T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-İNDEKSLİ 4-BOYUTLU SEMİ-ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER

Merve ASLAN

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2021

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2-İNDEKSLİ 4-BOYUTLU SEMİ-ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER

Tez Yazarı
Merve ASLAN

Danışman
Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

OCAK 2021
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	2-İndeksli 4-Boyutlu Semi-Öklid Uzayında Eğriler
Yazarı:	Merve ASLAN
İlk Teslim Tarihi:	15.12.2020
Savunma Tarihi:	19.01.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman:	Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Murat BEKAR Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ..../......../20....... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım "2-İndeksli 4-Boyutlu Semi-Öklid Uzayında Eğriler" Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

19.01.2021

Merve ASLAN

ÖNSÖZ

Bu tezde 2-İndeksli 4-Boyutlu Semi-Öklidyen uzayında Pseudo Null ve Partially Null eğriler üzerine çalışılmıştır.

Çalışmaya esas olan tanımlar verildikten sonra Pseudo null ve Partially null eğrilerin bazı alt uzaylarda kalması için karakterizasyonlar incelenmiştir. Bu eğrilerin Frenet çatısının alt uzaylarında olması için hangi şartları sağlaması gerektiğinin tüm muhtemel sonuçlarına göre incelemesi yapılmıştır.

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bana yardımlarını esirgemeyen, engin bilgi ve birikimlerinden istifade ettiğim değerli hocam Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bugünlere gelmemde maddi ve manevi hiçbir fedakârlıktan çekinmeyen anne-babama ve hayatımın her aşamasında bana yardımcı olan sevgili eşim Alaettin ASLAN'a teşekkür ederim.

Merve ASLAN
ELAZIĞ, 2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

2-İndeksli 4-Boyutlu Semi-Öklid Uzayında Eğriler

Merve ASLAN

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2021, Sayfa: ix + 31

Bu çalışmada 2-İndeksli 4-Boyutlu Semi-Öklidyen uzayında Pseudo Null ve Partially Null eğriler üzerine çalışılmıştır.

Pseudo Null ve Partially Null eğrilerin bazı alt uzaylarda kalması için karakterizasyonlar ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: 2-İndeksli 4-Boyutlu Semi-Öklidyen uzay, Pseudo Null eğri, Partially Null eğri

ABSTRACT

Curves in 4-Dimensional Semi-Euclidean Space With Index-2

Merve ASLAN

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

January 2021,   Pages: ix + 31

In this study, Pseudo Null and Partially Null curves in 2-Index 4-Dimensional Semi-Euclidean space are studied.

The characterizations for the Pseudo Null and Partially Null curves to remain in some subspaces have been expressed and proven.

Keywords: 2-Indexed 4-Dimensional Semi-Euclidean space, Pseudo Null curve, Partially Null curve

SİMGELER

$\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}\mathbf{(s)}$	: Birinci binormal vektör
$\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}\mathbf{(s)}$	: İkinci binormal vektör
E_v^n, R_v^n	: n-boyutlu yarı-Öklidyen uzay
$k_1(s)$	: Birinci eğrilik
$k_2(s)$	: İkinci eğrilik
$k_3(s)$	: Üçüncü eğrilik
$\vec{\mathbf{N}}\mathbf{(s)}$	: Asli binormal vektör
$\vec{\mathbf{T}}\mathbf{(s)}$	: Teğet vektör
α	: Eğri
τ	: Burulma
$\langle\ ,\ \rangle$	: İç çarpım
∇	: Gradient Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Geometrinin başlangıcı insanlığın var olduğu günden itibarendir. İnsanoğlu doğada gördüğü canlı ve cansız nesnelerin şekillerini taşlar ve duvarlar üzerine çizerek geometrik modellemenin temelini atmıştır. Süregelen tarih içerisinde de gördüklerini veya tasarladıkları nesnelerin modellerini taş ve ağaçtan yapmışlardır. Daha sonra insanoğlunun ölçüm ihtiyacını karşılamak için bir takım objelerin (nokta, doğru, üçgen vs.) tanımlanmasıyla gelişmeye devam etmiştir.

Öklid'in geometriye duyduğu ilginin sonucu kattığı aksiyomlar temel taşları yerine oturtmuştur. Öklid'ten sonra bu aksiyomlar daha da ilerleyerek günümüze kadar gelmiştir.

Günümüzde Öklid Geometrisi özellikle de eğriler teorisi geometricilerin çalışma alanı olmuştur. Eğriler teorisinde özellikle bir eğri boyunca elde edilen Serret – Frenet denklemleri ve bundan oluşan eğriliklerden çok önemli karakterizasyonlar literatürde yer almaktadır. Özellikle 3 – boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin k eğriliği ve τ burulması eğri boyunca sabit olmayıp fakat $\frac{k}{\tau}$ oranının sabit ise eğriye HELİS olarak adlandırmanın yanı sıra oldukça güçlü teorileri de geometriye katmıştır.

Helislerle ilgili çalışmalar 4 – boyutlu ve n – boyutlu uzaylara genişletilmiştir [3, 4, 9, 11, 17, 19, 21, 25, 26].

Bir yandan Öklid geometrisinde eğriler teorisi inşa edilirken, diğer yandan Semi – Riemann geometrinin [23] temelinin atılması ile geometride birçok kavramın tanımlanması ve teorilerin ispatlanması için yeni kapılar açılmıştır.

Özellikle Semi – Riemann geometrinin indeksinin bir olarak alındığı ve Lorentz uzayı olarak adlandırılan konumunda eğriler üzerinde oldukça fazla çalışma yapılmıştır [5, 7, 12, 13, 20, 22]. Lorentz uzayının yapısından kaynaklanan timelike, spacelike ve null eğriler olarak çeşitlendirilen eğriler teorisi de Öklid uzayında bulunan teorilerin bu eğri çeşitlerine uygulanmasına ve çok daha zengin teorilerin ispatlanmasına olanak sağlamıştır. Bu eğrilerden timelike ve spacelike eğriler oldukça pratik sonuçlar verirken null eğriler birtakım kısıtlamalar altında yeni teorileri oluştursa da bu alanda da güzel çalışmalar yapılmıştır [8, 10, 18]

Özellikle 4 – boyutlu Lorentz uzayında Cartan, Pseudo null ve Partially null eğriler tanımlanmış bunlar üzerinde Bertrand eğri, alt uzaylarda kalma bağıntıları ve helisler gibi teoriler incelenmiştir.

İndeksin birden farklı olduğu Semi – Riemann uzaylarında da timelike, spacelike ve null eğrilerin çalıştığı birçok eser vardır. Son yıllarda 4 – boyutlu ve 2 – indeksli Semi – Riemann uzaylarda eğriler teorisinin uygulandığı bir alan olmuştur. Bu alanda timelike ve spacelike eğrilerin teorileri inşa edilirken null eğrilerin oluşturduğu sıkıntılı durumlardan ötürü Pseudo null ve Partially null eğrileri tanımlanarak bunlar üzerinde yeni teoriler kurulmuştur [2, 6, 14, 15].

Bu çalışmada; özellikle [1] tarafından 4 – boyutlu Lorentz uzayında Cartan null, timelike, spacelike eğriler ile 4 – boyutlu ve 2 – indeksli Minkowski uzayında Cartan null eğrilerin alt uzaylarda kalma bağıntılarına benzer olarak; 2 – indeksli 4 – boyutlu Semi – Öklidyen uzayında Pseudo null ve Partially null eğrilerin alt uzaylarda kalma bağıntıları incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1. V, bir reel vektör uzayı olsun. g: V x V $\to \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall$ α,b $\in \mathbb{R}$ ve $\forall$ u, v, w $\in V$ için

i. g (u ,v) = g (v, u) (Simetri Özelliği)

ii. g (α u + b v, w) = α g (u, w) + b g (v, w) (Bilineerlik Özelliği)

g (u, α v + b w) = α g (u, v) + b g (u, w)

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir [23].

Tanım 2.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

i. $\forall\, v \in$ V ve $v \neq$ **0** için g (v, v) > 0 ise g'ye pozitif tanımlı,

ii. $\forall\, v \in$ V ve $v \neq$ **0** için g (v, v) < 0 ise g'ye negatif tanımlı,

iii. $\forall\, v \in$ V ve $v \neq$ **0** için g (v, v) ≥ 0 ise g'ye yarı- pozitif tanımlı,

iv. $\forall\, v \in$ V ve $v \neq$ **0** için g (v, v) ≤ 0 ise g'ye yarı- negatif tanımlı denir [23].

Tanım 2.3. V reel vektör uzayı ve g: V x V $\to \mathbb{R}$ bir simetrik bilineer form olsun.

i. g'nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall\, v \in V$ ve $u \in V$ için

g (u, v) = 0 iken u = **0**,

ii. g'nin dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall\, v \in V$ ve $u \in V$ için

g (u, v) = 0 iken u ≠ **0** olmasıdır [23].

