WEIERSTRASS VE JACOBI FONKSİYONLARININ EŞLENİK KOMPLEKS PERİODLAR VE YARI-PERİOD KATLARI İÇİN DEĞER DEĞİŞİMLERİ

(Doktora Tezi)

Ahmet ŞEKER
Matematik Bölümü

ERZURUM-1976

ÖNSÖZ

Jacobi,Abel,Weierstrass tarafından esasları ortaya konulan ve özellikle mekanikte geniş uygulama alanı bulan eliptik fonksiyonlar teorisinin,kompleks analizin önemli bir dalını meydana getirdiği bilinmektedir.

İncelememizde,bu konunun bazı noktaları üzerinde durarak değişik formüller elde etmeye çalıştık.

Girişte,çifte periodik meromorf fonksiyonlar ve bunların period latisleri ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir.

Weierstrass fonksiyonlarına ayrılan birinci bölümde,eşlenik kompleks periodlara göre $\wp(u)$ ve $\zeta(u)$ fonksiyonlarının değer ve değişimleri araştırılmış,sabit çarpanlı fonksiyonlar sınıfına giren kök fonksiyonları için farklı bir yöntem getirilmiştir.

Jacobi'nin $H(u)$, $\Theta(u)$,... fonksiyonları son bölümde ele alınmıştır.Bunlar,genellikle basit periodik yapıda olmakla birlikte,çeşitli bakımlardan ilgili oldukları eliptik fonksiyonlar çerçevesi içinde etüd edilmişlerdir.

Eliptik fonksiyonlara ait period ve yarı-period katlarının, Jacobi fonksiyonlarının değerleri üzerindeki etkileri ve eşdeğer period çiftleri ile oluşturulan fonksiyonlar arasındaki bağıntılar araştırılırken önceki incelemelerden yararlanılmıştır.

Çalışmada yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Necdet SAN'a teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

A. ŞEKER

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Temel Kavram ve Teoremler

1. Latislerle İlgili Bazı Kavramlar:

C kompleks sayılar cisminin her toplamsal alt-grubu, Z tamsayılar halkası üzerinde bir modüldür. Sonlu düzlemde yığılma noktası olmayan bir modüle latis adı verilir. Sıfırdan farklı bir yığılma noktası olan her modül için 0 da bir yığılma noktasıdır[15]. O halde bir Ω latisi için sıfır yığılma noktası değildir. Bu nedenle sıfırdan farklı elemanları mutlak değerce alttan sınırlı olan, toplamaya göre her değişmeli grup bir latis olmalıdır.

Latisler 0,1 ve 2 boyutlu olmak üzere üç sınıfa ayrılabilir. $L_0 = \{ 0 \}$, 0-boyutlu en basit latisdir.

$L = \{ m\omega \mid \omega \neq 0, m \in Z \}$,

1-boyutlu bir latisdir.

$\Omega = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid n,m \in Z \}$,

2-boyutlu bir latisdir. Burada ω_1 ve ω_2 lineer bağımsız iki kompleks sayıdır. (ω_1, ω_2) ikilisine Ω nın bir bazı denir. a,b,c,d birer tamsayı olmak üzere ad-bc = ± 1 ise, $\omega = a\omega_1 + b\omega_2$ ve $\omega' = c\omega_1 + d\omega_2$ de Ω için bir bazdır. Im ($\frac{\omega_2}{\omega_1}$)>0 ise, Im ($\frac{\omega'}{\omega}$)>0 olması için ad-bc =1 alınmalıdır[12].

Ω bir latis olmak üzere $u-a \in \Omega$ ise, u ve a kompleks sayıları Ω modülüne göre denktir denir ve $u \equiv a \pmod{\Omega}$ olarak yazılır. Herhangi bir $a \in C$ verildiğinde her $\omega \in \Omega$ için $a + \Omega = \{a + \omega\}$ kümesi, a ya denk olan bütün noktaların kalan sınıfıdır.

Her kalan sınıfına ait yalnız bir noktayı içine alan basit bağımlı bir bölgeye, Ω nın temel bölgesi denir. $\Omega = L_0$ ise her kalan sınıfı yalnız bir u değerini içine aldığından, temel bölge bütün düzlemdir. $\Omega = L$ ise, temel bölge paralel iki doğru ile sınırlanan sonsuz bir şerittir.

İki boyutlu Ω latisi için bir temel bölge birçok şekilde seçilebilir.

$D=\{a\omega_1+b\,\omega_2 \mid 0\leq a,b < 1\}$

paralelkenarı bunlardan biridir. İki boyutlu her Ω latisinin, aşağıdaki özellikleri sağlayan, indirgenmiş bir (ω_1,ω_2) bazı vardır.

1. $\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$ dır.
2. Sıfırdan farklı her $\omega\varepsilon\Omega$ için $|\omega|\geq|\omega_1|$ dır.
3. ω_1 in tam katı olmayan her $\omega\varepsilon\Omega$ için $|\omega|\geq|\omega_2|$ dır [15].

Bir Ω latisinin bütün ω noktaları, sıfırdan farklı bir $\lambda\varepsilon C$ ile çarpıldığında yeni bir

$\lambda\,\Omega=\{\lambda\,\omega \mid \omega\,\varepsilon\,\Omega\}$

latisi elde edilir. Ω nın bir bazı (ω_1,ω_2) ise $\lambda\Omega$ nın bir bazı $(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)$ olmalıdır. Özel olarak $\frac{1}{\omega_1}\Omega=\Omega_\tau$ nun bir bazı $(1,\tau)$ olur. Burada $\tau=\frac{\omega_2}{\omega_1}$ dır. Ω nın (ω_1,ω_2) bazının indirgenmiş olması için,

$\mathrm{Im}\,(\tau) > 0$ ve $|\tau+\bar{\tau}|\leq 1\leq|\tau|$ veya

$1\leq|\tau|\leq|1\pm\bar{\tau}|$

olması gerek ve yeterdır [15]. Buna göre (ω_1,ω_2) indirgenmiş bazı $\mathrm{Im}\,(\tau)>0$,

$-\frac{1}{2}\leq\mathrm{Re}\,(\tau)\leq\frac{1}{2},\ |\tau|\geq 1$

eşitsizlikleri ile karakterize edilebilir.

$\Omega_\tau=\{m+n\tau \mid m,n\,\varepsilon Z\}$ ve $|\lambda|=1$ olmak üzere $\Omega_\tau=\lambda\Omega_\tau$ ise, Ω_τ simetrik latis adını alır. Simetrik latisler dikdörtgensel ve eşkenardörtgensel diye ikiye ayrılır. $\mathrm{Re}\,(\tau)=0$ ise, Ω_τ dikdörtgenseldir. $\mathrm{Re}\,(\tau)=\pm\frac{1}{2}$ veya $|\tau|=1$ ise, Ω_τ eşkenardörtgenseldir.

$\Omega=a\,\Omega$ eşitliğine uyan a kompleks sayıları, Ω nın dönmelerinin G grubunu oluşturur. Her Ω için $\Omega=\pm\Omega$ olduğundan, $\pm 1\varepsilon G$ dir. G nin 1 ve -1 den başka elemanı varsa, Ω ya regülierdir denir. Regülier latisler, karesel ve üçgensel diye iki sınıfa ayrılır.

$G=\{\ i^n \mid n\,\varepsilon\,Z\}$

ise, Ω kareseldir.

$G=\{\ a^n \mid a=\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right),\ n\,\varepsilon\,Z\}$

ise, Ω üçgenseldir.

Herhangi bir latis Ω ise, $k > 2$ tamsayısı için,

$$S_k(\Omega) = \Sigma\, \omega^{-k} \quad , \omega \in \Omega - \{0\}$$

toplamı mutlak yakınsaktır [6].

$$S_k(\lambda \Omega) = \lambda^{-k} S_k(\Omega)$$

homogenlik özelliği gözönüne alınarak, aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

1. Her Ω için, $S_{2k+1}(\Omega) = 0$ dır.

2. Ω karesel bir latis ise, 4 ile bölünemeyen her k tamsayısı için $S_k(\Omega) = 0$ dır.

3. Ω üçgensel bir latis ise, 6 ile bölünemeyen her k tamsayısı için $S_k(\Omega) = 0$ dır.

4. $\Omega = \bar{\Omega}$ ise, $S_k(\Omega)$ bir reel sayıdır.

