
2.1.1 Kesikli Sistemler İçin Çatallanma Teorisi.....	8
2.1.2 Sürekli Sistemler İçin Çatallanma Teorisi.....	12
2.2 HOPF ÇATALLANMA.....	14
2.2.1 Hopf Çatallanma Teoremi.....	14
2.2.2 Hopf Çatallanma Türleri.....	15
2.2.3 Hopf Çatallanma Teorisi.....	16
2.3 CENTER MANİFOLD TEOREMİ.....	32
3. KARARLILIK ANALİZİ ve HOPF ÇATALLANMA.....	34
4. HOPF ÇATALLANMANIN YÖNÜ ve KARARLILIĞI.....	42
5. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR.....	59
6. SONUÇLAR.....	66
KAYNAKÇA.....	68



## ŞEKİLLER

Şekil 2.1 : Fold çatallanma.....	10
Şekil 2.2 : Süperkritik tırmık çatallanma.....	10
Şekil 2.3 : Transkritik çatallanma.....	11
Şekil 2.4 : Flip çatallanma.....	12
Şekil 2.5 : Fold çatallanma.....	13
Şekil 2.6 : Süperkritik hopf çatallanma.....	16
Şekil 2.7 : Subkritik hopf çatallanma.....	16
Şekil 5.1 : $\tau = 0.009 < \tau_0$ için av popülasyon yoğunluğu.....	61
Şekil 5.2 : $\tau = 0.009 < \tau_0$ için avcı popülasyon yoğunluğu.....	61
Şekil 5.3 : $\tau = 0.009 < \tau_0$ için S(t) fonksiyonu.....	62
Şekil 5.4 : $\tau = 0.009 < \tau_0$ için av popülasyon yoğunluğuna karşılık gelen avcı popülasyon yoğunluğu.....	62
Şekil 5.5 : $\tau = 0.009 < \tau_0$ için av popülasyon yoğunluğu.....	63
Şekil 5.6 : $\tau = 0.009 < \tau_0$ için avcı popülasyon yoğunluğu.....	64
Şekil 5.7 : $\tau = 0.009 < \tau_0$ için S(t) fonksiyonu.....	64
Şekil 5.8 : $\tau = 0.009 < \tau_0$ için avcı popülasyonunun av popülasyonuna göre faz portresi.....	65

# 1. GİRİŞ

## 1.1 AV-AVCI POPÜLASYON MODELİ

İnsanlar karşılaştıkları doğa olaylarını açıklamak için özellikle son yüzyılda bilime dayanarak birçok çalışma yapmışlardır. Bu ise matematik, fizik gibi temel bilimlerin öne çıkmasını sağlamış ve zamanla bu bilimler bir noktada birleşerek kendi aralarında etkileşim içinde olan biofizik, matematiksel biyoloji gibi alanların doğmasına sebep olmuştur. Genel olarak uygulamalı matematik altında toplanan bu alanlar, matematiksel modelleme teknikleri kullanarak doğa olayların anlamaya ve bunları açıklamaya çalışmışlardır.

Bir matematiksel model oluşturma süreci aşağıdaki basamaklar ile incelenebilir.

i. Çalışılan olayı yansıtacak bir matematiksel ifadenin oluşturulması: Gerçek bir problem ele alındığında yapılması gereken ilk şey probleme ait bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirlemek ve matematiksel olarak problemi ifade eden modeli oluşturmaktır.

ii. Modelin davranışını anlayabilmek için matematiksel tekniklerin kullanılması: Analiz, diferansiyel denklemler teorisi gibi matematik bilgileri modele uygulanır ve matematiksel sonuçlar elde edilir.

iii. Modelin analizinden elde edilen sonuçların yorumlanması

iv. Modelin problem ile karşılaştırılması

Yukarıdaki yöntemler ile bulunan matematiksel sonuçlar ve yapılan tahminler, toplanan gerçek verilerle karşılaştırılmalıdır.

Dinamik sistemler; matematiksel modeller, zaman ve konum gibi etkenlere bağlı olarak değiştiğinden fark denklemleri, adi diferansiyel denklemler veya kısmi diferansiyel denklemler kullanılarak oluşturulurlar. Bu tip sistemler zamanın model üzerindeki etkisine göre kesikli ve sürekli sistemler olmak üzere ele alınır. Örneğin; kesikli sistemler doğa olaylarının fark denklemleri yardım ile modellenmesine yarar, sürekli sistemler ise diferansiyel denklemler kullanılarak modelleme yapılmasını sağlar.

Son yıllarda dinamik sistemlerde biyolojik modeller bilhassa öne çıkmıştır. En çok

çalışmalar ise popülasyon modelleri üzerinedir. Bunlardan bazıları, aynı çevreyi paylaşan iki yada daha çok biyolojik popülasyon arasındaki etkileşimi içerir. İki tür içeren av-avcı sistemleri incelenirse avcı olarak tanımlanan bir tür, av olarak tanımlanan diğer türü yiyerek beslenir. Avlar ise ortamda bulunan başka yiyecekler ile beslenir. Bunun bilinen örneklerinden biri, ormanda yaşayan tilkiler ve tavşanların popülasyonudur. Tavşanlar ormanda belirli bitkileri yerken, avcı olarak tabir edilen tilkiler av olarak tabir edilen tavşanları yer. Bu örnekler daha da çoğaltılabilir. Bunlar; köpek balığı (avcı) ve yenen balık (av), uğur böceği (avcı) ve yaprak (av) gibi daha birçok canlılar arasındaki etkileşiminden bahsedilebilir.

1920'de av-avcı ilişkisinin klasik matematiksel modeli, Adriyatik Denizi'nde, köpek balığı ve yenen balık popülasyonunda gözlenen döngüsel değişiklikleri analiz etmek için İtalyan Matematikçi Vito Volterra (1978) tarafından geliştirildi. Böyle bir model oluşturmak için  $x(t)$  ile  $t$  anındaki avların popülasyon yoğunluğu,  $y(t)$  ile  $t$  anındaki avcılarının popülasyon yoğunluğu gösterilmek şartı ile aşağıdaki kabuller yapılır.

i) Avcı popülasyonunun yokluğunda; av popülasyonu  $\frac{dx}{dt} = ax(t)$  ,  $a>0$  ile doğal oranda büyüyecek,

ii) Av popülasyonunun yokluğunda, avcı popülasyonu  $\frac{dy}{dt} = -by(t)$  ,  $b>0$  ile doğal oranda azalacaktır.

iii) Avcıların ve avların her ikisinin de mevcut olduğu durumda, büyüme ve azalma doğal oranlarındaki birleşimde iki türün bireyleri arasındaki karşılaşmaların sıklık oranına göre av popülasyonunda bir azalma ve avcı popülasyonunda bir büyüme vardır. Ayrıca, böyle bir karşılaşma sıklığının  $xy$  çarpım ile orantılı olduğu kabul edilir. Çünkü herhangi bir popülasyonun iki katına çıkması karşılaşma sıklığını da iki katına çıkartır ve böylece her iki popülasyonun iki kat artması karşılaşma sıklığını dört katına çıkartır. Sonuç olarak, avcılar tarafından yok edilmesi ;

\*  $x$  av popülasyonunda  $-pxy$  azalmasının bir etkileşim oranı,

\*  $y$  avcı popülasyonunda  $qxy$  artmasının bir etkileşim oranı ile sonuçlanır.

$x$  av popülasyonu için  $-pxy$  etkileşim oranı ile  $ax$  doğal oranı ve  $y$  avcı popülasyonu için  $qxy$  etkileşim oranı ile  $-by$  doğal oranı birleştirildiği zaman ,

$$\frac{dx}{dt} = ax - pxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -by + qxy$$

av-avcı sistemi elde edilir. Burada a,b,p,q pozitif sabitlerdir.

## 1.2 GECİKMELİ SİSTEMLERE GENEL BAKIŞ

Popülasyon dinamiğinde daha gerçekçi modeller, popülasyon dinamiğinin geçmiş durumlarını, yaşadıkları çevrenin popülasyon üzerindeki etkisini de içermelidir. Bunun yanı sıra bu alanda birçok çalışmada önemli olan "Sistemin bir parametresi değişirken sistemin dinamiği nasıl değişir? " sorusuna cevap vermektir. Çatallanma teorisi, bu soruya cevap vermeye çalışır. Özellikle av-avcı sistemleri, kimyasal tepkime gibi etkileşim içinde bulunan sistemlerde gecikme parametresi çatallanma parametresi alınarak yapısında meydana gelen değişimler gözlenmiştir. Parametre değiştikçe sistemin niteliksel yapısı da değişir yani yeni denge noktalar ortaya çıkabildiği gibi denge noktalarının kararlılık yapıları da değişebilir. Bu niteliksel değişimlere **çatallanma** ve bu değişimin meydana geldiği parametre değerine **çatallanma noktası** denir.

Dinamik sistemlerde kendini tekrar eden süreçler söz konusudur. Böyle bir durumda sistem periyodik çözümlere sahiptir. Periyodik çözümlerin varlığını inceleyen teoriler arasında en önemlilerinden biri E.Hopf tarafından geliştirilmiştir. Hopf, parametreye bağlı bir diferansiyel denklemin hangi koşullar altında periyodik çözümler verdiğini incelemiş ve Hopf Çatallanma Teoremi olarak bilinen teoremi öne sürmüştür.

## 1.3 LİTERATÜRDE GECİKMELİ SİSTEMLER

Dinamik sistemlerde yoğunluğun geçmiş değerlere bağlı en basit ifadesi

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (1.1)$$

ile gösterilen gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemdir. Wright Denklemi yada Gecikmeli Lojistik Denklem olarak adlandı

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[ 1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right] \quad (1.2)$$

Hutchinson Denklemi, bunun en bilinen örneklerindedir. Lord Cherwell, (1.2) denklemi ile asal sayıların dağılımı için olasılık metotlarının kullanımında karşılaşmıştır. Aynı zamanda bu denklem, tek türden oluşan bir topluluğun büyümesinin zaman gecikmesi içeren modeli olarak da değerlendirilebilir.

May (1973),

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t-\tau) - a_{12}y(t)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}(t)] \end{aligned} \quad (1.3)$$

gecikmeli av-avcı sistemini ortaya koymuş ve incelemiştir. Burada  $x(t)$  ve  $y(t)$  sırasıyla av ve avcının  $t$  anındaki popülasyon yoğunluklarını ifade eder.  $\tau \geq 0$  avın kendi türü içindeki gecikme parametresidir.  $r_1 > 0$  av popülasyonundaki büyüme oranı,  $r_2 > 0$  ise avcının ölüm oranını vermektedir.  $a_{ij}(i,j = 1,2)$  parametrelerinin hepsi pozitif sabitlerdir. (1.3) sistemi, avcı türü olmaksızın

$$\dot{x}(t) = x(t)[r_1 - a_{11}x(t-\tau)]$$

gecikmeli lojistik denklemindeki av popülasyonunun türünün zamana göre değişimini vermektedir.

Yan ve Lie (2006), (1.3) sisteminin ikinci denklemdeki avcı popülasyon yoğunluğuna  $\tau$  gecikme parametresi eklemişler ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t-\tau) - a_{12}y(t)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t-\tau)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

ve (1.4) sistemini elde etmişler. Sistemin tek pozitif denge noktası mutlak kararlı olarak bulunmuş, bu denge noktasının kararlılığının değişip kararsızlığa geçtiği ve tekrar kararlı olduğu görülmüştür. Ayrıca Normal Form Teorisi ve Center Manifold Teoremi kullanılarak çatallanmanın periyodik çözümlerinin özellikleri belirlenmiştir. Yan ve Lie (2007), çalışmalarında sistemi genişleterek şekilde mutualist yaşayan iki türün popülasyon yoğunluğunu incelemişler. Bu sistemde, bir türün yoğunluk oranının büyümesi diğerinin büyümesine ve bir türün yoğunluk oranının azalması diğerinin de azalmasına bağlı olarak değişir. Yapılan çalışmada, pozitif denge noktasının kararlılığının bozulup kararsız hale geçtiği ve Hopf çatallanma olduğu gösterilmiş ve çatallanan periyodik çözümlerin kararlılığı incelenmiştir. C.Xu, M.Liao ve X.He (2011) çalışmalarında av ve avcıya farklı iki gecikme parametresi yükleyerek

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau_1) - a_{12}y(t - \tau_2)] \\ y(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t - \tau_2) - a_{22}y(t - \tau_1)] \end{aligned} \quad (1.6)$$

sistemini çalışmışlardır. Yine burada da  $x(t)$  ve  $y(t)$  sırasıyla t anındaki av ve avcının popülasyon yoğunluğu,  $a_{ij}(i, j = 1, 2)$  pozitif sabitler,  $r_1 > 0$  sabiti avın büyüme oranı,  $r_2 > 0$  sabiti avcının ölüm oranını vermektedir.  $\tau_1 > 0$  av ve avcılarının gebelik süresi,  $\tau_2 > 0$  birinci denklemden avcının avlamasındaki gecikmeyi, ikinci denklemden ise avcının olgunlaşma süresindeki gecikme terimini ifade etmektedir. Bu çalışmada sistemin kararlılığı ve Hopf çatallanmada oluşan periyodik çözümlerin kararlılığı incelenmiştir.

#### 1.4 TEZ ÇALIŞMASININ AMACI

Av-avcı popülasyon yoğunluğunun her ikisine de  $\tau$  gecikme parametresi eklenirse, aşağıdaki gecikmeli av- avcı sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1 N(t) - \varepsilon P(t - \tau) N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left[ r_2 - \frac{\theta}{N(t - \tau)} \int_{-\infty}^t F(t - \tau) P(\tau) d\tau \right]\end{aligned}\tag{1*}$$

oluşan (1\*) sisteminde

\*  $N(t)$  := Avın t anındaki popülasyon yoğunluğu

\*  $P(t)$  := Avcının t anındaki popülasyon yoğunluğu

\*  $r_1 > 0$  := Av popülasyonunun büyüme oranı

\* Avcı popülasyonu, sadece av sayısı ile sınırlanmamıştır.  $r_2 > 0$  büyüme oranı sabitinin yanı sıra av başına düşen avcı sayısı ile sınırlanılarak lojistik denklem halinde incelenmiştir. İşte bu  $\frac{P}{N}$ , avcı sayısının av sayısına oranı şeklindeki ifadeye "Ratio Dependent" modeller denir. Bu kapasite, biyolojik çevre üzerinde maksimum fert sayısı ile sınırlıdır. Tabi ki buna düşman türlerin dışında yiyecek, yaşam koşulları, su vb. dış çevre faktörleri de etkilidir.

\*  $\theta > 0$  ve  $\varepsilon > 0$  sabitlerdir.

\*  $\tau \geq 0$  av-avcı yoğunluğundaki gecikme parametresidir.

Bu çalışmada, gecikmeli av-avcı sistemi olan (1\*) sistemi incelenmiştir. Bu çalışmanın amacı, (1\*) sisteminin dinamiğini ve  $\tau$  gecikme parametresinin bu sisteme olan etkilerini incelemektir. Sistem analiz edilirken, ilk önce sistemin karakteristik denkleminin denge noktasının kararlılığı incelendi ve gecikme parametresini de içeren genel kararlılık kriterleri bulundu. Sonra,  $\tau$  gecikme parametresinin çatallanma parametresi olarak seçilmesiyle, pozitif denge noktasının kararlılığını kaybettiği ve Hopf çatallanma meydana geldiği gözlenmiştir. Daha sonra, Hassard tarafından analiz edilen normal Form Teori ve Center Manifold Teoreminden yararlanılarak, (1\*) sisteminin Hopf çatallanma özelliklerini tanımlayan çatallanma

sabitleri elde edildi. Hopf çatallanmanın kararlılığı, yönü, türü ve belirli koşullar altında çatallanan periyodik çözümlerin kararsız olduğu tespit edildi. Son olarak, bu teorik sonuçları desteklemek için nümerik simülasyonlar yapıldı.

Bu tezin akışı sırasıyla,

\* 1. bölümde, ele alınan problem hakkında genel bilgiler verilmiştir. Bu kapsamda yapılmış olan çalışmalardan bahsedilmiş ve kısaca gecikmeli diferansiyel denklemlere değinilmiştir.

\* 2.bölümde, tezin temel teorisi olan Hopf çatallanma teorisi detaylıca incelenmiştir. İlk olarak, çatallanmanın genel tanımı verilmiş, daha sonra fark denklemleri ve adi diferansiyel denklemleri için çatallanma tiplerinden, özel olarak da Hopf çatallanmadan bahsedilmiş ve Center Monifold Teoremi ifade edilmiştir.

\* 3. bölümde, sistemin denge noktasının kararlılığı ve Hopf çatallanması belirlenmiştir.

\* 4. bölümde, Center Monifold Teoremi ve Poincare Normal Form Teorisi kullanılarak bu tip modelde Hopf çatallanmanın görülmesi için gerekli koşullar verilmiş, çatallanmanın kararlılığı, türü ve yönü belirlenmiştir.

\* 5.bölümde, kararlılık sonuçlarını destekleyen nümerik simülasyonlar yapılmıştır.

\*Son olarak 6. bölümde, teoriden ve nümerik çalışmalardan elde edilen bulgular değerlendirilmiştir. Ayrıca bu tezde elde edilen sonuçlar daha önce bu denklem üzerine yapılmış çalışmalardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.



## 2. ÇATALLANMA VE HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ

### 2.1 ÇATALLANMA TEORİSİ

Çatallanma, bir sistemde sistemin pozitif denge noktası etrafında seçilen çatallanma parametresindeki küçük değişikliğin, sistemin davranışındaki topolojik değişime sebep olduğunda ortaya çıkar. Sistemin durum değişkeni  $x \in \mathbb{R}^n$  ve parametresi  $\tau \in \mathbb{R}^m$  olmak üzere çatallanmalara hem

$$x \rightarrow f(x, \tau)$$

tipinde kesikli hem de

$$\dot{x}(t) = f(x, \tau)$$

tipinde sürekli sistemlerde (adi, kısmi, gecikmeli diferansiyel denklemler ile tanımlanan sistemler) karşılaşılmaktadır. Verilen dinamik sistemlerin  $\tau$  parametresi değiştikçe topolojik yapısında meydana gelen değişimler, parametre değişirken faz portresini değiştirir. Bu taktirde iki durum söz konusudur. Ya sistem topolojik olarak ilk sisteme denktir ya da sistemin topolojisi değişir.

**Tanım:** Parametre değişimi altında topolojik olarak denk olmayan faz portrelerinin ortaya çıkmasına "**çatallanma**" denir.

