GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER: AKADEMİK DANIŞMANLIK HİZMETLERİNDEN MEMNUNİYET ÜZERİNE BİR UYGULAMA

İkram Yusuf YARBAŞI

Yüksek Lisans Tezi
Ekonometri Anabilim Dalı
Doç. Dr. Mehmet Suphi ÖZÇOMAK

2015

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

İkram Yusuf YARBAŞI

GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER: AKADEMİK DANIŞMANLIK HİZMETLERİNDEN MEMNUNİYET ÜZERİNE BİR UYGULAMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Mehmet Suphi ÖZÇOMAK

ERZURUM 2015

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ BEYAN FORMU

27/07/2015

SOSYAL BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

BİLDİRİM

Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "Genelleştirilmiş Lineer Modeller: Akademik Danışmanlık Hizmetlerinden Memnuniyet Üzerine Bir Uygulama" adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kağıt ve elektronik kopyalarının Atatürk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım:

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

☐☐Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☒☐Tezim sadece Atatürk Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.

☐☐Tezimin …… yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir.

İkram Yusuf YARBAŞI

F-83/00/22.02.2012

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

TEZ KABUL TUTANAĞI

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Doç. Dr. Mehmet Suphi ÖZÇOMAK danışmanlığında, İkram Yusuf YARBAŞI tarafından hazırlanan bu çalışma 20 / 07 / 2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ekonometri Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Şakir DIZMAN — İmza: ....

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Mehmet Suphi ÖZÇOMAK — İmza: M. Özçomak

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Hakan EYGÜ — İmza: ....

Yukarıdaki imzalar adı geçen öğretim üyelerine aittir. 27 / 07 / 2015

Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM
Enstitü Müdürü

F-85/00/22.02.2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET VI

ABSTRACT VII

KISALTMALAR DİZİNİ VIII

TABLOLAR DİZİNİ IX

ŞEKİLLER DİZİNİ X

ÖNSÖZ XI

GİRİŞ 1

BİRİNCİ BÖLÜM

OLASILIK DAĞILIMLARI

1.1. KESİKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI 4

1.1.1. Bernoulli Dağılımı 4

1.1.2. Binom (İki Terimli) Dağılımı 5

1.1.3. Geometrik Dağılım 6

1.1.4. Negatif Binom Dağılımı 7

1.1.5. Hipergeometrik Dağılım 8

1.1.6. Poisson Dağılımı 9

1.2. SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI 10

1.2.1. Tekbiçimli (Uniform) Dağılım 11

1.2.2. Üstel Dağılım 11

1.2.3. Gamma Dağılımı 12

1.2.4. Beta Dağılımı 13

1.2.5. Normal Dağılım 14

1.2.6. Student t Dağılımı 14

1.2.7. Ki-kare Dağılımı 15

1.3. LİTERATÜR ÖZETİ 15

1.3.1. Teorik Çalışmalar İle İlgili Literatür Özeti 16

1.3.2. Uygulamaya Dönük Çalışmalar İle İlgili Literatür Özeti 20

İKİNCİ BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER

2.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERE GİRİŞ.................................. 22

2.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERİN YAPISI.............................. 25

2.3. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER İÇİN OLABİLİRLİK DENKLEMLERİ 27

2.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNİ 29

2.4.1. En Çok Olabilirlik Parametre Tahmini.. 29

2.4.2. Newton Raphson Yöntemi.. 32

2.4.3. Fisher-Scoring Algoritması 33

2.5. BAĞIMLI DEĞİŞKENİN ORTALAMA DEĞER TAHMİNİ 34

2.6. UYUMUN İYİLİĞİ.. 36

2.6.1. Sapma Ölçüsü.. 36

2.6.1.1. Normal Dağılım İçin Sapma Ölçüsü.. 37

2.6.1.2. Poisson Dağılımı İçin Sapma Ölçüsü... 38

2.6.1.3. Binom Dağılımı İçin Sapma Ölçüsü 39

2.6.2. Pearson Ki-Kare İstatistiği 39

2.6.3. Akaike Bilgi Kriteri (AIC) 40

2.6.4. Uyum Ölçüsünün Seçimi 40

2.7. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER İÇİN SONUÇ ÇIKARIMI .. 41

2.7.1. Wald Testi.. 41

2.7.2. Olabilirlik Oran Testi.. 42

2.7.3. Skor Testi.. 42

2.8. GENELLEŞTİRMİŞ LİNEER MODELLERDE GÜVEN ARALIKLARI 43

2.8.1. Wald Güven Aralıkları 43

2.8.2. Bağımlı Değişkenin Ortalama Değeri İçin Güven Aralıkları 44

2.9. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERDE ARTIK ANALİZİ 44

2.9.1. Pearson Artıkları 45

2.9.2. Sapma Artıkları 45

2.9.3. Skor Artıkları 46

2.9.4. Olabilirlik Artıkları 46

2.9.5. Anscombe Artıkları 46

2.10. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERDE PARAMETRELERİN YORUMLANMASI 47

2.11. AŞIRI YAYILIM 50

2.12. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERDE MODEL KURULUMU 51

2.13. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERDE MODEL SEÇİMİ. 52

2.13.1. Akaike Bilgi Kriteri (AIC) 53

2.13.2. Schwartz Bayesian Bilgi Kriteri (SBIC) 53

2.13.3. Bilgi Karmaşıklığı Kriteri (ICOMP) 54

2.14. BAZI ÖZEL GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER 55

2.14.1 Lojistik Regresyon Modeli 55

2.14.1.1. Lojistik Regresyon Modeli ve Özellikleri 56

2.14.1.2. Odds Oranı 57

2.14.1.3. Lojistik Regresyon Modellerinin Varsayımları 59

2.14.1.4. Lojistik Regresyon Modelinin Tahmin Yöntemleri... 60

2.14.1.4.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi 60

2.14.1.4.2. Yeniden Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi 62

2.14.1.4.3. Minimum Lojit Ki-Kare Yöntemi 62

2.14.1.5. Lojistik Regresyon Modelinin Uyum İyiliği ve Parametrelerin Anlamlılık Testleri 63

2.14.1.5.1. Modelin Uyum İyiliği 63

2.14.1.5.2. Model Parametrelerinin Anlamlılık Testleri 66

2.14.1.6. Lojistik Regresyon Modelinin Çapraz Tablodan Elde Edilmesi 69

2.14.2. Poisson Regresyon Modeli 71

2.14.2.1. Poisson Regresyon İçin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri 72

2.14.2.2. Poisson Regresyon Modelinde Parametrelerin Yorumlanması 73

2.14.3. Lojistik ve Poisson Regresyon Modellerinde Az Yayılım ve Aşırı Yayılım Problemi 74

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

AKADEMİK DANIŞMANLIK HİZMETLERDEN MEMNUNİYETİN GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERLE İNCELENMESİ

3.1. MATERYAL VE METOT 76

3.2. UYGULAMADA KULLANILAN DEĞİŞKENLER 78

3.3. MODEL TAHMİNİ VE SONUÇLARI 83

3.3.1. Model Parametrelerinde İstatistiksel Çıkarsama 86

3.3.2. Uyum İyiliği Testi Sonuçları 86

3.3.3. Anlamlı Bulunan Parametrelerin Güven Aralıkları... 87

SONUÇ 91

KAYNAKÇA 94

EK **99**

ÖZGEÇMİŞ **101**

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER: AKADEMİK DANIŞMANLIK HİZMETLERİNDEN MEMNUNİYET ÜZERİNE BİR UYGULAMA

İkram Yusuf YARBAŞI

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet Suphi ÖZÇOMAK

2015, 114 Sayfa

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Şakir DIZMAN
Doç. Dr. Mehmet Suphi ÖZÇOMAK
Yrd. Doç. Dr. Hakan EYGÜ

Bu tezin amacı, normallik ve sabit varyans varsayımlarının karşılanmadığı durumlarda veri dönüşümüne alternatif bir yaklaşım olarak geliştirilen genelleştirilmiş lineer modelleri incelemektir.

Genelleştirilmiş lineer modeller, normal dağılım göstermeyen bağımlı değişken dağılımlarını göz önüne alan hem doğrusal hem de doğrusal olmayan regresyon modellerinin bir bileşimidir.

Çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, olasılık dağılımları hakkında bazı temel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, genelleştirilmiş lineer modellerin tanıtımı yapılarak, yapısı ve özelliklerinden bahsedilmiş, parametre tahmini için farklı yöntemler verilmiştir. Bununla birlikte, model yeterliliğinin kontrolü için bazı yöntemler ve bazı özel genelleştirilmiş lineer modeller tanıtılarak, model seçim kriterlerine değinilmiştir. Üçüncü bölümde ise Atatürk Üniversitesinde öğrenim gören lisansüstü öğrencilerinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyetleri üzerine bir anket çalışması yapılmış, elde edilen verilerle genelleştirilmiş lineer modellerden Lojistik Regresyon modellemesi uygulaması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Lineer Modeller, Lojistik Regresyon Akademik Danışmanlık Hizmetlerinden memnuniyet

ABSTRACT

MASTER THESIS

GENERALIZED LINEAR MODELS: AN APPLICATION ON CONTENTMENT OF ACADEMIC COUNSELING SERVICES

İkram Yusuf YARBAŞI

Tez Danışmanı: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Suphi ÖZÇOMAK

2015, 114 Pages

Jüri: Assist. Prof. Dr. Şakir DIZMAN
Assoc. Prof. Dr. Mehmet Suphi ÖZÇOMAK
Assist. Prof. Dr. Hakan EYGÜ

In this thesis, when normality and constant variance assumptions are not met, being improved an alternative approach to data conversion generalized linear models are examined.

Generalized linear models are a combination of both linear and nonlinear regression models that take into account the distribution of abnormal constant variable.

This study is consist of three sections. In the first section, the basic informations are given about special distributions. In the second section, generalized linear models are being introduced, structure and features of the models are mentioned and different methods are given for parameter estimation. In addition that informations are given related to some methods for control of model adequacy and introducing particular generalized linear models and model selection criteria are mentioned. In third section, a survey study on contentment of academic counseling services were made to graduate students who study at Ataturk University and Logistic Regression Modeling that is one of generalized linear models was applied with obtained data.

Keywords: Generalized Linear Models, Logistic Regression, Contentment of Academic Counseling Services

KISALTMALAR DİZİNİ

AIC : Akaike Bilgi Kriteri

SBIC : Schwartz Bayesyen Bilgi Kriteri

ICOMP : Bilgi Karmaşıklığı Kriteri

G.A. : Güven Aralığı

vb. : Ve benzeri

a.g.e. : Adı geçen eser

a.g.m. : Adı geçen makale

a.g.tz. : Adı geçen tez

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 2.1. Üssel Ailenin Bazı Dağılımları için Kanonik Link Fonksiyonları ve Elde Edilen Modeller..26

Tablo 2.2. SBIC Kriterine Göre Model Tercihi. 54

Tablo 2.3. Bağımsız Değişkenin İki Şıklı Olması Halinde Lojistik Regresyon Modelinin Değerleri. 58

Tablo 2.4. 2×2 Boyutlu Çapraz Tablo Yardımıyla Odds Oranının Tespiti. 69

Tablo 3.1. SPSS ile Elde Edilen Model Parametre Sonuçları. 84

Tablo 3.2. Olabilirlik Oran Testi Sonuçları..86

Tablo 3.3. Modelin Uyum İyiliğinde Sapma İstatistikleri..86

Tablo 3.4. Modelin Uyum İyiliğinde Pearson ki-kare istatistiği. 87

Tablo 3.5. Parametrelerin Güven Aralıkları. 87

Tablo 3.6. Odds Oranlarının Güven Aralıkları..88

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Wald, Olabilirlik Oran ve Skor testi için kullanılan Log-Olabilirlik fonksiyonu. **43**

Şekil 2.2. Lojistik Regresyon Eğrisi. **59**

Şekil 3.1. Enstitülere Göre Yüksek Lisans Öğrencilerinin Dağılımı. **77**

Şekil 3.2. Enstitülere Göre Doktora Öğrencilerinin Dağılımı. **77**

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca beni yönlendiren, teşvik ve bilgisini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet Suphi ÖZÇOMAK'a, bu tez çalışmasının uygulama aşamasında ve tamamlanmasında desteklerini esirgemeyen Prof. Dr. Erkan OKTAY, Yrd. Doç. Dr. Şakir DIZMAN, Yrd. Doç. Dr. Hakan EYGÜ'ye ve her konuda emeklerini ödeyemeyeceğim saygı değer aileme sonsuz teşekkür ederim.

Erzurum - 2015 **İkram Yusuf YARBAŞI**

GİRİŞ

İstatistiksel modelleme, değişkenler arasındaki ilişkilerin matematiksel denklemler kalıbında gösterilmesidir. İstatistiksel modeller genel olarak, deterministik ve stokastik olmak üzere iki bölüme ayrılırlar. Deterministik modellerde statik ve dinamik olmak üzere ikiye ayrılır. Statik durumda değişkenler dönemler içerisinde farklılık göstermezken, dinamik durumda ise zamana bağlı olarak değişkenlerde değişme olmaktadır. Stokastik modelde, eğer değişkenlerin olasılığı zamana bağlı olarak değişmiyorsa durağan, zamana bağlı değişkenlerin olasılığında değişiklik oluyorsa durağan olmayan olarak adlandırılır. Stokastik modellerde, sistemin sonucu veya yanıtları değişkenlik gösterebilir. Çünkü model hem rasgele bileşenler içerir hem de rasgele etkiler ile bazı yollarla etkilenebilir.

Regresyon analizi değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek ve incelemek için kullanılan istatistiksel bir tekniktir. Regresyon analizinin çok farklı uygulama alanları mevcut olup bu uygulamalar mühendislik, fizik, kimya ve biyoloji bilimleri, iktisat, yönetim, gibi alanlarda kullanılmaktadır. Hatta regresyon analizi en yaygın olarak kullanılan istatistiki teknik olduğu söylenebilir.

Lineer ve lineer olmayan regresyon modellerinde normal dağılım önem arz etmektedir. Hem lineer hem de lineer olmayan modellerde sonuç çıkarımı (model parametrelerinin tahmini, model parametreleri üzerindeki istatistiksel testler ve güven aralıkları) için y bağımlı değişkeninin normal dağılıma sahip olduğu varsayılmaktadır. Bazı durumlarda bu varsayım gerçekliğini yitirmektedir. Regresyonda bazı durumlarda bağımsız değişken olarak kategorik değişkenleri kullanmak gerekli olabilir. Genel olarak nitel bir değişken doğal ölçme ölçeğine sahip değildir. Araştırmacılar varyansı sabitleştirmek için bağımlı değişken üzerinde çeşitli dönüşüm ya da dönüşümler yapmaktadır. Sabit olmayan varyans normal olmayan bağımlı değişken değerlerine (Poisson, Gamma v.b) özgüdür. Bu durumda bağımlı değişkenin modellenmesi için bağımlı değişken dönüşüm teknikleri kullanılarak, bağımlı değişkenin normal dağılım göstermesi sağlanabilir. Özellikle log, karekök, üstel bağımlı değişken dönüşüm teknikleri bu durumlarda tercih edilmektedir. Fakat hangi dönüşüm tekniğinin kullanılacağı yönünde kesin bir yöntem bulunmamaktadır. Üstelik bağımlı değişkenin dönüşümü ile ilgili pek çok problem öne sürülmüştür. En sık karşılaşılan problem ise normal dağılıma uygunluk, sabit varyans ve basit model biçimi gibi istenilen varsayımların tek bir dönüşümle elde edilebileceğinin kesin olmamasıdır. Bu durum farklı arayışlara sebep olmuş ve genelleştirilmiş lineer modeller ortaya konulmuştur.

Genelleştirilmiş lineer modeller ilk kez Nelder ve Wadderburn tarafından 1972 yılında ele alınmıştır. Çoğu sosyal bilimler ve tıp uygulamalarında kullanılan bu modeller aynı zamanda yaşam verilerinin analizinde de önemli bir rol oynamaktadır. Bu modeller normal dağılımdaki lineer modellerin üstel aile dağılımlarını tanımlamak için kullanılmaktadır. Genelleştirilmiş lineer modeller, normal dağılımlı olmayan bağımlı değişkeni göz önüne alan hem doğrusal hem de doğrusal olmayan regresyon modellerinin bir bileşimidir. Genelleştirilmiş lineer modellerde bağımlı değişkenin dağılımı; normal, binom, poisson, üstel ve gamma dağılımlarını içeren üssel ailenin bir üyesi olmalıdır. Genelleştirilmiş lineer modeller, ampirik modelleme ve veri analiz tekniklerini birleştiren bir yaklaşım olarak düşünülebilir. Genelleştirilmiş lineer modeller, gerçekte alışılagelen doğrusal regresyon modelleri ile lojistik ve poisson regresyonu gibi doğrusal olmayan modelleri bir araya getiren bir yaklaşımdır.

Genelleştirilmiş lineer modeller veri dönüşümü için güçlü bir alternatiftir. Ampirik çalışmalarda bağımlı değişkenin normal dağılıma uymadığı durumlar için veri dönüşümüne alternatif olarak genelleştirilmiş lineer modeller kullanılmalıdır. Ayrıca veri dönüşümü ve genelleştirilmiş lineer modeller ile bağımlı değişkenin tahmini için kurulan güven aralıklarının karşılaştırılması sonucu, genelleştirilmiş lineer modeller veri dönüşümüne nispeten daha dar güven aralıklarına sahiptir.

Bu tezin amacı, genelleştirilmiş lineer modelleri incelemek ve sonra bazı genelleştirilmiş lineer modelleri tanıtmaktır ve bu teorik çerçeve ile Atatürk Üniversitesinde öğrenim gören lisansüstü öğrencilerinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyetlerinin istatistiki analizini genelleştirilmiş lineer modeller ile yapmaktır. Genelleştirilmiş lineer modellerin temel varsayımı olan bağımlı değişkenin normallik varsayımını sağlamaması sebebiyle birinci bölümde olasılık dağılımları ele alınmıştır. İkinci bölümde genelleştirilmiş lineer modeller geniş bir şekilde anlatılmış olup yapısı, olabilirlik denklemleri, parametre tahmin yöntemleri, ortalama bağımlı değişkenin tahmini, uyum iyiliği, sonuç çıkarımı, parametreler için güven aralıkları, artık analizi, parametrelerin yorumlanması ve aşırı yayılım konuları ele alınmıştır. Ayrıca bazı genelleştirilmiş lineer modeller ele alınmış olup bu modellerin özellikleri, varsayımları, parametre yorumları ve istatistiki sonuç çıkarımları anlatılmıştır. Üçüncü ve son bölüm olan uygulama bölümünde, Atatürk Üniversitesinde lisansüstü öğrenim gören öğrenciler üzerinde yapılan akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet ile ilgili anket verileri kullanılarak genelleştirilmiş lineer modeller analizi uygulanmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

1. OLASILIK DAĞILIMLARI

Olasılık kuramında belirli özelliklere bağlı olarak olasılık dağılımları geliştirilmiştir. Olasılık dağılımları, kesikli olasılık dağılımları ve sürekli olasılık dağılımları olmak üzere iki ana başlık altında ele alınmaktadır.[1]

1.1. KESİKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

Olasılık kuramında, aynı özelliğe sahip rassal değişkenler için genel kalıplar oluşturulmuş ve benzer türdeki rassal değişkenlere uygulanmak amacıyla da bu kalıplar genelleştirilmiştir. Olasılık teorisinde, belirli özelliklerin içinde yer aldığı bu kalıplara, rassal değişken kesikli ise, olasılık fonksiyonları denir. Buna karşılık, rassal değişken sürekli ise olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. Rassal değişken ister kesikli ister sürekli olsun, bu genel kalıplar olasılık dağılımları olarak adlandırılır.[2] Kesikli olasılık dağılımları aşağıda verilmiştir.

