# 1 GİRİŞ

Opsiyonlar bir takım önkoşulları olan ve finansal varlıklar üzerine yazılan finansal türev araçlarıdır. Opsiyonların prim fiyatları bir takım varsayımları olan, Fischer Black ve Myron Scholes tarafından geliştirilmiş olan Black-Scholes ( Black-Scholes'un kısaltması için BS kullanacağız.) çözümü dediğimiz formül ile hesaplanır (Hull 2009). Bu çalışmada, ilk önce Black-Scholes modeli altında vanilla opsiyonlarının prim fiyatlarının hesaplanma yöntemleri, dört farklı matematksel yöntem; İndirgeme metodu (Briys *et al.*1999), Martingale Yöntemi (Shreve 2004), Risk Nötral Parametrelerin Kullanılması (Joshi 2010) ve Diferansiyel Denklemler Metodu (Wilmott 1995) kullanılarak Black-Scholes formülünün elde edilişi incelenmiştir.

Daha sonra ise vanilla opsiyonlarının prim fiyatlarını hesaplamak için kullanılan yöntemlerden Martingale yöntemi ve Diferansiyel Denklemler yöntemi, matematiği daha karmaşık olan Bariyer opsiyonlarına uygulanarak Bariyer opsiyonlarının prim fiyatları için açık formüller elde edilmiştir.

Bariyer opsiyonları yay bağımlı opsiyonların en basit yapılısı olarak düşünülebilir. Bu opsiyonların ayırt edici özelliği, ödeme fonksiyonunun sadece hisse senedinin son fiyatına değil, aynı zamanda hisse senedi fiyatının bariyeri aşıp aşmamasına veya dokunup dokunmamasaına da bağlı olmasıdır. *Dışarı* Bariyer opsiyonu (knock-out option) opsiyonun üzerine yazılmış olduğu hisse senedi fiyatının vade sonundan önce bariyere dokunması durumunda değersiz hale gelen Bariyer opsiyonu türüdür. Bu durumda opsiyon sahibine (alıcısına) rebate ödemesi denen opsiyon fiyatından daha az olan bir miktar ödenebilir (anlaşmada varsa). İçeri Bariyer opsiyonu (knock-in) sadece hisse senedi fiyatının vadeden önce bariyere dokunması durumunda değer kazanan Bariyer opsiyonu türüdür. Bariyer seviyesi hisse senedinin başlangıç fiyatının üstünde bir seviye ise bu tür opsiyonlara *yukarı* opsiyonlar hisse senedi seviyesinin altında ise *aşağı* opsiyonlar denir. O halde Avrupa tipi bariyer opsiyonlarını sekiz kategoride inceleyebiliriz; Aşağı-Dışarı alım opsiyonu (Down-and -Out call) , Yukarı-Dışarı alım opsiyonu (Up-and-Out call), Aşağı-İçeri satım opsiyonu (Down-and-İn put),Yukarı-İçeri satım opsiyonu (Up-and-In put) v.s. (Kwok 2008, p.182) Tüm bunlar tek bariyerli opsiyon tipleridir ve biz bu çalışmamızda bu opsiyonu tiplerinin hepsinin formal tanımını yapıp matematiksel yöntemlerle prim fiyatları için analitik formüller bulacağız. Bunların yanı sıra çift bariyerli bariyer opsiyonları da vardır. Bu opsiyonlarda hisse senedinin başlangıç fiyatının hem altında hem de üstünde bariyer mevcuttur bu yüzden de bunların fiyatlarının hesaplanması daha karmaşık bir problemdir. Bu tür opsiyonların değer kazanması yada değersizleşmesi hisse senedinin zaman içerisinde her iki bariyere de dokunup dokunmamasına bağlı olacaktır. Luo (2001) ve Kolkiewicz (2002) çift bariyerli Bariyer opsiyonlarının bir çok çeşiti için detaylı bilgi vermiştir (Kwok 2008, p.195).

Bariyer opsiyonları neden önemli? Bu sorunun cevabı için Chesney *et al.* (1997) ve Kwok'un (2008) detaylı çalışmaları vardır. Opsiyon alıcısı açısından düşünürsek standart vanilla opsiyonu için ödeyeceği prim fiyatının çok altında bir fiyatla tahmininin doğru çıkacağı durumunda aynı opsiyon özelliği taşıyan bir opsiyona sahip olması onun için bir avantajdır. Mesela, bir Aşağı-Dışarı alım opsiyonu alıcısı hisse senedi fiyatının opsiyonun vadesi boyunca belli bir seviyenin altına düşmeyeceğine inanıyorsa opsiyonu alırken hisse senedinin söz konusu seviyenin altına düşmes durumunda opsiyonun "knock-out" olması şartını da anlaşmaya ekleyerek ödeyeceği prim fiyatını azaltabilir. Veya başka bir Bariyer opsiyonu olan Yukarı-Dışarı opsiyonunu düşünelim. Hem opsiyon alıcısı hem de opsiyon satıcısı bu opsiyonun yapısından nasıl ekstra avantaj sağlayabilirler? Hisse senedinin fiyatının üst bariyerin çok çok üstüne çıkması durumunda opsiyon alıcısı az miktar rebate karşılığında çok büyük kar elde edebilir. Diğer yandan opsiyon satıcısı da çok büyük bir zararı üstlenmemiş olur.Genel olarak Bariyer opsiyonları yatırımcıya hisse senedinin hareketi ile ilgili öngörülerini ifade etmek için daha fazla esneklik sağlarlar. Bunların yanı sıra Bariyer opsiyonlarının dezavantajları da vardır. Bariyerden dolayı doğal olarak süreksiz (kesikli) bir yapıda olmaları riskten koruma (hedging) sorunlarına neden oluyor. Hisse senedi fiyatı bariyer seviyesinin civarındayken opsiyonu riskten korumak opsiyon satıcısı açısından oldukça zordur. Bariyer opsiyonların riskten korunması konusunda Linetsky'nin (1999) ve Hsu'nun (1997) detaylı çalışmaları incelenebilir (Kwok 2008 pp. 182-183).

Bariyer opsiyonlarının prim fiyatlarının analitik formülleri ile ilgili ilk çalışma Merton (1973) tarafından yapılmıştır. Prim fiyatları bir çok matematiksel tekniklerle bulunabilir, Martingale yöntemi ve Diferansiyel denklemler metodu yaygın olan metotlardandır.

Martingale yöntemi ile Bariyer opsiyonlarından Yukarı-Dışarı(Up and Out),Aşağı-Dışarı(Down and Out) Yukarı-İçeri (Up and In) ve Aşağı-Dışarı (Down and In) alım opsiyonlarının fiyatları Elliott and Robert (1998, pp.180-182) tarafından hesaplanmış fakat detaylandırılmamıştır. Bu çalışmada o çözümler detaylandırılmış ve açık formüller elde edilmiş ayrıca, aynı teknik ve teoremler kullanılarak aynı çeşit Bariyer satım opsiyonlarının fiyatları hesaplanılmış ve açık formüller verilmiştir.

Prim fiyatlarının açık formülleri için bulunan bu sonuçlar Rubenstein and Reiner (1991) tarafından farklı yöntemle elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırarak doğrulanmıştır. Son olarak da Diferansiyel denklemler metodu kullanılarak Aşağı-Dışarı ve Aşağı-İçeri alım opsiyonlarının fiyatları için açık formül elde edilmiştir.(Wilmott, Dewynne and Howison 1993)

# 2 BLACK-SCHOLES (BS) DENKLEMİ VE OPSİYONLAR

## 2.1 OPSİYONLAR ve KULLANILMA NEDENLERİ

**Tanım** 2.1 *Alım (Call) opsiyonu opsiyon alıcısına (buyer) vade sonunda hisse senedini önceden belirlenmiş olan egzersiz fiyatından satın alma hakkı veren finansal bir türev aracıdır.*

**Tanım** 2.2 *Satım (Put) opsiyonu opsiyon alıcısına (buyer) vade sonunda hisse senedini önceden belirlenmiş olan egzersiz fiyatından satma hakkı veren finansal bir türev aracıdır.*

**Opsiyonların Kullanılma Nedenleri:**

1. Bir opsiyonu sentetik olarak elde etmek bono ve hisse senedi portföyü ile elde etmek de mümkünken bazı nedenlerden dolayı her zaman mümkün olmayabilir.Örneğin volatilitedeki ya da karpayındaki değişim opsiyon fiyatlarında değişime neden olurken, hisse senedi ve bono portföyünde herhangi bir değişime neden olmaz. Yine hisse senedi fiyatlarında önemli azalma olduğunda bir satın alma opsiyonunun uğrayacağı zarar sadece opsiyon primidir.

2. Opsiyonlar daha uygun borç alma ve borç verme oranları sunarlar.

3. Opsiyonlar bazı bilgiler kullanılarak kar elde edilmesini sağlayabilir. Aşırı değerlenmiş veya eksik değerlenmiş opsiyonu seçerek hisse senetleri hakkında da bazı özel bilgilere sahipsek yüksek performansa sahip bir portföy oluşturabiliriz. Örneğin bir firmanın yeni bir yatırım yapacağını biliyorsak bu yatırımın hisse senedi fiyatını hangi yönde etkiyeceğini bilmemize gerek yoktur. Çünkü her iki durumda da volatilite artacaktır buda alım ve satım opsiyonları pozisyonlarımıza kar yazdıracaktır.

4. Opsiyonlar teminat kısıtları konusunda daha uygun araçlardır.Bir satım opsiyonu almak veya bir alım opsiyonu satmak yerine açığa satış ve borç verme portföyü de oluşturulabilir. Fakat bu durumda açığa satış kısıtlamaları aynı miktar opsiyon ödemesini zorlaştıracaktır. Bir alım opsiyonu alışında bile aynı şey geçerlidir. Çünkü alternatif olarak borçlanarak hisse senedi alırken de teminat yükümlülükleri söz konusu olacaktır.

5. Opsiyonlar hisse senedi volatilitesindeki değişikliklerin negatif sonuçlarını önlemekte kullanılır.Belirsizliğin yüksek olduğu durumlarda hisse senedi almak yerine opsiyon pozisyonları beklenmedik volatilite artışına karşı koruma sağladığı için tercih edilirler.

6. Opsiyonlar bir firmanın karpayı dağıtımındaki beklenmedik değişikliklere karşı da koruma sağlarlar. Hisse senedinden oluşan ve yüksek oranda karpayı dağıtan bir yatırım fonuna yatırım yaptığımızı ve bir firmanın karpayı dağıtımı yapmayacağı konusunda ciddi bir politika değişikliği yaptığını düşünelim. Bu durumda bir call ve açığa satıştan oluşan bir portföy oluşturmuş olsaydık karpaylarının azalmasına karşı kendimizi korumuş olurduk ve oluşabilecek diğer risklere karşı da korunma sağlamış olacaktık.

7. Opsiyonlar açığa satışlarda oluşabilecek olumsuzlukların aşılmasında da işe yarar bir araçtır. Örneğin düşen bir piyasada açığa satış yapabilmek için hisse senedi fiyatlarının tekrar yükselmesini beklemek gerekir. Yani ard arda düşen günlerde açığa satiş yapamama gibi durumla karşı karşıya kalabiliriz. Veya belirli bir hisse senedini aracı kurumdan borçlanmak mümkün olmayabilir. Bu tür durumlarda opsiyonlarla sentetik olarak açığa satış üretilebilir.

## 2.2 BLACK-SCHOLES MODELİNİN VARSAYIMLARI

1. Hisse senedi log-normal dağılıma sahiptir.
2. Risksiz faiz haddi ve hisse senedinin volatilitesi zamanın bilinen bir fonksiyonudur.
3. Piyasada arbitraj (sıfır sermaye ile elde edilen, kaybetme riski sıfır ve kazanma olasılığı pozitif olan kar) olanağı yoktur.
4. Karpayı dağıtımı yoktur. Ama bu varsayım ihmal edilebilir.
5. İşlem maliyetleri sıfırdır.
6. Açığa satış üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur.

Bir alım opsiyonunun prim fiyatı

- $K$ : egzersiz fiyatı
- $S$ : hisse senedinin şuanki fiyatı
- $\sigma$ : hisse senedinin volatilitesi
- $r$ : piyasadaki risksiz faiz oranı
- $T$ : vadeye kadar kalan süre

gibi değişkenlere bağlıdır.

Bu değişkenlerden $S$, $r$,$\sigma$ ve $T$ opsiyon fiyatı ile pozitif korelasyona sahipken $K$ negatif korelasyona sahiptir. O halde Opsiyonunun değerini $V(S, T, K, \sigma, r)$ ile veya kısaca $V(S, T)$ile göstere biliriz.

## 2.3 BLACK-SCHOLES KDD'NİN ELDE EDİLİŞİ VE YORUMU

Değeri $V(S, t)$ olan bir opsiyon ele alalım. (Bu aşamada alım veya satım opsiyonu olarak ayırmamız gerekmiyor.)Ve bir tane opsiyonda kısa pozisyon, $\Delta$ kadar hisse senedinde ise uzun pozisyon alalım. (Finansta bir finansal varlik için kısa pozisyon almak o finansal varlığı satmak, uzun pozisyon almak demek ise o varlığı satın almak demektir). Bu durumda oluşan portföyün değerini

$$\Pi = V(S, t) - \Delta S$$

ile ifade edelim. Hisse senedi fiyatını ise aşağıdaki stokastik diferansiyel denklem ile ifade edelim.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{2.1}$$

Burada $W$ Brown Devinimini belritmekte ve $S$ Geometrik Brown süreci ile verilmiştir. O halde, portföy değerindeki toplam değişim

$$d\Pi = dV(S,t) - \Delta dS \tag{2.2}$$

ile verilmiş olur. Dikkat edilirse $\Delta$'nın değişimden etkilenmediği, sabitmiş gibi davrandığı görülür. Bunun neden böyle olduğunu ileride açıklayacağız.

Taylor açılımı ve İto Lemma'dan (EKLER, Teorem 4.3) $V$'deki toplam değişim

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2$$

olur. Bunu (2.2)'de yerine yazarsak

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 - \Delta dS \tag{2.3}$$

elde ederiz. Ayrıca (2.1)'den

$$dS^2 = \mu^2 S^2 dt^2 + \sigma^2 S^2 dW^2 + 2S^2 \mu\sigma dW dt \tag{2.4}$$

Şimdi (2.1) ve (2.4)'ü (2.3)'te yerine yazarsak ve Brown Deviniminin özelliklerinden $dt^2 \to 0$, $dWdt \to 0$ ve $dW^2 \to dt$ olduğunu gözönünde bulundurursak

$$d\Pi = \sigma S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dW + \left(\frac{\partial V}{\partial t}dt + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 - \mu\Delta S\right)dt \tag{2.5}$$

elde ederiz. Son denklemde $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ olarak alırsak denklemdeki belirsizlik terimi olan dW sıfırlanır ve denklem aşapıdaki deterministik denkleme dönüşür.

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \tag{2.6}$$

Belirsizlik terimini ortadan kaldırarak riski ortadan kaldırmış oluyoruz. Dolaysıyla $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ alınarak riski elimine edilmiş bir portföy oluşturmuş oluyoruz. Bu yönteme literatürde "delta hedging" veya delta koruması denir. Ve bu koruma dinamik bir korumadır. Portföy sürekli güncellenerek mükemmel korunma sağlanabilir.

$\Pi$ portföyüne yapılan yatırımla tamamen risksiz bir varlığa (devlet tahvili gibi) veya bir banka mevduat hesabına yapılmış yatırımdan elde edilen kara eşit olmalıdır. Aksi takdirde arbitraj imkanı doğmuş olur. Bu ise BS-vasayımlarıyla çelişir. Bu yüzden aşağıdaki denklemi yazabiliriz;

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{2.7}$$

Yani,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt = r\Pi = r\left(V-\frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt$$

Buradan da $dt$'leri yok edersek,

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \tag{2.8}$$

lineer parabolik Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemini elde ederiz.