Bu bölümde bazı çatallanma tipleri ve onların sınıflandırılması anlatılacaktır.

#### 2.1.1 Kesikli Sistemler İçin Çatallanma Teorisi

Bu kısımda  $x_{t+1} = f(x_t)$  birinci mertebeden fark denklemlerinin  $\tau$  parametresine olan bağıllığını

$$x_{t+1} = f(x_t, \tau) \tag{2.1}$$

ile göstereceğiz ve bu fark denkleminin dinamiği göz önüne alınacaktır. Denge noktalarının  $\tau$  bağılılığını ise  $\bar{x}(\tau)$  ile ifade edilecektir. Fark denklemlerinin davranışı  $\tau$  değiştikçe değişmektedir. Davranışın değiştiği bu  $\tau$  değerlerine "**çatallanma değeri**" ve bu  $(\tau, \bar{x}(\tau))$  noktalar ise "**çatallanma noktası**" olarak adlandırılır.

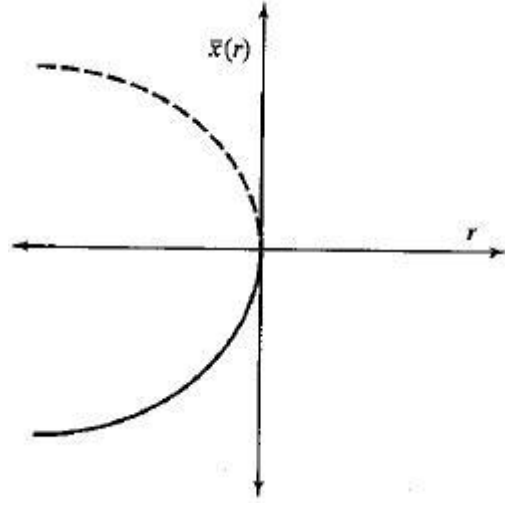
(2.1) ile verilen fark denklemleri için oluşabilecek çatallanma tipleri  $f'(\bar{x}(\tau)) = \pm 1$  denklemleri ile belirlenmektedir. Bu denklemler için dört farklı tipte çatallanma söz konusudur. Bunlar,

- 1) Fold (saddle node, tangant) çatallanma,
- 2) Tırmık (pitchfork) çatallanma,
- 3) Transkritik (transcritical) çatallanma,
- 4) Period-doubling (flip) çatallanma.

İlk üç tipte  $f'(\bar{x}(\tau)) = 1$  ve son çatallanma tipinde ise  $f'(\bar{x}(\tau)) = -1$  denklemlerinin sağlanması ile oluşur. Bu dört tip çatallanma aşağıdaki tanım ve şekillerle ifade edilebilir.

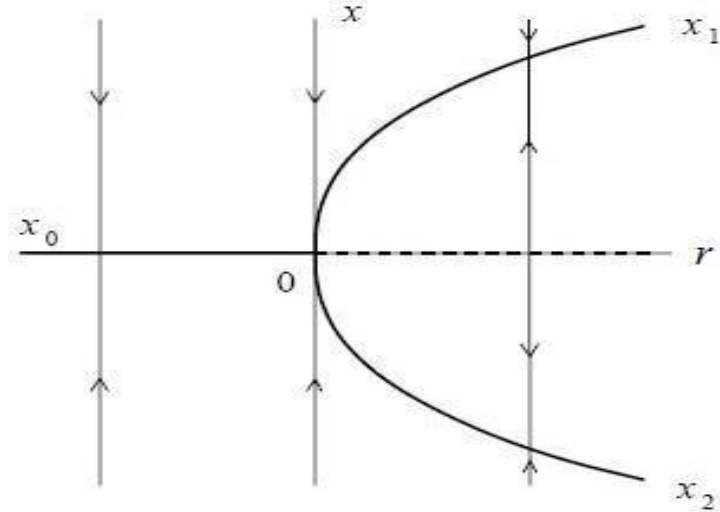
- \* Yatay eksen,  $\tau$  çatallanma parametresini
  - \* Dikey eksen, sistemin denge noktalarını
  - \* Kesikli eğriler, kararsız denge noktalarını
  - \* Kesiksiz eğriler, kararlı olan denge noktalarını
- ifade eder.

**1) Fold Çatallanma:** Kritik çatallanma değeri geçilirken biri kararlı diğeri kararsız olmak üzere iki denge noktası kaybolur.



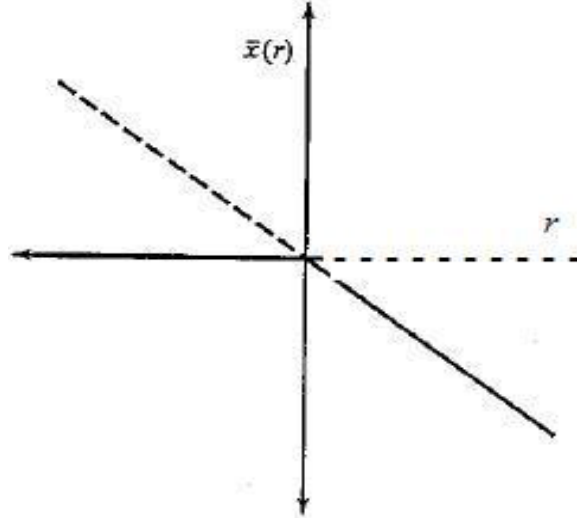
**Şekil 2.1 : Fold çatallanma**

**2) Tırmık Çatallanma:** Kritik çatallanma değeri geçilirken, bir kararsız denge noktası tarafından ayrılan iki kararlı denge noktası olmak üzere üç denge noktası meydana gelir. Bu tip çatallanmaya "süperkritik tırmık çatallanma" denir. Bunun tam tersine, bir kararlı denge noktası tarafından ayrılan iki kararsız denge noktası meydana geliyor ise bu tip çatallanmaya da "subkritik tırmık çatallanma" denir.



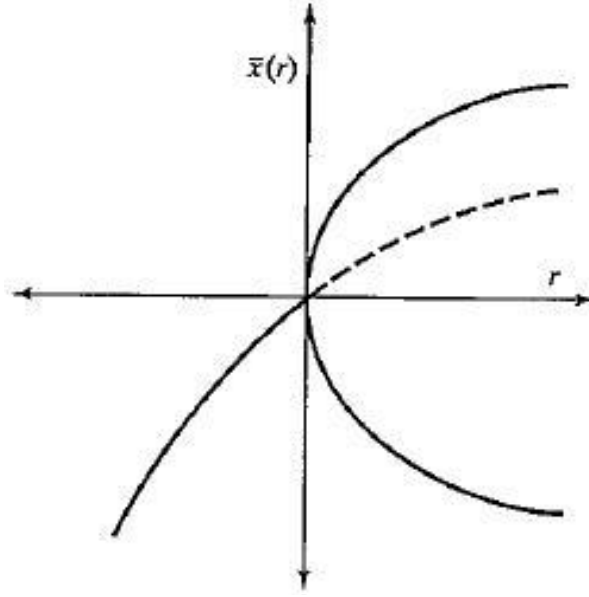
**Şekil 2.2 : Süperkritik tırmık çatallanma**

**3) Transkritik Çatallanma:** Bu çatallanma türünde bir kararlı bir kararsız iki denge noktası, çatallanma parametresi geçilirken kararlılık yapılarını değiştirirler. Yani, kararlı olan kararsız, kararsız olan kararlı hale gelir.



**Şekil 2.3 : Transkritik çatallanma**

**4) Flip Çatallanma:** Kritik çatallanma değeri geçilirken, kararlı denge noktası kararsız olur ve kararlı 2-devir ortaya çıkar. Bu tipine "süperkritik flip çatallanma" denir. Tam tersine ise yani ortaya çıkan 2-devir kararsız ise de "subkritik flip çatallanma" adını alır.



Şekil 2.4 : Flip çatallanma

### 2.1.2 Sürekli Sistemler İçin Çatallanma Teorisi

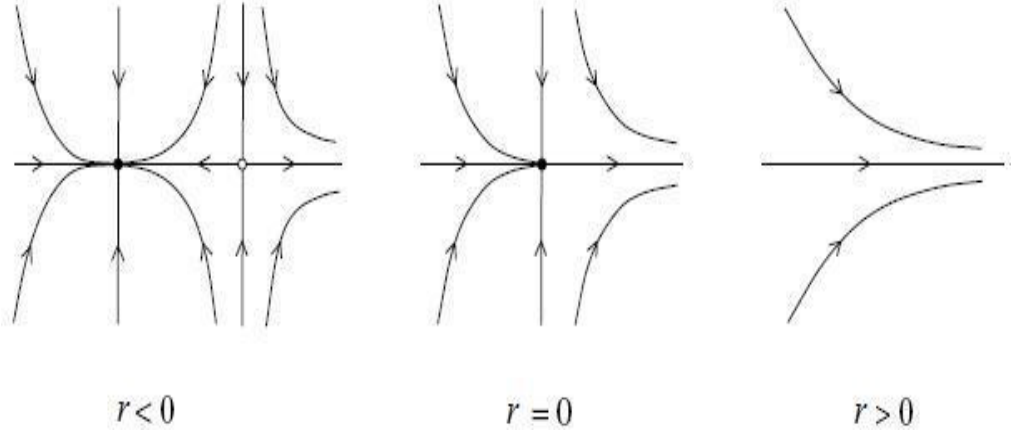
Kesikli sistemlerde olduğu gibi sürekli sistemlerde de  $\tau$  çatallanma parametresinin sergilediği değişime bağlı olarak

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \tau) \quad (2.2)$$

tipindeki adi diferansiyel denklemin dinamik yapısında değişiklikler meydana gelmektedir. (2.2) denklemi için de fold, tırmık transkritik çatallanmalar söz konusudur. Kesikli sistemlerden farklı olarak (2.2) için Hopf çatallanma da görülebilmektedir. İlk üç tip çatallanma hem skaler denklemlerde hem de denklem sistemlerinde görülürken Hopf çatallanma, skaler denklemler periyodik çözümlere sahip olmadığından skaler diferansiyel denklemlerde meydana gelmez. Bu denklemlere gecikme parametresinin de eklenebildiği görülür.

Sürekli sistemler için de  $\tau$  çatallanma parametresi ve  $\bar{x}(\tau)$ ,  $\tau$  ya bağlı denge noktası olmak üzere (2.2) denklem üzerinden çatallanma tiplerinden kısaca bahsedilebilir.

**1)Fold Çatallanma:** Çatallanma parametresi çatallanma değerini geçerken iki denge noktası kaybolur. Kaybolmadan önce bu iki denge noktasından biri kararlı diğeri kararsızdır.



**Şekil 2.5 : Fold Çatallanma ,  $\tau = 0$  çatallanma değeridir.**

**2)Tırmık Çatallanma:** Bir kararsız denge noktası tarafından ayrılan iki kararlı denge noktası vardır. Çatallanma parametresi geçildiğinde sadece bir kararlı denge noktası varsa çatallanmanın tipi "süperkritik tırmık çatallanma" aksi halde ise "subkritik tırmık çatallanma" dır.

**3)Transkritik Çatallanma:** Biri kararlı biri kararsız olan iki denge noktası vardır ve bu iki denge noktası çatallanma noktasından geçerken kararlılık yapılarının değiştirirler; kararlı olan kararsız, kararsız olan ise kararlı olur.

**4)Hopf Çatallanma:** İki veya daha fazla birinci mertebeden diferansiyel denklem içeren sistemlerde meydana gelen çatallanma türüne "Hopf Çatallanma" denir. Aynı zamanda, Fransız matematikçi Jules Henri Poincare (1854-1912), Rus matematikçi Alexander A. Andrnov (1901-1952) ve Alman matematikçi Heinz Hopf'un (1894-1971) bu teoriyi geliştirmek için yaptıkları katkılardan dolayı Poincare-Andronov-Hop çatallanma olarak da anılır.

## 2.2 Hopf Çatallanma

### 2.2.1 Hopf Çatallanma Teoremi

$f$  ve  $g$ ,  $\tau$  çatallanma parametresine bağılı fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z)\end{aligned}\tag{2.3}$$

diferansiyel denklem sistemi ele alındığında kabul edilsin ki  $(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$  (2.3) sisteminin denge noktası ve  $\alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$ , bu denge noktasında hesaplanan Jakobian matrisin öz değerleri olsun. Ayrıca  $\alpha(\tau^*) = 0$  olmak üzere kararlılık yapısındaki değişim  $\tau = \tau^*$  da meydana gelsin.

(2.3) diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerin varlığını sağlayabilmesi için ilk önce sıfır sanal öz değere sahip olacak şekilde denge noktası orijin ve  $\tau$  parametresi  $\tau^* = 0$  olacak şekilde değişken değiştirmeleri yapılarak

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}(\tau)x + a_{12}(\tau)y + f_1(x, y, \tau) \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(\tau)x + a_{22}(\tau)y + g_1(x, y, \tau)\end{aligned}\tag{2.4}$$

sistemine dönüştürülür. Hopf Çatallanma Teoremi olarak bilinen bu teorem, (2.3) diferansiyel denklem sistemi için aşağıdaki gibi verilebilir.

**Teorem** (Hopf Çatallanma Teoremi):

(2.4) sistemindeki  $f_1$  ve  $g_1$  fonksiyonları  $x$  ve  $y$  değişkenlerine göre üçüncü mertebeden sürekli türevlere sahip olmak üzere yeteri kadar küçük  $|\tau|$  lar için  $(0,0)$ , (2.4) denkleminin bir denge noktası ve

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ a_{21}(\tau) & a_{22}(\tau) \end{pmatrix}$$

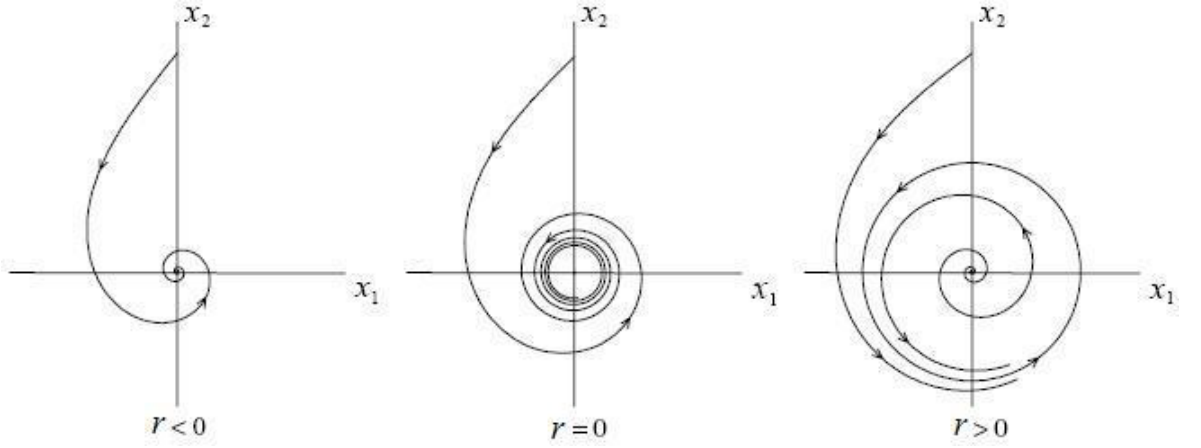
matrisinin sistemin Jakobian matrisi olduğu kabul edilsin. Ayrıca  $\alpha(0) = 0, w(0) \neq 0$  ve  $\frac{d\alpha}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \neq 0$  olmak üzere  $\alpha(\tau) \pm iw(\tau)$ ,  $J(\tau)$  Jakobian matrisinin öz değerleri olsun. Bu takdirde  $\mathbb{R}^2$  uzayında orijini kapsayan herhangi U açık kümesinde  $\tau_0 > 0$  için  $|\tau_k| < \tau_0$  değeri vardır öyle ki (2.4) diferansiyel denklemi  $\tau = \tau_k$  için U'da periyodik çözümlere sahiptir. (periyod yaklaşık olarak  $T = \frac{2\pi}{w(0)}$  dir.)

### 2.2.2 Hopf Çatallanma Türleri

Hopf Çatallanma Teoremi  $\tau = \tau_k$  için periyodik çözümlerin varlığı adına yeterli olan koşulları vermektedir.  $\tau$  çatallanma parametresi,  $\tau_k$  ise çatallanma değeridir. Sistemin parametresinin değeri değişirken sistemin dinamiği kararlı spiralden merkeze, merkezden de kararsız spirale dönüşür. Buna göre iki tür Hopf çatallanma görülür.

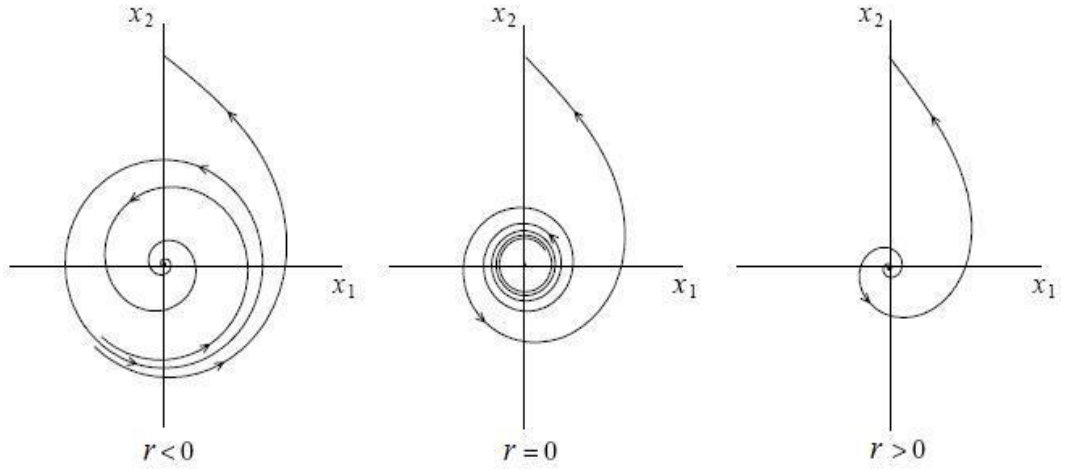
**1) Süperkritik Hopf Çatallanma:** Sistemin kararlı denge noktası asimtotik olarak kararlı bir limit döngüsüne dönüşürse oluşan çatallanmaya denir.





**Şekil 2.6 : Süperkritik hopf çatallanma**

**2)Subkritik Hopf Çatallanma:** Sistemin kararlı denge noktası kararsız bir limit döngüsüne dönüşürse oluşan çatallanmaya denir.