2. Eliptik Fonksiyonların Genel Teorisi:

Sabit olmayan periodik bir fonksiyonun periodları bir latis oluşturmaktadır [6]. Period latisi 2-boyutlu olan fonksiyona çifte periodik, çifte periodik ve meromorf bir fonksiyona da eliptiktir denir. Period latisinin herhangi bir temel bölgesine period-paralelkenarı adı verilir.

$$D = \{ a\,\omega_1 + b\,\omega_2 \mid 0 \leq a, b < 1 \}$$

bölgesi esas period-paralelkenarı olarak bilinir.

Bir eliptik fonksiyonun herhangi bir period-paralelkenarında belli sayıda kutbu vardır. Her kutup katlılığı kadar sayılmak üzere bir period - paralelkenarındaki kutupların sayısına, eliptik fonksiyonun mertebesi denir. Aşağıda ıspatsız olarak verilen teoremlerden, bir eliptik fonksiyonun enaz ikinci mertebeden olabileceği sonucu çıkarılabilir.

Teorem 1. (Liouville) Çifte periodik her tam fonksiyon sabittir.

Teorem 2. Period latisi Ω olan bir eliptik fonksiyon için $a_1 + \Omega, \ldots, a_h + \Omega$ kalan sınıfları $m_1, \ldots, m_h$ katlı birer sıfır; $b_1 + \Omega, \ldots, b_k + \Omega$ kalan sınıfları $n_1, \ldots, n_k$ katlı birer kutup ve bu kutuplardaki rezidüler $A_1, \ldots, A_k$ ise,

(1) $\quad \Sigma\, A_k = 0,$

(2) $\quad \Sigma\, m_h = \Sigma n_k,$

(3) $\quad \Sigma\, m_h\, a_h - \Sigma n_k\, b_k \equiv 0 \pmod{\Omega}$

bağıntıları vardır.

Teorem 3. Period latisleri ortak olan iki eliptik fonksiyonun kutupları ve sıfırları,katlılıkları ile birlikte,aynı ise,bu iki fonksiyonun oranı sıfırdan farklı bir sabittir.

Teorem 4. Period latisleri ortak olan iki eleptik fonksiyonun kutupları ve her kutup için esas kısımları aynı ise,bu iki fonksiyonun farkı bir sabittir.

BÖLÜM I

Weierstrass Fonksiyonları

3. *Weierstrass'ın $\wp$-Fonksiyonuna Ait İlk Özellikler:*

Bir $f(u)$ eliptik fonksiyonu verildiğinde, period latisini açıkça belirtmek için $f(u|\Omega)$ gösterimini kullanacağız. Ω latisinin bir bazı (ω_1, ω_2) olmak üzere $\omega = m\,\omega_1 + n\,\omega_2$ olsun.

$$\wp(u \mid \Omega) = u^{-2} + \Sigma' \{(u-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\}\ , \ \omega \neq 0 \tag{1}$$

olarak tanımlanan Weierstrass'ın $\wp$-fonksiyonu, $\omega\in\Omega$ noktaları dışında, bütün düzlemde holomorftur. Her ω noktası $\wp(u)$ için iki katlı bir kutuptur.

Sıfırdan farklı bir λ kompleks sayısı için,

$$\wp(\lambda u \mid \lambda\Omega) = \lambda^{-2}\,\wp(u \mid \Omega) \tag{2}$$

homogenlik özelliğinin varlığı açıktır. Her Ω latisi için $\Omega = -\Omega$ olduğundan, $\lambda = -1$ alınarak

$$\wp(-u \mid \Omega) = \wp(u \mid \Omega) \tag{3}$$

elde edilir. Her $\omega\in\Omega$ için $\wp(u+\omega) = \wp(u)$ dur. Özet olarak, $\wp(u)$ period latisi Ω olan ikinci mertebeden bir eliptik fonksiyondur.

$S_k(\Omega) = S_k$ alınarak $\wp(u)$ fonksiyonu $u = 0$ komşuluğunda seriye açılırsa,

$$\wp(u) = u^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1)\,S_{2n}\,u^{2n-2} \tag{4}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa, buradan hemen

$$\wp'^2(u) - 4\wp^3(u) + 60S_4\wp(u) = -140S_6 + 36(3S_4^2 - 7S_8)\,u^2 + \ldots$$

bulunur. Burada sol yan çifte periodik, sağ yan tam fonksiyon olduğundan Liouville teoreminden dolayı

$$\wp'^2(u) - 4\wp^3(u) + 60S_4\wp(u) = C$$

olmalıdır. $u = 0$ için $C = -140S_6$ bulunur. $g_2 = 60S_4$ ve $g_3 = 140S_6$ alınırsa,

$$\wp'^2 = 4\wp^3(u) - g_2\,\wp(u) - g_3 \tag{5}$$

elde edilir. Buradan hemen

$$\wp''(u) = 6\,\wp^2(u) - \frac{1}{2}\,g_2 \tag{6}$$

çıkar.

$C_o = 1,\ C_1 = 0,\ C_n = (2n-1)\ S_{2n}$ konulursa, (4) den

$$p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u^{2n-2} \tag{7}$$

bulunur. (6) özdeşliğinde,

$$p''(u) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(2n-3)\ C_n\ u^{2n-4}\ ,$$

$$p^2(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\{\sum_{k=0}^{n} C_k\ C_{n-k}\}\ u^{2n-4}$$

konulur ve katsayılar karşılaştırılırsa,

$$(n-3)(2n+1)\ C_n = 3\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\ ,\ n > 3 \tag{8}$$

bulunur. Böylece $C_2 = 3S_4 = \frac{1}{20}\ g_2$ ve C_3 $5S_6 = \frac{1}{28}\ g_3$ sabitleri biliniyorsa, (4) veya (7) serilerindeki bütün katsayılar bellidir.

Ω period latisinin bir bazı (ω_1, ω_2) ve $\omega_1+\omega_2 = -\omega_3$ olsun. $p'(u)$ tek-fonksiyon olduğundan $k = 1,2,3$ için,

$$p'(\frac{1}{2}\ \omega_k) = p'(\omega_k - \frac{1}{2}\ \omega_k) = -p'(\frac{1}{2}\ \omega_k)$$

elde edilir. Buna göre $\frac{1}{2}\ \omega_k + \Omega$ kalan sınıfları $p'(u)$ için, ya bir sıfır yeri yada kutup olmalıdır. Fakat $p'(u)$ nun bütün kutupları $\omega\epsilon\Omega$ noktalarıdır. O halde $p'(u)$ nun bütün sıfırları $\frac{1}{2}\ \omega_k + \Omega$ kalan sınıflarındadır ve bunlar birer basit sıfır yerleridir.

$p(\frac{1}{2}\ \omega_k) = e_k$ konulursa, $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$ denkleminin kökleri e_1, e_2, e_3 olduğundan

$$\begin{aligned} & e_1 + e_2 + e_3 = 0 \\ & e_1\ e_2 + e_2\ e_3 + e_3 e_1 = -\frac{1}{4}\ g_2 \\ & e_1\ e_2\ e_3 = \frac{1}{4}\ g_3 \end{aligned} \tag{9}$$

elde edilir.

$$\{\ p(u) - e_k\}\{\ p\ (u \pm \frac{1}{2}\ \omega_k) - e_k\} = d_k^2 \tag{10}$$

eşitliği bilinmektedir [6]. Burada $d_k^2 = (\ e_h - e_k)(e_j - e_k)$ dır. Buna göre $-u \equiv u - \frac{1}{2}\ \omega_k (\mathrm{mod}\ \Omega\ )$ ise, $d_k^2 = \{\ p(u) - e_k\ \}^2$ veya $p(u) = e_k \pm d_k$ olmalıdır. Bu özellik yalnız

$$\pm\ \frac{1}{4}\ \omega_k + \Omega\ ,\pm\ (\ \frac{1}{4}\ \omega_k \pm \frac{1}{2}\ \omega_j) + \Omega\quad ,\ j \neq k$$

kalan sınıflarında sağlanır. d_k karekökünü,

$$p(\tfrac{1}{4}\,\omega_k) = e_k + d_k,\quad p(\tfrac{1}{4}\,\omega_k + \tfrac{1}{2}\,\omega_j) = e_k - d_k \qquad (11)$$

olarak tanımlıyoruz.