Tanım 2.4. V reel vektör uzayı ve g: V x V $\to \mathbb{R}$ bir simetrik bilineer form olsun. g'nin negatif tanımlı olduğu, en büyük boyutlu W $\subset V$ alt uzayının boyutuna, g'nin indeksi denir ve v ile gösterilir ve $0 \leq v \leq$ boy$V$ dir [23].

Tanım 2.5. M bir C^∞ manifold olsun. P ∈ M noktasındaki tanjant uzayı T_pM olmak üzere

$$\langle\ ,\ \rangle|_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \to \langle X, Y\rangle|_p = \langle X_p, Y_p\rangle$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere (0,2) tensör alanına M üzerinde bir metrik tensör denir [23].

Tanım 2.6. Her $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in E^n$ için

$$\langle\ ,\ \rangle : E^n \times E^n \to \mathbb{R}$$

öyle ki

$$\langle u,v\rangle = -\sum_{i=1}^{v} u_i v_i + \sum_{i=v+1}^{n} u_i v_i$$

biçiminde tanımlanan skaler çarpımın belirttiği metrikle birlikte E^n manifolduna *n*-boyutlu *v* indeksli Semi- Öklidyen (yarı-Öklid) uzayı denir ve E_v^n veya R_v^n ile gösterilir [23].

Bu çalışma 2 indeksli 4- boyutlu Semi-Öklidyen uzay üzerinde yapılacağı için şimdi onu da tanımlayalım.

Tanım 2.7. Her $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in E^4$ için

$$\langle\ ,\ \rangle : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

öyle ki

$$\langle u,v\rangle = -u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$

biçiminde tanımlanan skaler çarpımın belirttiği metrikle birlikte E^4 manifolduna 4-boyutlu 2 indeksli Semi- Öklidyen (yarı-Öklid) uzayı denir ve E_2^4 veya R_2^4 ile gösterilir [23].

Tanım 2.8. M Semi- Öklidyen manifoldu ve $\langle\ ,\ \rangle$ de M üstünde bir metrik tensör olsun. Bu durumda M de bir v tanjant vektörü için,

i. $\langle v,v\rangle > 0$ veya $v = \mathbf{0}$ ise *v* vektörüne spacelike vektör,

ii. $\langle v,v\rangle < 0$ ise v vektörüne timelike vektör,

iii. $\langle v,v\rangle = 0$ ve $v \neq \mathbf{0}$ ise, v vektörüne null vektör denir [23].

Tanım 2.9. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha: I \rightarrow R_2^4$ şeklinde diferensiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne R_2^4 de bir eğri adı verilir [23].

Tanım 2.10. $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, R_2^4 4-boyutlu 2 indeksli Semi- Öklidyen uzayında bir diferensiyellenebilir eğri olsun.

$\forall\, s \in I \subseteq \mathbb{R}$ için $\vec{\alpha}$ eğrisinin hız vektörü $\vec{\alpha}'(s)$ bir spacelike, timelike veya null vektör ise $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ eğrisine, sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri adı verilir

Ya da

i. $\langle \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}'(s)\rangle > 0$ veya $\vec{\alpha}'(s) = \mathbf{0}$ ise $\vec{\alpha}(s)$ eğrisine spacelike eğri,

ii. $\langle \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}'(s)\rangle < 0$ ise $\vec{\alpha}(s)$ eğrisine timelike eğri,

iii. $\langle \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}'(s)\rangle = 0$ ise $\vec{\alpha}(s)$ eğrisine null eğri denir [23].

Tanım 2.11. Birim hızlı bir $\vec{\alpha}$ eğrisinin her bir s noktasında $\vec{T}(s)$ teğet, $\vec{N}(s)$ asli normal, $\vec{B}_1(s)$ birinci binormal ve $\vec{B}_2(s)$ ikinci binormal vektörlerinden oluşan bir $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$ ortonormal koordinat sistemi vardır.

Bu $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$ dörtlüsüne hareketli dörtyüzlü ya da Frenet Çatısı denir [23].

Bu çalışma boyunca kısalığın hatırı için

$\mathrm{T} = \vec{\mathrm{T}}(s),\ \mathrm{N} = \vec{\mathrm{N}}(s),\ \mathrm{B}_1 = \vec{\mathrm{B}}_1(s)$ ve $\mathrm{B}_2 = \vec{\mathrm{B}}_2(s)$

gösterimini kullanacağız.

3. 2-İNDESLİ 4-BOYUTLU SEMİ-ÖKLİDYEN UZAYINDA BAZI EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde Pseudo Null ve Partially Null eğrilerin bazı alt uzaylarda kalması için karakterizasyonlar ifade ve ispat edilmiştir.

3.1. R_2^4 Uzayında Pseudo Null Eğrilerinin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar

Bu bölümde R_2^4 uzayının bazı alt uzaylarda kalan Pseudo çatılı null eğrilerin bazı karekterizasyonları incelenecektir.

R_2^4 uzayında α eğrisi boyunca hareket eden ve sırasıyla teğet, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanlarından oluşan bir ortonormal çatı {T, N, B_1, B_2}olmak üzere

$$\nabla_T T = T' = k_1(s)N$$

$$\nabla_T N = N' = k_2(s)B_1 \tag{3.1.1}$$

$$\nabla_T B_1 = B_1' = k_3(s)N - \mathcal{E}_2 k_2(s)B_2$$

$$\nabla_T B_2 = B_2' = -\mathcal{E}_1 k_1(s)T - \mathcal{E}_2 k_3(s)B_1$$

ile verilen Frenet çatısısını gözönüne alalım. Bu taktirde α null eğrisi Pseudo null çatılı bir eğri olarak adlandırılır ve burada T = α'(s) dir ve T, N, B_1, B_2 karşılıklı ortogonal vektörleri ise

$$\langle T, T \rangle = \mathcal{E}_1 \,, \langle B_1, B_1 \rangle = \mathcal{E}_2 \,,$$

$$\langle N, N \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = \langle T, N \rangle = \langle T, B_1 \rangle = \langle T, B_2 \rangle = \langle N, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 0$$

$$\langle N, B_2 \rangle = 1 \,, \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 = -1$$

denklemlerini sağlar.

Burada $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ ifadeleri α eğrisinin sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eğriliği olarak adlandırılır.

α eğrisi bir doğru ise $k_1(s) = 0$ ve diğer durumlarda (ki bu hâlleri **genel eğri** olarak adlandıracağız) $k_1(s) = 1$ dir [27].

1.Durum: Öncelikle Pseudo null çatılı bir null α eğrisinin {T, N} tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)N \tag{3.1.2}$$

yazılabilir. (3.1.2) denkleminde s' ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = a_1'(s)T + (a_2'(s) + a_1(s)k_1(s))N + a_2(s)k_2(s)B_1 \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Bu (3.1.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &a_1'(s) = 1 \\ &(a_2'(s) + a_1(s)k_1(s)) = 0 \\ &a_2(s)k_2(s) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

denklemler yazılabilir.

1. **Hâl** : α eğrisi bir doğru ise $k_1(s) = 0$ olacağından

(3.1.4) ün ilk denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = s + c_1$$

ve (3.1.4) ün ikinci denkleminden c_2 bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = c_2$$

ve (3.1.4) ün son denkleminden

$$k_2(s) = 0$$

elde edilir.

2. **Hâl** : α eğrisi bir genel eğri (yani doğru değilse) $k_1(s) = 1$ olacağından

(3.1.4) ün ilk denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = s + c_1$$

ve (3.1.4) ün ikinci denkleminden c_2 bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = -\frac{s^2}{2} - c_1 s + c_2$$

ve (3.1.4) ün son denkleminden

$$k_2(s) = 0$$

elde edilir.

3. **Hâl** : (3.1.4) denklem sisteminin üçüncüsünde $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa;

(3.1.4)'ün birinci denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = s + c_1$$

ve (3.1.4)'ün ikinci denkleminden

$$k_1(s) = 0$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1: α, Pseudo null eğrisi olsun. α eğrisinin {T, N} tarafından gerilen düzlemde (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)N$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

olması durumunda:

1. **Hâl** : α eğrisi bir doğru ise, $k_2(s) = 0$, c_1 ve c_2 birer reel sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = c_1 T + c_2 N$$

şeklinde

2. **Hâl** : α bir genel eğri $k_2(s) = 0$, c_1 ve c_2 birer reel sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + (-\frac{s^2}{2} - c_1 s + c_2)N$$

3. **Hâl** : $k_2(s) \neq 0$ ve , $k_1(s) = 0$ olduğu durumda $a_1(s) = s + c_1$ ve $a_2(s) = 0$ olacağından

$$\alpha(s) = (s + c_1)T$$

şeklinde yazılabilir.