Denklemin özel ve tek çözümü olabilmesi için sınır koşullarının verilmesi gerekmektedir. BS denklemi geriye doğru denklem olup sınır koşulu opsiyonun ödeme (payoff) fonksiyonudur. Dikkat edilirse BS denklemini oluştururken protföy değerinin diferansiyelini alırken "delta" değerinin anlık değişimi sıfır olarak kabul edildi. Yani, zamana bağlı olarak göstermek istersek $\Delta_t = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$ olarak belirtmiş portföydeki toplam değişimi ise zamana bağlı yazarsak $d\Pi_t = dV_t(S,t) - \Delta_t dS_t$ olarak belirtmiştik. Halbuki toplam diferansiyeli $d\Pi_t = dV_t(S,t) - d(\Delta_t S_t)$ olarak yazdığımızda $d(\Delta_t S_t) = d\Delta_t S_t + \Delta_t dS_t$ elde etmemiz gerekir. Yani BS "delta" değerini sabit varsaymaktadır. Bundan başka hisse senedi fiyatları pratikte log-normal dağılıma sahip olmayabilir, fiyatlarda sıçramalar (jumps) olabilir, faiz oranları değişebilir ve dinamik bir korumanın sağlanması gerekir. Bütün bunlar Black-Scholes modelinin aşılabilir de olsa kusurlu yanlarıdır.

## 2.4 KENDİNİ FİNANSE EDEN PORTFÖY VE BLACK-SCHOLES

$V(S,t)$ değeri zamana ve hisse senedi fiyatına bağlı olarak değişen bir finansal varlık olsun ve $V$'nin Black-Scholes modelinin varsayımları altında Black-Scholes denklemi dediğimiz aşağıdaki lineer parabolik kısmi diferansiyel denklemi sağladığını varsayalım.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \tag{2.9}$$

$\Pi$ içerisinde $\Delta$ kadar hisse senedi ve $\beta$ kadar banka hesabı olan bir portföy olsun. Yani,

$$\Pi = \frac{\partial V}{\partial S}S + \beta(S,t)B \tag{2.10}$$

Burada dikkat edilmesi gereken husus $\delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ olarak seçilmesi ve $\beta(S,t)$'nın her $t \leq T$ anında $V$'nin değerinin hisse senedi fiyatına göre değişimini ($\delta = \frac{\partial V}{\partial S}$) kompanse edecek şekilde seçiliyor olmasıdır. O halde portföydeki toplam değişim sadece $S$'teki toplam değişimle banka hesabındaki toplam değişime bağlı olacaktır. Yani,

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \beta(S,t)dB \tag{2.11}$$

Şimdi, başlangıç anında portföy değerini finansal varlığın değeri ile aynı seçersek bu dengenin her $t \leq T$ anında korunduğunu göreceğiz. Yani portföyümüz kendi kendini finanse edecektir. Bunun için aşağıdaki işlemleri yapalım. Önce $V$'deki toplam değişimi hesaplayalım. İto

Lemma'yı (Ek Bölüm, Teorem 4.3) uygularsak

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial s}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dW
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$dB = rBdt$$

Şimdi,bu değeri aşağıdaki denklemde dikkate alarak işlem yaparsak.

$$\begin{aligned}
d(\Pi - V) &= d\Pi - dV \\
&= \frac{\partial V}{\partial S}dS + \beta(S,t)dB - \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt - \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dW \\
&= \frac{\partial V}{\partial S}\left(\mu S dt + \sigma S dW\right) + \beta r B dt - \frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{\partial V}{\partial S}\mu S dt - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dW \\
&= \left(\beta r B - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right)dt \\
&= r\left(\beta B + \frac{\partial V}{\partial S}S - V\right)dt = r(\Pi - V)dt
\end{aligned}$$

Dolaysı ile,

$$d(\Pi - V) = r(\Pi - V)dt$$

elde ederiz. Bu adi diferansiyel denklemin çözümünden

$$(\Pi - V)(t) = (\Pi - V)(0)e^{rt}$$

buradan da $(\Pi - V)(0) = 0$ olduğundan

$$(\Pi - V)(t) = 0$$

elde ederiz.

## 2.5 NİHAİ (SINIR) KOŞULLAR

Yukarıdaki denklemi elde ederken opsiyonun ne tür bir opsiyon olduğundan bağımız elde etmiştik. Ayrıca bu denklemden vadeye kalan süreyi, egzersiz fiyatını da çıkartamayız. Dolaysıyla opsiyon fiyatını hesaplamak için bu değişkenleri de hesaba katabileceğimiz başka bir formüle daha ihtiyacımız vardır. Bu da sınır koşullarıdır. Örneğin opsiyon bir satın alma opsiyonu ise sınır koşulu $V(S,T) = \max(S_T - K, 0)$, satma opsiyonu ise $V(S,T) = \max(K - S_T, 0)$ olacaktır.

Denklemin lineer oluşu iki çözümün bulunması halinde bunların toplamlarının da çözüm olduğu anlamına gelir. Parabolik oluşu ise ısı difüzyon denklemlerinden yararlanılabilceği anlamına gelir. Denklemin $\mu$'ye bağlı olmaması nedeni ile bir tesadüfi değişkeni bir portföy oluşturarak korumak isterken bu korumanın getirisi $\mu$ kadar olmamalıdır. Yani hem riskten korunup hem de $\mu$ kadar getiri elde etmek hem teorik olarak hem de pratik olarak mümkün değildir. Dolaysıyla yatırımcıların $\mu$ oranında anlaşmaları şart değildir. Ancak getiri tahminleri farklı olsa da BS fiyatının belirlenebilmesi için difüzyon terimi $\sigma$ üzerinde anlaşmak gerekir.

# 3 BLACK-SCHOLES FORMÜLÜNÜN ELDE EDİLİŞİ

BLack-Scholes çözümünün 4 farklı şekilde elde edilişini özetleyeceğiz. Bu çözümleri;

1. İndirgeme Metodu
2. Martingale Metodu
3. Doğrudan Lognormal Parametrelerin Kullanılması
4. Kısmı Diferansiyel Denklem ile Çözüm

olarak 4 gruba ayırdık.

## 3.1 İNDİRGEME METODU

$V(S,t)$ opsiyonun bugünkü değerini, $U(S,t)$ ise $T$ anındaki değerini gösterecek olursa opsiyonun bugünkü değeri

$$V(S,t) = \exp(-r(T-t))U(S,t)$$

ile ifade edilmiş olur. Buradan iki tarafın da diferansiyelini alırsak

$$\frac{\partial V}{\partial t} = re^{-r(T-t)}U(S,t) + e^{-r(T-t)}\frac{\partial U}{\partial t} = rV + e^{-r(T-t)}\frac{\partial U}{\partial t}$$

elde ederiz. Bunu BS denkleminde yerine yazarsak

$$rV + e^{-r(T-t)}\frac{\partial U}{\partial t} + e^{-r(T-t)}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + e^{-r(T-t)}rS\frac{\partial U}{\partial S} - rV = 0$$

elde ederiz. Buradan da

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + rS\frac{\partial U}{\partial S} = 0 \tag{3.1}$$

yazabiliriz. Şimdi $\tau = T - t$ dersek, $d\tau = -dt$ olur. O halde

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + rS\frac{\partial U}{\partial S} \tag{3.2}$$

yazabiliriz. BS modelinin varsayımlarından $S$'in lognormal dağılıma sahip olduğunu biliyoruz. Bunu $\zeta = \log S$ ve dolaysıyla $S = \exp\zeta$ olarak gösterelim. Ve $U = U(\zeta,\tau)$ için $S$'e göre kısmi türevleri hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(\zeta,\tau)}{\partial S} &= \frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{\partial(\log S)}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{1}{S} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}e^{-\zeta} \\
\frac{\partial^2 U(\zeta,\tau)}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}(\frac{\partial U}{\partial \zeta}e^{-\zeta}) = \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial S}e^{-\zeta} + \frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial S}e^{-\zeta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}e^{-2\zeta} - \frac{\partial U}{\partial \zeta}e^{-2\zeta}
\end{aligned}$$

Şimdi bu değerleri (3.2)'de yerine yazarsak

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\sigma^2 S^2 e^{-2\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \zeta}\sigma^2 S^2 e^{-2\tau} + rS\frac{\partial U}{\partial \zeta}e^{-\tau}$$

$S = \exp\zeta$'den $e^{-\zeta} = \frac{1}{S}$ ve $e^{-2\zeta} = \frac{1}{S^2}$ olur. Bu değerleri de son denklemde yerne yazarsak

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\sigma^2 + r\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \zeta}\sigma^2,$$

buradan da

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{\partial U}{\partial S},$$

yazabiliriz.

$\zeta = \log S$ ve $0 \leq S \leq \infty$ olduğundan $-\infty \leq \zeta \leq \infty$ yeni kısıt koşulu elde etmiş oluruz.

$$X = \zeta + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau \tag{3.3}$$

gibi bir değişken dönüşümü yapalım. Bu değişken dönüşümü ile (3.2) denklemini Isı denklemini elde edinceye kadar sadeleştirmiş olacağız.

Şimdi $U = W(X, \tau)$ yazıp kısmi türevlerini alırsak ve $\frac{\partial U}{\partial W} = 1$ olduğunu da dikakte alırsak;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{\partial W}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \tau} + \frac{\partial W}{\partial \tau} \\
\frac{\partial U}{\partial \zeta} &= \frac{\partial W}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \zeta} \\
\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}(\frac{\partial W}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \zeta}) = \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}(\frac{\partial X}{\partial \zeta})^2 + \frac{\partial W}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca (3.3)'den dolayı

$dX = d\zeta$ ve $\frac{\partial X}{\partial \tau} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)$

Tüm bunları (3.2)'de yerine yazarsak

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

ve

$$\frac{\partial W}{\partial X}(r - \frac{1}{2}\sigma^2) + \frac{\partial W}{\partial \tau} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(\frac{\partial W}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \zeta}) + \frac{1}{2}\sigma^2\left[\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}(\frac{\partial X}{\partial \zeta})^2 + \frac{\partial W}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2}\right]$$

elde ederiz. Fakat $\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2} = 0$ olduğundan

$$\frac{\partial W}{\partial X}(r - \frac{1}{2}\sigma^2) + \frac{\partial W}{\partial \tau} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$$

olur. Buradan da

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \tag{3.4}$$

elde edilir.

Özel bir çözüm için $W(X,\tau) = \tau^{\alpha} f(\frac{X-X'}{\tau^{\beta}})$ şeklinde bir çözüme bakalım. $X'$ herhangi bir keyfi sabit, $W_f(x,\tau,x')$ özel bir çözüm olsun.

Şimdi $W(X,\tau)$ fonksiyonunun kısmi türevlerini alıp (3.4)'de yerine yazarsak

$$\alpha\tau^{\alpha-1}f - \tau^{\alpha}\left[\frac{\beta\tau^{\beta-1}(X-X')f}{\tau^{2\beta}}\right] = \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$$

öte yandan

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\tau^{\alpha}}{\tau^{\beta}}f' \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = \frac{\tau^{\alpha}}{\tau^{2\beta}}f''$$

olduğundan $\eta = (\frac{X-X'}{\tau^{\beta}})$ değişken dönüşümü yapılarak

$$\alpha\tau^{\alpha-1}f(\eta) - \tau^{\alpha-1}\beta\eta\frac{df}{d\eta} = \frac{1}{2}\sigma^2\tau^{\alpha-2\beta}\frac{d^2f}{d\eta^2} \tag{3.5}$$

elde edilir. Buradan da

$$\tau^{\alpha-1}(\alpha f(\eta) - \beta\eta\frac{df}{d\eta}) = \tau^{\alpha-2\beta}\frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2f}{d\eta^2}$$

Son denklemin çözümü olabilmesi için $\alpha - 1 = \alpha - 2\beta$ olmalıdır. Buradan da $\beta = \frac{1}{2}$ bulunur. Şimdi $W(X,\tau) = \tau^{\alpha} f(\frac{X-X'}{\tau^{\beta}})$ özel çözümü için bu fonksiyonun $X$'e göre integralini aldığımızda $\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{\alpha}f(\frac{X-X'}{\tau^{\beta}})dX$ olur. Bu integralin 1'e eşit olmasını istiyoruz. Yukarıdaki değişken dönüşümlerini kullanarak

$dX = d\eta\tau^{\beta}$ ve $\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{\alpha+\beta}f(\eta)d\eta$ yazıp $\alpha = -1/2$ değeri için (3.5)'i yeniden düzenlersek

$$-f(\eta) - \eta\frac{df}{d\eta} = \sigma^2\frac{d^2f}{d\eta^2} = \frac{\eta f}{\eta} + \sigma^2\frac{d^2f}{d\eta^2} \tag{3.6}$$

elde ederiz. Son denklemde iki tarafın da integralini alırsak

$$\eta f + \sigma^2\frac{d^2f}{d\eta^2} = a,$$

(a-sabit) elde ederiz. $a = 0$ alırsak $\frac{df}{f} = -\frac{1}{\sigma^2}\eta d\eta$ olur. Buradan da $\int\frac{df}{f} = -\frac{1}{\sigma^2}\int\eta d\eta$ veya $\log f = -\frac{1}{\sigma^2}\eta^2$ buradan da $f = be^{\frac{-\eta^2}{2\sigma^2}}$ elde edilir. $b = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ seçersek

$$W(X,\tau) = \tau^{\alpha}f(\frac{X-X'}{\tau^{\beta}}) = \tau^{\alpha}be^{\frac{-\eta^2}{2\sigma^2}} = \tau^{\alpha}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\eta^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{(X-X')^2}{2\sigma^2\tau}\right)$$

standart normal dağılım yoğunluk fonksiyonuna dönüşür. O halde

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{\alpha}f(\frac{X-X'}{\tau^{\beta}})dX = 1$$

olur. Dolaysı ile özel çözüm için

$$W(X,\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-X'}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2} \tag{3.7}$$

elde ederiz.

Şimdi opsiyon fiyatının bugünkü değerini elde etmek için sınır koşullarını da sağlamamız gerekir. Sınır koşulumuz $\tau = T - t$ anındaki opsiyon değeridir. $T$ anındaki opsiyon değerini $V(S,T) = f(S)$ (ödeme fonksiyonu) olarak gösterelim. O zaman $W$ için bunu $W(X,\tau) = W(X,0) = f(e^X)$ olarak gösterebiliriz.

Şimdi $V(S,t)$'yi ödeme fonksiyonunun bugünkü beklenen değeri olarak bulursak opsiyon fiyatını hesaplamış olacağız. $W(X,\tau)$ fonksiyonunu her $X'$ değerine tekabül eden getiri fonksiyonu $f(e^{X'})$ için hesaplamamız gerekir. Yani, ödeme fonksiyonunu bir olasılık dağılımı fonksiyonu ile çarparsak beklenen değerini bulmuş oluruz. Bunun matematiksel anlamı $(-\infty,\infty)$ aralığında integralini almaktır.

Ödeme fonksiyonu: $V(S,T)$ için $f(S)$, $W(X,0)$ için $f(e^{X'})$'tir. Sonuç olarak

$$W_f(X,\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(X-X')^2}{\sigma^2\tau}\right)$$

bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere

$$W(X,\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(X,\tau;X') f(e^{X'}) dX'$$

olarak ifade edebiliriz. Buradan

$$V(S,t) = e^{-r\tau} W(X,\tau)$$

veya

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sigma\sqrt{s\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(X,\tau;X') f(e^{X'}) dX' \tag{3.8}$$

yazılabilir.