4. Eksenlere Göre Simetrik Olan Latisler İçin p *- fonksiyonunun Bazı Özellikleri:* $\Omega = \bar{\Omega}$ ise, $S_k(\Omega)$ reel olduğundan g_2 ve g_3 de reeldirler. Bu durumda (4) veya (7) serilerinde bütün katsayılar reeldir. Her $x, y \in R$ için $p(x)$ ve $p(iy)$ değerleri Reel olduğundan p fonksiyonu eksenler üzerinde reel değerler alır. Çok küçük u değerleri için, (4) serisinde u^{-2} den sonraki bütün terimler atılabilir. Bu nedenle

$$\lim_{x\to 0} p(x) = \infty,\quad \lim_{y\to 0} p(iy) = -\infty$$

olmalıdır.

Her Ω için $p(\bar{u}|\bar{\Omega}) = \bar{p}(u|\Omega)$ dır. (1) de u yerine $\bar{u}$ ve aynı anda her ω yerine $\bar{\omega}$ konulursa, bu özellik hemen görülür. Özel olarak $\Omega = \bar{\Omega}$ ise $p(\bar{u}|\Omega) = \bar{p}(u|\Omega)$ olmalıdır. Öte yandan,

$$u \pm \bar{u} \equiv 0 \pmod{\Omega}$$

koşulunu sağlayanbütün noktalar için $p(\bar{u}) = p(u)$ dır. Bu koşul Re(u) veya iIm(u), $\frac{1}{2}\Omega$ da olduğu zaman gerçeklenir. O halde Reel ve sanal eksenleri yarı-periodlarda kesen yatay ve düşey doğrular üzerinde p (u) reeldir.

ω_1 periodunun reel ve ω_2 periodunun imaginer olması halinde Ω dikdörtgensel bir latisdir. Period ve yarı-periodlarda reel ve sanal eksene dik olan doğrular üzerinde p (u) reeldir. Köşeleri $0, \frac{1}{2}\omega_1, -\frac{1}{2}\omega_3$ ve $\frac{1}{2}\omega_2$ olan dikdörtgenin çevresinde p(u) her reel değeri yalnız bir kez alır. Çünkü bu yol üzerinde $u \equiv \pm u' \pmod{\Omega}$ olacak şekilde farklı iki nokta yoktur. Sözkonusu dikdörtgenin çevresinde u değişkeni

$$\frac{\omega_1}{4}, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{4} + \frac{\omega_1}{2}, -\frac{\omega_3}{2}, \frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{4}$$

değerlerinden geçtiğinden

$$e_1 + d_1 > e_1 > e_2 - d_2 > e_3 + d_3 > e_1 - d_1 > e_2 > e_2 + d_2$$

olmalıdır. Bu arada sıfırdan farklı bir u için $p(u) = 0$ olur.

$\wp(-\frac{\omega_3}{2}) = e_3 = 0$ ise, $u = -\frac{\omega_3}{2}$ noktası $\wp(u)$ nun iki katlı bir sıfır yeridir. Çünkü $\wp'(-\frac{\omega_3}{2}) = 0$ dır. Bu durumda $e_1 > 0 > e_2$ ve $e_2 = -e_1$ dir.

$e_1 \leqq 0$ varsayılırsa, $0 \geqq e_1 > e_3 > e_2$ olmalıdır. Öte yandan $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ olduğundan bu varsayım olanaksızdır. Benzer bir tartışma $e_2 \geqq 0$ olmadığını gösterir. O halde daima $e_1 > 0$ ve $e_2 < 0$ dır. Başka bir deyişle $\wp(u)$, reel eksen üzerinde daima pozitif ve sanal eksen üzerinde daima negatif reel değerler alır. (9) eşitliklerinden

$$g_2 = 4\{(e_1 + e_2)^2 - e_1 e_2\} > 0,$$

$$e_3 g_3 = 4 e_1 e_2 e_3^2 < 0$$

elde edilir.

Ω period latisi eşkenardörtgensel ve reel eksene göre simetrik ise, öyle bir (ω_1, ω_2) bazı vardırki $\omega_2 = \bar{\omega}_1$, $\text{Re}\ (\omega_1) < 0$ ve $\text{Im}\ (\omega_1) > 0$ dır.

$$D = \{\, a\,\omega_1 + b\,\omega_2 \mid -1 < a, b \leqq 0\}$$

esas period-paralelkenarının (eşkenar dörtgeninin) köşegenleri üzerinde $\wp(u)$ nun reel değerler aldığı bellidir. Reel eksen üzerinde 0 dan $\frac{\omega_3}{2}$ ye kadar ve $\text{Re}\ (u) = \text{Re}\ (-\omega_1)$ doğrusu üzerinde $-\frac{\omega_3}{2}$ den $-\omega_2$ ye kadar değişen u değerleri için $\wp(u)$ her reel değeri yalnız bir kez alır. Bu durumda

$$e_2 = \wp(-\frac{\omega_2}{2}) = \wp(-\frac{\bar{\omega}_1}{2}) = \bar{e}_1 \text{ ve } e_3 = -(e_1 + e_2) \in R$$

dır. $e_3 + d_3 > e_3 - d_3$ olduğundan $d_3 > 0$ dır.

$\wp(-\frac{1}{4}\omega_3) = e_3 + d_3 \leqq 0$ olamaz. Çünkü $-e_3 \geqq d_3$ ise, $d_3 > 0$ olduğundan $-e_3 = e_1 + e_2 = e_1 + \bar{e}_1 = 2\text{Re}\ (e_1) > 0$ dır. Öte yandan

$$d_3^2 = (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) = |\, e_3 - e_1|^2 \text{ ve } d_3 = |\, e_3 - e_1|$$

olduğundan $|e_3| \geqq d_3$ ise, $\text{Re}\ (e_1) < 0$ dir. O halde

$$\wp(-\frac{1}{4}\omega_3) = e_3 + d_3 < 0$$

olmalıdır. Benzer bir tartışma

$$\wp(-\frac{1}{4}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_2) = e_3 - d_3 < 0$$

olduğunu gösterir. Buna göre $\wp(u)$ nun yukarıda belirtilen esas period paralelkenarındaki sıfır yerleri,köşeleri $\frac{1}{4}\omega_3, \frac{1}{4}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_1,$ $\frac{3}{4}\omega_3$ ve $\frac{1}{4}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_2$ olan açık eşkenar dörtgenin köşegenleri üzerindedir.

$\mathrm{Re}(u) = \frac{1}{4}(2n+1)\omega_3$ ise, $|\wp(u) - e_3| = d_3$ dır. Gerçekten $u + \bar{u} = \frac{1}{2}(2n+1)\omega_3$ ise, $\bar{u} \equiv \frac{1}{2}\omega_3 - u \pmod{\Omega}$ olduğundan

$$d_3^2 = \{\wp(u) - e_3\}\{\wp(u - \tfrac{1}{2}\omega_3) - e_3\} = \{\wp(u) - e_3\}\{\wp(\bar{u}) - e_3\}$$
$$= |\wp(u) - e_3|^2$$

dır. Herhangi bir k tek-tamsayısı için $u - \frac{1}{4}k(\omega_1 - \omega_2)$ reel ise, benzer bir tartışma ile, yine

$$|\wp(u) - e_3| = d_3$$

elde edilir.

5. Ω Period Latisinin Regülier Olması Hali:

Ω Regülier bir latis ise ya karesel veya üçgenseldir. Ω karesel ise, $S_6(\Omega) = 0$ olduğundan $g_3 = 0$ dır. $4g_3 = e_1e_2e_3$ olduğuna göre e_k değerlerinden biri sıfır olmalıdır. Her karesel Ω latisinin, $\omega_2 = i\omega_1$ olacak şekilde bir (ω_1, ω_2) bazı vardır. $\Omega = i\Omega$ olduğundan.

$$e_2 = \wp(\tfrac{1}{2}\omega_2|\Omega) = \wp(\tfrac{1}{2}i\omega_1|\, i\Omega) = i^{-2}\wp(\tfrac{1}{2}\omega_1|\Omega) = -e_1$$

elde edilir. Öte yandan e_1, e_2, e_3 değerleri birbirlerinden farklı olduklarından,bu baz için $e_3 = 0$ olmalıdır.

Özel olarak Ω karesel ve eksenlere göre simetrik ise, ya dikdörtgensel veya eşkenardörtgensel konumdadır. Ω bu iki konumdan biri olarak karesel ise,$\sqrt{i}\,\Omega$ öteki konumdadır.

$$\wp(\sqrt{i}\,u|\sqrt{i}\,\Omega) = -i\wp(u|\Omega)$$

olduğundan, $\wp$-fonksiyonunun bir konumda reel değerler aldığı noktalar öbür konumda imaginer değerler aldığı noktalardır.