Not: (3.1.4) denklem sisteminin üçüncüsünde $a_2(s) = k_2(s) = 0$ olması durumunda da eğri 3. hâldeki gibi yazılır.

<u>**2.Durum**</u> **:** Pseudo null çatılı bir null eğrisinin {T, B_1} tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)B_1 \qquad (3.1.5)$$

yazılabilir. (3.1.5) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemlerinde kullanılırsa

$$\alpha'(s) = a_1'(s)T + (a_1(s)k_1(s) + a_2(s)k_3(s))N + a_2'(s)B_1 - a_2(s)\mathcal{E}_2 k_2(s)B_2 \qquad (3.1.6)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$a_1'(s) = 1 \qquad (3.1.7)$$

$$a_1(s)k_1(s) + a_2(s)k_3(s) = 0 \qquad (3.1.8)$$

$$a_2'(s) = 0 \qquad (3.1.9)$$

$$a_2(s)\mathcal{E}_2 k_2(s) = 0 \qquad (3.1.10)$$

(3.1.7) ifadesinden c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$,

(3.1.9) ifadesinden c_2 sıfırdan farklı bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$,

(3.1.10) ifadesinden $k_2(s) = 0$ ve

(3.1.8) ifadesinden $k_1(s) = 1$ alınırsa (α bir genel eğri) ve $k_3(s) = -\frac{s + c_1}{c_2}$ bulunur.

Böylece şu teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2. α Pseudo null eğri olsun. α eğrisi {T, B_1} tarafından gerilen düzlemde (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)B_1$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

ise

1. Hâl : $k_1(s) = 1$ (yani genel eğri ise), $k_2(s) = 0$ ve $k_3(s) = -\frac{s+c_1}{c_2}$ olup c_1 bir reel sabit ve c_2sıfırdan farklı bir reel sabit olmak üzere

$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2B_1$

şeklinde

2. Hâl : $k_1(s) = k_2(s) = k_3(s) = 0$ ise c_1 bir reel sabit ve c_2 sıfırdan farklı bir reel sabit olmak üzere

$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2B_1$

şeklinde yazılabilir.

3.Durum : Pseudo null çatılı bir α eğrisinin {T, B_2} tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)B_2 \quad (3.1.11)$$

yazılabilir. (3.1.11) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemlerinde kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (a_1'(s) - a_2(s)\varepsilon_1k_1(s))T + a_1(s)k_1(s)N + a_2'(s)B_2 - a_2(s)\varepsilon_2k_3(s)B_1$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &a_1'(s) - a_2(s)\varepsilon_1k_1(s) = 1 \\ &a_1(s)k_1(s) = 0 \\ &a_2'(s) = 0 \\ &a_2(s)\varepsilon_2k_3(s) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

denklemleri yazılabilir. Böylece

(3.1.12) ifadesinin üçüncü denkleminden c_2 bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$,

(3.1.12) ifadesinin dördüncü denkleminden $k_3(s) = 0$,

(3.1.12) ifadesinin ikinci denkleminden

a) $k_1(s) = 0$ ise (3.1.12) ifadesinin birinci denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere

$a_1(s) = s + c_1$,

b) $k_1(s) = 1$ ise $a_1(s) = 0$ ve bu durumda (3.1.12) ifadesinin birinci denkleminden özel olarak $a_2(s) = c_2 = -1$ seçilebilir.

Böylece şu teorem verilebilir.

Teorem 3.1.3 α Pseudo null eğri olsun. α eğrisi {T, B_2} tarafından gerilen düzlemde (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.) ise c_2 bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$ ve $k_3(s) = 0$ olmak üzere

a) α eğrisi bir doğru c_1 ve c_2 birer reel sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2 B_2$$

şeklinde

b) α eğrisi bir genel eğri ise özel olarak $a_2(s) = c_2 = -1$ seçimi ile

$$\alpha(s) = -B_2$$

şeklinde yazılabilir.

4.Durum : Pseudo null çatılı bir α eğrisinin $\{N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_1 \tag{3.1.13}$$

yazılabilir. (3.1.13) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (a_1'(s) + a_2(s)k_3(s))N + (a_2'(s) + a_1(s)k_2(s))B_1 - a_2(s)\varepsilon_2 k_2(s)B_2$$

ve buradan

$$\begin{aligned} a_1'(s) + a_2(s)k_3(s) &= 0 \\ a_2'(s) + a_1(s)k_2(s) &= 0 \\ a_2(s)\varepsilon_2 k_2(s) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

bulunur. (3.1.14) ün son denkleminden

1.Hâl : $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) \neq 0$

2.Hâl : $a_2(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$

3.Hâl : $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) = 0$

olduğu görülür. Bu ifadelerden:

1.Hâlde $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ ise (3.1.14) denklemlerinin ikincisinden c_1 bir reel sabit ve $k_3(s) \neq 0$ olmak üzere $a_1(s) = c_1$ elde edilir.

2.Hâlde $a_2(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ ise (3.1.14) denklemlerinin ikincisinden c_2 bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$ ve

$$a_1(s) = -\int c_2 k_3(s)ds + c_1$$

şeklinde yazılabilir.

3.Hâlde $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) = 0$ ise c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = c_1$ bulunur.

Böylece şu teorem verilebilir.

Teorem 3.1.4 α Pseudo null eğri olsun. α eğri $\{N, B_1\}$ tarafından gerilen düzlemde (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_1$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

ise

1. **Hâl :** $a_2(s) = 0$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ ise c_1 ve c_2 birer reel sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = c_1 N$$

şeklinde

2. **Hâl :** $a_2(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ ise c_1 ve c_2 birer reel sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = \{-\int k_3(s)\,(s + c_2)\,ds + c_1\}N + (s + c_2)B_1$$

şeklinde ve

3. **Hâl :** $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) = 0$ ise c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = c_1 N$$

şeklinde yazılabilir.

<u>5.Durum</u> : Pseudo null çatılı bir α eğrisinin {N, B_2} tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_2 \qquad (3.1.15)$$

yazılabilir. (3.1.15) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -a_2(s)\varepsilon_1 k_1(s)T + a_1'N + (a_1(s)k_2(s) - \varepsilon_2 k_3(s)a_2(s))B_1 + a_2'(s)B_2 \qquad (3.1.16)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\begin{aligned} &-a_2(s)\varepsilon_1 k_1(s) = 1 \\ &a_1'(s) = 0 \\ &a_1(s)k_2(s) - \varepsilon_2 k_3(s)a_2(s) = 0 \\ &a_2'(s) = 0 \end{aligned} \qquad (3.1.17)$$

(3.1.17) eşitliklerinin ikinci ve ikinci ifadelerinden c_1 sıfırdan farklı bir reel sabit ve c_2 reel sabit olmak üzere $a_1(s) = c_1$ ve $a_2(s) = c_2$ elde edilir.

Böylece (3.1.17) eşitliklerinin birincisinden $k_1(s) \neq 0$ olacağından α eğrisi genel bir eğri olup

$$a_2(s) = \frac{-1}{\varepsilon_1 k_1(s)} = -\varepsilon_1 = sabit \qquad (3.1.18)$$

ve

$$\frac{k_2(s)}{k_3(s)} = \frac{-\varepsilon_2\varepsilon_1}{c_1} = sabit \qquad (3.1.19)$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.5. α Pseudo null eğri olsun. α eğrisi genel bir eğri ise {N, B_2} tarafından gerilen düzlemde (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.) olması için c_1 sıfırdan farklı bir reel sabit ve c_2 bir reel sabit olmak üzere

$\alpha(s) = c_1 N + c_2 B_2$

ve

$k_1(s) \neq 0$ bir reel sabit ve $\frac{k_2(s)}{k_3(s)}$ = sabit

olmasıdır.

<u>6. Durum</u> : Pseudo null çatılı bir α eğrisinin $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)B_1 + a_2(s)B_2 \tag{3.1.20}$$

yazılabilir. (3.1.20) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -a_2(s)\mathcal{E}_1 k_1(s)T + a_1(s)k_3(s)N + (a_1'(s) - a_2(s)\mathcal{E}_2 k_3(s))B_1 + (a_2'(s) - a_1(s)\mathcal{E}_1 k_2(s))B_2 \tag{3.1.21}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &-1 - a_2(s)\mathcal{E}_1 k_1(s) = 0 \\ &a_1(s)\, k_3(s) = 0 \\ &a_1'(s) - a_2(s)\mathcal{E}_2 k_3(s) = 0 \\ &a_2'(s) - a_1(s)\mathcal{E}_1 k_2(s) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.21$_1$}$$

elde edilir. $(3.1.21)_1$ denklemlerinin ikincisinden

1. Hâl : $a_1(s) = 0$ veya $k_3(s) \neq 0$ olabilir. Bu durumda $(3.1.21)_1$ denklemlerinin üçüncüsünden $a_2(s) = 0$ bulunur. α eğrisi $\{B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayda yatmaz.