Alım opsiyonu için ödeme fonksiyonunun $f(S') = S' - K$ ve $X' = \log S'$ olduğunu gözönünde bulundurursak $X' = \log S$, $S' = e^{X'}$, $S' = K$ ve integralin alt sınırı $K$'dan başlarsa

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\log K}^{\infty} \exp\left(-\frac{(X' - (r-\sigma^2/2)(T-t) - \log S)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)(S'-K)dX'$$

elde edilir. Buradan da integrain özelliğinden

$$\begin{aligned} V(S,t) &= e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\log K}^{\infty} \exp\left(-\frac{(X' - (r-\sigma^2/2)(T-t) - \log S)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)(e^{X'})dX' \\ &- Ke^{-r(T-t)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\log K}^{\infty} \exp\left(-\frac{(X' - (r-\sigma^2/2)(T-t) - \log S)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)dX' \end{aligned}$$

Şimdi $y = \frac{X' - \log S - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ değişken dönüşümü yapalım. Bu durumda integralin alt sınırı $-d_2 = -\frac{\log(\frac{S}{K} + (r - \sigma^2/2)(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}}$ değerinden başlayacaktır ve $dy = \frac{dX'}{\sigma\sqrt{T-t}}$ olduğundan ikinci terim

$$\frac{\exp(-r(T-t))}{\sqrt{2\pi}} K \int_{-d_2}^{\infty} e^{\frac{1}{2} - y^2} dy$$

formuna dönüşmüş olur. Veya simetriden dolayı

$$\frac{\exp(-r(T-t))}{\sqrt{2\pi}} K \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

ve de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{(y^2}{2}} dy = \Phi(d_2)$ olduğundan ikinci terim

$$-e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2)$$

olarak yazılabilir.

Birinci terim için ise üstel fonksiyonları bir araya toplayıp, paydaları eşitlersek ve $X'$ yerine $\log K$ yazarsak;

$$\exp\left(-r(T-t) - \frac{-X' + \log S + (r - \sigma^2/2)(T-t)^2}{2\sigma^2(T-t)} + X'\right)$$

elde edilir. Tüm terimleri kare alarak ve payda eşitleyerek yazıp, $-d_1 = -\frac{\log(\frac{S}{K} + (r + \sigma^2/2)(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}}$ değişken dönüşümü yaptıktan sonra elde edilen denklemi $e^{-\log S}$ ve $e^{\log S}$ ile çarparsak integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\log S} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

halini alır. Buradan da birinci terimi $S\Phi(d_1)$ buluruz. Dolaysıyla Avrupa alım opsiyonunun prim fiyatı,

$$V(S,t) = C = S\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2)$$

olarak bulunur.

Put-Call paritesinden $S + P - C = Ke^{-r(T-t)}$ Avrupa tipi satım (put) opsiyonunun prim fiyatı ise

$$V(S,t) = P = e^{-r(T-t)} K \Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1)$$

olur.

## 3.2 MARTİNGALE METODU

**Tanım** 3.1 ***Martingale:*** *Herhangi bir $X(t)_{t \geq 0}$ stokastik süreci aşağıdaki koşulları sağlıorsa bu stokastik sürece martingale denir.*

1. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$

2. $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}(s)] = X_s, \forall \quad 0 \leq s \leq t$

(Shreve 2004) Risk-nötr olasılık ölçüsü altında risksiz faiz oranı ile iskonto edilmiş finansal varlıklar bir "Martingale" oluştururlar. Hisse senedi fiyatını $\mathbb{P}$ olasılık ölçüsü altında $S_t$ ile, risk-nötral olasılık ölcüsü $\mathbb{P}^\theta$ altında ise $S_t^\theta$ ile gösterelim. İskonto edilmiş finansal varlıklar risk-nötr olasılık ölçüsü altında martingale olduklarından

$$S_t^\theta = e^{-rt} S_t$$

yazabiliriz. Bu denklemde iki tarafın diferansiyelini alarak stokastik diferansiyel denklemini yazalım;

$$dS^\theta = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t = -re^{-rt} S_t dt + (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) = e^{-rt} S_t[(\mu - r)dt + \sigma dW_t]$$

yani

$$dS^\theta = S^\theta[(\mu - r)dt + \sigma dW]$$

elde edilir.

Girsanov teoreminden (EKLER Teorem 5.4) $W^\theta = W + \frac{(\mu - r)}{\sigma} t$ olacak şekilde yeni bir Brown Devinimi oluşturabiliriz ve bu sayede $\mathbb{P}$ oalsılık ölçüsünden $\mathbb{P}^\theta$ olasılık ölçüsüne geçebiliriz. Bu eşitliği son denklmde yerine yazarsak

$$dS^\theta = S^\theta[(\mu - r)dt + \sigma(dW - \frac{\mu - r}{\sigma})dt] = S^\theta \sigma dW^\theta$$

elde ederiz. Bu denklem $S_t^\theta$ sürecinin drift terimin sıfır olduğunu ve dolaysı ile bir Martingale olduğunu söyler. Ito Lemma'dan(Ek Bölüm Ito Doeblin Formülü)

$$d(\log S) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial S^\theta} dS^\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial S^{\theta 2}} dS^{\theta 2} + \cdots$$

elde ederiz.

Diğer terimlerde $dt$'nin kuvvetleri 1'den büyük olduğundan sıfıra yakınsarlar.Bu yüzden

$$d \log S = \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt$$

yazabiiriz. Son denklemde iki tarafın da integralini alırsak

$$\log S_t^\theta - \log S_0^\theta = \sigma W_t^\theta - \frac{1}{2} \sigma^2 t$$

buradan da

$$S_t^\theta = S_0^\theta \exp(\sigma W_t^\theta - \frac{1}{2} \sigma^2 t)$$

elde ederiz. Şimdi opsiyona geçelim. Alım opsiyonunu ele alalım, dolayısı ile sınır koşulunu $f(S_T) = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$ alalım. Opsiyonun fiyatı terminal getirinin ($\mathcal{F}_t$) filtrelemesine uyumlu ve bağlı değeridir. Matematiksel olarak söylersek

$$V_t = E^\theta[e^{-r(T-t)} f(S_T)|\mathcal{F}_t] \tag{3.9}$$

$T$ vadesi için $S_T$'nin değeri

$$S_T^\theta = S_0 \exp(\sigma W_T^\theta - \frac{1}{2}\sigma^2 T)$$

olur, buradan da

$$\frac{S_T^\theta}{S_t^\theta} = \exp\left\{\sigma(W_T^\theta - W_t^\theta) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right\}$$

Sonuç olarak,

$$\frac{S_T e^{-rT}}{S_t e^{-rt}} = \exp\left\{\sigma(W_T^\theta - W_t^\theta) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right\}$$

veya

$$S_T = S_t e^{-r(T-t)} \exp\left\{\sigma(W_T^\theta - W_t^\theta) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right\} \tag{3.10}$$

elde edilir. Şimdi, $S_T$'nin bu değerini (3.9)'de yerine yazarsak

$$V_t = E^\theta\left[e^{-r(T-t)}\left(S_t \exp\left\{\sigma(W_T^\theta - W_t^\theta) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right\} - K\right)^+\right] \tag{3.11}$$

Son denklmede $Y = -\frac{W_T^\theta - W_t^\theta}{\sqrt{T-t}}$ ve $\tau = T - t$ değişken dönüşümü yaparsak, $Y$ standart normal dağılıma sahip olur ve

$$\begin{aligned} V(S,t) &= E^\theta\left[e^{-r\tau}\left(S_t \exp\left\{-\sigma\sigma\sqrt{\tau}Y + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right\} - K\right)^+\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau}\left(S_t \exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}y + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right\} - K\right)^+ e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \end{aligned}$$

integrandın pozitif olması için gerek ve yeter koşul:

$$y < \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right] = d_- \tag{3.12}$$

olmasıdır. Dolayası ile

$$\begin{aligned} V(S_t,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-} e^{-r\tau}\left(S_t \exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}y + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right\} - K\right)^+ e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-} S_t \exp\left\{-\frac{y^2}{2} - \sigma\sqrt{\tau}y - \frac{\sigma^2\tau}{2}\right\}dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{d_-} e^{-r\tau}Ke^{-\frac{1}{1}y^2}dy \\ &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-} S_t \exp\left\{-\frac{1}{2}(y + \sigma\sqrt{\tau})^2\right\}dy - Ke^{-r\tau}\Phi(d_-) \\ &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_- + \sigma\sqrt{\tau}} S_t \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dy - Ke^{-r\tau}\Phi(d_-) \\ &= S_t\Phi(d_2) - e^{-r\tau}K\Phi(d_-) \end{aligned}$$

Burada

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right] + \sigma\sqrt{\tau} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right]$$

## 3.3 RİSK NÖTRAL DAĞILIM PARAMETRELERİ METODU

Hisse senedi fiyatının log-normal dağılıma sahip olduğu varsayımını ve

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

stokastik diferansiyel denklemi ile verilen bir stokastik süreç olduğunu hatırlayalım. Bu denkleme Taylor açılımı ve Ito Lemma'yı (EKLER Teorem 5.3) uyguladığımızda aşağıdaki gibi bir çözümü buluruz.

$$S(\tau) = S \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma W(\tau)\right] \tag{3.13}$$

veya buna denk olan

$$\log(\frac{S(\tau)}{S}) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma W(\tau)$$

logaritmik formda da yazılabilir.

Buradan $W$ standart Brown süreci olduğundan yani $\mathbb{E}[W(\tau)] = 0$ ve $Var(W(\tau)) = \mathbb{E}[W^2] = \tau$ olduğundan hisse senedinin logaritmik getirisinin, $\log \frac{S(\tau)}{S}$,

$$\mathbb{E}[\frac{\log S(\tau)}{S}] = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau \quad \text{ve} \quad Var(\log \frac{S(\tau)}{S}) = \sigma^2 \tau$$

beklenen değer ve varyansla dağıldığını görüyoruz. O halde alım opsiyonunun getirisinin beklenen değeri:

$$\mathbb{E}[C] = \int_0^\infty \max(S(\tau) - K, 0) dG(S(\tau))$$

olarak gösterilebilir. Veya sadece pozitif olan kısmını alırsak yani $S(\tau) > K$ için

$$\mathbb{E}[C] = \int_K^\infty \max(S(\tau) - K, 0) dG(S(\tau)) \tag{3.14}$$

Burada $G(S(\tau))$, $\tau$ vadesindeki birikimli dağılım fonksiyonudur. Şimdi $x = \log \frac{S(\tau)}{S}$ olarak gösterirsek buradan $S(\tau) = Se^x$ yazabiliriz. Yani ihtimal fonksiyonu $S$'ye değil $x$'e bağlı olacaktır. Bu durumda

$$dG(S(\tau)) = f(x)dx$$

yani ihtimal dağılım fonksiyonumuz standart normal dağılım fonksiyonu olacaktır. O zaman beklenen getiri

$$\mathbb{E}[C] = \int_{\log K/S}^\infty \max(Se^x - K, 0) f(x) dx$$

şekline dönüşmüş olur.

Risk nötral parametrelerimiz de $x$ değişkeni cinsinden yazarsak

$$\mathbb{E}[x] = \mathbb{E}[\frac{\log S(\tau)}{S}] = \mu_x = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$$

ve

$$Var(x) = Var(\log \frac{S(\tau)}{S}) = \sigma_x^2 = \sigma^2 \tau$$

olur. Olasılık yoğunluk fonksiyonunda $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ $u = \frac{(x-\mu_x)}{\sigma_x}$ ve dolayısıyla $du = \frac{dx}{\sigma_x}$ dönüşümleri kullanılarak $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2u^2}}$ standart lognormal yoğunluk fonksiyonuna dönüşmüş olur.

İntegralin alt sınırı $\log K/S$'ten başladığına göre

$$u = \frac{(\log \frac{K}{S} - \mu_x)}{\sigma_x} = -\frac{(\log \frac{S}{K} + \mu_x)}{\sigma_x} = -\frac{(\log \frac{S}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

veya

$$u = -d_1 = -\frac{(\log \frac{S}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{3.15}$$

yazabiliriz. O halde integralin ikinci terimi

$$-K\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_-}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

olarak yazılabilir. Veya standart normal dağılımın simetrikliğinden

$$-K\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

Daha düzgün ifade edersek

$$-K\Phi(d_1)$$

olur.

Şimdi integralin birinci terimi olan $\int_{\log K/S}^{\infty} Se^x f(x)dx$'i hesaplayalım.

Tekrar $u = (x - \mu_x)/\sigma_x$ dönüşümün yaparak $f(x)$'ten $f(u)$'ya geçersek

$$S\int_{\log K/S}^{\infty} e^x f(x)dx = S\int_{-d_1}^{\infty} e^{\mu_x + \sigma_x u} f(u)du$$

yazılabilir. Buradan da $f(u)$'nun değerini de yerine yazarsak

$$S\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-\sigma_x)^2} du$$

elde ederiz. Son terimde $y = u - \sigma_x$ dönüşümü yaparsak $\mu_x = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$ değerini yerine yazarsak

$$Se^{\mu\tau}\frac{1}{2\pi} \int_{-d_1-\sigma_x}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

elde edilir. Yine normal dağılımın simetrikliğinden bunu da

$$Se^{\mu\tau}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{d_{-}+\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

yazıp $\mu$ yerine risksiz faiz oranı olan $r$'yi yazarsak ve $d_1+\sigma_x = d_2$ dönüşümü yaprsak integralin birinci terimini şu şekilde yazanbiliriz.

$$Se^{r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = Se^{r\tau}\Phi(d_2)$$

O halde alım opsiyonunun beklenen değerini

$$\mathbb{E}[C] = Se^{r\tau}\Phi(d_2) - K\Phi(d_1)$$

olarak yazabiliriz. Sonuç olarak alım opsiyonunun bugünkü fiyatı beklenen değerin iskonto edilmiş hali olduğundan $d_1 = \frac{\log\frac{S}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, $d_2 = \frac{\log\frac{S}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ olmak uzere

$$C = S\Phi(d_2) - e^{-r\tau}K\Phi(d_1) \tag{3.16}$$

olur.

## 3.4 DİFERANSİYEL DENKLEM METODU

Bu bölümde Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemini ve onun sınır koşullarını önce doğrudan sonra da değişken dönüşümü yolu ile çözeceğiz. Detaylı bilgi için Wilmott *et al.* (1995) incelenebilir.

