

**T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ**

**HOLLİNG-TANNER TİPİ BİR AV-AVCI MODELİ
İÇİN HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK
ANALİZİ**

Yüksek Lisans Tezi

EMRAH ÖZMEN

İSTANBUL, 2012

**T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK**

**HOLLİNG-TANNER TİPİ BİR AV-AVCI MODELİ
İÇİN HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK
ANALİZİ**

Yüksek Lisans Tezi

EMRAH ÖZMEN

Tez Danışmanı: Doç.Dr. CANAN ÇELİK KARAASLANLI

İSTANBUL, 2012

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK

Tezin Adı: HOLLİNG-TANNER TİPİ BİR AV-AVCI MODELİ İÇİN HOPF
ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ

Öğrencinin Adı Soyadı: Emrah ÖZMEN

Tez Savunma Tarihi: 07-06-2012

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğu Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Doç.Dr. Tunç BOZBURA
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğunu onaylıyorum.

Prof.Dr. Nuri KURUOĞLU
Program Koordinatörü

Bu Tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli görülmüş ve kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmzalar

Tez Danışmanı

Doç.Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI

Üye

Doç.Dr. Mustafa POLAT

Üye

Doç.Dr. Ersin ÖZUGURLU

TEŞEKKÜR

Akademik hayatıma başlamama vesile olan sayın Prof. Dr. Şenay YALÇIN ve sayın Engin Ruhi ÖZMEN'e, yanında çalışmaktan onur duyduğum, benden yardımlarını, desteğini, bilgisini esirgemeyen ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından dolayı değerli hocam sayın Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI'ya, eğitimimde ve çalışmalarımda yardımlarıyla beni destekleyen Bahçeşehir Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına, bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme ve dostlarıma özellikle desteğini hiçbir zaman esirgemeyen abim Uzm. Dr. Zafer ÖZYURT'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İstanbul, 2012

Emrah ÖZMEN

ÖZET

HOLLİNG-TANNER TİPİ BİR AV-AVCI MODELİ İÇİN HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ

Emrah Özmen

Fen Bilimleri Enstitüsü
Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Canan Çelik Karaaslanlı

Haziran 2012, 56 sayfa

Bu tezde gecikmeli lojistik bir av-avcı sisteminin dinamiği incelenmiş ve τ gecikme parametresi, çatallanma parametresi olarak seçilerek kararlılık ve Hopf çatallanma analizi çalışılmıştır. Ayrıca normal form teoremi ve Center Manifold teoremi kullanılarak kritik τ değerinde çatallanan periyodik çözümün yönü, kararlılığı ve periyodu elde edilmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar ise nümerik simülasyonlarla desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Av-avcı sistemi, Gecikmeli diferansiyel denklem, Hopf çatallanma, Kararlılık.

ABSTRACT

DYNAMICAL ANALYSIS OF A HOLLING TANNER TYPE PREDATOR-PREY MODEL WITH TIME DELAY

Emrah Özmen

Graduate School of Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Supervisor: Doç.Dr. Canan Çelik Karaaslanlı

June 2012, 56 pages

In this thesis, the dynamics of a logistic delayed prey-predator system is investigated and by choosing time delay τ as bifurcating parameter, the stability and Hopf bifurcation analysis are studied. Moreover, by using normal form theory and center manifold theorem, the direction, stability and the period of the bifurcating periodic solution at critical values τ are obtained. Also the theoretical results are supported by numerical simulations.

Keywords: Prey-predator system, Delayed differential equation, Hopf bifurcation, Stability.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER.....	vii
SEMBOLLER.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 AV-AVCI POPÜLASYON MODELİ.....	1
1.2 GECİKMELİ SİSTEMLERE GENEL BAKIŞ.....	3
1.3 LİTERATÜRDE GECİKMELİ SİSTEMLER	3
1.4 TEZ ÇALIŞMASININ AMACI	5
2. ÇATALLANMA ve HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ	8
2.1 ÇATALLANMA TEORİSİ	8
2.1.1 Çatallanma Türleri.....	8
2.1.2 Lokal Çatallanma ve Türleri	8
2.2 HOPF ÇATALLANMA	11
2.2.1 Hopf Çatallanma Teoremi	11
2.2.2 Hopf Çatallanma Türleri	12
2.2.3 Hopf Çatallanma Teorisi	13
2.3 CENTER MANİFOLD TEOREMİ	26
3. KARARLILIK ANALİZİ ve HOPF ÇATALLANMA	27
4. HOPF ÇATALLANMANIN YÖNÜ ve KARARLILIĞI	33
5. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR.....	48
KAYNAKÇA.....	52

ŞEKİLLER

Şekil 2.1: Fold çatallanma	9
Şekil 2.2: Süperkritik tırmık çatallanma	10
Şekil 2.3: Transkritik çatallanma.....	10
Şekil 2.4: Flip çatallanma	11
Şekil 5.1: Av popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği	49
Şekil 5.2: Avcı popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği	49
Şekil 5.3: Av popülasyonuna karşılık gelen avcı popülasyonu	50
Şekil 5.4: Av ve avcı popülasyon yoğunluklarının faz portresi	50
Şekil 5.5: Av popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği	51
Şekil 5.6: Avcı popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği	51

SEMBOLLER

Av popülasyon yoğunluğu	:	N, n
Avcı popülasyon yoğunluğu	:	P, p
Av popülasyonunun büyüme oranı	:	β
Avcı popülasyonunun büyüme oranı	:	α
Gecikme ve çatallanma parametresi	:	τ
Çatallanma değeri	:	τ_k
Denge noktası	:	E_0^*
Hopf çatallanmanın yönünü belirleyen parametre	:	μ_2
Çatallanmanın periyodik çözümünün kararlılığını belirleyen parametre	:	β_2
Çatallanmanın periyodik çözümünün periyodunu belirleyen parametre	:	T_2

1. GİRİŞ

1.1 AV-AVCI POPÜLASYON MODELİ

Bir organizmanın popülasyonunu etkileyen en önemli etkenlerden biri çevresindeki diğer organizmalardır (canlı çevre). Her bir popülasyon birçok popülasyonla (kimisiyle yoğun, kimisiyle zayıf bir şekilde) etkileşim içerisindedir. Popülasyon etkileşimleri komünite ekolojisini anlamada temel teşkil eder. Çünkü komünitenin kendisi bu etkileşimlerle ortaya çıkar. Nitekim komünite, kısaca, aynı alanda yaşayan ve birbirleriyle etkileşim içerisinde olan türlerin oluşturduğu grup olarak tanımlanır. Bir bölgedeki türler, o bölgede mevcut tür kompozisyonunun tamamından etkilenmeseler bile çoğunlukla bir ya da birkaç tür birbiriyle etkileşir. Bir türe ait popülasyonun ikinci bir türün varlığı ya da yokluğunda farklılıklar göstermesi bunun en büyük kanıtıdır. Türler arasındaki veya içindeki etkileşimlerin pozitif ya da negatif sonuçları olabilir.

Dinamik sistemlerde biyolojik modeller üzerine birçok bilim adamı ve araştırmacı tarafından yapılan çalışmalar, popülasyon modelleri ve popülasyonlar arası etkileşim üzerine yoğunlaşmıştır. Kararlılık teorisinin, özellikle bu sistemlerin kararlılık ve çatalanma analizi üzerine önemli uygulamalarından bazıları, aynı çevreyi paylaşan, iki yada daha fazla biyolojik popülasyon arasındaki etkileşimleri içerir. İki tür içeren av-avcı sistemleri incelenirse, bir tür diğer türe, yeme amaçlı saldırıp onu yaralıyor veya öldürüyorsa saldırana avcı (predator), yaralanan veya ölene de av (prey) adı verilir. Başka bir ifadeyle, avcı olarak tanımlanan bir tür, av olarak tanımlanan diğer türü yiyerek beslenir. Avlar ise ortamda bulunan başka yiyeceklerle beslenir. Bunun bilinen bir örneği ormanda yaşayan tilkiler ve tavşanların popülasyonudur. Tavşanlar ormandaki belirli bitkileri yerken, avcı olarak tabir edilen tilkiler, av olarak tabir edilen tavşanları yerler.

Av-avcı ilişkileri için geliştirilen matematiksel modeller, av veya avcı popülasyonlarında birbiri ardına dalgalanma eğiliminin doğal olarak bulunduğunu göstermektedir. Diğer etkenler av avcılarının bolluğunu kararlı hale getirebileceğinden, bu popülasyonlarda dalgalanma görülmeyebilir; fakat bunlar bir dalgalanma eğilimine sahiptir. Eğer kararlılığı sağlayan etkenler kaldırılırsa, dalgalanma eğilimi kendini gösterecektir.

Av ve avcı popülasyonlarının sahip olduğu dalgalanma eğilimini gösteren ilk model **Volterra Eşitliği**'dir. Bu model dört adet varsayımla yola çıkar.

- i. Avcı olmadığında, avın üssel olarak büyüdüğü varsayılır.
- ii. Av ve avcının popülasyon büyüklüğü ne kadar fazlaysa bunların karşılaşma şansları da o kadar fazladır.
- iii. Yeni avcılar doğum oranı yakalanan av oranıyla orantılıdır.
- iv. Avcı popülasyonundaki ölüm oranı yoğunluktan bağımsızdır.

1920'de av-avcı ilişkisinin klasik matematiksel modeli, Adriyatik Denizi'nde, köpek balığı ve yenen balık popülasyonunda gözlenen döngüsel değişiklikleri analiz etmek için İtalyan Matematikçi Vito Volterra (1840-1940), tarafından geliştirildi. Böyle bir model oluşturmak için $x(t)$ ile t anındaki avların popülasyon yoğunluğu, $y(t)$ ile t anındaki avcılar popülasyon yoğunluğu gösterilmek şartı ile aşağıdaki kabuller yapılır.

- i. Avcı popülasyonunun yokluğunda; av popülasyonu $\frac{dx}{dt} = ax(t)$, $a > 0$ ile doğal oranda büyüyecek,
- ii. Av popülasyonunun yokluğunda, avcı popülasyonu $\frac{dy}{dt} = -by(t)$, $b > 0$ ile doğal oranda azalacaktır.
- iii. Avcıların ve avların her ikisinin de mevcut olduğu durumda, büyüme ve azalma doğal oranlarındaki birleşimde iki türün bireyleri arasındaki karşılaşmaların sıklık oranına göre av popülasyonunda bir azalma ve avcı popülasyonunda bir büyüme vardır. Ayrıca, böyle bir karşılaşma sıklığının xy çarpımı ile orantılı olduğu kabul edilir. Çünkü herhangi bir popülasyonun iki katına çıkması karşılaşma sıklığını da iki katına çıkarır ve böylece her iki popülasyonun iki kat artması karşılaşma sıklığını dört katına çıkarır. Sonuç olarak, avcılar tarafından yok edilmesi;

x av popülasyonunda $-pxy$ azalmasının bir etkileşim oranı,

y avcı popülasyonunda qxy artmasının bir etkileşim oranı ile sonuçlanır.

x av popülasyonu için $-pxy$ etkileşim oranı ile ax doğal oranı ve y avcı popülasyonu için

qxy etkileşim oranı ile -by doğal oranı birleştirildiği zaman,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - pxy \\ \frac{dy}{dt} &= -by + qxy\end{aligned}$$

av-avcı sistemi elde edilir. Burada a, b, p, q pozitif sabitlerdir.

1.2 GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE GENEL BİR BAKIŞ

Gecikmeli diferansiyel denklem sistemleri, bilimin birçok alanında önemli bir konuma sahiptir. Belirli bir girdi veya uyarıya var olduğu sistemin cevabı genellikle hemen olmaz, biraz gecikmeli olur. Biyoloji, tıp, kimya, fizik, matematik, mühendislik ve ekonomi gibi hem doğal hem de insan eli ile oluşturulmuş birçok süreç, zaman gecikmesi içerdiğinden, gecikmeli diferansiyel denklem teorisi gündeme gelmiştir. Zaman gecikmesine doğadan verilebilecek en güzel örnek ormanlık alanların ağaçlandırılmasıdır. Bir ağaç kesildikten sonra yerine dikilen ağacın her anlamda olgunluğa erişmesi yirmi yıl gibi bir sürede gerçekleşmektedir. Hatta sekoya gibi bazı ağaç türlerinde bu süre daha fazla olabilmektedir. Bu süreci inceleyen herhangi bir matematiksel model, zaman gecikmesini içermek zorundadır.

Dinamik sistemlerde kendini tekrar eden süreçler söz konusudur. Böyle bir durumda sistem periyodik çözümlere sahiptir. Periyodik çözümlerin varlığını inceleyen teoriler arasında en önemlilerinden biri E. Hopf tarafından geliştirilmiştir. Hopf, parametreye bağlı bir diferansiyel denklemin hangi koşullar altında periyodik çözümlere sahip olduğunu incelemiş ve Hopf Çatallanma Teoremi olarak bilinen teoremi öne sürmüştür.

1.3 LİTERATÜRDE GECİKMELİ SİSTEMLER

Discrete Delay, τ gecikme parametresi seçilmek üzere sisteme τ kadar zaman önceki neslin şimdiki nesle olan etkisini eklemek demektir. Sistemde $x(t-\tau)$ şeklinde ifade edilir.

Dinamik sistemin yoğunluğunun geçmiş değerlere bağlı en basit ifadesi

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t-\tau)) \quad (1.1)$$

ile gösterilen gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemdir. Wright Denklemi veya Gecikmeli Lojistik Denklem olarak adlandırılan

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right] \quad (1.2)$$

Hutchinson Denklemi, bunun en bilinen örneklerindedir. Lord Cherwell, (1.2) denklemi ile asal sayıların dağılımı için olasılık metotlarının kullanımında karşılaşmıştır. Aynı zamanda bu denklem, tek türden oluşan bir topluluğun büyümesinin zaman gecikmesi içeren modeli olarak da değerlendirilebilir.

Popülasyon modellerinde, geçmişin etkilerini göstermek için, bu modellere gecikme terimi eklenmektedir. Bu tip modeller, gecikmeli popülasyon modelleri olarak adlandırılmaktadır. Son zamanlarda yapılan çalışmalarda, gecikmeli popülasyon modelleri arasında, gecikmeli av-avcı sistemleri büyük önem kazanmıştır. Özellikle, literatürde gecikmeli sistemlerin periyodik çözümlerinin Hopf çatallanma analizi geniş yer tutmaktadır.

1973'te May,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t-\tau) - a_{12}y(t)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t)] \end{aligned} \quad (1.3)$$

gecikmeli av-avcı sistemini ortaya koymuş ve incelemiştir. Burada $x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla av ve avcının t anındaki popülasyon yoğunluklarını ifade eder. $\tau \geq 0$ avın kendi türü içindeki gecikme parametresidir. $r_1 > 0$ av popülasyonundaki büyüme oranı, $r_2 > 0$ ise avcının ölüm oranını vermektedir. $a_{ij} (i, j = 1, 2)$ parametrelerinin hepsi pozitif sabitlerdir. (1.3) sistemi, avcı türü olmaksızın

$$\dot{x}(t) = x(t)[r_1 - a_{11}x(t-\tau)]$$

gecikmeli lojistik denklemindeki av popülasyonunun türünün zamana göre değişimini vermektedir.

Av-avcı sistemleri üzerine yapılan bir çok çalışmada, araştırmacılar çözümlerin sınırlılığını, sürekliliğini, denge noktalarının lokal ve global kararlılığını ve sabit olmayan periyodik çözümlerin varlığını incelemişlerdir.