2. Hâl : $a_1(s) \neq 0$ veya $k_3(s) = 0$ olabilir. Bu durumda $(3.1.21)_1$ denklemlerinin üçüncüsünden $a_1(s) = c_1 = sabit$ bulunur. Ayrıca $(3.1.21)_1$ denklemlerinin birincisinden $a_2(s) = \frac{-1}{\mathcal{E}_1 k_1(s)}$ olacağından $k_1(s) \neq 0$ olmak zorunda kalır ki α eğrisi genel bir eğri olup $a_2(s) = -1$ elde edilir. Bunlara ilaveten $(3.1.21)_1$ denklemlerinin dördüncüsünden $k_2(s) = 0$ olduğu görülür.

3. Hâl : $a_1(s) = 0$ veya $k_3(s) = 0$ olabilir. Bu durumda $(3.1.21)_1$ denklemlerinin dördüncüsünden $a_2(s) = sabit = c_2$ bulunur. Böylece $(3.1.21)_1$ denklemlerinin birincisinden $a_2(s) = \frac{-1}{\mathcal{E}_1 k_1(s)}$ olacağından $k_1(s) \neq 0$ olmak zorunda kalır ki α eğrisi genel bir eğridir ve $a_2(s) = -1$ dir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.6 α Pseudo null eğri olsun. α eğrisi genel bir eğri ise $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen düzlemde (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)B_1 + a_2(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

olması için

1. Hâl : $a_1(s) = 0$ veya $k_3(s) \neq 0$ seçilirse $a_2(s) = 0$ olacağından α eğrisi $\{B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayda yatmaz.

2. Hâl : $a_1(s) \neq 0$ veya $k_3(s) = 0$ seçilirse α eğrisi genel bir eğri olmak üzere $a_1(s) = c_1 \neq 0$ ve $a_2(s) = -\mathcal{E}_1$ ve $k_2(s) = 0$ elde edilir ki bu durumda α eğrisi

$$\alpha(s) = c_1B_1 - B_2$$

şeklinde yazılabilir.

3. Hâl : $a_1(s) = 0$ veya $k_3(s) = 0$ seçilirse α eğrisi genel bir eğri olmak üzere $a_2(s) = -1$ olacağından α eğrisi

$$\alpha(s) = -\mathcal{E}_1B_2$$

şeklinde yazılabilir.

7.Durum : Pseudo null çatılı bir α eğrisinin $\{T, N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1, a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)N + a_3(s)B_1 \tag{3.1.22}$$

yazılabilir. (3.1.22) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = a_1'(s)T + (a_2'(s)+a_1(s)k_1(s)+a_3(s)k_3(s))N + (a_3'(s)+a_2(s)k_2(s))B_1 - a_3(s)\mathcal{E}_2k_2(s)B_2 \tag{3.1.23}$$

elde edilir. Buradan

$$a_1'(s) = 1$$

$$a_2'(s) + a_1(s)k_1(s) + a_3(s)k_3(s) = 0$$

$$a_3'(s) + a_2(s)k_2(s) = 0 \qquad (3.1.23)_1$$

$$a_3(s)\mathcal{E}_2k_2(s) = 0$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerin dördüncüsünden

1. Hâl : $a_3(s) = 0$ veya $k_2(s) \neq 0$ olabilir.

Böylece $(3.1.23)_1$ üçüncü eşitliğinden $a_2(s) = 0$,

$(3.1.23)_1$ birinci eşitliğinden c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$,

$(3.1.23)_1$ ikinci eşitliğinden $k_1(s) = 0$ olacağından α eğrisi bir doğrudur.

2. Hâl : $a_3(s) \neq 0$ veya $k_2(s) = 0$ olabilir.

Böylece $(3.1.23)_1$ üçüncü eşitliğinden c_3 bir reel sabit olmak üzere $a_3(s) = c_3$,

$(3.1.23)_1$ birinci eşitliğinden c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$,

$(3.1.23)_1$ ikinci eşitliğinden c_2 bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = -\int [\, k_1(s)\,(s + c_1) + c_3\, k_3(s)\,]ds + c_2$$

elde edilir.

3. Hâl : $a_3(s) = 0$ veya $k_2(s) = 0$ olabilir.

Böylece $(3.1.23)_1$ in birinci eşitliğinden c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = s + c_1,$$

$(3.1.23)_1$ in ikinci eşitliğinden c_2 bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = -\int [\, k_1(s)\,(s + c_1)\,]ds + c_2$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.7 α Pseudo null eğri olsun. α eğrisi genel bir eğri ise $\{T, N, B_1\}$ tarafından gerilen düzlemde (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 , a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)N + a_3(s)B_1$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

ise

1. **Hâl :** $a_3(s) = 0$ veya $k_2(s) \neq 0$ olursa $a_2(s) = 0$, c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$ ve $k_1(s) = 0$ olacağından α eğrisi bir doğrudur ve

$$\alpha(s) = (s + c_1)T$$

şeklinde

2. **Hâl :** $a_3(s) \neq 0$ veya $k_2(s) = 0$ olursa c_3 bir reel sabit olmak üzere $a_3(s) = c_3$, c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$ ve c_2 bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = -\int [\, k_1(s)\,(s + c_1) + c_3\, k_3(s)\,]ds + c_2$$

olacağından

a) α eğrisi genel bir eğri ise

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + [-\int [\, k_1(s)\,(s + c_1) + c_3\, k_3(s)\,]ds + c_2]N + c_3 B_1$$

ve

b) α eğrisi bir doğru ise

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + [-\int [\, c_3\, k_3(s)\,]\, ds + c_2]\, N + c_3 B_1$$

formunda yazılabilir.

3. **Hâl :** $a_3(s) = 0$ veya $k_2(s) = 0$ olursa c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$, c_2 bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = -\int [\, k_1(s)\,(s + c_1)\,]ds + c_2$$

olacağından

a) α eğrisi genel bir eğri ise

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + [-\int [\, k_1(s)\,(s + c_1)\,]ds + c_2]N$$

b) α eğrisi bir doğru ise

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2 N$$

formunda yazılabilir.

<u>8.Durum</u> : Pseudo null çatılı bir α eğrisinin $\{T, N, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1, a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2N + a_3(s)B_2 \tag{3.1.24}$$

yazılabilir. (3.1.24) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (a_1'(s) - a_3'(s)\mathcal{E}_1 k_1(s))T + (a_2'(s) + a_1(s)k_1(s))N + (a_2(s)k_2(s) - a_3(s)\mathcal{E}_2 k_3(s))B_1 + a_3'(s)B_2 \tag{3.1.25}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{aligned} &a_1'(s) - a_3(s)\mathcal{E}_1 k_1(s) = 1 \\ &a_2'(s) + a_1(s)k_1(s) = 0 \\ &a_2(s)k_2(s) - a_3(s)k_3(s) = 0 \\ &a_3'(s) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

denklemler yazılabilir. (3.1.26) nın son eşitliğinden c_3 bir reel sabit olmak üzere $a_3(s) = c_3$ olduğu görülür. Bu durumda (3.1.26) nın ilk denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = s + (\mathcal{E}_1 c_3 k_1(s))s + c_1 \tag{3.1.27}$$

elde edilir. (3.1.26) nın üçüncü denkleminde $k_2(s) \neq 0$ kabul edilip $a_3(s) = c_3$ olduğu göz önüne alınır ve düzenlenirse

$$a_2(s) = \frac{k_3(s)}{k_2(s)} c_3 \tag{3.1.28}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.8 : α Pseudo null eğri olsun. α eğrisinin $\{T, N, B_2\}$ tarafından gerilen düzlemde (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 , a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)N + a_3(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.) olması için $k_2(s) \neq 0$ ise

a) α eğrisinin genel eğri olması durumunda

$$\alpha(s) = \left[[1 + (\mathcal{E}_1 c_3)]s + c_1\right]T + \left[\frac{k_3(s)}{k_2(s)} c_3\right]N + c_3 B_2 \tag{3.1.29}$$

ve

b) α eğrisinin doğru olması durumunda

$$\alpha(s) = [s + c_1]T + \left[\frac{k_3(s)}{k_2(s)} c_3\right]N + c_3 B_2$$

şeklinde yazılabilir.