### 3.4.1 Doğrudan Çözüm

Bu metotla sınır koşulu

$$C(S,T) = \max(S-K,0)$$

olan

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Black-Scholes denklemine çözüm aramaktayız. Aradığımız çözümün

$$C(S,t) = f(t)y(u_1,u_2);$$

formunda olduğunu ve $u_1 = u_1(S,t)$, $u_2 = u_2(S,t)$ olduğunu varsayalım. Şimdi bu fonksiyonun $t$'ye ve $S$'ye göre kısmi gürevlerini alıp Black-Scholes denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t}y(u_1,u_2) + f(t)\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + f(t)\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} \\
\frac{\partial C}{\partial S} &= f(t)\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial S} + f(t)\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial S} \\
\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= f(t)[\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}(\frac{\partial u_1}{\partial S})^2 + \frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u_1\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial S}\frac{\partial u_1}{\partial S}] + f(t)[\frac{\partial^2 y}{\partial u_2^2}(\frac{\partial u_2}{\partial S})^2 + \frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial S^2} \\
&+ \frac{\partial^2 y}{\partial u_1\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial S}\frac{\partial u_1}{\partial S}]
\end{aligned}$$

Şimdi bunları denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f(t)[\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}(\frac{\partial u_1}{\partial S})^2 + \frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial S}\frac{\partial u_1}{\partial S} + \frac{\partial^2 y}{\partial u_2^2}(\frac{\partial u_2}{\partial S})^2] \\ & + rsf(t)[f(t)\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial S} + f(t)\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial S}] \\ & + \frac{\partial f}{\partial t}y(u_1,u_2) + f(t)\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + f(t)\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} - rf(t)y(u_1,u_2) \end{aligned} \tag{3.17}$$

denklemini elde ederiz. Buradan $\frac{\partial f}{\partial t}y(u_1,u_2) - rf(t)y(u_1,u_2) = 0$ denklemini çekersek

$$\frac{\partial f}{\partial t}y(u_1,u_2) = rf(t)y(u_1,u_2)$$

yazabiliriz. $\tau = T - t$ tanımlarsak $\partial t = -\partial\tau$ oldudğundan $\frac{\partial f}{f(t)} = -r\partial\tau$ buradan da integral alırsak

$$f(t) = e^{-r(T-t)} \tag{3.18}$$

elde ederiz. Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemi ikinci dereceden lineer parabolik denklem olduğundan bu denklemi çözmenin en kolay yolu denklemi ısı denklemi dediğimiz ve çözümü bilinen kısmi diferansiyel denkleme indirgemektri. Bu yüzden bizim de burada ulaşmaya çalıştığımız ısı denklemi

$$\frac{\partial y}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}$$

denklemdir. Bunu (3.17)'de dikkate alırsak

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}(\frac{\partial u_1}{\partial S})^2 + \frac{\partial y}{\partial u_2}[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial S^2} + rS\frac{\partial u_2}{\partial S} + \frac{\partial u_2}{\partial t}] \tag{3.19}$$

denklemini elde ederiz. $\frac{\partial u_2}{\partial S} = 0$ varsayarsak ısı denkleminin eşitliği

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (\frac{\partial u_1}{\partial S})^2 = -\frac{\partial u_2}{\partial t} \quad \text{veya}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (\frac{\partial u_1}{\partial S})^2 = \frac{\partial u_2}{\partial \tau} \quad \text{durumunda mümkündür.}$$

Şimdi

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (\frac{\partial u_1}{\partial S})^2 = \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = a^2$$

yazıp integral alırsak.

$$u_2(t) = a^2(T-t) \tag{3.20}$$

denklemini elde ederiz. Bununla da (3.17) denkleminden 4 terim daha yok etmiş oluruz. Kalan terimleri $\frac{\partial y}{\partial u_1}f(t)$'ye bölerek

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + rS\frac{\partial u_1}{\partial S} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \tag{3.21}$$

denklemini yazabilliriz. Şimdi $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2(\frac{\partial u_1}{\partial S})^2 = \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = a^2$ eşitliğinden

$$\frac{\partial u_1}{\partial S} = \sqrt{2}\frac{a}{\sigma S} \tag{3.22}$$

yazıp uygulama fiyatı $K$'dan hisse senedi fiyatı $S$'ye kadar entegre edersek

$$u_1 = \sqrt{2}\frac{a}{b}\log S/K + b(t) \tag{3.23}$$

fonsksiyonunu elde etmiş oluruz. Şimdi (3.22),(3.22)'in $S$'ye göre türevi ve (3.23) denklemlerini (3.21)'de yerine yazip $S$'leri sadeleştirirsek

$$-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{2}a + r\frac{\sqrt{2}a}{b} + b'(t) = 0 \tag{3.24}$$

denklemini elde ederiz. Buradan da yine integral alırsak ve denklemi düzenlersek

$$\int b'(t) = b(t) = \frac{a\sqrt{2}}{\sigma}(\sigma^2/2 - r)(T-t) \tag{3.25}$$

yazılabilir. Dolayısı ile

$$u_1 = \frac{a\sqrt{2}}{\sigma}[\log S/K + (r-\sigma^2/2)(T-t)] \tag{3.26}$$

elde edilir.

Şimdi (3.18), (3.26) ve (3.20) denklemlerinde $t = T$ alırsak $u_1 = \frac{a\sqrt{2}}{\sigma}\log S_T/K$, $u_2 = 0$ ve $f(T) = 1$ olur. Ve bu değerleri $C(S,t) = f(t)y(u_1, u_2)$ çözümünde yerine yazarsak $C(S,T) = y(\sqrt{2}\frac{a}{\sigma}\log S_T/K, 0)$ bir sınır koşulu olmuş olur ve diferansiyel denklemi sağlaması gerekir.

Bir ısı denkleminin Fourier çözümünün

$$y(u_1, u_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)e^{-\frac{(\nu-u_1)^2}{4u_2}}d\nu$$

veya

$$y(u_1, u_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\nu-u_1)}{\sqrt{2u_2}}\right)^2}d\nu$$

olduğunu biliyoruz (Strauss 2008). Buradan $q = \frac{\nu-u_1}{\sqrt{2u_2}}$ ve $dq = d\nu/\sqrt{2u_2}$ değişken dönüşümü yaparsak

$$y(u_1, u_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u_1 + q\sqrt{2u_2})e^{-\frac{1}{2}q^2}dq \tag{3.27}$$

olur. Ve $\nu = u_1 + q\sqrt{2u_2}$ buradan da $u_2 = 0$ icin $\nu = u_1 = \frac{a}{\sigma}\sqrt{2}\log S_T/K$ buradan ise

$$S_T/K = \exp(\frac{\sigma\nu}{\sqrt{2}a}) \tag{3.28}$$

elde edilir.

İntegrali alınacak fonksiyon sınır değer koşulunu da sağlaması gerekir. Yani $T$ vadesinde $f(\nu) = C = \max(S_T - K, 0)$ olmalıdır. $\nu$'yu sıfır yapan değer $-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}$ (3.27)'teki integralin alt sınırı olacaktır. Dolaysı ile

$$y(u_1, u_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}}^{\infty} f(u_1 + q\sqrt{2u_2}) e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

olur. Buradan

$$C(S,t) = f(t)y(u_1, u_2) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}}^{\infty} f(u_1 + q\sqrt{2u_2}) e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

veya

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}}^{\infty} (S_T - K) e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

Son denklemde $S_T$'nin (3.28)'deki değerini yerine yazıp $K$ parantezine alırsak

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}}^{\infty} K(e^{\frac{\sigma\nu}{\sqrt{2}a}} - 1) e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

vey $\nu$ değişkenini tekrar yerine koyarak

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}}^{\infty} K(e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}a}(u_1 + q\sqrt{2u_2})} - 1) e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

integralini elde ederiz.

Şimdi baştaki üstel terimi görmezlikten gelip integrali iki integral toplamı şeklinde düşünelim ve önce ikinci terimi hesaplayalım. $q = -\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}$ dönüşümünde $u_1$ ve $u_2$ değerlerini yerine yazarsak

$$q = -\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}} = -\frac{\sqrt{2}a/\sigma(\log S_t/K + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sqrt{2(T-t)}a}$$

Buradan da bazı cebirsel düzenlemeler yaparak

$$q = -\frac{\log S_t/K + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{2(T-t)}a} \tag{3.29}$$

integralin alt sınırını elde etmiş oluruz. Buna $-d_-$ diyelim. Dolaysı ile ikinci terim

$$-e^{-r(T-t)} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_-}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq = -e^{-r(T-t)} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq \quad \text{(simetriden dolayi)}$$

formunda olur. Bu ise bize kümulatif normal dağılımın $d_-$'deki değerini verir. Yani ikinci terim

$$-e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-) \quad \text{dir.}$$

Şimdi integralin ilk terimini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} C(S,t) &= e^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}}^{\infty} K(e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2a}}(u_1+q\sqrt{2u_2})}e^{-\frac{1}{2}q^2}dq \\ &= e^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_-}^{\infty} Ke^{\frac{\sigma}{\sqrt{2a}}\left(\sqrt{2}a/\sigma\log S_t/K+\sqrt{2}a/\sigma(r-\sigma^2/2)(T-t)+q\sqrt{2a^2(T-t)}\right)}e^{-\frac{1}{2}q^2}dq \end{aligned}$$

Integralin içerisinde bazı basit cebirsel işlemler yaptıktan sonra

$$\int_{-d_-}^{\infty} K\frac{S_t}{K}(e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+q\sigma\sqrt{(T-t)}})e^{-\frac{1}{2}q^2}dq$$

şekline dönüşür. Iskonto terimi ile çarparsak

$$C(S,t) = S_t\frac{1}{2\pi}\int_{-d_-}^{\infty}(e^{(-\sigma^2/2)(T-t)+q\sigma\sqrt{(T-t)}})e^{-\frac{1}{2}q^2}dq \tag{3.30}$$

denklemini elde ederiz.

Buradan da üstel ifadeleri toplarsak ve $-\frac{1}{2}(q^2-2q\sigma\sqrt{T-t}+\sigma^2(T-t)) = -\frac{1}{2}(q-\sigma\sqrt{(T-t)})^2$ olduğunu gözönünde bulundurursak

$$C(S,t) = S_t\frac{1}{2\pi}\int_{-d_-}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(q-\sigma\sqrt{(T-t)})^2}dq$$

denklemine ulaşırız. $p = (q-\sigma\sqrt{(T-t)})$ değişken dönüşümü yaparsak $dp = dq$ ve integralin alt sınırı $-d_- - \sigma\sqrt{T-t}$ olur. Yani

$$C(S,t) = S_t\frac{1}{2\pi}\int_{-(d_-+\sigma\sqrt{T-t})}^{\infty} e^{\frac{1}{2}p^2}dp$$

veya simetriden dolayı

$$C(S,t) = S_t\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{(d_1+\sigma\sqrt{T-t})} e^{\frac{1}{2}p^2}dp = S_t\Phi(d_2)$$

$$d_2 = d_1+\sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log S_t/K+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

elde ederiz. O halde opsiyonun bugünkü prim fiyatı

$$d_1 = \frac{\log S_t/K+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \quad d_2 = \frac{\log S_t/K+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

olmak koşuluyla

$$C(S,t) = S_t\Phi(d_2) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_1)$$

olur.

### 3.4.2 Değişken Dönüşümü İle Çözüm

Avrupa tipi alım opsiyonun için Black-Scholes denklemini hatırlayalım.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Şimdi bu lineer parabolik kısmi diferansiyel denklemi $C(0,t) = 0$; $S \to \infty$, $C(S,t) = S$ sınır koşullarıyla beraber çözmeye çalışacağız. Bunun için

$$S = Ke^x; \quad t = T - 2\tau/\sigma \quad \text{ve} \quad C = K\nu(x,\tau)$$

dönüşümlerini kullanacağız. Bu dönüşümlerden $C = K\nu(x,\tau)$'nin $S$'ye ve $t$'ye göre kısmi türevlerini alıp denklemde yerine yazalım.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial t} = K\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{1}{2}K\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\sigma^2$$

($\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\sigma^2/2$ olduğundan)

3.terim için

$$\frac{\partial C}{\partial S} = K\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial S} = K\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{Ke^2} = \frac{1}{S} \quad \text{olduğundan}$$

$$rS\frac{\partial C}{\partial S} = rK\frac{\partial \nu}{\partial x}$$

yazabiliriz.

2.terim için bir kez daha türev alırsak

$$\frac{\partial}{\partial S}(\frac{\partial C}{\partial S}) = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = K\left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}(\frac{\partial x}{\partial S})^2 + \frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial S^2}\right]$$

Buradan da

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial}{\partial S}(\frac{\partial C}{\partial S}) = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 K\left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}(\frac{1}{\partial S})^2 - \frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{1}{S^2}\right] = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 K\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 K\frac{\partial \nu}{\partial x}$$

elde ederiz. Tüm bu denklemler Black-Scholes denkleminde yerine yazılıp ortak terimler yok edildiken sonra

$$-r\nu - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial \nu}{\partial \tau} + r\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial \nu}{\partial x} = 0$$

veya

$$-\frac{2r}{\sigma^2}\nu + \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\partial \nu}{\partial x} = \frac{\partial \nu}{\partial \tau}$$

elde edilir. Buradan da $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ dönüşümü yaparak

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = (k-1)\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - k\nu + \tag{3.31}$$

denklemine ulaşırız. Bu durumda sınır koşulumuz da

$$\nu(x,0) = \max(e^x - 1, 0) \quad \text{olur.}$$

Şimdi $\nu(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau)$ formunda bir çözüm bulmaya çalışalım. Bunun için $\nu(x,\tau) = e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$'in türevlerini alıp (3.31)'de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
-k\nu &= -k\exp(\cdot)u \\
(k-1)\frac{\partial\nu}{\partial x} &= (k-1)(\alpha\exp(\cdot)u + \exp(\cdot)\frac{\partial u}{\partial x}) \\
\frac{\partial\nu}{\partial\tau} &= \beta\exp(\cdot)u + \exp(\cdot)\frac{\partial u}{\partial\tau} \\
\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2} &= [\alpha\exp(\cdot)u + \exp(\cdot)\frac{\partial u}{\partial x}]' = \alpha^2\exp(\cdot)u + 2\alpha\exp(\cdot)\frac{\partial u}{\partial x} + \exp(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$\exp(\cdot)$'li terimler yok edildikten denklemin sadeleştirilmiş hali

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial\tau} = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku + (k-1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) \tag{3.32}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin $\frac{\partial u}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \tau > 0, \quad -\infty < x < \infty$ şeklinde bir ısı denklemine dönüştürmek için diğer terimleri sıfırlamamız gerekir bunun için

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \quad \text{ve} \quad 2\alpha + (k-1) = 0$$

olmalıdır. Yani

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(k+2)^2$$

Burdan da

$$\nu(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau) \tag{3.33}$$

elde ederiz. Buradan da

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\nu(x,\tau) \quad \text{ve} \\
u_0(x) &= u(x,0) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x}\nu(x,0) \\
&= e^{\frac{1}{2}(k-1)x}\max(e^x - 1, 0) \\
&= \max(e^{\frac{1}{2}(k-1)x}e^x - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \\
&= \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Isı denkleminin çözümünün

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)e^{-(x-s)^2/4\tau}ds \tag{3.35}$$

olduğunu biliyoruz (Strauss 2008).

$y = (s-x)/\sqrt{2\tau}$ değişken dönüşümü yaparsak $\sqrt{2\tau}dy = ds$ olur ve

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + y\sqrt{2\tau})e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

denklemini elde ederiz.$u_0$'in (3.34)'deki değerini integralde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} (e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+\sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+\sqrt{2\tau}y)})e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} (e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+\sqrt{2\tau}y)}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+\sqrt{2\tau}y)})e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\
&= I_1 - I_2
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi $I_1$ ve $I_2$ integrallerini ayrı ayrı hesaplayalım. $I_1$ için üstel fonksiyonun içini kare açılımı şeklinde yazıp $(y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2 = z$ dönüşümünü ve birikimli normal dağılım fonksiyonunun simetriliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+\sqrt{2\tau}y)}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2}dy \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\
&= e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\Phi(d_1)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \quad \text{ve} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$$

$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+\sqrt{2\tau}y)}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$'nin hesaplanması da $I_1$ ile aynı sadece $(k+1)$ yerine burada $(k-1)$ alınacaktır. Dolaysı ile

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}\Phi(d_2); \quad d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$$

olur. Şimdi $u(x,\tau)$'nun bu değerini (3.33)'te yerine yazarsak

$$\nu(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\Phi(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}\Phi(d_2)\right) = e^x\Phi(d_1) - e^{-k\tau}\Phi(d_2) \tag{3.36}$$

elde ederiz. Son denklemde de başta yaptıgımız dönüşümlerden

$$e^x = \log S/K, \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad k = 2r/\sigma^2 \quad \text{ve} \quad C = K\nu(x,\tau)$$

değerleini yerine yazarsak

$$d_1 = \frac{\log S/K + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}; \quad d_2 = \frac{\log S/K + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}$$

ve

$$C = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

Black-Scholes formülünü elde ederiz.