Ω üçgensel ise,$S_4(\Omega) = 0$ olduğundan $g_2 = 0$ dır. Her üçgensel Ω latisinin,$\omega_2 = \rho\,\omega_1$ olacak şekilde (ω_1, ω_2) bazı vardır. Burada $\rho = \exp(i\frac{\pi}{3})$ dır. $\Omega = \rho\Omega$ olduğundan

$$e_2 = \wp(\tfrac{1}{2}\omega_2|\Omega) = \wp(\tfrac{1}{2}\rho\omega_1|\rho\Omega) = \rho^{-2}\wp(\tfrac{1}{2}\omega_1|\Omega) = \rho^{-2}e_1$$
$$= -\rho e_1$$

ve

$$e_3 = -(e_1 + e_2) = -(e_1 - \rho e_1) = (\rho - 1)e_1 = \rho^2 e_1$$

bulunur.

Özel olarak Ω üçgensel ve $\Omega = \bar{\Omega}$ ise, $\omega_2 = \bar{\omega}_1$ olacak şekilde bir (ω_1, ω_2) bazı vardır. Ayrıca $\omega_2 = \rho\omega_1$ veya $\omega_2 = \rho^2\omega_1$ dır. $\omega_2 = \rho\omega_1$ olması halinde, $\frac{1}{3}\rho\omega_3 + \frac{1}{3}\omega_3 = -\omega_2$ olduğundan, $\frac{1}{3}\rho\omega_3 \equiv -\frac{1}{3}\omega_3 (\text{mod } \Omega)$ olur. $\wp(\rho u) = \rho\, \wp(u)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\wp(\tfrac{1}{3}\rho\omega_3) = \rho\wp(\tfrac{1}{3}\omega_3) = \wp(-\tfrac{1}{3}\omega_3) = \wp(\tfrac{1}{3}\omega_3)$$

ve dolayısıyle

$$\wp(\tfrac{1}{3}\omega_3) = 0$$

bulunur. O halde esas period-paralelkenarını oluşturan eşkenar üçgenlerin merkezleri, $\wp$-fonksiyonunun sıfır yerleridir.

6. Eşlenik Kompleks Periodlar İçin ζ-fonksiyonu Üzerine:

$$\zeta(u) = u^{-1} + \Sigma\,\{(u-\omega)^{-1} + \omega^{-1} + \omega^{-2}u\}\,, \quad \omega\epsilon\Omega - \{o\} \qquad (12)$$

olarak tanımlanan ζ-fonksiyonu, $\omega\epsilon\Omega$ latis noktaları dışında, bütün düzlemde holomortur. $\omega\epsilon\Omega$ noktaları birer basit kutuptur. Bu kutuplardaki rezüdüler +1 dır.

(12) den türev alınırsa,

$$\zeta'(u) = -u^{-2} - \Sigma\,\{(u-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\} = -\wp(u) \qquad (13)$$

elde edilir. $\wp(u)$ çift-fonksiyon olduğundan $\zeta(u)$ tek-fonksiyondur.

$$\frac{d}{du}\{\zeta(u+\omega) - \zeta(u)\} = -\{\wp(u+\omega) - \wp(u)\} = 0$$

olduğundan,

$$\zeta(u+\omega) - \zeta(u) = \eta \qquad (14)$$

dır. Burada η, $\omega\epsilon\Omega$ ya bağlı bir sabittir. $\omega\epsilon\Omega$ elemanlarına karşılık gelen η sabitleri bir H latisini oluşturur. H ve Ω arasında kurulan bu eşleme bir toplamsal izomorfizmdir. Çünkü Ω nın bir bazı (ω_1, ω_2) ise, (η_1, η_2) de H nin bir bazıdır. $\omega = p\,\omega_1 + q\,\omega_2$ ise

$$\zeta(u+\omega) - \zeta(u) = \eta = p\,\eta_1 + q\,\eta_2$$

dır[6].

$\omega \in \Omega$ fakat $\frac{1}{2}\omega \notin \Omega$ ise, $\zeta(\frac{1}{2}\omega)$ sonlu bir sayıdır. (14) de $u = -\frac{1}{2}\omega$ konulursa, $\zeta(\frac{1}{2}\omega) = \frac{1}{2}\eta$ bulunur. Öyleyse, $\eta_1 = 2\zeta(\frac{1}{2}\omega_1)$ ve $\eta_2 = 2\zeta(\frac{1}{2}\omega_2)$ dir. (ω_1, ω_2) ve (η_1, η_2) bazları arasında $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pm 2\pi i$ bağıntısı vardır.

$\operatorname{Im}(\frac{\omega_2}{\omega_1}) > 0$ ise, $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$ dir[14].

Her Ω latisi için

$$\zeta(\bar{u}\,|\,\bar{\Omega}) = \bar{\zeta}(u\,|\,\Omega)$$

dır. Bu özellik (12) tanımından hemen çıkar. Özel olarak $\Omega = \bar{\Omega}$ ise,

$$\zeta(\bar{u}\,|\,\Omega) = \bar{\zeta}(u\,|\,\Omega)$$

olmalıdır. Bu nedenle Ω eksenlere göre simetrik bir latis ise, H da öyledir.

$\omega_2 = \bar{\omega}_1$ ise, ω_1 ve ω_2 ile oluşturulan Ω latisi eşkenardörtgensel ve eksenlere göre simetriktir. Bu durumda

$$\eta_2 = 2\zeta(\frac{1}{2}\omega_2) = 2\zeta(\frac{1}{2}\bar{\omega}_1) = 2\bar{\zeta}(\frac{1}{2}\omega_1) = \bar{\eta}_1$$

olduğundan, bir bazı (η_1, η_2) olan H latisi Ω ile ayni özelliklere sahiptir. Ayrıca

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$$

Legendre bağıntısı gözönüne alınırsa,

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \eta_1\omega_2 - \bar{\eta}_1\bar{\omega}_2 = i2\operatorname{Im}(\eta_1\omega_2)$$

olduğundan $\operatorname{Im}(\eta_1\omega_2) = \pi$ elde edilir.

(4) ve (13) den

$$\zeta(u) = u^{-1} - S_4u^3 - S_6u^5 - \ldots \qquad (15)$$

bulunur. $\Omega = \bar{\Omega}$ ise, S_k lar reel olduklarından, $\zeta(u)$ reel eksen üzerinde reel, sanal eksen üzerinde imaginer değerler alır.

7. Weierstrass'ın σ- fonksiyonu ve Kök Fonksiyonları:

$$\sigma(u) = u \prod_{\omega\neq 0}(1-\frac{u}{\omega}) \exp\{\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}(\frac{u}{\omega})^2\} \qquad (16)$$

olarak tanımlanan $\sigma(u), \omega\varepsilon\Omega$ latis noktalarını birer basit sıfır olarak kabul eden, bir tam fonksiyondur.

$$\sigma(\lambda u \mid \lambda\Omega) = \lambda\, \sigma(u\mid\Omega), \lambda \neq 0 \qquad (17)$$

homogenlik özelliği (16) dan hemen çıkar. Her Ω için $\Omega = -\Omega$ oldugu gözönüne alınırsa, $\lambda = -1$ için

$$\sigma(-u\mid\Omega) = -\sigma(u\mid\Omega)$$

elde edilir. Yine (16) tanımından

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sigma(u)}{u} = 1$$

olduğunu görmek zor değildir. (16) dan logaritmik türev alınırsa,

$$\frac{d}{du}\log\sigma(u) = \zeta(u) \qquad (18)$$

elde edilir. Bir $\omega\varepsilon\Omega$ için,

$$\frac{d}{du}\log\frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(u)} = \zeta(u+\omega) - \zeta(u) = \eta$$

olduğundan

$$\sigma(u+\omega) = A\sigma(u)\exp(\eta u)$$

olmalıdır. $\omega\varepsilon\Omega$ fakat $\frac{1}{2}\omega\notin\Omega$ ise, $A = -\exp(\frac{\eta\omega}{2})$ dır. $\frac{1}{2}\omega\varepsilon\Omega$ ise, $A = \exp(\frac{1}{2}\eta\omega)$ dır[6]. Herhangi bir $\omega\varepsilon\Omega$ için,

$$\frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(u)} = \pm\exp\{\eta(u+\frac{1}{2}\omega)\}$$

olduğundan,

$$\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma(u)} = \frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma(u+\omega)}\frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(u)}$$

$$= \pm\exp\{\eta(u+\frac{3}{2}\omega)\}\{\pm\exp\eta(u+\frac{1}{2}\omega)\}$$

$$= \exp\{2\eta(u+\omega)\}$$

elde edilir. Genel olarak $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ ve $\eta = m\eta_1 + n\eta_2$ ise,

$$\sigma(u+\omega) = (-1)^{mn+m+n} \exp\{\eta(u+\frac{1}{2}\omega) \tag{19}$$

formülü bulunur.