<u>9.Durum</u> : Pseudo null çatılı bir α eğrisinin $\{N, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1, a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_1 + a_3(s)B_2$ (3.1.30)

yazılabilir. (3.1.30) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (-a_3(s)\mathcal{E}_1 k_1(s))T + (a_1'(s) + a_2(s)k_3(s))N$$

$$+ (a_2'(s) + a_1(s)k_2(s) - a_3(s)\mathcal{E}_3 k_3(s))B_1 + (a_3'(s) - a_2(s)\mathcal{E}_2 k_2(s))B_2 \qquad (3.1.31)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{aligned} &a_3(s)\mathcal{E}_1 k_1(s) = -1 \\ &a_1'(s) + a_2(s)k_3(s) = 0 \\ &a_2'(s) + a_1(s)k_2(s) - a_3(s)\mathcal{E}_2 k_3(s) = 0 \\ &a_3'(s) - a_2(s)\mathcal{E}_2 k_2(s) = 0 \end{aligned} \qquad (3.1.32)$$

bulunur (3.1.32) nin ilk eşitliğinden

$$a_3(s) = \frac{-1}{\mathcal{E}_1 k_1(s)}(s)$$

ve burada da $k_1(s) \neq 0$ olacağı için α eğrisi genel bir eğri olup

$$a_3(s) = -\mathcal{E}_1 = sabit \qquad (3.1.33)$$

yazılabilir. (3.1.33) ifadesi (3.1.32) nin son denkleminde kullanılırsa

$$a_2(s)\mathcal{E}_2 k_2(s) = 0 \qquad (3.1.34)$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki durumlar incelenebilir.

1. Hâl : $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olması durumunda;

(3.1.32) nin ikinci denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$,

(3.1.32) nin üçüncü denkleminden

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = (s + c_1)$$

yazılabilir.

2. Hâl : $a_2(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ olması durumunda;

(3.1.32) nin üçüncü denklemi ve (3.1.33) eşitliğinden c_2 bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = \int k_3(s)ds + c_2 \qquad (3.1.35)$$

(3.1.32) nin ikinci denklemi ve (3.1.35) eşitliğinde c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = -\int \{ [\int k_3(s)\, ds + c_2] k_3(s) \} ds + c_1 \qquad (3.1.36)$$

elde edilir.

3. Hâl : $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) = 0$ olması durumunda;

(3.1.32) nin ikinci denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$,

(3.1.32) nin üçüncü denkleminden $k_3(s) = 0$ elde edilir.

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.9 α Pseudo null eğrisi olsun. α eğrisi genel bir eğri ve $a_3(s) = -\mathcal{E}_1 = sabit$ olmak üzere α eğrisinin $\{N, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen düzlemde (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 , a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_1 + a_3(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.) olması için

1. Hâl : $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olması durumunda c_1 bir reel sabit olmak üzere

$a_1(s) = s + c_1$ ve

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = (s + c_1)$$

olup

$$\alpha(s) = (s + c_1)N - \varepsilon_1 B_2$$

formunda yazılır.

2. Hâl : $a_2(s) \neq 0$, $k_2(s) = 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ olması durumunda; c_2 bir reel sabit olmak

üzere

$$a_2(s) = \int k_3(s)\, ds + c_2$$

c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = -\int \{ [\int k_3(s)\, ds + c_2] k_3(s)\} ds \;\; + c_1$$

olacağından

$$\alpha(s) = \{-\int \{ [\int k_3(s)\, ds + c_2] k_3(s)\} ds \;\; + c_1 \}N + \{\int k_3(s)\, ds + c_2\}B_1 - \varepsilon_1 B_2$$

formunda yazılır.

3. Hâl : $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) = 0$ olması durumunda c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = s + c_1 \text{ ve } \; k_3(s) = 0$$

olup

$$\alpha(s) = (s + c_1)N - \varepsilon_1 B_2$$

şeklinde yazılabilir.

<u>10.Durum</u> : Pseudo null çatılı bir α eğrisinin $\{T, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1, a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)B_1 + a_3(s)B_2 \tag{3.1.37}$$

yazılabilir. (3.1.37) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (a_1'(s) - a_3(s)\varepsilon_1 k_1(s))T + (a_1(s)k_1(s) + a_2(s)k_3(s))N \\ &\quad + (a_2'(s) - a_3(s)\varepsilon_2 k_3(s))B_1 + (a_3'(s) - a_2(s)\varepsilon_2 k_2(s))B_2 \end{aligned} \tag{3.1.38}$$

Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$a_1'(s) - a_3(s)\varepsilon_1 k_1(s) = 1$$

$$a_1(s)k_1(s) + a_2(s)k_3(s) = 0$$

$a_2'(s) - a_3(s)\mathcal{E}_2 k_3(s) = 0$ (3.1.39)

$a_3'(s) - a_2(s)\mathcal{E}_2 k_2(s) = 0$

elde edilir.

α eğrisini genel bir eğri alıp, özel durumda çözümü arayalım.

1. Hâl : $a_3(s) \neq 0$ kabul edilmesi durumunda:

(3.1.39) un ilk denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = \int\{1 + a_3(s)\mathcal{E}_1\}ds + c_1$$

ve (3.1.39) un üçüncü denkleminden $k_3(s) \neq 0$ ve c_2 sıfırdan farklı bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = \int\{a_3(s)\mathcal{E}_2 k_3(s)\}ds + c_2$$

yazılabilir.

2. Hâl : $a_3(s) = 0$ kabul edilmesi durumunda:

(3.1.39) un ilk denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$,

(3.1.39) un üçüncü denkleminden c_2 sıfırdan farklı bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$,

(3.1.39) un dördüncü denkleminden $k_2(s) = 0$ ve (3.1.39) un ikinci denkleminden

$$k_3(s) = -\frac{s + c_1}{c_2}$$

bulunur. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.10 α Pseudo null eğrisi olsun. α eğrisi genel bir eğri olmak üzere α eğrisinin {T, B_1, B_2} tarafından gerilen düzlemde olması için(Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 , a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)\,T + a_2(s)\,B_1 + a_3(s)\,B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

1. Hâl : $a_3(s) \neq 0$ kabul edilmesi durumunda: c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = \int\{1 + a_3(s)\mathcal{E}_1\}ds + c_1$$

ve $k_3(s) \neq 0$ ve c_2 sıfırdan farklı bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = \int\{a_3(s)\mathcal{E}_2 k_3(s)\}ds + c_2$$

olarak yazılacağından

$$\alpha(s) = \{\int\{1 + a_3(s)\mathcal{E}_1\}ds + c_1\}T + \{\int\{a_3(s)\mathcal{E}_2 k_3(s)\}ds + c_2\}B_1 + a_3(s)B_2$$

bulunur.

2. Hâl : $a_3(s) = 0$ kabul edilmesi durumunda: c_1 bir reel sabit olmak üzere

$a_1(s) = s + c_1$, c_2 sıfırdan farklı bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$ ve $k_2(s) = 0$ olmak üzere

$$k_3(s) = -\frac{s + c_1}{c_2}$$

olacağından

$$\alpha(s) = \{s + c_1\}T + c_2 B_1$$

formunda yazılabilir.

3.2. R_2^4 Uzayında Partially Null Eğrilerinin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar

Bu bölümde R_2^4 uzayının bazı alt uzaylarda kalan Partially çatılı null eğrilerin bazı karakterizasyonları incelenecektir.

R_2^4 uzayında α eğrisi boyunca hareket eden ve sırasıyla teğet, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanlarından oluşan bir ortonormal çatı $\{T, N, B_1, B_2\}$olmak üzere

$$\nabla_T T = T' = k_1(s)N$$

$$\nabla_T N = N' = k_1(s)T + k_2(s)B_1 \tag{3.2.0}$$

$$\nabla_T B_1 = B_1' = k_3(s)B_1$$

$$\nabla_T B_2 = B_2' = -\varepsilon_2 k_2(s)N - k_3(s)B_2$$

ile verilen Frenet çatısısını gözönüne alalım. Bu taktirde α null eğrisi Partially null çatılı bir eğri olarak adlandırılır ve burada $T = \alpha'(s)$ dir ve T, N, B_1, B_2 karşılıklı ortogonal vektörleri ise

$$\langle T, T \rangle = \varepsilon_1, \ \langle N, N \rangle = \varepsilon_2, \ \langle B_1, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 0,$$

$$\langle T, N \rangle = \langle T, B_2 \rangle = \langle T, B_1 \rangle = \langle N, B_1 \rangle = \langle N, B_2 \rangle = 0,$$

$$\langle B_1, B_2 \rangle = 1, \ \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1.$$

denklemlerinin sağlar.

Burada $k_1(s)$,$k_2(s)$ ve $k_3(s)$ ifadeleri α eğrisinin sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eğriliği olarak adlandırılır [27].