Saha ve Chakrabarti 2009’da,

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= N(t)(1 - N(t - \tau)) - \frac{N(t)P(t)}{N(t) + \alpha P(t)} \\ \frac{dP(t)}{dt} &= \beta P(t) \left(\delta - \frac{P(t)}{N(t)} \right)\end{aligned}\quad (1.4)$$

(1.4) gecikmeli av-avcı modelinin Hopf çatallanma ve kararlılık analizi incelemiştir.

2008’de Çelik,

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1 N(t) - \varepsilon P(t)N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(r_2 - \theta \frac{P(t - \tau)}{N(t)} \right)\end{aligned}\quad (1.5)$$

sürekli ve gecikmeli diferansiyel denklem sistemini incelemiştir. Burada $N(t)$ ve $P(t)$ sırasıyla av ve avcının t anındaki popülasyon yoğunluklarını ifade eder. $r_1 > 0$ av popülasyonunun, $r_2 > 0$ avcı popülasyonunun büyüme oranı, τ ise gecikme parametresidir.

2011’de Çelik, aşağıdaki dağılımlı gecikmeli av-avcı sistemini incelemiştir.

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1 N(t) - \varepsilon P(t)N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left[r_2 - \frac{\theta}{N(t - \tau)} \int_{-\infty}^t F(t - \tau) P(\tau) d(\tau) \right].\end{aligned}\quad (1.6)$$

Burada $F(s)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında negatif olmayan sınırlı bir fonksiyon olarak alınan gecikme çekirdeğini (kernel) ifade eder. Çelik bu çalışmasında, (1.6) sisteminin Hopf çatallanma ve kararlılık analizini yapmış, çatallanan periyodik çözümün yönü, kararlılığı ve periyodunu da elde etmiş, ayrıca teorik sonuçları sayısal simülasyonlar ile de desteklemiştir.

1.4 TEZ ÇALIŞMASININ AMACI

Saha ve Chakrabarti’nin 2009’da çalıştığı gecikmeli av-avcı popülasyon modelinde, sistemin tamamında av popülasyonuna τ gecikme parametresi eklenirse, aşağıdaki

gecikmeli av- avcı sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= N(t-\tau)(1-N(t-\tau)) - \frac{N(t-\tau)P(t)}{N(t-\tau) + \alpha P(t)} \\ \frac{dP(t)}{dt} &= \beta P(t)\left(\delta - \frac{P(t)}{N(t-\tau)}\right)\end{aligned}\quad (1^*)$$

(1*) sisteminde;

$N(t)$: Avın t anındaki popülasyon yoğunluğu,

$P(t)$: Avcının t anındaki popülasyon yoğunluğudur.

Avcı popülasyonu, sadece av sayısı ile sınırlandırılmamıştır. Bu $\frac{P}{N}$ terimi içeren modellere, avcı sayısının av sayısına oranı şeklindeki ifadeye "Ratio Dependent" modeller denir. Bu kapasite, biyolojik çevre üzerinde maksimum fert sayısı ile sınırlıdır. $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ve $\delta > 0$ sabitlerdir.

$\tau \geq 0$ av-avcı yoğunluğundaki gecikme parametresidir.

Bu çalışmada, gecikmeli av-avcı sistemi olan (1*) sistemi incelenmiştir. Bu çalışmanın amacı, (1*) sisteminin dinamiğini ve τ gecikme parametresi değişirken bu değişimin sisteme olan etkilerini incelemektir. Sistem analiz edilirken, ilk önce sistemin pozitif denge noktası bulunarak, bu denge noktası etrafında sistem lineerleştirilmiştir. Elde edilen lineer sistemin τ gecikme parametresini de içeren genel kararlılık kriterleri bulunmuştur. Daha sonra, τ gecikme parametresi çatallanma parametresi olarak seçilerek, pozitif denge noktasının kararlılığını kaybettiği ve Hopf çatallanma meydana geldiği gözlenmiştir. Ayrıca Hassard tarafından analiz edilen Center Manifold Teoreminden yararlanılarak, (1*) sisteminin Hopf çatallanma özelliklerini tanımlayan çatallanma sabitleri elde edilmiştir. Hopf çatallanmanın kararlılığı, yönü, türü ve belirli koşullar altında çatallanan periyodik çözümlerin periyodu tespit edilmiştir. Son olarak, bu teorik sonuçlar nümerik simülasyonlar ile desteklenmiştir.

Yapılan bu çalışmada sırasıyla;

- i. Birinci bölümde, ele alınan problem hakkında genel bilgiler verilmiştir. Bu kapsamda yapılmış olan çalışmalardan bahsedilmiş ve kısaca gecikmeli diferansiyel denklemlere değinilmiştir.
- ii. İkinci bölümde, tezin temel teorisi olan Hopf çatallanma teorisi detaylıca

incelenmiştir. İlk olarak, çatallanmanın genel tanımı verilmiştir, daha sonra fark denklemleri ve adi diferansiyel denklemler için çatallanma tiplerinden, özel olarak da Hopf çatallanmadan bahsedilmiş ve Center Monifold Teoremi ifade edilmiştir.

- iii. Üçüncü bölümde, sistemin denge noktasının kararlılığı ve Hopf çatallanması incelenmiştir.
- iv. Dördüncü bölümde, Center Monifold Teoremi kullanılarak bu modelde Hopf çatallanmanın görülmesi için gerekli koşullar verilmiş, çatallanmanın kararlılığı, türü, yönü ve periyodu belirlenmiştir.
- v. Son bölümde ise, yukarıdaki teorik sonuçlar nümerik simülasyonlar ile desteklenmiştir.

2. ÇATALLANMA VE HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ

2.1 ÇATALLANMA TEORİSİ

Çatallanma, bir sistemde sistemin pozitif denge noktası etrafında seçilen çatallanma parametresindeki küçük değişikliğin, sistemin davranışındaki topolojik değişikliğe neden olmasıyla meydana gelir. Çatallanma analizi sürekli ve kesikli denklemler ile modellenen sistemler için incelenir. Çatallanma teorisi, diferansiyel denklemlerin çözümler ailesinin niteliksel ya da topolojik yapısında meydana gelen değişimlerin incelenmesidir. Dinamik sistemler incelendiğinde, çatallanmanın parametre değerindeki değişim sonucu ortaya çıktığı gözlemlenmiştir.

2.1.1 Çatallanma Türleri

Lokal ve Global olmak üzere iki tür çatallanma vardır.

Lokal Çatallanma: Sistemdeki parametrelerin değişimiyle denge noktasının, periyodik yörüngelerin veya invaryant kümelerin özelliklerindeki değişimler analiz edilir.

Global Çatallanma: Sistemin invaryant kümelerinin birbirleriyle veya sistemin denge noktasıyla çakışması durumunda ortaya çıkar. Bu çatallanma türü, sistemin denge noktasının kararlılık analiziyle tamamen tespit edilemez.

2.1.2 Lokal Çatallanma ve Türleri

Parametredeki değişimin, denge noktasının kararlılığını değiştirmesiyle lokal çatallanma ortaya çıkar. Bu kısımda $x_{t+1} = f(x_t)$ birinci mertebeden fark denklemlerinin τ parametresine olan bağıllığını

$$x_{t+1} = f(x_t, \tau) \quad (2.1)$$

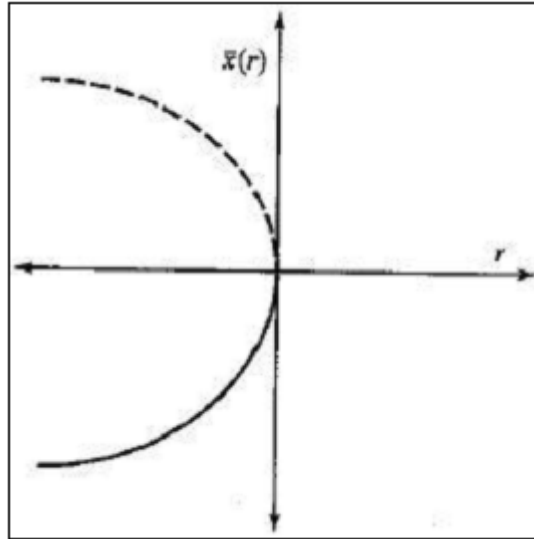
ile göstereceğiz ve bu fark denkleminin dinamiği göz önüne alınacaktır. Denge noktalarının τ bağıllığını ise $\bar{x}(\tau)$ ile ifade edilecektir. Fark denklemlerinin davranışı τ değiştikçe değişmektedir. Davranışın değiştiği bu τ değerlerine "çatallanma değeri" ve bu $(\tau, \bar{x}(\tau))$ noktaları ise "çatallanma noktası" olarak adlandırılır.

(2.1) ile verilen fark denklemi için oluşabilecek çatallanma tipleri $f'(\bar{x}(\bar{r})) = \pm 1$ denklemi ile belirlenmektedir. Bu denklemler için dört farklı tipte çatallanma söz konusudur. Özetle lokal çatallanma türleri,

- a) Fold (saddle node, tangant) çatallanma,
- b) Tırmık (pitchfork) çatallanma,
- c) Transkritik (transcritical) çatallanma,
- d) Flip (period-doubling) çatallanma,
- e) Hopf çatallanmadır.

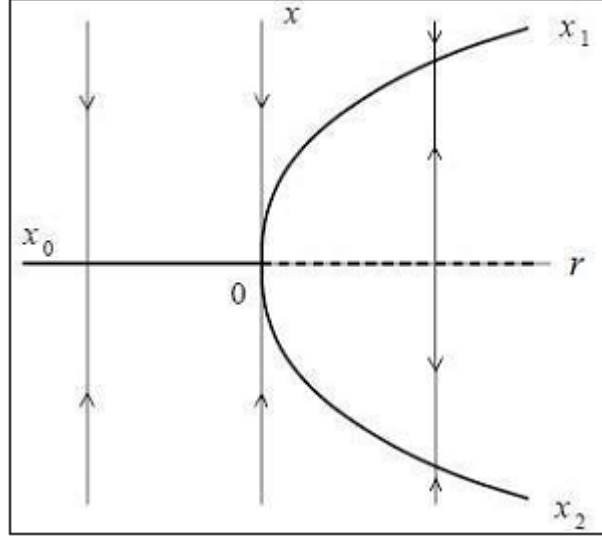
a) Fold Çatallanma: Kritik çatallanma değeri geçilirken biri kararlı diğeri kararsız olmak üzere iki denge noktası kaybolur.

Şekil 2.1: Fold çatallanma



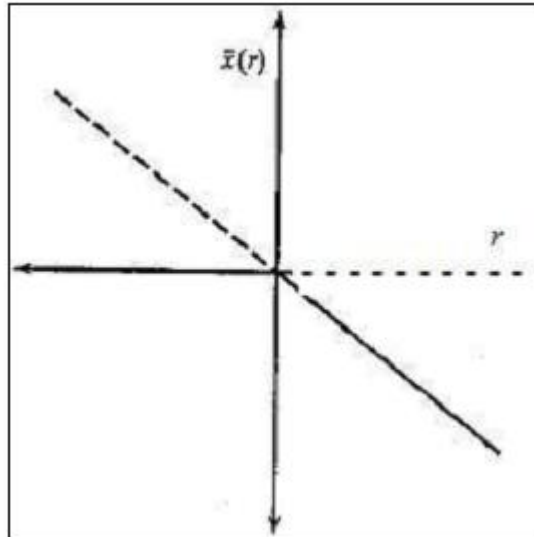
b) Tırmık Çatallanma: Kritik çatallanma değeri geçilirken, bir kararsız denge noktası tarafından ayrılan iki kararlı denge noktası olmak üzere üç denge noktası meydana gelir. Bu tip çatallanmaya "süperkritik tırmık çatallanma" denir. Bunun tam tersine, yani bir kararlı denge noktası tarafından ayrılan iki kararsız denge noktası meydana geliyor ise bu tip çatallanmaya da "subkritik tırmık çatallanma" denir.

Şekil 2.2: Tırmık çatallanma



c) Transkritik Çatallanma: Bu çatallanma türünde bir kararlı bir kararsız iki denge noktası, çatallanma parametresi geçilirken kararlılık yapılarını değiştirirler. Yani, kararlı olan kararsız, kararsız olan kararlı hale gelir.

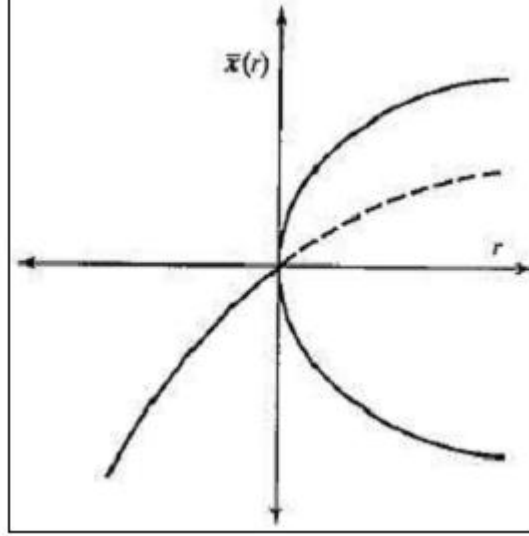
Şekil 2.3: Transkritik çatallanma



d) Flip Çatallanma: Kritik çatallanma değeri geçilirken, kararlı denge noktası kararsız olur ve kararlı 2-devir ortaya çıkar. Bu tipine "süperkritik flip çatallanma" denir. Tam

tersine ise yani ortaya çıkan 2-devir kararsız ise de "subkritik flip çatallanma" adını alır.

Şekil 2.4: Flip çatallanma



e) Hopf Çatallanma: İki veya daha fazla birinci mertebeden diferansiyel denklem içeren sistemlerde meydana gelen çatallanma türüne "Hopf Çatallanma" denir. Aynı zamanda, Fransız matematikçi Jules Henri Poincare (1854-1912), Rus matematikçi Alexander A. Andrnov (1901-1952) ve Alman matematikçi Heinz Hopf (1894-1971)'un bu teoriyi geliştirmek için yaptıkları katkılardan dolayı Poincare-Andronov-Hopf çatallanma olarak da anılır.

2.2 HOPF ÇATALLANMA

2.2.1 Hopf Çatallanma Teoremi

f ve g , τ çatallanma parametresine bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, \tau) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, \tau)\end{aligned}\tag{2.3}$$

diferansiyel denklem sistemi ele alındığında kabul edilsin ki $(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$ (2.3) sisteminin denge noktası ve $\alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$, bu denge noktasında hesaplanan Jakobian matrisin özdeğerleri olsun. Ayrıca $\alpha(\tau^*) = 0$ olmak üzere kararlılık yapısındaki

değişim $\tau = \tau^*$ da meydana gelsin.