Bir f(u) eliptik fonksiyonunun bir period paralelkenarındaki basit sıfırları $a_1,\ldots,a_n$ ve basit kutupları $b_1,\ldots,b_n$ ise,

$$f(u) = C\, e^{-\eta u} \frac{\prod_{k=1}^{n} \sigma(u-a_k)}{\prod_{k=1}^{n} \sigma(u-b_k)} \tag{20}$$

formülü vardır[8]. Burada C herhangi bir sabit, η da

$$\Sigma a_k - \Sigma b_k = \omega \in \Omega$$

ya karşılık gelen H latisinin bir noktasıdır. Kutup ve sıfırların basit olmadığı halde (20) formülü yine geçerlidir.

Ω ya ait olmayan bir nokta a ise, $\wp(u) - \wp(a)$ eliptik fonksiyonunun sıfırları $u = \pm a$, kutupları $u = 0$ noktalarıdır. (20) den

$$\wp(u) - \wp(a) = C\,\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+a)}{\sigma^2(u)} \tag{21}$$

bulunur. $u \to 0$ için $u^2\{\wp(u) - \wp(a)\} \to 1$ ve $\{\frac{\sigma(u)}{u}\}^2 \to 1$

olduğundan, $C = -\frac{1}{\sigma^2(a)}$ bulunur. $a = \frac{1}{2}\omega_k$ ise,

$$\wp(u) - e_k = -\frac{\sigma(u-\frac{1}{2}\omega_k)\,\sigma(u+\frac{1}{2}\omega_k)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\frac{1}{2}\omega_k)} \tag{22}$$

dır. $\omega_k \in \Omega$ fakat $\frac{1}{2}\omega_k \notin \Omega$ olduğundan, (19) a göre

$$\sigma(u+\frac{1}{2}\omega_k) = -e^{\eta_k u}\,\sigma(u-\frac{1}{2}\omega_k)$$

olmalıdır. Bu değer (22) de yerine konur ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\wp(u) - e_k = \{e^{\frac{1}{2}\eta_k u}\,\frac{\sigma(u-\frac{1}{2}\omega_k)}{\sigma(u)\,\sigma(\frac{1}{2}\omega_k)}\}^2 \tag{23}$$

elde edilir. $\wp(u) - e_k$ fonksiyonunun kareköklerinden, $u = 0$

kutbundaki rezüdüsü +1 olanını $\Phi_k(u)$ olarak tanımlarsak,

$$\Phi_k(u) = - e^{\frac{1}{2}\eta_k u} \frac{\sigma(u - \frac{1}{2}\omega_k)}{\sigma(u)\ \sigma(\frac{1}{2}\omega_k)} ,k = 1,2,3 \tag{24}$$

olmalıdır. Gerçekten

$$\lim_{u \to o} u\ \Phi_k(u) = - \frac{\sigma(-\frac{1}{2}\omega_k)}{\sigma(\frac{1}{2}\omega_k)} = + 1$$

dır. Açık olarak $\Phi_k(u)$ bir eliptik fonksiyondur. Ancak period latisi Ω değildir. Çünkü gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} &\Phi_k(u + \omega_k) = \Phi_k(u) \\ &\Phi_k(u + \omega_h) = -\Phi_k(u)\ ,\ h \neq k \end{aligned} \tag{25}$$

olduğu görülür. Buna göre $\Phi_k(u)$ nun Ω_k period latisi Ω nın bir alt-latisidir. Besbelli Ω_k nın bir bazı $(\omega_k, 2\omega_h)$ dır. $\omega \in \Omega$ noktaları $\sigma(u)$ için birer basit sıfır olduğundan $\Phi_k(u)$ için birer basit kutuptur. $\Phi_k(u)$ nun $\omega \in \Omega$ noktaları dışında kutbu yoktur. ω_k ve $2\omega_h$ ile belirtilen period paralelkenarında $u = 0$ dışında ikinci kutup $u = \omega_h$ noktasıdır. Teorem 2 ye göre bu kutuptaki rezüdü -1 olmalıdır. Gerçekten işlemler yapılırsa,

$$\lim_{u \to \omega_h} (u - \omega_h)\ \Phi_k(u) = e^{\frac{1}{2}(\eta_k\omega_h - \eta_h\omega_k)} = e^{\pm i\pi} = -1$$

bulunur.

$$p'^2(u) = 4\{p(u) - e_1\}\{p(u) - e_2\}\{p(u) - e_3\}\ ,\ [14]$$

eşitliğinde $p(u) = \Phi_k^2(u) + e_k$ konulursa,

$$\{2\Phi_k(u)\Phi_k'(u)\}^2 = 4\Phi_1^2(u)\ \Phi_2^2(u)\ \Phi_3^2(u)$$

elde edilir. Her iki yanın karekökü alınırsa,

$$\Phi_k'(u) = \pm\ \Phi_h(u)\ \Phi_j(u)$$

bulunur. $\Phi_k(u)$ nun $u = 0$ daki esas kısmı u^{-1} olduğundan $\Phi_k'(u)$ nun esas kısmı $-u^{-2}$ dir. Öyleyse, $\Phi_k'(u) = -\Phi_h(u)\Phi_j(u)$ olmalıdır.

BÖLÜM II

Jacobi Fonksiyonları

8. Jacobi Fonksiyonlarında Yarı-period Katlarının Değerlere Etkileri: Jacobi periodlar için $2K$ ve $2iK'$ notasyonlarını kullanmıştır. Bu nedenle bu bölümde $\omega_1 = 2K$ ve $\omega_2 = 2iK'$ alacağız ve daima $\mathrm{Re}\,(\frac{K'}{K}) > 0$ olduğunu versayacağız.

$$Z(u\,|\Omega\,) = \zeta(u\,|\Omega\,) - \frac{u}{K}\eta,\ \eta = \zeta(K) \tag{26}$$

olarak tanımlanan Jacobi'nin $Z\,(u)$ fonksiyonu, Ω ya ait noktalar dışında, sonlu düzlemde holomorftur. $\omega \in \Omega$ noktaları $\zeta(u)$ için $+1$ rezüdülü birer basit kutup olduğundan $Z(u)$ için de öyledir.
5. paragrafın (14) formülünden yararlanarak

$$Z(u + 2mK + 2niK') - Z(u) = -i\pi\frac{n}{K} \tag{27}$$

bulunur. Buradan $m = 1$ ve $n = 0$ için

$$Z(u + 2K) - Z(u) = 0\ ,$$

$m = 0$ ve $n = 1$ için

$$Z(u + 2iK') - Z(u) = -i\frac{\pi}{K}$$

elde edilir. Demekki, $Z(u)$ fonksiyonu için $2K$ period olduğu halde $2iK'$ period değildir.

$$Z(K) = 0 \text{ ve } Z(iK') = -\frac{1}{K}(\eta iK' - \eta' K) = -\frac{i\pi}{2K}$$

olduğu gözönüne alınırsa, (27) den

$$\left.\begin{aligned} Z\{(2m+1)K + 2niK'\} &= -n\frac{i\pi}{K} \\ Z\{2mK + (2n+1)\,iK'\} &= -(2n+1)\frac{i\pi}{2K} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

bulunur.