Tüm s değerleri için $k_3(s) = 0$ olarak kabul edildiğinden yeniden Partially null çatı :

$$\nabla_T T = T' = k_1(s)N$$

$$\nabla_T N = N' = k_1(s)T + k_2(s)B_1 \tag{3.2.1}$$

$$\nabla_T B_1 = B_1' = 0$$

$$\nabla_T B_2 = B_2' = -\varepsilon_2 k_2(s)N$$

şeklinde yazılır [16].

1.Durum: Öncelikle Partially null çatılı bir α eğrisinin {T, N} tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)N \qquad (3.2.1)_1$$

yazılabilir. $(3.2.1)_1$ denkleminde s' ye göre türev alınıp (3.2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (a_1'(s) + a_2(s)k_1(s))T + (a_2'(s) + a_1(s)k_1(s))N + a_2(s)k_2(s)B_1$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$a_1'(s) + a_2(s)k_1(s) = 1, \qquad (3.2.2)$$

$$a_2'(s) + a_1(s)k_1(s) = 0 \qquad (3.2.3)$$

$$a_2(s)k_2(s) = 0 \qquad (3.2.4)$$

Bu üç denklemden oluşan sistemin ortak çözümü araştırılırsa:

(3.2.4) denkleminden

1. **Hâl :** $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa

(3.2.2) denkleminden c_1 reel bir sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$

ve (3.2.3) denkleminden $k_1(s) = 0$ bulunur.

2. **Hâl :** $a_2(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

(3.2.2) denkleminden c_1 reel bir sabit ve $k_1(s) \neq 0$ olmak üzere $a_2(s)$ e bağlı bir çözüm olan

$$a_1(s) = s - \int \left(a_2(s)k_1(s)\right)ds + c_1$$

veya (3.2.3) denkleminden c_2 reel bir sabit ve $k_1(s) \neq 0$ olmak üzere $a_1(s)$ e bağlı bir çözüm olan

$$a_2(s) = -\int \left(a_1(s)k_1(s)\right)ds + c_2$$

bulunur.

3. **Hâl :** $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

(3.2.2) denkleminden c_1 reel bir sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$

ve (3.2.3) denkleminden $k_1(s) = 0$ bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1 : α Partially null eğrisi olsun. α eğrisinin {T, N} tarafından gerilen düzlemde olması için (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)N$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

1. **Hâl :** $a_2(s) = 0$, $k_1(s) = 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olması durumunda c_1 reel bir sabit olmak

üzere $a_1(s) = s + c_1$ şeklinde ifade edileceğinden

$$\alpha(s) = (s + c_1)T$$

formunda yazılır.

2. Hâl : $a_2(s) \neq 0$, $k_1(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ olması durumunda c_1 reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = s - \int \big(a_2(s) k_1(s) \big) ds + c_1$$

olacağından c_2 bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = -\int \big(a_1(s) k_1(s) \big) ds + c_2$$

olacağından

$$\alpha(s) = a_1(s)\ T - \{\int \big(a_1(s) k_1(s) \big) ds + c_2\} N$$

formunda yazılır.

3. Hâl : $a_2(s) = 0$, $k_1(s) = 0$ ve $k_2(s) = 0$ olması durumunda c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$ şeklinde ifade edileceğinden

$$\alpha(s) = (s + c_1) T$$

formunda yazılır.

2.Durum : Partially null çatılı bir α eğrisinin {T, B₁} tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s) T + a_2(s) B_1 \qquad (3.2.5)$$

yazılabilir. (3.2.5) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.2.1) Frenet denklemlerinde kullanılırsa

$$\alpha'(s) = a_1'(s) T + a_2'(s) B_1 + a_1(s) k_1(s) N$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$a_1'(s) = 1 \qquad (3.2.6)$$

$$a_2'(s) = 0 \qquad (3.2.7)$$

$$a_1(s) k_1(s) = 0 \qquad (3.2.8)$$

Bu üç denklemden oluşan sistemin ortak çözümü araştırılırsa:
(3.2.6) denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$,
(3.2.7) denkleminden c_2 bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$
ve (3.2.8) denkleminden $k_1(s) = 0$ bulunur.
Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2: α Partially null eğri olsun. α eğri {T, B₁} tarafından gerilen düzlemde olması için
(Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için
$\alpha(s) = a_1(s) T + a_2(s) B_1$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)
c_1 ve c_2 birer reel sabit ve $k_1(s) = 0$ olmak üzere

$$\alpha(s) = (s + c_1) T + c_2 B_1$$

şeklinde yazılabilir.

3.Durum : Partially null çatılı bir α eğrisinin $\{T, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)B_2 \qquad (3.2.9)$$

yazılabilir. (3.2.9) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.2.1) Frenet denklemlerinde kullanılırsa

$$\alpha'(s) = a_1'(s)T + (a_1(s)k_1(s) - a_2(s)\varepsilon_2 k_2(s))N + a_2'(s)B_2$$

elde edilir. Buradan

$$a_1'(s) = 1 \qquad (3.2.10)$$

$$a_1(s)k_1(s) - a_2(s)\varepsilon_2 k_2 = 0 \qquad (3.2.11)$$

$$a_2'(s) = 0 \qquad (3.2.12)$$

bulunur. Bu üç denklemden oluşan sistemin ortak çözümü araştırılırsa:

(3.2.10) denkleminden c_1 sıfırdan farklı bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$,

(3.2.12) denkleminden c_2 bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$,

(3.2.11) denkleminden ve yukarıda elde edilenlerden $k_1(s) \neq 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \frac{\varepsilon_2 c_2}{s + c_1}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.3 α Partially null eğrisi olsun. α eğrisinin $\{T, B_2\}$ tarafından gerilen düzlemde olması için (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

c_1 sıfırdan farklı bir reel sabit ve c_2 bir reel sabit olmak üzere $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$ ve

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \frac{\varepsilon_2 c_2}{s + c_1}$$

olmak üzere

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2 B_2$$

olmasıdır.

4.Durum : Partially null çatılı bir α eğrisinin $\{N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_1 \qquad (3.2.13)$$

yazılabilir. (3.2.13) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = a_1(s)k_1(s)T + a_1'(s)N + (a_2'(s) + a_1(s)k_2(s)$$

ve buradan da

$$a_1(s)k_1(s) = 1 \qquad (3.2.14)$$

$$a_1'(s) = 0 \qquad (3.2.15)$$

$a_2'(s) + a_1(s)k_2(s) = 0$ (3.2.16)

elde edilir. Bu üç denklemden oluşan sistemin ortak çözümü araştırılırsa:

(3.2.15) denkleminden c_1 sıfırdan faklı reel bir sabit olmak üzere $a_1(s) = c_1$,

(3.2.14) denkleminden $k_1(s) = \frac{1}{a_1(s)} = \frac{1}{c_1}$

(3.2.16) denkleminden, yukarıda elde edilenlerden $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$ ve c_2 bir reel sabit olmak üzere

$$a_2(s) = -\int c_1 k_2(s) + c_2 = -\int \frac{k_2(s)}{k_1(s)} + c_2$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.4 α Partially null eğrisi olsun. α eğrisinin $\{N, B_1\}$ tarafından gerilen düzlemde olması için (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_1$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

$k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_1(s)} N - \left(\int \frac{k_2(s)}{k_1(s)} d_s + c_2 \right) B_1$$

şeklinde yazılmasıdır.

<u>**5.Durum :**</u> Partially null çatılı bir α eğrisinin $\{N, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_2 \tag{3.2.17}$$

yazılabilir. (3.2.17) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = a_1(s)k_1(s)T + (a_1'(s) - a_2(s)\varepsilon_2 k_2(s))N + a_1(s)k_2(s)B_1 + a_2'(s)B_2$$

ve buradan da

$$a_1(s)k_1(s) = 1 \tag{3.2.18}$$

$$a_1(s)k_2(s) = 0 \tag{3.2.19}$$

$$a_2'(s) = 0 \tag{3.2.20}$$

$$a_1'(s) - a_2(s)\varepsilon_2 k_2(s) = 0 \tag{3.2.21}$$

elde edilir. Bu üç denklemden oluşan sistemin ortak çözümü araştırılırsa:

(3.2.20) denkleminden c_2 reel bir sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$,

(3.2.18) denkleminden $k_1(s) \neq 0$ olmak üzere $a_1(s) = \frac{1}{k_1(s)}$,

(3.2.19) denkleminden $k_2(s) = 0$

ve (3.2.21) denkleminden c_1 sıfırdan farklı reel bir sabit olmak üzere $a_1(s) = c_1$ ve dolayısıyla $k_1(s) = \frac{1}{c_1}$ = sabit elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.5 α Partially null eğrisi olsun. α eğrisinin $\{N, B_2\}$ tarafından gerilen düzlemde olması için (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)
c_1 sıfırdan farklı bir reel sabit ve c_2 bir reel sabit, $k_1(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ olmak üzere

$$\alpha(s) = c_1 N + c_2 B_2$$

formunda yazılmasıdır.