# 4 BARİYER OPSİYONLARI

Bariyer Opsiyonları en basit ve en çok alınıp-satılan sürekli zamanlı egzotik opsiyonlardandır. Vanilla alım veya satım opsiyonlarıyla aynı ödeme fonksiyonuna (payoff) sahiptirler fakat ödeme fonksiyonları çok tesadüfidir. Tesadüfilik hisse senedinin bariyeri geçip geçmemesine bağlıdır. Neden Bariyer Opsiyonları? Koruma amaçlı herhangi bir özel avantajlar sağlamazlar (daha komplike egzotik opsiyonların korunması hariç). Fakat bu opsiyonlar vanilla opsiyonlarından daha ucuzdurlar. Dolaysı ile spekülatörün hisse senedi fiyatının yükseleceği veya düşeceği konusunda kuvvetli bir tahmini varsa bariyer opsiyonları ile daha çok kar elde eder. Örneğin hisse senedinin büyük oranda yükseleceğini ve bir müddet düşmeyeceğini tahmin eden spekülatör Aşağı-Dışarı alım opsiyonu satın alabilir.(Joshi 2010)

## 4.1 BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda bariyer opsiyonlarını prim fiyatlarını hesaplamak için gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilecektir (Elliott and Kopp 1998, pp.172-179).

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı bir $(B_t)_{t\geq 0}$ Brown devinimini ele alalım. $\frac{B_t}{\sqrt{t}}$'nin standart normal dağılıma sahip oldugunu biliyoruz ve

$$\mathbb{P}\left(B_t \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

burada

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

standart normal dağılımın kümülatif yoğunluk fonksiyonunu gösterir. Dolayısı ile,

$$\mathbb{P}\left(B_t \geq x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(B_t \leq x\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \tag{4.1}$$

(normal dağılımın simetrikliğinden.)

Şimdi gerçel değerli herhangi bir $X$ stokastik sürecinin maksimum ve minimumlarını sırasıyla,

$$M_t^X = \max_{0\leq s\leq t} X_s, \quad m_t^X = \min_{0\leq s\leq t} X_s$$

ile ifade edelim.

$\mu$ ve $\sigma$ sabit parametreler olmak üzere $X$ stokastik süreci açağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$X_t = \mu t + \sigma B_t \tag{4.2}$$

(aritmetik Brown Devinimi)

$$\mathbb{P}\left(B_t \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

olur. Ayrıca

$$-X_t = (-\mu)\, t + \sigma\, (-B_t)$$

olduğundan ve $(-B_t)$ de bir Brown devinimi olduğundan $-X$ ve $X$ ayni forma sahip rassal(stokastik) süreçlerdir.

Ayrıca, herhangi bir $y \in \{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ için $y \leq M_t^X$ olduğundan $-M_t^X \leq -y$ yani $-M_t^X = m_t^{-X}$ olur. Başka bir deyişle

$$m^X = -M^X$$

olur. Bu yüzden sadece $M^X$-i ele almak yeterlidir.

Şimdi,

$$\left\{B_T \leq b, M_T^B > c\right\}, \quad T > 0$$

olayını ele alalım. "Yansıma ilkesi" nden dolayı $T$ zamanından önce $c$ seviyesine değip $T$ anında $b$ seviyesinin altında kalan her yol (path) için $T$ anında $c$ seviyesini geçen ve $2c - b$ seviyesinin üzerinde bir seviyeye gelen başka bir yol vardir. Dolaysıyla, (4.1)'ın yardımıyla

$$\mathbb{P}\left(B_T \leq b, M_T^B > c\right) = \mathbb{P}\left(B_T > 2c - b\right) = \Phi\left(\frac{b - 2c}{\sqrt{T}}\right)$$

olur.

Şimdi, $B_T$ ve $M_T^B$-nin bileşik olasılık dağılım foknsiyonunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned} F^B(T, b, c) &= \mathbb{P}\left(B_T \leq b, M_T^B \leq c\right) \\ &= \mathbb{P}\left(B_T \leq b\right) - \mathbb{P}\left(B_T \leq b, M_T^B > c\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{b - 2c}{\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

$c < 0$ ve $b < 0$ için $F^B(T, b, c) = 0$ ve $c > 0, \quad B \geq c$ için

$$F^B(T, b, c) = \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sqrt{T}}\right)$$

olur. ($B$'nin sürekliliğinden.)

Buradan da $b$'ye ve $c$'ye göre türev alırsak $\left(B_T, M_T^B\right)$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f^B(T, b, c) = \frac{2(2c - b)}{T\sqrt{T}}\phi\left(\frac{2c - b}{\sqrt{T}}\right) \tag{4.3}$$

olur.

Burada, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Şimdi, $X_t = \mu t + B_t$ formülü ile verilmiş $X$ stokastik sürecini ele alalım.

$$Z_t = \exp\left\{-\mu B_t - 1/2\mu^2 t\right\} = \exp\left\{-\mu X_t + 1/2\mu^2 t\right\}$$

üstel süreç olsun. Yeni olasılık ölçümü de $\mathbb{P}^\mu$

$$\frac{d\mathbb{P}^\mu}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$$

ile verilmiş olsun ve $c \geq 0$ ve $b \leq 0$ olduğunu varsayalım. Girsanov Teoreminden $X_t$, $\mathbb{P}^\mu$ altında standart Brown devinimidir ve $\left(X_T, M_T^X\right)$'in $\mathbb{P}^\mu$ altındaki dağılımı ile $\left(B_T, M_T^B\right)$'nin $\mathbb{P}$ altındaki dağılımı aynıdır. Bu durumda, $\mathbb{P}^\mu$'ye göre beklenen değeri $\mathbb{E}^\mu[\cdot]$ ile gösterilirse $A = \left\{X_t \leq b, M_t^X \leq c\right\}$ olayı için

$$F^X(T,b,c) = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{I}_A\right] = \mathbb{E}^\mu\left[Z_T^{-1}\boldsymbol{I}_A\right] = E^\mu\left[\exp\left\{\mu X_T - 1/2\mu^2 T\right\}\right]$$

olur. $f(x)$ (4.3) denklemi ile verilmişse

$$\begin{aligned}
F^X(T,b,c) &= \int_0^c \int_{-\infty}^b \exp\left\{\mu z - \frac{1}{2}\mu^2 T\right\} f(T,z,y)\,dzdy \\
&= \int_{-\infty}^b \exp\left\{\mu z - \frac{1}{2}\mu^2 T\right\} \frac{1}{\sqrt{T}}\left[\phi\left(\frac{z}{\sqrt{T}}\right) - \phi\left(\frac{z-2c}{\sqrt{T}}\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^0 \exp\left\{\mu(b+z) - \frac{1}{2}\mu^2 T\right\} \frac{1}{\sqrt{T}}\left[\phi\left(\frac{b+z}{\sqrt{T}}\right) - \phi\left(\frac{b+z-2c}{\sqrt{T}}\right)\right] \\
&= \exp\left\{\mu b - \frac{1}{2}\mu^2 T\right\}\left(\Psi(b) - \Psi(b-2c)\right)
\end{aligned}$$

burada,

$$\begin{aligned}
\Psi(b) =& \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^0 \exp\{\mu z\}\,\phi\left(\frac{b+z}{\sqrt{T}}\right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{\mu z - \left(\frac{b+z}{T}\right)^2\right\} dz \\
&= \exp\left\{-\mu b + \frac{1}{2}\mu^2 T\right\}\Phi\left(\frac{b-\mu T}{\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$F^X(T,b,c) = \Phi\left(\frac{b-\mu T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu c}\Phi\left(\frac{b-2c-\mu T}{\sqrt{T}}\right) \tag{4.4}$$

Tekrar $b$'ye ve $c$'ye göre türev alırsak $\left(X_T, M_T^X\right)$'in yoğunluk fonksiyonu

$$f^B(T,b,c) = \frac{2(2c-b)}{T\sqrt{T}}\phi\left(\frac{2c-b}{\sqrt{T}}\right)e^{\mu b - \frac{1}{2}\mu^2 T} \tag{4.5}$$

olur. Şimdi de,

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t, \quad \sigma > 0$$

sürecini ele alalım ve $F^Y(T,b,c) = \mathbb{P}\left(Y_t \le b, M_T^Y \le c\right)$ şeklinde ifade edelim.

$$\widehat{X}_t = \frac{1}{\sigma} Y_t = \frac{\mu}{\sigma} t + B_t$$

olsun. O halde (4.4)'ü kullanarak

$$\begin{aligned} F^Y(T,b,c) &= \mathbb{P}\left(Y_T \le b, M_T^Y \le c\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\hat{X}_t \le \frac{b}{\sigma}, M_T^{\hat{X}} \le \frac{c}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu c\sigma^{-2}} \Phi\left(\frac{b-2c-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

elde ederiz. Ayrıca, $\left(Y_T, M_T^Y\right)$'in bileşik yoğunluk fonksiyonu da

$$f^Y(T,b,c) = \frac{2(2c-b)}{\sigma T\sqrt{T}} \phi\left(\frac{2c-b}{\sigma\sqrt{T}}\right) e^{\left(\mu b - \frac{1}{2}\mu^2 T\right)\sigma^{-2}} \tag{4.7}$$

olur.

**Lemma** 4.1 $\tau_y^Y = \inf_{t\ge 0}\{t : Y_t \ge y\}$ *"ilk çarpma anı" olsun. O zaman,*

$$\mathbb{P}\left(\tau_y^Y > T\right) = \Phi\left(\frac{y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \exp\left\{\frac{2\mu y}{\sigma^2}\right\} \Phi\left(\frac{-y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

**İspat**:

$$\left\{\omega : \tau_y^Y(\omega) > t\right\} = \left\{\omega : M_t^Y(\omega) < y\right\}$$

olduğu açıktır. O halde,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\tau_y^Y > T\right) &= \mathbb{P}\left(\omega : M_T^Y(\omega) < y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\omega : Y_T < y, M_T^Y < y\right) \\ &= F^Y(T,y,y) \end{aligned}$$

□

Şimdi de buraya kadar yaptıklarımızı hisse senedi fiyatları için yapalım. Hisse senedi fiyatlarının Geometrik Brown Devinimi ile verildiğini varsayalım.[1] $S(t)$ hisse senedinin $t$ anındaki fiyatı olsun. O halde, $S(t)$ aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemi sağlar.

$$dS(t) = \mu S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dB(t)$$

Burada $B_t$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı standart Brown Devinimidir.

[1] Hisse senedi fiyatı yerine herhangi bir finansal varlığın fiyatı da alına bilir.

$\mathbb{P}^\theta$ risk-nötr olasılık ölçümü ve $W^\theta$, $\mathbb{P}^\theta$ altındaki Brown devinimi olsun ve $B_t$ ile ilişkisi şu şekilde verilmiş olsun

$$dW_t^\theta = \theta dt + dB_t, \quad \theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

O zaman, $\mathbb{P}^\theta$ altında

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^\theta$$

olur. Buradan da,

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^\theta\right\} = S_0 e_t^Y,$$

$$Y_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^\theta$$

olur. Şimdi, $S_t$-nin maksimum ve minimumlarını sırasıyla,

$$M_T^S = \max\{S_t : 0 \le t \le T\}, \quad m_T^S = \min\{S_t : 0 \le t \le T\}$$

ile göstrelim. Eğer,

$$M_T^Y = \max\{Y_t : 0 \le t \le T\} \quad \text{ve} \quad m_T^Y = \min\{Y_t : 0 \le t \le T\}$$

olursa,

$$M_T^S = S_0 e^{M_T^Y} \quad m_T^S = S_0 e^{m_T^Y}$$

olduğu açıktır.

**Lemma** 4.2 *(i)$H > K > 0$ için*

$$\mathbb{P}^\theta(S_T \le K, M_T^S \le H) = \Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\log(\frac{KS_0}{H^2}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

*ve*

*(ii)$H \le K$ için*

$$\mathbb{P}^\theta\left(S_T \le K, M_T^S \le H\right) = \Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

*olur.*

**İspat**: (i) Brown Deviniminin süreklilğini ve

$$S_T \le K \Leftrightarrow S_0 e_T^Y \le K \Leftrightarrow Y_T \le \log\left(\frac{K}{S_0}\right)$$

$$M_T^Y \le H \Leftrightarrow S_0 e^{M_T^Y} \le H \Leftrightarrow M_T^Y \le \log\left(\frac{H}{S_0}\right)$$

bağıntılarını göz önünde bulundurursak,

$$\mathbb{P}^{\theta}\left(S_T \leq K, M_T^S \leq H\right) = \mathbb{P}^{\theta}\left(S_T \ < K, M_T^S \ < H\right) \ = \mathbb{P}^{\theta}\left(Y_T \ < \log\left(\frac{K}{S_0}\right), M_T^Y < \log\left(\frac{H}{S_0}\right)\right)$$

Buradan da (4.6)'da $b = \log\left(\frac{K}{S_0}\right), \quad \log\left(\frac{H}{S_0}\right)$ ve $\mu = (r - \frac{\sigma^2}{2})$ alırsak sonuç çıkar.

(ii) Eğer $H \leq K$ olursa, o zaman

$$\mathbb{P}^{\theta}\left(S_T \leq K, M_T^S \leq H\right) = \mathbb{P}^{\theta}\left(S_T \leq H, M_T^S \leq H\right)$$

özel durumuna dönüşür. Buradan da kolaylıkla sonuca ulaşılır. □

**Lemma** 4.3 *(i) $K > H$ için,*

$$P^{\theta}\left(S_T \geq K, m_T^Y \geq H\right) = \Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\log\frac{H^2}{KS_0} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

*(ii) $K \leq H$ için*

$$\mathbb{P}^{\theta}\left(S_T \geq K, m_T^S \geq H\right) = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{H}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H}{S_0}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

*olur.*

**İspat**: (i)$K > H$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{\theta}(S_T \geq K, m_T^S \geq H) &= \mathbb{P}^{\theta}\left(Y_T \geq \log(\frac{K}{S_0}), m_T^Y \geq \log(\frac{H}{S_0})\right) \\ &= P^{\theta}(-Y_T \leq \log(\frac{S_0}{K}), M_T^{-Y} \leq \log(\frac{S_0}{H})),\end{aligned}$$

$-Y_t = (-r + \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma(-B_t)$ ve $(-B_t)$ de standart Brown Devinimi olduğundan $Y_t$ ile $-Y_t$ aynı formdadır. Dolaysiyla (4.6)'da,

$\mu = \left(-r + \frac{\sigma^2}{2}\right)$, $b = \log\left(\frac{S_0}{K}\right)$, $c = \log\left(\frac{S_0}{H}\right)$ alınırsa sonuç çıkar

(ii) $K \leq H$ durumu için (4.6)da $K = H$ alırsak sonuç çıkar. □

**Lemma** 4.4 *(i)$H > K > 0$ için,*

$$\mathbb{E}^{\theta}\left[S_T I_{\left\{S_T \leq K, M_T^S \leq H\right\}}\right] = S_0 e^{rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\log(\frac{KS_0}{H^2}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

*(ii)$H \leq K$ için,*

$$\mathbb{E}^{\theta}\left[S_T I_{\left\{S_T \leq K, M_T^S \leq H\right\}}\right] = S_0 e^{rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

**İspat**: (i) $\Gamma(t) = \exp\left\{\sigma W_t^\theta - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}$ olsun ve yeni olasılık ölçümünü

$$\frac{dP^\sigma}{dP^\theta}|\mathcal{F}_t = \Gamma(t)$$

şeklinde tanımlayalım. Girsanov teoremine göre

$$dW^\sigma = dW^\theta - \sigma dt$$

diferansiyel denklemi ile verilmiş $(W^\sigma)$ süreci $\mathbb{P}^\sigma$ altında standart Brown devinimidir. Sonuç olarak $\mathbb{P}^\sigma$ altında,

$$Y(t) = (r + \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W^\sigma(t).$$

olur. Doalyısı ile $A = \left\{S_T \leq K, M_T^S \leq H\right\}$ , $B = \left\{Y_T \leq \log(\frac{K}{S_0}), M_T^Y \leq \log(\frac{H}{S_0})\right\}$ olayları için

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\theta[S_T \boldsymbol{I}_A] &= S_0 e^{rT} E^\sigma\left[\Gamma(T)\boldsymbol{I}_B\right] \\
&= S_0 e^{rT} E^\sigma[\boldsymbol{I}_B] \\
&= S_0 e^{rT} \mathbb{P}^\sigma(B)
\end{aligned}$$

31'den sonuç çıkar.