Jacobi'nin $H(u|\Omega\,)$ fonksiyonu

$$\frac{d}{du}\log H(u) = Z(u)$$

olarak tanımlanır. Buradan hemen,

$$H(u) = C \quad \sigma(u) \ \exp\left(-\eta \frac{u^2}{2K}\right) \tag{29}$$

çıkar. $\sigma(u)$ tek-fonksiyon olduğundan $H(u)$ da öyledir. (29) da u yerine $u + 2mK + 2niK'$ konur ve işlemler yapılırsa,

$$H(u + 2mK + 2niK') = (-1)^{m+n} H(u) \ \exp\{-\frac{i\pi n}{K}(u + inK') \tag{30}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} H(u + 2K) &= - H(u) \\ H(u + 2iK') &= -H(u) \ \exp\{-\frac{i\pi}{K}(u + iK') \end{aligned} \tag{31}$$

olmalıdır. Özet olarak $H(u)$, ilkel periodu 4K olan basit periodik bir tam fonksiyondur ve yalnız $\omega \in \Omega$ noktalarında sıfırdır.

$$\lambda = \lambda(u) = \exp\{-\frac{i\pi}{4K}(2u + iK')\}$$

olmak üzere H_1, Θ, Θ_1 fonksiyonları

$$\begin{aligned} H_1(u) &= H(u + K) \\ \Theta(u) &= -i \lambda^{-1} \ H(u + iK') \\ \Theta_1(u) &= \lambda^{-1} H(u + K + iK') \end{aligned} \tag{32}$$

olarak tanımlanır.

$$\lambda(u + 2mK + 2niK') = (-1)^m \lambda \ \exp\left(-\pi n \frac{K'}{K}\right)$$

olduğu gözönüne alınır ve

$$N = \exp\{-\frac{i\pi n}{K}(u + inK')$$

konursa, (30) ve (32) den

$$
\begin{aligned}
H\,(u + 2mK + 2niK') &= (-1)^{m+n}\, N\; H(u) \\
H_1(u + 2mK + 2niK') &= (-1)^{m}\, N\, H_1(u) \\
\Theta\,(u + 2mK + 2niK') &= (-1)^{n}\, N\; \Theta(u) \\
\Theta_1(u + 2mK + 2niK') &= N\, \Theta_1(u)
\end{aligned} \tag{33}
$$

eşitlik takımları çıkar.

$$N\,(u + K) = \exp\{-\frac{i\pi\, n}{K}\,(u + K + niK')\} = (-1)^{n}\, N\,,$$

$$\Theta\,(u + K) = \Theta_1(u)$$

olduğundan, (33) den

$$
\begin{aligned}
H\{\,u + (2m + 1)K + 2niK'\} &= (-1)^{m}\, N\;\; H_1(u) \\
H_1\{u + (2m + 1)K + 2niK'\} &= -(-1)^{m+n}\, N\, H(u) \\
\Theta\,\{u + (2m + 1)K + 2niK'\} &= N\; {}_1(u) \\
\Theta_1\{u + (2m + 1)K + 2niK'\} &= (-1)^{n}\, N\, \Theta(U)
\end{aligned} \tag{34}
$$

elde edilir.

$$N(u + iK') = N \exp\,(\pi n\,\frac{K'}{K})$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
H\,\{u + 2mK + (2n + 1)iK'\} &= (-1)^{m+n}\, iM\, \Theta\;(u) \\
H_1\{u + 2mK + (2n + 1)iK'\} &= (-1)^{m}\, M\, \Theta_1(u) \\
\Theta\,\{u + 2mK + (2n + 1)iK'\} &= (-1)^{n}\, iM\, H\;(u) \\
\Theta_1\{u + 2mK + (2n + 1)iK'\} &= M\, H_1(u)
\end{aligned} \tag{35}
$$

olmalıdır. Burada

$$M = \lambda N \exp\,(\pi n\,\frac{K'}{K})$$

dır. (34) veya (35) den hemen aşağıdaki eşitlik takımları çıkar.

$$
\begin{aligned}
H\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= (-1)^m \quad M\, \Theta_1(u) \\
H_1\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= (-1)^{m+n}(-i)M\, \Theta(u) \\
\Theta\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= \quad M\, H_1(u) \\
\Theta_1\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= (-1)^n \quad iM\, H(u)
\end{aligned} \tag{36}
$$

9. Dörttebir-periodlar İçin Serisel İfadeler:

Basit periodik her tam fonksiyon, exp $(\frac{2\pi i}{\omega} u)$ nun tam kuvvetlerinden oluşan bir seri ile ifade edilebilir ve bu seri u nun her sonlu değeri için yakınsaktır[8]. Burada ω bir perioddur. Buna uygun olarak, $q = e^{i\pi\tau}$ olmak üzere,

$$
H(u) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \exp\{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u\} \tag{37}
$$

açılımı vardır[16]. Değişkene K, iK' ve K + iK' eklenirse,

$$
H_1(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \exp\{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u\}
$$

$$
\Theta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \exp(\frac{i\pi}{K} nu) \tag{38}
$$

$$
\Theta_1(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \exp(\frac{i\pi}{K} nu)
$$

serileri elde edilir. (37) de u ya $\frac{1}{2}$ K eklenirse,

$$
H(u+\frac{K}{2}) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \exp\{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)(u+\frac{K}{2})\}
$$

$$
= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{n\frac{i\pi}{2}} \exp\{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u\}
$$

$$= -ie^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \exp\{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u\}$$

elde edilir. Benzer hesaplamalarla,

$$H(u + \frac{iK'}{2}) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$H(u + \frac{K+iK'}{2}) = -ie^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

eşitlikleri bulunur. (38) eşitliklerinden de

$$H_1(u + \frac{K}{2}) = -e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$H_1(u + \frac{iK'}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u} \tag{39}$$

$$H_1(u + \frac{K+iK'}{2}) = -e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$\Theta(u + \frac{K}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n q^n e^{\frac{i\pi}{K}nu}$$

$$\Theta(u + \frac{iK'}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{K}nu} \tag{40}$$

$$\Theta(u + \frac{K+iK'}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n q^{n(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{K}nu}$$

$$\Theta_1(u + \frac{K}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n q^n e^{\frac{i\pi}{K}nu}$$

$$\Theta_1(u + \frac{iK'}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{K}nu} \tag{41}$$

$$\Theta_1(u + \frac{K+iK'}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n q^{n(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{K}nu}$$

serisel ifadeleri bulunur.

10. Eşdeğer Period Çiftleri İle Oluşturulan H- fonksiyonları Arasında Bazı Bağıntılar: 2K ve 2iK' periodları ile oluşturulan H-fonksiyonunu $H(u\,|K,iK')$ biçiminde gösterelim. a,b,c,d birer tamsayı ve ad-bc = 1 olmak üzere

$$\begin{aligned} K_1 &= aK + biK' \\ iK_2 &= cK + diK' \end{aligned} \tag{42}$$

ise, $(2K,2iK')$ ve $(2K_1,2iK_2)$ ikililerine eşdeğer period çifti denir. Bunların aynı Ω latisi için birer baz olduğu birinci paragraftan bilinmektedir.

Şimdi $H(u|K_1,iK_2)$ ve $H(u\,|K,iK')$ fonksiyonlarını karşılaştıralım.

$$F(u) = e^{\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2}\, H(u\,|K,iK')$$

fonksiyonunu ele alalım.

$$\begin{aligned} F(u + 2K_1) &= e^{\frac{b\pi i}{4KK_1}(u + 2K_1)^2}\, H(u + 2K_1|\,K,iK') \\ &= e^{\frac{b\pi i}{4KK_1}(u^2 + 4K_1u + 4K_1^2)}\,(-1)^{a+b}\, e^{-\frac{b\pi i}{K}(u + biK')}\, H(u|K,iK') \\ &= (-1)^{a+b}\, e^{\frac{b\pi i}{K}(u + K_1)}\, e^{-\frac{b\pi i}{K}(u + biK')}\, F(u) \\ &= (-1)^{a+b}\, e^{ab\pi i}\, e^{\frac{b\pi i}{K}(u + biK')}\, e^{-\frac{b\pi i}{K}(u + biK')}\, F(u) \\ &= (-1)^{a+b+ab}\, F(u) \end{aligned}$$

olur. ad-bc = 1 koşulu altında a ve b nin ikisi birden çift tamsayı olamaz. O halde,

$$(-1)^{a+b+ab} = -1$$

dir. Böylece

$$F(u + 2K_1) = -F(u) \tag{43}$$

elde edilir.