(2.3) diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerin varlığını sağlayabilmesi için ilk önce sıfır sanal özdeğere sahip olacak şekilde denge noktası orijin ve τ parametresi $\tau^* = 0$ olacak şekilde değişken değiştirmeleri yapılarak

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}(\tau)x + a_{12}(\tau)y + f_1(x, y, \tau) \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(\tau)x + a_{22}(\tau)y + g_1(x, y, \tau)\end{aligned}\tag{2.4}$$

sistemine dönüştürülür. Hopf Çatallanma Teoremi olarak bilinen bu teorem, (2.3) diferansiyel denklem sistemi için aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.1: (Hopf Çatallanma Teoremi):

(2.4) sistemindeki f_1 ve g_1 fonksiyonları x ve y değişkenlerine göre üçüncü mertebeden sürekli türevlere sahip olmak üzere yeteri kadar küçük $|\tau|$ 'lar için (2.4) denkleminin bir denge noktası ve

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ a_{21}(\tau) & a_{22}(\tau) \end{pmatrix}$$

matrisinin sistemin Jakobian matrisi olduğu kabul edilsin. Ayrıca $\alpha(0) = 0, w(0) \neq 0$ ve $\frac{d\alpha}{d\tau}|_{\tau=0} \neq 0$ olmak üzere $\alpha(\tau) \pm iw(\tau)$, $J(\tau)$ Jakobian matrisinin özdeğerleri olsun bu takdirde \mathbb{R}^2 uzayında orijini kapsayan herhangi U açık kümesinde $\tau_0 > 0$ için $|\tau_k| < \tau_0$ değeri vardır öyle ki (2.4) diferansiyel denklemi $\tau = \tau_k$ için U'da periyodik çözümlere sahiptir (periyot yaklaşık olarak $T \approx \frac{2\pi}{w(0)}$ 'dir.).

2.2.2 Hopf Çatallanma Türleri

Hopf Çatallanma Teoremi $\tau = \tau_k$ için periyodik çözümlerin varlığı adına yeterli olan koşulları vermektedir. τ çatallanma parametresi, τ_k ise çatallanma değeridir. Sistemin parametresinin değeri değişirken sistemin dinamiği kararlı spiralden merkeze, merkezden de kararsız spirale dönüşür. Buna göre iki tür Hopf çatallanma görülür.

1) Süperkritik Hopf Çatallanma: Sistemin kararlı denge noktası asimptotik olarak kararlı bir limit döngüsüne dönüşürse oluşan çatallanmaya denir.

2) **Subkritik Hopf Çatallanma:** Sistemin kararlı denge noktası kararsız bir limit döngüsüne dönüşürse oluşan çatallanmaya denir.

2.2.3 Hopf Çatallanma Teorisi

f düzgün bir fonksiyon, τ çatallanma parametresi ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\dot{x} = f(x, \tau) \quad (2.5)$$

otonom adi diferansiyel denklem sistemi ele alınsın. Bu bölümde yukarıdaki gecikmeli sistem için Hopf çatallanmanın hangi koşullar altında ortaya çıktığı, çatallanmanın yönü, periyodik çözümlerinin periyodu ve bu çözümlerin kararlılık yapısı incelenecektir.

1) Kapalı fonksiyon teoreminden $\lambda = 0$ Jakobian matrisin özdeğeri olmadığından, yeteri kadar küçük $|\tau|$ için orijinin bir komşuluğunda, sistemin $x_0(\tau)$ denge noktası vardır. Koordinat değişikliği yapılmasıyla, denge noktası orijine taşınır. O halde genellikle birşey kaybetmeden kabul edilebilir ki, yeterince küçük $|\tau|$ için $x=0$, sistemin denge noktasıdır. Bu denge noktasındaki Jakobian matrisi

$$A(\tau) = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x_0(\tau), \tau); i, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

ile ifade edilir. Bu matrise karşılık gelen özdeğerleri hesaplanırsa, bunlar; $\text{Re } \lambda_1 \geq \text{Re } \lambda_2 \geq \dots \geq \text{Re } \lambda_n$ olacak şekilde sıralansın.

2) İki boyutlu sistem için bu Jakobian matrisi

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} a_0(\tau) & b_0(\tau) \\ a_1(\tau) & b_1(\tau) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $\alpha(0) = 0$ ve $w(0) \neq 0$ olmak üzere $A(\tau)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + iw(\tau)$ şeklindedir. Bu özdeğerler $\frac{d\alpha}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \neq 0$ olmak üzere sanal eksenlerden geçen $\lambda_1(\tau) = \lambda(\tau)$, $\lambda_2(\tau) = \overline{\lambda(\tau)}$ 'dır.

Bu takdirde (1) ve (2) koşullar altında $x_0(\tau)$ denge noktasında Hopf çatallanmanın görüldüğü bir sistemin taşıdığı özellikler elde edilmiş olur. Bundan sonra verilen adımlar μ_2 , β_2 ve T_2 değerlerinin hesaplanmasında izlenilmesi gereken yolu

vermektedir.

3) $\mu \in \mathbb{R}$ için $\tau = \tau_k + \mu$ ve

$$\begin{aligned} x_1(t) &= N(t\tau) - N_0 \\ x_2(t) &= P(t\tau) - P_0 \end{aligned}$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa sistem $C([-1,0], \mathbb{R}^2)$ 'de fonksiyonel denklem şekline dönüşür $L_\mu : C \rightarrow \mathbb{R}^2, f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C$ için

$$L_\mu \phi = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} a_0 \phi_1 + b_0 \phi_2 \\ a_1 \phi_1 + b_1 \phi_2 \end{bmatrix}$$

ve

$$f(\mu, \phi) = \begin{bmatrix} a_0 \phi_1 \phi_1 + b_0 \phi_1 \phi_2 \\ a_1 \phi_2 \phi_1 + b_1 \phi_2 \phi_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

4) Riesz Gösterim Teoremine göre $\theta \in [-1,0]$ için elemanları sınırlı değişimli 2×2 tipinde bir $\eta(\theta, \mu)$ matris fonksiyonu vardır öyle ki

$$\phi \in C \text{ için } L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) \phi(\theta)$$

şeklinde yazılır. $\eta(\theta, \mu)$ fonksiyonu, $\delta =$ Dirac Delta Fonksiyonu olmak üzere,

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \delta(\theta) - (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \delta(\theta+1)$$

şeklinde seçilirse $\phi \in C^1([-1,0], \mathbb{R}^2)$ için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} -\frac{d\phi(0)}{d\theta} & , \theta \in [-1,0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\mu, s) \phi(s) & , \theta = 0 \end{cases}$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0 & , \theta \in [-1,0) \\ f(\mu, \phi) & , \theta = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece sistem

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t$$

formunda yazılır. Burada $\theta \in [-1,0)$ için $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ 'dir.

$\psi \in C^1([-1,0], (\mathbb{R}^2)^*)$ için

$$A^* \psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0,1] \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t,0)\psi(-t), & s = 0 \end{cases}$$

ve $\eta(\theta) = \eta(\theta,0)$ iken bilineer iç çarpım

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi$$

olarak tanımlanır. $A(0)$ ve A^* adjoint operatörleridir. $A(0)$ 'ın $i\omega\tau_k$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörü $p(s)$ 'dir. $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ ve $\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$ olmak üzere

$$A(0)q(\theta) = i\omega\tau_k q(\theta)$$

ve

$$A^* p(s) = -i\omega\tau_k p(s)$$

yazılır.

5) Center Manifold Teoremi kullanılarak n-boyutlu sistem 2 boyutlu sisteme indirgenir. $\mu = 0$ iken C_0 Center Manifold'unu tanımlamak için, $x_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)})$ sistemin çözümü olmak üzere, z ve \bar{z} , C_0 Center Manifold'un q ve p yönündeki lokal koordinatlar belirlenir. C_0 Center Manifold'u üzerinde

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = x_t - 2\text{Re } z(t)q(\theta)$$

$$W(t, \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

dır. $x_t \in C_0$ çözümü için, $\mu = 0$ iken $\dot{x}_t = A(0)x_t + R(0)x_t$ 'dir. Bu indirgeme işlemi sırasında verilen sistemin Poincare Normal Formunun

$$\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z})$$

şeklinde olduğu görülür. Bu durumda

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots$$

iken

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})$$

elde edilir ve Hopf teoremini uygulayabilmek için $g(z, \bar{z})$ eşitliklerinin her ikisinin de sağ taraflarının karşılaştırılmasıyla g_{20} , g_{11} , g_{02} ve g_{21} katsayıları bulunur.

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{x}_t - \dot{z}q + \dot{\bar{z}}\bar{q} \\ &= A(0)x_t + R(0)x_t - 2 \operatorname{Re} \left\{ [iw \tau_k z(t) + \bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))] q(\theta) \right\} \\ &= A(0)[w(t, \theta) + 2 \operatorname{Re}\{z(t)q(\theta)\}] + R(0)x_t - 2 \operatorname{Re}\{iw \tau_k z(t)q(\theta)\} \\ &\quad - 2 \operatorname{Re}\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\ &= A(0)w(t, \theta) + 2 \operatorname{Re}\{z(t)A(0)q(\theta)\} + R(0)x_t \\ &\quad - 2 \operatorname{Re}\{iw \tau_k z(t)q(\theta) - 2 \operatorname{Re}\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\}\} \\ &= A(0)w(t, \theta) + R(0)x_t - 2 \operatorname{Re}\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \end{aligned}$$

$$\dot{W} = \begin{cases} AW - 2 \operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0) \\ AW - 2 \operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\} + f_0 & \theta = 0, \end{cases}$$

$$\dot{W} = A(0)W(t, \theta) + H(z(t), \bar{z}(t), \theta)$$

dır. Buradan

$$A(0)w(t, \theta) - \dot{W} = -H(z, \bar{z}, \theta)$$

yazılır.

$$\begin{aligned} \dot{W} &= W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} \\ &= W_{20}(\theta) z\dot{z} + W_{11}(\theta) (\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) + \dots \\ &= W_{20}(\theta) z(iw \tau_k z + g(z, \bar{z})) \\ &\quad + w_{11}(\theta) \{ [iw \tau_k z + g(z, \bar{z})] \bar{z} + z[-iw \tau_k \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z})] + \dots \} \\ &= 2iw \tau_k w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

ve

$$A(0)w(t, \theta) = A(0)w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + A(0)w_{11}(\theta) z\bar{z} + \dots$$

olduğundan

$$A(0)W(t, \theta) - \dot{W} = [A(0) - 2iw \tau_k] W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + A(0)w_{11}z\bar{z} + \dots$$

dır. Buradan

$$[A(0) - 2iw \tau_k] w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + A(0)w_{11}(\theta) z\bar{z} + \dots = -H_{20}(0) \frac{z^2}{2} - H_{11}(\theta) z\bar{z} - H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} \dots$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının katsayılar karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned} [A(0) - 2i\omega\tau_k]w_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta) \\ A(0)w_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta) \end{aligned}$$

ve $\theta \in [-1, 0]$ için

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}, \theta) &= -2\operatorname{Re}\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\ &= \bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta) - p(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))\bar{q}(\theta) \\ &= -g(z, \bar{z})q(\theta) - \bar{g}(z, \bar{z})\bar{q}(\theta) \\ &= -(g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta))\frac{z^2}{2} - (g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta))z\bar{z} + \dots \end{aligned}$$

olduğundan

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)$$

$$H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)$$

ve $A(0)$ 'in tanımından

$$\begin{aligned} \dot{W}_{20}(\theta) &= 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta) - g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta) \\ \dot{W}_{11}(\theta) &= g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta) \end{aligned}$$

bulunur. $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ ve $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ sabit vektörler olmak üzere

$$\begin{aligned} W_{20}(\theta) &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\ W_{11}(\theta) &= -\frac{ig_{11}}{\tau_k\omega} q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k\omega} \bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_2 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. E_1, E_2 'yi bulmak için $A(0)$ 'in tanımı ve $q(0)$ 'in $A(0)$ 'in özvektörü olduğunun bilinmesinden $d\eta = \eta(\theta, 0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{20}(\theta) &= 2i\omega\tau_k W_{20}(0) - H_{20}(0) \\ &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} \int_{-1}^0 d\eta(\theta)q(\theta) \\ &\quad + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \int_{-1}^0 d\eta(\theta)\bar{q}(\theta) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\ &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} \dot{q}(0) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \dot{\bar{q}}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\ &= -g_{20}q(0) + \frac{\bar{g}_{02}}{3} \bar{q}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{11}(\theta) = g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2$$

elde edilir.

$$-g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + \left(2i\omega\tau_k - \int_{-1}^0 d\eta(\theta)e^{2i\omega\tau_k\theta}\right)E_1 = H_{20}(\theta)$$

ve

$$-g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) - \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2 = H_{11}(\theta)$$

yazılarak E_1 ve E_2 bulunur. Buradan $w_{11}(\theta)$ ve $w_{20}(\theta)$ değerlerinin bulunmasıyla g_{ij} katsayıları belirlenir.

6) Böylece Center Manifold'da τ_k kritik değerlerinde oluşan Hopf çatallanmanın yönünü, çatallanmanın periyodik çözümün kararlılığını ve çatallanan çözümün periyodunu belirleyen μ_2 , β_2 , T_2 katsayıları

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega\tau_k} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2}$$

$$\mu_2 = -\frac{\text{Re}\{c_1(0)\}}{\text{Re}\{\lambda'(\tau_k)\}}$$

$$\beta_2 = 2\text{Re}\{c_1(0)\}$$

$$T_2 = -\frac{\text{Im}\{c_1(0)\} + \mu_2 \text{Im}\{\lambda'(\tau_k)\}}{\omega\tau_k}$$

denklemleri yardımı ile bulunur.

Yukarda verilen analizden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1: (z, \bar{z}, τ) 'nin düzgün bir fonksiyonu $g = O(|z|^2)$ olmak üzere, z kompleks değişkeni kullanılarak, yeterince küçük $|\tau|$ için, (2.2) sistemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\dot{z} = \lambda(\tau)z + g(z, \bar{z}, \tau) \quad (2.6)$$

İspat: $A(\tau)$ 'nin $\lambda(\tau)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $q(\alpha) \in C^2$ olsun. O halde,

$$A(\tau)q(\tau) = \lambda(\tau)q(\tau)$$

dır ve $A^T(\tau)$ 'nin $\bar{\lambda}(\tau)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $p(\tau) \in C^2$ olsun. O halde,

$$A^T(\tau)p(\tau) = \bar{\lambda}(\tau)p(\tau)$$

dır. $\langle \dots \rangle$, C^2 'de standart skaler çarpma ve

$$\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$$

olmak üzere p 'nin q 'ya göre normalize edilmesi

$$\langle p(\tau), q(\tau) \rangle = 1$$

şeklindedir. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^2$ vektörü,

$$x = zq(\tau) + \bar{z}\bar{q}(\tau) \quad (2.7)$$

şeklinde tek olarak tanımlanabilir. z 'yi tanımlayan açık formül

$$z = \langle p(\tau), x \rangle$$

şeklindedir. Bu formülü gerçeklemek için, (2.4) denkleminin her iki yan p ile skaler çarpılır ve $\langle p(\tau), \bar{q}(\tau) \rangle = 0$ olduğunun gösterilmesi gereklidir.

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle$$

ve buradan

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0$$

dır. Yeterince küçük her $|\tau|$ için $w(\tau) > 0$ olduğundan $\lambda \neq \bar{\lambda}$ 'dir. Böylece $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ olduğu görülür. Buradan z kompleks değişkeni aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\dot{z} = \lambda(\tau)z + \langle p(\tau), F(zq(\tau) + \bar{z}\bar{q}(\tau), \tau) \rangle$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 2.2: $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$, $\mu(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$ ve $g_{ij} = g_{ij} = g_{ij}(\tau)$ olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z \bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \mathcal{O}(|z|^3) \quad (2.8)$$

denklemini, yeterince küçük her $|\tau|$ için

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle, kuadratik terim içermeyen

$$\dot{w} = \lambda w + \mathcal{O}(|w|^3)$$

denklemine dönüşür.