- Bernoulli dağılımı
- Binom (İki terimli) dağılım
- Geometrik dağılım
- Negatif Binom (Eksi iki terimli) dağılım
- Hipergeometrik dağılım
- Poisson dağılımı

1.1.1. Bernoulli Dağılımı

Bernoulli dağılımı bir denemenin iki sonucu (iyi-kötü, olumlu-olumsuz) olması durumunda kullanılan kesikli bir dağılımdır. İki sonuçlu bir Bernoulli deneyinde ilgilenilen sonuca başarı, diğer sonuca başarısızlık dersek bunu X değişkeni ile olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

---

[1] İsmail Erdem, *Matematiksel İstatistik Problemler ve Çözümler,* Seçkin Kitapevi, Ankara 2012, 211.
[2] Mustafa Aytaç, *Matematiksel İstatistik,* Ezgi Kitapevi, Genişletilmiş 4. Baskı, Bursa 2012, 225

Bir deneyin başarılı olması olasılığı p ile gösterilirse X değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P_X(x;p) = P_x(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}; & x = 0,1 \\ 0\,; & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.1)$$

şeklinde verilir. Bernoulli dağılımının parametresi p'dir. Dağılımın ortalaması, varyansı aşağıdaki gibidir.

$$E(X) = p = \mu, \qquad Var(X) = \sigma^2 = p(1-p) = pq \quad (1.2)$$

Bernoulli dağılımında deney bir kez yapılıp başarı sonucu ile ilgilenilmektedir. Eğer deney n kez ve birbirinden bağımsız olmak üzere tekrarlanırsa ve yine başarı sonucu ile ilgilenilirse bu durumda bernoulli dağılımının özel bir durumu olan binom dağılımı ele alınmaktadır.[3]

1.1.2. Binom (İki Terimli) Dağılımı

Binom rasgele değişkeni birbirinden bağımsız n Bernoulli denemesinden başarılı olanların toplam sayısı X rasgele değişkeni olduğu kabul edilirse, bir tek deneme için başarılı olma olasılığı p, başarısız olma olasılığı 1-p ise X'e binom rasgele değişkeni denir. Binom dağılımından yararlanabilmek için aşağıda verilen bazı koşulların sağlanması gerekir.

a) Deney n özdeş denemeden oluşmaktadır.

b) Her bir deneme için başarı ve başarısızlık olmak üzere iki sonuç vardır.

c) Bir tek deneme için başarı olasılığı olan p her deneme için aynıdır. Başarısızlık olasılığı $q = 1 - p$ dir.

d) Denemeler birbirinden bağımsızdır.

Binom dağılımı birbirinden bağımsız n Bernoulli denemesi için X, her bir denemede başarı olasılığı p, başarısızlık olasılığı q olan binom rasgele değişkeni ise, X'in olasılık fonksiyonu;

$$P_X(x;p) = P_x(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}.\, p^x.\, q^{n-x}; & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0\,; & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.3)$$

[3] İsmail Erdem, a.g.e., 212.

olarak elde edilir. Bu dağılıma binom dağılımı denir. Bu durumda binom dağılımının ortalaması ve varyansı sırasıyla;

$$\mu = E(X) = np \qquad Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = npq \tag{1.4}$$

şeklinde ifade edilmektedir.[4]

Binom olasılık fonksiyonuna dayanılarak hesaplanan olasılıkların geçerliliği, incelenen değişkenin binom dağılımı göstermesine bağlıdır. Bu nedenle, olasılık hesaplamalarından önce binom deneylerinin özellikleri göz önüne alınmalı ve olasılığı hesaplanacak rassal değişkenin elde edildiği deneylerin bu özellikleri gösterip göstermediği dikkatlice ele alınmalıdır.[5]

1.1.3. Geometrik Dağılım

Bağımsız Bernoulli denemelerinin her dizisinde her bir deneme için başarı olasılığı p ve ilk başarının elde edilmesi için gerekli denemelerin sayısı X rasgele değişkeni olarak alındığı taktirde X'e geometrik rasgele değişkendir denir.

Binom dağılımında deney sayısı sabit ve istenen sonucun (başarının) sayısı bir değişken iken; geometrik dağılımda geometrik dağılımda deney sayısı değişken, fakat istenen sonuç (başarı sayısı) 1'dir.[6]

X bir tek denemede başarısızlık olasılığı $q = 1 - p$ ve başarı olasılığı p olan geometrik rasgele değişken ise X'in olasılık fonksiyonu;

$$P_X(x; p) = P_x(x) = \begin{cases} q^{x-1}.\, p\,; & x = 1,2, \dots, n \\ 0\,; & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{1.5}$$

şeklinde olur. Dağılımın parametresi p'dir. Geometrik dağılım için ortalama değer μ ve varyans σ^2sırasıyla,

$$E(x)=\frac{1}{p} \qquad Var(X) = E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{q}{p^2} \tag{1.6}$$

şeklinde olur.[7] X değişkeni, başarı olasılığı p olan bir geometrik dağılıma sahip ise, $P(X \geq k+s \setminus X \geq k)=P(X \geq s)$ koşulu, tüm tam sayı değerli s, k≥1 değerleri için sağlanır.

---

4 Fikri Akdeniz, *Olasılık ve İstatistik*, Nobel Kitabevi, Adana 2012, 200-208.
5 Özer Serper, a.g.e., 266.
6 İsmail Erdem, a.g.e., 216.
7 Mustafa Aytaç, a.g.e., 237.

Bu özelliğe de geometrik dağılımın hafızasızlık özelliği denir. Yani ilk başarıya ilk k deneme içinde ulaşılamamışsa, bundan sonraki s deneme içinde başarıya ulaşma olasılığı, ilk denemedeki başarıya ulaşma olasılığı ile aynıdır. Yani, böyle bir süreçte daha önce kaç deneme yapılmış olursa olsun, o andan itibaren ilk başarıyı elde etmek için yapılması gereken deneme sayısı daha önceki yapılan deneme sayılarına bağlı değildir.[8]

1.1.4.Negatif Binom Dağılımı

Negatif binom dağılımı, geometrik dağılımın genel şeklidir. Bir deney birbirinden bağımsız Bernoulli denemelerinden oluştuğunda, deneyde k adet başarı elde edilinceye kadar devam edilirse, k adet başarının elde edilebilmesi için gerekli denemelerin sayısı negatif binom rasgele değişkenidir.

Bağımsız Bernoulli denemeleri dizisinde her bir denemede başarı olasılığı p olmak üzere $k \geq 1$ başarının elde edilebilmesi için gereken denemelerin sayısı X rasgele değişkeni ise bu durumda X değeri negatif binom rasgele değişkenidir.

Bir tek denemedeki başarısızlık olasılığı $\mathrm{q = 1 - p}$ ve başarı olasılığı p olmak üzere, X negatif binom rasgele değişkeni ise, K başarının gerçekleşmesi için, X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$\mathrm{P_X(x; k, p) = P_x(x)} = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}\,; & x = k, k+1, \ldots \\ 0\,; & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (1.7)$$

şeklinde ifade edilir. Bu dağılıma negatif binom dağılımı denir.

X rasgele değişkeni negatif binom dağılımına sahip olduğu varsayılırsa ortalama ve varyans sırasıyla;

$$\mathrm{E(X)} = \mu = \frac{k}{p} \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{Var(X)} = \frac{kq}{p^2} \qquad (1.8)$$

şeklinde elde edilir.[9]

X rassal değişkeni bir binom dağılımına ve Y rassal değişkeni de bir negatif binom dağılımına sahip olsun. O zaman,

---

[8] İsmail Erdem, a.g.e., 218.
[9] Fikri Akdeniz, a.g.e., 213-214.

a) $P(X \geq k) = P(Y \leq n)$

eşitliğinin anlamı, ilk n deneydeki başarı sayısı k'ya eşit veya daha büyükse, ilk k başarıyı elde etmek için gerekli olan deney sayısı n'e eşit veya daha küçüktür.

b) $P(X < k) = P(Y > n)$

eşitliği de; ilk n deneydeki başarı sayısı k'dan küçükse, k başarıyı elde etmek için n'den çok deney gerektiği anlamına gelmektedir.[10]

1.1.5. Hipergeometrik Dağılım

Binom dağılımında, her örnek çekimine ilişkin başarı olasılığı sabit ve örnek çekimlerinin sanuçları da birbirinden bağımsızdır. Binom dağılımını sonlu sayıda elemanı olan bir kümeden iadeli çekim şeklinde tanımlamak mümkündür.

Bazı durumlarda sonlu elemanı olan bir kümeden iadesiz örnek çekimi gerekebilir. Böyle durumlarda, deney sonuçları birbirinden bağımsız olma özelliğini kaybeder.

Örnek çekiminin yapılacağı N elemanlı ana kitle içinde N_1 tanesi ilgilenilen sonucu(başarı), N_2=N-N_1 tanesi ilgilenilmeyen sonucu(başarısız) verecek özellikteki elemanlara sahip alt kümeler olsun. N elemanlı bu anakütleden n tanesi rassal ve iadesiz olarak çekilip, çekilenler içinde kaç tanesinin başarı grubundan geleceği ile ilgileniliyorsa, X dağılımı hipergeometrik dağılım olarak adlandırılır.[11]

Hipergeometrik dağılım aşağıda verilen koşulların sağlanması halinde kullanılmaktadır.

- Her deneyin olası iki sonucu varsa,
- Deneyin tekrarlanma sayısı n sabitse,
- Deneylerin birinin sonucu, diğerinin sonucunu etkiliyorsa

Hipergeometrik dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$P_x(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{x}}{\binom{N}{n}} ; & x = 0,1, \dots n \\ 0 ; & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (1.9)$$

[10] Mustafa Aytaç, a.g.e., 244.
[11] İsmail Erdem, a.g.e., 221.

şeklindedir. Hipergeometrik dağılımın ortalama ve varyans değerleri sırasıyla;

$$E(X) = \frac{nN_1}{N} = np \qquad\qquad Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1} \qquad (1.10)$$

şeklinde elde edilir.[12]

1.1.6. Poisson Dağılımı

Belli bir zaman veya mekân diliminde rassal olarak gözlemlenen birim sayısı X, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa Poisson rassal değişkeni adını alır;

a) Farklı zaman veya mekân dilimlerinde gerçekleşen ilgilenilen türden sonuçlar bağımsızdır. Başka bir deyişle, bu sonuçların gerçekleşmesi arasında ilişki yoktur.

b) Verilen çok küçük bir zaman veya mekân diliminde ilgilenilen türden sonucun bir defa gerçekleşme olasılığı p değişmemekte ve "$p < 0{,}005$" eşitsizliğine uymaktadır.

c) Zaman veya mekân o kadar küçük dilimlere ayrılmıştır ki söz konusu dilimlerde ilgilenilen türde birden fazla sonucun gerçekleşmesi hemen hemen olanaksızdır. Dolayısıyla, bu durumda ilgilenilen türden birden fazla sonuç elde edilmesi olasılığı sıfıra yaklaşır.

d) n tane zaman veya mekân dilimi n tane deney sayılmakta ve deney sayısı sonsuza yaklaşmaktadır.

e) Belli bir zaman veya mekân diliminde ilgilenilen türden sonucun ortalama gerçekleşme sayısı μ sabittir ve diğer ortalamalar gibi kesirli bir değere sahip olabilir.

İlgilenilen türden birim sayısı X'in olasılık fonksiyonu $0 \le X \le \infty$ ve $\mu > 0$ olmak üzere;

$$P(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\,\mu^{x}}{x!}, & x = 0,1,2,3,\ldots \text{için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (1.11)$$

şeklindedir. Bu fonksiyona Poisson olasılık fonksiyonu denir.

[12] Mustafa Aytaç, a.g.e., 245-246.

X rasgele değişkeni Poisson dağılımına sahip olduğu varsayılırsa ortalama ve varyans sırasıyla;

$$\mathrm{E(X)} = \mu \qquad\qquad \mathrm{Var(X)} = \mu \tag{1.12}$$

şeklinde ifade edilir.[13]

1.2. SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

Sürekli bir değişken, reel eksende belirli bir aralıktaki tüm reel değerleri alan bir değişkendir. Rassal değişkenleri sürekli olan ve belirli bir aralıkta bulunmasının olasılığı ile ilgilenilen dağılımlara sürekli dağılımlar adı verilmektedir. Bu türden değişkenlerle ilgili olasılıkların ve parametrelerin hesabında olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonlar kullanılmaktadır. [14] Bu kısımda ele alınacak sürekli olasılık dağılımları aşağıda verilmiştir.

- Tekbiçimli (Uniform) dağılım
- Üstel dağılım
- Gamma dağılımı
- Beta dağılımı
- Normal dağılım
- t- dağılımı
- Ki-kare dağılımı

1.2.1. Uniform Dağılım

En yaygın olarak benzetim uygulamalarında kullanılan Uniform dağılımında, X rasgele değişkeninin $-\infty < a < b < \infty$ ile tanımlı a ve b parametreleri arasında sonlu aralıkta sınırlanmakta olup olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} f(x; a, b) = \frac{1}{b-a}\ , & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{1.13}$$

[13] Özer Serper, Uygulamalı İstatistik, Ezgi Kitapevi, Bursa, 2010., 277-282.
[14] İsmail Erdem, a.g.e., 229.

şeklinde elde edilmektedir. X rasgele değişkeni $[a, b]$ kapalı aralığında uniform dağılıma sahiptir. Uniform olarak adlandırılmasının sebebi, (a,b)'daki eşit uzunluktaki aralıklar, bulundukları konum ne olursa olsun, eşit olasılıklı olarak belirtildiği içindir.

X rasgele değişkeni düzgün dağılıma sahipse ortalama ve varyansı sırası ile

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{1.14}$$

şeklinde ifade edilir.[15]

1.2.2. Üstel Dağılım

İstatistiğin son yıllarda üzerinde en çok çalışma yapılan alanlarından birisi de güvenirlilik teorisidir. Üstel dağılım, başka birçok alanda da kullanılmasına karşın, güvenirlilik teorisinde çok önemli yere sahiptir. Üstel dağılım bekleme süresi ile ilgili problemlerin çözümünde kolaylık sağlamaktadır.[16]

$X > 0$ olmak üzere sürekli bir rassal değişken olduğu kabul edildiğinde, Eğer $\alpha > 0$ için X rassal değişkeni aşağıdaki gibi bir dağılıma sahip olursa, X rassal değişkenine üstel dağıtılmış rassal değişken ve f(x) fonksiyonuna üstel dağılım adı verilir.

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \alpha . e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{1.15}$$

Burada α üstel dağılım parametresidir. Birikimli üstel dağılım fonksiyonu ise;

$$\int_0^\infty f(x). dx = \int_0^\infty \alpha . e^{-\alpha x}. dx = -e^{-\alpha x} |_0^\infty = 1$$

şeklinde gösterilir. Üstel dağılımın özellikleri;

a) Üstel dağılımın dağılım fonksiyonu;

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \int_0^\infty \alpha . e^{-\alpha t}. dt = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \text{ için} \\ 0, & x < 0 \text{ için} \end{cases} \tag{1.16}$$

şeklinde ifade edilir. O halde $P(X > x) = e^{-\alpha x}$ yazılır.

b) X'in ortalaması:

[15] George Roussas, (Çev. Editörleri: Şanslı Şenol, Güzin Yüksel), *Olasılığa Giriş*, Nobel Akedemik Yayıncılık, Ankara, 2014, 131-132.
[16] Mustafa Aytaç, a.g.e., 306-307.

$$E(X) = \int_0^{\infty} x.\alpha.\alpha^{-\alpha x}.dx \quad (1.17)$$

şeklindedir. Kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa: $\alpha.e^{-\alpha x}.dx = dv,\ x = u$ alarak,

$$E(X) = [-xe^{-\alpha x}]\,|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}.dx = \frac{1}{\alpha} \quad (1.18)$$

elde edilir.

c) X'in varyansı benzer integresyon yöntemi ile

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^{\infty} x^2.\alpha^{-\alpha x}.dx - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

$$= \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \quad (1.19)$$

şeklinde elde edilir.[17]

X değişkeni, parametresi λ olan bir üstel dağılıma sahip ise, $P(X > s + t \backslash X > t) = P(X > s)$ eşitliği, tüm $s, t \geq 0$ değerleri için sağlanır. Bu özelliğe de üstel dağılımda hafızasızlık özelliği denir. Yani, olay t süresi içinde olmamışsa, olayın $s + t$ süresi içinde olması olasılığı, herhangi bir s uzunluğundaki süre içinde olması olasılığı ile aynıdır. Yani, böyle bir süreçte daha önce ne uzunlukta bir süre geçmiş olursa olsun, o andan itibaren ilk oluşa kadar geçecek sürenin uzunluğu, daha önce geçen süre uzunluğuna bağlı değildir.[18]

1.2.3. Gamma Dağılımı

Gamma dağılımı yalnızca istatistik ve olasılık teorisinde değil, Beta dağılımı ile birlikte matematik teorisinin çok geniş bir alanında uygulama olanağı bulmaktadır. Güvenirlilik uygulamalarında da önemli bir uygulama alanına sahiptir.[19]

Tüm $\alpha > 0$ değerleri için tanımlanan;

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}.e^{-x}.dx \quad (1.20)$$

fonksiyonuna Gamma fonksiyonu denir. X pozitif değerler alan sürekli rasgele değişken ise X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

---

[17] Fikri Akdeniz, a.g.e., 263-264.
[18] İsmail Erdem, a.g.e., 234.
[19] Mustafa Aytaç, a.g.e., 312.

$$f(x;\alpha,r)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\Gamma(r)}.(\alpha x)^{r-1}.e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases} \tag{1.21}$$

biçimindedir. X değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu yukarıdaki gibi ise X, Gamma olasılık dağılımına sahiptir. Görüldüğü üzere Üstel dağılım $r=1$ için Gamma dağılımının özel halidir.

Gamma dağılımın ortalama ve varyansı sırası ile;

$$\mu=\frac{r}{\alpha} \qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{r}{\alpha^2} \tag{1.22}$$

şeklinde ifade edilir.[20]

1.2.4. Beta Dağılımı

İstatistikte rassal değişkenlerin oranları ile ilgili problemler içim kullanılan en önemli dağılımların birisi de Beta dağılımıdır.[21]

$\alpha>0$ ve $\beta>0$ olmak üzere beta fonksiyonu,

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}.dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{1.23}$$

olarak tanımlanır.

Beta fonksiyonundan hareketle beta olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}x^{t-1}(1-x)^{s-1}, & 0<x<1, t>0, s>0\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases} \tag{1.24}$$

şeklinde ifade edilir.

Beta dağılımına sahip X rasgele değişkeninin ortalaması ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir.[22]

$$\mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2.(\alpha+\beta+1)} \tag{1.25}$$

---

[20] George Roussas, (Çev. Editörleri: Şanslı Şenol, Güzin Yüksel), a.g.e., 121-123.
[21] Mustafa Aytaç, a.g.e., 316.
[22] Fikri Akdeniz, a.g.e., 266-267

1.2.5. Normal Dağılım

İstatistikte en çok kullanılan ve çok geniş uygulama alanına sahip olan normal dağılım ilk olarak 1773 yılında De Moivre tarafından ortaya atılmıştır. Normal olarak isimlendirilen dağılım birçok alanda pratik uygulaması olan önemli sürekli olasılık dağılım ailesinin bir bireyidir. Bu dağılım ailesinin her bir üyesi sadece iki parametre ile, tam olarak tanımlanabilir: bunlar konum gösteren ortalama ve ölçek gösteren varyansdır. Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafik şekli bir çan gibi görüntü verdiği için çoğu kez çan eğrisi olarak da anılır.[23]

Sürekli bir X rasgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0 \qquad (1.26)$$

ise X normal dağılıma sahiptir denir.

Normal dağılımın özellikleri ise;

a) Normal dağılım $x = \mu$ doğrusuna göre simetriktir, yani normal dağılımın grafiği $x = \mu$ doğrusunun solunda ve sağında aynıdır.

b) Ortalama (μ), ortadadır ve alanı iki eşit parçaya ayırır.

c) f(x) eğrisinin altındaki ve x ekseninin yukarısındaki alan 1'e eşittir.