**Şekil 2.7 : Subkritik hopf çatallanma**

### 2.2.3 Hopf Çatallanma Teorisi

$F$  düzgün bir fonksiyon,  $\tau$  çatallanma parametresi ve  $x \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere

$$\dot{x} = f(x, \tau) \quad (2.5)$$

otonom adi diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistem için Hopf çatallanmanın hangi koşullar altında ortaya çıktığını, çatallanmanın yönünü, periyodik çözümlerinin periyodunu ve bu çözümlerin kararlılık yapısını adım adım inceleyelim.

1) Kapalı fonksiyon teoreminden  $\lambda = 0$  Jakobian matrisin özdeğeri olmadığından, yeteri kadar küçük  $|\tau|$  için orijinin bazı komşuluğunda, sistemin  $x_0(\tau)$  denge noktası vardır. Koordinat değişikliği yapılmasıyla, denge noktası orijine taşınır. O halde genellikle birşey kaybetmeden kabul edilebilir ki, yeterince küçük  $|\tau|$  için  $x=0$  sistemin denge noktasıdır. Bu denge noktasındaki Jakobian matrisi

$$A(\tau) = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x_0(\tau), \tau); i, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

ile ifade edilsin. Bu matrise karşılık gelen öz değerleri hesaplınsın. Bunlar;

$\text{Re } \lambda_1 \geq \text{Re } \lambda_2 \geq \dots \geq \text{Re } \lambda_n$  olacak şekilde sıralansın 3 boyutlu sistem için bu

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} a_0(\tau) & b_0(\tau) & c_0(\tau) \\ a_1(\tau) & b_1(\tau) & c_1(\tau) \\ a_2(\tau) & b_2(\tau) & c_2(\tau) \end{pmatrix}$$

olsun.

2)  $\alpha(0) = 0$  ve  $w(0) \neq 0$  olmak üzere  $A(\tau)$  matrisinin öz değerleri  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + iw(\tau)$  şeklindedir. Bu özdeğerler  $\frac{d\alpha}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \neq 0$  olmak üzere sanal eksenlerden geçen  $\lambda_1(\tau) = \lambda(\tau)$ ,  $\lambda_2(\tau) = \overline{\lambda(\tau)}$  dir.

Bu taktirde (1) ve (2) koşulları altında  $x_0(\tau)$  denge noktasında Hopf çatallanmanın görüldüğü bir sistemin taşıdığı özellikler elde edilmiş olur. Bundan sonra verilen adımlar  $\mu_2, \beta_2$  ve  $\tau_2$  değerlerinin hesaplanmasında izlenilmesi gereken yolu vermektedir.

3)  $\mu \in \mathbb{R}$  için  $\tau = \tau_k + \mu$  ve

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= N(t\tau) - N_0 \\
x_2(t) &= P(t\tau) - P_0 \\
x_3(t) &= S(t\tau) - S_0
\end{aligned}$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa sistem  $C([-1,0], \mathbb{R}^3)$  de fonksiyonel denklem şekline dönüşür  $L_\mu : C \rightarrow \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^3$  ve  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in C$  için

$$L_\mu \phi = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} a_0 \phi_1 + b_0 \phi_2 + c_0 \phi_3 \\ a_1 \phi_1 + b_1 \phi_2 + c_1 \phi_3 \\ a_2 \phi_1 + b_2 \phi_2 + c_2 \phi_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$f(\mu, \phi) = \begin{bmatrix} a_0 \phi_1 \phi_1 + b_0 \phi_1 \phi_2 + c_0 \phi_1 \phi_3 \\ a_1 \phi_2 \phi_1 + b_1 \phi_2 \phi_2 + c_1 \phi_2 \phi_3 \\ a_2 \phi_3 \phi_1 + b_2 \phi_3 \phi_2 + c_2 \phi_3 \phi_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

4) Riesz Teoremine göre  $\theta \in [-1,0]$  için elemanları sınırlı değişimli  $3 \times 3$  tipinde bir  $\eta(\theta, \mu)$  matris fonksiyonu vardır öyle ki

$$\phi \in C \text{ için } L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) \phi(\theta)$$

şeklinde yazılabilir.  $\eta(\theta, \mu)$  fonksiyonu,  $\delta =$  Dirac Delta Fonksiyonu olmak üzere,

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \delta(\theta) - (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & r & s \end{bmatrix} \delta(\theta + 1)$$

şeklinde seçilirse  $\phi \in C^1([-1,0], \mathbb{R}^3)$  için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} -\frac{d\phi(\theta)}{d\theta} & , \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\mu, s)\phi(s) & , \theta = 0 \end{cases}$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0 & , \theta \in [-1, 0) \\ f(\mu, \phi) & , \theta = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece sistem

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t$$

formunda yazılır. Burada  $\theta \in [-1, 0)$  için  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$  dr.

$\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^3)^*)$  için

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t, 0)\psi(-t), & s = 0. \end{cases}$$

ve  $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$  iken bilineer iç çarpım

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi$$

olarak tanımlanır.  $A(0)$  ve  $A^*$  adjoint operatörleridir.  $A(0)$  in  $i\omega\tau_k$  öz değerlerine karşılık gelen öz vektörü  $p(s)$  dir.  $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$  ve  $\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$  olmak üzere

$$A(0)q(\theta) = i\omega\tau_k q(\theta)$$

ve

$$A^*p(s) = -i\omega\tau_k p(s)$$

yazılır.

5) Center Manifold Teoremi kullanılarak n-boyutlu sistem 2 boyutlu sisteme indirgenir.

$\mu=0$  iken  $C_0$  center manifoldunu tanımlamak için,  $x_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, x_t^{(3)})$  sistemin çözümü olmak üzere,  $z$  ve  $\bar{z}$ ,  $C_0$  center manifoldun  $q$  ve  $p$  yönündeki lokal koordinatları belirlenir.  $C_0$  center manifoldu üzerinde

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = x_t - 2\text{Rez}(t)q(\theta)$$

$$W(t, \theta) = W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta)z\bar{z} + W_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

dr.  $x_t \in C_0$  çözümü için,  $\mu = 0$  iken  $\dot{x}_t = A(0)x_t + R(0)x_t$  dr. Bu indirgeme işlemi sırasında verilen sistemin Poincare Normal Formunun

$$\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z})$$

şeklinde olduğu görülür. Bu durumda

$$g(z, \bar{z}) = g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}\frac{z^2\bar{z}}{2} + \dots$$

iken

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})$$

elde edilir ve Hopf teoremini uygulayabilmek için  $g(z, \bar{z})$  eşitliklerinin her ikisinin de sağ taraflarının karşılaştırılmasıyla  $g_{20}, g_{11}, g_{02}, g_{21}$  katsayıları bulunur.

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta)z\bar{z} + H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \dot{x}_t - \dot{z}q + \dot{\bar{z}}\bar{q} \\
&= A(0)x_t + R(0)x_t - 2 \operatorname{Re} \left\{ \left[ i w \tau_k z(t) + \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) \right] q(\theta) \right\} \\
&= A(0)[w(t, \theta) + 2 \operatorname{Re} \{ z(t) q(\theta) \}] + R(0)x_t - 2 \operatorname{Re} \{ i w \tau_k z(t) q(\theta) \} - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) q(\theta) \} \\
&= A(0)w(t, \theta) + 2 \operatorname{Re} \{ z(t) A(0) q(\theta) \} + R(0)x_t - 2 \operatorname{Re} \{ i w \tau_k z(t) q(\theta) \} - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) q(\theta) \} \\
&= A(0)w(t, \theta) + R(0)x_t - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) q(\theta) \} \\
&= \begin{cases} AW - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) \}, & \theta \in [-1, 0) \\ AW - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) \} + f_0 & \theta = 0, \end{cases} \\
&= A(0)W(t, \theta) + H(z(t), \bar{z}(t), \theta)
\end{aligned}$$

dr. Buradan

$$A(0)w(t, \theta) - \dot{W} = -H(z, \bar{z}, \theta)$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} \\
&= W_{20}(\theta) z \dot{z} + W_{11}(\theta) (\dot{z} \bar{z} + z \dot{\bar{z}}) + \dots \\
&= W_{20}(\theta) z (i w \tau_k z + g(z, \bar{z})) + w_{11}(\theta) \{ [i w \tau_k z + g(z, \bar{z})] \bar{z} + z [-i w \tau_k \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z})] \} + \dots \\
&= 2i w \tau_k w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + \dots
\end{aligned}$$

ve

$$A(0)w(t, \theta) = A(0)w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + A(0)w_{11}(\theta) z \bar{z} + \dots$$

olduğundan

$$A(0)W(t, \theta) - \dot{W} = [A(0) - 2i w \tau_k] W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + A(0)w_{11} z \bar{z} + \dots$$

dr. Buradan

$$[A(0) - 2i w \tau_k] w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + A(0)w_{11}(\theta) z \bar{z} + \dots = -H_{20}(0) \frac{z^2}{2} - H_{11}(\theta) z \bar{z} - H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} \dots$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının katsayıları karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned} [A(0) - 2i\omega\tau_k]w_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta) \\ A(0)w_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta) \end{aligned}$$

ve  $\theta \in [-1, 0]$  için

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}, \theta) &= -2 \operatorname{Re}\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\ &= \bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta) - p(0)f_0(\bar{z}(t), z(t))\bar{q}(\theta) \\ &= -g(z, \bar{z})q(\theta) - \bar{g}(z, \bar{z})\bar{q}(\theta) \\ &= -(g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta))\frac{z^2}{2} - (g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta))z\bar{z} + \dots \end{aligned}$$

olduğundan

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)$$

$$H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)$$

ve  $A(0)'$  in tanımından

$$\begin{aligned} \dot{W}_{20}(\theta) &= 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta) - g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta) \\ \dot{W}_{11}(\theta) &= g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta) \end{aligned}$$

bulunur.  $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, E_1^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$  ve  $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}, E_2^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$  sabit vektörler olmak üzere

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega}q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega}\bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta}$$

$$W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\tau_k\omega}q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k\omega}\bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_2$$

şeklinde hesaplanır.  $E_1, E_2$  leri bulmak için  $A(0)$  in tanım ve  $q(0)'$  in  $A(0)$  in özvektörü olduğunun bilinmesinden  $d\eta = \eta(\theta, 0)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{20}(\theta) &= 2i\omega\tau_k W_{20}(0) - H_{20}(0) \\
&= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} \int_{-1}^0 d\eta(\theta)q(\theta) + \frac{i\overline{g_{02}}}{3\tau_k\omega} \int_{-1}^0 d\eta(\theta)\overline{q(\theta)} + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\
&= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} \dot{q}(0) + \frac{i\overline{g_{02}}}{3\tau_k\omega} \overline{\dot{q}(0)} + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\
&= -g_{20}q(0) + \frac{\overline{g_{02}}}{3}\overline{q(0)} + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{11}(\theta) = g_{11}q(0) + \overline{g_{11}}\overline{q(0)} + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2$$

elde edilir.

$$-g_{20}q(0) - \overline{g_{02}q(0)} + \left(2i\omega\tau_k - \int_{-1}^0 d\eta(\theta)e^{2i\omega\tau_k\theta}\right)E_1 = H_{20}(\theta)$$

ve

$$-g_{11}q(0) - \overline{g_{11}q(0)} - \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2 = H_{11}(\theta)$$

yazılarak  $E_1$  ve  $E_2$  bulunur. Buradan  $w_{11}(\theta)$  ve  $w_{20}(\theta)$  değerlerinin bulunmasıyla  $g_{ij}$  katsayıları belirlenir.

6) Böylece center manifoldda  $\tau_k$  kritik değerlerinde oluşan Hopf çatallanmanın yönünü, çatallanmanın periyodik çözümün kararlılığını ve çatallanan çözümün periyodunu belirleyen  $\mu_2, \beta_2, T_2$  katsayıları

$$\begin{aligned}
c_1(0) &= \frac{i}{2\omega\tau_k} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2} \\
\mu_2 &= -\frac{Re\{c_1(0)\}}{Re\{\lambda'(\tau_k)\}} \\
\beta_2 &= 2Re\{c_1(0)\} \\
T_2 &= -\frac{Im\{c_1(0)\} + \mu_2 Im\{\lambda'(\tau_k)\}}{\omega\tau_k}
\end{aligned}$$

denklemleri yardım ile bulunur.



Yukarda verilen analizden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Yardımcı Teorem 2.1:**  $(z, \bar{z}, \tau)$  nın düzgün bir fonksiyonu  $g = O(|z|^2)$  olmak üzere,  $z$  kompleks değişkeni kullanılarak, yeterince küçük  $|\tau|$  için, (2.2) sistemi aşağıdaki gibi yazılır;

$$\dot{z} = \lambda(\tau)z + g(z, \bar{z}, \tau) \quad (2.6)$$

**İspat :**  $A(\tau)$  nın  $\lambda(\tau)$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $q(\alpha) \in C^2$  olsun. O halde,

$$A(\tau)q(\tau) = \lambda(\tau)q(\tau)$$

dır ve  $A^T(\tau)$  nın  $\overline{\lambda(\tau)}$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $p(\tau) \in C^2$  olsun. O halde,

$$A^T(\tau)p(\tau) = \overline{\lambda(\tau)}p(\tau)$$

dır.  $\langle \cdot, \cdot \rangle, C^2$  de standart skaler çarpma ve

$$\langle p, q \rangle = \overline{p_1}q_1 + \overline{p_2}q_2$$

olmak üzere  $p$  nin  $q$  ya göre normalize edilmesi

$$\langle p(\tau), q(\tau) \rangle = 1$$

şeklinindedir. Herhangi bir  $x \in \mathbb{R}^2$  vektörü,

$$x = zq(\tau) + \overline{zq(\tau)} \quad (2.7)$$

şeklinde tek olarak tanımlanabilir.  $z$  yi tanımlayan açık formül

$$z = \langle p(\tau), x \rangle$$

şeklinindedir. Bu formülü gerçeklemek için, (2.7) denkleminin her iki yan  $p$  ile skaler çarpılır ve  $\langle p(\tau), \bar{q}(\tau) \rangle = 0$  olduğunun gösterilmesi gerekir.

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle$$

ve buradan

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0$$

dır. Yeterince küçük her  $|\tau|$  için  $w(\tau) > 0$  olduğundan  $\lambda \neq \bar{\lambda}$  dır. Böylece  $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$  olduğu görülür. Buradan  $z$  kompleks değişkeni aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\dot{z} = \lambda(\tau)z + \langle p(\tau), F(zq(\tau) + \bar{z}\bar{q}(\tau), \tau) \rangle$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Yardımcı Teorem 2.2:**  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$ ,  $\mu(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$  ve  $g_{ij} = g_{ij}(\tau)$  olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z|^3) \quad (2.8)$$

denklemi, yeterince küçük her  $|\tau|$  için

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle, kuadratik terim içermeyen

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3)$$

denklemine dönüşür.

**İspat:**

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20} z\dot{z} - h_{11} (\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) - h_{02} \dot{\bar{z}}\bar{z} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z\bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02}\right) \bar{z}^2 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{2} (g_{20} - \lambda h_{20}) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w\bar{w} + (g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}) \bar{w}^2 + O(|w|^3) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$$

yazılmasıyla (2.8) denklemindeki tüm kuadratik terimler yok olur.  $w_0 > 0$ ,  $\lambda(0) = iw_0$  iken, yeterince küçük her  $|\tau|$  için paydalar sıfırdan farklı olduğundan yukarıdaki eşitlikler doğrudur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Yardımcı Teorem 2.3** :  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm iw(\tau)$ ,  $\alpha(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$  ve  $g_{ij} = g_{ij}(\tau)$  olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + g_{30} \frac{z^3}{6} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + g_{12} \frac{z \bar{z}^2}{2} + g_{03} \frac{\bar{z}^3}{6} + O(|z|^4)$$

denklemini, yeterince küçük her  $|\tau|$  için

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle,  $c_1 = c_1(\tau)$  olmak üzere yalnızca bir kübik terim içeren

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4)$$

denklemine dönüşür.

**İspat:**

$$w = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^3)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2} z^2 \dot{z} - \frac{h_{21}}{2} (2z\bar{z}\dot{z} + z^2 \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2} (z\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} + \dots \\
&= \lambda z + \left( \frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2} \right) z^3 + \left( \frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda} h_{21}}{2} \right) z^2 \bar{z} \\
&\quad + \left( \frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z \bar{z}^2 + \left( \frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda} h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + \dots \\
&= \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2\lambda h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} \\
&\quad + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 + \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{w}^3 + O(|w^4|)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda}$$

yazılmasıyla  $w^2 \bar{w}$  terimi dışındaki tüm kübik terimler yok olur. Yeterince küçük her  $|\tau|$  için paydalar sıfırdan farklı olduğundan yukarıdaki eşitlikler doğrudur.  $w^2 \bar{w}$  teriminin yok edilmesi için

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}$$

yazılır. Fakat  $\alpha = 0$  iken yukarıdaki denklemin paydası  $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = iw_0 - iw_0 = 0$  dır.  $\alpha$  ya bağlı bir dönüşüm elde etmek için  $h_{21} = 0$  yazılmasıyla

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}$$

bulunur.

**Uyarı:** Kalan  $w^2 \bar{w}$  kübik terimi "rezonant terim" olarak adlandırılır. Bu terimin katsayısı, orijinal denklemdeki  $z^2 \bar{z}$  kübik teriminin katsayısıyla aynıdır.

**Yardımcı Teorem 2.4 :** (Hopf Çatallanma için Poincare Normal Form)

$\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm iw(\tau)$  ,  $\alpha(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$  ve  $g_{ij} = g_{ji} = g_{ij}(\tau)$  olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^{k-l} z + O(|z|^4) \quad (2.9)$$

denklemini, yeterince küçük her  $|\tau|$  için

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle,  $c_1 = c_1(\tau)$  olmak üzere yalnızca bir kübik terim içeren

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w^4|) \quad (2.10)$$

denklemine dönüşür.

**İspat:** Yardımcı Teorem 2.2 de,

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$$

iken

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, tüm kuadratik terimleri yok etmekle birlikte kübik terimlerin katsayılarını da değiştirir.  $w^2\bar{w}$  nin katsayısı  $\frac{1}{2}g_{21}$  yerine  $\frac{1}{2}\tilde{g}_{12}$  olur ve Yardımcı Teorem 2.3 deki dönüşümle de, katsayısı  $\frac{1}{2}\tilde{g}_{12}$  olan rezonant terim dışındaki tüm kübik terimler yok olur.