İspat:

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20} z \dot{z} - h_{11} (\dot{z} \bar{z} + z \dot{\bar{z}}) - h_{02} \dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z \bar{z} \\ &\quad + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{z}^2 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{2} (g_{20} - \lambda h_{20}) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w \bar{w} \\ &\quad + (g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}) \bar{w}^2 + O(|w|^3) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$$

yazılmasıyla (2.5) denklemindeki tüm kuadratik terimler yok olur. $w_0 > 0$, $\lambda(0) = iw_0$ iken, yeterince küçük her $|\tau|$ için paydalar sıfırdan farklı olduğundan yukarıdaki eşitlikler doğrudur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 2.3: $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm iw(\tau)$, $\alpha(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$ ve $g_{ij} = g_{ij}(\tau)$ olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + g_{30} \frac{z^3}{6} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + g_{12} \frac{z \bar{z}^2}{2} + g_{03} \frac{\bar{z}^3}{6} + O(|z|^4)$$

denklemini, yeterince küçük her $|\tau|$ için

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle, $c_1 = c_1(\tau)$ olmak üzere yalnızca bir kübik terim içeren

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4)$$

denklemine dönüşür.

İspat:

$$w = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^3)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2} z^2 \dot{z} - \frac{h_{21}}{2} (2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) \\ &\quad - \frac{h_{12}}{2} (\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2} \right) z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda} h_{21}}{2} \right) z^2 \bar{z} \\ &\quad + \left(\frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z \bar{z}^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda} h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2\lambda h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{w}^3 + O(|w|^4) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda}$$

yazılmasıyla $w^2 \bar{w}$ terimi dışındaki tüm kübik terimler yok olur. Yeterince küçük her $|z|$ için paydalar sıfırdan farklı olduğundan yukarıdaki eşitlikler doğrudur. $w^2 \bar{w}$ teriminin yok edilmesi için

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}$$

yazılır. Fakat $\alpha = 0$ iken yukarıdaki denklemin paydası $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = iw_0 - iw_0 = 0$ 'dır.

α ya bağlı bir dönüşüm elde etmek için $h_{21} = 0$ yazılmasıyla

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}$$

bulunur.

Uyarı: Kalan $w^2 \bar{w}$ kübik terimi "rezonans terim" olarak adlandırılır. Bu terimin katsayısı, orijinal denklemdeki $z^2 \bar{z}$ kübik teriminin katsayısıyla aynıdır.

Yardımcı Teorem 2.4: (Hopf Çatallanma için Poincare Normal Form)

$\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\omega(\tau)$, $\alpha(0) = 0, \omega(0) = \omega_0 > 0$ ve $g_{ij} = \bar{g}_{ij} = g_{ij}(\tau)$ olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^{k-l} z + O(|z|^4) \quad (2.9)$$

denklemini, yeterince küçük her $|\tau|$ için

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle, $c_1 = c_1(\tau)$ olmak üzere yalnızca bir kübik terim içeren

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4) \quad (2.10)$$

denklemine dönüşür.

İspat: Yardımcı Teorem 2.2 de,

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$$

iken

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, tüm kuadratik terimleri yok etmekle birlikte kübik terimlerin katsayılarını da değiştirir. $w^2 \bar{w}$ 'nin katsayısı $\frac{1}{2} g_{21}$ yerine $\frac{1}{2} \bar{g}_{12}$ olur ve Yardımcı Teorem 2.3 deki dönüşümle de, katsayısı $\frac{1}{2} \bar{g}_{12}$ olan rezonans terim dışındaki tüm kübik terimler yok olur.

Böylece, (2.8) kuadratik dönüşümüyle, bulunması gereken c_1 katsayısı, $w^2 \bar{w}$ teriminin yeni katsayısı $\frac{1}{2} \bar{g}_{12}$ 'dir.

\dot{z}, w ve \bar{w} cinsinden iki şekilde ifade edilebilir. (2.8) denklemi, (2.6) orijinal denkleminde yerine yazılır veya (2.6)'nın (2.7) ye dönüştürülebildiği bilindiğinden, \dot{z} , (2.8)'in türevlenmesi ile hesaplanır.

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20} w \dot{w} + h_{11} (w \dot{\bar{w}} + \bar{w} \dot{w}) + h_{02} \dot{\bar{w}}$$

ve (2.7) kullanılarak \dot{w} ve kompleks eşleniği yerlerine yazılır. Yukarda h_{20}, h_{11} ve h_{02} 'leri içeren ifadede kuadratik terimlerin katsayılarının karşılaştırılmasıyla ve $w|w|^2$ teriminin katsayılarının eşitlenmesiyle

$$c_1 = \frac{g_{11}g_{20}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}$$

elde edilir. $\tau = 0$ çatallanma parametresi değerinde yukarıdaki denklem

$$c_1(0) = \frac{i}{2w_0} \left(g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}$$

denkleme indirgenir.

Yardımcı Teorem 2.5: $\alpha(0) = 0$, $w(0) = w_0 > 0$ olmak üzere

$$\frac{dw}{dt} = (\alpha(\tau) + iw(\tau))w + c_1(\tau)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

denkleme ele alınsın. Kabul edelim ki, $\alpha'(0) \neq 0$ ve $\text{Re } c_1(0) \neq 0$ olsun. Denklem, parametreye bağlı lineer koordinat dönüşümü, yeni zaman ölçeği ve lineer olmayan yeni zaman parametrizasyonu ile

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4)$$

formuna dönüşür. $s = \text{sign}(\text{Re } c_1(0)) = \pm 1$, u yeni kompleks koordinat, θ ve β sırasıyla yeni zaman ve yeni zaman parametresini gösterir.

İspat:

1.Adım: (Lineer zaman ölçeği) Yeni zaman parametresi $\gamma = w(\tau)t$ şeklinde tanımlanır.

Yeterince küçük her $|\tau|$ için, $w(\tau) > 0$ olduğundan zaman korunur. Buradan,

$$\beta = \beta(\tau) = \frac{\alpha(\tau)}{w(\tau)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\tau(\beta))}{w(\tau(\beta))}$$

olmak üzere

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

elde edilir.

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) = \frac{\alpha'(0)}{w(0)} \neq 0$$

olduğundan yeni β parametresi

$$\beta = \beta(\tau) = \frac{\mu(\tau)}{w(\tau)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\tau(\beta))}{w(\tau(\beta))}$$

olarak alınabilir ve ters fonksiyon teoremi, τ ya bağlı β fonksiyonunun lokal

varlığın garanti eder. Ayrıca d_1 kompleks bir fonksiyondur.

2.Adım: (Lineer olmayan zaman parametresi) $e_1(\beta) = \text{Im}d_1(\beta)$ için

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\gamma$$

olmak üzere, yeni zaman parametresi $\theta = \theta(\gamma, \beta)$ şeklinde tanımlanarak orbitler boyunca zaman parametresi değişir. Zamandaki değişim orijinin küçük bir komşuluğunda özdeşlik dönüşümüdür. Zamanın yeni parametresinin kullanılmasıyla, $l_1(\beta) = \text{Re}d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$ gerçel olmak üzere

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

ve

$$l_1(0) = \frac{\text{Re}c_1(0)}{w(0)} \quad (2.12)$$

elde edilir.

3.Adım: (Lineer koordinat ölçeği) u yeni kompleks değişken olmak üzere,

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}}$$

dır. $\text{Re}c_1(0) \neq 0$ olduğundan $l_1(0) \neq 0$ 'dır. Denklem, $s = \text{sign}(l_1(0)) = \text{sign}(\text{Re}c_1(0))$ olmak üzere

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4)$$

formunda yazılır.

Tanım: $l_1(\beta)$ fonksiyonu “birinci Lyapunov katsayısı” olarak adlandırılır.

(2.9) denkleminde, $\beta = 0$ 'daki birinci Lyapunov katsayısı

$$l_1(0) = \frac{1}{2w_0^2} \text{Re}(ig_{11}g_{20} + w_0g_{21}) \quad (2.13)$$

şeklinde hesaplanır.

Böylece, çatallanma noktasındaki $l_1(0)$ 'ın hesaplanması için sağ taraftaki ikinci ve üçüncü mertebeden türevlerin bilinmesi gerekir. $l_1(0)$ 'ın değeri p ve q özdeğerlerinin

normalizasyonuna bağlıdır ve bu değerin işareti, $\langle p, q \rangle = 1$ normalizasyonunu sağlayan p, q değerlerine invaryanttır.

Aşağıdaki teoremlerle, elde edilen sonuçlar özetlenir.

Teorem 2.2:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

iki boyutlu sistemi, yeterince küçük her $|\tau|$ için $x = 0$ denge noktasına ve $\alpha(0) = 0$, $w(0) = w_0 > 0$ olmak üzere

$$\lambda_{1,2}(\tau) = \alpha(\tau) \pm iw(\tau)$$

özdeğerlerine sahiptir.

Aşağıdaki koşullar sağlandığında;

$$(B.1): \alpha'(0) \neq 0$$

(B.2): l_1 birinci Lyapunov katsayısı olmak üzere, $l_1(0) \neq 0$ koordinat, parametre değişimiyle ve zaman dönüşümüyle, (2.11) sistemi

$$\frac{d}{d\gamma} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$$

olur.

Teorem 2.3 : (Hopf Çatallanma için topolojik normal form)

$$\dot{x} = f(x, \tau)$$

bir parametrelili, iki boyutlu sistemi, $\tau = 0$ da $x = 0$ denge noktasına ve

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm iw_0, w_0 > 0$$

Özdeğerlerine sahiptir ve aşağıdaki normal formlardan bir tanesine orijin civarında lokal topolojik eşdeğerdir.

$$\frac{d}{d\gamma} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$$

Teorem2.1, Teorem2.2 ve (2.10) denklemi, iki boyutlu sistemlerde Hopf çatallanma analizi için tüm gereksinimleri sağlar.

2.3 CENTER MANİFOLD TEOREMİ

$f(0) = 0$ iken,

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (2.15)$$

dinamik sistemi için, $x_0 = 0$ denge noktasında A Jakobian matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun, Kabul edilsin ki, özdeğerlerinin gerçel kısmı sıfır olsun ve $\text{Re } \lambda > 0$ olduğunda sayılabilir çoklukta n_+ özdeğerleri, $\text{Re } \lambda = 0$ olduğunda n_0 özdeğerleri ve $\text{Re } \lambda < 0$ olduğunda ise n_- özdeğerleri olsun. T^c sanal eksen üzerindeki n_0 özdeğerlerinin birleşimine karşılık gelen lineer özvektör uzay olsun. Sanal eksen üzerindeki özdeğerler ($\text{Re } \lambda = 0$) T^c özvektör uzayında olduğu gibi genellikle kritik özdeğer olarak adlandırılır. φ^t fonksiyonu (2.12) eşitliğine karşılık gelen akı olarak tanımlansın.

Yukarıdaki kabullerle aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.4: (Center Manifold Teoremi) (2.12) sisteminin n_0 boyutlu $W_{loc}^c(0)$ invaryant manifoldu, $x = 0$ da T^c özvektör uzayına teğettir. Ayrıca, $x_0 = 0$ n bir U komşuluğunda, her $t \geq 0$ ($t \leq 0$) için $(\varphi^t)x \in U$ ise, $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) için $(\varphi^t)x \rightarrow W_{loc}^c(0)$ dır.

Tanım: W_{loc}^c manifoldu 'Center Manifold' olarak adlandırılır.

3. KARARLILIK ANALİZİ VE HOPF ÇATALLANMA

Bu tezde

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= N(t-\tau)(1-N(t-\tau)) - \frac{N(t-\tau)P(t)}{N(t-\tau) + \alpha P(t)} \\ \frac{dP(t)}{dt} &= \beta P(t)\left(\delta - \frac{P(t)}{N(t-\tau)}\right)\end{aligned}\quad (1^*)$$

sürekli ve gecikmeli diferansiyel denklem sistemi incelenecektir. Bu sistemin tek pozitif denge noktası olan $E_0^* = (N_0^*, P_0^*)$,

$$\frac{dN}{dt} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dP}{dt} = 0$$

eşitliklerinden faydalanarak

$$N_0^* = \frac{1 + \alpha\delta - \delta}{1 + \alpha\delta}, \quad P_0^* = \delta\left(\frac{1 + \alpha\delta - \delta}{1 + \alpha\delta}\right)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$1 + \alpha\delta - \delta > 0$$

olmalıdır. (1*) sisteminde

$$\begin{aligned}n(t) &= N(t) - N_0^* \\ p(t) &= P(t) - P_0^*\end{aligned}$$

değişken değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= (n(t-\tau) + N_0^*)(1 - n(t-\tau) - N_0^*) - \frac{(n(t-\tau) + N_0^*)(p(t) + P_0^*)}{n(t-\tau) + N_0^* + \alpha(p(t) + P_0^*)} \\ \frac{dp}{dt} &= \beta(p(t) + P_0^*)\left(\delta - \frac{p(t) + P_0^*}{n(t-\tau) + N_0^*}\right)\end{aligned}\quad (3.1)$$

sistemi elde edilir. Bu değişken değişimi ile (N_0^*, P_0^*) denge noktası $(0,0)$ noktasına taşınmış olur. (3.1) sisteminin $(0,0)$ noktasına lineerleştirilmesi sonucu

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= \left(1 - 2N_0^* - \frac{P_0^*}{N_0^* + \alpha P_0^*} + \frac{P_0^* N_0^*}{(N_0^* + \alpha P_0^*)^2}\right)n(t-\tau) + \left(-\frac{N_0^*}{N_0^* + \alpha P_0^*} + \frac{\alpha P_0^* N_0^*}{(N_0^* + \alpha P_0^*)^2}\right)p(t) \\ \frac{dp}{dt} &= \left(\beta\delta - 2\frac{\beta P_0^*}{N_0^*}\right)p(t) + \frac{\beta(P_0^*)^2}{(N_0^*)^2}n(t-\tau)\end{aligned}\quad (3.2)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi elde edilirken

$$N_0^*(1 - N_0^*) - \frac{N_0^*P_0^*}{N_0^* + \alpha P_0^*} = 0,$$

$$\beta P_0^* \left(\delta - \frac{P_0^*}{N_0^*} \right) = 0$$

eşitlikleri kullanılmıştır. (3.2) denklem sistemi

$$\frac{dn}{dt} = A_1 n(t - \tau) + A_2 p(t)$$

$$\frac{dp}{dt} = A_3 p(t) + A_4 n(t - \tau)$$

şeklindeki denklem sistemine dönüşür. Burada

$$A_1 = 1 - 2N_0^* - \frac{P_0^*}{N_0^* + \alpha P_0^*} + \frac{P_0^* N_0^*}{(N_0^* + \alpha P_0^*)^2},$$

$$A_2 = -\frac{N_0^*}{N_0^* + \alpha P_0^*} + \frac{\alpha P_0^* N_0^*}{(N_0^* + \alpha P_0^*)^2},$$

$$A_3 = \beta \delta - 2 \frac{\beta P_0^*}{N_0^*}$$

ve

$$A_4 = \frac{\beta (P_0^*)^2}{(N_0^*)^2}, \text{ dir.}$$

$$n = Ke^{\lambda t} \text{ ve } p = Le^{\lambda t}$$

dönüşümü kullanılırsa

$$K\lambda e^{\lambda t} = A_1 K e^{\lambda(t-\tau)} + A_2 L e^{\lambda t}$$

$$L\lambda e^{\lambda t} = A_3 K e^{\lambda(t-\tau)} + A_4 L e^{\lambda t}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{bmatrix} A_1 e^{-\lambda \tau} - \lambda & A_2 \\ A_3 e^{-\lambda \tau} & A_4 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris sistemi elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için

$$\begin{vmatrix} A_1 e^{-\lambda \tau} - \lambda & A_2 \\ A_3 e^{-\lambda \tau} & A_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır. Lineerleştirilmiş sistemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - A_4 \lambda - A_1 \lambda e^{-\lambda \tau} + (A_1 A_4 - A_2 A_3) e^{-\lambda \tau} = 0$$

elde edilmiş olur. Burada

$$A_5 = A_1A_4 - A_2A_3 \text{ 'dir.}$$

Elde edilen denklem düzenlenirse,

$$\lambda^2 - A_4\lambda - A_1\lambda e^{-\lambda\tau} + A_5e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.3)$$

$$\lambda^2 - (A_4 + A_1)\lambda + A_5 = 0$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1: Aşağıdaki i ve ii koşulları altında,

$$i) \alpha\delta + 1 > \delta,$$

$$ii) \delta(2 + \alpha\delta) < (1 + \alpha\delta)^2(1 + \beta\delta),$$

$\tau = 0$ durumundaki sistemimiz için E_0^* pozitif denge noktası asimptotik kararlıdır.