Görüldüğü gibi anakütle ortalaması ve standart sapması bilinen X değerleri için ihtimal hesabı yapılabilir. Bu yüzden normal dağılımın μ ve σ gibi iki parametresi vardır. Normal eğri altındaki toplam alan 1'e eşittir. Normal dağılımda herhangi bir X sürekli değişkeninin nokta tahmini sıfırdır.[24]

1.2.6. Student t Dağılımı

Anakütlenin, ortalaması ve varyansı bilinmeyen, normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında ve örneklem büyüklüğünün yeteri derecede büyük olmadığı $(n < 30)$ hallerde ortalamalara ilişkin istatistiksel çıkarsama uygulamalarında çok kullanılan bir

---

[23] İsmail Erdem, a.g.e., 238.
[24] Alaattin Başar, Erkan Oktay, *Uygulamalı İstatistik 1*, Erzurum Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum, 2012, 125-126.

sürekli olasılık dağılımıdır. t-dağılımını belirleyen en önemli parametre v olup serbestlik derecesi olarak adlandırılmaktadır. t-dağılımı sadece v parametresine dayanır.

$T_v = \frac{Z}{\sqrt{V/v}}$ olarak tanımlanan değişkenin dağılımı serbestlik derecesi v olan t-dağılımıdır ve T_v'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{T_v}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{(v+1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{v\pi}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{(v+1)/2}} \quad , -\infty < t < \infty \qquad (1.27)$$

şeklinde ifade edilir.[25]

1.2.7. Ki-kare Dağılımı

Ki-kare, aritmetik ortalaması sıfır varyansı bir olan normal bölünmeli bir anakütleden herbiri diğerinden bağımsız olarak seçilen n birimli bir örnekleme ait değerlerin karelerinin toplamı demektir. Ki-kare dağılımı yaygın bir kullanım alanına sahiptir.

Ki-kare sürekli bir rassal değişken olup, olasılık yoğunluk fonksiyonu, Gamma dağılımında $\alpha = n/2$ ve $\beta = 2$ değerleri konularak,

$$f(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{\frac{v}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)2^{\frac{v}{2}}} \quad , \ 0 < \chi^2 < \infty \qquad (1.28)$$

şeklinde bulunmaktadır.

Beklenen değer $E(\chi^2) = v$ ve varyansı $\sigma^2(\chi^2) = 2v$ şeklindedir. Ki-kare dağılımının bir tek parametresi v'dir. Ki-kare dağılımının serbestlik derecesi (n-1)'dir. Ki-kare dağılımının grafiğinin şekli v'ye bağlıdır.[26]

1.3. LİTERATÜR ÖZETİ

Genelleştirilmiş Lineer Model fikri ilk olarak, üssel aile modellerine ilişkin olası en yüksek tahmini gerçekleştirmek için puan sistemini genişleten Nelder ve Wedderburn (1972) tarafından ileri sürülmüştür. Kapsamlı olarak ilk kez McCullagh ve Nelder tarafından yapılan daha sonraları Dobson (1990), Fahrmeir and Tutz (1994),

---

[25] İsmail Erdem, a.g.e., 243.
[26] Mustafa Aytaç, a.g.e., 323-324.

Myers and Montgomery (1997) ve Lindsey (1997) tarafından yapılan çalışmalar günümüzde bu alana önemli katkılar yapmıştır. Genelleştirilmiş lineer modeller, temel olarak bağımsız değişkenler ve bilinmeyen parametreler arasındaki ilişki bağlamında doğrusal olan bir bağlam kümesi sunmaktadır fakat bağımlı değişkenin normal dağılıma uymamasından dolayı doğrusal olmayan model problemleriyle sonuçlanmaktadır (Wu 1986). Normal lineer modeller, Poisson Log-Lineer modelleri (Fienberg (1980)) ve ikili veriler için uygulanan probit ve logit analizleri (Finney (1971) ve Cox ve Snell (1989)) genelleştirilmiş lineer modellerin özel durumlardır.

1.3.1. Teorik Çalışmalar İle İlgili Literatür Özeti

Nelder ve Wedderburn (1972), Nelder (1977) ve McCullagh ve Nelder (1989) genelleştirilmiş lineer modelleri kullanarak istatistiksel modellemeye kapsamlı açıklamalar getirmişlerdir. Ayrıca, genelleştirilmiş lineer modelleme ile değişken dönüştürmeyle ortaya çıkan sorunların büyük ölçüde azaldığını belirtmişlerdir. Buna bağlı olarak da doğrusal regresyon modellerindeki normallik ve varyansın sabitliği varsayımlarının artık gerekli olmadığını fakat varyans değişikliğinin dayandığı araçların bilinmesi gerektiğini belirtmişlerdir.

Robert Schall (1991) genelleştirilmiş lineer modellerde sabit etkilerin tahmini, rasgele etkiler ve dağılımın bileşenlerini ele almıştır. Rastgele etkilerle genelleştirilmiş lineer modellerde dağılım bileşenlerine açıklama getirmektedir.

Y. Lee ve J. A. Nelder (1996), genelleştirilmiş lineer modellerin lineer kestiricilerinde ekstra hata bileşenine olanak tanıyan hiyerarşik genelleştirilmiş lineer modelleri ele almışlardır. Hiyerarşik genelleştirilmiş modeller olarak bilinen, Henderson'nun ortak olasılık genellemesini kullanmışlardır. Model seçim kriterleri, uyum iyiliği, ölçeklenmiş sapma testlerini ele alarak çeşitli dağılımlar için hiyerarşik genelleştirilmiş lineer modelleri ele almışlardır.

R. J. Carroll, Jianqing Fan, Irene Gijbels, M. P. Wand (1997) çalışmalarında genelleştirilmiş lineer modellere non-parametrik bileşeni ekleyerek genelleme yapmışlardır.

Dipak K. Dey, Alan E. Gerfand, Fengchun Peng (1997) değişen varyans çerçevesinde klasik olarak kullanılan genelleştirilmiş lineer modellerin yeterli olmadığı bu bağlamda Bayes çıkarsama süreci ile kurulacak aşırı yayılmış genelleştirilmiş lineer modellemeleri tanıtmışlardır.

Malay Ghosh, Kannan Natarajan, T. W. F. Strould, Bradley P. Carlin (1998) hem kesikli hem de sürekli veriler için hiyerarşik bayes genelleştirilmiş lineer modelleri tanıtmışlardır. Hiyerarşik Bayes prosedürünü markov zinciri, monte carlo entegrasyon teknikleri ile uygulamışlardır.

Youngjo Lee, John A. Nelder (2001) hiyerarşik genelleştirilmiş lineer modelleri kullanarak rasgele etki modelleri ve yapısal dağılımlar ile genelleştirilmiş lineer modellerin sentezini yapmışlardır.

Gareth M. James (2002) genelleştirilmiş lineer modelleri, tahmini değişkenlerin eğri veya fonksiyondan gözlemleri ile genişletmek için bir teknik sunmuştur. Yapay ve gerçek veri kümelerinde bu fonksiyonel belirleyiciler ile doğrusal ve lojistik regresyon modellerinin nasıl kullanılabileceğini göstermiştir.

Stuart Lipsitz, Michael Parzen, Sundar Natarajan, Joseph Ibrahim, Garrett Fitzmaurice (2004) parçalar halinde ortak değişkenlere sahip olan genelleştirilmiş lineer regresyon parametrelerinin tahmini için bir olasılık tabanlı bir yöntem önermişlerdir.

Gauss M. Corderio (2004) çalışmasında genelleştirilmiş lineer modellerde pearson kalıntıları için titiz asimptotik teorinin henüz mevcut olmadığını belirmiştir. Yeni bir formül önermiş ve formülün yaygın olarak kullanılan birçok regresyon modeli için de kullanılabileceğini belirtmiştir. Sabit varyanslı ve sıfır ortalamalı düzeltilmiş pearson artıklarını önermiştir.

Hans Georg Müller, Ulrich Stadtmüller (2005), çalışmalarında bağımlı değişkenin ölçülebilir ve tahmincisinin rasgele fonksiyonu olan durumlar için genelleştirilmiş fonksiyonel lineer modelleri önermişlerdir.

M. Emin İnal, Derviş Topuz, Okyay Uçan (2006) regresyon modelinde kukla değişkenlerin kullanımını ele almışlardır. Bu doğrultuda, bağımsız değişkenlerin değerlerine karşılık bağımlı kukla değişkenlerin alacağı değerlerin nasıl değişmekte olduğu lojistik regresyon modelleri bağlamında incelemişlerdir.

Mee Young Park, Trevor Hastie (2007) genelleştirilmiş lineer modeller için L_1 düzenleştirme algoritması konusunu ele almışlardır.

Sara A. Van De Geer (2008) Lipschitz kayıp fonksiyonları ile yüksek boyutlu genelleştirilmiş lineer modelleri tanıtmışlardır.

Bo Hu, Jun Shao (2008) determinasyon katsayısını kullanarak genelleştirilmiş lineer model seçimini tanıtmışlardır.

Anders Skrondal, Sophia Rabe-Hesketh (2009) çok düzeyli genelleştirilmiş lineer modellerde rasgele etkilerin ve beklenen yanıtların tahminini tartışmışlardır.

Damla Şentürk, Hans Georg Müller (2009) düzenlenebilir eş değişkenli genelleştirilmiş lineer modelleri ele almışlardır.

Gauss M. Cordeiro, Marinho G. de Anndrade (2009) üstel dağılım modellerine dayanan, Box-Cox modelleri ile genişletilen dönüştürülmüş genelleştirilmiş lineer modelleri ele almışlardır.

Yanyuan Ma, Marc G. Genton (2010) gizli değişkenlerin herhangi bir dağılım varsayımı gerektirmediği genelleştirilmiş gizli değişkenli lineer modelleri ele almışlardır.

Livio Finos, Chaiara Brombin, Luigi Salmaso (2010) genelleştirilmiş lineer modellerde aşamalı p-değerleri ayarlamayı ele alarak, herhangi aşamalı bir seçim yöntemi ile seçilen modelin p-değerini ayarlamak için parametrik olmayan bir prosedür tanımlamışlardır.

Qiang Zhang, Haksing Ip (2010) bölümlenmiş koşullu model adı altında, kısmen sıralı veriler için yeni bir genelleştirilmiş lineer model önermişlerdir.

Naveen Kumar, Christina Mastrangelo, Douglas Montgomery (2011) genelleştirilmiş lineer modelleri kullanarak hiyerarşik modelleri ele almışlardır.

Simon N. Wood (2011) cezalandırılmış genelleştirilmiş lineer modellerde, olabilirlik temelli düzeltilmiş parametrelerin güvenilir ve etkin hesaplanmasını ele almıştır.

John Neuhaus, Charles McCulloch (2011) genelleştirilmiş lineer modelleri ele alarak, bağımlı değişkenin çeşitli dağılımları için parametre tahminleri, olabilirlik denklemleri hakkında bilgi vermişlerdir.

Göran Broström, Henrik Holmberg (2011) kümelenmiş verilerle genelleştirilmiş lineer modelleri tanıtarak, sabit ve rassal etki modellerini ele almışlardır.

Mariana Ragassi Urbano, Clarice Garcia Borges Demetrio, Gauss Moutinho, Cordeiro (2012) genelleştirilmiş lineer modellerde yaklaşık sıfır ortalama ve sabit varyans durumlarını sağlayan Wald artıklarının kullanılmasını önermişlerdir.

Shuling Wang, Man Liu, Qianqian Zhu, Ting Wang (2012) yerel etki analizi tanıtılarak, genelleştirilmiş lineer modellerde yerel etki analizini ele almışlardır.

S. Mukhopadhyay, A.I. Khuri (2012) genelleştirilmiş lineer modellerde, model seçiminde model adaylarını karşılaştırmak için kantil dağılım grafikleri yaklaşımını göstermişlerdir.

Thomas Rusch, Achim Zeileis (2013) genelleştirilmiş lineer modellerin tekrarlamalı bölümlendirme algoritmasını tanıtmışlardır.

Xiaoguang Wang, Junhui Fan (2013) çok değişkenli genelleştirilmiş lineer modellerde model seçiminde tutarlılığı ön plana çıkaran yeni bir ölçüt oluşturmuşlardır.

Gaorong Li, Heng Lian, Sanying Feng, Lixing Zhu (2013) genelleştirilmiş lineer modeller boylamsal veriler için otomatik değişken seçimi konusunu ele almışlardır.

Cristian Villegas, Gilberto A. Paula, Francisco José A. Cysneiros ve Manuel Galea (2013) simetrik dağılımları açıklayarak genelleştirilmiş simetrik lineer modellerin tahminleri ile artık analizi konularını ele almışlardır.

Gilberto A. Paula (2013) büyük örneklem hacimleri için çift genelleştirilmiş lineer modellerinde model teşhis yöntemlerini açıklamıştır.

Ruiqin Tian, Liugen Xue, (2014) genelleştirilmiş lineer modellerde boylamsal veriler üzerine genelleştirilmiş deneysel olabilirlik çıkarımını çalışmışlardır.

Alexandro D. Ramirez, Liam Paninski (2014) beklenen log olabilirlik yoluyla genelleştirilmiş lineer modellerde hızlı çıkarımlar yapmayı ele almışlardır.

Guyvanie M. Miakonkana, Asheber Abebe (2014) genelleştirilmiş lineer modeller için iteratif sıralama tahmini yapmışlardır.

Marina Valdora, Víctor J. Yohai (2014) genelleştirilmiş lineer modeller için sağlam tahmin veren bir dağılım ailesi önermişlerdir. Burada temel fikir bağımlı değişken dönüşümünü stabilize eden bir varyans uyguladıktan sonra bir M-tahmincisi kullanmaktır.

Gauss M. Cordeiro, Edwin Ortega ve Artur Lemonte (2015) genelleştirilmiş poisson Hata Oranı Modelini oluşturmuşlardır.

Valentino Dardanoni, Giuseppe De Luca, Salvatore Modica, Franco Peracchi (2015) ortak değişkenler ile genelleştirilmiş lineer modellerde, model ortalama tahminini ele almışlardır.

1.3.2. Uygulamaya Dönük Çalışmalar İle İlgili Literatür Özeti

Joseph G. Ibrahim (1990) çalışmasında genelleştirilmiş lineer modeller sınıfı için eksik verileri incelemiştir.

Joseph M. Hilbe (1994), genelleştirilmiş lineer modelleri tanıtarak, modellerin tahmininde kullanılabilecek bazı istatistiksel paket programlarını ele almışlardır.

David K. Blough, Carolyn W. Madden ve Mark C. Hornbrook (1999) genelleştirilmiş lineer model uzantılarını kullanan iki parçalı modellerin ikinci bölümünü modellenmesi için yeni bir yaklaşım öne sürmüşlerdir. Bu modelin tahmininde temel yöntem olarak maksimum olabilirlik yöntemini kullanmışlardır. Bu yöntem ile aynı zamanda yarı olabilirlik genellemeleri ve genişletilmiş yarı olabilirlikleri ele almışlardır. Washington State çalışanlarının tıbbi gider verilerinden yararlanarak model tahmini yapmışlardır.

Antoine Guisan, Thomas C. Edwards, Trevor Hastie (2002) Ekolojide istatistiksel modellemenin genel kullanımından bahsederek, ekolojik modelleme çalışmalarında genelleştirilmiş lineer modeller ve genelleştirilmiş toplamsal modellerinin uygulanabilirliğini ele almışlardır. Ekolojik anlamda genelleştirilmiş lineer modellere ve genelleştirilmiş toplamsal modellere bakış açısı sunmuşlar ve model seçimi için kullanılan ilgili istatistikleri tartışmışlardır.

Zheng Wu (2005) üstel dağılım ailesi, lineer kestirici, link fonksiyonu gibi genelleştirilmiş lineer modellerin ilkelerine, temel prensiplerine değinmiştir ve örnek olarak Kanada ulusal anket verileri üzerinde uygulama yapmıştır.

Ruth Salway, Jon Wakefield (2008), tek doz Farmakokinetik veriler için gamma genelleştirilmiş lineer modelleri ele almışlardır.

Luca Zanin, Giampiero Marra (2012) turizm araştırmalarında genelleştirilmiş lineer modeller ve genelleştirilmiş katkı modellerinin kullanımının karşılaştırmalı analizini yapmışlardır.

K. Murray, S. Heritier, S. Müller (2013) genelleştirilmiş lineer modellerde model seçimi için grafiksel araçları ele almışlardır. Grafiksel araçların birçok farklı seçim kriterleriyle karşılaştırmasını yapmışlardır.

Yaotian Zou, Srinivas Reddy Geedipally ve Dominique Lord (2013) genelleştirilmiş çift poisson modellerini motorlu araç kazalarında uygulanabilirliğini inceleyerek, çift poisson genelleştirilmiş lineer modellerle Conway–Maxwell–poisson genelleştirilmiş lineer modeller arasında uyum iyiliği karşılaştırması yapmışlardır.

Sourish Das, Dipak K. Dey (2013) dinamik genelleştirilmiş lineer modelleri tanıtarak, Atlantik okyanusunda meydana gelen kasırga verileri üzerinde uygulama yapmışlardır.

Jie Yang, Abhyuday Mandal (2014) genelleştirilmiş lineer modeller altında D-optimum faktöriyel tasarımları ikili yanıt ve iki seviyeli deneysel faktörleri için genişletmişlerdir.

Tiago M. Vargas, Silvia L.P. Ferrari ve Artur J. Lemonte (2014) genelleştirilmiş lineer modellerde geliştirilmiş olabilirlik çıkarımlarını küçük örneklemler üzerinde açıklamışlardır.

Winfried Stute, Li-Xing Zhu (2015) genelleştirilmiş lineer modeller için model denetimini artıklar ile işaretlenmiş bazı ampirik süreçlerle açıklamışlardır.

İKİNCİ BÖLÜM

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER

2.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERE GİRİŞ

Genelleştirilmiş lineer modeller ilk kez Nelder ve Wadderburn tarafından 1972 yılında ele alınmıştır. Genelleştirilmiş lineer modeller, son otuz yıl içinde istatistik alanındaki en önemli gelişmelerden biri olmuştur. Çoğunlukla sosyal bilimler ve tıp uygulamalarında kullanılan bu modeller aynı zamanda yaşam verilerinin analizinde de önemli bir rol oynamaktadır. Bu modeller normal dağılımdaki lineer modellerin üstel aile dağılımlarını tanımlamak için kullanılır.

Genelleştirilmiş lineer modeller veri dönüşümünde etkili bir alternatiftir. Bağımlı değişkenin normal dağılım göstermediği durumlar için veri dönüşümüne alternatif olarak genelleştirilmiş lineer modeller kullanılabilir.[27] Bunun yanı sıra, veri dönüşümleri ve genelleştirilmiş lineer modeller ile her bir seviyede ortalama bağımlı değişken için kurulan güven aralıklarının birbirleriyle karşılaştırıldıklarında, genelleştirilmiş lineer modeller veri dönüşümüne kıyasla daha dar güven aralıklarına sahiptir. Ayrıca bazı durumlarda bağımlı değişkenin dönüşümü ile elde edilen modeller yardımıyla bulunan kestirim değerlerinin ters dönüşümü doğru olmayan gerçek tepki değerleri verebilir.[28]

Lineer ve lineer olmayan regresyon modellerinde normal dağılım önemli bir rol oynamaktadır. Hem lineer hem de lineer olmayan modellerde sonuç çıkarımı için Y bağımlı değişkeninin normal dağılıma sahip olduğu varsayılmaktadır. Bazı durumlarda, örneğin, bağımlı değişkenin kesikli değişken olması durumunda, bu varsayım gerçekleşmemektedir. Bu varsayımın gerçekleşmeme durumlarından bir diğeri ise iki uçlu bağımlı değişkenlerdir. Bu durumda gözlemler “var”, “yok” veya “başarı”, “başarısızlık” olarak gösterilebilir.[29]

---

[27] S.L., Lewis, D.C., Montgomery, R.H., Myers, “Examples of Designed Experiments with Nonnormal Responses”, *Journal of Quality Technology*, 33,(2001a), 265-278.
[28] P. Mccullagh, J.A. Nelder, *“Generalized Linear Models”*, 2nd ed., Chapman & Hall, (1989), 3-5.
[29] Özer Serper, *Uygulamalı İstatistik*, Ezgi Kitabevi, Bursa, 2010.