$$F(u + 2iK_2) = e^{\frac{b\pi i}{4KK_1}(u + 2iK_2)^2} H(u + 2iK_2|K,iK')$$

$$= e^{\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2} e^{-\frac{b\pi K_2}{KK_1}(u + iK_2)} H(u + 2cK + 2diK'| K,iK')$$

$$= (-1)^{c + d} e^{-\frac{b\pi K_2}{KK_1}(u + iK_2)} e^{-\frac{d\pi i}{K}(u + diK')} F(u)$$

$$= (-1)^{c + d} e^{-\frac{b\pi K_2}{KK_1}(u + iK_2)} e^{-\frac{d\pi i}{K}(u + iK_2)} e^{cd\pi i} F(u)$$

$$= (-1)^{c + d + cd} e^{-\frac{\pi}{KK_1}(u + iK_2)(bK_2 + diK_1)} F(u)$$

ve yine

$$bK_2 + diK_1 = b(-ciK + dK') + d(aiK - bK')$$

$$= -bciK + bdK' + adiK - bdK'$$

$$= (ad - bc)iK$$

$$= iK$$

olduğundan,

$$F(u + 2iK_2) = (-1)^{c + d + cd} e^{-\frac{\pi i}{K_1}(u + iK_2)} F(u)$$

bulunur. Önceki tartışmalara göre c ve d nin ikisi birden çift tamsayı olamadığından

$$(-1)^{c + d + cd} = -1$$

dir. Buna göre,

$$F(u + 2iK_2) = -e^{-\frac{\pi i}{K_1}(u + iK_2)} F(u) \tag{44}$$

olmalıdır. (43) ve (44) bağıntıları önceden bilinen

$$H(u + 2K_1|K_1,iK_2) = - H(u |K_1,iK_2)$$

$$H(u + 2iK_2|K_1,iK_2) = - e^{-\frac{\pi i}{K_1}(u + iK_2)} H(u| K_1,iK_2)$$

bağıntıları ile aynıdırlar.

Öte yandan F(u) fonksiyonunun sıfırları $\omega \in \Omega$ noktaları olup $H(u |K_1,iK_2)$ nın sıfırları ile aynıdır.

O halde

$$\frac{H(u\,|K_1,iK_2)}{F(u)}$$

oranı, çifte periodik bir tam fonksiyondur. Dolayısıyla sabittir. Bu sabiti A ile gösterirsek,

$$H(u|\,K_1,iK_2) = A\,e^{\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2}\,H(u|\,K,iK') \tag{45}$$

elde edilir.

a ve b aynı anda çift olmadığına göre, m ve n birer tamsayı olmak üzere, önce $a = 2m + 1$ ve $b = 2n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (45) de değişkene K_1 eklenirse

$$H(u + K_1|K_1,iK_2) = A\,H(u + K_1|K,iK')\,\exp\{\frac{b\pi i}{4KK_1}(u + K_1)^2\}$$

$$= A\,H\{u + (2m + 1)K + 2niK'|\,K,iK'\}\,\exp\{\frac{b\pi i}{4KK_1}(u^2 + 2K_1u + K_1^2)\}$$

$$= (-1)^m\,NA\,H_1(u\,|K,iK')\,\exp\{\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + \frac{b\pi i}{4K}(2u + K_1)\}$$

$$= (-1)^m\,NA\,H_1(u\,|K,iK')\,\exp\{\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + \frac{b\pi i}{4K}(2u + aK + biK')\}$$

$$= (-1)^m\,NA\,H_1(u\,|K,iK')\,\exp\{\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + ab\,\frac{i\pi}{4} + \frac{b\pi i}{4K}(2u + biK')\}$$

olur ve

$$N\,\exp\{\frac{b\pi i}{4K}(2u + biK')\}$$

$$= \exp\{-\frac{i\pi}{K}n(u + niK') + \frac{i\pi}{4K}b(2u + biK')\}$$

$$= \exp\frac{i\pi}{4K}(4nu + 4n^2iK' - 2bu - b^2iK')\}$$

$$= \exp\{-\frac{i\pi}{4K}(2bu + b^2iK' - 2bu - b^2iK')\}$$

$$= 1$$

olduğundan,

$$H_1(u|K_1,iK_2) = (-1)^m A\, H_1(u|K,iK')\exp\left(\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + ab\frac{i\pi}{4}\right)$$

elde edilir. Benzer olarak $a = 2m$ ve $b = 2n + 1$ olması halinde

$$H_1(u|K_1,iK_2) = (-1)^{m+n}\, iA\, \Theta(u|K,iK')\exp\left(\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + ab\frac{i\pi}{4}\right),$$

$a = 2m + 1$ ve $b = 2n + 1$ olması halinde

$$H_1(u|K_1,iK_2) = (-1)^{m+n} A\, \Theta_1(u|K,iK')\exp\left(\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + ab\frac{i\pi}{4}\right)$$

bulunur. Ayrıca değişkene iK_2 ve $K_1 + iK_2$ eklenmesi halleri de incelenebilir.

Özet ve Sonuçlar

I. Period latisinin bazı özel durumlarında Weierstrass fonksiyonları incelenerek şu sonuçlar çıkarılmıştır.

1. ω_1 periodunun reel ve ω_2 periodunun imaginer olması halinde her $t \in R$ için $\wp(t) > 0$ ve $\wp(it) < 0$ dır.

2. Periodların eşlenik kompleks olmaları halinde, $\omega_2 = \bar{\omega}_1$, $\mathrm{Re}(\omega_1) < 0$ ve $\mathrm{Im}(\omega_1) > 0$ olarak seçilirse, esas period paralelkenarı

$$D = \{ a\,\omega_1 + b\,\omega_2 \mid -1 < a,b \leq 0 \;;\; a,b \in R \}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $\wp(u)$ nun sıfırları, bu paralelkenarın köşegenleri üzerinde bulunan, ya $\frac{1}{4}\omega_3$ ve $\frac{3}{4}\omega_3$ noktaları veya $\frac{1}{4}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_1$ ve $\frac{1}{4}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_2$ noktaları arasındadır.

3. Ω period latisi eşkenardörtgensel ise, $\eta_1 = 2\zeta(\frac{1}{2}\omega_1)$ ve $\eta_2 = 2\zeta(\frac{1}{2}\omega_2)$ ile oluşturulan H latisi de öyledir.

II. Jacobi fonksiyonlarının yarı-periodlar bakımından değer değişimlerine ait aşağıdaki bağıntılar elde edilmiştir.

$$\left.\begin{aligned}
H\{u + 2mK + (2n+1)iK'\} &= (-1)^{m+n}\, iM\, \Theta(u)\\
H_1\{u + 2mK + (2n+1)iK'\} &= (-1)^{m}\, M\, \Theta_1(u)\\
\Theta\{u + 2mK + (2n+1)iK'\} &= (-1)^{n}\, iM\, H(u)\\
\Theta_1\{u + 2mK + (2n+1)iK'\} &= M\, H_1(u)
\end{aligned}\right\} \quad (i)$$

$$\left.\begin{aligned}
H\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= (-1)^{m}\, M\, \Theta_1(u)\\
H_1\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= -i(-1)^{m+n}\, M\, \Theta(u)\\
\Theta\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= M\, H_1(u)\\
\Theta_1\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= i(-1)^{n}\, M\, H(u)
\end{aligned}\right\} \quad (ii)$$

Burada

$$M = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2n+1)\{2u+(2n+1)iK'\}}$$

dır.

III. Dörttebir-periodlar için aşağıdaki serisel ifadeler bulunmuştur.

$$H\left(u+\frac{K}{2}\right) = -i\, e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$H_1\left(u+\frac{K}{2}\right) = -e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$\Theta\left(u+\frac{K}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n q^{n^2} e^{\frac{i\pi}{K}nu} \qquad \text{(i)}$$

$$\Theta_1\left(u+\frac{K}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n q^{n^2} e^{\frac{i\pi}{K}nu}$$

$$H\left(u+\frac{iK'}{2}\right) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$H_1\left(u+\frac{iK'}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$\Theta\left(u+\frac{iK'}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{K}nu} \qquad \text{(ii)}$$

$$\Theta_1\left(u+\frac{iK'}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{K}nu}$$

$$H\left(u+\frac{K+iK'}{2}\right) = -ie^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$H_1\left(u+\frac{K+iK'}{2}\right) = -e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$\Theta\left(u+\frac{K+iK'}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n q^{n(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{K}nu} \qquad \text{(iii)}$$

$$\Theta_1\left(u+\frac{K+iK'}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n q^{n(n+\frac{1}{2})} e^{\frac{i\pi}{K}nu}$$

Burada $q = e^{i\pi\tau}$ ve $\tau = \frac{iK'}{K}$ dır.