Böylece, (2.11) kuadratik dönüşümüyle, bulunması gereken  $c_1$  katsayısı,  $w^2\bar{w}$  teriminin yeni katsayısı  $\frac{1}{2}\tilde{g}_{12}$  dir.

$\dot{z}, w$  ve  $\bar{w}$  cinsinden iki şekilde ifade edilebilir. (2.11) denklemini, (2.9) orijinal denkleminde yerine yazılır veya (2.9) un (2.10) a dönüştürülebildiği bilindiğinden,  $\dot{z}$ , (2.11) in türevlenmesi ile hesaplanabilir.

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20}w\dot{w} + h_{11}(w\dot{\bar{w}} + \bar{w}\dot{w}) + h_{02}\dot{\bar{w}}$$

ve (2.9) kullanılarak  $\dot{w}$  ve kompleks eşleniği yerlerine yazılır. Yukarıda  $h_{20}, h_{11}$  ve

$h_{02}$  leri içeren ifadede kuadratik terimlerin katsayılarının karşılaştırılmasıyla ve  $w|w|^2$  teriminin katsayılarının eşitlenmesiyle

$$c_1 = \frac{g_{11}g_{20}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}$$

elde edilir.  $\tau = 0$  çatallanma parametresi değerinde yukarıdaki denklem

$$c_1(0) = \frac{i}{2w_0} \left( g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}$$

denklemine indirgenir.

**Yardımcı Teorem 2.5:**  $\alpha(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$  olmak üzere

$$\frac{dw}{dt} = (\alpha(\tau) + iw(\tau))w + c_1(\tau)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

denklemini ele alınsın. Kabul edelim ki,  $\alpha'(0) \neq 0$  ve  $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$  olsun. Denklem, parametreye bağlı lineer koordinat dönüşümü, yeni zaman ölçeği ve lineer olmayan yeni zaman parametrizasyonu ile

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4)$$

formuna dönüşür.  $s = \operatorname{sign} \operatorname{Re} c_1(0) = \pm 1$ ,  $u$  yeni kompleks koordinat,  $\theta$  ve  $\beta$  sırasıyla yeni zaman ve yeni zaman parametresini gösterir.

**İspat:**

1.Adım: (Lineer zaman ölçeği) Yeni zaman parametresi  $\gamma = w(\tau)t$  şeklinde tanımlanır. Yeterince küçük her  $|\tau|$  için,  $w(\tau) > 0$  olduğundan zaman korunur. Buradan,

$$\beta = \beta(\tau) = \frac{\alpha(\tau)}{w(\tau)}, d_1(\beta) = \frac{c_1(\tau(\beta))}{w(\tau(\beta))}$$

olmak üzere

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

elde edilir.

$$\beta(0) = 0, \beta'(0) = \frac{\alpha'(0)}{w(0)} \neq 0$$

olduğundan yeni  $\beta$  parametresi

$$\beta = \beta(\tau) = \frac{\mu(\tau)}{w(\tau)}, d_1(\beta) = \frac{c_1(\tau(\beta))}{w(\tau(\beta))}$$

olarak alınabilir ve ters fonksiyon teoremi,  $\tau$  ya bağlı  $\beta$  fonksiyonunun lokal varlığını garanti eder. Ayrıca  $d_1$  kompleks bir fonksiyondur.

2.Adım: (Lineer olmayan zaman parametresi)  $e_1(\beta) = \text{Im}d_1(\beta)$  için

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\gamma$$

olmak üzere, yeni zaman parametresi  $\theta = \theta(\gamma, \beta)$  şeklinde tanımlanarak orbitler boyunca zaman parametresi değişir. Zamandaki değişim orijinin küçük bir komşuluğunda özdeşlik dönüşümüdür. Zamanın yeni parametresinin kullanılmasıyla,  $l_1(\beta) = \text{Re}d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$  gerçel olmak üzere

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

ve

$$l_1(0) = \frac{\text{Re}c_1(0)}{w(0)} \quad (2.12)$$

elde edilir.

3.Adım: (Lineer koordinat ölçeği)  $u$  yeni kompleks değişken olmak üzere,

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}}$$

dr.  $\text{Re}c_1(0) \neq 0$  olduğundan  $l_1(0) \neq 0$  dr. Denklem,  $s = \text{sign}l_1(0) = \text{sign} \text{Re}c_1(0)$  olmak üzere

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4)$$

formunda yazılır.

**Tanım** :  $l_1(\beta)$  fonksiyonu 'birinci Lyapunov katsayısı' olarak adlandırılır.

(2.12) denkleminden,  $\beta = 0$  da ki birinci Lyapunov katsayısı

$$l_1(0) = \frac{1}{2w_0^2} \text{Re}(ig_{11}g_{20} + w_0g_{21}) \quad (2.13)$$

şeklinde hesaplanır.

Böylece, çatallanma noktasındaki  $l_1(0)$  in hesaplanması için sağ taraftaki ikinci ve üçüncü mertebeden türevlerin bilinmesi gerekir.  $l_1(0)$  in değeri  $p$  ve  $q$  öz değerlerinin normalizasyonuna bağlıdır ve bu değerlerin işareti,  $\langle p, q \rangle = 1$  normalizasyonunu sağlayan  $p, q$  değerlerine invaryanttır.

Aşağıdaki teoremlerle, elde edilen sonuçlar özetlenir.

**Teorem 2.1:**

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

iki boyutlu sistemi, yeterince küçük her  $|\tau|$  için  $x = 0$  denge noktasına ve  $\alpha(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$  olmak üzere

$$\lambda_{1,2}(\tau) = \alpha(\tau) \pm iw(\tau)$$

Özdeğerlerine sahiptir.

Aşağıdaki koşullar sağlandığında;

$$(B.1) \quad \alpha'(0) \neq 0$$

$$(B.2) \quad l_1 \text{ birinci Lyapunov katsayısı olmak üzere, } l_1(0) \neq 0$$

Koordinat parametre değişimiyle ve zaman dönüşümüyle, (2.14) sistemi

$$\frac{d}{d\gamma} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$$

olur.



**Teorem 2.2:** (Hopf Çatallanma için topolojik normal form)

$$\dot{x} = f(x, \tau)$$

bir parametrelili, iki boyutlu sistemi,  $\tau = 0$  da  $x = 0$  denge noktasına ve

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm iw_0, w_0 > 0$$

özdeğerlerine sahiptir ve aşağıdaki normal formlardan bir tanesine orijin civarında lokal topolojik eşdeğerdir.

$$\frac{d}{d\gamma} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$$

Teorem 2.1, Teorem 2.2 ve (2.13) denklemi, iki boyutlu sistemlerde Hopf çatallanma analizi için tüm gereksinimleri sağlar.

### 2.3 CENTER MANİFOLD TEOREMİ

$f(0) = 0$  iken,

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{2.15}$$

dinamik sistemi için,  $x_0 = 0$  denge noktasında  $A$  Jakobian matrisinin özdeğerleri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  olsun, Kabul edilsin ki, öz değerlerinin gerçel kısmı sıfır olsun ve  $\text{Re } \lambda > 0$  olduğunda sayılabilir çoklukta  $n_+$  öz değerleri,  $\text{Re } \lambda = 0$  olduğunda  $n_0$  öz değerleri ve  $\text{Re } \lambda < 0$  olduğunda ise  $n_-$  öz değerleri olsun.  $T^c$  sanal eksen üzerindeki  $n_0$  öz değerlerinin birleşimine karşılık gelen lineer öz vektör uzayı olsun. Sanal eksen üzerindeki özdeğerler ( $\text{Re } \lambda = 0$ )  $T^c$  öz vektör uzayında olduğu gibi genellikle kritik öz değer olarak adlandırılır.  $\varphi^t$  fonksiyonu (2.15) eşitliğine karşılık gelen akı olarak tanımlansın.

Yukarıdaki kabullerle aşağıdaki teorem verilir.

**Teorem:** (Center Manifold Teoremi) (2.15) sisteminin  $n_0$  boyutlu  $W_{loc}^c(0)$  invaryant manifoldu,  $x = 0$  da  $T^c$  öz vektör uzayına teğettir. Ayrıca,  $x_0 = 0$  in bir  $U$  komşuluğunda, her  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ) için  $(\varphi^t)x \in U$  ise  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) için  $(\varphi^t)x \rightarrow W_{loc}^c(0)$  dir.

**Tanım:**  $W_{loc}^c$  manifoldu 'center manifold' olarak adlandırılır.

### 3. KARARLILIK ANALİZİ VE HOPF ÇATALLANMA

Bu tezde

$$\frac{dN(t)}{dt} = r_1 N(t) - \varepsilon P(t - \tau) N(t)$$

(1\*)

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \left[ r_2 - \frac{\theta}{N(t - \tau)} \int_{-\infty}^t F(t - \tau) P(\tau) d\tau \right]$$

sürekli ve gecikmeli diferansiyel denklem sistemi incelenecektir. Burada

$$F(s) = \alpha e^{-\alpha s}, \quad \alpha > 0$$

negatif olmayan, sınırlı "Kernel Fonksiyonu"

$$\int_0^{\infty} F(s) ds = 1$$

olacak şekilde seçildiğinde

$$\int_{-\infty}^t F(t - \tau) P(\tau) d\tau$$

ifadesi

$$S(t) = \int_{-\infty}^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} P(s) ds$$

eşitliğine dönüşür. Bu durumda (1\*) sistemi

$$\frac{dN(t)}{dt} = r_1 N(t) - \varepsilon P(t) N(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \left( r_2 - \theta \frac{S(t)}{N(t - \tau)} \right)$$

(1\*\*)

$$\frac{dS(t)}{dt} = \alpha P(t) - \alpha S(t)$$

ile elde edilen kesikli gecikme denklem sistemine dönüşür. Burada yapılan dönüşüm

(1\*) ve (1\*\*) sistemlerinin kararlılık yapıları arasında hiçbir farka sebebiyet

vermemektedir.

(1\*) sisteminin tek pozitif denge noktası olan  $E^* = (N_0, P_0, S_0)$ ,

$$\frac{dN}{dt} = 0, \frac{dP}{dt} = 0, \frac{dS}{dt} = 0$$

eşitliklerinden faydalanarak

$$E_* = (N_0, P_0, S_0) = \left( \frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2}, \frac{r_1}{\varepsilon}, \frac{r_1}{\varepsilon} \right)$$

şeklinde elde edilir. Yine bu eşitliklerden

$$r_1 = \varepsilon P_0, \quad r_2 = \frac{\theta S_0}{N_0} \quad \text{ve} \quad P_0 - S_0 = 0$$

$r_1, r_2, P_0$  ve  $S_0$  in eşitliği elde edilmiş olur. (1\*) sisteminde

$$n(t) = N(t) - N_0$$

$$p(t) = P(t) - P_0$$

$$s(t) = S(t) - S_0$$

değişken değişimi uygulanırsa

$$\frac{dn}{dt} = (N_0 + n)(r_1 - \varepsilon(P_0 + p(t - \tau)))$$

$$\frac{dp}{dt} = (P_0 + p) \left( r_2 - \left( \frac{\theta(S_0 + s)}{N_0 + n(t - \tau)} \right) \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{ds}{dt} = \alpha(P_0 + p) - \alpha(S_0 + s)$$

sistemi elde edilir. Bu değişken değişimi ile  $(N_0, P_0, S_0)$  denge noktası  $(0, 0, 0)$  noktasına taşınmış olur. (3.1) sisteminin  $(0, 0, 0)$  noktasında lineerleştirilmesi sonucu

$$\begin{aligned}
\frac{dn}{dt} &= (N_0 + n)(r_1 - \varepsilon(P_0 + p)) = \frac{dn}{dt} = -\varepsilon N_0 p(t) \\
\frac{dp}{dt} &= (P_0 + p)\left(r_2 - \left(\frac{\theta(S_0 + s)}{N_0 + n(t - \tau)}\right)\right) = (P_0 + p)\left(r_2 - \frac{\theta S_0}{N_0 + n(t - \tau)} - \frac{\theta s(t)}{N_0 + n(t - \tau)}\right) \\
&= (P_0 + p)\left(r_2 - \frac{\theta S_0}{N_0\left(1 + \frac{n(t - \tau)}{N_0}\right)} - \frac{\theta s(t)}{N_0\left(1 + \frac{n(t - \tau)}{N_0}\right)}\right) \\
&= (P_0 + p)\left(r_2 - \frac{\theta S_0}{N_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{n(t - \tau)}{N_0}\right)} - \frac{\theta s(t)}{N_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{n(t - \tau)}{N_0}\right)}\right)
\end{aligned}$$

geometrik serinin açılımını kullanarak

$$\begin{aligned}
&= (P_0 + p)\left(r_2 - \frac{\theta S_0}{N_0}\left(1 - \frac{n(t - \tau)}{N_0} + \frac{n^2(t - \tau)}{N_0^2}\right) - \frac{\theta s(t)}{N_0}\left(1 - \frac{n(t - \tau)}{N_0} + \frac{n^2(t - \tau)}{N_0^2}\right)\right) \\
&= \left(\frac{r_2 P_0}{N_0}\right)n(t - \tau) - \theta\left(\frac{P_0}{N_0}\right)s(t) \\
\frac{ds}{dt} &= \alpha(P_0 + p) - \alpha(S_0 + s) = \alpha p(t) - \alpha s(t)
\end{aligned}$$

şeklinde sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\frac{dn}{dt} &= -\varepsilon N_0 p(t) \\
\frac{dp}{dt} &= \frac{r_2 P_0}{N_0} n(t - \tau) - \theta \frac{P_0}{S_0} s(t) \\
\frac{ds}{dt} &= \alpha p(t) - \alpha s(t)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.2) denklem sistemi elde edilir. Burada (1\*) sistemi ile lineerleştirilmiş yapıdaki

(3.2) sisteminin aynı kararlılık yapısını sergilediği unutulmamalıdır.

$$\begin{aligned}
a &= \alpha r_2 \\
b &= r_1 r_2 \alpha \\
c &= r_1 r_2
\end{aligned}$$

olmak üzere lineerleştirilmiş sistemin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 + \alpha \lambda^2 + a \lambda + (b + c \lambda) e^{-2\lambda \tau} = 0 \tag{3.3}$$

ile verilir.  $\tau = 0$  olduğu durumda yani sistemde gecikmenin olmadığı durumda (3.3)

denklemini

$$\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + (a + c)\lambda + b = 0$$

şeklinde bir denklemdir.

$$\alpha > 0, \quad b > 0 \quad \text{ve} \quad \alpha(a + c) > b$$

olduğundan Routh-Hurwitz kriterine göre (3.3) denkleminin köklerinin hepsi negatif veya kökleri negatif gerçel kısma sahiptir. Bu yüzden  $\tau = 0$  iken (3.2) sisteminin denge noktası asimtotik kararlıdır.

(3.2) lineer sisteminin  $(0,0,0)$  noktasındaki kararlılığı, (3.3) karakteristik denkleminin köklerine bağlıdır. Bu nedenle (3.3) transandantal denkleminin köklerinin durumu incelenir ise bu köklerin sürekli bağımlılığından ve Routh-Hurwitz kriterinden en az bir  $\tau_0 > 0$  vardır ki  $\tau \in [0, \tau_0)$  için  $\text{Re}(\tau) < 0$  dr.  $\text{Re}\lambda(z) = 0$  olduğunda  $E^*$  asimtotik kararlılığını kaybettiğinden  $\text{Re}\lambda(z^*) = 0$  olacak şekilde bir  $z^* > 0$  m olup olmadığı incelenir. Yani, (3.3) denkleminin sırf sanal olan köklerinin olup olmadığı araştırılır.

Bu bölümde ilk olarak denge noktasının lokal kararlılığı incelenir.  $\tau = \tau^*$  için  $w > 0$  gerçel olmak üzere  $\lambda = iw$  kabul edildiğinde aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

**Yardımcı Teorem 3.1:** (3.1) sistemi için, (3.3) transandantal denklemi sırf sanal köke sahiptir.

**İspat:**  $\tau = \tau^*$  ve  $w$  gerçel olmak üzere  $\lambda = iw$ , (3.3) transandantal denkleminde yerine yazılırsa genellikle birşey kaybetmeden  $w > 0$  alınabilir. Böylece,

$$(i\omega)^3 + \alpha(i\omega)^2 + a(\omega i) + (b + ic\omega)e^{-2(i\omega)\tau} = 0$$

elde edilir. Yani,

$$-\alpha\omega^2 + b \cos 2\omega\tau + c\omega \sin 2\omega\tau + i[-\omega^3 + a\omega - b \sin 2\omega\tau + c\omega \cos 2\omega\tau] = 0$$

dır. Bu eşitliğin gerçel ve sanal kısımlarını ayrı ayrı yazarsak

$$\alpha\omega^2 = b \cos 2\omega\tau + c\omega \sin 2\omega\tau \tag{3.4}$$

$$-\omega^3 + a\omega = b \sin 2\omega\tau - c\omega \cos 2\omega\tau \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) eşitliklerinin her iki tarafının karelerini alınıp taraf tarafa toplandığında

$$\omega^6 + (\alpha^2 - 2a)\omega^4 + (a^2 - c^2)\omega^2 - b^2 = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemde  $z = w^2$  yazıldığında

$$\begin{aligned} p &= \alpha^2 - 2a \\ q &= (a^2 - c^2) \\ r &= -b^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$f(z) := z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

denklemini elde edilir.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(z) = \infty$  ve  $r = -b^2 < 0$  olduğundan bu denklemin en az bir tane pozitif kökü vardır. O halde genellikle birşey kaybetmeden bu pozitif köklerden birisine  $z_k$  yani  $w_k = \sqrt{z_k}$  diyelim.

$\tau_k$  yı bulabilmek için ilk etapta  $\sin \omega\tau_k$  yi çekelim. (3.4) denklemini  $cw_k$  ile, (3.5) denklemini  $b$  ile çarpıp taraf tarafa toplandığında

$$\sin 2\omega_k\tau = \frac{abw_k - (b - \alpha c)w_k^3}{c^2w_k^2 + b^2} + 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde bulunur.  $\cos 2\omega\tau_k$  yı bulmak için ise (3.4)ü  $b$  ile, (3.5)i  $-icw_k$  ile çarpıp taraf tarafa toplandığında

$$\cos 2\omega_k\tau = \frac{cw_k^4 + w_k^2(ab - \alpha c)}{b^2 + c^2w_k^2} + 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde bulunur. O halde

$$\tan 2\omega_k\tau = \frac{abw_k - (b - \alpha c)w_k^3}{(ab - \alpha c)w_k^2 + cw_k^4} + 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde bulunur. Buradan  $\tau_k$  yı çekersek

$$\tau_k = \frac{1}{2\omega_k} \left\{ \arctan\left(\frac{ab\omega_k - (b - ac)\omega_k^3}{(ab - ac)\omega_k^2 + c\omega_k^4}\right) + \frac{k\pi}{\omega_k} \right\}, k = 0, 1, 2, \dots$$

yukarıdaki gibi bulmuş oluruz. Böylelikle (3.3) denkleminin sırf sanal köke sahip olduğu bulunmuş olur. Böylece Yardımcı Teorem 3.1 in ispat tamamlanır.