Sabit olmayan varyans özelliği normal dağılıma uymayan bağımlı değişkenin dağılımına (Binom, Poisson, Gamma, v.b.) özgüdür. Bağımlı değişkenin varyansı, ortalamanın bir fonksiyonudur. Örneğin Poisson dağılımında, varyans ortalamaya eşittir. Birçok araştırmacı sabit varyans varsayımını gerçekleştirmek için bağımlı değişken üzerinde dönüşüm yapmaktadır. Ancak, literatürde bağımlı değişkenin dönüşümü ile ilgili birçok problem ileri sürülmüştür. En çok karşılaşılan problem ise normal dağılıma uygunluk varsayımının, sabit varyans ve basit model formu gibi istenilen özelliklerin tümünün tek bir dönüşüm ile elde edilebilmesinin garantisinin olmamasıdır.[30]

Normal dağılıma uygunluk varsayımını yaklaşık olarak elde etmek için veri dönüşümünden çok, dönüştürülmemiş bağımlı değişken için dağılımların sınıfı genişletilebilir. Bu geniş sınıf, üssel aile sınıfı olarak adlandırılır. Genelleştirilmiş lineer modeller, bağımlı değişkenin üssel aileden olması durumunda, regresyon modellerini oluşturmaya olanak tanımaktadır. Buradan genelleştirilmiş lineer modellerde, varyansın ortalamanın bir fonksiyonu olduğu çıkarılabilir.[31]

Üssel ailenin genel biçimi,

$$f(y;\theta,\phi) = \exp\left\{\frac{y(\theta)-b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right\} \qquad (2.1)$$

şeklindedir. Burada $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ ve $c(\cdot)$ belirli fonksiyonlardır. θ parametresi doğal konum parametresidir, ϕ ise yayılım veya ölçek parametresidir. Denklem (2.1)'de $a(\phi) = \phi w$ ifade etmektedir. Burada gruplandırılmamış veri için $w = 1$, gruplandırılmış veri kümesi için $w = n$ olarak alınmaktadır.

Üssel ailenin üyesi olan dağılımlar; normal, binom, poisson, geometrik, negatif binom, üstel, gamma ve ters normal dağılımdır. Bu dağılımlardan, normal, binom, poisson ve gamma dağılımı, formül (2.1) formunda aşağıdaki gibi verilebilir.[32]

μ ve σ parametreli normal dağılıma sahip Y rastgele değişken için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

[30] M., Hamada, J. A., Nelder, "Generalized Linear Models for Quality Improvement Experiments", *J. of Quality Technology*, 29, (1997), p.292-304.
[31] A.J. Nelder, R.W.M. Wedderburn,"Generalized Linear Models",*Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, 135, 1972, 370-384.
[32] Kadri Ulaş Akay, *Genelleştirilmiş Lineer Modeller Yardımıyla Karma Denemelerin Analizi*,(Yayınlanmamış Doktora Tezi), Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2007.

$$f(y;\mu,\sigma) = \exp\{-[y-\mu]^2/2\sigma^2\}.\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$

$$= \left\{{(y\mu-\mu^2/2)}\big/_{\sigma^2} - \frac{1}{2}[y^2/\sigma^2 + \ln(2\pi\sigma^2)]\right\} \quad (2.2)$$

dir. Fonksiyon (2.2)'de $\theta = \mu$, $b(\theta) = \mu^2/2$, $a(\phi) = \phi$, $(\varphi = \sigma^2)$ ve $c(y,\phi) = -\frac{1}{2}[y^2/\sigma^2 + \ln(2\pi\sigma^2]$ olarak ifade edilir. Kısaca konum parametresi μ ve doğal ölçek parametresi σ^2 dir.

Binom dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y;p) = \exp\left\{y\ln\left[\frac{p}{1-p}\right] + n\ln(1-p) + \ln\binom{n}{y}\right\} \quad (2.3)$$

şeklindedir. Denklem (2.3)'de $\theta = \ln\left[\frac{\pi}{1-\pi}\right]$, $b(\theta) = n\ln(1+\exp[\theta])$, $a(\phi) = 1$ $\phi = 1$ ve $c(y) = \ln\binom{n}{y}$ şeklindedir.

Poisson dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y;\mu) = \exp[\mu\ln\mu - \mu - \ln(y!)] \quad (2.4)$$

biçimindedir. Burada $\theta = \ln(\mu)$, $\mu = \exp(\theta)$, $a(\phi) = 1$, $b(\theta) = \mu$ ve $c(y,\phi) = -\ln(y!)$ şeklindedir.

Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu üssel aile formunda,

$$f(y;\mu,\phi) = \exp\left\{\frac{y/\mu-(-\ln\mu)}{-\phi} + \frac{\phi+1}{\phi}\ln y - \frac{\ln\phi}{\phi} - \ln\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)\right\} \quad (2.5)$$

şeklindedir. Denklem (2.5)' deki olasılık yoğunluk fonksiyonunda $\theta = 1/\mu$, $a(\phi) = -\phi$, $b(\theta) = \ln(\theta)$ ve $c(y,\phi) = \frac{\phi+1}{\phi}\ln y - \frac{\ln\phi}{\phi} - \ln\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)$ şeklindedir.

Üssel aile üyelerinin beklenen değer ve varyansları,

$$E(Y) = b'(\theta)$$

$$\mathrm{var}(Y) = a(\phi)b''(\theta) \quad (2.6)$$

şeklindedir. Normal dağılım için $E(y) = \mu$ ve $var(y) = \sigma^2$ dir. Ayrıca denklem (2.5)'deki Gamma dağılımı için $E(Y) = \mu$ ve $var(Y) = \phi\mu^2$dir. Buradan genelleştirilmiş lineer modellerde, varyansın ortalamanın bir fonksiyonu olduğu görülmektedir.[33]

2.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERİN YAPISI

Genel olarak genelleştirilmiş lineer modeller üç bileşenden oluşmaktadır. Bu bileşenler;

1) Bağımlı değişkenin dağılımı,

2) Lineer kestiricinin bulunduğu sistematik kısım,

3) Link fonksiyonudur.

Genelleştirilmiş lineer modellerin yapısı daha açık biçimde aşağıda verilmiştir.

a. $y_1, y_2, \dots, y_n$ bağımlı değişken gözlemleri sırasıyla $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_3$ ortalamalı birbirlerinden bağımsız gözlemlerdir.

b. y_i gözlemleri üssel aile üyesi olan bir dağılıma sahiptir.

c. Modelin sistematik kısmı $x_1, x_2, \dots, x_k$ bağımsız değişkenlerini içermektedir.

d. Model $\eta = X'\beta = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$ lineer kestirici civarında oluşturulur.

e. Model bir link fonksiyonu aracılığı ile bulunur.

$$\eta = g(\mu_i), \qquad i = 1,2, \dots, n \qquad (2.6)$$

Yukarıdaki tanımlanan link terimi, ortalama ve lineer kestirici arasında bağlayıcı fonksiyon gerçeğinden türetilmiştir. Bağımlı değişkenin beklenen değeri, $E(Y_i) = g^{-1}(\eta_i) = g^{-1}(X'\beta)$ dir. Çoklu lineer regresyonda,

$$\mu_i = \eta_i = X'\beta, \qquad i=1,2,\dots, n \qquad (2.7)$$

modeli özel bir durum göstermektedir. Yani $g(\mu_i) = \mu_i$ dir. Bu durumda birim link fonksiyonu kullanılmaktadır.

---

[33] A.J. Nelder, R.W.M. Wedderburn,"Generalized Linear Models", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, 135, 1972, 370-384.

f. Link fonksiyonu diferansiyellenebilen monoton bir fonksiyondur.

g. $\sigma_i^2 (i = 1,2, \dots, n)$ varyansı, μ_i ortalamasının bir fonksiyonudur.

Link fonksiyonun birçok seçim alternatifi mevcuttur. İki tip link fonksiyonu bulunmaktadır. Bunlar kanonik ve kanonik olmayan link fonksiyonlarıdır. Eğer $\eta_i = \theta_i$ olacak şekilde seçilirse, η_i ye kanonik link denir. Tablo 2.1. de bazı dağılımların kanonik link fonksiyonları ile birlikte modeller gösterilmiştir.[34]

Tablo 2.1. Üssel Ailenin Bazı Dağılımları için Kanonik Link Fonksiyonları ve Elde Edilen Modeller

Dağılım	Konum Parametresi	Link Fonksiyonu	Model
Normal	$\eta_i = \theta_i$	$\mu_i = x_i'\beta_i$ (birim link)	$\mu_i = x_i'\beta_i$
Binom	$\theta_i = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$	$\ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = x_i'\beta_i$ (lojistik link)	$p = \frac{\exp\{x'\beta\}}{1+\exp\{x'\beta\}}$
Poisson	$\theta_i = \ln(\mu_i)$	$\ln(\mu_i) = x_i'\beta_i$ (log link)	$\mu = \exp(x'\beta)$
Gamma ve Üstel	$\theta_i = 1/\mu_i$	$(\mu_i)^{-1} = x_i'\beta_i$ (ters link)	$\mu = 1/x'\beta$

Genelleştirilmiş lineer modeller için diğer link fonksiyonları;

1) Probit link $\eta_i = \phi^{-1}[E(y_i)]$ dir. Burada ϕ, kümülatif standart normal dağılımı göstermektedir.

2) Tamamlayıcı log-log link, $\eta_i = \ln\{\ln[1-\mu_i]\}$

3) Güç aile link,

$$\eta_i = \begin{cases} \mu_i^{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \ln[\mu_i], & \lambda = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklindedir.

Genelleştirilmiş lineer modellerde link fonksiyonu bağımlı değişkenin dağılımının taşıdığı özellikleri üstlenmektedir. Probit ve tamamlayıcı log-log link fonksiyonları sadece Bernoulli ve Binom dağılımları ile birlikte kullanılmaktadır.

[34] Kadri Ulaş Akay, a.g.tz., 9-10

Özellikle link fonksiyonun yanlış seçimi ile yapılan analizler yanlış sonuçlara götürmektedir. Link fonksiyonun belirlenmesinde genellikle denklem (2.8) ile verilen güç aile link fonksiyonları kullanılmaktadır. Güç aile link, bağımlı değişkenin normal dağılıma uygunluk varsayımlarını yerine getirmemesi ile yapılan Box–Cox dönüşümü ile aynıdır.[35]

2.3. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER İÇİN OLABİLİRLİK DENKLEMLERİ

Genelleştirilmiş Lineer Modellerde parametre tahminleri en çok olabilirlik fonksiyonuna dayanmaktadır. Parametre tahminlerinin en çok olabilirlik kestiricileri, iteratif olarak yeniden ağırlıklandırılmış en küçük kareler, Newton-Raphson yöntemi ve Fisher-Scoring algoritması aracılığıyla bulunmaktadır. Bu bölümde genelleştirilmiş lineer modellerde parametre kestirim yöntemlerinde kullanılacak olan olabilirlik denklemleri ele alınacaktır.

Üssel ailenin genel formu, $f(y, \theta, \phi)$ olmak üzere, Y rasgele değişkenin gözlemlenen bir y değeri için olabilirlik fonksiyonu;

$$L = (\theta, \phi, Y) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i, \theta, \phi) \qquad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (2.9) da L olabilirlik fonksiyonu θ ve ϕ parametrelerinin bir fonksiyonudur. Olabilirlik fonksiyonu Y rastgele değişkeninin sonuçları ile belirlendiğinden $L(\theta, \phi, Y)$ bir rasgele değişkendir. $L\,(\theta, \phi, Y)$ fonksiyonunun logaritması,

$$L(\theta, \phi, Y) = \log L(\theta, \phi, Y) \qquad (2.10)$$

şeklinde gösterilirse, olabilirlik fonksiyonu üzerindeki düzgünlük koşulları altında,

1) $$E\left[\frac{\partial l(\theta, \phi, Y)}{\partial \theta}\right] = 0 \qquad (2.11)$$

olarak elde edilir.[36] Çünkü L olabilirlik fonksiyonunun aynı zamanda olasılık yoğunluk fonksiyonu olması nedeniyle,

[35] A.J., Nelder, R.W.M.,Wedderburn, a.g.m., 370-384.
[36] P.J. Bickel, K.A. Doksum, *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, (2001), 121.

$$E\left[\frac{\partial l(\theta,\phi,Y)}{\partial\theta}\right]=\int_{R_x}\dots\int_{R_x}\frac{\partial l}{\partial\theta}Ldx_1dx_2\dots dx_n=\int\dots\int\frac{L'}{L}Ldx_1dx_2\dots dx_n$$

$$=\int\dots\int\frac{\partial}{\partial\theta}Ldx_1dx_2\dots dx_n=\frac{\partial}{\partial\theta}\int\dots\int Ldx_1dx_2\dots dx_n=\frac{\partial}{\partial\theta}(1)=0$$

elde edilir. Ayrıca,

$$2)\quad E=\left[\frac{\partial^2 l(\theta,\phi,Y)}{\partial\theta^2}\right]+E\left\{\left[\frac{\partial l(\theta,\phi,Y)}{\partial\theta}\right]^2\right\}=0 \tag{2.12}$$

olarak elde edilir. Çünkü $\int\dots\int Ldx_1dx_2\dots dx_n=1$ koşulu altında her iki taraf θ parametresine göre türetilirse, integral sınırları θ parametresine bağlı olmadığından;

$$\int\dots\int\frac{\partial L}{\partial\theta}dx_1dx_2\dots dx_n=0 \tag{2.13}$$

$$\int\dots\int\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)Ldx_1dx_2\dots dx_n=0 \tag{2.14}$$

bulunur. Eşitlik (2.14) de θ parametresine göre türetilirse;

$$\int\dots\int\left(\frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial L}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}L\right)dx_1dx_2\dots dx_n=0$$

ve

$\frac{\partial l}{\partial\theta}=\frac{L'}{L}L$ olduğundan,

$$E=\left[\frac{\partial^2 l(\theta,\phi,Y)}{\partial\theta^2}\right]+E\left\{\left[\frac{\partial l(\theta,\phi,Y)}{\partial\theta}\right]^2\right\}=0 \tag{2.15}$$

elde edilir.

Denklem (2.1)'de ele alınan olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak, tek bir gözlem alınması halinde,

$$l(\theta,\phi,Y)=\frac{\theta Y-b(\theta)}{a(\phi)}+c(Y,\phi) \tag{2.16}$$

eşitliği bulunur. Eşitlik (2.16)'in her iki tarafının iki kez türevi alınırsa;

$$\frac{\partial l(\theta,\phi,Y)}{\partial\theta}=\frac{Y-b'(\theta)}{a(\phi)}$$

$$\frac{\partial^2 l(\theta,\phi,Y)}{\partial\theta^2} = -\frac{b''(\theta)}{a(\phi)} \tag{2.17}$$

eşitlikleri elde edilir. Denklem (2.17)'de $b'(\theta)$ ve $b''(\theta)$, sırasıyla $b(\theta)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevini göstermektedir. Denklem (2.11) ve (2.17) kullanılarak,

$$E(Y) = \mu = b'(\theta) \tag{2.18}$$

elde edilir. Bununla birlikte eşitlik (2.12), (2.17) ve (2.18) kullanılarak,

$$-\frac{b''(\theta)}{a(\phi)} + \frac{var(Y)}{a^2(\phi)} = 0 \tag{2.19}$$

bulunur. Denklem (2.19)'dan var(Y),

$$var(Y) = a(\phi)b''(\theta) \tag{2.20}$$

eşitliğine ulaşılır. Denklem (2.18) ve (2.20)'den görüldüğü üzere, b(.) fonksiyonu Y rastgele değişkeninin momentlerini belirtmektedir. Normal dağılım için $E(Y) = \mu$ ve $var(Y) = \sigma^2$ dir. Denklem (2.3)'de verilen binom dağılımı için $E(Y) = np$ ve $var(Y) = np(1-p)$ ve denklem (2.4)'de verilen poisson dağılımı için $E(Y) = \mu$ ve $var(Y) = \mu$ dür. Buradan genelleştirilmiş lineer modellerde varyansın ortalamanın bir fonksiyonu olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.[37]

2.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNİ

Genelleştirilmiş lineer modellerin parametre tahminlerinde kullanılan yöntemler; en çok olabilirlik yöntemi, Newton-Raphson yöntemi, Fisher-Scoring algoritmasıdır.

2.4.1. En Çok Olabilirlik Parametre Tahmini

Bağımlı değişkenin i. gözlemi $i = (1,2,\dots,N)$ $\eta_i = X'\beta = \sum_{J=1}^{p} x_{ij}\beta_j$ lineer kestiriciye sahip olduğunda, matris formunda bağımlı değişken,

[37]P. Mcculloch, J. A. Nelder, a.g.e., 23-25.
J.A. Nelder, R. W. M. Wedderburn, a.g.m., 370-384.

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1'\beta \\ \vdots \\ X_N'\beta \end{pmatrix} = X\beta \tag{2.21}$$

olur. Lineer kestiriciler, $E(Y) = \mu$ ile monoton ve diferansiyellenebilir olan g(.) link fonksiyonunun bağlantılı olduğu düşünülürse, yani $g(\mu_i) = \eta_i$, $(i = 1,2,\dots,N)$ ya da matris formunda,

$$g(\mu) = \begin{pmatrix} g(\mu_1) \\ \vdots \\ g(\mu_N) \end{pmatrix} = \eta \tag{2.22}$$

şeklinde olursa. $g(\mu_i) = X'\beta$ ve $E(Y_i) = \mu_i = b'(\theta_i)$ olduğundan θ_i parametreleri β parametrelerine bağlı, yani $\theta_i = \theta_i(\beta)$ olur.[38] Sadece β parametrelerinin tahmini incelendiği için,

$$l = l(\theta, \phi, y) = \sum_{i=1}^{N} l_i = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{(y_i\theta_i - b(\theta_i))}{a(\phi)} + c(y_i; \phi) \right\}$$

olabilirlik fonksiyonu β parametresinin bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Ayrıca,

$$l(\beta) = \textstyle\sum_{i=1}^{N} l_i(\beta) \tag{2.23}$$

eşitliği kullanılarak β parametresinin en çok olabilirlik tahminleri

$$\frac{\partial l_i(\beta)}{\partial \beta_j} = 0, \qquad j = 1,2,\dots,p$$

denklemi çözülerek elde edilir. Zincir kuralına göre,

$$\frac{\partial l_i(\beta)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial l_i}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_i} \tag{2.24}$$

şeklinde yazılır. Eşitlik (2.24)'da kısmi türevler,

$$\frac{\partial l_i}{\partial \theta_i} = \frac{Y_i - b'(\theta_i)}{a(\phi)} = \frac{Y_i - \mu_i}{a(\phi)} \tag{2.25}$$

$\mu_i = b'(\theta_i)$ olduğundan,

---

[38] R. H. Myers, D. C. Montgomery, G. G. Vining, *Generalized Linear Models: with Applications in Engineering and the Sciences*, 2nd ed., John Willey & Sons, New York, (2010), 207-211.