(ii) bir önceki kısımda $H = K$ alınırsa sonuç çıkar. □

**Lemma** 4.5 *(i) $K > H$ için,*

$$\mathbb{E}^\theta\left[S_T \boldsymbol{I}_{\left\{S_T \geq K, m_T^S \geq H\right\}}\right] = S_0 e^{rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\log(\frac{H^2}{KS_0}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

*(ii) $K \leq H$ için,*

$$\mathbb{E}^\theta\left[S_T \boldsymbol{I}_{\left\{S_T \geq K, m_T^S \geq H\right\}}\right] = S_0 e^{rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

**İspat**: Ispatı bir önceki Lemmayla aynıdır. □

## 4.2 BARİYER OPSİYONLARININ MARTİNGALE YÖNTEMİ İLE FİYATLANDIRILMASI

Bu kısımda bariyer opsiyonlarının Martingale yöntemi kullanılarak fiyatlandırılması yapılacaktır. Alım Bariyer opsiyonlarının prim fiyatları Elliott and Kopp (1998, pp.180-182) tarafından hesaplanmış, satım opsiyonları için çözüm yöntemi önerilmiş fakat yapılmamıştır. Biz bu kısımda alım opsiyonlarının fiyatlarını detaylandırdık satım opsiyonlarının fiyatlarını ise Elliott and Robert tarafından verilen teknikleri kullanarak kendimiz ürettik.

### 4.2.1 Aşağı-Dışarı Alım Opsiyonu

Aşağı-Dışarı (Down and Out) Alım opsiyonunu ele alalım önce. Egzersiz fiyatı $K$,vadeye kadar kalan süre $T$ ve bariyer seviyesi $H$ olsun. Bu opsiyon türü hisse senedi fiyatının vade sonuna kadar $H$ seviyesinin altına düşmemesi durumunda vade sonunda opsiyon alıcıscına opsiyonu önceden belirlenmiş olan $K$ fiyatından alma hakkı verir. Ama zorunluluk yüklemez. Aksi durumda yani hisse senedi fiyatı vade sonuna kadar bir kere bile $H$'ın altına düşerse opsiyon alıcısı sadece "rebate" alır. Şimdi bu opsiyonun prim fiyatını hesaplayalım. Eğer "rebate" ödemesi sıfır olursa bu opsiyonun vade sonundaki prim fiyatı

$$V(T) = \max(S_T - K, 0) I_{\left\{m_T^S \geq H\right\}}$$

olur. $U = \left\{S_T \geq K, m_T^S \geq H\right\}$ olsun. O halde "rebate"i sıfır ve vadeye kadar kalan süresi $T$ olan "Aşağı-Dışarı" opsiyonunun şuanki beklenen fiyatı

$$\begin{aligned}
V_{do}(0) &= \mathbb{E}^{\theta}[e^{-rT} V(T) | \mathcal{F}_0] \\
&= \mathbb{E}^{\theta}[e^{-rT} V(T)] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}^{\theta} \left[ (S_T - K) I_{\left\{S_T \geq K, m_T^S \geq H\right\}} \right] \\
&= e^{-rT} \left[ \mathbb{E}^{\theta} \left( S_T \boldsymbol{I}_U \right) - \mathbb{E}^{\theta} \left( K \boldsymbol{I}_U \right) \right] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}^{\theta} \left[ S_T I_U \right] - e^{-rT} \mathbb{E}^{\theta} \left[ K I_U \right]
\end{aligned}$$

olur. Risk-nötral olasılık ölçüsü altında risksiz faiz oranı ile iskonto edilmiş finansal varlıklar martingale oluşturduklarından yukarıdaki denklemde koşullu beklenen değerden beklenen değere geçtik. Şimdi $K > H$ ve $K \leq H$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

*I.Durum: $K > H$* Lemma 3.3($i$) ve lemma 3.5($i$)'den dolayı

$$\begin{aligned}
V_{do(K>H)} &= e^{-rT} S_0 e^{rT} \left[ \Phi \left( \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left( \frac{H}{S} \right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi \left( \frac{\log(\frac{H^2}{KS_0}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right] \\
&- e^{-rT} K \left[ \Phi \left( \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left( \frac{H}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi \left( \frac{\log \frac{H^2}{KS_0} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right] \\
&= S_0 \left[ \Phi \left( \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left( \frac{H}{S} \right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi \left( \frac{\log(\frac{H^2}{KS_0}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right] \\
&- e^{-rT} K \left[ \Phi \left( \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left( \frac{H}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi \left( \frac{\log \frac{H^2}{KS_0} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right]
\end{aligned}$$

*II.Durum: $K \leq H$* Bu durumda da Lemma 3.3($ii$) ve lemma 3.5($ii$)'den yaralanırsak

$$\begin{aligned}
V_{do(K\leq H)} &= S_0 \left[ \Phi \left( \frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1} \Phi \left( \frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right] \\
&- e^{-rT} K \left[ \Phi \left( \frac{\log\left(\frac{S_0}{H}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi \left( \frac{\log\left(\frac{H}{S_0}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Şimdi de "rebate" ödemesinin sıfır olmadığı duruma bakalım: Bu durumda eğer $T$ zamanından önce herhangi bir anda hisse senedi $H$'ın altına düşerse opsiyon alıcısı o andan itibaren hakkını kaybeder ve önceden belirlenmiş olan "rebate" ödemesini alır sadece. Bu yüzden "rebate"'i hesaplaya bilmek için duraklama anının (first passage time)olasılık yoğunluk fonksiyonuna ihtiyacımız var.

**Tanım** 4.1 *İlk Çarpma Anı: $X(t)$ bir rassal süreç ve $a$ herhangi bir sabit olsun. $X$'in $a$'ya ilk geldiği an*

$$\tau_a^X = \inf_{0\leq s\leq t}\{t : X_t = a\}$$

*ile gösterilir.*

İlk çarpma anının olasılık yoğunluk fonksiyonu ise Lemma 3.1'de türev alırsak

$$h(\tau) = \frac{1}{\sigma\tau\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{\frac{1}{2}(r-\mu\tau)^2}{\sigma\sqrt{\tau}}}$$

elde ederiz. Bu durumda rebate'in bugünkü değeri:

$$V_R = \int_0^T Re^{-r\tau} h(\tau) d\tau$$

olur. Bu integrali çözersek

$$V_R = R\left[\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha_+}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H}{S}\right)+\beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha_-}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H}{S}\right)-\beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \tag{4.8}$$

$$\beta = \sqrt{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}, \quad \alpha_\pm = \frac{r-\frac{\sigma^2}{2}\pm\beta}{\sigma^2}$$

elde ederiz. O halde "rebate" ödemesi sıfır omayan bir "Aşağı-Dışarı" alım opsiyonunun prim fiyatı

$$\begin{aligned}
C_{do(K>H)} &= V_{do(K>H)} + V_R \\
&= S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H^2}{KS_0})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&- e^{-rT}K\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log\frac{H^2}{KS_0}+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&+ R\left[\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha_+}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S})+\beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha_-}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S})-\beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Ikinci durum için ise

$$
\begin{aligned}
C_{do(K\leq H)} &= V_{do(K\leq H)} + V_R \\
&= S_0\left[\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{H}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H}{S_0}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&- e^{-rT}K\left[\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{H}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H}{S_0}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&+ R\left[\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha_+}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S})+\beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha_-}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S})-\beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

olur.

### 4.2.2 Aşağı-İçeri Alım Opsiyonu

Aşağı-İçeri alım opsiyonu, hisse senedi fiyatı herhangi bir $t \leq T$ zamanında önceden belirlenmiş bariyer seviyesi olan $H$'ın altına düşmesi durumunda opsiyon alıcısına vade sonunda yani $T$ zamanında hisse senedini "vade sonu fiyatı" diye adlandırılan $K$ fiyatından alma hakkı sağlar, fakat zorunluluk yüklemez. Aksi durumda opsiyon alıcısı sadece "rebate" alır. Bunu da $R$ ile göstereceğiz. Şimdi, bu opsiyonun prim fiyatını hesaplayalım. Eğer hisse senedi en az bir kere bariyer seviyesi olan $H$'ın altına düşerse, opsiyon standart Avrupa tipi alım opsiyonuna dönüçür ve dolaysıyla vade sonundaki prim fiyatı $\max(S_T - K, 0)$ olur.

Şimdi içerisinde aynı hisse senedi üzerine yazılmış aynı egzersiz fiyatına,aynı bariyer seviyesine ve aynı vadeye sahip birer Aşağı-İçeri ve Aşağı-Dışarı alım opsiyonları olan bir portföy düşünelim. Ve her iki opsiyonun da rebate ödemelerini sıfır olduğunu kabul edelim ilk başta. Bu durumda vade sonunda iki opsiyondan sadece bir tanesi "hayatta" iken diğeri "knock out" olmuş olacaktır. Çünkü hisse senedi vade sonuna kadar bariyerin altına hiç düşmezse Aşağı-İçeri opsiyonu hiç değer kazanmazken Aşağı-Dışarı opsiyonunun fiyatı vade sonu fiyatına yani $\max(S_T - K, 0)$ eşit olacaktır. Eğer vade sonundan önce herhangi bir anda bariyerin altına düşerse Aşağı-Dışarı opsiyonu knock out olurken Aşağı-İçeri opsiyonu değer kazanır ve fiyatı etık vade sonundaki fiyata bağlı olur. Yani bu durumda da fiyat $\max(S_T - K, 0)$ olur. O halde, Bu iki opsiyonu fiyatları arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır.

$$C = V_{do} + V_{di}$$

burada $C$ Standart Avrupa Alim Opsiyonunun fiyati'dır. Buradan da $K > H$ durumu için

$$\begin{aligned}
V_{di(K>H)} &= C - V_{do(K>H)} \\
&= S_0\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&- S_0\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + S_0\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H^2}{KS_0}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&+ e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rT}K\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log\frac{H^2}{KS_0} + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= S_0\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H^2}{S_0K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rT}K\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H^2}{S_0K}) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

$K \leq H$ durumu için

$$\begin{aligned}
V_{di(K\leq H)} &= C - V_{do(K\leq H)} \\
&= S_0\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&- S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&+ e^{-rT}K\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&= S_0\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rT}K\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

Aşağı-İçeri alım opsiyonu için rebate sıfırdan farklı olursa, vade sonuna kadar hisse senedi fiyatı bariyerin altına hiç düşmemiş olursa opsiyon alıcısı opsiyonu alamaz sadece önceden belirlenmiş olan rebate ödemesini almış olur. Bu durumda rebate'i sıfır olmayan Aşağı-İçeri alım opsiyonunun şuanki prim fiyatına rebate'i de ekelememiz gerekir. Hisse senedi fiyatının $H$'ın altına hiç düşmemesi durumu $\left\{m_T^S \geq H\right\}$ olayına denktir. Dolayısı ile, $R \neq 0$ rebate değerine sahip Aşağı-İçeri alım opsiyonunun şuanki prim fiyatı

$$C_{di(K>H)} = V_{di(K>H)} + \mathbb{E}^{\theta}\left(e^{-rT}R\boldsymbol{I}_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right)$$

$$C_{di(K\leq H)} = V_{di(K\leq H)} + \mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-rT}RI_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right]$$

olur. Ayrıca,

$$\left\{m_T^S \geq H\right\} = \left\{S_T \geq H, m_T^S \geq H\right\}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^\theta\left[e^{-rT}RI_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right] &= Re^{-rT}\mathbb{P}^\theta(I_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}) \\
&= Re^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
C_{di(K>H)} = S_0\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H^2}{S_0K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-e^{-rT}K\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H^2}{S_0K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
+Re^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

olur.

$K\leq H$ durumu için de aynı preosedürü uygularsak

$$
\begin{aligned}
C_{di(K\leq H)} = S_0\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-e^{-rT}K\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
+Re^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

### 4.2.3 Yukarı-Dışarı Alım Opsiyonu

Yukarı-Dışarı alım opsiyonu hisse senedi fiyatının vade sonuna kadar yükselerek bariyeri aşmaması durumunda vanilla alım opsiyonu gibi davranan,yani opsiyon alıcıcısına hisse senedini önceden belirlenmiş olan uygulama fiyatı dediğimiz $K$ fiyatından alma hakkı veren fakat vade içerisinde üst bariyeri aşması durumunda sıfırlanan veya sadece "rebate" (rebate sıfırdan farklıysa) ödeyen Avrupa tipi bir opsiyondur. Şimdi bu opsiyon türünün bugünkü prim fiyatını yine yukarıdaki yöntemle bulmaya çalışacağız. Diğer opsiyonlarda yaptığımız gibi bu opsiyonun da önce sıfır rebate'li olanının fiyatını hesaplayalım. Bu durumda opsiyonun vade sonundaki ($T$ anındaki) fiyatı ve bugünkü beklenen fiyatı sırasıyla

$$
V(T)=\max(S_T-K,0)I_{\left\{M_T^S\leq H\right\}} \quad \text{ve} \quad V(0)=\mathbb{E}^\theta\left[e^{-rT}V(T)|\mathcal{F}(0)\right]
$$

olur. Buradan da

$$
\begin{aligned}
V(0) &= \mathbb{E}^\theta\left[e^{-rT}\max(S_T-K,0)I_{\left\{M_T^S\leq H\right\}}|\mathcal{F}(0)\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}^\theta\left[(S_T-K)I_{\left\{S_T\geq K,M_T^S\leq H\right\}}\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}^\theta\left[S_TI_{\left\{S_T\geq K,M_T^S\leq H\right\}}\right]-Ke^{-rT}\mathbb{E}^\theta\left[I_{\left\{S_T\geq K,M_T^S\leq H\right\}}\right] \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Şimdi $V=\left\{S_T\geq K, M_T^S\leq H\right\}$ olsun. O zaman

$$I_V=I_{\left\{M_T^S\leq H\right\}}-I_{\left\{S_T\leq K,M_T^S\leq H\right\}}=I_{\left\{S_T\leq H,M_T^S\leq H\right\}}-I_{\left\{S_T\leq K,M_T^S\leq H\right\}}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\theta\left[S_TI_{\left\{S_T\geq K,M_T^S\leq H\right\}}\right] &= \mathbb{E}^\theta\left[S_TI_{\left\{S_T\leq H,M_T^S\leq H\right\}}\right]-\mathbb{E}^\theta\left[S_TI_{\left\{S_T\leq K,M_T^S\leq H\right\}}\right]\\ \mathbb{E}^\theta\left[I_{\left\{S_T\geq K,M_T^S\leq H\right\}}\right] &= \mathbb{E}^\theta\left[I_{\left\{S_T\leq H,M_T^S\leq H\right\}}\right]-\mathbb{E}^\theta\left[I_{\left\{S_T\leq K,M_T^S\leq H\right\}}\right]\end{aligned}$$

olur. Bu denklemleri (4.9)'de yerine yazıp Lemma 3.2 ve Lemma 3.4'ü kullanırsak $H>K$ ve $H\leq K$ durumları için ayrı prim fiyatlarını hesaplayabılırız.