(1\*) sisteminde  $\tau = \tau_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  iken (3.3) denkleminin kökü,  $\alpha(\tau_k) = 0$  ve  $\omega(\tau_k) = \omega_0$  olduğunun kabulü ile

$$\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$$

şeklinde tanımlanır. Bu ise aşağıdaki sonucu doğurur.

**Yardımcı Teorem 3.2:**  $f'(z_1) \neq 0$  olduğunu varsayalım, bu durumda aşağıdaki transversalite durumu elde edilir;

$$\frac{dRe\lambda(\tau_k)}{d\tau} \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

ve  $f'(z_1)$  ve  $\frac{dRe\lambda(\tau_k)}{d\tau}$  aynı işarete sahiptir. Yani, (1\*) sistemi için  $\tau = \tau_k, k = 0, 1, 2, \dots$  iken  $E^* = (N_0, P_0, S_0)$  pozitif denge noktasında Hopf çatallanma olur.

**İspat:**  $w$  gerçel ve genellikle birşey kaybetmeden  $w > 0$  alınarak  $\lambda = iw$  yı  $\tau = \tau_k$  için (3.3) denkleminin bir kökü olarak alalım. (3.3) karakteristik denkleminin  $\tau$  ya göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = 3\lambda^2 \frac{d\lambda}{d\tau} + a2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + a \frac{d\lambda}{d\tau} - be^{-2\lambda\tau} \left( 2\tau \frac{d\lambda}{d\tau} + 2\lambda \right) + c \left( \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-2\lambda\tau} - \lambda e^{-2\lambda\tau} \left( 2\tau \frac{d\lambda}{d\tau} + 2\lambda \right) \right) = 0$$

elde edilir. Yani,

$$\frac{d\lambda}{d\tau} (3\lambda^2 + 2a\lambda + a - 2\tau be^{-2\lambda\tau} + ce^{-2\lambda\tau} - 2c\lambda\tau e^{-2\lambda\tau}) = 2\lambda be^{-2\lambda\tau} + 2\lambda^2 ce^{-2\lambda\tau}$$



ise

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{2\lambda e^{-2\lambda\tau}(b + \lambda c)}{(3\lambda^2 + 2\alpha\lambda + a) + ce^{-2\lambda\tau} - 2\tau e^{-2\lambda\tau}(b + \lambda c)}$$

bulunur ve buradan da

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{3\lambda^2 + 2\alpha\lambda + a}{2\lambda e^{-2\lambda\tau}(b + \lambda c)} + \frac{ce^{-2\lambda\tau}}{2\lambda e^{-2\lambda\tau}(b + \lambda c)} - \frac{2\tau e^{-2\lambda\tau}(b + \lambda c)}{2\lambda e^{-2\lambda\tau}(b + \lambda c)} \\ &= \frac{(3\lambda^2 + 2\alpha\lambda + a)e^{2\lambda\tau}}{2\lambda(b + \lambda c)} + \frac{c}{2\lambda(b + \lambda c)} - \frac{\tau}{\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\lambda=iw} &= \operatorname{Re}\left[\frac{(3(iw)^2 + 2\alpha(iw) + a)(\cos 2w\tau + i\sin 2w\tau)}{2(iw)(b + c(iw))}\right] \\ &+ \operatorname{Re}\left[\frac{c}{2(iw)(b + (iw)c)}\right] + \operatorname{Re}\left[-\frac{\tau}{iw}\right] \end{aligned}$$

eşitliğinde

$$\begin{aligned} A &= \frac{(3(iw)^2 + 2\alpha(iw) + a)(\cos 2w\tau + i\sin 2w\tau)}{2(iw)(b + c(iw))} \\ B &= \frac{c}{2(iw)(b + (iw)c)} \\ C &= -\frac{\tau}{iw} \end{aligned}$$

notasyonlar kullanılırsa

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\lambda=iw} = \operatorname{Re}(A) + \operatorname{Re}(B) + \operatorname{Re}(C)$$

bulunur ve böylece.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A) &= \frac{w^4 6c \cos 2w\tau + w^3 (4c\alpha \sin 2w\tau - 6b \sin 2w\tau) + w^2 (-2ac + 4abc \cos 2w\tau + w 2abs \sin 2w\tau)}{w^4 4c^2 + w^2 4b^2} \\ \operatorname{Re}(B) &= -\frac{2c^2 w^2}{4b^2 w^2 + 4c^2 w^2} \\ \operatorname{Re}(C) &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan (\*\*) hesaplanırken (3.4) ve (3.5) eşitliklerinden faydalanarak,

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\lambda=iw} = \frac{1}{4w^2(c^2w^2 + b^2)} 2w^2 [3w^4 - 2(\alpha^2 - 2a)w^2 + (a^2 - c^2)]$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\lambda=iw} = \frac{1}{4w^2(c^2w^2 + b^2)} 2w^2 f'(z)$$

bulunur.

$$\frac{1}{4w^2(c^2w^2 + b^2)} 2w^2 > 0$$

olduğundan  $\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\lambda=iw}$  nin işareti  $f(z)$  nin işaretiyle aynı hareketi gösterecektir.

Böylece çatallanmanın son koşulu da ispat edilmiş olur. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa sistemin kararlılığı ve Hopf çatallanması aşağıdaki teoremlerle verilebilir.

**Teorem 3.1:**  $(1^*)$  sistemi için

i) Eğer  $\tau \in [0, \tau_0)$  ise sistemin  $E^* = (N_0, P_0, S_0)$  denge noktası asimtotik kararlı,

ii) Eğer  $\tau > \tau_0$  ise sistemin  $E^* = (N_0, P_0, S_0)$  denge noktası kararsız,

iii) Eğer  $\tau = \tau_k (k = 0, 1, 2, \dots)$  ise sistemin  $E^* = (N_0, P_0, S_0)$  denge noktasında Hopf çatallanma meydana gelir.

#### 4. HOPF ÇATALLANMANIN YÖNÜ VE KARARLILIĞI

Bu bölümde Normal Form teorisi ve Center Manifold teoremi kullanılarak Hopf çatallanmanın yönü ve periyodik çözümlerin kararlılığı incelenecektir. Burada Hopf çatallanmanın  $(1^*)$  sisteminin  $\tau = \tau_k$  için  $E^* = (N_0, P_0, S_0)$  pozitif denge noktasına sahip olduğu kabul edilecektir ve  $w > 0$  olmak üzere  $\lambda = iw$ ,  $E^* = (N_0, P_0, S_0)$  pozitif denge noktasında karakteristik denklemin sırf sanal köküdür.  $\mu \in \mathbb{R}$  için  $\tau = \tau_k + \mu$  yazılırsa  $\mu = 0$  da  $(1^*)$  sisteminin Hopf çatallanma parametresi olur.

$$\begin{aligned}x_1(t) &= N(\tau t) - N_0, \\x_2(t) &= P(\tau t) - P_0 \\x_3(t) &= S(\tau t) - S_0\end{aligned}$$

değişken değiştirilmesi yapılırsa  $(1^*)$  sistemi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \tau(N_0 + n(t)) \left[ r_1 - \varepsilon(P_0 + p(t-1)) \right] = -\varepsilon \tau N_0 p(t-1) \\ \dot{x}_2(t) &= \tau(P_0 + p(t)) \left[ r_2 - \left( \frac{\theta(S_0 + s(t))}{N_0 + n(t-1)} \right) \right] = \tau \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^2} n(t-1) - \tau \frac{\theta P_0}{N_0} s(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \tau \alpha(p(t) - s(t)) = \tau \alpha p(t) - \tau \alpha s(t)\end{aligned} \tag{4.1}$$

$C([-1, 0], \mathbb{R}^3)$  de fonksiyonel diferansiyel denklem şekline dönüşür.

$L_\mu : C \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^3$  ve  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in C$  için

$$L_\mu(\phi) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\theta P_0}{N_0} \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_3(0) \end{bmatrix} \\ + (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon N_0 & 0 \\ \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \\ \phi_3(-1) \end{bmatrix}$$

Ve

$$f(\mu, \phi) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$f_{11} = -\varepsilon \phi_1(0) \phi_2(-1)$$

$$f_{12} = -\theta \frac{P_0 S_0}{N_0^3} \phi_1(-1) \phi_1(-1) + \theta \frac{P_0}{N_0^2} \phi_3(0) \phi_1(-1) + \theta \frac{S_0}{N_0^2} \phi_2(0) \phi_1(-1) - \frac{\theta}{N_0} \phi_2(0) \phi_3(0)$$

$$f_{13} = 0$$

elde edilir. Riesz Gösterim Teoremine göre  $\theta \in [-1, 0]$  için, elemanları sınırlı değişimli  $3 \times 3$  tipinde bir  $\eta(\theta, \mu)$  matris fonksiyonu vardır öyle ki,

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) \phi(\theta), \phi \in C$$

şeklinde yazılabilir.  $\eta(\theta, \mu)$  fonksiyonu,  $\delta =$  Dirac Delta Fonksiyonu olmak üzere,

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\theta P_0}{N_0} \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix} \delta(\theta) - (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon N_0 & 0 \\ \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta(\theta + 1)$$

şeklinde seçilirse,  $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^3)$  için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} -\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\mu, s)\phi(s), & \theta = 0. \end{cases}$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0. \end{cases}$$

formunda tanımlanır. Böylece (4.1) sistemi

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır. Burada  $\theta \in [-1, 0)$  için  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$  dr.

$$\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^3)^*)$$

için

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t, 0)\psi(-t), & s = 0. \end{cases}$$

ve  $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$  iken bilineer iç çarpım

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \quad (4.4)$$

olarak tanımlanır.  $A(0)$  ve  $A^*$  operatörleri arasındaki bağlantı aşağıdaki yardımcı teorem ile verilir.

**Yardımcı Teorem 4.1:**  $A(0)$  ve  $A^*$  adjoint operatörlerdir.

**İspat:**  $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^3)$  ve  $\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^3)^*)$  iken (4.4),  $A(0)$  ve  $A^*$  ın tanımından

$$\langle \psi(s), A(0)\phi(\theta) \rangle = \langle A^*\psi(s), \phi(\theta) \rangle$$

olduğu gösterilirse,

$$\begin{aligned}
\langle \psi(s), A(0)\phi(\theta) \rangle &= \bar{\psi}(0)A\theta(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) A(0)\phi(\xi) d\xi \\
&= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\
&= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \int_{-1}^0 [\bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi)]_{\xi=0}^{\theta} \\
&\quad + \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \frac{d\bar{\psi}(\xi - \theta)}{d\xi} d\eta(\theta)\phi(\xi) \\
&= \int_{-1}^0 \bar{\psi}(-\theta) d\eta(\theta)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \left( \frac{d\bar{\psi}(\xi - \theta)}{d\xi} \right) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\
&= A^* \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} A^* \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) \\
&= \langle A^* \psi(s), \phi(\theta) \rangle
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Böylece  $A(0)$  ve  $A^*$  in adjoint operatörleri olduğu gösterilmiş ve ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca  $\pm i\omega\tau_k$ ,  $A(0)$  in özdeğerleridir.  $A(0)$  in  $i\omega\tau_k$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $q(\theta)$  ve  $A^*$  in  $-i\omega\tau_k$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $q^*(s)$  dir. Yani,

$$A(0) q(\theta) = i\omega\tau_k q(\theta)$$

ve

$$A^* q^*(s) = -i\omega\tau_k q^*(s)$$

dir. O halde  $q(\theta)$  ve  $q^*(s)$  özvektörleri bulunur.

(i)  $q(\theta)$  için;

$$A(0) q(\theta) = i\omega\tau_k q(\theta) \rightarrow A(0) q(0) = i\omega\tau_k q(0)$$

eşitliğinde  $A(0)$  ve  $q(0)$  değerleri yerine yazılırsa

$$\tau_k \begin{pmatrix} i\omega & \varepsilon N_0 e^{-i\omega\tau_k} & 0 \\ -\theta \frac{P_0 S_0}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k} & i\omega & \theta \frac{P_0}{N_0} \\ 0 & \alpha & i\omega + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denklemleri çözüldüğünde

$$q(\theta) = (1, \beta, \gamma)^T e^{i\omega\tau_k\theta} \rightarrow q(\theta) = \left( 1, -\frac{i\omega}{\varepsilon N_0 e^{-i\omega\tau_k}}, \frac{S_0 e^{i\omega\tau_k}}{N_0} - \frac{\omega^2 e^{i\omega\tau_k}}{\varepsilon P_0 \theta} \right)^T e^{i\omega\tau_k\theta}$$

bulunur.

(ii)  $q^*(s)$  için;

$$A^* q^*(s) = -i\omega\tau_k q^*(s) \rightarrow A^* q^*(0) = -i\omega\tau_k q^*(0)$$

eşitliğinde  $A^*$  ve  $q^*(0)$  değerleri yerine yazılırsa,

$$\tau_k \begin{pmatrix} -i\omega & -\theta \frac{P_0 S_0}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k} & 0 \\ \varepsilon N_0 e^{-i\omega\tau_k} & -i\omega & \alpha \\ 0 & \theta \frac{P_0}{N_0} & -i\omega + \alpha \end{pmatrix} q^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denklemleri çözüldüğünde

$$q^*(s) = D(1, \bar{\beta}^*, \bar{\gamma}^*) e^{-i\omega\tau_k s} \rightarrow q^*(s) = D \left( 1, \frac{-i\omega N_0^2 e^{i\omega\tau_k}}{\theta P_0 S_0}, \frac{\omega^2 N_0^2 e^{i\omega\tau_k}}{\theta P_0 S_0} - \frac{\varepsilon N_0 e^{-i\omega\tau_k}}{\alpha} \right) e^{-i\omega\tau_k s}$$

bulunur.

$\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$  olabilmesi için bilineer iç çarpımın tanımından

$$\begin{aligned} \langle q^*(s), q(\theta) \rangle &= \bar{D}(1, \bar{\beta}^*, \bar{\gamma}^*) (1, \beta, \gamma)^T - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{D}(1, \bar{\beta}^*, \bar{\gamma}^*) e^{-i\omega\tau_k(\xi-\theta)} d\eta(\theta) (1, \beta, \gamma)^T e^{i\omega\tau_k\xi} d\xi \\ &= \bar{D} \left\{ 1 + \beta \bar{\beta}^* + \gamma \bar{\gamma}^* - \int_{-1}^0 (1, \bar{\beta}^*, \bar{\gamma}^*) \theta e^{i\omega\tau_k\theta} d\eta(\theta) (1, \beta, \gamma)^T \right\} \\ &= \bar{D} \left\{ 1 + \beta \bar{\beta}^* + \gamma \bar{\gamma}^* + \tau_k \left( -\varepsilon N_0 \beta + \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^2} \bar{\beta}^* \right) e^{-i\omega\tau_k} \right\} \\ \bar{D} &= \frac{1}{1 + \beta \bar{\beta}^* + \gamma \bar{\gamma}^* + \tau_k \left( -\varepsilon N_0 \beta + \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^2} \bar{\beta}^* \right) e^{-i\omega\tau_k}} \end{aligned}$$

şeklinde  $\bar{D}$  elde edilmiş olur. Yani,  $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$  ve  $\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$  eşitlikleri

elde edilmiş olur.

$\mu = 0$  iken center manifoldu tanımlamak için önce koordinatlar hesaplanmalı. Bunun için önce

$$z(t) = \langle q^*, x_t \rangle \quad (4.5)$$

ve

$$W(t, \theta) = x_t - 2 \operatorname{Re} z(t) q(\theta) \quad (4.6)$$

eşitliklerini tanımlayalım.  $z, \bar{z}$  ve  $q, q^*$  vektörleri yönünde  $C_0$  center manifoldunun lokal koordinatları olmak üzere

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (4.7)$$

(4.7) eşitliği hesaplanır. (4.1) sisteminin  $\mu = 0$  iken  $x_t \in C_0$  çözümü için (4.3) denkleminde

$$\dot{x}_t = A(0)x_t + R(0)x_t$$

dir.  $R(\mu)$  nin tanımından, Yardımcı Teorem 4.1 den, (4.5) ve (4.6) dan

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \langle q^*, \dot{x}_t \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle \\ &= \langle q^*, Ax_t \rangle + \langle q^*, Rx_t \rangle \\ &= \langle A^* q^*, x_t \rangle + \bar{q}^*(0) Rx_t(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{q}^*(\xi - \theta) d\eta(\theta) Rx_t(\xi) d\xi \\ &= iw_0 z + \bar{q}^*(0) f(x_t(0), \mu) \\ \dot{z}(t) &= iw_0 z(t) + \bar{q}^*(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir.

Kuznetsov'dan hatırlanacağı üzere Hopf çatallanmanın normal formunun

$$\dot{z} = i\omega \tau_k z(t) + g(z, \bar{z})$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Burada

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots$$



dır. Bu durumda

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))$$

eşitliği geçerlidir. Şimdi de  $\dot{w}(t, \theta)$  hesaplanırsa

$$\begin{aligned} W(t, \theta) &= x_t - 2\operatorname{Re}z(t)q(\theta) \\ \dot{W}(t, \theta) &= \dot{x}_t - 2\operatorname{Re}\dot{z}(t)q(\theta) \\ &= [Ax_t + Rx_t] - 2\operatorname{Re}([i\omega_0 z(t) + \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})]q(\theta)) \\ &= A[w(t, \theta) + 2\operatorname{Re}\{z(t)q(\theta)\}] + Rx_t - 2\operatorname{Re}(i\omega_0 z(t)q(\theta)) - 2\operatorname{Re}(\bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})q(\theta)) \\ &= Aw + 2\operatorname{Re}(zAq(\theta)) + Rx_t - 2\operatorname{Re}(i\omega_0 z(t)q(\theta)) - 2\operatorname{Re}(\bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})q(\theta)) \\ &= Aw + 2\operatorname{Re}(zi\omega_0 q(\theta)) + Rx_t - 2\operatorname{Re}(i\omega_0 z(t)q(\theta)) - 2\operatorname{Re}(\bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})q(\theta)) \\ &= Aw + Rx_t - 2\operatorname{Re}(\bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})q(\theta)) \end{aligned}$$

$$\dot{W} = \dot{W}(t, \theta) = \begin{cases} AW - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0 q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0) \\ AW - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0 q(\theta)\} + f_0 & \theta = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

olarak bulunur.