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial\mu_i} = \left(\frac{\partial\mu_i}{\partial\theta_i}\right)^{-1} = \frac{1}{b''(\theta_i)} = \frac{a(\phi)}{\mathrm{var}(Y_i)} \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\sum_{k=1}^{p} x_{ik}\beta_k}{\partial\beta_j} = x_{ij} \tag{2.27}$$

şeklindedir. $\eta_i = g(\mu_i)$ olduğundan dolayı $\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i}$ türevi, g(.) link fonksiyonu yada $g^{-1}(.)$ ters link fonksiyonuna bağlıdır. Bu yüzden link fonksiyonu belirlenmeden bu türev tanımlanamaz. Özetle,

$$\frac{\partial l_i}{\partial\beta_j} = \frac{(Y_i-\mu_i)x_{ij}}{\mathrm{var}(Y_i)}\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i} = 0,\ \ j = 1,2,\dots,p \quad (\mathrm{var}(Y_i) = a(\phi)b''(\theta_i)) \tag{2.28}$$

eşitliği elde edilir. Denklem (2.28) ile verilen olabilirlik denklemi

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{(Y_i-\mu_i)x_{ij}}{\mathrm{var}(Y_i)}\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i} = 0, \qquad j = 1,2,\dots,p \tag{2.29}$$

şeklinde sıfıra eşitlenerek, β_j parametrelerinin tahminleri elde edilir. Olabilirlik fonksiyonu β parametresine göre lineer değildir. Bundan dolayı denklem (2.29)'ün çözümü için iteratif yöntemler gereklidir.[39] β parametresinin bileşenlerine göre ikinci mertebeden türev, eşitlik (2.15) ve (2.29) kullanılarak,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial^2 l_i}{\partial\beta_j\,\partial\beta_h}\right) &= -E\left(\frac{\partial l_i}{\partial\beta_j}\right)\left(\frac{\partial l_i}{\partial\beta_h}\right) \\ &= -E\left[\frac{(y_i-\mu_i)(y_i-\mu_i)x_{ij}x_{ih}}{(\mathrm{var}(Y_i))^2}\left(\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i}\right)^2\right] \\ &= -\frac{x_{ij}x_{ih}}{\mathrm{var}(Y_i)}\left(\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.30}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$E\left(-\frac{\partial^2 l_i}{\partial\beta_j\,\partial\beta_h}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{x_{ij}x_{ih}}{\mathrm{var}(Y_i)}\left(\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i}\right)^2 \tag{2.31}$$

şeklindedir. W=diag$(w_1, w_{2,\dots,}w_n)$ ve $w_i = \frac{\left(\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i}\right)^2}{\mathrm{var}(Y_i)}$ olmak üzere tüm (j,h) kombinasyonları için Fisher bilgi matrisi,

---

[39] Robert Schall, "Estimation in Generalized Linear Models with Random Effects", *Biometrika*, 78(4), 1991, 719-727.

$$\mathrm{I}(\beta) = \mathrm{E}\left(-\frac{\partial^2 \mathrm{l}(\beta)}{\partial\beta\,\partial\beta'}\right) = \mathrm{X'WX} \tag{2.32}$$

şeklindedir.[40]

2.4.2. Newton Raphson Yöntemi

Newton Raphson yöntemi, lineer olmayan denklemleri çözmek için kullanılan iteratif bir metottur. Bu lineer olmayan denklemlerin çözümü, fonksiyonun maksimum olduğu noktayı belirler. Bu yöntem, çözüm için bir başlangıç tahminiyle başlar. Sonrasında, ikinci dereceden bir polinomla başlangıç tahmininin komşuluğunda maksimum yapılacak fonksiyona yaklaşım yapılır. Buradan polinomun maksimum değerinin konumunun bulunmasıyla ikinci tahmin elde edilir. Daha sonrada başka bir ikinci dereceden polinomla ikinci tahminin bir komşuluğundaki fonksiyona yaklaşılır. Bu polinomun maksimum olduğu konum üçüncü tahmini verir. Bu şekilde ilerlenerek Newton Raphson yöntemiyle bir tahmin dizisi elde edilir. Bu dizi, fonksiyonun uygun ve/veya başlangıç tahmini iyi olduğu zaman maksimum konuma yakınsar.[41]

Newton Raphson yöntemiyle $\mathrm{L}(\beta)$ fonksiyonunu maksimum yaparak $\hat{\beta}$ parametre tahmininin belirlenmesi için,

$$\mathrm{u}' = \left(\frac{\partial \mathrm{L}(\beta)}{\partial\beta_1}, \frac{\partial \mathrm{L}(\beta)}{\partial\beta_2}, \dots\right)$$

alınsın. Hessian matrisi olarak adlandırılan H matrisinin elemanları $\mathrm{h_{ab}} = \frac{\partial^2 \mathrm{L}(\beta)}{\partial\beta_\mathrm{a}\,\partial\beta_\mathrm{b}}$ şeklinde tanımlanır. u vektörünün ve H matrisinin $\hat{\beta}$ tahmininin t(.) iterasyonu olan $\beta^{(t)}$ de değerlendirilen değerleri $\mathrm{u}^{(t)}$ ve $\mathrm{H}^{(t)}$ olsun. t. adımdaki iterasyonda, ikinci mertebeden Taylor serisi açılımıyla $\beta^{(t)}$ civarında $\mathrm{L}(\beta)$ fonksiyonuna yaklaşır. Yani,

$$\mathrm{L}(\beta) \approx \mathrm{L}\left(\beta^{(t)}\right) + \mathrm{u}^{(t)\prime} + \left(\beta - \beta^{(t)}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\beta - \beta^{(t)}\right)'\mathrm{H}^{(t)}\left(\beta - \beta^{(t)}\right) \tag{2.33}$$

şeklindedir. (2.33) ikinci mertebeden Taylor seri açılımında her iki tarafın β parametresine göre göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

[40] D.C. Montgomery, A.P. Elizabeth, G.G. Vining, (Çev.Editörü: M.Aydın Erar), *Doğrusal Regresyon Analizine Giriş*, Beşinci Basım, Nobel Yayıncılık, Ankara, 2013, 608-612.
[41] A. Agresti, *Categorical Data Analysis,* 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc, New York, (2002), 143-145.

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} \approx u^{(t)} - \beta H^{(t)}\left(-\beta^{(t)}\right) = 0$$

bir sonraki tahmin,

$$\beta^{(t+1)} = \beta^{(t)} - \left(H^{(t)}\right)^{-1} u^{(t)} \qquad (2.34)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (2.34)'da $H^{(t)}$ matrisinin tersi olmadığı varsayılmaktadır. İterasyon, $L\left(\beta^{(t)}\right)$ deki değişimler arasındaki ardışık döngüler yeterince küçük oluncaya kadar devam eder. En çok olabilirlik tahmin edicisi $t \to \infty$ iken $\beta^{(t)}$ nin limitidir. Ancak bununla birlikte, $L(\beta)$ fonksiyonunun türevi sıfır olduğu başka noktalarda yerel maksimuma sahip ise bu gerçekleşmez. Bunun için iyi bir başlangıç tahmini önemlidir.[42]

2.4.3. Fisher-Scoring Algoritması

β parametresinin en çok olabilirlik tahminini bulmak için, ağırlıkların iteratif olarak ele alındığı Fisher-Scoring algoritması kullanılabilir. Bu yöntem, lineer regresyondaki ağırlıklandırılmış en küçük karelere benzemektedir. Ancak, burada her bir adımda tekrar ağırlıklandırma yapılmaktadır. Fisher-Scoring algoritması, Newton Raphson yönteminde Hessian matrisinin yerine Fisher bilgi matrisi kullanımına dayanmaktadır. $I^{(k)}$k. adımdaki bilgi matrisini gösterdiği düşünülürse, Fisher-Scoring algortiması, $q^{(k)}(\beta) = \frac{\partial l(\beta)}{\partial(\beta)}$ ifadesi $\beta^{(k)}$ daki birinci türevlerin vektörü olmak üzere

$$\beta^{(t+1)} = \beta^{t} - (I^{t})^{-1}\, q^{t}$$

$$I^{(t)} + \beta^{(t+1)} = I^{(t)}\beta^{t} + q^{t}$$

şeklindedir. $I^{t} = (X'W^{(t)}X)$ olmak üzere Fisher-scoring algoritmasının formülü;

$$\left(X'W^{(k)}X\right)\beta^{(k+1)} = \left(X'W^{(k)}X\right)\beta^{k} + q^{k} \qquad (2.35)$$

halini alır. Eşitlik (2.35)'da yer alan sağ tarafındaki vektörün bileşenleri ise;

$$\sum_h \left[\sum_i \frac{x_{ij}x_{ih}}{var(Y_i)}\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}\right)^2 \beta_h^{(k)}\right] + \sum_i \frac{\left(y_i - \mu_i^{(k)}\right)x_{ij}}{var(Y_i)}\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}\right), \qquad (j = 1,2,\dots,p) \qquad (2.36)$$

---

[42] Özlem Korucu, *Genelleştirilmiş Lineer Modellerde Model Seçimi Üzerine Alternatif Bir Yaklaşım*, (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi), İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul 2010.

olarak verilebilir. İfade (2.36) için vektör formu,

$$\left(X'W^{(k)}z^{(k)}\right) \tag{2.37}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $N \times 1$ boyutlu $z^{(k)}$ vektörünün j. elemanı;

$$z_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j^{(k)} + \left(y_i - \mu_i^{(k)}\right)\left(\frac{\partial\mu_i^{(k)}}{\partial\eta_i^{(k)}}\right) = \eta_i^{(k)} + \left(y_i - \mu_i^{(k)}\right)\left(\frac{\partial\mu_i^{(k)}}{\partial\eta_i^{(k)}}\right) \tag{2.38}$$

elde edilir. Dolayısı ile denklem (2.35) ile verilen Fisher-scoring algoritması;

$$\left(X'W^{(k)}X\right)\beta^{(k+1)} = \left(X'W^{(k)}z^{(k)}\right) \tag{2.39}$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (2.39)'de $\text{rank}(X) = p$ olması durumunda $k \to \infty$ iken asimptotik kovaryans matrisi,

$$V(\hat{\beta}) = \left(X'\widehat{W}X\right)^{-1} = I(\hat{\beta}) \tag{2.40}$$

şeklinde olacaktır. Buradan, en çok olabilirlik tahmincisi olan $\hat{\beta}$,

$$\hat{\beta}^{(k+1)} = \left(X'W^{(k)}X\right)^{-1}X'W^{(k)}z^{(k)} \tag{2.41}$$

şeklinde elde edilir.[43]

2.5. BAĞIMLI DEĞİŞKENİN ORTALAMA DEĞER TAHMİNİ

İteratif işlemlerin sonucu olarak β parametresinin en çok olabilirlik tahmini olan $\hat{\beta}$'nın elde edilmesi halinde, $\eta(x_i)$ lineer kestiricisinin bir tahmini,

$$\hat{\eta}(x_i) = x_i'\hat{\beta} \tag{2.42}$$

şeklindedir. Eşitlik (2.42) ile birlikte $\mu(x) = g^{-1}(\eta_i) = g^{-1}(x_i'\beta)$ şeklinde tanımlanan x noktasındaki ortalama bağımlı değişkenin bir tahmini olan,

$$\hat{\mu}(x) = g^{-1}\left(x_i'\hat{\beta}\right) \tag{2.43}$$

denklemi elde edilir. Diğer yandan, Fisher bilgi matrisi kullanılarak $\hat{\beta}$ parametresinin en çok olabilirlik tahmini asimtotik olarak ifade edilebilir. Bilgi matrisi eşitliğinde gösterildiği gibi,

---

[43] C.R. Rao, H. Toutenburg "*Linear Models: Least Squares and Alternatives",* 3rd. ed., Springer Series in Statistics, USA, (1999), 89-96.
Özlem Korucu, a.g.tz., 18-20.

$$\mathrm{I}(\beta) = -\mathrm{E}\left[\mathrm{H}_l\left(\hat{\beta}\right)\right] = \mathrm{E}\left(-\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta\,\partial\beta'}\right) = \mathrm{X'WX} \tag{2.44}$$

şeklindedir. Denklem (2.44)'de $\mathrm{E}\left[\mathrm{H}_l\left(\hat{\beta}\right)\right]$ ifadesi Hessian matrisinin beklenen değeridir. $n \rightarrow \infty$ iken, β parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisinin asimptotik olarak normal dağılımlı olduğu ve ortalamasının β, varyans-kovaryans matrisi $[\mathrm{I}(\beta)]^{-1}$e eşittir.[44] Bu durum,

$$\hat{\beta} \approx \mathrm{AN}[\beta, (\mathrm{X'WX})^{-1}] \tag{2.45}$$

şeklinde gösterilebilir.[45] İfade (2.45)'de bulunan AN asimptotik normallik anlamına gelmektedir. Dolayısıyla verilen örneğin büyüklüğünde $\hat{\beta}$ tahminin varyans-kovaryans matrisi yaklaşık olarak,

$$\mathrm{var}\left(\hat{\beta}\right) \approx (\mathrm{X'WX})^{-1} \tag{2.46}$$

şeklindedir. $\hat{\eta}(x) = x_i'\hat{\beta}$ eşitliği ve (2.46) ifadesi kullanılarak $\hat{\eta}(x)$ in varyansı ise yaklaşık olarak,

$$\mathrm{Var}[\hat{\eta}(x)] \approx x'(\mathrm{X'WX})^{-1}x \tag{2.47}$$

olur. Denklem (2.43)'de $\hat{\mu}(x)$in varyansının yaklaşık ifadesini elde etmek için $g^{-1}[\hat{\eta}(x)]$ fonksiyonunun $\eta(x)$ civarında birinci mertebeden Taylor serisi açılımı,

$$g^{-1}[\hat{\eta}(x)] \approx g^{-1}[\eta(x)] + [\hat{\eta}(x) - \eta(x)]\left[g^{-1}\left(\eta(x)\right)\right]' \tag{2.48}$$

dir. (2.48) seri açılımında $\left[g^{-1}\left(\eta(x)\right)\right]'$, $g^{-1}(.)$ nın η ye göre türevidir. Denklem (2.43), (2.47) ve (2.48) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\hat{\mu}(x)] &\approx \{h'[\eta(x)]\}^2 \mathrm{Var}[\hat{\eta}(x)] \\ &= \{h'[\eta(x)]\}^2 x'(\mathrm{X}^{-1}\mathrm{WX})^{-1}x \end{aligned} \tag{2.49}$$

elde edilir. Eşitlik (2.49)'da $h(.)$ fonksiyonu $g^{-1}(.)$ fonksiyonunu temsil etmektedir. $\hat{\mu}(x)$ ise x noktasında tahmin edilmiş varyans olarak adlandırılmaktadır ve denklem (2.49)'un sağ tarafı bu varyans değeri için yaklaşık bir değer sağlamaktadır.

---

[44] A. Khuri, "*Linear Models Methodology*", Chapman & Hall, USA, (2010), 483-485.

[45] C.E. Mccullogh, S.R. Searle, "*Generalized, Linear and Mixed Models*", Wiley-Interscience; 2nd ed., (2008), 23-25.

2.6. UYUMUN İYİLİĞİ

Bir genelleştirilmiş lineer model oluşturmada ortaya çıkabilecek doğal bir soru, kullanılan link fonksiyonun bazı diğer olası link fonksiyonlarına kıyasla ne kadar iyi olduğudur. Aslında, burada model uyumu sorgulanmaktadır. Model uyumuyla ilişkilendirilebilen diğer hususlar, gözlemlerin üstel aileden olduğu, dağılım parametresinin sabitliği, lineer regresyon modellerinde görüldüğü gibi gözlemlerin bağımsızlığı ve etkili gözlemleri belirlenmesi sorunu gibi varsayımlara dayanmaktadır.

Sistematik etkide öne sürülen ortak amaç iyi bir uyum için gerekli birçok bağımsız değişken olmasıdır. Sonuç olarak, modelin kalitesini ve modeldeki değişimleri sabitleyen istatistiksel testleri belirleyen önlemler aranır. Özellikle modelin uyum iyiliği için en yararlı iki istatistik; Sapma ölçüsü ve Pearson ki-kare istatistiğidir. Sapma ölçüsü gözlemlerin en büyüğü ve beklenen olabilirlik fonksiyonları arasında harekete geçirilir. Bunun aksine, Pearson ki-kare istatistiği gözlenen ve modellenen değerler arasındaki göreceli farkı ölçer.[46] Her iki istatistiğinde ilgili serbestlik dereceleriyle birlikte ki-kare dağılımına sahip olduğu varsayılmaktadır. Büyük bir sapma ya da Pearson ki-kare değeri kötü uyumun bir belirtisidir.

2.6.1. Sapma Ölçüsü

İlgilenilen tüm terimlerin bulunduğu model tam model olarak adlandırılır. İndirgenmiş model ise, modellemeyi en iyi yapabileceği düşünülen terimleri içeren modeldir. Buradaki amaç en basit modeli bularak en küçük sapma değerine ulaşmaktır. $L_{max}(\phi, Y)$ tam modelin olabilirlik fonksiyonunun maksimumunu göstersin. $L(\phi, \hat{\beta})$ ise verilen q parametreli ($q < n$) bir model için β parametrelerine göre maksimum olmuş indirgenmiş modelin olabilirlik fonksiyonunu göstersin. Burada $\hat{\beta}$, β parametresinin en çok olabilirlik tahminini göstermektedir. Verilen bir Y vektörü için $L_{max}(\phi, Y) > L(\phi, \hat{\beta})$ olmak üzere,

$$\Lambda = \frac{L(\phi,\hat{\beta})}{L_{max}(\phi,Y)}$$

değeri verilen model için iyi uyumun ölçümünü sağlar. Alternatif olarak,

---

[46] S. Benghia, "*Diagnostics for Generalized Linear Models*", (Master Thesis), Concordia University, Monreal, 2001, 34.

$$-2\log\Lambda = 2\left[\log L_{max}(\phi, Y) - \log L\left(\phi, \hat{\beta}\right)\right] \tag{2.50}$$

değeri, varsayılan modelin iyi uyumunun ölçüsü olarak düşünülebilir. Bu durumda, büyük bir $-2\log\Lambda$ değeri kötü uyumun belirtisidir. θ kanonik parametresinin tam model için tahmini $\tilde{\theta}$ ve indirgenmiş model için tahmini $\hat{\theta}$ ile gösterilmesi halinde, denklem (2.45) ve $l(\theta, \phi, Y) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\theta_i Y_i - (b\theta_i)}{a(\phi)} + c(Y_i, \phi)\right]$ denklemi kullanılarak,

$$-2\log\Lambda = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\tilde{\theta}_i - \hat{\theta}_i)Y_i - b(\tilde{\theta}_i) + b(\hat{\theta}_i)}{a(\phi)} = \frac{D(\hat{\beta}, Y)}{a(\phi)} \tag{2.51}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.51)'de,

$$D(\hat{\beta}, Y) = \left[2\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\theta}_i - \hat{\theta}_i)Y_i - - b(\tilde{\theta}_i) + b(\hat{\theta}_i)\right]$$

ifadesi indirgenmiş modelin sapması olarak adlandırılır. $a(\phi) = \phi$ olduğundan eşitlik (2.50);

$$D^*(\hat{\beta}, Y) = \frac{D(\hat{\beta}, Y)}{\phi} = -2\log\Lambda \tag{2.52}$$

olur. Denklem (2.52)'ye ise ölçeklenmiş sapma denir. Ölçeklenmiş sapmada D^* değerinin küçük olması iyi uyum için gereklidir. $D^* = -2\log\Lambda$ büyük n değeri için (n→∞) asimptotik olarak X^2_{n-q} dağılımlı olduğu bilinmektedir. Burada q, lineer kestirici $\eta(x)$ deki parametre sayısıdır. Öte yandan, X^2_{n-q} dağılımının beklenen değeri $n - q$ olduğundan $\frac{D^*}{n-q}$ ifadesinin 1 den daha büyük değeri varsayılan model için kötü uyumu belirtir. Varsayıma bağlı olarak asimptotik yaklaşım ki-kare dağılımı ile birlikte küçük örnekler için de geçerlidir.[47] Normal, poisson ve binom dağılımları için sapma ölçüsü aşağıdaki gibi verilebilir.

2.6.1.1. Normal Dağılım İçin Sapma Ölçüsü

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ rasgele değişkenleri bağımsız ve $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1,2,\ldots,n$ olmak üzere verilen bir $Y = \left(Y_1, Y_{2,\ldots,}Y_n\right)'$ bağımlı değişken vektörü için olabilirlik fonksiyonu ele alındığında, Y rasgele vektörünün gerçekleşen bir y değeri için olabilirlik fonksiyonu,

[47] A. Khuri, a.g.e., 483-485.