6.Durum : Partially null çatılı bir α eğrisinin $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)B_1 + a_2(s)B_2 \tag{3.2.22}$$

yazılabilir. (3.2.22) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = a_1'(s)B_1 + a_2'(s)B_2 - a_2(s)\,\varepsilon_2 k_2(s)N$$

elde edilir. Bu son denklemden

$$a_1'(s) = 0 \tag{3.2.23}$$

$$a_2'(s) = 0 \tag{3.2.24}$$

$$a_2(s)\varepsilon_2 k_2(s) = 0 \tag{3.2.25}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu üç denklemden oluşan sistem çözülürse
(3.2.23) denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = c_1$,
(3.2.24) denkleminden c_2 bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$,
ve (3.2.25) denklemi ile yukarıda bulunanlardan $k_2(s) = 0$ bulunur.
Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.6 α Partially null eğrisi olsun. α eğrisinin $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen düzlemde olması için (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 ve a_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)B_1 + a_2(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)
$k_2(s) = 0$, c_1 ve c_2 birer reel sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = c_1 B_1 + c_2 B_2$$

şeklinde yazılmasıdır.

7.Durum : Partially null çatılı bir α eğrisinin $\{T, N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1, a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)N + a_3(s)B_1 \tag{3.2.26}$$

yazılabilir. (3.2.26) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (a_1'(s) + a_2(s)k_1(s))\,T + (a_2'(s) + a_1(s)k_1(s))\,N + (a_3'(s) + a_2(s)k_2(s))B_1$$

ve buradan da

$$a_1'(s) + a_2(s)k_1(s) = 1 \tag{3.2.27}$$

$$a_2'(s) + a_1(s)k_1(s) = 0 \tag{3.2.28}$$

$$a_3'(s) + a_2(s)k_2(s) = 0 \tag{3.2.29}$$

elde edilir. Bu üç denklemden oluşan sistem çözülürse: $k_1(s) \neq 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olmak üzere $a_2(s) \neq 0$ kabulü altında (3.2.27) denkleminden c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = 1 - \int (a_2(s)k_1(s) + c_1)ds + c_1$$

ve (3.2.29) denkleminden c_3 bir reel sabit olmak üzere

$$a_3(s) = -\int (a_2(s)k_2(s))ds + c_3$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.7 α Partially null eğri olsun. α eğrisinin {T, N, B_1} tarafından gerilen düzlemde (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 , a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)\, T + a_2(s)\, N + a_3(s)\, B_1$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.) ise $k_1(s) \neq 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olmak üzere $a_2(s) \neq 0$ kabulü altında:

$$\alpha(s) = \{1 - \int (a_2(s)k_1(s) + c_1)ds + c_1 \}\, T + a_2(s)N - \{\int (a_2(s)k_2(s))ds + c_3 \}B_1$$

formunda yazılır.

<u>8.Durum</u> : Partially null çatılı bir α eğrisinin {T, N, B_2} tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1, a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2N + a_3(s)B_2 \tag{3.2.30}$$

yazılabilir. (3.2.23) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (a_1'(s) + a_2(s)k_1(s))T + (a_2'(s) + a_1(s)k_1(s) - a_3(s)\mathcal{E}_2k_2(s))N + a_2(s)k_2(s)\, B_1 + a_3'(s)B_2$$

ve buradan

$$a_1'(s) + a_2(s)k_1(s) = 1 \tag{3.2.31}$$

$$a_2'(s) + a_1(s)k_1(s) - a_3(s)\mathcal{E}_2k_2(s) = 0 \tag{3.2.32}$$

$$a_2(s)k_2(s) = 0 \tag{3.2.33}$$

$$a_3'(s) = 0 \tag{3.2.34}$$

elde edilir. Bu dört eşitlikten oluşan sistemin çözümü aşağıdaki gibi irdelenebilir.

(3.2.34) eşitliğinden c_3 bir reel sabit olmak üzere $a_3(s) = c_3$,

(3.2.33) eşitliğinin çözümü için üç farklı durumda incelenebilir.

1. **Hâl :** $a_2(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ olması durumunda:

(3.2.31) den $k_1(s) \neq 0$ ve c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$a_1(s) = s - \int \big(a_2(s)k_1(s)\big)ds + c_1$$

şeklinde $a_2(s)$ cinsinden yazılabilir.

2. **Hâl :** $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olması durumunda

(3.2.31) den $k_1(s) \neq 0$ ve c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = c_1$,

ve (3.2.32) den $k_2(s) = \frac{c_1}{\varepsilon_2 c_3} k_1(s)$ şeklinde yazılabilir.

3. Hâl : $a_2(s) = 0$ ve $k_2(s) = 0$ olması durumunda

(3.2.31) den c_1 bir reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$,

ve (3.2.32) den ve yukarıdaki elde edilenden $k_1(s) = 0$ bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.8 α Partially null eğrisi olsun. α eğrisinin {T, N, B_2} tarafından gerilen düzlemde olması için (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 , a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)N + a_3(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

1. Hâl : $a_2(s) \neq 0$, $k_2(s) = 0$, $k_1(s) \neq 0$, c_1 bir reel sabit ve c_3 sıfırdan farklı birer reel sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = \{s - \int \left(a_2(s)k_1(s)\right)ds + c_1 \}T + a_2(s)N + c_3B_2$$

şeklinde $a_2(s)$ cinsinden yazılabilir.

2. Hâl : $a_2(s) = 0$, $k_2(s) \neq 0$, $k_1(s) \neq 0$ ve c_1 bir reel sabit ve c_3 sıfırdan farklı birer reel sabit olmak üzere

$$k_2(s) = \frac{c_1}{\varepsilon_2 c_3} k_1(s)$$

olup

$$\alpha(s) = c_1\, T + c_3\, B_2$$

şeklinde yazılabilir.

3. Hâl : $a_2(s) = k_2(s) = k_1(s) = 0$, c_1 bir reel sabit ve c_3 sıfırdan farklı birer reel sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_3B_2$$

şeklinde yazılır.

<u>**9.Durum :**</u> Partially null çatılı bir α eğrisinin {T, B_1, B_2} tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1, a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)B_1 + a_3(s)B_2 \tag{3.2.35}$$

yazılabilir. (3.2.35) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = a_1'(s)T + (a_1(s)\, k_1(s) - a_3(s)\varepsilon_2 k_2(s))N + a_2'(s)\,)B_1 + a_3'(s)B_2$$

ve buradan

$$a_1'(s) = 1 \tag{3.2.36}$$

$$a_1(s)\, k_1(s) - a_3(s)\varepsilon_2 k_2(s) = 0 \tag{3.2.37}$$

$a_2'(s) = 0$ (3.2.38)

$a_3'(s) = 0$ (3.2.39)

elde edilir. Bu dört eşitlikten oluşan sistemin çözümü aşağıdaki gibi yapılabilir.

(3.2.36) eşitliğinden c_1 sıfırdan farklı reel sabit olmak üzere $a_1(s) = s + c_1$,

(3.2.38) eşitliğinden c_2 bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = c_2$,

(3.2.39) eşitliğinden c_3 bir reel sabit olmak üzere $a_3(s) = c_3$,

ve (3.2.37) eşitliğinden $k_2(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \frac{\mathcal{E}_2 c_2}{s + c_1}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.9 α Partially null eğrisi olsun. α eğrisinin $\{T, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen düzlemde olması için (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 , a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)T + a_2(s)B_1 + a_3(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

c_1 sıfırdan farklı bir reel sabit, c_2 ve c_3 birer reel sabit, $k_2(s) \neq 0$ ve

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \frac{\mathcal{E}_2 c_2}{s + c_1}$$

olmak üzere

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2 B_1 + c_3 B_2$$

şeklinde yazılmalıdır.

<u>10.Durum</u> : Partially null çatılı bir α eğrisinin $\{N, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı a_1, a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_1 + a_3(s)B_2$ (3.2.40)

yazılabilir. (3.2.40) denkleminde s'ye göre türev alınıp (3.2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = a_1'(s)\, k_1(s)T + (a_1'(s) - a_3(s)\mathcal{E}_2 k_2(s))N + (a_2'(s) + a_1(s)k_1(s))B_1 + a_3'(s)B_2$$

ve buradan

$a_1'(s)\, k_1(s) = 1$ (3.2.41)

$a_1'(s) - a_3(s)\mathcal{E}_2 k_2(s) = 0$ (3.2.42)

$a_2'(s) + a_1(s)k_2(s) = 0$ (3.2.43)

$a_3'(s) = 0$ (3.2.44)

elde edilir. Bu dört denklemin ortak çözümü aşağıdaki şekilde yapılır.