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (4.10)$$

olmak üzere

$$\dot{W} = AW + H(z, \bar{z}, \theta) \quad (4.11)$$

$$AW - \dot{W} = -H(z, \bar{z}, \theta) \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlansın.

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

olduğu bilinmektedir. Bunu kullanarak  $\dot{W}(t, \theta)$  yeni bir formda hesaplanırsın.

$$\dot{W} = W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}. \quad (*)$$

(\*) ifadesi  $z$  ve  $\bar{z}$  'a göre türevlendirilirse

$$\begin{aligned}
W_z &= W_{20}(\theta)z + W_{11}(\theta)\bar{z} + W_{30}(\theta)\frac{z^2}{3} + \dots \\
W_{\bar{z}} &= W_{11}(\theta)z + W_{02}(\theta)\bar{z}
\end{aligned}
\tag{**}$$

elde edilir. (\*\*) ifadelerini (\*) da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= W_{20}(\theta)z\bar{z} + W_{11}(\theta)(z\bar{z} + z\bar{z}.) + W_{02}(\theta)\bar{z}\bar{z}. + \dots \\
&= W_{20}(\theta)z\{iw_0z + g(z, \bar{z})\} + W_{11}(\theta)[\bar{z}(iw_0z + g(z, \bar{z})) + z(iw_0\bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}))] + \dots \\
&= \frac{z^2}{2}2iw_0W_{20}(\theta) + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir.  $W_{ij}$  ve  $H_{ij}$  katsayıları arasında bir ilişki kurabilmek için (4.12) eşitliğinin sağ tarafı hesaplanır.

$$\begin{aligned}
AW(t, \theta) &= AW_{20}(t, \theta)\frac{z^2}{2} + AW_{11}(t, \theta)z\bar{z} + AW_{20}(t, \theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \\
AW(t, \theta) - \dot{W} &= (A - 2iw)W_{20}\frac{z^2}{2} + AW_{11}z\bar{z} + \dots
\end{aligned}$$

şeklinde olur. O halde

$$\begin{aligned}
(A - 2i\omega\tau_k)W_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta) \\
AW_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta)
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

şeklinde katsayılar eşitlenebilir. (4.9) da verilen ifadelerden ise  $\theta \in [-1, 0)$  için

$$\begin{aligned}
H(z, \bar{z}, \theta) &= -[\bar{q}^*(0)f_0q(\theta) + \overline{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)}] \\
&= -[g(z, \bar{z})q(\theta) + \bar{g}(z, \bar{z})\bar{q}(\theta)] \\
&= \left[ q(\theta) \left( g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right) + \bar{q}(\theta) \left( \bar{g}_{20}\frac{\bar{z}^2}{2} + \bar{g}_{11}z\bar{z} + \bar{g}_{02}\frac{z^2}{2} + \dots \right) \right] \\
&= -[q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}]\frac{z^2}{2} - [q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}]z\bar{z} - [q(\theta)g_{02} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{20}]\frac{\bar{z}^2}{2} - \dots
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
H_{20}(\theta) &= -[q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}] \\
H_{11}(\theta) &= -[q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}] \\
H_{02}(\theta) &= -[q(\theta)g_{02} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{20}]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

şeklinde elde edilir.  $H_{ij}(\theta)$  katsayılarını belirleyebilmek için  $g_{ij}$  ve  $\bar{g}_{ij}$  katsayıları hesaplanmalı. Daha önceden gösterildiği gibi

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})$$

idi. Öyleyse

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2\bar{z}}{2} + \dots \tag{4.15}$$

Şeklinde yazılabilir. (4.5) ve (4.6) yı kullanarak

$$x_t = (x_{1t}(\theta), x_{2t}(\theta), x_{3t}(\theta)) = W(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta), \quad q(\theta) = (1, \beta, \gamma)^T e^{i\omega\tau_k\theta} \text{ ve}$$

$$x_{1t}(0) = z + \bar{z} + W_{20}^{(1)}(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3)$$

$$x_{2t}(0) = \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + W_{20}^{(2)}(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3)$$

$$x_{3t}(0) = \gamma z + \bar{\gamma}\bar{z} + W_{20}^{(3)}(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(3)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(3)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3)$$

$$x_{1t}(-1) = ze^{-i\omega\tau_k\theta} + \bar{z}e^{i\omega\tau_k\theta} + W_{20}^{(1)}(-1) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(-1)z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3)$$

$$x_{2t}(-1) = z\beta e^{-i\omega\tau_k\theta} + \bar{z}\bar{\beta}e^{i\omega\tau_k\theta} + W_{20}^{(2)}(-1) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(-1)z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3)$$

eşitlikleri sağlanır.  $f(\mu, x_t)$  nin tanımından

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}) = \bar{D}\tau_k(1, \bar{\beta}^*, \bar{\gamma}^*) \begin{bmatrix} f_{11}^0 \\ f_{12}^0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{D}\tau_k[f_{11}^0 + \bar{\beta}^* f_{12}^0]$$

eşitliğini

$$f_{11}^0 = -\epsilon x_{1t}(0)x_{2t}(-1)$$

$$f_{12}^0 = -\frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} x_{1t}(-1)x_{1t}(-1) + \frac{\theta P_0}{N_0^2} x_{3t}(0)x_{1t}(-1) + \frac{\theta S_0}{N_0^2} x_{2t}(0)x_{1t}(-1) - \frac{\theta}{N_0} x_{2t}(0)x_{3t}(0)$$

kullanarak yazabiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}) &= \bar{D}\tau_k [-\varepsilon x_{1t}(0)x_{2t}(-1) + \bar{\beta}^* \left\{ -\frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} x_{1t}(-1)x_{1t}(-1) + \frac{\theta P_0}{N_0^2} x_{3t}(0)x_{1t}(-1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta S_0}{N_0^2} x_{2t}(0)x_{1t}(-1) - \frac{\theta}{N_0} x_{2t}(0)x_{3t}(0) \right\}] \\ &= \bar{D}\tau_k \left\{ z^2 \left[ \begin{array}{c} -\varepsilon \beta e^{-i\omega\tau_k\theta} - \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{-2i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0}{N_0^2} \gamma e^{-i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} \\ -\frac{\theta}{N_0} \beta \gamma \end{array} \right] + \right. \\ &\quad z\bar{z} \left[ \begin{array}{c} -\varepsilon \bar{\beta} e^{i\omega\tau_k\theta} - \varepsilon \beta e^{-i\omega\tau_k\theta} - \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} - \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} + \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0}{N_0^2} \gamma e^{i\omega\tau_k\theta} \\ + \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0}{N_0^2} \bar{\gamma} e^{-i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} \beta e^{i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} \bar{\beta} e^{-i\omega\tau_k\theta} - \bar{\beta}^* \frac{\theta}{N_0} \beta \bar{\gamma} - \bar{\beta}^* \frac{\theta}{N_0} \bar{\beta} \gamma \end{array} \right] \\ &\quad + \bar{z}^2 \left[ \begin{array}{c} -\varepsilon \bar{\beta} e^{i\omega\tau_k\theta} - \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{2i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0}{N_0^2} \bar{\gamma} e^{i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} \bar{\beta} e^{i\omega\tau_k\theta} \\ -\bar{\beta}^* \frac{\theta}{N_0} \bar{\beta} \bar{\gamma} \end{array} \right] \\ &\quad + z^2 \bar{z} \left[ \frac{-\varepsilon W_{20}^{(1)}(0) \bar{\beta} e^{i\omega\tau_k\theta}}{2} - \frac{\bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} W_{20}^{(1)}(-1) e^{i\omega\tau_k\theta}}{2} + \frac{\bar{\beta}^* \frac{\theta P_0}{N_0^2} W_{20}^{(3)}(0) e^{i\omega\tau_k\theta}}{2} \right. \\ &\quad + \frac{\bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} W_{20}^{(2)}(0) e^{i\omega\tau_k\theta}}{2} - \frac{\bar{\beta}^* \frac{\theta}{N_0} \bar{\gamma} W_{20}^{(2)}(0)}{2} - \frac{\bar{\beta}^* \frac{\theta}{N_0} \bar{\beta} W_{20}^{(3)}(0)}{2} + \frac{\bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} \bar{\beta} W_{20}^{(1)}(-1)}{2} \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} \bar{\gamma} W_{20}^{(1)}(-1)}{2} - \frac{\bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} W_{20}^{(1)}(-1) e^{i\omega\tau_k\theta}}{2} - \frac{\varepsilon W_{20}^{(2)}(-1)}{2} \right] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})$  ve  $g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots$  denklemlerinin sağ tarafları birbirine eşitlendiğinde;

$$g_{20} = 2\bar{D}\tau_k \left( -\varepsilon \beta e^{-i\omega\tau_k\theta} - \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{-2i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0}{N_0^2} \gamma e^{-i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} - \frac{\theta}{N_0} \beta \gamma \right)$$

$$g_{11} = (2\bar{D}\tau_k - \varepsilon\bar{\beta}e^{i\omega\tau_k\theta} - \varepsilon\beta e^{-i\omega\tau_k\theta} - 2\bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} + \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0}{N_0^2} \gamma e^{i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0}{N_0^2} \bar{\gamma} e^{-i\omega\tau_k\theta} \\ + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} \beta e^{i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} \bar{\beta} e^{-i\omega\tau_k\theta} - \bar{\beta}^* \frac{\theta}{N_0} \beta \bar{\gamma} - \bar{\beta}^* \frac{\theta}{N_0} \bar{\beta} \gamma)$$

$$g_{02} = 2\bar{D}\tau_k \left( \begin{array}{c} -\varepsilon\bar{\beta}e^{i\omega\tau_k\theta} - \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{2i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0}{N_0^2} \bar{\gamma} e^{i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} \bar{\beta} e^{i\omega\tau_k\theta} \\ -\bar{\beta}^* \frac{\theta}{N_0} \bar{\beta} \bar{\gamma} \end{array} \right)$$

$$g_{21} = \bar{D}\tau_k (-\varepsilon W_{20}^{(1)}(0) \bar{\beta} e^{i\omega\tau_k\theta} - \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} W_{20}^{(1)}(-1) e^{i\omega\tau_k\theta} + \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0}{N_0^2} W_{20}^{(3)}(0) e^{i\omega\tau_k\theta} \\ + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} W_{20}^{(2)}(0) e^{i\omega\tau_k\theta} - \bar{\beta}^* \frac{\theta}{N_0} \bar{\gamma} W_{20}^{(2)}(0) - \bar{\beta}^* \frac{\theta}{N_0} \bar{\beta} W_{20}^{(3)}(0) + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} \bar{\beta} W_{20}^{(1)}(-1) \\ + \bar{\beta}^* \frac{\theta S_0}{N_0^2} \bar{\gamma} W_{20}^{(1)}(-1) - \bar{\beta}^* \frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} W_{20}^{(1)}(-1) e^{i\omega\tau_k\theta} - \varepsilon W_{20}^{(2)}(-1))$$

katsayıları bulunmuş olur.

$g_{21}$  i tanımlayabilmek için  $W_{20}(\theta)$  ve  $W_{11}(\theta)$  yı hesaplamak gerekir. (4.12), (4.13) ve  $A$  'nın tanımından

$$\dot{W}_{20}(\theta) = 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta) - g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)$$

dır.  $q(\theta) = q(0)e^{i\omega\tau_k\theta}$  şeklinde tanımlandığında

$$\dot{W}_{20}(\theta) = 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta) - g_{20}q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} - \bar{g}_{02}\bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta}$$

$$e^{-2i\omega\tau_k\theta}(\dot{W}_{20}(\theta) - 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta)) = e^{-2i\omega\tau_k\theta}(-g_{20}q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} - \bar{g}_{02}\bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta})$$

$$\int \frac{d}{d\theta} (W_{20}(\theta)e^{-2i\omega\tau_k\theta}) = \int (-g_{20}q(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} - \bar{g}_{02}\bar{q}(0)e^{-3i\omega\tau_k\theta})$$

$$W_{20}(\theta)e^{-2i\omega\tau_k\theta} = -g_{20}q(0)\frac{e^{-i\omega\tau_k\theta}}{-i\omega\tau_k\theta} - \bar{g}_{02}\bar{q}(0)\frac{e^{-3i\omega\tau_k\theta}}{-3i\omega\tau_k\theta} + E_1$$

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega}q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega}\bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_1e^{2i\omega\tau_k\theta} \quad (4.16)$$

$E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, E_1^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$  sabit vektördür. Benzer yollarla,

$$AW_{11} = -H_{11} = q(\theta)g_{11} + \overline{q(\theta)g_{11}(\theta)} = q(0)e^{i\omega\tau_k\theta}g_{11} + \bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta}\bar{g}_{11}$$

$$\int \dot{W}_{11} = \int q(0)e^{i\omega\tau_k\theta}g_{11} + \bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta}\bar{g}_{11}$$

$$W_{11}(\theta) = q(0)g_{11}\frac{e^{i\omega\tau_k\theta}}{i\omega\tau_k} - \bar{q}(0)\bar{g}_{11}\frac{e^{-i\omega\tau_k\theta}}{i\omega\tau_k} + E_2$$

$$W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\tau_k\omega}q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k\omega}\bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_2 \quad (4.17)$$

$E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}, E_2^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$  sabit vektörü olmak üzere (4.17) denklemi de bulunur.

Şimdi  $E_1$  ve  $E_2$  bulunmalı.  $A$  'nın tanımından ve (4.13) den

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{20}(\theta) = 2i\omega\tau_k W_{20}(0) - H_{20}(0) \quad (4.18)$$

ve

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{11}(\theta) = -H_{11}(0) \quad (4.19)$$

$d\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$  olmak üzere (4.18) ve (4.19) denklemleri bulunur. (\*) ve (4.9) dan

$$H_{20}(\theta) = -q(0)g_{20} - \bar{q}(0)\bar{g}_{02} + 2\tau_k \begin{pmatrix} -\varepsilon\beta e^{-i\omega\tau_k\theta} \\ -\frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{-2i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta P_0 \gamma}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta S_0}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} - \frac{\theta}{N_0} \beta\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

ve

$$H_{11}(\theta) = -q(0)g_{11} - \bar{q}(0)\bar{g}_{11} 2\tau_k \begin{pmatrix} -\varepsilon \operatorname{Re}\{\beta e^{-i\omega\tau_k\theta}\} \\ -2\frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} + \frac{\theta P_0 \gamma}{N_0^2} \operatorname{Re}\{e^{i\omega\tau_k\theta}\} + \frac{\theta S_0}{N_0^2} \operatorname{Re}\{\beta e^{-i\omega\tau_k\theta}\} - \frac{\theta}{N_0} \operatorname{Re}\{\beta\gamma\} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

şeklinde yazılır. (4.18) ve (4.20) 'den;

$$\left( i\omega\tau_k I - \int_{-1}^0 e^{i\omega\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) q(0) = 0$$

$$\left( -i\omega\tau_k I - \int_{-1}^0 e^{-i\omega\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) q(0) = 0$$

yardımlı ile

$$\begin{aligned} & \left( 2i\omega\tau_k I - \int_{-1}^0 e^{2i\omega\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) E_1 \\ &= 2\tau_k \begin{pmatrix} -\varepsilon\beta e^{-i\omega\tau_k\theta} \\ -\frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{-2i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta P_0 \gamma}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta S_0}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} - \frac{\theta}{N_0} \beta\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2i\omega & \varepsilon N_0 e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 0 \\ -\frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 2i\omega & \frac{\theta P_0}{N_0} \\ 0 & -\alpha & 2i\omega + \alpha \end{pmatrix} E_1 \\ &= 2\tau_k \begin{pmatrix} -\varepsilon\beta e^{-i\omega\tau_k\theta} \\ -\frac{\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{-2i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta P_0 \gamma}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta S_0}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} - \frac{\theta}{N_0} \beta\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.  $E_1 i$  bulmak için bu sistem çözüldüğünde;

$$\begin{aligned}
E_1^{(1)} &= \frac{2}{A_1} \begin{vmatrix} -\varepsilon\beta e^{-i\omega\tau_k\theta} & \varepsilon N_0 e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 0 \\ \frac{-\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{-2i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta P_0 \gamma}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta S_0}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} - \frac{\theta}{N_0} \beta\gamma & 2i\omega & \frac{\theta P_0}{N_0} \\ 0 & -\alpha & 2i\omega + \alpha \end{vmatrix} \\
E_1^{(2)} &= \frac{2}{A_1} \begin{vmatrix} 2i\omega & -\varepsilon\beta e^{-i\omega\tau_k\theta} & 0 \\ \frac{-\theta P_0 S_0}{N_0^2} e^{-2i\omega\tau_k\theta} & \frac{-\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{-2i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta P_0 \gamma}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta S_0}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} - \frac{\theta}{N_0} \beta\gamma & \frac{\theta P_0}{N_0} \\ 0 & 0 & 2i\omega + \alpha \end{vmatrix} \\
E_1^{(3)} &= \frac{2}{A_1} \begin{vmatrix} 2i\omega & \varepsilon N_0 e^{-2i\omega\tau_k\theta} & -\varepsilon\beta e^{-i\omega\tau_k\theta} \\ \frac{-\theta P_0 S_0}{N_0^2} e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 2i\omega & \frac{-\theta P_0 S_0}{N_0^3} e^{-2i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta P_0 \gamma}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} + \frac{\theta S_0}{N_0^2} e^{-i\omega\tau_k\theta} - \frac{\theta}{N_0} \beta\gamma \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{vmatrix} 2i\omega & \varepsilon N_0 e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 0 \\ \frac{-\theta P_0 S_0}{N_0^2} e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 2i\omega & \frac{\theta P_0}{N_0} \\ 0 & -\alpha & 2i\omega + \alpha \end{vmatrix} \\
&= -4\omega^2(2i\omega + \alpha) + \alpha 2i\omega \frac{\theta P_0}{N_0} - \frac{\theta P_0 S_0}{N_0} \varepsilon e^{-4i\omega\tau_k\theta} (2i\omega + \alpha)
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde (4.17), (4.19) ve (4.21) yardımı ile