(i) $H>K$ durumu için.

$$\begin{aligned}V_{0(H>K)} &= e^{-rT}\left(\mathbb{E}^\theta\left[S_TI_{\left\{S_T\leq H,M_T^S\leq H\right\}}\right]-\mathbb{E}^\theta\left[S_TI_{\left\{S_T\leq K,M_T^S\leq H\right\}}\right]\right)\\ &- Ke^{-rT}\left(\mathbb{E}^\theta\left[I_{\left\{S_T\leq H,M_T^S\leq H\right\}}\right]-\mathbb{E}^\theta\left[I_{\left\{S_T\leq K,M_T^S\leq H\right\}}\right]\right)\\ &= S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\\ &- S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{S_0})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0K}{H^2})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\\ &- Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\\ &+ Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{S_0})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0K}{H^2})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde ederiz. Eğer rebate sıfırdan farklı olmuş olursa bu durumda Aşağı-Dışarı alım opsiyonunda hesapladığımız rebate'in bugünkü beklenen değerini de opsiyon fiyatına eklememiz gerekir. Yani rebate sıfırdan farklı olursa

$$C_{uo(H>K)}=V_{uo(H>K)}+V_R$$

Buradan da

$$
\begin{aligned}
C_{uo(H>K)} = {} & R\left[\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha_+}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H}{S}\right)+\beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha_-}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H}{S}\right)-\beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
& + S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
& - S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{S_0})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0K}{H^2})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
& - Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
& + Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{S_0})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0K}{H^2})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Şimdi $H \leq K$ durumunu ele alalım. Bu durumda vade sonunda hisse senedi fiyatının uygulama fiyatının yani $K$'in üzerinde bir değer alması için bariyer seviyesini de aşmış olması gerekir fakat bu durumda opsiyon değersiz hale geldiğinden opsiyon alıcısı sadece rebate ödemesini alır veya rebate sıfırsa opsiyona başta ödemiş olduğu primi tamamen yanmış olur. Dolaysı ile

$$
C_{uo(H\leq K)} = R\left[\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha_+}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H}{S}\right)+\beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha_-}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H}{S}\right)-\beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
$$

$$
\beta = \sqrt{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2+2r\sigma^2}, \alpha_\pm = \frac{r-\frac{\sigma^2}{2}\pm\beta}{\sigma^2}
$$

olur.

### 4.2.4 Yukarı-İçeri Alım Opsiyonu

Yukarı-İçeri alım opsiyonu hisse senedi fiyatının yükselerek bariyer seviyesini aşması durumunda değer kazanarak vanilla alım opsiyonuna dönüştüğü aksi durumda yani vade sonuna kadar bariyer seviyesinin üstüne çıkamaması durumunda ise kontratta rebate sıfırdan farklı değilse eğer opsiyon alıcısına sadece rebate kazandıran Avrupa tipi opsiyon türüdür. Bu opsiyon türünün prim fiyatını ($C_{ui}$) hesaplamak için daha önce Aşağı-Dışarı ve Aşağı-İçeri opsiyonlar arasında belirttiğimiz bağıntıyı kullancağız. Aynı vadeye, uygulama fiyatına ve Bariyer seviyesine sahip rebate'leri sıfır olan Yukarı-İçeri ve Yukarı-Dışarı alım opsiyonlarından vade sonunda sadece bir tanesi değerli olabileceğinden

$$
V_{uo} + V_{ui} = C
$$

olur. Yani

$$
\begin{aligned}
V_{ui(H>K)} &= C - V_{uo(H>K)} \\
&= S_0\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&- S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&+ S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{S_0})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0K}{H^2})-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&+ Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&- Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{S_0})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0K}{H^2})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

ve

$$
V_{ui(H\le K)} = C - V_{uo(H\le K)} = C - 0 = C = S_0\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{4.12}
$$

Şimdi de rebate değerinin sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Bu durumda vade sonuna kadar hisse senedi bariyer seviyesinin hep altında kalırsa ($M_T^S < H$) o zaman opsiyon değer kazanmamış olur ve opsiyon alıcısı sadece rebate ödemesi ile yetinmek zorunda kalır. O halde rebate değeri sıfırdan farklı olan opsiyonun prim fiyatına rebate'i de eklememiz gerekir. Hisse senedi fiyatının $H$'i aşmaması durumu $\left\{M_T^S \le H\right\}$ olayına denktir. Dolayısı ile $R \neq 0$ rebate değerine sahip Yukarı-İçeri alım opsiyonunun şuanki prim fiyatı

$$
C_{ui(K>H)} = V_{ui(K>H)} + \mathbb{E}^\theta\left(e^{-rT}RI_{\left\{M_T^S\le H\right\}}\right)
$$

$$
C_{ui(K\le H)} = V_{ui(K\le H)} + \mathbb{E}^\theta\left[e^{-rT}RI_{\left\{M_T^S\le H\right\}}\right]
$$

olur. Ayrıca,

$$
\left\{M_T^S \le H\right\} = \left\{S_T \le H, M_T^S \le H\right\}
$$

ve buradan

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^\theta\left[e^{-rT}RI_{\left\{M_T^S\le H\right\}}\right] &= Re^{-rT}\mathbb{P}^\theta(I_{\left\{M_T^S\le H\right\}}) \\
&= Re^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

olur. Buradan da

$$C_{ui(H\leq K)} = S_0\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$
$$+ Re^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

$$C_{ui(H>K)} = S_0\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$
$$- S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) - (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) - (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$
$$+ S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0K}{H^2}) - (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$
$$+ Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$
$$- Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0K}{H^2}) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$
$$+ Re^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

Prim fiyatlarını elde etmiş oluruz.

Şimdi de satım opsiyonlarını inceleyelim. Satım opsiyonları (put) opsiyon alıcısına hisse senedini vade sonunda önceden belirlenmiş olan uygulama fiyatından satma hakkı verir fakat zorunluluk yüklemez. O halde Standart Avrupa tipi satım opsiyonunun vade sonundaki fiyatı $V(T) = \max(K - S_T, 0)$ olur. Buraya kadar incelediğimiz tüm bariyer opsiyonlarının put versiyonları da mevcuttur ve şimdi onların fiyatlarını hesaplamaya çalışacağız.

### 4.2.5 Aşağı-Dışarı Satım Opsiyonu

Aşağı-Dışarı satım opsiyonu vade sonuna kadar hisse senedi fiyatının bariyerin altına düşmemesi durumunda standart satım opsiyonuna dönüşen aksi durumda değer kazanmayan veya sadece rebate ödeyen opsiyonlardır. Eğer rebate sıfır olursa Aşağı-Dışarı satım opsiyonunun vade sonu fiyatı

$$U_{do}(T) = \max(K - S_T, 0)I_{\left\{m_T^S \geq H\right\}}$$

olur. Buradan

$$\max(K - S_T, 0)\left\{m_T^S \geq H\right\}) = \max(S_T - K, 0)\left\{m_T^S \geq H\right\} - (S_T - K)\left\{m_T^S \geq H\right\}$$

yazabiliriz. Bu yüzden

$$
\begin{aligned}
U_{do}(0) &= \mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-rT}U_{do}(T)\right] \\
&= \mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-rT}\max(K-S_T,0)I_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-rT}\max(S_T-K,0)I_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right]-\mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-rT}(S_T-K)I_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right] \\
&= V_{do}(0)-e^{-rT}\mathbb{E}^{\theta}\left[S_T I_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right]+e^{-rT}K\mathbb{E}^{\theta}\left[I_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right] \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

ve $I_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}=I_{\left\{S_T\geq H, m_T^S\geq H\right\}}$ olduğundan $n=1$ veya $n=0$ için

$$
\mathbb{E}^{\theta}\left[(S_T)^n I_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right]=\mathbb{E}^{\theta}\left[(S_T)^n I_{\left\{S_T\geq H, m_T^S\geq H\right\}}\right]
$$

olur buradan da Lemma-3.5'i kullanarak

$$
e^{-rT}\mathbb{E}^{\theta}\left[S_T I_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right]=S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
$$

$$
e^{-rT}K\mathbb{E}^{\theta}\left[I_{\left\{m_T^S\geq H\right\}}\right]=e^{-rT}K\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
$$

elde edilir. Bu degerleri de (4.14)'de yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
U_{do}(0) = V_{do}(0) &- S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&+ e^{-rT}K\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned}
\qquad (4.15)
$$

elde ediliri. Buradan da $H>K$ ve $H\leq K$ durumları için $V_{do}$'ın değerleri yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
U_{do(K>H)} = e^{-rT}S_0e^{rT}&\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H^2}{KS_0})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&- e^{-rT}K\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log\frac{H^2}{KS_0}+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&= S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H^2}{KS_0})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&- e^{-rT}K\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log\frac{H^2}{KS_0}+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&- S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
&+ e^{-rT}K\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{do(K\leq H)} = S_0 & \left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
& - e^{-rT}K\left[\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{H}\right) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H}{S_0}\right) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
& - S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
& + e^{-rT}K\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Aşağı-Dışarı alım opsiyonlarında olduğu gibi Aşağı-Dışarı satım opsiyonunda da rebate ödemesi (sıfırdan farklı ise) hisse senedi fiyatı bariyere çarptığı anda ödenir. Yani hisse senedi fiyatı bariyerin altına düştüğü andan itibaren opsiyon geçerliliğini kaybeder dolaysı ile ya knock-out olur tamamen yada opsiyon alıcısı rebate ödemesini alır sadece. Bu yüzden satım opsiyonlarının da rebate sıfırdan farklı olanlarına Aşağı-Dışarı alım opsiyonundaki rebate miktarının aynısı eklenir.

### 4.2.6 Aşağı-İçeri Satım Opsiyonu

Aşağı-İçeri satım opsiyonu vade sonuna kadar hisse senedi fiyatının bariyerin altına düşmesi durumunda standart satım opsiyonuna dönüşen aksi durumda değer kazanmayan veya sadece rebate ödeyen opsiyonlardır. Eğer rebate sıfır olursa Aşağı-İçeri satım opsiyonunun vade sonu fiyatı

$$U_{di}(T) = \max(K - S_T, 0)\left\{m_T^S \leq H\right\}$$

olur. Aşağı-İçeri satım opsiyonunun prim fiyatı için alım opsiyonlarında kullandığımız tekniği kullanacağız. Şöyle ki içerisinde aynı hisse senedi üzerine yazılmış vadeye kalan süresi ve egzersiz fiyatı aynı ve rebate ödemesi sıfır olan bir tane Aşağı-Yukarı ve bir tane de Aşağı-İçeri satım opsiyonu olan bir portföy düşünelim. Bu portföyün değeri vanilla satım opsiyonu ile aynı olacaktır. Çünkü vade sonunda opsiyonlardan bir tanesi knock-out olurken diğeri "in money" olacaktır. Dolaysı ile

$$P = U_{do} + U_{di}$$

buradan da

$$
\begin{aligned}
U_{di(K>H)} &= e^{-r(T-t)}K\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) - U_{do(K>H)} \\
U_{di(K\leq H)} &= e^{-r(T-t)}K\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) - U_{do(K\leq H)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

### 4.2.7 Yukarı-Dışarı Satım Opsiyonu

Yukarı-Dışarı satım opsiyonu, hisse senedi fiyatının vade sonuna kadar yükselerek bariyeri aşmaması durumunda vanilla satım opsiyonu gibi davranan,yani opsiyon alıcıcısına hisse senedini önceden belirlenmiş olan uygulama fiyatı dediğimiz $K$ fiyatından satma hakkı veren, hisse senedi fiyatının vade içerisinde üst bariyeri aşması durumunda ise sıfırlanan veya sadece "rebate" (rebate sıfırdan farklıysa) ödeyene Avrupa tipi bir opsiyondur. Şimdi bu opsiyon türünün bugünkü prim fiyatını yine yukarıdaki yöntemle bulmaya çalışacağız. Diğer opsiyonlarda yaptığımız gibi bu opsiyonun da önce sıfır rebate'li olanının fiyatını hesaplayalım. Bu durumda opsiyonun vade sonundaki ($T$ anındaki) fiyatı ve bugünkü beklenen fiyatı sırasıyla

$$V(T) = \max(K - S_T, 0) I_{\left\{M_T^S \leq H\right\}} \quad \text{ve} \quad V(0) = \mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-rT} V(T) | \mathcal{F}(0)\right]$$

olur. Buradan da

$$\max(K - S_T, 0)\left\{M_T^S \leq H\right\}) = \max(S_T - K, 0)\left\{M_T^S \leq H\right\} - (S_T - K)\left\{M_T^S \leq H\right\}$$

yazabiliriz. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
U_{uo}(0) &= \mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-rT} U_{do}(T)\right] \\
&= \mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-rT} \max(K - S_T, 0) I_{\left\{M_T^S \leq H\right\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-rT} \max(S_T - K, 0) I_{\left\{M_T^S \leq H\right\}}\right] - \mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-rT}(S_T - K) I_{\left\{M_T^S \leq H\right\}}\right] \\
&= V_{uo}(0) - e^{-rT}\mathbb{E}^{\theta}\left[S_T I_{\left\{M_T^S \leq H\right\}}\right] + e^{-rT} K \mathbb{E}^{\theta}\left[I_{\left\{M_T^S \leq H\right\}}\right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

ve $I_{\left\{M_T^S \leq H\right\}} = I_{\left\{S_T \leq H, M_T^S \leq H\right\}}$ olduğundan $n = 1$ veya $n = 0$ için

$$\mathbb{E}^{\theta}\left[(S_T)^n I_{\left\{M_T^S \leq H\right\}}\right] = \mathbb{E}^{\theta}\left[(S_T)^n I_{\left\{S_T \leq H, M_T^S \leq H\right\}}\right]$$

olur buradan da Lemma 3.3 ve Lemma 3.5 yardımıyla

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\theta}\left[S_T I_{\left\{M_T^S \leq H\right\}}\right] = S_0\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1} \Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

$$e^{-rT} K \mathbb{E}^{\theta}\left[I_{\left\{m_T^S \geq H\right\}}\right] = e^{-rT} K\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

elde edilir. Bu degerleri de (4.16)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
U_{uo}(0) = V_{uo}(0) - S_0 &\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1} \Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\
+ e^{-rT} K &\left[\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi\left(\frac{\log(\frac{H}{S_0}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. Buradan da $H > K$ ve $H \leq K$ durumları için $V_{do}$'ın değerleri yerine yazılarak sonuç elde edilir.

### 4.2.8 Yukarı-İçeri Satım Opsiyonu

Yukarı-İçeri satım opsiyonu vade sonuna kadar hisse senedi fiyatının yükselerek bariyerin üstüne çıkması durumunda standart satım opsiyonuna dönüşen aksi durumda değer kazanmayan veya sadece rebate ödeyen opsiyonlardır. Eğer rebate sıfır olursa Yukarı-İçeri satım opsiyonunun vade sonu fiyatı

$$U_{ui}(T) = \max(K - S_T, 0) I_{\{M_T^S \geq H\}}$$

Az önce Aşağı-Dışarı ve Aşağı-İçeri satım opsiyonları için uyguladığımız denklemi burada da uygularsak

$$U_{ui(K>H)} = e^{-r(T-t)} K\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) - U_{uo(K>H)}$$
$$U_{ui(K\leq H)} = e^{-r(T-t)} K\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) - U_{uo(K\leq H)}$$

elde ederiz.

## 4.3 BARİYER OPSİYON FİYATLARININ DİFERANSİYEL DENKLEM YOLU İLE HESAPLANMASI

### 4.3.1 Aşağı-Dışarı Alım Opsiyonu

Eğer hisse senedi fiyatı Bariyer seviyesini vade boyunca geçmezse vade sonunda alım opsiyonu gibi davranır ve ödeme fonksiyonu $\max(S_T - K)$ olur. Eğer vade sonuna kadar en az bir kere bariyeri geçerse ve "rebate" sıfırsa o zaman opsiyon bariyeri geçtigi anda değersiz hale gelir. Şimdi $K > H$ durumunu inceleyelim. $S > H$ oldugu müddetçe bu opsiyon alım opsiyonu ile aynı ödemeye sahip olacağından Black-Scholes denklemini sağlayacaktır ve $V(S,T) = \max(S - K, 0)$, $S \to \infty, V(S,t) = S$ olacaktır. Bu opsiyon türünün fiyatının vanilla alım opsiyonundan tek farkı ikinci sınır değer koşuludur. Yani $V(0,t) = 0$ yerine $V(H,t) = 0$ olacaktır. Açık bir fiyat formülü için yine daha önce yaptığımız değişken dönüşumlerini yapacagız.