İspat: $\tau = 0$ alındığında sistemin karakteristik denklemi $trA = (A_4 + A_1)$ ve $\det A = A_5$ olmak şartıyla

$$\lambda^2 - (trA)\lambda + \det A = 0 \text{ 'dır.}$$

$$\frac{1}{(1 + \alpha\delta)^2} [\delta(2 + \alpha\delta) - (1 + \alpha\delta)^2(1 + \beta\delta)] = trA$$

$$\delta(2 + \alpha\delta) - (1 + \alpha\delta)^2(1 + \beta\delta) < 0,$$

$$\delta(2 + \alpha\delta) < (1 + \alpha\delta)^2(1 + \beta\delta)$$

olduğundan $trA < 0$ ve $\det A > 0$ 'dır. Buradan aşağıdaki koşulları elde ederiz.

$$i) 1 + \alpha\delta > \delta$$

$$ii) \delta(2 + \alpha\delta) < (1 + \alpha\delta)^2(1 + \beta\delta).$$

(3.2) lineer sisteminin $(0,0)$ noktasındaki kararlılığı, (3.3) karakteristik denkleminin köklerine bağlıdır. Bu nedenle (3.3) transandantal denkleminin köklerinin durumu incelenir ise bu köklerin sürekli bağımlılığından ve Routh-Hurwitz kriterinden en az bir $\tau_0 > 0$ vardır ki $\tau \in [0, \tau_0)$ için $\text{Re}(\tau) < 0$ 'dır. $\text{Re} \lambda(z) = 0$ olduğunda E_0^* asimptotik kararlılığını kaybettiğinden $\text{Re} \lambda(z^*) = 0$ olacak şekilde bir $z^* > 0$ 'ın olup olmadığı incelenir. Yani, (3.3) denkleminin sırf sanal olan köklerinin olup olmadığı araştırılır.

Bu bölümde ilk olarak denge noktasının lokal kararlılığı incelenir. $\tau = \tau^*$ için $w > 0$

gerçel olmak üzere $\lambda = iw$ kabul edildiğinde aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

Yardımcı teorem 3.1: (3.1) sistemi için, (3.3) transandantal denklemi sırf sanal köke sahiptir.

İspat: $\tau = \tau^*$ ve w gerçel kök olmak üzere $\lambda = iw$, (3.3) transandantal denkleminde yerine yazılırsa genellikle birşey kaybetmeden $w > 0$ alınabilir. Böylece

$$(iw)^2 - A_4 iw - A_1 i w e^{-iw\tau} + A_5 e^{-iw\tau} = 0$$

elde edilir. Yani

$$[-w^2 - A_1 w \cdot \sin(w\tau) + A_5 \cos(w\tau)] - i[A_4 w + A_1 w \cos(w\tau) + A_5 \sin(w\tau)] = 0 \text{ 'dır.}$$

Bu eşitliğin gerçel ve sanal kısımlarını ayrı ayrı yazarsak

$$A_5 \cos(w\tau) - A_1 w \sin(w\tau) = w^2 \quad (3.4)$$

$$A_5 \sin(w\tau) + A_1 w \cos(w\tau) = -A_4 w \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) eşitliklerin de her iki tarafın kareleri alınıp taraf tarafa topladığında

$$w^4 + (A_4^2 - A_1^2)w^2 - A_5^2 = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemde $z = w^2$ yazıldığında

$$q = A_4^2 - A_1^2,$$

$$r = -A_5^2,$$

olmak üzere

$$f(z) = z^2 + qz + r = 0$$

denklemini elde edilir.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ ve $r = -A_5^2 < 0$ olduğundan bu denklemin en az bir tane pozitif kökü vardır. O halde genellikle birşey kaybetmeden bu pozitif köklerden biri z_k yani

$w_k = \sqrt{z_k}$ olsun.

τ_k 'yi bulmak için ilk etapta $\sin(w\tau_k)$ 'yi bulmalıyız. (3.4) denklemini $(-A_1 w)$ ile,

(3.5) denklemini ise A_5 ile çarpıp taraf tarafa topladığında

$$\sin(w_k \tau) = \frac{-A_1 w_k^3 - A_4 A_5 w_k}{A_5^2 + A_1^2 w_k^2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde bulunur. $\cos(w\tau_k)$ 'yi bulmak için ise (3.4)'ü A_5 ile, (3.5)'i $(A_1 w)$ ile çarpıp

taraf tarafa toplandığında

$$\cos(w_k \tau) = \frac{A_5 w_k^2 - A_1 A_4 w_k^2}{A_5^2 + A_1^2 w_k^2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde bulunur. O halde

$$\tan(w_k \tau) = \frac{A_1 w_k^3 + A_4 A_5 w_k}{-A_5 w_k^2 + A_1 A_4 w_k^2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde bulunur. Buradan τ_k 'yi,

$$\tau_k = \frac{1}{w} \left\{ \arctan\left(\frac{A_1 w^2 + A_4 A_5}{A_1 A_4 w - A_5 w}\right) + 2k\pi \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

yukarıdaki gibi bulmuş oluruz. Böylece (3.3) denkleminin sırf sanal köke sahip olduğu bulunmuş olur. Böylelikle Yardımcı Teorem (3.1) 'in ispatı tamamlanır.

Yardımcı Teorem 3.2: $f'(z) \neq 0$ olduğunu varsayalım, bu durumda aşağıdaki transversalite durumu elde edilir;

$$\frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau_k)}{d\lambda} > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$f'(z)$ ve $\frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau_k)}{d\tau}$ aynı işarete sahiptir. Yani, (1*) sistemi için $\tau = \tau_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ iken $E_0^* = (N_0^*, P_0^*)$ pozitif denge noktasında Hopf çatallanma olur.

İspat: w gerçel ve genellikle birşey kaybetmeden $w > 0$ alınarak $\lambda = iw$ 'yi $\tau = \tau_k$ için (3.3) denkleminin bir kökü olarak alalım. (3.3) karakteristik denkleminin τ 'ya göre türevi alınırsa,

$$2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} - A_4 \frac{d\lambda}{d\tau} - [e^{-\lambda\tau} (-\frac{d\lambda}{d\tau} \tau - \lambda)](A_1 \lambda - A_5) - e^{-\lambda\tau} A_1 \frac{d\lambda}{d\tau} = 0$$

denklemini elde edilir. Yani

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{A_4 - 2\lambda}{\lambda(A_1 \lambda - A_5)e^{-\lambda\tau}} - \frac{\tau}{\lambda} + \frac{A_1}{\lambda(A_1 \lambda - A_5)}$$

olur.

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\lambda=iw} = \frac{A_4 - 2iw}{iw(A_1 iw - A_5)e^{-i\tau w}} - \frac{\tau}{iw} + \frac{A_1}{iw(A_1 iw - A_5)}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \operatorname{Re} \left[\frac{(A_4 - 2iw)(\cos(w\tau) + \sin(w\tau)) + A_1}{iw(A_1 iw - A_5)} \right]$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \operatorname{Re}\left[\frac{A_4 \cos(w\tau) + 2w \sin(w\tau) + A_1 + i(A_4 \sin(w\tau) - 2w \cos(w\tau))}{-A_1 w^2 - iA_5 w}\right]$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = & \left(\frac{-A_1 A_4 w^2 \cos(w\tau) - 2A_1 w^3 \sin(w\tau) - A_1^2 w^2}{A_1^2 w^4 + A_5^2 w^2}\right) \\ & + \left(\frac{-A_4 A_5 w \sin(w\tau) + 2A_5 w^2 \cos(w\tau)}{A_1^2 w^4 + A_5^2 w^2}\right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{(2A_5 w^2 - A_1 A_4 w^2) \cos(w\tau) - (A_4 A_5 w + 2A_1 w^3) \sin(w\tau) - A_1^2 w^2}{A_1^2 w^4 + A_5^2 w^2}.$$

$\cos(w\tau)$ ve $\sin(w\tau)$ değerleri yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = & 2A_5^2 w^4 - 3A_1 A_4 A_5 w^4 + A_1^2 A_4^2 w^4 + A_4^2 A_5^2 w^2 \\ & + 3A_1 A_4 A_5 w^4 + 2A_1^2 w^4 + 2A_1^2 w^6 - A_1^4 w^4 - A_1^2 A_5^2 w^2 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = & A_1^2 w^2 (w^4 + (A_4^2 - A_1^2) w^2 - A_5^2) + A_1^2 w^6 \\ & + (2A_5^2 + A_1^2 A_4^2) w^4 + A_4^2 A_5^2 w^2 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = A_1^2 w^6 + (2A_5^2 + A_1^2 A_4^2) w^4 + A_4^2 A_5^2 w^2$$

Buradan

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\lambda=iw} > 0$$

sonucu elde edilir. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa sistemin kararlılığı ve Hopf çatallanma aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 3.2: (1^*) sistemi için,

- i. Eğer $\tau \in [0, \tau_0)$ ise sistemin $E_0^* = (N_0^*, P_0^*)$ denge noktası asimptotik kararlıdır.
- ii. Eğer $\tau > \tau_0$ ise sistemin $E_0^* = (N_0^*, P_0^*)$ denge noktası kararsızdır.
- iii. Eğer $\tau = \tau_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ ise sistemin $E_0^* = (N_0^*, P_0^*)$ denge noktasında Hopf çatallanma meydana gelir.

4. HOPF ÇATALLANMANIN YÖNÜ VE KARARLILIĞI

Bu bölümde Normal Form teorisi ve Center Manifold teoremi kullanılarak Hopf çatallanmanın yönü, periyodik çözümlerin kararlılığı ve periyodu incelenecektir. Burada Hopf çatallanmanın (1^*) sisteminin $\tau = \tau_k$ için $E_0^* = (N_0^*, P_0^*)$ pozitif denge noktasına sahip olduğu kabul edilecektir ve $w > 0$ olmak üzere $\lambda = iw$, $E_0^* = (N_0^*, P_0^*)$ pozitif denge noktasında karakteristik denklemin sırf sanal köküdür.

$\mu \in \mathbb{R}$ için $\tau = \tau_k + \mu$ yazılırsa $\mu = 0$ da (1^*) sisteminin Hopf çatallanma parametresi olur.

$$x_1 = N - N_0^*, x_2 = P - P_0^*, t = \frac{t}{\tau}, \tau = \tau_k + \mu$$

değişken değiştirilmesi yapıldığında, $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ 'de

$$\dot{x}(t) = L_\mu(x_t) + f(\mu, x_t) \text{ 'dir.} \quad (4.1)$$

burada $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$ ve $L_\mu : C \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^2$ için

$$L_\mu(x_t) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} \\ + (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \end{bmatrix}$$

ve

$$f(\mu, \phi) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

yazılır. Buradan,

$$f_{11} = -\phi_1^2(-1) - \frac{\phi_2(0)\phi_1(-1)}{N^* + \alpha P^*} + \frac{P^*\phi_1^2(-1) + N^*\phi_2(0)\phi_1(-1)}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ + \frac{\alpha P^*\phi_2(0)\phi_1(-1) + \alpha N^*\phi_2^2(0)}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ - \frac{P^*N^*\phi_1^2(-1) + 2\alpha P^*N^*\phi_2(0)\phi_1(-1) + \alpha^2 P^*N^*\phi_2^2(0)}{(N^* + \alpha P^*)^3}$$

ve

$$f_{12} = -\frac{\beta\phi_2^2(0)}{N^*} + \frac{2\beta P^*\phi_2(0)\phi_1(-1)}{(N^*)^2} - \frac{\beta(P^*)^2\phi_1^2(-1)}{(N^*)^2}$$

elde edilir. Riesz Gösterim Teoremine göre $\theta \in [-1, 0]$ için, elemanları sınırlı değişimli

2×2 tipinde bir $\eta(\theta, \mu)$ matris fonksiyonu vardır öyle ki,

$$L_\mu\phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)\phi(\theta), \phi \in C$$

şeklinde yazılabilir. $\eta(\theta, \mu)$ fonksiyonu, $\delta =$ Dirac Delta Fonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} \eta(\theta, \mu) = (\tau_k + \mu) & \begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \delta(\theta) \\ & + (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} \delta(\theta + 1) \end{aligned}$$

şeklinde seçilirse, $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} -\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\mu, s)\phi(s), & \theta = 0 \end{cases}$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0 \end{cases}$$

formunda tanımlanır. Böylece

$$x'(t) = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır. Burada $\theta \in [-1, 0)$ için $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ 'dir. $\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$

için

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t, 0)\psi(-t), & s = 0 \end{cases}$$

ve $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ iken bilineer iç çarpım

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^\theta \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi,$$

(4.4)

olarak tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.1: $A(0)$ and A^* adjoint operatörlerdir.

İspat: $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ ve $\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$ iken (4.4), $A(0)$ ve A^* 'ın

tanımından

$$\langle \psi(s), A(0)\phi(\theta) \rangle = \langle A^* \psi(s), \phi(\theta) \rangle$$

olduğu gösterilirse,

$$\begin{aligned} \langle \psi(s), A(0)\phi(\theta) \rangle &= \bar{\psi}(0)A\theta(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) A(0)\phi(\xi) d\xi \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \int_{-1}^0 [\bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi)]_{\xi=0}^{\theta} \\ &\quad + \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \frac{d\bar{\psi}(\xi - \theta)}{d\xi} d\eta(\theta)\phi(\xi) \\ &= \int_{-1}^0 \bar{\psi}(-\theta) d\eta(\theta)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \left(\frac{d\bar{\psi}(\xi - \theta)}{d\xi} \right) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\ &= A^* \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} A^* \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) \\ &= \langle A^* \psi(s), \phi(\theta) \rangle \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Böylece $A(0)$ ve A^* 'in adjoint operatörleri olduğu gösterilmiş ve ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca $\pm iw\tau_k$, $A(0)$ 'in özdeğerleridir. $A(0)$ 'in $iw\tau_k$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $q(\theta)$ ve A^* 'in $-iw\tau_k$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $q^*(s)$ 'dir. Yani,

$$A(0)q(\theta) = iw\tau_k q(\theta)$$

ve

$$A^*q^*(s) = -iw\tau_k q^*(s)$$

dir. O halde $q(\theta)$ ve $q^*(s)$ özvektörleri bulunur.

$$A(0)q(\theta) = iw\tau_k q(\theta) \rightarrow A(0)q(0) = iw\tau_k q(0)$$

eşitliğinde $A(0)$ ve $q(0)$ değerleri yerine yazıldığında,

$$\tau_k \begin{bmatrix} A_1 e^{iw\tau_k} + iw & A_3 e^{iw\tau_k} \\ A_2 & A_4 + iw \end{bmatrix} q(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde

$$q(\theta) = (1, \alpha)^T e^{iw\tau_k \theta}$$

bulunur.