(3.2.41) denklemlerinden $k_1(s) \neq 0$ olmak üzere $a_1(s) = \frac{1}{k_1(s)}$,

(3.2.44) denklemlerinden c_3 bir reel sabit olmak üzere $a_3(s) = c_3$,

ve (3.2.43) denklemlerinden c_2 bir reel sabit olmak üzere $a_2(s) = -\int \frac{k_2(s)}{k_1(s)} ds + c_2$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.10 α Partially null eğrisi olsun. α eğrisinin $\{N, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen düzlemde olması için (Yani α eğrisinin s parametresine bağlı a_1 , a_2 ve a_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(s) = a_1(s)N + a_2(s)B_1 + a_3(s)B_2$ şeklinde yazılması ifade edilmektedir.)

$k_1(s) \neq 0$, c_2 ve c_3 bir reel sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_1(s)} N - \left\{ \int \frac{k_2(s)}{k_1(s)} ds + c_2 \right\} B_1 + c_3 B_2$$

bulunur.

4. SONUÇLAR

Bu yüksek lisans tezinde Akgun M. A [1] nün Minkowski Uzayında spacelike, timelike ve Cartan eğrilerin alt uzaylarda kalma ve Ovalıoğlu, E. [24] nin 1-indeksli Yarı-Öklidyen Uzayında Pseudo null, Partially null ve null eğrilerin alt uzaylarında yatıp yatmadığına göre sınıflandırılmasının yapıldığı tezlerindeki yöntem kullanılarak 2-indeksli 4-boyutlu Yarı-Öklidyen Uzayında Pseudo null, Partially null eğrilerin alt uzaylarda kalması için şartlar araştırılmıştır.

Bu çalışma özellikle aşağıdaki iki bakış açısı göz önünde bulundurularak inşa edilmiştir.

1) 2-indeksli 4-boyutlu Yarı-Öklidyen Uzayında teorilerde Pseudo null ve Partially null eğrilerin alt uzaylarda olması için gerek şartların ne olduğuna bakılmış, eğrilerin alt uzayda yatıp yatmadığından ziyade eğer yatıyorsa hangi şartlar olmalıdır sorusunu cevabı aranmıştır.

2) Ovalıoğlu, E. [24] deki 1-indeksli Yarı-Öklidyen Uzayında Pseudo null ve Partially null eğrilerin karakterizasyonu verirken

   a) Pseudo null eğrilerin birinci eğriligi $k_1(s) = 1$ alarak

   b) Partially null eğrilerin üçüncü eğriliğinin $k_3(s) \neq 0$ alarak teoriler inşa etmiştir.

Oysa bu çalışmada 2-indeksli 4-boyutlu Yarı-Öklidyen Uzayında Pseudo null ve Partially null eğrilerin karakterizasyonu verilirken tüm muhtemel durumlar göz önüne alınarak;

   a) Pseudo null eğrilerin birinci eğriligi $k_1(s) = 0$ ve $k_1(s) = 1$ olması ihtimali

   b) Partially null eğrilerin üçüncü eğriliginin $k_3(s) = 0$ olması durumlarına

göre teoriler ifade ve ispat edilmiştir.

Sonuç olarak bu tezi yapılan diğer tezlerden farklı kılan özelliği: 2-indeksli 4-boyutlu Yarı-Öklidyen Uzayında Pseudo null ($k_1(s) = 0$ ve $k_1(s) = 1$ olması durumları dahil) ve Partially null eğrilerin ($k_3(s) = 0$ olması durumunda) Frenet çatısının alt uzaylarında olması için hangi şartları sağlaması gerektiğini tüm muhtemel sonuçlara göre incelemesidir.

KAYNAKLAR

[1] Akgun M. A. (2015), Minkowski Uzayında Bazı Egrilerin Karakterizasyonları, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

[2] Ali,A.T. ve López, R., Slant helices in Euclidean 4-space E4 , arXiv: 0901.3324.

[3] Ali, A.T., López, R. ve Turgut, M (2012), k-type partially null and pseudo null slant helices in Minkowski 4-space. Math. Commun. 17(1), pp. 93–103.

[4] Barros, M. (1997) General helices and a theorem of Lancert, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 1503–1509.

[5] Bektas, M ve Kulahci, M. (2017) Differential equations characterizing spacelike curves in the 3-dimensional lightlike cone, Palest. J. Math., vol. 6, no. 2, pp. 33037.

[6] Bektas, M. ve Yılmaz, M.Y. (2020) (k,m)-type slant helices for partially null and pseudo null curves in Minkowski space E41. Applied Mathematics and Nonlinear Sciences Vol 5, Sayı 1.

[7] Bektas, M., Ergüt ve Soylu D. (1998) The Characterization of the Spherical Timelike Curves in 3-Dimensional Lorentzian Space, Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series) 21 , 11-125.

[8] Bonnor W.B. (1969) Null curves in a Minkowski space-time, Tensör (N.S) 20, 229-242.

[9] Düldül, M. Ve Düldül, B. (2020) Characterızatıons Of Helıces By Usıng Theır Darboux Vectors, Sigma J Eng & Nat Sci 38 (3), 1299-1306.

[10] Ferrández, A., Gimenez, A. (2001) Lucas, P., Null helices in Lorentzian space forms, Internat. J. Modern Phys. A 16, 4845–4863.

[11] Hayden, H. A. (1931) On a general helix in a Riemannian n-space, Proc. London Math. Soc. 2, 37-45.

[12] İlarslan K. ve Nesovi´c E. (2007) On rectifying curves as centodes and extremal curves in the Minkowski 3-space. Novi Sad J Math, 37, 53-64.

[13] İlarslan K. (2005) Spacelike normal curves in Minkowski space E 31 . Turk J Math, 29, 53-63.

[14] İlarslan K.ve Nešović E. (2009) The first kind and the second kind osculating curves in Minkowski space-time. Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., 62:677-686.

[15] İlarslan K.ve Nešović E. (2008) Some characterizations of null, pseudo null and partially null rectifying curves in Minkowski space-time. Taiwanese J. Math., 12:1035-1044.

[16] İyigün E. (2019) A Study on a Partially Null Curve in E_2^4, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, Sayfalar 277 - 282

[17] Ikawa T. (1985) On curves and submanifolds in an indefinite-Riemannian manifold, Tsukuba J. Math., Volume 9, Number 2, 353-371.

[18] Inoguchi, J.ve Lee S. (2008) Null curves in Minkowski 3-space, International Elec. J. Geom. 1, 40–83.

[19] Kula, L.ve Ekmekçi, N., Yayli Y. and ˙İlarslan, K. (2009) Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space, Turk. J. Math. 169 (1), 600-607.

[20] López, R. (2008) Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, ArXiv:0810.3351.

[21] Monterde, J. (2007) Curves with constant curvature ratios, Bol. Soc. Mat. Mexicana 3a, 13/1, 177–186.

[22] Nesovic, E., Petrovic-Torgasev, M.ve Verstraelen, L. (2005) Curves in Lorentzian spaces, Bolletino U.M.I. 8, 685–696.

[23] O'Neill, B. (1983) Semi-Riemannian Geometry. With applications to relativity. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc., New York.

[24] Ovalıoğlu, E. (2019) Yarı-Öklidyen Uzayımda Null Eğrilerin Sınıflandırılması, Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[25] Özdamar, E. ve Hacisalihoğlu, H. H. (1975) A characterization of inclined curves in Euclidean n-space, Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1 24, 15–23.

[26] Romero-Fuster, M.C ve Sanabria-Codesal, E. (1999) Generalized helices, twistings and flattenings of curves in n-space. Mat. Cont., 17 , 267-280.

[27] Uçum A., Altın Erdem, H.ve İlarslan, K. (2016) Inextensıble Flows Of Partıally Null And Pseudo Null Curves In Semı-Euclıdean 4-Space Wıth Index 2, Novi Sad J. Math. Vol. 46, No. 1, 115-129.

ÖZGEÇMİŞ

Merve ASLAN

KİŞİSEL BİLGİLER

[redacted]

[redacted]

[redacted]

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans	**:** Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 2015
Lise	**:** Bedrettin DEMİREL Lisesi, Elazığ, 2011

ARAŞTIRMA DENEYİMİ

- ✓ Paket Programlar :Mathematica
- ✓ İşletim Sistemi :Windows

İŞ DENEYİMİ

2020 – ...	**:** Elazığ Bahar Anadolu Sağlık Meslek Lisesi
2018 – 2019	**:** Elazığ Doğa Koleji
2016 – 2018	**:** Elazığ İl Milli Eğitim Müdürlüğü (Ücretli Öğretmenlik)