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad V = K\nu(x,\tau) \quad \text{ve} \quad \nu(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau} u(x,\tau)$$

oyle ki, $\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$, $\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$ ve $k = \frac{2r}{\sigma^2}$. Bu yeni değişkenlerle bariyer de $x_0 = \log H/K$ formuna dönüşür. Ve Black-Scholes diferansiyel denklemi de

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.18}$$
$$u(x,0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) = u_0(x), x \geq x_0 \tag{4.19}$$
$$u(x,t) \approx e^{(1-\alpha)x - \beta\tau}, \quad x \to \infty \tag{4.20}$$
$$u(x_0,t) = 0 \tag{4.21}$$

haline gelir. Bu (4.21)'in ısı transferi cinsinden karşılığı yarı-sonsuz bir çubuk üzerinde $x = \log H/K$ noktasındaki sıcaklık akışı 0 sıcaklıkta sabitlenmesidir.

Çubuk üzerindeki ısı dağılımı kullanılan kordinat sisteminden etkilenmez bu yüzden (4.21) denklemi $x$'ten $x+x_0$ olan öteleme veya $x$'ten $-x$'e olan yansıma altında değişmezdir(invariant). Dolaysıyla eğer $u(x,\tau)$ (4.18)'in bir çözümü ise herhangi bir $x_0$ sabiti için $u(x+x_0,\tau)$ ve $u(-x+x_0,\tau)$ da birer çözümdürler. Görüntüler (images) yöntemiyle yarı-sonsuz (semi-infinite) problemin çözümüne önce eşit ve zıt başlangıç sıcaklık dağılımına sahip iki yarı-sonsuz problemden oluşan sonsuz problemi çözerek başlıyoruz. Toplam etki birleşme noktasında sıfırlanıyor.

Bu metodu bariyer opsiyonlarına uygulayabiliriz. Baslangıç veriyi $x_0 = \log H/K$ (iki çubuğun birleşme noktası) noktasına göre yansıtarak cözüyoruz. Dolaysı ile (4.18)-(4.21)'u $x_0 < x < \infty$ çözmek yerine (4.18)'i bütün $x$'ler için fakat

$$u(x,0) = u_0(x) - u_0(2x_0 - x)$$

başlangıç koşuluna göre çözeceğiz. Yani

$$u(x,0) = \begin{cases} \quad \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) & x > x_0 \\ - \quad \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)(x_0-\frac{1}{2}x)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x_0-\frac{1}{2}x)}, 0) & x < x_0 \end{cases}$$

Bu yolla $u(x_0,0) = 0$'i garantilemiş oluyoruz. Şimdi

$$C(S,t) = Ke^{\alpha x+\beta\tau}u_1(x,\tau) \tag{4.22}$$

denkleminin aynı uygulama fiyatı ve vadeye sahip vanilla opsiyonunun (bariyersiz) fiyatı olduğunu varsayalım. O halde bu değer Black-Scholes denklemi ile verilir ve $u_1(x,\tau)$ ısı denkleminin çözümüdür. Bu yüzden

$$u_1(x,\tau) = e^{-\alpha x-\beta\tau}u_1(x,\tau)C(S,t)/K$$

olur. Şimdi de bariyer opsiyonunun değerini

$$V(S,t) = Ke^{\alpha x+\beta\tau}(u_1(x,\tau) + u_2(x,\tau))$$

şeklinde yazıyoruz. Burada $u_2(x,\tau)$ antisimetrik verilerle verilmiş problemin çözümüdür. Bu problemin çözümü de (4.18)'in öteleme ve yansıma altında değişmezliği kullanılarak $u_1$ cinsinden bulunabilir. Bunun için

$$\begin{aligned} u_2(x,\tau) &= -u_1(2x_0 - x,\tau) \\ &= -e^{-\alpha(2\log(H/K)-\log(S/K))-\beta\tau}C(X^2/S,t)/K \end{aligned}$$

olmalıdır. Çünkü $x$ yerine $2x_0 - x$ yazmakla $S$ yerine $H^2/S$ yazmak aynıdır. Sonuç olarak tüm bunları bir araya getirirsek ve çözümü tamamen $S$ ve $t$ cinsinden yazarsak

$$V(S,t) = C(S,t) - \left(\frac{S}{H}\right)^{-(k-1)} C(H^2/S,t)$$

Buradan $V(H,t) = 0$ olduğu aşikardır. Bu denklemin ısı denklemini ve sınır koşullarını sağladığı da kolaylıkla doğrulanabilir.

### 4.3.2 Aşağı-İçeri Alım Opsiyonu

Aşağı-İçeri Alım Opsiyonu hisse senedi fiyatının vade sonuna kadar bariyer seviyesinin altına hiç düşmemesi durumunda değersiz olan bu seviyeyi bir kere geçtiği durumunda vanilla alım opsiyonu gibi davranan opsiyon türüdür.

Şimdi Avrupa tipi aşağı-içeri alım opsiyonunun fiyatını hesaplayalım ve bu fiyatı yine $V(S,t)$ ile, aynı vadeye ve uygulama fiyatına sahip vanilla alım opsiyonunun fiyatını da $C(S,t)$ ile gösterelim. Aşağı-İçeri alım opsiyonu da Black-Scholes denklemini sağlayacaktır sadece nihai ve sınır koşulları farklı olacaktır.

Bariyer seviyesi kırıldığı andan itibaren opsiyon vanilla alım opsiyonuna dönüşecektir ve Black-Scholes denklemini sağlayacaktır. Eğer $S \to \infty$ ise opsiyon değeri sıfırdır çünkü $S$'in değeri büyüdükçe bariyerin altına düşme olasılığı sıfıra yaklaşır. Bu yüzden sınır koşullarından bir tanesi

$$S \to \infty \quad \text{ise} \quad V(S,t) \to 0$$

koşulu,

Eğer vade sonuna kadar $S > H$ olursa opsiyon değersiz olarak sonuçlanır. Bu yüzden başka bir sınır koşulumuz da [2]

$$V(S,T) = 0$$

koşulu,

Son olarak eğer herhangi bir $t < T$ anında $S \leq H$ olursa o zaman da opsiyon vanilla alım opsiyonuna dönüşür yani bu durumda da

$$V(H,t) = C(H,t)$$

koşuludur.

Sonuç olarak aşağı-içeri alım opsiyonunun prim fiyatının açık formülü

$$V(S,t) = C(S,t) - \overline{V}(S,t)$$

şeklindedir. Black-Scholes denklemi ve sınır koşullar lineer olduğundan $\overline{V}$'nin

$$\overline{V}(S,T) = C(S,T) - V(S,T) = C(S,T) = \max(S-K,0)$$

nihai koşulu ve

$$\overline{V}(S,t) = C(S,t) - V(S,t) \approx S - 0 = S, \quad S \to \infty \overline{V}(H,t) = C(H,t) - V(H,t) = C(H,t) - C(H,t) = 0$$

sınır koşulları ile Black-Scholes denklemini sağlıyor olması gerekir. Bu da aşağı-dışarı bariyer opsiyon fiyatını verir. Dolaysıyla aynı vadeye ve uygulama sahip aşağı-dışarı ve aşağı içeri opsiyon fiyatlarının toplamı vanilla alım opsiyonunun fiyatını verir. Finansal bakış açısından da bunun nedeni iki opsiyonlardan sadece bir tanesinin vade sonunda aktif olabileceği gerçeğidir.

[2]Eğer kontratta $Z \neq 0$ bir "rebate" belirtilmişse o halde $V(S,T) = Z$ olur.

# 5 SONUÇ

Bu çalışmada opsiyonlar ile ilgili temel tanımlar yapıldı, opsiyonların finans piyasasındaki öneminden bahsedildi sonra opsiyonların fiyatlandırılmasında önemli yere sahip olan Black-Scholes modelinin varsayımları ve bu modeli etkileyen parametreler incelendi, Black-Scholes modeli varsayımları altında Black-Scholes denklemi denen lineer, parabolik kısmi diferansiyel denklemini sağlayan her hangi bir finansal varlığın kendini finanse ettiği gösterildi.

Dört farklı matematiksel yöntem; martingale yöntemi, diferansiyel denklemler, indirgeme metodu ve risk nötral parametreler metodu ile Black-Scholes formülünün elde edilişi incelendi. Bu yöntemler finansal açıdan değil matematiksel açıdan ele alındı. Yani, amaç bu yöntemleri bir biri ile kıyaslayıp daha etkili olanına karar vermek değil bir problemin bir kaç farklı matematiksel yöntemle çözülebildiğini göstermekti.

Daha sonra ise temel Bariyer opsiyonlarının tanımları yapıldı standart vanilla opsiyonları ile aralarındaki farklardan bahsedildi, Bariyer opsiyonlarının finans piyasasındaki öneminden bahsedildi. Tek bariyerli bariyer opsiyonlarının prim fiyatları iki farklı matematiksel yöntemle hesaplandı. Martingale yöntemi ile Bariyer opsiyonlarının tamamının prim fiyatları için analitik formüller elde edilirken diferansiyel denklemler yolu ile sadece Aşağı-Dışarı ve Aşağı-İçeri alım opsiyonlarının prim fiyatları hesaplanıldı. Biz bu yöntemlerden martingale yöntemini incelediğimiz kaynaklrda eksik bırakılmış problemlere, satım opsiyonlarına da uygulayarak hem Bariyer alım hem de Bariyer satım opsiyonlarının tamamının prim fiyatları için analitik formüller elde ettik ve incelediğimiz başka kaynaklarlardaki sonuçlarla kendi sonuçlarımızı kıyasladık.

Diferansiyel denklemler metodu da kullanılarak yukarı alım ve tüm satım Bariyer opsiyonları için analitik formüller elde edilebilir. Ayrıca, söz konusu tekniklerle iki ve ikiden fazla bariyeri olan Bariyer opsiyonlarının prim fiyatları için analitik formüller elde edilebilir.

# Kaynaklar


Joshi, M.S. 2010 *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*, 2nd edition, Cambridge

Briys E, Mai H.M, Bellalah M ve Varenne de F.Options Futures and Exotic Derivatives, Wiley, 1999.

Black,F.,Scholes,M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy 81(3):637-654

Merton, Robert,C., Theory of Rational Option Pricig. Bell Journal of Economics and Management Science 4(1): 141-183.

Rubinstein, M., Reiner, E., Barrier Options, 1991.

Wilmott, P, Dewynne, J, Howison, S, Option Pricing: Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, 1993.

Wilmott, P, Dewynne, J, Howison, S, The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge University Press, 1995.

Wilmott, P, Derivatives, Wiley, 1999.

Kwok, Y.K, Mathematical Models of Financial Derivatives, Springer, 2008.

Shreve, S.E, Stochastic Calculus for Finance II, Springer, 2004

Musiela, M.,Rutowski, M.,Martingale Methods in Financial Modelling, Springer.


Joshi, M.S. 2010 *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*, 2nd edition, Cambridge

Briys E, Mai H.M, Bellalah M ve Varenne de F.Options Futures and Exotic Derivatives, Wiley, 1999.

Black,F.,Scholes,M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy 81(3):637-654

Merton, Robert,C., Theory of Rational Option Pricig. Bell Journal of Economics and Management Science 4(1): 141-183.

Rubinstein, M., Reiner, E., Barrier Options, 1991.

Wilmott, P, Dewynne, J, Howison, S, Option Pricing: Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, 1993.

Wilmott, P, Dewynne, J, Howison, S, The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge University Press, 1995.

Wilmott, P, Derivatives, Wiley, 1999.

Kwok, Y.K, Mathematical Models of Financial Derivatives, Springer, 2008.

Shreve, S.E, Stochastic Calculus for Finance II, Springer, 2004

Musiela, M.,Rutowski, M.,Martingale Methods in Financial Modelling, Springer.

# EKLER

## Ek A.1

### Temel Tanımlar ve Teoremler

**Tanım** 5.1 *$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ olasılık uzayı olsun. Eğer $\omega$'ya bağlı $W(t), t \geq 0$ sürekli fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $W(t)$'ye Brown Devinimi veya Brown Hareketi denir.*

1. $W(0) = 0$

2. *Her $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ için*

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

*farkları bağımsızdırlar.*

3. *Bu farkların her biri beklenen değeri ve varyansı sırasıyla*

$$\mathbb{E}\left[W(t_i) - W(t_{i-1})\right] = 0, \quad Var\left[W(t_i) - W(t_{i-1})\right] = t_i - t_{i-1}$$

*olan normal dağılıma sahiptir.*

(Shreve 2004)

**Tanım** 5.2 *$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bir olasılık uzayı ve $W(t), t \geq 0$ bu uzay üzerinde tanımlı bir Brown devinimi olsun. Eğer $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ $\sigma$-algebralar koleksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$'ye $W(t), t \geq 0$ için bir filtireleme denir.*

1. *(Bilgi Biriktirme Özelliği) Her $0 \leq s < t$ için $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$*

2. *(Uygunluk Özelliği)Her $t \geq 0$ için $W_t$ , $\mathcal{F}(t)$ ölçümlüdür.*

3. *(Gelecek Artışlardan Bağımsızlık Özelliği) $0 \leq s < t$ için $W(t) - W(s)$ $\mathcal{F}(s)$'den bağımsızdır.*

**Tanım** 5.3 *$(X_t)_{t\geq 0}$ bir stokastik süreç ve $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ bu süreç için verilmiş bir filtreleme olsun. Eğer her $s > 0$ için*

$$\mathbb{E}[X_{t+s}|\mathcal{F}(t)] = X_t$$

*eşitliği sağlanırsa $X_t$ sürecine martingale denir.*

**Teorem** 5.1 *Brown devinimi bir martingale'dir.*

**Tanım** 5.4 *$\Delta(t), t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$ uyumlu bir stokastik süreç ve $W_t$ de bir Brown devinimi olmak koşuluyla*

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW(u)$$

*denklemi ile veirlen integrale Ito integrali denir.*

**Teorem** 5.2 *Ito integrali bir martingale'dir.*

**Teorem** 5.3 ***(İto Lemma)*** *Ito integrali bir martingale'dir.* $W(t)$ *bir Brown devinimi ve* $f$ *herhangi türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere* $f(W(t))$*'nin diferansiyeli aşağıdaki formül ile verilir.*

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt$$

**Teorem** 5.4 $W(t)$ *bir Brown devinimi ve* $f(t,x)$ $f_t, f_x$ *ve* $f_{xx}$ *sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. O zaman her* $T \geq 0$ *için*

$$df(t,W(t)) = f_t(t,W(t))dt + f_x(t,W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t,W(t))dt$$

**Tanım** 5.5 ***(Radon-Nikodym)*** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *bir olasılık uzayı üzerinde tanımlı,* $\mathbb{E}[Z] = 1$ *koşulunu saplayan ve negatif olmayan herhangi bir* $Z$ *rassal değişkeni için*

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F} \tag{5.1}$$

*de bir olasılık ölçümüdür ve*

$$Z = \frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$$

*türevine Radon-Nikodym türevi denir.*

**Teorem** 5.5 ***(Girsanov)*** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *bir olasılık uzayı,*$W(t), 0 \leq t \leq T$ *bu uzay üzerinde tanımlı bir Brown devinimi ve* $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$ *de bu Brown devinimi için bir filtreleme olsun.* $\Theta(t), 0 \leq t \leq T$ *de* $\mathcal{F}(t)$ *uyumlu her hangi bir stokastik süreç olsun.*

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \Theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)du\right\}$$

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u)du$$

*tanımlanmış olsun. O zaman* $Z = Z(T)$ *olursa* $\mathbb{E}[Z] = 1$ *ve* (5.1) *ile verilmiş* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *olasılık ölçüsü altında* $\widetilde{W}(t), 0 \leq t \leq T$ *süreci bir Brown devinimidir.*