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_i)^2 \tag{2.53}$$

şeklinde tanımlanır. Fonksiyon (2.53)'de yayılım parametresi $\phi=\sigma^2$ dir. Tam model için μ_i, y_i tarafından tahmin edilmektedir. Dolayısıyla,

$$\log L_{max}(\sigma^2, Y)=-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) \tag{2.54}$$

şeklindedir. Verilen bir q parametreli $q<n$ model için μ_i en çok olabilirlik tahmini olan $\hat{\mu}_i$ ile tahmin edilmiştir. Eşitlik (2.53)'de μ_i yerine $\hat{\mu}_i$ yazılırsa;

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{\mu}_i)^2 \tag{2.55}$$

elde edilir. Eşitlik (2.50) kullanılırsa,

$$-2\log\Lambda=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\mu}_i)^2 \tag{2.56}$$

bulunur. Sapma değeri, $D=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\mu}_i)^2$ olur. Ölçeklenmiş sapma ise $D^*=\frac{D}{\sigma^2}$ olarak elde edilir. Burada D, lineer regresyon analizindeki artık kareler toplamına karşılık gelmektedir.

2.6.1.2. Poisson Dağılımı İçin Sapma Ölçüsü

Y_i rasgele değişkenleri bağımsız ve μ_i parametreli poisson dağılımına sahip olmak üzere $Y=(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)'$ veri vektörü için loglikelihood fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i\log\mu_i-\mu_i-\log(\mu_i!)) \tag{2.57}$$

dir. Dikkat edilirse, yayılım parametresi burada $\phi=1$ dir. Tam model ve Y rasgele vektörünün gerçekleşen bir y değişkeni için μ_i parametresi y_i değerleri ile tahmin edilir. Fakat indirgenmiş model için μ_i, en çok olabilirlik tahmini olan $\hat{\mu}_i$ ile tahmin edilir. Dolayısı ile, sapma ve ölçeklenmiş sapma;

$$-2\log\Lambda=2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i\log\left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i}\right)-(y_i-\hat{\mu}_i)\right] \tag{2.58}$$

ifadesine eşittir.

2.6.1.3. Binom Dağılımı İçin Sapma Ölçüsü

Y_i rasgele değişkenleri bağımsız ve n_i ve p_i parametreli binom dağılımına sahip olmak üzere $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$ veri vektörü ele alınsın. Y rasgele vektörünün gerçekleşen bir y değeri için loglikelihood fonksiyonu;

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i \log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) + n_i \log(1-p_i) + \log\binom{n_i}{y_i}\right] \tag{2.59}$$

şeklindedir. Burada yayılım parametresi $\phi = 1$ dir. Tam model için Y_i rasgele değişkeninin ortalaması yani $\mu_i = n_i p_i$, y_i tarafından tahmin edilir. Burada y_i, $(i = 1,2,\dots,n)$, y vektörünün i. elemanıdır. Dolayısıyla p_i, y_i/n_i ile tahmin edilir. Sonuç olarak,

$$\log L_{max}(\phi, y) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i \log\left(\frac{y_i}{n_i-y_i}\right) + n_i \log\left(1-\frac{y_i}{n_i}\right) + \log\binom{n_i}{y_i}\right] \tag{2.60}$$

olur. İndirgenmiş model için π_i, μ_i $(i = 1,2,\dots,n)$ ortalamasının en çok olabilirlik tahmini $\hat{\mu}_i$ olmak üzere $\frac{\hat{\mu}_i}{n_i}$ ile tahmin edilir. Dolayısıyla,

$$\log L_{max}(\phi, \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i \log\left(\frac{\hat{\mu}_i}{n_i-\hat{\mu}_i}\right) + n_i \log\left(1-\frac{\hat{\mu}_i}{n_i}\right) + \log\binom{n_i}{y_i}\right] \tag{2.61}$$

şeklindedir. Sonuçta,

$$-2\log\Lambda = 2\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i\left[\log\left(\frac{y_i}{n_i-y_i}\right) - \log\left(\frac{\hat{\mu}_i}{n_i-\hat{\mu}_i}\right)\right] + n_i\left[\log\left(1-\frac{y_i}{n_i}\right) - \log\left(1-\frac{\hat{\mu}_i}{n_i}\right)\right]\right\}$$

eşitliği elde edilir. Yayılım parametresinin 1 olması nedeniyle, hem sapma hem de ölçeklenmiş sapma yukarıdaki eşitliğin sağ tarafına eşittir.

2.6.2. Pearson Ki-Kare İstatistiği

Veri vektörü $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$ için diğer bir uyum iyiliği ölçütü, Pearson ki-kare istatistiği,

$$\chi_s^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\hat{\mu}_i)^2}{\widehat{var}(Y_i)} = \frac{1}{a(\phi)}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\hat{\mu}_i)^2}{V(\hat{\mu}_i)} \tag{2.62}$$

dir. Denklem (2.20)'de ifade edildiği gibi $var(Y_i) = a(\phi)b''(\theta) = a(\phi)\,V(\mu_i)$ şeklindedir ve $V(\mu_i)$, i. ortalamanın varyans fonksiyonu ve $\hat{\mu}_i$, μ_i $(i = 1,2,\dots,n)$ ortalamasının en çok olabilirlik tahminidir. Y rasgele değişkeninin gerçekleşen bir y değeri için ve $a(\phi) = 1$ olması durumunda;

$$\chi_s^2 = \frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\hat{\mu}_i)^2}{V(\hat{\mu}_i)} \tag{2.63}$$

elde edilir ve bu ifadeye ölçeklenmiş Pearson ki-kare istatistiği denir. Bununla birlikte,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\hat{\mu}_i)^2}{V(\hat{\mu}_i)} \tag{2.64}$$

ifadesi Pearson ki-kare istatistiğidir. Büyük n değerleri için (n→∞) , χ_s^2 asimptotik olarak χ_{n-q}^2 olarak dağılımlıdır. χ^2'nin büyük bir değeri kötü uyumun bir belirtisidir. Yayılım parametresinin tahmini için ölçeklenmiş sapma veya ölçeklenmiş Pearson ki-kare istatistiği kullanılmaktadır. Yayılım parametresi özellikle binom ve poisson dağılımlarında 1 olduğu kabul edilmektedir.[48]

2.6.3 Akaike Bilgi Kriteri (AIC)

Olabilirlik fonksiyonlarının uyumlarını değerlendirmek için birçok araştırmacı basit modelleri tercih eder. Akaike tarafından 1973'de öne sürülen Bilgi Kriteri yaklaşımına göre bir modelin uyumunu ölçmek için

$$D_c = D - \alpha q \phi \tag{2.65}$$

formülü kullanılır. Burada D sapma, q modeldeki parametre sayısı ve ϕ dağılım parametresidir. Eğer ϕ sabitse, $\alpha \approx 4$ olması % 5 seviyesinde bir parametrenin test edilmesine kabaca eşdeğer olduğunu gösterir. $\alpha \approx 2$ olması ise minimum tahmin hatalarına neden olur. Akaike Bilgi kriteri model seçiminde sıklıkla kullanılır. D_c değerinin küçük olması modelin tercih edilebileceğini göstermektedir. Akaike bilgi kriterinin ölçeği rasgele olduğu için kendi içinde çok kullanışlı değildir. Ana kullanımı, birbirleri ile rekabet eden modelleri karşılaştırarak hangisinin tercih edileceğini belirlemektir.[49]

2.6.4. Uyum Ölçüsünün Seçimi

Sapma ve Pearson ki-kare istatistikleri büyük örneklemlerin uyum iyiliklerinin test edilmesini sağlar. Bu testlerin faydası analiz edilen veri türüne bağlıdır. Örneğin Collett (1991) ikili verilerde sapmanın modelin uyumunun değerlendirilmesi için

---

[48] Özlem Korucu, a.g.tz., 23-25.
[49] M. Olsson, *Generalized Linear Models: An Applied Approach,* Studentlitterattur, 2002, 46-47.

kullanılamayacağı sonucuna varmıştır. [50] Normal modeller için sapma kendi başına bir model testi olmayan kalıntı kareler toplamına eşittir.

Pearson ki-kare istatistiği ile karşılaştırıldığında sapmanın avantajı, iç içe modellerin karşılaştırılması için yararlı bir olabilirlik temelli testtir. Akaike bilgi kriteri genellikle herhangi bir formül çıkarsama yapmadan modelleri birbirleri ile karşılaştırmak için kullanılır.

2.7. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER İÇİN SONUÇ ÇIKARIMI

İstatistiksel sonuç çıkarımının iki esas aracı, güven aralıkları ve hipotez testleridir. Bu başlık altında Genelleştirilmiş Lineer Modeller için hipotez testleri ele alınacaktır.

Genelleştirilmiş Lineer Modellerde çok yaygın olarak kullanılan hipotez testleri, Wald ki-kare istatistiği, Olabilirlik oran testi ve Skor testidir.

2.7.1. Wald Testi

Standart lineer regresyonda olduğu gibi, standart hataların tahminleri $H_0: \beta_i = 0$ hipotezinin test edilmesi için t-istatistiğine benzer olarak,

$$z_i^2 = \left(\frac{\hat{\beta}_i}{se(\hat{\beta}_i)}\right)^2 \tag{2.66}$$

formülü ile verilen Wald istatistiği kullanılmaktadır. Denklem (2.66)'daki istatistik, büyük örneklemler için ki-kare dağılımına sahiptir. Genelleştirilmiş lineer modellerde bireysel katsayılar üzerindeki hipotezleri test etmek için kullanılan Wald istatistiği, en çok olabilirlik kestiricisinin asimptotik normalliğini kullanmaktadır.

Wald sonuç çıkarımı, parametrelerin güven aralıklarının elde edilmesinde de kullanılmaktadır.[51]

---

[50] D. Collett, *Modelling Binary Data*, London, Chapman and Hall, (1991), 65.
[51] P. Mccullock, J. A. Nelder, a.g.e., 30-35
R. H. Myers, D. C. Montgomery, G.,Vining, a.g.e. 217-220.

2.7.2. Olabilirlik Oran Testi

Olabilirlik oran testi olarak modelin sapma değeri,

$$\mathrm{D}(\beta) = -2\ln\left[\frac{\mathrm{L}(\beta)}{\mathrm{L}(\mu)}\right] \tag{2.67}$$

olarak tanımlanır. Denklem (2.67)'de verilen $\mathrm{D}(\beta)$ uyum iyiliği olarak adlandırılır. $\mathrm{L}(\beta)$ incelenen modelin olabilirlik fonksiyonu ve $\mathrm{L}(\mu)$ ise tam modelin olabilirlik fonksiyonudur. Denklem (2.67)'deki modelin sapma değeri, $\mathrm{n}-\mathrm{q}$ iki modeldeki parametrelerin sayısı arasındaki fark olmak üzere asimptotik olarak $\chi^2_{\mathrm{n}-\mathrm{q}}$ dağılımına sahiptir. Asimptotik olarak, denklem (2.67)'de verilen test, küçük örneklem problemlerinde kullanılması uygun olmayabilir. Ama örnek büyüklüğü küçük olduğu zaman Wald istatistiği yerine olabilirlik oran testleri tercih edilmelidir. Bununla birlikte, tam model uydurulduğu zaman Wald istatistiği kullanılabilir. Diğer taraftan, sapma veya iç içe testler için "sapma analizi" kullanımı oldukça uygundur. Wald testinin daha kısa hesap süresi olduğundan olabilirlik oran testine göre hesap avantajı vardır. Çünkü, olabilirlik oran testi her bir parametre testinde bir alt model uydurumuna ihtiyacı vardır.

Örnek büyüklüğü yeterince büyük olduğu zaman denklem (2.67) ve denklem (2.68)'deki istatistikler yaklaşık olarak birbirlerine eşittir. [52]

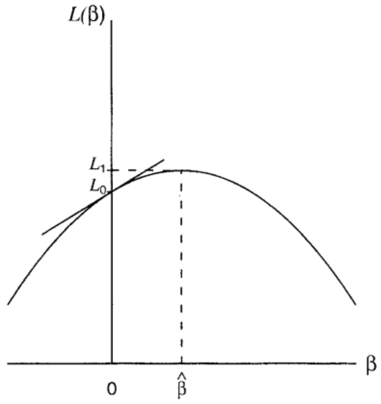
2.7.3. Skor Testi

Aşağıda verilen şekil 1.1. kuramsal olabilirlik fonksiyonu göstermektedir. $\hat{\beta}$, β'nın maksimum olabilirlik tahmincisidir. Burada $\mathrm{H}_0\colon \beta = 0$ hipotezi test edilmektedir. L_1 ve L_2, sırasıyla H_0 ve H_1 altında olabilirlikleri ifade etmektedir.

Skor testi, H_0 ile belirtilen değer olan sıfıra yakın olabilirlik fonksiyonunun davranışı üzerine dayanmaktadır. Eğer H_0'daki türev 0'dan büyükse, H_0'ın yanlış olduğunun bir göstergesi olabilir, türevin sıfıra yakın olması ise maksimuma yakın olunduğunun bir göstergesidir. Skor testi, fonksiyonun türevinin asimptotik standart

[52] S. L. Lewis, D. C. Montgomery, R. H. Myers,"Confidence Interval Coverage for Designed Experiments Analyzed with GLMs", *Journal of Quality Technology*, 33, (2001b), 279-292.

hataya oranının karesi olarak hesaplanır. Ki-kare tablosundan 1 serbestlik derecesiyle karşılaştırılması yapılır.[53]



Şekil 2-1: Wald, Olabilirlik Oran ve Skor testi için kullanılan Log-Olabilirlik fonksiyonu

Kaynak: Agresti, A., Categorical Data Analiysis, Second Edition, Wiley&Sons, 2002, s.13.

Şekil 2.1 tek değişkenli durum için bir log-olabilirlik genel grafiğidir. Skor testi $\beta = 0$ da $L(\beta)$'nin eğimine ve eğriliğine dayanmaktadır.

Örnek büyüklüğü sonsuza yaklaştıkça, Wald, olabilirlik oran ve skor testi asimptotik özellik göstermektedirler. Küçük ve orta örnek büyüklükleri için olabilirlik oranı testi genellikle Wald testine göre daha güvenilirdir.[54]

2.8. GENELLEŞTİRMİŞ LİNEER MODELLERDE GÜVEN ARALIKLARI

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)'$ parametrelerinin bireysel elemanları üzerinde oluşturulacak güven aralıkları bir önceki bölümde anlatılan olabilirlik oran sonuç çıkarımı veya Wald sonuç çıkarımı kullanılarak oluşturulur.[55]

2.8.1. Wald Güven Aralıkları

Genelleştirilmiş lineer modeller için sonuç çıkarımında verilen bilgiler doğrultusunda örnek hacmi sonsuza yaklaşırken,

---

[53] M. Olsson, a.g.e., 48-49.
[54] Agresti, a.g.e., 12.
[55] A. Khuri, a.g.e.,498-504.

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{d}_{ii}}}, \quad i = 1,2,\dots,q \tag{2.68}$$

ifadesi yaklaşık olarak normal dağılımlıdır. Denklem 2.68'de $\hat{\beta}_i$ ifadesi β_i parametresinin en çok olabilirlik tahminidir ve d_{ii} $(X'WX)'$ matrisinin köşegen elemanıdır. Bu durumda β_i üzerine yaklaşık $\%(1-\alpha)100$ güven aralığı,

$$\hat{\beta}_i \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{d}_{ii}}, \qquad i = 1,2,\dots,q \tag{2.69}$$

şeklindedir.[56]

2.8.2. Bağımlı Değişkenin Ortalama Değeri İçin Güven Aralıkları

Wald için güven aralığı ayrıca, $\mu_i = E(Y_i) = g^{-1} = (\eta_i) = g^{-1}(x'\beta)$ şeklinde tanımlanan bağımlı değişkenin ortalama değeri içinde kurulabilir. Bu durumda $\eta_i = g_i(\mu_i) = x'\beta$ olarak tanımlanan lineer kestirici üzerinde yaklaşık bir $\%(1-\alpha)100$ güven aralığı,

$$x'\beta = \pm[x_i'(X'WX)^{-1}x_i]^{\frac{1}{2}} Z_{\alpha/2} \tag{2.70}$$

dır. Ortalama $\mu(x)$ üzerindeki güven aralığı ise,

$$g^{-1}\left\{x'\hat{\beta} \pm [x_i'(X'WX)^{-1}x_i]^{\frac{1}{2}} Z_{\alpha/2}\right\} \tag{2.71}$$

şeklinde olur.

2.9. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERDE ARTIK ANALİZİ

Herhangi bir model uydurma işleminde olduğu gibi, artıkların analizi genelleştirilmiş lineer modellerde de önemlidir. Artıklar, varsayımların gerçekleşmesinde modelin tüm yeterliliği ile ilgili bilgiler sağladığı gibi seçilen link fonksiyonun uygunluğu ile de bilgi vermektedir.

Genelleştirilmiş Lineer Modellerde standart artıklar teknik olarak uygun değildir. Çünkü $\mathrm{var}(y_i)$ sabit değildir. Genelleştirilmiş lineer modellerde artıkların varyansı genellikle $\hat{y}$ nın büyüklüğü ile ilgilidir. Genelleştirilmiş lineer modeller için

---

[56] Özlem Korucu, a.g.tz., 28.

uygun olarak beş tip artık vardır. Bunlar Sapma artıkları, Pearson artıkları, Skor Artıkları, Olabilirlik artıkları ve Anscombe artıklarıdır.

2.9.1. Pearson Artıkları

Bir y_i gözlemi için ham artık $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$ şeklinde tanımlanabilir. Pearson artıkları modellenmiş değerlerin standart sapması ile standartlaştırılmış ham artıklardır ve

$$e_{i,Pearson} = \frac{y_i - \hat{y}_i}{\sqrt{\hat{y}_i}} \tag{2.72}$$

şeklinde ifade edilir. Pearson artıkları Pearson ki-kare $(\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2)$ ile ilişkilidir. Örneğin, bir Poisson modelinde pearson artıkları; $e_{i,Pearson} = \frac{y_i - \hat{y}_i}{\sqrt{\hat{y}_i}}$ iken, bir binom modelinde $e_{i,Pearson} = \frac{(y_i - n_i\hat{p}_i)}{\sqrt{n_i\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}}$ şeklindedir.

Eğer model tutarlıysa, pearson artıklarının büyük örneklemlerde genellikle sabit varyans ile yaklaşık olarak normal dağıldığı kabul edilebilir. Ancak $\hat{y}$ nın standart hatası ve Pearson artıklarının varyansı ile standartlaştırıldıklarında bile 1 olduğu kabul edilmez. Artıkların standartlaştırılmasında tahmini standart hataların kullanılması bundan ötürüdür. Pearson artıklarının düzeltilmiş standart hataları;

$$e_{i,adj,P} = \frac{e_{i,Pearson}}{\sqrt{1-H_{ii}}} \tag{2.73}$$

ile elde edilebilir. Burada H_{ii} Hessian matrisinin köşegen elemanlarıdır. Düzeltilmiş Pearson artıklarının normal dağılıma uyduğu kabul edilebilir. Örneğin ± 2 değerleri dışındaki artıklar vakaların yaklaşık % 5'inde ortaya çıkar. Bu durum verilerdeki olası uç değerleri tespit etmek için kullanılabilir.

2.9.2 Sapma Artıkları

Gözlem sayısı i modelin uyum ölçüsü olarak sapmaya $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$ şeklinde katkıda bulunur. Sapma artıkları;

$$e_{i,sapma} = \mathrm{sign}(y_i - \hat{y}_i)\sqrt{d_i} \tag{2.74}$$

şeklinde tanımlanır. Sapma artıkları standart formda yazılırsa,

$$e_{i,adj,D} = \frac{e_{i,sapma}}{\sqrt{1-H_{ii}}} \qquad (2.75)$$

olur. Burada H_{ii} Hessian matrisinin köşegen elemanlarını ifade etmektedir.[57]

2.9.3. Skor Artıkları

Skor artıkları skor testleri ile ilgilidir. Maksimum olabilirlik tahmininde parametre tahminleri skor denklemleri çözülerek,

$$U = \frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \qquad (2.76)$$

şeklinde elde edilir. Burada θ parametredir. Skor denklemleri her bir gözlem için U_i terimlerinin toplamlarını içerir. Standartlaştırılmış skor artıkları;

$$e_{i,adj,S} = \frac{U_i}{\sqrt{(1-H_{ii})v_i}} \qquad (2.77)$$

ile elde edilebilir. Burada H_{ii} Hessian matrisinin köşegen elemanları, v_i ise belli bir ağırlık matrisinin elemanlarıdır.[58]

2.9.4. Olabilirlik Artıkları

Teorik olarak bir modelin sapmasını karşılaştırmak mümkündür. Ancak bu işlemler ağır hesaplamalar gerektirir. Artıklar için bir yaklaşım aşağıdaki prosedür kullanılarak elde edilir.

$$e_{i,Likelihood} = \mathrm{sign}(y_i - \hat{y}_i)\sqrt{H_{ii}\left(e_{i,skor}\right)^2 + (1 - H_{ii})(e_{i,sapma})^2} \qquad (2.78)$$

Burada H_{ii} Hessian matrisinin köşegen elemanlarıdır. Olabilirlik artıkları, sapma ve skor artıklarının ağırlıklı ortalamasının bir türüdür.