IV. $ad - bc = 1$ ve $a,b,c,d \in Z$ olmak üzere, $K_1 = aK + biK'$ ve $iK_2 = cK + diK'$ için

$$H(u\,|K_1, iK_2) = A\, e^{\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2} H(u\,|K, iK') \quad .$$

bağıntısı elde edilmiştir. Buradan hareketle, a ve b tamsayılarının çift ve tek olmalarına göre, aşağıdaki eşitlikler bulunmuştur.

1. $a = 2m + 1$ ve $b = 2n$ ise,

$$H_1(u\,|K_1, iK_2) = (-1)^m A\, H_1(u|\,K, iK') \exp\left(\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + ab\frac{i\pi}{4}\right)$$

dır.

2. $a = 2m$ ve $b = 2n + 1$ ise,

$$H_1(u\,|K_1, iK_2) = (-1)^{m+n}\, iA\, \Theta(u|\,K, iK') \exp\left(\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + ab\frac{i\pi}{4}\right)$$

olur.

3. $a = 2m + 1$ ve $b = 2n + 1$ ise,

$$H_1(u\,|K_1, iK_2) = (-1)^{m+n} A\Theta_1(u|K, iK') \exp\left(\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + ab\frac{i\pi}{4}\right)$$

dır.

Summary and Results

I. Weierstrass functions are investigated for the special period-lattices and the following results are found.

1. If ω_1 is real and ω_2 is pure-imaginer then Ω is rectanguler. In this case, for all $t \in R, \wp(t) > 0$ and $\wp(it) < 0$.

2. If $\omega_2 = \bar{\omega}_1$, Re $(\omega_1) < 0$ and Im $(\omega_1) > 0$ then Ω is rhambic which is generated by ω_1 and ω_2. In this case the zeros of $\wp(u)$ are between the points $\frac{1}{4}\omega_3$ and $\frac{3}{4}\omega_3$ or $\frac{1}{4}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_1$ and $\frac{1}{4}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_2$ which are on the diagonals of the fundamental parelellogram which is expressible as

$$D = \{a\omega_1 + b\,\omega_2 \mid -1 < a,b \leqq 0 \ , \ a,b \in R\}$$

3. If Ω is rhombic, so is H which is generated by $\eta_1 = 2\zeta(\frac{1}{2}\omega_1)$ and $\eta_2 = 2\zeta(\frac{1}{2}\omega_2)$

II. Jacobi functions are investigated for the half-periods and following formulae are found

$$\left.\begin{aligned}
H\{u + 2mK + (2n+1)iK'\} &= (-1)^{m+n}\, iM\,\Theta(u)\\
H_1\{u + 2mK + (2n+1)iK'\} &= (-1)^{m}\, M\,\Theta_1(u)\\
\Theta\{u + 2mK + (2n+1)iK'\} &= (-1)^{n}\, iM\,H(u)\\
\Theta_1\{u + 2mK + (2n+1)iK'\} &= M\,H_1(u)
\end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

$$\left.\begin{aligned}
H\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= (-1)^{m}\, M\,\Theta_1(u)\\
H_1\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= -i(-1)^{m+n}\, M\,\Theta(u)\\
\Theta\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= M\,H_1(u)\\
\Theta_1\{u + (2m+1)K + (2n+1)iK'\} &= i(-1)^{n}\, M\,H(u)
\end{aligned}\right\} \quad \text{(ii)}$$

Where $M = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2n+1)\{2u+(2n+1)iK'\}}$

III. We have the following serial expressions for the quarter-periods.

$$H\left(u+\frac{K}{2}\right) = -i\,e^{\frac{i\pi}{4}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n\,q^{(n+\frac{1}{2})^2}\,e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$H_1\left(u+\frac{K}{2}\right) = -e^{\frac{i\pi}{4}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n\,q^{(n+\frac{1}{2})^2}\,e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$\Theta\left(u+\frac{K}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n\,q^{n^2}\,e^{\frac{i\pi}{K}nu} \qquad \text{(i)}$$

$$\Theta_1\left(u+\frac{K}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n\,q^{n^2}\,e^{\frac{i\pi}{K}nu}$$

$$H\left(u+\frac{iK'}{2}\right) = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})}\,e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$H_1\left(u+\frac{iK'}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})}\,e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$\Theta\left(u+\frac{iK'}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,q^{n(n+\frac{1}{2})}\,e^{\frac{i\pi}{K}nu} \qquad \text{(ii)}$$

$$\Theta_1\left(u+\frac{iK'}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+\frac{1}{2})}\,e^{\frac{i\pi}{K}nu}$$

$$H\left(u+\frac{K+iK'}{2}\right) = -ie^{\frac{i\pi}{4}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n\,q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})}\,e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$H_1\left(u+\frac{K+iK'}{2}\right) = -e^{\frac{i\pi}{4}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n q^{(n+1)(n+\frac{1}{2})}\,e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)u}$$

$$\Theta\left(u+\frac{K+iK'}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n\,q^{n(n+\frac{1}{2})}\,e^{\frac{\pi i}{K}nu}$$

$$\theta_1\left(u+\frac{K+iK'}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n\,q^{n(n+\frac{1}{2})}\,e^{\frac{i\pi}{K}nu}$$

Where $q = e^{i\pi\tau}$ and $\tau = \frac{iK'}{K}$

IV. Let us suppose that $K_1 = aK + biK'$ and $iK_2 = cK + diK'$. Where $ad-bc = 1$ and $a,b,c,d \in Z$. Thus we have

$$H\ (u\ |K_1, iK_2) = A\ H\ (u\ |K, iK')\exp\left(\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2\right)$$

Accordingly the integers a and b are odd or even, there are following relations,

1. If $a = 2m + 1$ and $b = 2n$,

$$H_1(u\ |K_1, iK_2) = (-1)^m AH_1(u|K, iK')\exp\left(\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + ab\frac{i\pi}{4}\right)$$

2. If $a = 2m$ and $b = 2n + 1$,

$$H_1(u|K_1, iK_2) = (-1)^{m+n}\ iA\ \Theta(u|K, iK')\exp\left(\frac{b\pi i}{4KK_1}u^2 + ab\frac{i\pi}{4}\right)$$

3. If $a = 2m + 1$ and $b = 2n + 1$,

$$H_1(u|K_1, iK_2) = (-1)^{m+n}\ A\Theta_1(u|K, iK')\exp\left(\frac{b\pi i}{4KK_1}\ u^2 + ab\frac{i\pi}{4}\right)$$

Bibliyografya

[1] Anderson,G.D. and Vamanamurtly,M.K.– Affine mappings and elliptic functions,Publ.Inst.Math.,Beograd,1971.

[2] Cayley,A.– An elementary treatise on elliptic functions, Dover Publ.,New York,1962.

[3] Chrapan,J.– Weierstrass $\wp$ -function,Aplikace Matematiky, Praha, 16(1971).

[4] Chrapan,J.– Evaluation of the half-periods of the Weierstrass $\wp$-function for the absolute invariant greater than one,Apl.Mat.,Praha,16(1971).

[5] Dutta,M. and Debnath,L.– Elements of the theory of elliptic and assosiated functions with applications, The World Press,Calcutta,1965.

[6] DuVal,P.– Elliptic functions and elliptic curves,Cambridge University Press,London,1973.

[7] Erdèlyi,A.– Higher transcendental functions,Vol.2,McGraw-Hill Book Company,Inc.,New York,1953.

[8] Goursat,E.– Functions of a complex variable,Vol.2,Dover Publ. New York,1959.

[9] Hancock,H.– Lectures on the theory of elliptic functions, Dover Publ.,New York,1958.

[10] Lang,S.– Elliptic functions,Addison Wesley,New York,1973.

[11] McGettrick,A.D.– A result in the theory of Weierstrass elliptic functions,Proc.London Math. Soc.,(3)25,1972.

[12] Neville,E.H.– Elliptic functions,Pergamon Press,New York,1971.

[13] San,N.– Analitik fonksiyonlar teorisi,Cilt I,Atatürk Üniversitesi Yayınları No:267,1973.

[14] San,N.– Eliptik fonksiyonlara ait periodların Jacobi fonksiyonlarının değerleri üzerindeki etkileri,Atatürk Üniversitesi Yayınları No:338,1974.

[15] Scherk,P.– Topics in the theory of elliptic functions, Queen's University,Kingston,Ontario,1967.

[16] Wittaker,E.T. and Watson,G.N.– Modern analysis,Cambridge,1902.