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon N_0 e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 0 \\ \frac{-\theta P_0 S_0}{N_0^2} e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 0 & \frac{\theta P_0}{N_0} \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix} E_2 \\
&= 2 \begin{pmatrix} -\varepsilon \operatorname{Re}\{\beta e^{-i\omega\tau_k\theta}\} \\ K \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$K = \frac{-2\theta P_0 S_0}{N_0^3} + \frac{\theta P_0 \gamma}{N_0^2} \operatorname{Re}\{\gamma e^{i\omega\tau_k\theta}\} + \frac{\theta S_0}{N_0^2} \operatorname{Re}\{\beta e^{-i\omega\tau_k\theta}\} - \frac{\theta}{N_0} \operatorname{Re}\{\beta \bar{\gamma}\}$$

olmak üzere elde

edilir.  $E_2$  'yi bulmak için bu sistem çözüldüğünde



$$\begin{aligned}
E_2^{(1)} &= \frac{2}{A_2} \begin{vmatrix} -\varepsilon \operatorname{Re}\{\beta e^{-i\omega\tau_k\theta}\} & \varepsilon N_0 e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 0 \\ K & 0 & \frac{\theta P_0}{N_0} \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{vmatrix} \\
E_2^{(2)} &= \frac{2}{A_2} \begin{vmatrix} 0 & -\varepsilon \operatorname{Re}\{\beta e^{-i\omega\tau_k\theta}\} & 0 \\ \frac{-\theta P_0 S_0}{N_0^2} e^{-2i\omega\tau_k\theta} & K & \frac{\theta P_0}{N_0} \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} \\
E_2^{(3)} &= \frac{2}{A_2} \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon N_0 e^{-2i\omega\tau_k\theta} & -\varepsilon \operatorname{Re}\{\beta e^{-i\omega\tau_k\theta}\} \\ \frac{-\theta P_0 S_0}{N_0^2} e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 0 & K \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon N_0 e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 0 \\ -\frac{\theta P_0 S_0}{N_0^2} e^{-2i\omega\tau_k\theta} & 0 & \frac{\theta P_0}{N_0} \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{vmatrix} \\
&= -\alpha\theta\varepsilon \frac{P_0 S_0}{N_0} e^{-4i\omega\tau_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{20}^{(1)}(0) &= ig_{20}q(0)\frac{1}{w\tau_k} + i\bar{g}_{02}\bar{q}(0)\frac{1}{3w\tau_k} + \frac{2}{A_1} \begin{vmatrix} -\varepsilon\beta & \varepsilon N_0 & 0 \\ 0 & 2iw & 0 \\ 0 & -\alpha & 2iw+\alpha \end{vmatrix} \\
W_{20}^{(2)}(0) &= ig_{20}q(0)\frac{1}{w\tau_k} + i\bar{g}_{02}\bar{q}(0)\frac{1}{3w\tau_k} + \frac{2}{A_1} \begin{vmatrix} 2i\omega & -\varepsilon\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2iw+\alpha \end{vmatrix} \\
W_{20}^{(3)}(0) &= ig_{20}q(0)\frac{1}{w\tau_k} + i\bar{g}_{02}\bar{q}(0)\frac{1}{3w\tau_k} + \frac{2}{A_1} \begin{vmatrix} 2i\omega & \varepsilon N_0 & -\varepsilon\beta \\ 0 & 2iw & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

dır. (4.16) ve (4.22) eşitliklerinden  $L = \frac{P_0 S_0}{N_0^3} e^{-2i\omega\tau_k} - \frac{P_0 \gamma}{N_0^2} e^{i\omega\tau_k} - \frac{S_0}{N_0^2} e^{i\omega\tau_k} + \frac{1}{N_0} \beta\gamma$  olmak üzere ve

$$\begin{aligned}
W_{20}^{(1)}(-1) &= ig_{20}q(0)\frac{e^{-iw\tau_k}}{w\tau_k} + i\bar{g}_{02}\bar{q}(0)\frac{e^{iw\tau_k}}{3w\tau_k} \\
&+ e^{-2iw\tau_k} \frac{2}{A_1} \begin{vmatrix} -\varepsilon\beta e^{i\omega\tau_k} & \varepsilon N_0 e^{2i\omega\tau_k} & 0 \\ L & 2iw & -\frac{P_0}{N_0} \\ 0 & -\alpha & 2iw+\alpha \end{vmatrix} \\
W_{20}^{(2)}(-1) &= ig_{20}q(0)\frac{e^{-iw\tau_k}}{w\tau_k} + i\bar{g}_{02}\bar{q}(0)\frac{e^{iw\tau_k}}{3w\tau_k} \\
&+ e^{-2iw\tau_k} \frac{2}{A_1} \begin{vmatrix} 2i\omega & -\varepsilon\beta e^{i\omega\tau_k} & 0 \\ \frac{P_0 S_0}{N_0^2} e^{2i\omega\tau_k} & L & -\frac{P_0}{N_0} \\ 0 & 0 & 2iw+\alpha \end{vmatrix} \\
W_{20}^{(3)}(-1) &= ig_{20}q(0)\frac{e^{-iw\tau_k}}{w\tau_k} + i\bar{g}_{02}\bar{q}(0)\frac{e^{iw\tau_k}}{3w\tau_k} \\
&+ e^{-2iw\tau_k} \frac{2}{A_1} \begin{vmatrix} 2i\omega & \varepsilon N_0 e^{2i\omega\tau_k} & -\varepsilon\beta e^{i\omega\tau_k} \\ \frac{P_0 S_0}{N_0^2} e^{2i\omega\tau_k} & 2iw & L \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (4.17) ve (4.23)'den aynı mantıkla  $W_{11}^{(1)}(0)$ ,  $W_{11}^{(2)}(0)$ ,  $W_{11}^{(3)}(0)$ ,  $W_{11}^{(1)}(-1)$ ,  $W_{11}^{(2)}(-1)$ , ve  $W_{11}^{(3)}(-1)$  değerleri bulunur. (4.24) ve (4.25) eşitliklerinden  $g_{ij}$  katsayıları belirlenir. Böylece Center Manifoldda  $\tau_k$  kritik değerindeki çatallanan periyodik çözümlerin çatallanma katsayıları

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega\tau_k}(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2}$$

$$\mu_2 = -\frac{Re\{c_1(0)\}}{Re\{\lambda'(\tau_k)\}}$$

$$\beta_2 = 2Re\{c_1(0)\}$$

$$T_2 = -\frac{Im\{c_1(0)\} + \mu_2 Im\{\lambda'(\tau_k)\}}{\omega\tau_k}$$

şeklinde belirlenir. Burada  $\mu_2$ ; Hopf çatallanmanın yönünü,  $\beta_2$ ; çatallanan periyodik çözümün kararlılığını ve  $T_2$ ; çatallanan çözümün periyodunu ifade eder. Bu bilgilerle aşağıdaki teorem verilir.

**Teorem 4.1:** Hopf çatallanmanın yönünü belirleyen  $\mu_2$  için; eğer  $\mu_2 > 0$  ise  $\tau > \tau_0$  için çatallanan periyodik çözüm vardır ve Hopf çatallanma süperkritiktir,  $\mu_2 < 0$  ise  $\tau < \tau_0$  için çatallanan periyodik çözüm vardır ve Hopf çatallanma subkritiktir. Çatallanan periyodik çözümün kararlılığını belirleyen  $\beta_2$  için;  $\beta_2 < 0$  ise çatallanan periyodik çözüm kararlı,  $\beta_2 > 0$  ise kararsızdır. Çatallanan çözümün periyodunu ifade eden  $T_2$  için ;  $T_2 < 0$  iken periyod artar,  $T_2 > 0$  iken periyod azalır.

## 5. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR

Bu bölümde, önceki bölümlerden elde edilen teorik sonuçlar MATLAB programı kullanılarak nümerik simülasyonlar ile gösterilecektir. Gecikmeli av- avcı sisteminde

$$r_1 = 0.45$$

$$r_2 = 0.1$$

$$\theta = 0.05$$

$$\varepsilon = 0.03$$

$$\alpha = 1$$

alınarak (1\*) sistemi

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= 0.45N(t) - 0.03N(t)P(t-\tau) \\ \frac{dP}{dt} &= P(t) \left[ 0.1 - \frac{0.05}{N(t-\tau)} S(t) \right] \\ \frac{dS}{dt} &= P(t) - S(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

sistemine dönüşür. (5.1) sisteminin tek pozitif denge noktası  $E^* = (N_0, P_0, S_0) = (7.5, 15, 15)$  dır. Daha önceki bölümlerdeki algoritmalarla  $\tau_0 = 1.1094$ ,  $f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r$  denkleminin pozitif köklerinden  $z_1 = 0.0442$  ve  $z_1 = w_1^2$  den  $w_1 = \sqrt{z_1} = 0.2103$ ,  $f'(z) = 0.0845 > 0$  olarak bulunur. Teorem 3.2 den  $E^*$  denge noktası  $\tau \in [0, \tau_0) = [0, 1.1094)$  iken asimtotik kararlıdır ancak  $\tau > 1.1094$  iken kararsızdır.  $\tau = \tau_0 = 1.1094$  de ise Hopf çatallanma meydana gelir. Eğer (5.1) sistemi için Hopf çatallanma parametreleri hesaplanırsa;

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega\tau_k}(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2} = 0.251 - 0.0055i$$

$$\mu_2 = -\frac{Re\{c_1(0)\}}{Re\{\lambda'(\tau_k)\}} = -0.5050$$

$$\beta_2 = 2Re\{c_1(0)\} = 0.0502$$

$$T_2 = -\frac{Im\{c_1(0)\} + \mu_2 Im\{\lambda'(\tau_k)\}}{\omega\tau_k} = 0.0253$$

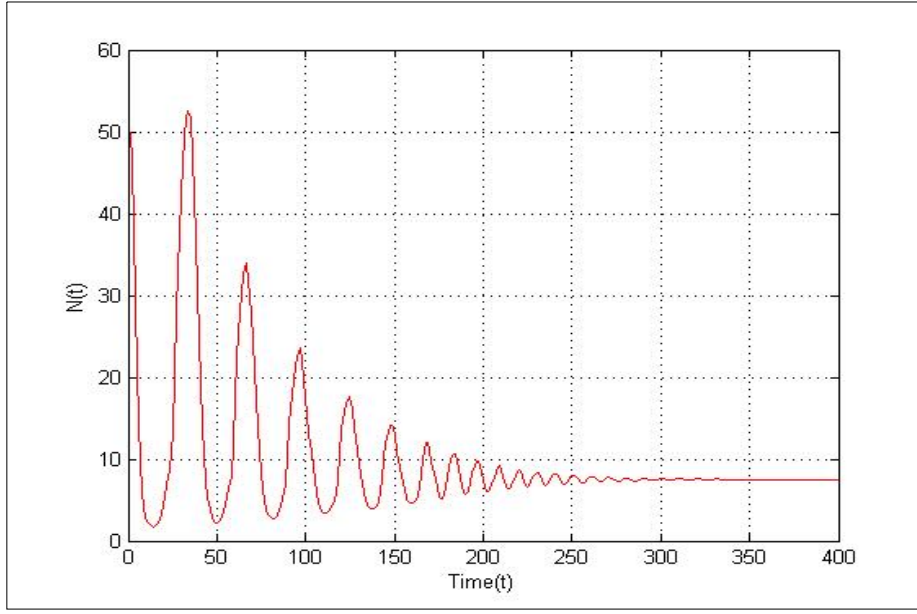
elde edilir. Buradan görülür ki,

$$\mu_2 = -0.5050 < 0, \beta_2 = 0.0502 > 0, T_2 = 0.0253 > 0$$

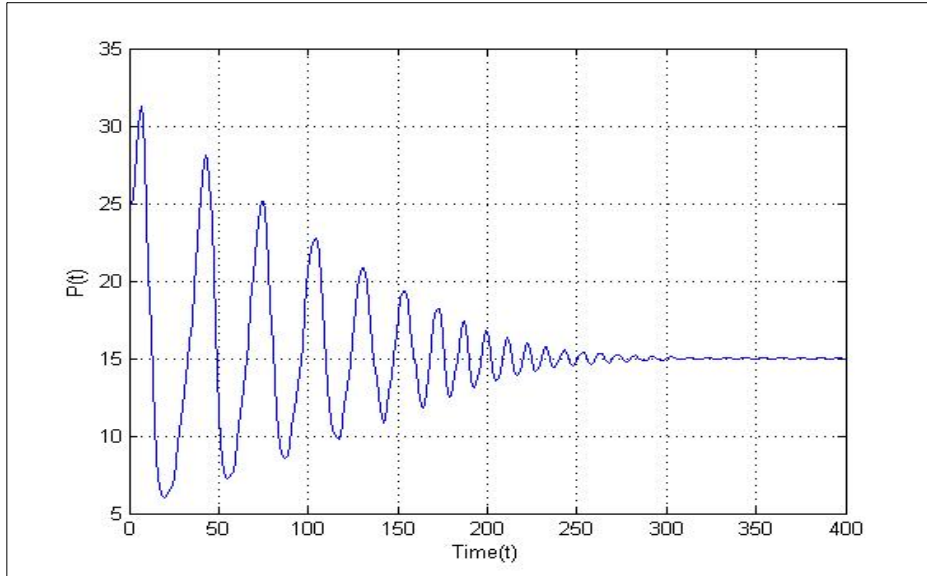
dır. Böylece (5.1) sisteminde  $\tau_0 = 1.1094$  iken oluşan Hopf çatallanma subkritiktir.

$\tau, \tau_0$  in soluna geçtiğinde periyodik çözüm çatallanır ve aşağıdaki şekillerden de görüldüğü üzere oluşan çatallanan periyodik çözüm kararsızdır.

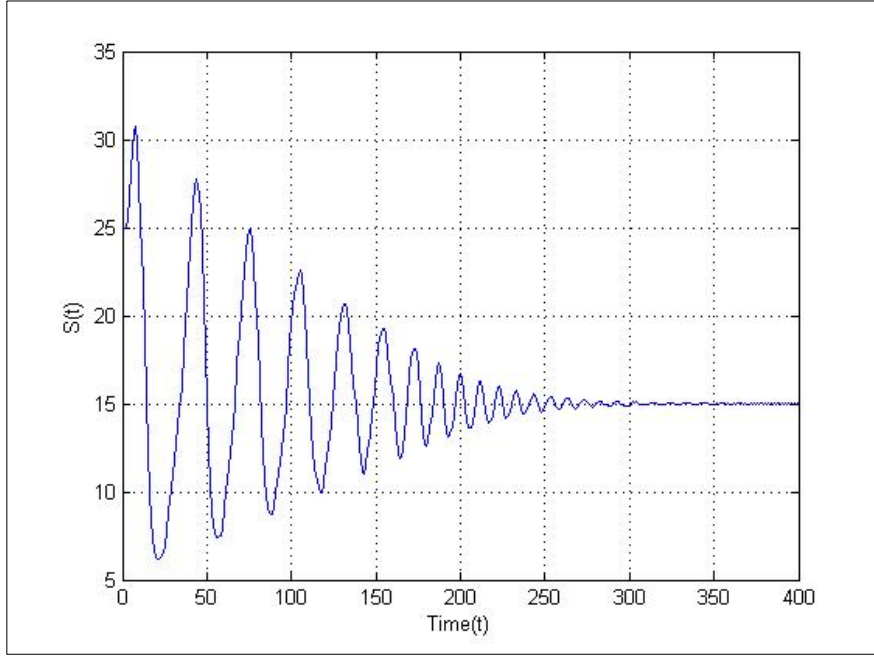
Burada yapılan nümerik simülasyonlarda, başlangıç noktası  $(50,25,25)$  olarak alınmıştır. Şekil 5.1, şekil 5.2 ve şekil 5.3 gösteriyor ki,  $E^*$  denge noktası  $\tau \in [0,1.1094)$  iken asimtotik kararlıdır. İlk olarak,  $\tau = 0.009 < \tau_0$  alındığında,  $N(t), P(t)$  ve  $S(t)$  yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri şekil 5.1, şekil 5.2 ve şekil 5.3 de gösterilmiştir. Burada  $\tau < \tau_0$  için  $E^*$  denge noktasının kararlı olduğu doğrulanmıştır.