2.9.5. Anscombe Artıkları

1953 yılında Anscombe artıkların gözlenen veri ve modellenmiş değerlerin bazı dönüşümüne dayalı tanımlanabileceğini önermiştir. Dönüşüm hesaplanan artıkların

---

[57] Özlem Korucu, a.g.tz., 28.
[58] M. Olsson, a.g.e., 55-59.

standart normal dağılıma yaklaşık olduğu şekilde seçilir. Anscombe artıkları aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$e_{i,\text{Anscombe}} = \frac{A(y_i) - A(\hat{y}_i)}{\sqrt{\widehat{\text{var}}\left(A(y_i) - A(\hat{y}_i)\right)}} \quad (2.79)$$

Burada A(.) fonksiyonu veri türüne bağlı olarak seçilir. Örneğin poisson verileri için Anscombe artıkları; $e_{i,\text{Anscombe}} = \frac{3}{2}\left(y^{2/3} - \hat{y}^{2/3}\right)/\hat{y}^{1/6}$ şeklinde olur. Genel olarak kullanımının yaygınlaşmamasının sebebi Anscombe artıklarını hesaplamanın oldukça zor olduğudur.[59]

2.10. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERDE PARAMETRELERİN YORUMLANMASI

Genelleştirilmiş Lineer Modellerde özellikle binom ve poisson dağılımı dışındaki dağımlar ile elde edilen modellerin parametrelerin yorumlanması genellikle zordur. Ancak, eğer kullanılan link fonksiyonu birim link fonksiyonu ise parametrelerin yorumlanması kolaydır. Bu nedenle bu kısımda sadece Binom ve Poisson ailesi modellerin, birim ve kanonik link fonksiyonları için parametrelerin yorumları verilecektir.

Binom dağılımı ile birlikte birim link kullanılması halinde parametrelerin yorumlanması diğer link fonksiyonlarına göre daha kolaydır. Bu durumu göstermek için, y, ikili bir yanıt değişkeni ve q tane açıklayıcı değişken göz önüne alınsın. Açıklayıcı değişkenler kategorik veya sürekli olabilir. Burada birinci mertebeden lineer kestirici göz önüne alınmıştır. Bu yapı üst mertebedeki lineer kestiricilere genişletilebilir. Bağımlı değişkenin başarı olasılığı $(y = 1)$,

$$P(y_i = 1) = \pi = g^{-1}(\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_n x_{ni}) \quad (2.80)$$

ile ifade edilir. Denklem (2.80)'da $g^{-1}(.)$ ters link fonksiyonunu göstermektedir. Birim link fonksiyonu kullanılması halinde, standart lineer regresyonda olduğu gibi, β_1 katsayısı x_1 deki birim artış nedeniyle bağımlı değişkendeki farkı veya değişimi göstermektedir. Yani;

$$\Delta y_i = [\beta_1\,(x_{1i} + 1) + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_n x_{ni}] - [\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_n x_{ni}] = \beta_1 \quad (2.81)$$

[59] M. Olsson, a.g.e., 55-59.

dir. Bu nedenle binom ailesi modellerde birim link kullanılması halinde, katsayılar, risk farkları olarak yorumlanır. Link fonksiyonun tersi lineer olmadığı zaman (örneğin; ters logit link), katsayıların yorumlanması zordur. Örneğin, ters logit link için risk farkları,

$$\Delta y_i = \frac{\exp(\beta_1(x_{1i}+1)+\beta_2 x_{2i}+\dots+\beta_n x_{ni})}{1+\exp(\beta_1(x_{1i}+1)+\beta_2 x_{2i}+\dots+\beta_n x_{ni})} - \frac{\exp(\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\dots+\beta_n x_{ni})}{1+\exp(\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\dots+\beta_n x_{ni})} \tag{2.82}$$

ile verilmektedir. Eşitlik (2.82)'de Δy_i farkı, değişkenlerin değerlerine bağlı olması nedeniyle yorumda zorluk yaşanmaktadır. Daha kolay bir yorum için katsayıların bir dönüşümü kullanılmaktadır. Bu nedenle, binom dağılımı ile birlikte logit link fonksiyonu ile elde edilen modellerde, yani lojistik regresyonda odds oranı kullanılmaktadır.[60] Başarılı bir sonucun odds değeri, başarı olasılığının başarısızlık olasılığına oranıdır. Yani,

$$\text{Odds} = \frac{p}{1-p} \tag{2.83}$$

şeklinde yazılabilir. Ters logit link fonksiyonu için, belirlenen modelde odds oranı,

$$\text{Odds} = \frac{p}{1-p} = \frac{\exp(x\beta)/\{1+\exp(x\beta)\}}{1/\{1+\exp(x\beta)\}} = \exp(\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_n x_{ni}) \tag{2.84}$$

elde edilir. Odds, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ değişkenlerinin herhangi biri için hesaplanabilir. Odds, lojistik regresyon ile ilişkilidir. Diğer bir ifade ile, herhangi bir noktadaki logit fonksiyonu, o noktadaki odds'un logaritmasına eşittir. Yani,

$$\text{logit}\, P(X) = \ln\left[\frac{P(X)}{1-P(X)}\right] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \tag{2.85}$$

dir. Odds oranı ise iki odds değerinin oranıdır. Örneğin, x_1 için odds oranı,

$$x_1 \text{ için Odds oranı} = \frac{\exp(\beta_1(x_{1i}+1)+\beta_2 x_{2i}+\dots+\beta_n x_{ni})}{\exp(\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\dots+\beta_n x_{ni})} = \exp(\beta_1) \tag{2.86}$$

olarak hesaplanır. Bu durumda denklem (2.86)'dan binom ailesi modellerde logit link fonksiyonu kullanılarak katsayıların yorumu, katsayıların üsteli alınarak yapılmaktadır. Üsteli alınan bu katsayılar odds oranlarını göstermektedir.

Lojistik regresyonda, bazı durumlarda odds oranı yerine risk oranı kullanılmaktadır. Risk oranı, X_i $i = 1,2,\dots,n$ değişkenlerin bir birleşimi olmak üzere,

---

[60] D. W. Hosmer, S. Lameshow, *"Applied Logistic Regression"*, John Wiley & Sons, Inc., USA, (1989), 74-79.

$$\text{Risk Oranı} = \frac{P(X_1)}{P(X_2)} \tag{2.87}$$

şeklindedir. $P(X_i)$ $i = 1,2,\ldots,n$ karşılaştırmak istenen grupların bileşen oranlarına karşılık gelen kestirimlerdir, yani olasılıktır. Genellikle $P(X_2)$ kontrol grubu olarak alınmaktadır. Diğer bir değişle risk oranı, kontrol grubuna (etkilenmeyen gruba) karşı etkilenen grup da, olayın meydana gelmesi olasılığının bir oranıdır. Bazı çalışmalarda eşitlik (2.87) ile verilen risk oranı hesaplanamamaktadır. Bu nedenle, özellikle epidemiyolojik çalışmalarda risk oranın yerine odds oranı tercih edilmektedir.[61] Küçük olasılıklı durumlar için bu iki ifade yaklaşık olarak denktir. Yani,

$$\text{Odds oranı} = \frac{P_1}{1-P_1} \Big/ \frac{P_2}{1-P_2} \qquad \text{ve} \qquad \text{Risk Oranı} = \frac{P_1}{P_2}$$

alınması halinde,

$$\text{Odds oranı} = \frac{(\text{Risk Oranı}) - P_1}{1-P_1} \tag{2.88}$$

olur. Denklem (2.88)'den

$$\text{Odds oranı} = \frac{P_1}{P_2}\frac{1-P_2}{1-P_1} = (\text{Risk oranı}) \times \frac{1-P_2}{1-P_1} \tag{2.89}$$

elde edilir. Eşitlik (2.89)'da P_1 ve P_2 küçük olasılık değerlerine sahip olması halinde, odds oranı yaklaşık olarak risk oranına eşit olacaktır.[62]

Odds oranı ve risk oranı hemen hemen aynı yorumlanmaktadır. Ancak, odds oranı, lojistik regresyon ile ilişkili olması nedeniyle pratikte çok kullanılmaktadır. Odds oranı sıfır ve sonsuz arasında değerler alabilen bir orandır. Eğer odds oranı bire eşit ise karşılaştırılan gruplar arasında fark yoktur. Odds oranı 1 den büyük ise olayın veya durumun olması, alttaki gruba göre üsteki grup da meydana gelmesi daha olasıdır. Benzer olarak, odds oranın 1 den küçük olması, tersine yorumlanmaktadır. Eğer odds oranı sıfıra yakın veya sonsuz ise iki grup arasında büyük bir fark vardır. Aynı yorumlar risk oranı için de geçerlidir.

---

[61] D. Collett, a.g.e., 230-236.

[62] D. G. Kleinbaum, M. Klein, *"Logistic Regression: A Self-Learing Text"*, 2nd. Ed., Springer, USA, (2002), 73-92.

Poisson ailesi modellerinde, katsayıların yorumlanması yine link fonksiyonlarının lineer olmaması nedeniyle zordur. Kanonik link fonksiyonu için risk farkı,

$$\Delta y_i = \exp[\beta_1 (x_{1i} + 1) + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_n x_{ni}] - \exp[\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_n x_{ni}] \quad (2.90)$$

şeklinde ifade edilir. Burada eşitlik (2.90) ile verilen risk farkı yine değişkenlere bağlıdır. Bu nedenle değişkenlerin değerlerine bağlı olmayan ve yorumlanması daha kolay olan oluş derecesi oranı kullanılmaktadır. Yanıttaki değişim oranı olarak, x_1 in oluş derecesi oranın bir ölçüsü,

$$x_1 \text{ in oluş derecesi oranı} = \frac{\exp[\beta_1 (x_{1i} + 1) + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_n x_{ni}]}{\exp[\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_n x_{ni}]}$$

$$= \exp(\beta_1) \quad (2.91)$$

olarak tanımlanmaktadır. Denklem (2.91)'de tanımlanan oluş derecesi oranı, değişkenlerin belirli değerlerine bağlı değildir. Bu durumda eşitlik (2.92)'de verildiği gibi, poisson ailesi modellerde kanonik link kullanılmasıyla yorum, katsayıların üsteli alınarak yapılmaktadır. Üsteli alınan bu katsayılar, oluş derecesi oranlarını göstermektedir.[63]

2.11. AŞIRI YAYILIM

Aşırı yayılım, bağımlı değişken verilerinin ya binom ya da poisson dağılımı ile modellendiğinde bazen ortaya çıkan şaşırtıcı bir durum olmuştur. Aşırı yayılım temel olarak, bağımlı değişkenin varyansının, bağımlı değişken dağılımının bu seçimler için beklendiğinden daha büyük olduğunu ifade eder.

Aşırı yayılım koşulu, çoğunlukla model sapmasının serbestlik derecesine bölünmesi ile elde edilen değer hesaplanarak bulunur. Eğer bu değer 1'i fazlasıyla geçerse o zaman aşırı yayılım endişe kaynağı olabilir.

Bu durumu modellemek için doğrudan bir yol, binom ya da poisson dağılımının, varyans fonksiyonunun bir ϕ çarpımsal yayılım etkenine sahip olduğunu düşünmektir. Dolayısı ile bu fonksiyonlar aşağıdaki gibi yazılabilir.

---

[63] J. Hardin, J. Hilbe, *"Generalized Linear Models and Extensions"*, Stata Press, (2001), 49-51.

Binom Dağılımı; $Var(y)=f\mu(1-\mu)$

Poisson Dağılımı; $Var(y)=f\mu$

Modeller alışılmış şekilde kestirilir; model parametreleri ϕ'nin değerinden etkilenmez. ϕ parametresi eğer değeri biliniyorsa ya da bazı veri noktalarında tekrar varsa doğrudan belirlenebilir. ϕ parametresi için mantıklı bir kestirim kendi serbestlik derecesi ile bölünmüş sapmadır. Model katsayılarının kovaryans matrisi ϕ parametresi ile çarpılır ve ölçeklenmiş sapma ve hipotez testinde kullanılan log olabilirlikler ϕ'ye bölünür.

Binom ya da poisson hata dağılımı durumu için bir log olabilirliği ϕ ile bölünerek elde edilen fonksiyon, artık doğru bir log olabilirlik fonksiyonu değildir. Bu yarı olabilirlik fonksiyonuna bir örnektir. Log olabilirlikler için asimptotik kuralların çoğu yarı olabilirliğe uygulanmaktadır. Böylece yaklaşık standart hatalar ve sapma istatistikleri hesaplanabilir.[64]

2.12. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERDE MODEL KURULUMU

Genelleştirilmiş Lineer Modeller veri kümelerine uydurulduğu zaman, genelde lineer kestirici olarak, birinci ve ikinci dereceden polinom lineer modeller kullanılmaktadır. Fakat bununla birlikte lineer kestiricinin indirgenmesi, lineer kestiriciye karar verilmesi kadar önemlidir. Çünkü seçilen lineer kestiricilerin tüm terimlerinin modelde tutulması, iyi bir yaklaşım oluşturmaz. Burada amaç, veri kümesi için az terimle en iyi modeli elde etmektir. En iyi modeli elde etmek için tek bir parametre veya parametrelerin alt kümeleri üzerindeki istatistiksel sonuç çıkarımları, Wald ve olabilirlik oran testi kullanılarak yapılır. Parametrelerin anlamlı olup olmadığını test etmek için Wald istatistiğini kullanmak yanıltıcı olabilir. Çünkü Wald istatistiği, lojistik ve poisson regresyon modellerde az veya aşırı yayılımdan etkilenip yanlış sonuçlara yönlendirebilir. Küçük örneklemler için olabilirlik oran testi, Wald istatistiğine göre tercih edilmesine rağmen en uygun modeli bulmak için birçok karşılaştırmanın yapılması gerekmektedir. Olabilirlik oran testi ayrıca sapma farkları şeklinde de ifade edilebilir.[65] Bu kullanım, hata terimlerinin normal dağılıma sahip

[64] D.C. Montgomery, A.P. Elizabeth, G.G. Vining, (Çev.Editörü: M.Aydın Erar), a.g.e., 461-462.
[65] Myers, Montgomery, a.g.e., 205-211

olduğu lineer regresyon model durumundaki hipotez testi için hata kareler toplamının farkına benzemektedir. Olabilirlik oran testi iç içe geçmemiş modeller için kullanılmaz. Ayrıca, aşırı yayılım olması durumunda olabilirlik oran testleri ki-kare dağılımlı değildir.[66] Fakat $n \to \infty$ olması halinde bile genelde sapma için $n \to \infty$ ki-kare yaklaşımları çok iyi sonuç vermemektedir.[67] Bu nedenle, sapmanın asimptotik dağılımları üzerinde daha fazla araştırma yapılması gerekmektedir. Ancak ki-kare dağılımı iki sapma arasındaki farkın dağılımına iyi bir yaklaşım sağlamaktadır.[68]

Diğer yandan en iyi modelin belirlenmesi için kademeli regresyon, ileriye doğru regresyon, geriye doğru regresyon yöntemleri kullanılabilir. Ancak bu yöntemler, bir kaç tane farklı en iyi model önermektedir. Ayrıca, çoklu doğrusal bağlantı nedeniyle, bu yöntemler ile elde edilen modeller farklılık gösterebilmektedir.[69] Dolayısıyla mümkün tüm modelleri göz önüne alan ve bu modelleri bazı kriterler ile değerlendiren alternatif bir yöntem tercih edilmelidir. Bu durumda, alternatif regresyon modellerinin bir alt kümesi elde edilir. Bundan dolayı araştırmacı, farklı terimleri içeren modelleri kullanarak yanıt hakkında kapsamlı bir yorum elde edebilir.

2.13. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERDE MODEL SEÇİMİ

Modelde iki veya daha fazla açıklayıcı değişken olduğu durumda güçlü bir çoklu doğrusal bağlantının bulunmaması standart lineer regresyon modellerde olduğu gibi Genelleştirilmiş Lineer Modeller içinde önemlidir. Çoklu doğrusal bağlantı X model matrisinin sütunları arasında yaklaşık bir lineer ilişki olması halinde ortaya çıkmaktadır. Çoklu doğrusal bağlantı, model katsayılarının tahminlerinin standart hatalarını büyütür ve güvenilir olmayan istatistiksel sonuçlar ortaya koyabilir.[70] Bu durumda çoklu doğrusal bağlantı nedeniyle doğacak etkileri en aza indirgeyecek en iyi modeli seçmek önem kazanmaktadır. Literatürde aday modeller arasından en iyi modelin seçilmesi için birçok kriter vardır. Bu bölümde modellerin karşılaştırılması için üç tane ölçüt verilecektir. Bu kriterler; Akaike bilgi kriteri (AIC), Schwartz bayesyen bilgi kriteri

---

[66] Kenneth P. Burnham, David R. Anderson, *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information Theoretic Approach*, Springer, Second Edition, USA, 29.

[67] P.McCullagh, J.A. Nelder, a.g.e., 21-23.
[68] Collet, a.g.e., 91-98.
[69] Montgomery, diğ, a.g.e., 240-244.
[70] Hosmer, Lameshow, a.g.e., 91-100.

(SBIC) ve bunlara alternatif olarak geliştirilen, Bilgi Karmaşıklığı Kriteri (ICOMP) kriterleridir. Bu kriterlere ait olan formüller, modeldeki parametrelerin sayısına dayanan ceza terimiyle birlikte olabilirlik fonksiyonuna bağlı olan terimleri içerir. Böylece bu ölçütler az terimli modelle birlikte (sadece anlamlı terimlerin katkısı olan) en iyi modeli elde etmeye yardımcı olmaktadır.

2.13.1. Akaike Bilgi Kriteri (AIC)

Akaike bilgi kriteri (AIC) en iyi modeli seçebilmek için model karşılaştırmalarında kullanılmaktadır. Bu karşılaştırma iç içe geçmemiş modeller için veya farklı örneklemlerden elde edilen modeller için yapılabilir. AIC kriterinin küçük değeri daha iyi bir model olduğunu belirtir. AIC kriterinin formülü,

$$\mathrm{AIC} = -2\ln L(\hat{\theta}_k) + 2k \qquad (2.92)$$

şeklindedir. Formül (2.92)'de k, parametrelerin sayısını, $\hat{\theta}_k$ ise parametre tahminlerini göstermektedir. k parametreli bir model için k ceza terimidir. Buradan, modele eklenilen her terim ile AIC değerinin artacağı anlaşılmaktadır. Bu ölçü kriteri, genellikle aynı link fonksiyonuna ve varyans fonksiyonuna sahip fakat farklı değişkenli genelleştirilmiş lineer modellerin karşılaştırılması için uygundur.[71]

2.13.2. Schwartz Bayesian Bilgi Kriteri (SBIC)

Akaike bilgi kriterine benzer olarak**.** Schwartz bayesian bilgi kriteri, iç içe geçmiş ve iç içe geçmemiş modellerin karşılaştırılmasında kullanılabilir. AIC kriterinde olduğu gibi SBIC'nde de daha iyi uyum gösteren model daha küçük bir değere sahiptir. SBIC istatistiğinin formülü,

$$\mathrm{SBIC} = -2\ln \mathrm{L}(\hat{\theta}_k) + k\ln n \qquad (2.93)$$

şeklindedir. Formül (2.93)'de k, parametrelerin sayısını, n, örneklem büyüklüğünü, $\hat{\theta}_k$ ise parametre tahminlerini göstermektedir. AIC istatistiğinden farklı olarak SBIC, örnek büyüklüğü arttıkça daha zor artan bir ceza terimi içerir. İç içe geçmemiş modeller karşılaştırılırken iki modelin SBIC istatistikleri arasındaki farkın mutlak değerini temel

---

[71] Bo Hua, Jun Shaob, "Generalized linear model selection using R^2", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138, 2008, 3705-3712.

alarak modelin tercih derecesi ölçülebilir. Aşağıda Tablo 2.2.'de SBIC kriterine göre model tercih dereceleri gösterilmiştir.