$\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$, olabilmesi için bilineer iç çarpımın tanımından

$$\begin{aligned} \langle q^*(\theta), q(\theta) \rangle &= \overline{D}(\overline{\alpha}^*, 1)(1, \alpha)^T - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \overline{D}(\overline{\alpha}^*, 1) e^{i w \tau_k (\xi - \theta)} d\eta(\theta)(1, \alpha)^T e^{i w \tau_k \xi} d\xi \\ &= \overline{D} \left\{ \alpha + \overline{\alpha}^* - \int_{-1}^0 (\overline{\alpha}^*, 1) e^{i w \tau_k \theta} \theta d\eta(\theta)(1, \alpha)^T \right\} \\ &= \overline{D} \left\{ \alpha + \overline{\alpha}^* + \tau_k e^{-i w \tau_k} (A_1 \overline{\alpha}^* + A_3) \right\} \\ \overline{D} &= \frac{1}{\alpha + \overline{\alpha}^* + \tau_k e^{-i w \tau_k} (A_1 \overline{\alpha}^* + A_3)} \end{aligned}$$

şeklinde \overline{D} elde edilmiş olur. Yani, $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ ve $\langle q^*(s), \overline{q}(\theta) \rangle = 0$ eşitlikleri elde edilmiş olur.

$\mu = 0$ iken Center Manifold'u tanımlamak için önce koordinatlar hesaplanmalıdır. Bunun için,

$$z(t) = \langle q^*, x_t \rangle \quad (4.5)$$

ve

$$W(t, \theta) = x_t - 2 \operatorname{Re} z(t) q(\theta) \quad (4.6)$$

eşitliklerini tanımlansın z , \overline{z} ve q , q^* vektörleri yönünde C_0 Center Manifold'unun lokal koordinatlar olmak üzere

$$W(t, \theta) = W(z(t), \overline{z}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z \overline{z} + W_{02}(\theta) \frac{\overline{z}^2}{2} + \dots \quad (4.7)$$

(4.7) eşitliği hesaplanır. (4.1) sisteminin $\mu = 0$ iken $x_t \in C_0$ çözümü için (4.3) denkleminde

$$\dot{x}_t = A(0)x_t + R(0)x_t$$

dir. $R(\mu)$ 'nin tanımından, Yardımcı Teorem 4.1'den, (4.5) ve (4.6) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \langle q^*, \dot{x}_t \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle \\ &= \langle q^*, Ax_t \rangle + \langle q^*, Rx_t \rangle \\ &= \langle A^* q^*, x_t \rangle + \overline{q}^*(0) Rx_t(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \overline{q}^*(\xi - \theta) d\eta(\theta) Rx_t(\xi) d\xi \\ &= i w_0 z + \overline{q}^*(0) f(x_t(0), \mu) \\ \dot{z}(t) &= i w_0 z(t) + \overline{q}^*(0) f_0(z(t), \overline{z}(t)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir.

Kuznetsov, Y.'dan hatırlanacağı üzere Hopf çatallanmanın normal formunun

$$\dot{z} = iw \tau_k z(t) + g(z, \bar{z})$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Burada

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots$$

dır. Bu durumda

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z(t), \bar{z}(t))$$

eşitliği geçerlidir. $\dot{W}(t, \theta)$ hesaplandığında,

$$W(t, \theta) = x_t - 2 \operatorname{Re} z(t) q(\theta)$$

$$\dot{W}(t, \theta) = \dot{x}_t - 2 \operatorname{Re} \dot{z}(t) q(\theta)$$

$$= [Ax_t + Rx_t] - 2 \operatorname{Re} [iw_0 z(t) + \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})] q(\theta)$$

$$= A[w(t, \theta) + 2 \operatorname{Re}\{z(t) q(\theta)\}] + Rx_t - 2 \operatorname{Re}(iw_0 z(t) q(\theta)) - 2 \operatorname{Re}(\bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) q(\theta))$$

$$= Aw + 2 \operatorname{Re}(zAq(\theta)) + Rx_t - 2 \operatorname{Re}(iw_0 z(t) q(\theta)) - 2 \operatorname{Re}(\bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) q(\theta))$$

$$= Aw + 2 \operatorname{Re}(ziw_0 q(\theta)) + Rx_t - 2 \operatorname{Re}(iw_0 z(t) q(\theta)) - 2 \operatorname{Re}(\bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) q(\theta))$$

$$= Aw + Rx_t - 2 \operatorname{Re}(\bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) q(\theta))$$

$$\dot{W} = \dot{W}(t, \theta) = \begin{cases} AW - 2 \operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0) f_0 q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0) \\ AW - 2 \operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0) f_0 q(\theta)\} + f_0 & \theta = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

olarak bulunur.

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (4.10)$$

olmak üzere

$$\dot{W} = AW + H(z, \bar{z}, \theta) \quad (4.11)$$

$$AW - \dot{W} = -H(z, \bar{z}, \theta) \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlansın.

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

olduğu bilinmektedir. Bunu kullanarak $\dot{W}(t, \theta)$ yeni bir formda hesaplanmalıdır.

$$\dot{W} = W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} \quad (*)$$

(*) ifadesindeki eşitlik, z ve \bar{z} 'a göre türevlenirse,

$$\begin{aligned}
W_z &= W_{20}(\theta)z + W_{11}(\theta)\bar{z} + W_{30}(\theta)\frac{z^2}{3} + \dots \\
W_{\bar{z}} &= W_{11}(\theta)z + W_{02}(\theta)\bar{z}
\end{aligned}
\tag{**}$$

elde edilir. (**) ifadesi (*)'da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= W_{20}(\theta)z\bar{z} + W_{11}(\theta)(z\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) + W_{02}(\theta)\bar{z}\dot{z} + \dots \\
&= W_{20}(\theta)z\{iw_0z + g(z, \bar{z})\} \\
&\quad + W_{11}(\theta)[\bar{z}(iw_0z + g(z, \bar{z})) + z(iw_0\bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}))] + \dots \\
&= \frac{z^2}{2}2iw_0W_{20}(\theta) + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. W_{ij} ve H_{ij} katsayıları arasında bir ilişki kurabilmek için (4.12) eşitliğinin sağ tarafı hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned}
AW(t, \theta) &= AW_{20}(t, \theta)\frac{z^2}{2} + AW_{11}(t, \theta)z\bar{z} + AW_{20}(t, \theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \\
AW(t, \theta) - \dot{W} &= (A - 2iw)W_{20}\frac{z^2}{2} + AW_{11}z\bar{z} + \dots
\end{aligned}$$

şeklinde olur. O halde

$$\begin{aligned}
(A - 2i\omega\tau_k)W_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta) \\
AW_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta)
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

şeklinde katsayıları eşitlenebilir. (4.9)'da verilen ifadelerden ise $\theta \in [-1, 0)$ için

$$\begin{aligned}
H(z, \bar{z}, \theta) &= -\left[\bar{q}^*(0)f_0q(\theta) + \overline{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)}\right] \\
&= -\left[g(z, \bar{z})q(\theta) + \bar{g}(z, \bar{z})\bar{q}(\theta)\right] \\
&= \left[\begin{aligned} &q(\theta)\left(g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots\right) \\ &+ \bar{q}(\theta)\left(\bar{g}_{20}\frac{\bar{z}^2}{2} + \bar{g}_{11}z\bar{z} + \bar{g}_{02}\frac{z^2}{2} + \dots\right) \end{aligned} \right] \\
&= -\left[q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}\right]\frac{z^2}{2} \\
&\quad -\left[q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}\right]z\bar{z} - \left[q(\theta)g_{02} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{20}\right]\frac{\bar{z}^2}{2} - \dots
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
H_{20}(\theta) &= -\left[q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}\right] \\
H_{11}(\theta) &= -\left[q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}\right] \\
H_{02}(\theta) &= -\left[q(\theta)g_{02} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{20}\right]
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

şeklinde elde edilir. $H_{ij}(\theta)$ katsayılarını belirleyebilmek için g_{ij} ve \bar{g}_{ij} katsayıları hesaplanmalıdır. Daha önceden gösterildiği gibi

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z(t), \bar{z}(t))$$

dir. Öyleyse

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots$$

(4.15)

şeklinde yazılabilir. (4.5) ve (4.6) 'yı kullanarak

$$x_t(x_{1t}(\theta), x_{2t}(\theta)) = W(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta) \quad , \quad q(\theta) = (1, \alpha)^T e^{iw\tau_k\theta} \quad \text{ve}$$

$$x_{1t}(0) = z + \bar{z} + W_{20}^1(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^1(0) z\bar{z} + W_{02}^1(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3),$$

$$x_{2t}(0) = z\alpha + \bar{z}\bar{\alpha} + W_{20}^2(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^2(0) z\bar{z} + W_{02}^2(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3),$$

$$x_{1t}(-1) = ze^{-iw\tau_k\theta} + \bar{z}e^{iw\tau_k\theta} + W_{20}^1(-1) \frac{z^2}{2} + W_{11}^1(-1) z\bar{z} + W_{02}^1(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3),$$

$$x_{2t}(-1) = z\alpha e^{-iw\tau_k\theta} + \bar{z}\bar{\alpha} e^{iw\tau_k\theta} + W_{20}^2(-1) \frac{z^2}{2} + W_{11}^2(-1) z\bar{z} + W_{02}^2(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3),$$

eşitlikleri sağlanır. $f(\mu, x_t)$ 'nin tanımından

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = \bar{D}\tau_k(\bar{\alpha}^*, 1) \begin{bmatrix} f_{11}^0 \\ f_{12}^0 \end{bmatrix}$$

burada

$$\begin{aligned} f_{11}^0 &= -x_{1t}^2(-1) - \frac{x_{2t}(0)x_{1t}(-1)}{N^* + \alpha P^*} + \frac{P^* x_{1t}^2(-1) + N^* x_{2t}(0)x_{1t}(-1)}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ &\quad + \frac{\alpha P^* x_{2t}(0)x_{1t}(-1) + \alpha N^* x_{2t}^2(0)}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ &\quad - \frac{P^* N^* x_{1t}^2(-1) + 2\alpha P^* N^* x_{2t}(0)x_{1t}(-1) + \alpha^2 P^* N^* x_{2t}^2(0)}{(N^* + \alpha P^*)^3} \end{aligned}$$

ve

$$f_{12}^0 = -\frac{\beta x_{2t}^2(0)}{N^*} + \frac{2\beta P^* x_{2t}(0)x_{1t}(-1)}{(N^*)^2} - \frac{\beta (P^*)^2 x_{1t}^2(-1)}{(N^*)^2}$$

kullanarak yazılır. Buna göre

$$\begin{aligned}
g(z, \bar{z}) = & \overline{D\tau}_k [\overline{\alpha}^* (-x_{1t}^2(-1) - \frac{x_{2t}(0)x_{1t}(-1)}{(N^* + \alpha P^*)} \\
& + \frac{P^* x_{1t}^2(-1) + N^* x_{2t}(0)x_{1t}(-1)}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\
& + \frac{\alpha P^* x_{2t}(0)x_{1t}(-1) + \alpha N^* x_{2t}^2(0)}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\
& - \frac{P^* N^* x_{1t}^2(-1) + 2\alpha P^* N^* x_{2t}(0)x_{1t}(-1)}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\
& - \frac{\alpha^2 P^* N^* x_{2t}^2(0)}{(N^* + \alpha P^*)^3} - \frac{\beta x_{2t}^2(0)}{N^*} \\
& + \frac{2\beta P^* N^* x_{2t}(0)x_{1t}(-1)}{(N^*)^2} \\
& - \frac{(P^*)^2 x_{1t}^2(-1)}{(N^*)^2}] + O(|(z, \bar{z})|^3)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$g(z, \bar{z}) = \overline{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})$ ve $g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots$ denklemlerinin sağ tarafları birbirine eşitlendiğinde;

$$\begin{aligned}
g_{20} = & 2\overline{D\tau}_k [-\overline{\alpha}^* e^{-2iw\tau_k\theta} - \frac{\overline{\alpha}^* \alpha e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} \\
& + \frac{\overline{\alpha}^* P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + \overline{\alpha}^* \alpha N^* e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\
& + \frac{\overline{\alpha}^* \alpha^2 P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \overline{\alpha}^* \alpha^2 N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} - \frac{\overline{\alpha}^* N^* P^* e^{-2iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\
& - \frac{2\overline{\alpha}^* \alpha^2 N^* P^* e^{-iw\tau_k\theta} \overline{\alpha}^* \alpha^2 N^* P^*}{(N^* + \alpha P^*)^3} - \frac{\beta \alpha^2}{N^*} \\
& + \frac{2\beta \alpha P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta (P^*)^2 e^{-2iw\tau_k\theta}}{(N^*)^2}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{11} = & \bar{D}\tau_k \left[-\bar{\alpha}^* 2\alpha\bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}^* \alpha e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha}^* \bar{\alpha} e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} \right. \\
& + \frac{2\bar{\alpha}^* P^* + \bar{\alpha}^* \alpha N^* e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha}^* \bar{\alpha} N^* e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\
& + \frac{\bar{\alpha}^* \alpha^2 P^* e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha}^* \alpha \bar{\alpha} P^* e^{-iw\tau_k\theta} + 2\bar{\alpha}^* \alpha^2 \bar{\alpha} N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\
& - \frac{2\bar{\alpha}^* N^* P^* + 2\bar{\alpha}^* \alpha^2 N^* P^* e^{iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\
& - \frac{2\bar{\alpha}^* \alpha \bar{\alpha} N^* P^* e^{-iw\tau_k\theta} + 2\bar{\alpha}^* \alpha^2 \bar{\alpha} N^* P^*}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\
& \left. - \frac{2\beta\alpha\bar{\alpha}}{N^*} + \frac{2\beta\alpha P^* e^{iw\tau_k\theta} + 2\beta\bar{\alpha} P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta(P^*)^2}{(N^*)^2} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{02} = & 2\bar{D}\tau_k \left[-\bar{\alpha}^* e^{2iw\tau_k\theta} - \frac{\bar{\alpha}^* \bar{\alpha} e^{iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} + \right. \\
& \frac{\bar{\alpha}^* P^* e^{2iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha}^* \bar{\alpha} N^* e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha}^* \alpha \bar{\alpha} P^* e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha}^* \alpha \bar{\alpha}^2 N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\
& - \frac{\bar{\alpha}^* N^* P^* e^{2iw\tau_k\theta} + 2\bar{\alpha}^* \alpha \bar{\alpha} N^* P^* e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha}^* \alpha^2 \bar{\alpha}^2 N^* P^*}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\
& \left. - \frac{\beta\bar{\alpha}^2}{N^*} + \frac{2\beta\bar{\alpha} P^* e^{iw\tau_k\theta} - \beta(P^*)^2 e^{2iw\tau_k\theta}}{(N^*)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{21} = & 2\bar{D}\tau_k[-\bar{\alpha}^*(W_{20}^{(1)}(-1)e^{i\omega\tau_k\theta} + 2W_{11}^{(1)}(-1)e^{-i\omega\tau_k\theta}) \\
& - \frac{\bar{\alpha}^*(W_{11}^{(2)}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + W_{11}^{(1)}(-1)\alpha + \frac{W_{20}^{(2)}(0)e^{i\omega\tau_k\theta}}{2} + \frac{W_{20}^{(1)}(-1)\bar{\alpha}}{2}}{(N^* + \alpha P^*)} \\
& + \frac{\bar{\alpha}^* P^*(W_{20}^{(1)}(-1)e^{i\omega\tau_k\theta} + 2W_{11}^{(1)}(-1)e^{-i\omega\tau_k\theta})}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\
& + \frac{\bar{\alpha}^* N^*(W_{11}^{(2)}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + W_{11}^{(1)}(-1)\alpha + \frac{W_{20}^{(2)}(0)e^{i\omega\tau_k\theta}}{2} + \frac{W_{20}^{(1)}(-1)\bar{\alpha}}{2})}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\
& + \frac{\bar{\alpha}^* \alpha P^*(W_{11}^{(2)}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + W_{11}^{(1)}(-1)\alpha + \frac{W_{20}^{(2)}(0)e^{i\omega\tau_k\theta}}{2} + \frac{W_{20}^{(1)}(-1)\bar{\alpha}}{2})}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\
& + \frac{\bar{\alpha}^* \alpha N^*(W_{20}^{(2)}(0)\bar{\alpha} + 2W_{11}^{(2)}(0)\alpha)}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\
& - \frac{\bar{\alpha}^* N^* P^*(W_{20}^{(1)}(-1)e^{i\omega\tau_k\theta} + 2W_{11}^{(1)}(-1)e^{-i\omega\tau_k\theta})}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\
& - \frac{2\bar{\alpha}^* \alpha N^* P^*(W_{11}^{(2)}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + W_{11}^{(1)}(-1)\alpha + \frac{W_{20}^{(2)}(0)e^{i\omega\tau_k\theta}}{2} + \frac{W_{20}^{(1)}(-1)\bar{\alpha}}{2})}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\
& - \frac{\bar{\alpha}^* \alpha^2 N^* P^*(W_{20}^{(2)}(0)\bar{\alpha} + 2W_{11}^{(2)}(0)\alpha)}{(N^* + \alpha P^*)^3} - \frac{\beta(W_{20}^{(2)}(0)\bar{\alpha} + 2W_{11}^{(2)}(0)\alpha)}{N^*} \\
& + \frac{2\beta\alpha P^*(W_{11}^{(2)}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + W_{11}^{(1)}(-1)\alpha + \frac{W_{20}^{(2)}(0)e^{i\omega\tau_k\theta}}{2} + \frac{W_{20}^{(1)}(-1)\bar{\alpha}}{2})}{(N^*)^2} \\
& - \frac{\beta(P^*)^2(W_{20}^{(1)}(-1)e^{i\omega\tau_k\theta} + 2W_{11}^{(1)}(-1)e^{-i\omega\tau_k\theta})}{(N^*)^2}
\end{aligned}$$