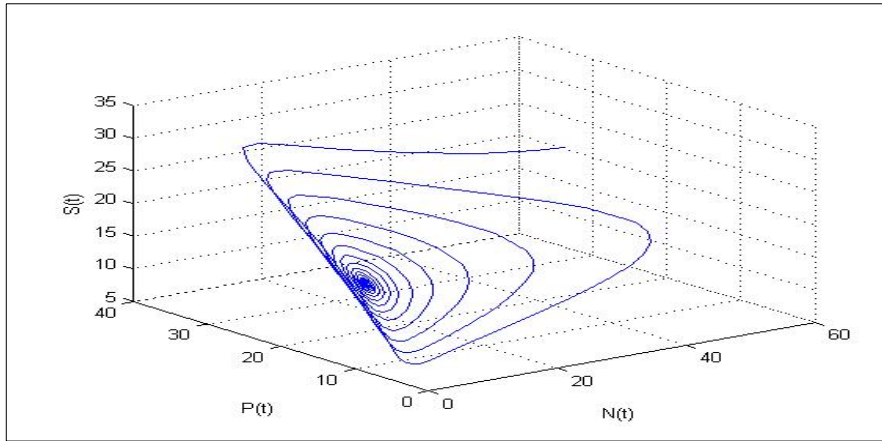
**Şekil 5.1 :**  $\tau = 0.009 < \tau_0$  için  $(N_0, P_0, S_0) = (50, 25, 25)$  başlangıç koşulları altında av popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği



**Şekil 5.2 :**  $\tau = 0.009 < \tau_0$  için  $(N_0, P_0, S_0) = (50, 25, 25)$  başlangıç koşulları altında avcı popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği



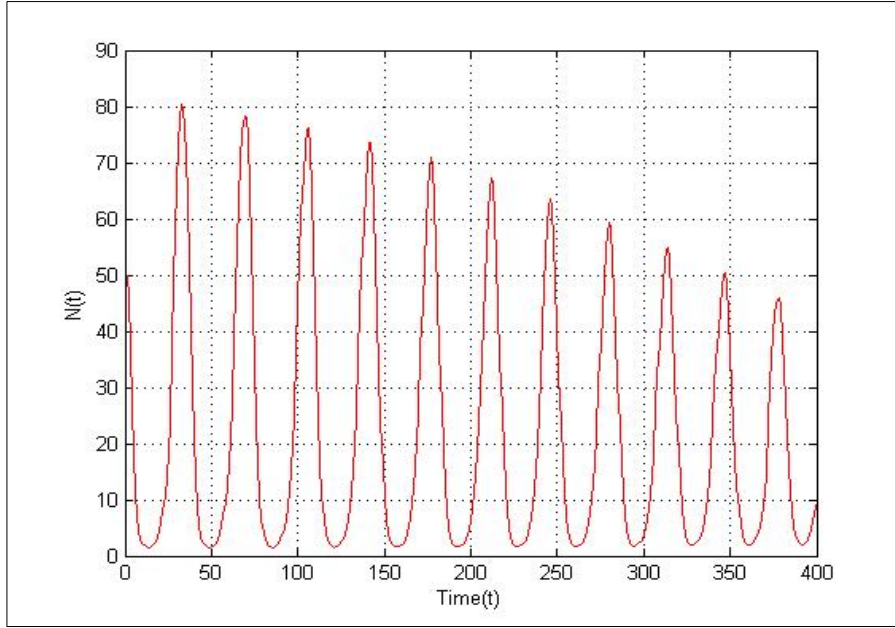
**Şekil 5.3 :  $\tau = 0.009 < \tau_0$  için  $(N_0, P_0, S_0) = (50, 25, 25)$  başlangıç koşulları altında  $S(t)$  fonksiyonunun zamana göre grafiği**



**Şekil 5.4 : Gecikme parametresi tekrar  $\tau = 0.009 < \tau_0$  alınarak av popülasyon yoğunluğuna karşılık gelen avcı popülasyon yoğunluğunun grafiği**

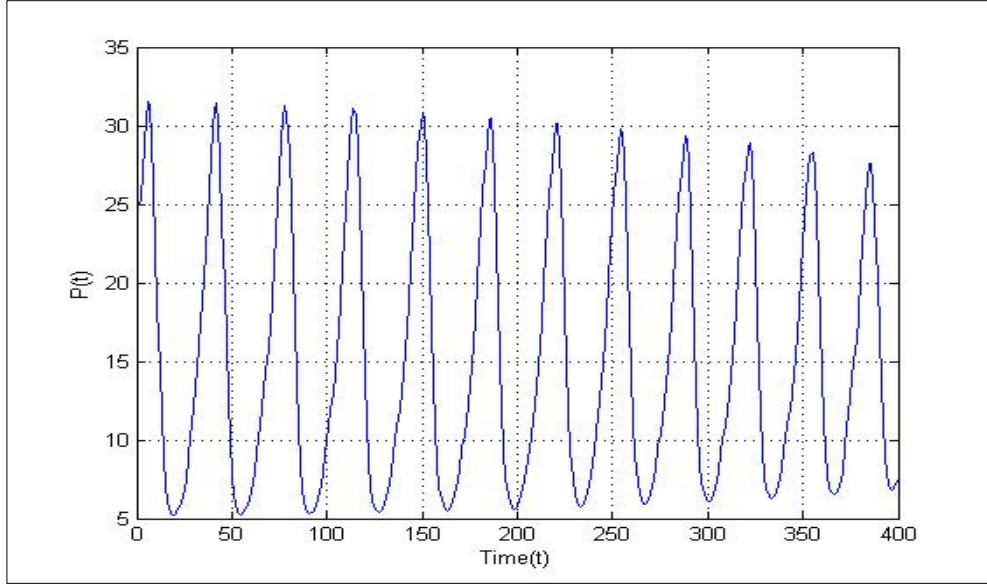
Burada üç boyutta,  $E^*$  denge noktasının asimtotik kararlı olduğu gerçeklenmiştir.

şekil 5.5, şekil 5.6 ve şekil 5.7 de  $\tau = 1.000 < \tau_0$  için nümerik simülasyonlar yapılmıştır ve bu şekiller gösterir ki,  $E^*$  denge noktası kararlılığını kaybeder ve sistemde hopf çatallanma meydana gelir. Bunun sonucunda ise denge noktası etrafında kararsız periyodik çözümler meydana gelir.

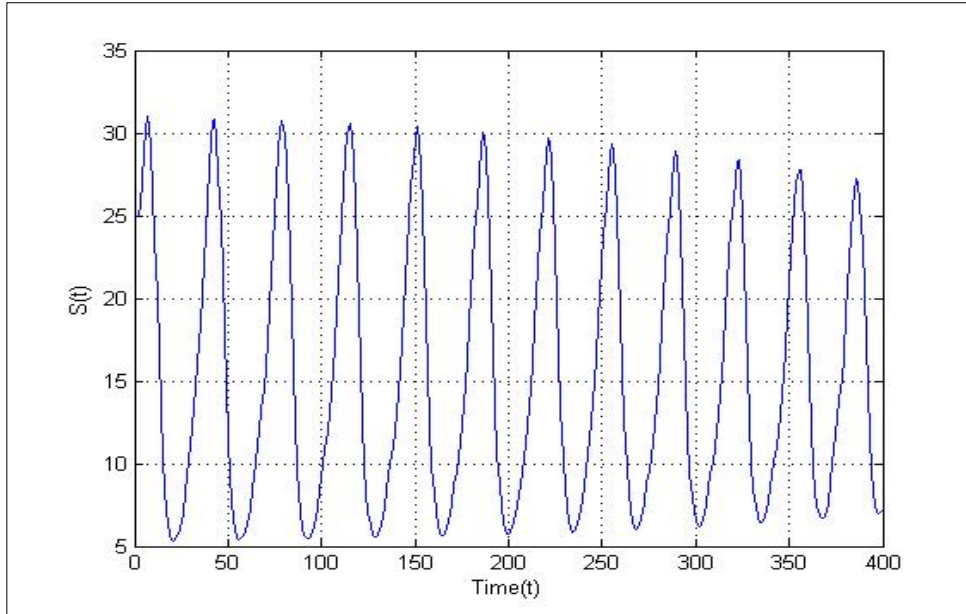


**şekil 5.5 :  $\tau = 1.000 < \tau_0$  için  $(N_0, P_0, S_0) = (50, 25, 25)$  başlangıç koşulları altında av popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği**

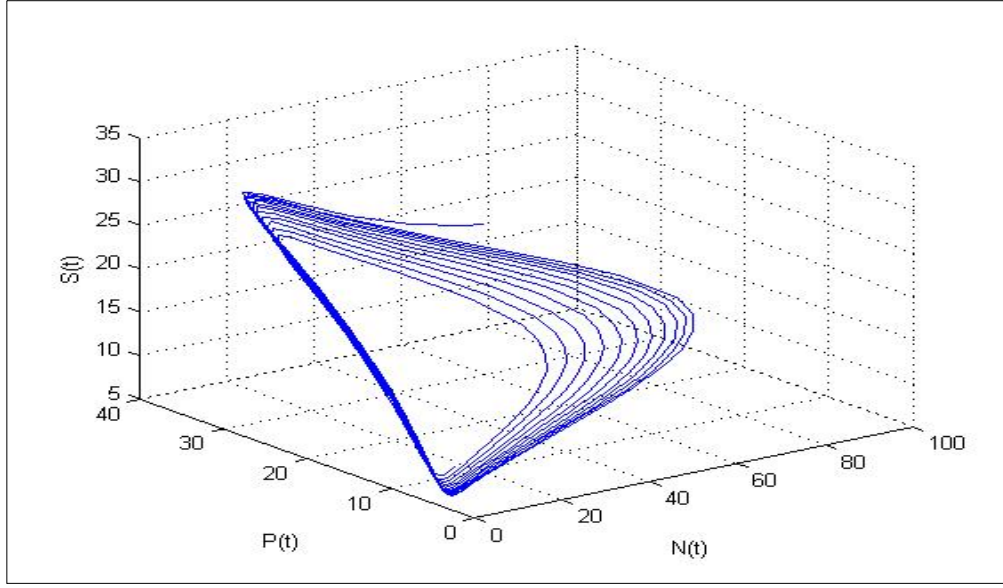




**Şekil 5.6 :**  $\tau = 1.000 < \tau_0$  için  $(N_0, P_0, S_0) = (50, 25, 25)$  başlangıç koşulları altında avcı popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği



**Şekil 5.7 :**  $\tau = 1.0000 < \tau_0$  için  $(N_0, P_0, S_0) = (50, 25, 25)$  başlangıç koşulları altında  $S(t)$  fonksiyonunun zamana göre grafiği



**Şekil 5.8 :  $\tau = 1.0000 < \tau_0$  için  $(N_0, P_0, S_0) = (50, 25, 25)$  başlangıç koşulları altında avcı popülasyonunun av popülasyonuna göre faz portresi**

Böylece, analitik çalışmalardan elde edilen, gecikme parametresindeki değişimin, denge noktasının kararlılığı üzerindeki etkisi, nümerik simülasyonlarla da desteklenmiş olur.

## 6. SONUÇLAR

Dinamik sistemleri matematiksel olarak ifade ederken gerçeğe yakın bir model kurabilmek için gecikmeli diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Aynı zamanda bu tür sistemlerde mutlaka bir parametre bulunduğundan parametrenin değişiminin sistem üzerinde yarattığı etki merak edilmektedir.

May (1973) tarafından ortaya konulan gecikmeli diferansiyel denklem sistemini, Song ve Wei (1999) analiz etmişler, av popülasyonundaki gecikme teriminin etkilerini incelemişlerdir. Yan ve Lie (2006), bu sistemde avcı popülasyonuna gecikme terimi eklemişler ve sistemin pozitif denge noktasının kararlılığındaki değişimi incelemişlerdir. Ayrıca Normal Form Teorisi ve Center Manifold Teoremi kullanılarak periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemişlerdir. Yan ve Zang (2007), çalışmalarında av-avcı sistemindeki tüm av ve avcı popülasyonlarına gecikme terimi eklemişlerdir. Burada pozitif denge noktasının kararlılığını kaybettiği ve Hopf çatallanma oluştuğu gösterilmiş ve Normal Form Teorisi, Center Manifold Teoremi kullanılarak Hopf çatallanmanın yönü, periyodu, kararlılığı ve çatallanan periyodik çözümler incelenmiştir.

Günümüzde ise ülkemizde bu çalışmalar destekleyen problemi ile Canan Çelik Karaaslanlı yapmıştır. Yakın tarihte yayınlanan çalışmasında Karaaslanlı (2011) gecikmeli lojistik diferansiyel denklem sistemini incelemiştir. Bu çalışmada kesikli ve dağılımlı gecikmeler göz önüne alınarak farklı popülasyonlar üzerindeki gecikme etkisinin sistemin kararlılığını nasıl etkilediği incelenmiştir. Böylece yapılan teorik analizle lineerleştirilmiş sistemin lokal kararlılığı incelenmiş  $\tau$  gecikme parametresi, Hopf çatallanma parametresi olarak seçilerek  $\tau$  için belirlenen koşullar altında sistemin tek pozitif denge noktasının kararlılığını kaybettiği ve Hopf çatallanma oluştuğu gösterilmiştir. Başka bir ifadeyle periyodik çözümün pozitif denge noktası etrafında çatallandığı ispatlanmıştır. Ayrıca Normal Form Teorisi ve Center Manifold Teoremi kullanılarak  $\tau'$ 'nin kritik değerinde çatallanan periyodik çözümün kararlılığı, yönü ve periyodu bulunmuştur.

Bu çalışmada ise Karaaslanlı'nın çalışmasındaki problemde av sistemine, avcı sistemine ve avcı sistemindeki kernel fonksiyonuna  $\tau$  gecikme terimi eklenerek sistemin pozitif denge noktasının kararlılığındaki değişim incelenmiştir. Bu yeni problemin teorik kararlılık ve çatallanma analizi yapılmış ve son olarak teorik çalışmaları desteklemek amacı ile nümerik bazı simülasyonlar (MATLAB kullanılarak) yapılmış ve sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir. Burada  $r_1 = 0.45$  ,  $r_2 = 0.1$  ,  $\theta = 0.05$  ,  $\varepsilon = 0.03$  ve  $\alpha = 1$  alınarak  $\tau_0 = 1.1094$  bulundu ve  $\mu_2$  değerinin bulunmasıyla Hopf çatallanmanın yönü ve türü,  $\beta_2$  değerinin bulunmasıyla periyodik çözümün kararlılığı,  $T_2$  değerinin bulunmasıyla çatallanan çözümün periyodu elde edilmiştir.

## KAYNAKÇA

### *Kitaplar*

Hassard, N. D. & Kazarino, Y. H., 1981. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge: Cambridge University Press.

Kuang, Y., 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Boston: Academic Press.

May, R.M., 1973. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, New Jersey, USA: Princeton Univ. Press.

Murray, J. D., 1993. *Mathematical Biology*, New York : Springer-Verlag Press.

Volterra, V., 1978. *Variazioni et fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Scudo & Ziegler (Trans.), R. Comitato Talassografico Memoria (original printing 1927)

Wang, Z. & Wen, X., 2002. *Non-linear Analysis*, RWA Pres.

### ***Süreli Yayınlar***

- Chen, G. & Liao, X. , 2005. Hopf bifurcation and chaos analysis of Chen's system with distributed delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, pp.197-220.
- Chen, L. , Liu, B. & Teng, Z. , 2006. Analysis of a predator-prey model with Holling II functional response concerning impulsive control strategy, *J. Comput. Appl. Math.*, pp.347-362.
- Chen, X. , 2007. Periodicity in a nonlinear discrete predator-prey system with state dependent delays, *Nonlinear Analysis*, pp.435-446.
- Chen, Y., Han, M., Lin, Y. & Sun, C. , 2007. Global qualitative analysis for a predator-prey system with delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, pp.1582-1596.
- Choudhury, SR. & Krise, S. , 2003. Bifurcations and chaos in a predator-prey model with delay and a laser-diode system with self-sustained pulsations, *Chaos, Solitons & Fractals*, pp.59-77.
- Chu, Y. D. & Yan, X. P. , 2006. Stability and bifurcation analysis for a delayed Lotka-Volterra predator-prey system, *J. Comput. Appl. Math.* , pp.198-210.
- Çelik, C. , 2008. The stability and Hopf bifurcation for a predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons&Fractals*, pp.87-99.
- Çelik, C. , 2009. Hopf bifurcation of a ratio-dependent predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, pp.1474-1484.
- Çelik, C. & Duman, O. , 2009. Allee effect in a discrete-time predator-prey system, *Chaos, Solitons & Fractals*, pp.1956-1962.
- Fei, S., Li, T., Yu, J. & Zhang, K. , 2008. Simplified exponential stability analysis for recurrent neural networks with discrete and distributed time-varying delays, *Applied Mathematics and Computation*, pp.465-474.
- Fowler, M. S. & Ruxton, G. D. , 2002. Population dynamic consequences of Allee effects, *J. Theor. Biol.*, pp.39-46.
- Gopalsamy, K. , 1980. Time lags and global stability in two species competition, *Bull. Math. Biol.*, pp.728-737.

- Hadjiavgousti, D. & Ichtiaroglou, S. , 2008. Allee effect in a predator-prey system, *Chaos, Soliton & Fractals*, pp.334-342.
- He, X. 1996. Stability and delays in a predator-prey system, *J. Math. Anal. Appl.*, pp.355-370.
- He, X. , Liao, M. & Xu, C. , 2011. Stability and Hopf Bifurcation analysis for a Lotka-Volterra predator-prey models with two delays, *Int. J. Appl. Math. Comput.*, pp.97- 107.
- Huo, H. F. & Li, W.-T. , 2004. Existence and global stability of periodic solutions of a discrete predator-prey system with delays, *Appl. Math. Comput.*, pp.337- 351.
- Jang, S. R.-J., 2006. Allee effects in a discrete-time host-parasitoid model, *J. Di. Equ. Appl.* , pp.165-181.
- Jiang, G. & Lu, Q. , 2007. Impulsive state feedback of a predator-prey model, *J. Comput. Appl. Math.* , pp.193-207.
- Leung, A. , 1977. Periodic solutions for a prey-predator differential delay equation, *J. Differential Equations*, pp.391-403.
- Li, W.-T. , Wang, L. L. & Zhao, P.-H. , 2004. Existence and global stability of positive periodic solutions of a discrete predator-prey system with delays, *Adv. Difference Equ.* pp.321-336.
- Li, Y. , Wu, Y. , Yau, X. & Zhou, X. , 2009. Stability and Hopf Bifurcation analysis on a two neuron network with discrete and distributed delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, pp.1493-1505.
- Liu, X. & Xiao, D. , 2007. Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator-prey system, *Chaos, Solitons & Fractals*, pp.80-94.
- Liu, Y. F. , Wang, G. & Zhou, S. R. , 2005. The stability of predator-prey systems subject to the Allee effects, *Theor. Population Biol.* , pp.23-31.
- Liu, Z. & Yuan, R. , 2006. Stability and bifurcation in a harvested one-predator-two prey model with delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, pp.1395-1407.
- Ma, W. & Takeuchi, Y. , 1998. Stability analysis on a predator-prey system with distributed delays, *J. Comput. Appl. Math.* , pp.79-94.
- McCarthy, M. A. , 1997. The Allee effect, finding mates and theoretical models, *Ecological Modelling*, pp. 99-102.

- Rehim, M. & Teng, Z. , 2006. Persistence in nonautonomous predator-prey systems with infinite delays, *J. Comput. Appl. Math.*, pp.302-321.
- Ruan, S. & Wei, J. , 1999. Periodic solutions of planar systems with two delays, *Proc. Roy. Soc .E Edinburgh Sect. A*, pp.1017-1032.
- Ruan, S. 2001. Absolute stability, conditional stability and bifurcation in Kolmogorov type predator- prey systems with discrete delays, *Quart. Appl. Math.*, pp.159-173.
- Scheuring, I. 1999. Allee efect increases the dynamical stability of populations, *J. Theor. Biol.* pp.407-414.
- Tang, Y. & Zhou, L., 2002. Stability and Hopf bifurcation for a delay competition difusion system, *Chaos, Solitons & Fractals*, pp.1201-1225.
- Wang, Z. & Xu, R., 2006. Periodic solutions of a nonautonomous predator-prey system with stagestructure and time delays, *J. Comput. Appl. Math.* , pp.70-86.
- Wang, F. & Zeng, G. , 2007. Chaos in Lotka-Volterra predator-prey system with periodically impulsive ratio-harvesting the prey and time delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, pp.1499-1512.



## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı:** Emine DEĞİRMENCI

**Doğum Yeri ve Yılı:** Mersin 1987

**Yabancı Dili:** İngilizce

**Orta Öğretim:** Özel Yıldırım Bayezıt Lisesi 2004

**Lisans:** Mersin Üniversitesi 2009

**Yüksek Lisans:** Bahçeşehir Üniversitesi

**Enstitü Adı:** Fen Bilimleri Enstitüsü

**Program Adı:** Uygulamalı Matematik Programı