katsayıları bulunmuş olur.

g_{21} hesaplayabilmek için $W_{20}(\theta)$ ve $W_{11}(\theta)$ 'yı hesaplamak gerekir. O halde

$$\begin{aligned}
W' &= x'_t - z'q - \overline{z'q} \\
&= \begin{cases} AW - 2\operatorname{Re}(\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)), & \theta \in [-1, 0) \\ AW - 2\operatorname{Re}(\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)) + f_0, & \theta = 0 \end{cases} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} AW + H(z, \bar{z}, \theta)
\end{aligned}$$

burada

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta)z\bar{z} + H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \text{ 'dir.}$$

$$(A - 2i\omega\tau_k)W_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta), \quad AW_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta)$$

ve $\theta \in [-1, 0)$ için

$$H(z, \bar{z}, \theta) = \bar{q}^*(0)f_0q(\theta) - q^*(0)f_0(0)\bar{q}(\theta) = -gq(\theta) - \bar{g}\bar{q}(\theta)$$

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta), \quad H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\dot{W}_{20}(\theta) = 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta) - g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)$$

olur.

$q(\theta) = q(0)e^{i\omega\tau_k\theta}$, şeklinde tanımlandığında

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta}, \quad (4.16)$$

bulunur. Burada $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)}) \in R^2$ sabit vektördür. Benzer yolla

$$W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\tau_k\omega} q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k\omega} \bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_2, \quad (4.17)$$

elde edilir. Burada $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}) \in R^2$ sabit vektördür. Şimdi E_1 ve E_2 bulunmalıdır. A'nın tanımından ve (4.13)'den

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{20}(\theta) = 2i\omega\tau_k W_{20}(0) - H_{20}(0),$$

$$(4.18)$$

ve

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{11}(\theta) = -H_{11}(0), \quad (4.19)$$

$d\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ olmak üzere (4.18) ve (4.19) denklemleri bulunur. (*) ve (4.9)'dan

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0)$$

$$+2\tau_k \left[\begin{array}{c} -e^{2iw\tau_k\theta} - \frac{\alpha e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} \\ + \frac{P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + \alpha N^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ - \frac{N^* P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + 2\alpha^2 N^* P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 N^* P^*}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\ \frac{2\beta\alpha P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta(P^*)^2 e^{-2iw\tau_k\theta}}{(N^*)^2} \end{array} \right]$$

(4.20)

ve

$$H_{11}(\theta) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0)$$

$$+2\tau_k \left[\begin{array}{c} -2\operatorname{Re}\alpha - \frac{\alpha e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha} \bar{\alpha} e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} \\ + \frac{2P^* + \alpha N^* e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha} N^* e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} + \frac{\alpha^2 P^* e^{iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ + \frac{\alpha \bar{\alpha} P^* e^{-iw\tau_k\theta} + 2\operatorname{Re}\alpha N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} - \frac{2N^* P^* + 2\alpha^2 N^* P^* e^{iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\ - \frac{2\operatorname{Re}N^* P^* e^{-iw\tau_k\theta} + 2\operatorname{Re}N^* P^*}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\ - \frac{2\beta\alpha\bar{\alpha}}{N^*} + \frac{2\beta\alpha P^* e^{iw\tau_k\theta} + 2\beta\bar{\alpha} P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta(P^*)^2}{(N^*)^2} \end{array} \right] \quad (4.21)$$

şeklinde yazılır. (4.18) ve (4.20)'den

$$\left(iw\tau_k I - \int_{-1}^0 e^{iw\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) q(0) = 0$$

$$\left(-iw\tau_k I - \int_{-1}^0 e^{-iw\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) q(0) = 0,$$

yardımları ile

$$\left(2iw\tau_k I - \int_{-1}^0 e^{2iw\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) E_1$$

$$= 2\tau_k \left[\begin{array}{c} -e^{2iw\tau_k\theta} - \frac{\alpha e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} \\ + \frac{P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + \alpha N^* e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ + \frac{\alpha^2 P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ - \frac{N^* P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + 2\alpha^2 N^* P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 N^* P^*}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\ \frac{2\beta\alpha P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta(P^*)^2 e^{-2iw\tau_k\theta}}{(N^*)^2} \end{array} \right]$$

yani

$$\left[\begin{array}{cc} 2iw - A_1 e^{iw\tau_k} & A_2 \\ -A_3 e^{-iw\tau_k} & 2iw - A_4 \end{array} \right] E_1$$

$$= 2 \left[\begin{array}{c} -e^{2iw\tau_k\theta} - \frac{\alpha e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} \\ + \frac{P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + \alpha N^* e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ + \frac{\alpha^2 P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ - \frac{N^* P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + 2\alpha^2 N^* P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 N^* P^*}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\ \frac{2\beta\alpha P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta(P^*)^2 e^{-2iw\tau_k\theta}}{(N^*)^2} \end{array} \right]$$

elde edilir. E_1 'i bulmak için bu sistem çözüldüğünde;

$$E_1^{(1)} = \frac{2}{B_1} \left| \begin{array}{c} -e^{2iw\tau_k\theta} - \frac{\alpha e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} \\ + \frac{P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + \alpha N^* e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ + \frac{\alpha^2 P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ - \frac{N^* P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + 2\alpha^2 N^* P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 N^* P^*}{(N^* + \alpha P^*)^3} \end{array} \right| \begin{array}{c} A_2 \\ \\ \\ \end{array} ,$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{2\beta\alpha P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta(P^*)^2 e^{-2iw\tau_k\theta}}{(N^*)^2} \\ \\ \end{array} \right| \begin{array}{c} 2iw - A_4 \\ \\ \end{array}$$

$$E_1^{(2)} = \frac{2}{B_1} \left| \begin{array}{c} -e^{2iw\tau_k\theta} - \frac{\alpha e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} \\ + \frac{P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + \alpha N^* e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ + \frac{\alpha^2 P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ - \frac{N^* P^* e^{-2iw\tau_k\theta} + 2\alpha^2 N^* P^* e^{-iw\tau_k\theta} + \alpha^2 N^* P^*}{(N^* + \alpha P^*)^3} \end{array} \right| \begin{array}{c} 2iw - A_1 e^{iw\tau_k} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{c} -A_3 e^{-iw\tau_k} \\ \frac{2\beta\alpha P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta(P^*)^2 e^{-2iw\tau_k\theta}}{(N^*)^2} \end{array} \right|$$

bulunur. Burada

$$B_1 = \left| \begin{array}{cc} 2iw - A_1 e^{iw\tau_k} & A_2 \\ -A_3 e^{-iw\tau_k} & 2iw - A_4 \end{array} \right|$$

dir. Benzer şekilde (4.17) , (4.19) ve (4.21) denklemleri yardımı ile

$$\begin{bmatrix} -A_1 & A_2 \\ -A_3 & -A_4 \end{bmatrix} E_2$$

$$= 2 \left[\begin{array}{l} -2\text{Re } \alpha - \frac{\alpha e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha} e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} + \frac{2P^* + \alpha N^* e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha} N^* e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ + \frac{\alpha^2 P^* e^{iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} + \frac{\alpha \bar{\alpha}^{-2} P^* e^{-iw\tau_k\theta} + 2\text{Re } \alpha N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ - \frac{2N^* P^* + 2\alpha^2 N^* P^* e^{iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^3} - \frac{2\text{Re } N^* P^* e^{-iw\tau_k\theta} + 2\text{Re } N^* P^*}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\ \frac{2\beta\alpha\bar{\alpha}}{N^*} + \frac{2\beta\alpha P^* e^{iw\tau_k\theta} + 2\beta\bar{\alpha} P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta(P^*)^2}{(N^*)^2} \end{array} \right]$$

olmak üzere E_2 'yi bulmak için sistem çözüldüğünde

$$E_2^{(1)} = \frac{2}{B_2} \left[\begin{array}{l} -2\text{Re } \alpha - \frac{\alpha e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha} e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} \\ + \frac{2P^* + \alpha N^* e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha} N^* e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} + \frac{\alpha^2 P^* e^{iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ + \frac{\alpha \bar{\alpha}^{-2} P^* e^{-iw\tau_k\theta} + 2\text{Re } \alpha N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} - \frac{2N^* P^* + 2\alpha^2 N^* P^* e^{iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\ - \frac{2\beta\alpha\bar{\alpha}}{N^*} + \frac{2\beta\alpha P^* e^{iw\tau_k\theta} + 2\beta\bar{\alpha} P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta(P^*)^2}{(N^*)^2} \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} A_2 \\ -A_4 \end{array}$$

$$E_2^{(2)} = \frac{2}{B_2} \left[\begin{array}{l} -2\text{Re } \alpha - \frac{\alpha e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha} e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)} \\ + \frac{2P^* + \alpha N^* e^{iw\tau_k\theta} + \bar{\alpha} N^* e^{-iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} + \frac{\alpha^2 P^* e^{iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^2} \\ + \frac{\alpha \bar{\alpha}^{-2} P^* e^{-iw\tau_k\theta} + 2\text{Re } \alpha N^*}{(N^* + \alpha P^*)^2} - \frac{2N^* P^* + 2\alpha^2 N^* P^* e^{iw\tau_k\theta}}{(N^* + \alpha P^*)^3} \\ - A_3 - \frac{2\beta\alpha\bar{\alpha}}{N^*} + \frac{2\beta\alpha P^* e^{iw\tau_k\theta} + 2\beta\bar{\alpha} P^* e^{-iw\tau_k\theta} - 2\beta(P^*)^2}{(N^*)^2} \end{array} \right]$$

bulunur. Burada

$$B_2 = \begin{vmatrix} -A_1 & A_2 \\ -A_3 & -A_4 \end{vmatrix}$$

dir.

Böylece Center Manifold'da τ_k kritik değerindeki çatallanan periyodik çözümlerin çatallanma katsayıları

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega\tau_k} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2}$$

$$\mu_2 = -\frac{\text{Re}\{c_1(0)\}}{\text{Re}\{\lambda'(\tau_k)\}}$$

$$\beta_2 = 2\text{Re}\{c_1(0)\}$$

$$T_2 = -\frac{\text{Im}\{c_1(0)\} + \mu_2 \text{Im}\{\lambda'(\tau_k)\}}{\omega\tau_k}$$

şeklinde belirlenir. Burada μ_2 ; Hopf çatallanmanın yönünü, β_2 ; çatallanan periyodik çözümün kararlılığını ve T_2 ; çatallanan çözümün periyodunu ifade eder. Bu bilgilerle aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.1: Hopf çatallanmanın yönünü belirleyen μ_2 için; eğer $\mu_2 > 0$ ise $\tau > \tau_0$ için çatallanan periyodik çözüm vardır ve Hopf çatallanma süperkritiktir, $\mu_2 < 0$ ise $\tau < \tau_0$ için çatallanan periyodik çözüm vardır ve Hopf çatallanma subkritiktir. Çatallanan periyodik çözümün kararlılığını belirleyen β_2 için; $\beta_2 < 0$ ise çatallanan periyodik çözüm kararlı, $\beta_2 > 0$ ise kararsızdır. Çatallanan çözümün periyodunu ifade eden T_2 için ; $T_2 < 0$ iken periyot artar, $T_2 > 0$ iken periyot azalır.

5. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR

Bu bölümde, önceki bölümlerde elde edilen teorik sonuçlar MATLAB(7.0) programı kullanılarak (MATLAB DDE solver) nümerik simülasyonlar ile desteklenmiştir. Gecikmeli av-avcı sisteminde

$$\begin{aligned}\alpha &= 1.1, \\ \beta &= 0.9, \\ \delta &= 1\end{aligned}$$

alınarak, (1*) sistemi

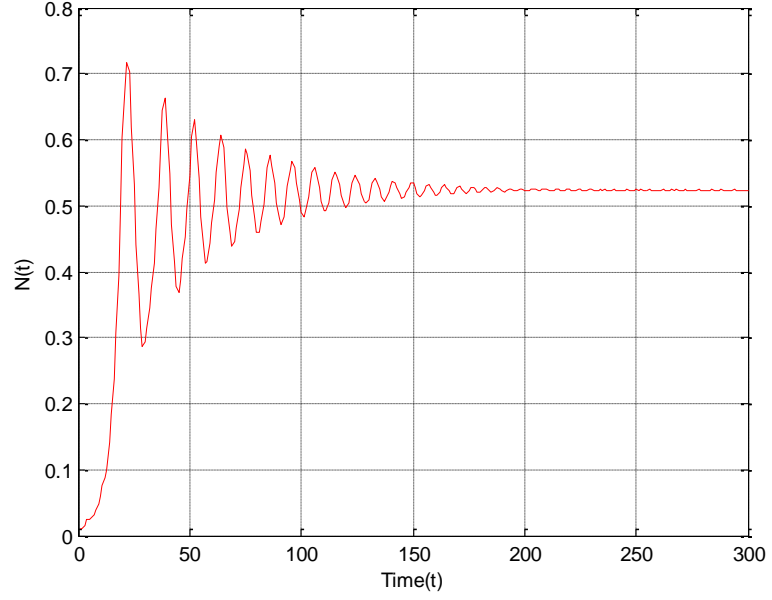
$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= N(t-\tau)(1-N(t-\tau)) - \frac{N(t-\tau)P(t)}{N(t-\tau)+1.1P(t)} \\ \frac{dP(t)}{dt} &= 0.9P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{N(t-\tau)}\right)\end{aligned}\tag{5.1}$$

sistemine dönüşür. (5.1) sisteminin tek pozitif denge noktası $E_0^* = (N_0^*, P_0^*) = (0.5238, 0.5238)$ 'dır. Daha önceki bölümlerdeki algoritmalarından $\tau_0 = 2.9886$, $w = 0.4654$ elde edilir. Teorem 3.2'den E_0^* denge noktası $\tau \in [0, \tau_0) = [0, 1.5663)$ iken asimptotik karalıdır, ancak $\tau > 2.9886$ iken kararsızdır. $\tau = \tau_0 = 2.9886$ 'de ise Hopf çatallanma meydana gelir. Eğer (5.1) sistemi için Hopf çatallanma parametreleri hesaplanırsa,

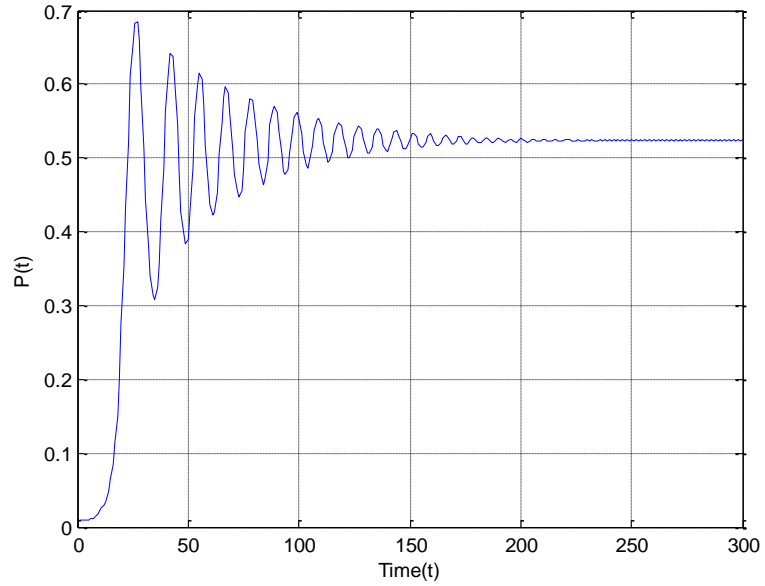
$$\mu_2 = -1.3087 < 0, \quad \beta_2 = 1.0124 > 0 \quad \text{ve} \quad T_2 = 1.9745 > 0$$

dır. Böylece (5.1) sisteminde $\tau_0 = 2.9886$ iken oluşan Hopf çatallanma subkritiktir. Burada yapılan nümerik simülasyonlarda, başlangıç noktası $(N_0, P_0) = (0.01, 0.01)$ olarak alınmıştır.

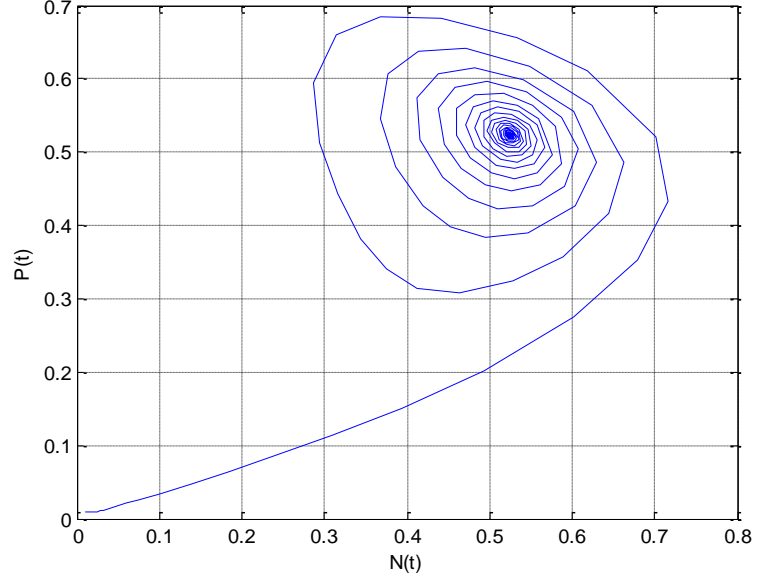
Şekil 5.1: $\tau = 2.7 < \tau_0$ için $(N_0, P_0) = (0.01, 0.01)$ başlangıç koşulları altında av popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği



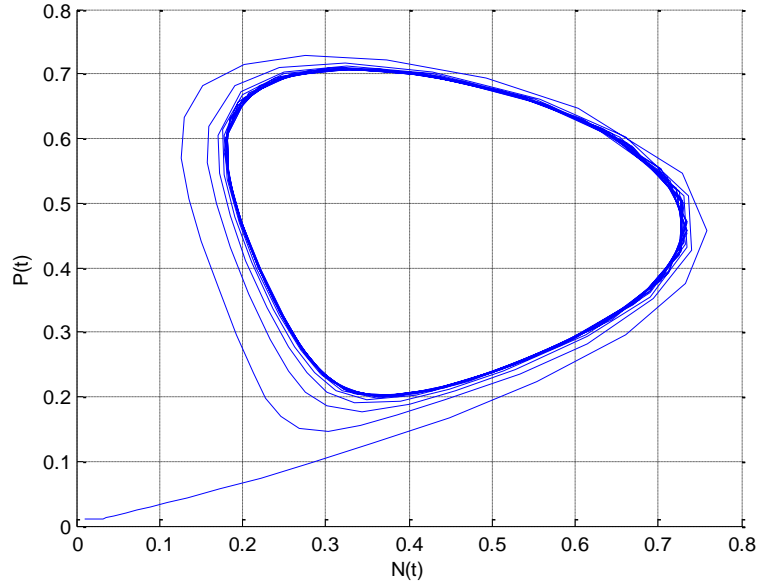
Şekil 5.2: $\tau = 2.7 < \tau_0$ için $(N_0, P_0) = (0.01, 0.01)$ başlangıç koşulları altında avcı popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği



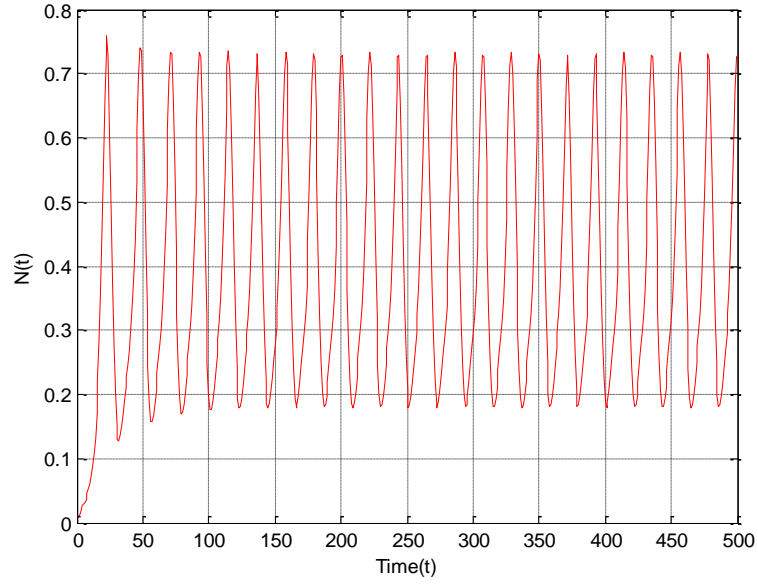
Şekil 5.3: Gecikme parametresi tekrar $\tau = 2.7 < \tau_0$ alınarak av popülasyon yoğunluğuna karşılık gelen avcı popülasyon yoğunluğunun grafiği



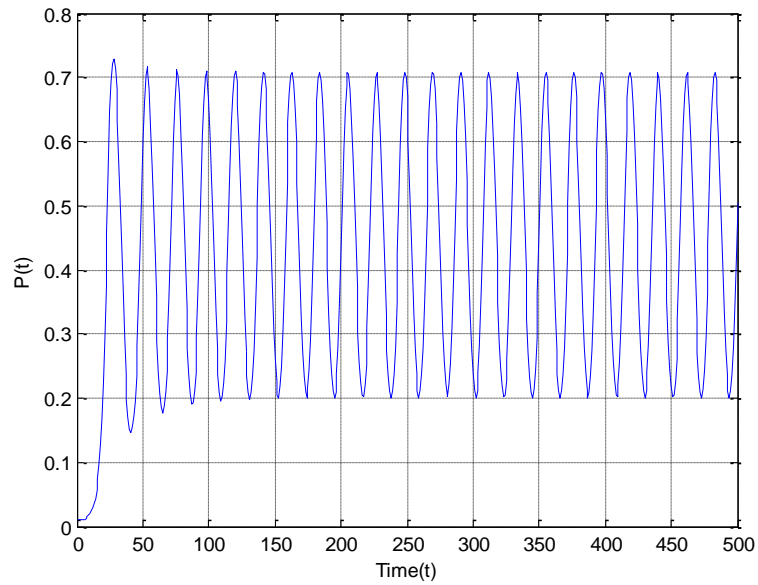
Şekil 5.4: $\tau = 3.1 > \tau_0$ için $(N_0, P_0) = (0.01, 0.01)$ başlangıç koşulları altında avcı popülasyonunun av popülasyonuna göre faz portesi



Şekil 5.5: $\tau = 3.1 > \tau_0$ için $(N_0, P_0) = (0.01, 0.01)$ başlangıç koşulları altında av popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği



Şekil 5.6: $\tau = 3.1 > \tau_0$ için $(N_0, P_0) = (0.01, 0.01)$ başlangıç koşulları altında avcı popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği



KAYNAKÇA

Kitaplar

Hassard, N.D. & Kazarino, Y.H., 1981. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge: Cambridge University Press.

Kuang, Y., 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Boston: Academic Press.

May, R.M., 1973. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, New Jersey, USA: Princeton University Press.

Murray, J.D., 1993 *Mathematical Biology*, New York: Springer -Verlag Press.

Süreli Yayınlar

- Chen, G. & Liao, X., 2005. Hopf bifurcation and chaos analysis of Chen's system with distributed delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, **25**, pp.197-220.
- Chen, L. & Teng, Z., 2006. Analysis of a predator-prey model with Holling II functional response concerning impulsive control strategy, *J. Comput. Appl. Math.*, **193**, pp.347-362.
- Chen, X., 2007. Periodicity in a nonlinear discrete predator-prey system with state dependent delays, *Nonlinear Anal. RWA*, **8**, pp.435-446.
- Chen, Y., Sun, C., Han, M. & Lin, Y., 2007. Global qualitative analysis for a predator-prey system with delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, **32**, pp.1582-1596.
- Choudhury, SR. & Krise, S., 2003. Bifurcations and chaos in a predator-prey model with delay and a laser-diode system with self-sustained pulsations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **16**, pp.59-77.
- Çelik, C. & Duman, O., 2009. Allee effect in a discrete-time predator-prey system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **40**(4), pp.1956-1962.
- Çelik, C., 2008. The stability & Hopf bifurcation for a predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, **37**, pp.87-99.
- Çelik, C., 2009. Hopf bifurcation of a ratio-dependent predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, **42**, pp.1474-1484.
- Çelik, C., 2011. Dynamical behavior of a ratio dependent predator-prey model with distributed delay, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, **16**(3), pp.719-738.
- Fowler, M. S. & Ruxton, G. D., 2002. Population dynamic consequences of Allee effects, *J. Theor. Biol.*, **215**, pp.39-46.
- Gopalsamy, K., 1980. Time lags and global stability in two species competition, *Bull Math Biol*, **42**, pp.728-737.

- Hadjiavgousti, D. & Ichtiaroglou, S., 2008. Allee effect in a predator-prey system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **36**, pp.334-342.
- He, X., 1996. Stability and delays in a predator--prey system, *J. Math. Anal. Appl.*, **198**, pp.355-370.
- Jang, J., 2006. Allee effects in a discrete-time host-parasitoid model, *J. Diff. Equ. Appl.*, **12**, pp.165-181.
- Jiang, G. & Lu, Q., 2007. Impulsive state feedback of a predator-prey model, *J. Comput. Appl. Math.*, **200**, pp.193-207.
- Leung, A., 1977. Periodic solutions for a prey--predator differential delay equation, *J. Differential Equations*, **26**, pp.391-403.
- Li, T., Fei, S., Zhang, K. & Yu, J., 2008. Simplified exponential stability analysis for recurrent neural networks with discrete and distributed time-varying delays, *Applied Mathematics and Computation*, **205**, pp.465-474.
- Liu, X. & Xiao, D., 2007. Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator-prey system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **32**, pp.80-94.
- Liu, Y. F., Zhou, S. R. & Wang, G., 2005. The stability of predator-prey systems subject to the Allee effects, *Theor. Population Biol.*, **67**, pp.23-31.
- Ma, W. & Takeuchi, Y., 1998. Stability analysis on a predator-prey system with distributed delays, *J. Comput. Appl. Math.*, **88**, pp.79-94.
- McCarthy, M. A., 1997. The Allee effect, finding mates and theoretical models, *Ecological Modelling*, **103**, pp.99-102.
- Ruan, S. & Wei, J., 1999. Periodic solutions of planar systems with two delays, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **129**, pp.1017-1032.
- Ruan, S., 2001. Absolute stability, conditional stability and bifurcation in Kolmogorov-type predator--prey systems with discrete delays, *Quart. Appl. Math.*, **59**, pp.159-173.

- Saha, T. & Chakrabarti, C., 2009. Ratio dependent predator-prey model with delay, *J. of Math. Analysis and Appl.*, **358**, pp. 389-402
- Scheuring, I., 1999. Allee effect increases the dynamical stability of populations, *J. Theor Biol.*, **199**, pp.407-414.
- Tang, Y. & Zhou, L., 2002. Stability and Hopf bifurcation for a delay competition diffusion system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **14**, pp.1201-1225.
- Wang, F. & Zeng, G., 2007. Chaos in Lotka-Volterra predator-prey system with periodically impulsive ratio-harvesting the prey and time delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, **32**, pp.1499-1512.
- Wang, L., Li, T. & Zhao, H., 2004. Existence and global stability of positive periodic solutions of a discrete predator-prey system with delays, *Adv. Difference Equ.*, **4**, pp.321-336.
- Wang, Z. & Wen, X., 2002. The existence of periodic solutions for some models with delay, *Nonlinear Anal. RWA*, **3**, pp.567-581.
- Wang, Z. & Xu, R., 2006. Periodic solutions of a nonautonomous predator-prey system with stage structure and time delays, *J. Comput. Appl. Math.*, **196**, pp.70-86.
- Wu, Y. & Zhou, X., 2009. Stability and Hopf Bifurcation analysis on a two neuron network with discrete and distributed delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, **40**, pp.1493-1505.