Tablo 2.2: SBIC kriterine göre model tercihi

|fark|	Tercih Derecesi
0-2	Zayıf
2-8	Pozitif
6-10	Güçlü
>10	Çok Güçlü

A ve B gibi iki model karşılaştırıldığında eğer $(\mathrm{SBIC})_A - (\mathrm{SBIC})_B < 0$ ise A modeli B modeline göre tercih edilir. Eğer $(\mathrm{SBIC})_A - (\mathrm{SBIC})_B > 0$ ise B modeli, A modeline göre tercih edilmektedir.

2.13.3. Bilgi Karmaşıklığı Kriteri (ICOMP)

Bilgi karmaşıklığı kriteri, Akaike bilgi kriteri ve Schwartz bayesian bilgi kriterine göre daha kapsamlı bir kriterdir. ICOMP kriteri bir modelin kovaryans yapısını içermektedir. ICOMP kriterinin genel yapısı,

$$\mathrm{ICOMP} = -2\ln(\hat{\theta}_k) + s\ln \mathrm{tr}\left(\frac{I^{-1}(\hat{\theta}_k)}{s}\right) - \ln \mathrm{tr}\left|I^{-1}(\hat{\theta}_k)\right| \qquad (2.94)$$

şeklindedir. Denklem (2.80)'de k parametrelerin sayısını, $\hat{\theta}_k$ parametre tahminlerini, $I^{-1}(\hat{\theta}_k) = \widehat{\mathrm{var}}(\hat{\theta}_k)$ Fisher bilgi matrisinin tersini ve $s = \mathrm{rank} I^{-1}(\hat{\theta}_k)$ ifadesini göstermektedir. ICOMP kriteri, modelin varyans kovaryans yapısını içermesi nedeniyle, model seçimi yapılırken çoklu doğrusal bağlantı durumunda doğabilecek uygun olmayan koşulları göz önüne almaktadır. Bu nedenle AIC ve SBIC kriterlerine göre çoklu doğrusal bağlantı olması durumunda tercih edilebilecek bir kriterdir.[72]

[72] Hamparsum Bozdogan, *Statistical Data Mining and Knowledge Discovery*, Chapman&Hall/CRC, USA, 15-56

2.14. BAZI ÖZEL GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLER

Genelleştirilmiş lineer modeller (GLM), normal olmayan bağımlı değişken dağılımlarını göz önüne alan hem doğrusal hem de doğrusal olmayan regresyon modellerinin bir bileşimidir. GLM' de bağımlı değişkenin dağılımı; poisson, binom, üstel ve gamma dağılımlarını içeren üstel ailenin bir üyesi olmalıdır. [73] Çok yaygın uygulama alanları bulunan bazı özel genelleştirilmiş lineer modeller; lojistik, poisson ve gamma regresyon modellerdir.

Bu bölümde ilk olarak lojistik regresyonu ele alınıp daha sonra poisson regresyon modelleri anlatılacaktır.

2.14.1 Lojistik Regresyon Modeli

Regresyon analizinde sıkça kullanılan değişkenler nicel değişkenlerdir yani bu değişkenler oran ölçeğine sahiptir. Bazı durumlarda, regresyon analizinde bağımsız değişken olarak nitel ya da bir başka ifade ile kategorik değişkenler kullanılabilir. Genel olarak nitel değişkenler nominal veya ordinal ölçeğine sahip değildir. Bir istatistiksel analiz yapılmadan önce verilerin yapısı incelenmelidir.

Bağımlı değişkenin kategorik bir yapı göstermesi durumunda bağımlı değişkeninin hangi faktörler tarafından açıklandığını tespit etmek için klasik regresyon analizi kullanılamaz. Bu durumda kategorik bağımlı değişken ile kategorik veya sürekli bağımsız değişkenler arasındaki ilişki ileri parametrik olmayan bir istatistiksel yöntem olan lojistik regresyon analizi ile ele alınır. Lojistik regresyon analizinden, bağımsız değişkenlerin normal dağılmadığı ve bağımsız değişkenlerin bir kısmının veya tamamının kesikli veya kategorik olduğu durumlarda da yararlanılabilir.[74] Söz konusu ilişki bağımsız değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki etkilerinin olasılık olarak elde edilmesiyle sağlanır.[75] Yani, bağımlı değişkenin beklenen değerleri bağımsız değişkenlere göre olasılık düzeyinde belirlenir. Gözlemlerin sınıflandırılmasında hesaplanan bu olasılıklar kullanılır.

---

[73] D.C. Montgomery, A.P. Elizabeth, G.G. Vining, (Çev.Editörü: M.Aydın Erar), a.g.e., 421-422.
[74] E. Dallas Johnson, *Applied Multivariate Methods For Data Analysis*, Duxbury Pres, Pacific Grove, 1998, 287.
[75] David W. Hosmer, Jr. Stanley Lemeshow, Rodney X. Sturdivant, *Applied Logistic Regression*, Third Edition, John Wiley & Sons, 2013, 1.

Lojistik regresyon analizi ekonomi, finans, eğitim, mühendislik, sağlık politikası, psikoloji, kriminoloji, müşteri seçim analizleri, meteoroloji, epidemiyoloji gibi birçok alanda yaygın bir biçimde kullanılmaktadır.

Bağımlı değişkenin kategorik bir yapıda olduğu lojistik regresyon analizi üç şekilde uygulanmaktadır. Bağımlı değişkenin iki şıklı olması durumunda ikili lojistik regresyon analizi, bağımlı değişkenin sınıflayıcı ölçme düzeyine sahip en az üç şıklı olduğunda sınıflayıcı lojistik regresyon analizi ve bağımlı değişkenin sıralayıcı ölçme düzeyine sahip ve yine en az üç şıklı olması halinde sıralayıcı lojistik regresyon analizi olarak adlandırılır.[76]

2.14.1.1. Lojistik Regresyon Modeli ve Özellikleri

Bir klasik regresyon modelinde bağımsız değişken veri iken, bağımlı değişkenin koşullu beklenen değeri,

$$E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad (2.95)$$

şeklinde gösterilir. Bu modelde bağımsız değişkenler üzerinde bir kısıtlama olmamasına rağmen, Y bağımlı değişkeninin sürekli olması şartı aranır. Değişken - ∞ ile + ∞ arasındaki tüm değerleri alabilir. Fakat bağımlı değişkenin ikili sonucu olduğunda hata teriminin sıfır ortalama ve sabit varyansla normal dağılıma uyduğu varsayımı gerçekleşmemektedir.[77] Bu durumda hipotez testleri yapılamayacak ve güven sınırları oluşturulamayacaktır. Böyle bir durumda, normal dağılım varsayımına ihtiyaç duymayan lojistik regresyon analizi rahatlıkla kullanılabilmektedir.

Bağımsız değişkenler sonsuz değerler alabildiğinden denklemin sol tarafının 0 ve 1 değerini alması her zaman sağlanamayabilir. Böyle bir durumla karşı karşıya gelmemek için sonuç değeri olarak nitelendirilen olasılık değerinin çeşitli dönüşümlerle $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlı hale getirilmesi gerekir. Bu dönüşümlerden en çok kullanılanı lojit dönüşümüdür. Bu dönüşümde ilk olarak denklem (2.94)'deki olasılık değerleri üzerinde yapılan $\frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 x)}}$ dönüşümüyle bağımlı değişkenin sınırları $(0, +\infty)$ yapıldıktan sonra, elde edilen bu oranın doğal logaritması alınarak sonuç

[76] Kazım Özdamar, *Paket Programlarla İstatistiksel Veri Analizi*, Kaan Kitabevi, Eskisehir,1999, 477.
[77] James Steven, *Applied Multivariate Statistics For The Social Sciences*, Fourth Edition, New Jersey, 2002, 146.

değişkeninin sınırları $(-\infty, +\infty)$ haline getirilir. Bu dönüşüm sonucu ulaşılan yeni fonksiyon;

$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad (2.96)$$

olmak üzere,

$$E(Y|X) = \pi(x) = \frac{e^{g(x)}}{1+e^{g(x)}} = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}} \qquad (2.97)$$

şeklindedir. Buradaki $g(x)$ ifadesi lojistik regresyon modelinin lojiti olarak adlandırılır ve $g(x)$ ile $\pi(x)$ arasında,

$$g(x) = \ln\left[\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right] = \beta_0 + \beta_1 x \qquad (2.98)$$

biçiminde bir lojit dönüşümü yapılabilir.[78]

2.14.1.2. Odds Oranı

Lojistik regresyon analizindeki önemli kavramlarından biri de Odds oranıdır. Bahis oranı, üstünlük oranı, olasılık oranı veya teklik oranı şeklinde de adlandırılan odds oranı, herhangi bir olayın meydana gelme olasılığının meydana gelmeme olasılığına oranı olarak tanımlanabilir. Lojistik regresyon modelinin lojiti olarak atıfta bulunulan $g(x)$ ifadesinin anti logaritması alındığında odds oranına ulaşıldığı görülür.[79]

$$\text{Odds Oranı} = OR = \exp[g(x)] = \exp[\beta_0 + \beta_1 x] = e^{\beta_0}\left(e^{\beta_1}\right)^x = \frac{\pi(x)}{1-\pi(x)} \qquad (2.99)$$

Bu ifadede her bir parametrenin Odds değeri $e^{\beta} = \exp(\beta)$'ye eşittir ve e^{β} değeri bağımlı değişkenin açıklayıcı değişkenin etkisiyle kaç kat daha fazla veya yüzde kaç oranında daha fazla gözlenme olasılığına sahip olduğunu gösterir. Dolayısı ile β katsayısının anlamlılığının test edilmesi, $OR = \exp(\beta)$'nin sınanması ile aynı anlamı taşımaktadır.[80]

Bağımlı değişken 0 ve 1 değerleri ile kodlandığında $\pi(x)$ olasılığı ile x'in verilen değeri için 1'e eşit olurken, $1 - \pi(x)$ olasılığı ile x'in verilen değeri için 0'a eşit olur. Böyle bir durumda, açıklayıcı değişken de 0 ve 1 değerlerini alan ikili bir değişken

[78] David W. Hosmer, Stanley Lemeshow, *Applied Logistic Regression*, John Wiley and Sons, New York, 2000, 6.
[79] Alan Agresti, a.g.e., 107.
[80] Kazım Özdamar, a.g.e., 477.

olursa; x=1 için sonucun odds değeri $\pi(1)/[1-\pi(1)]$ olurken, $x=0$ için sonucun odds oranı $\pi(0)/[1-\pi(0)]$ olarak tanımlanır. Bu durumda odds oranı,

$$OR = \frac{\pi(1)/[1-\pi(1)]}{\pi(0)/[1-\pi(0)]} \tag{2.100}$$

biçiminde ifade edilebilir.[81]

Aşağıdaki tabloda bağımsız değişkenin iki şıklı olması durumunda lojistik regresyon modelinin aldığı değerler gösterilmiştir.

Tablo 2.3. Bağımsız değişkenin iki şıklı olması halinde lojistik regresyon modelinin değerleri

Bağımlı Değişken (Y)	Bağımsız Değişken (X)	
	$X = 1$	$X = 0$
$Y = 1$	$\pi(1) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1}}{1+e^{\beta_0+\beta_1}}$	$\pi(0) = \dfrac{e^{\beta_0}}{1+e^{\beta_0}}$
$Y = 0$	$1-\pi(1) = \dfrac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1}}$	$1-\pi(0) = \dfrac{1}{1+e^{\beta_0}}$
Toplam	1	1

Kaynak: David W. Hosmer, Jr. Stanley Lemeshow, Rodney X. Sturdivant, a.g.e., p.52.

Tablo 2.3'deki ifadelerden yararlanılarak,

$$OR = \frac{\left(\dfrac{e^{\beta_0+\beta_1}}{1+e^{\beta_0+\beta_1}}\right)/\left(\dfrac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1}}\right)}{\left(\dfrac{e^{\beta_0}}{1+e^{\beta_0}}\right)/\left(\dfrac{1}{1+e^{\beta_0}}\right)} = \frac{e^{\beta_0+\beta_1}}{e^{\beta_0}} = e^{(\beta_0+\beta_1)-\beta_0} = e^{\beta_1}$$

elde edilir. Buradan iki şıklı bağımsız değişkenin 0 ve 1 olarak kodlandığı bir lojistik regresyonda, regresyon katsayıları ile odds oranı arasında,

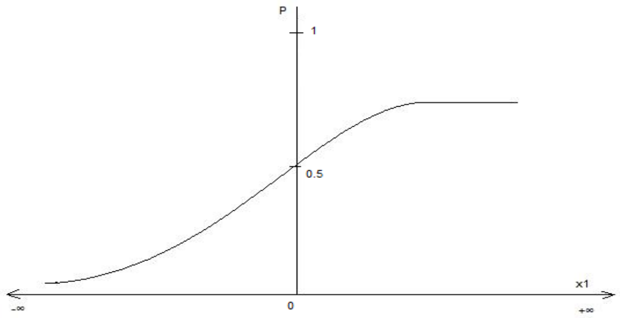
$$OR = e^{\beta_1} \tag{2.101}$$

şeklinde bir ilişki olduğu görülebilir. Odds oranları ve olasılıklar aynı sonucu farklı açılardan görmeyi sağlar. Yani, olasılıkların odds oranlarına veya odds oranlarının olasılıklara dönüştürülmesi mümkündür.[82]

---

[81] David W. Hosmer, Stanley Lemeshow, a.g.e., 49.
[82] Şeref Kalaycı, *SPSS Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistik Teknikleri*, Asil Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Ankara, 2005, 279.

Aşağıda grafikte lojistik regresyon eğrisi ele alınmıştır.



Şekil 2.2. Lojistik Regresyon Eğrisi

Kaynak: Şeref Kalaycı(Ed),**"SPSS Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistik Teknikleri"**,2.Basım, Ankara: Asil Yayın Dağıtım Ltd Şti,2006,s.280.

Şekil 2.2. de gösterilen eğri lojistik regresyon eğrisidir. S şekilli eğri, 0 ile 1 arasında sınırlandırılmıştır ve uçlarda oldukça yatay ve ortalarda daha diktir. Bu durum bağımsız değişkendeki bir birimlik değişmenin alt ve üst kısmındaki etkisinin azaldığını, ortalarda arttığını göstermektedir.

2.14.1.3. Lojistik Regresyon Modelinin Varsayımları

İki şıklı kategorik bağımlı değişkene sahip olan lojistik regresyon modelinin varsayımları kısaca şu şekilde özetlenebilir:

- $0 < E(Y|X) < 1$'dir. Yani lojistik regresyon modelinin koşullu ortalaması 0 ile 1 arasında olmalıdır.

- $P(Y|x) = \pi(x)$'dir. Bu varsayım x değeri veri iken $Y = 1$ olma olasılığının $\pi(x)$ olduğunu ifade eder.

- Lojistik regresyon modeline ait hata terimlerinin dağılımı binom dağılımına uymalıdır.

- ❖ Bağımlı değişkene ait gözlem değerleri $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ istatistiksel olarak birbirlerinden bağımsız olmalıdır.
- ❖ Açıklayıcı değişkenler birbirlerinden bağımsız olmalıdır.

Lojistik regresyon modelinde bağımsız değişkenler sürekli veya kategorik olabilirken, daha çok sürekli değişkenlerin kullanılması önerilir. Bunun yanı sıra lojistik regresyon modellerine bağımsız değişkenlerin ikili ya da üçlü etkileşimleri de dâhil edilebilir.[83]

2.14.1.4 Lojistik Regresyon Modelinin Tahmin Yöntemleri

Bağımlı değişkenin iki şıklı kategorik bir yapıya sahip olduğu lojistik regresyon modelinin parametre tahmininde çoğunlukla; en çok olabilirlik, yeniden ağırlıklandırılmış tekrarlı en küçük kareler ve tekrarlı veri durumunda minimum lojit ki-kare yöntemleri kullanılmaktadır.[84]

2.14.1.4.1 En Çok Olabilirlik Yöntemi

Lojistik regresyon modelinde bağımlı değişkenin 0 ve 1 değerleri ile kodlanmış iki şıklı bir değişken olması halinde, söz konusu modelin hata terimi sabit varyansa sahip olamamaktadır. Bu nedenle model parametrelerinin olağan en küçük kareler tekniği ile tahmini sapmasız, fakat en iyi olamayacaktır. Dolayısı ile alternatif tahmin yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bunlardan biri olan en çok olabilirlik tekniği, mevcut parametre tahminleri arasından gözlemlenen değerleri elde etmenin olasılığını olabildiğince en yükseğe çıkarabilenleri seçmektedir.[85]

Herhangi bir veri kümesi $(Y_i, x_{1i}, \ldots, x_{ki})$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ verildiğinde n adet örneklemin bağımsız olduğu varsayılır. Böyle bir durumda gözlenen değerlerin $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ bileşik olasılığı basitçe şu şekildedir:[86]

$$P(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \prod_{i=1}^{n} P(Y|x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki}) \qquad (2.102)$$

---

[83] Dilek Murat, *Parasal Krizlerin İstatistiksel Analizi ve Türkiye Uygulaması*, (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa 2006, 78.

[84] Hüseyin Tatlıdil, *Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz*, Ziraat Matbaacılık A.S., Ankara, 2002, 295

[85] A. Koutsiyannis, *Ekonometri Kuramı*, Çev. Ümit Şenesen, Gülay Günlük Şenesen, İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul, 1992, 441.

[86] Tony E. Smith, "*Notes On Logistic Regression*", www.seas.upenn.edu/ ~ese302/ extra_mtls/ Logistic_Regression.pdf, (03.02.2015), 1.

Burada bağımlı değişken 0 ve 1 olarak kodlandığında, $\pi(x)$ ifadesi x_k değerine değerlerine bağlı olarak Y'nin 1 olma olasılığını yani $P(Y = 1|x_1, \dots, x_k)$ ifadesini yerine getirir. Ayrıca $1 - \pi(x)$ değeri de x_k veri iken Y'nin 0 olma olasılığını yani $P(Y = 0|x_1, \dots, x_k)$ ifadesini yerine getirir. Bu durumda her bir (x_i, Y_i) gözlem çifti için $Y = 1$ olduğunda olabilirlik fonksiyonuna $\pi(x)$ olasılığı kadar, $Y = 0$ olduğunda da $1 - \pi(x)$ olasılığı kadar katkı sağlanır. İfade edilen olabilirlik fonksiyonu:

$$l(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k / Y_1, \dots, Y_n) = \prod_{i=1}^{n} \pi(x_i)^{Y_i} [1 - \pi(x_i)]^{1-Y_i} \tag{2.103}$$

şeklindedir.[87] En çok olabilirlik yönteminin temel hedefi, olabilirlik fonksiyonunu yani yukarıdaki denklemi maksimum yapacak olan β parametrelerini tahmin etmektir. Bu doğrultuda;

$$\begin{aligned} L(\beta) = \ln(\beta) &= l(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k / Y_1, \dots, Y_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{Y_i \ln[\pi(x_i)] + (1 - Y_i) \ln[1 - \pi(x_i)]\} \end{aligned} \tag{2.104}$$

şeklindeki logaritması alınmış olabilirlik fonksiyonu (Log olabilirlik fonksiyonu) kullanılır. Bu fonksiyonun β'lara göre kısmi türevi alındığında, olabilirlik denklemleri olarak bilinen denklemler elde edilir. Bunlar;

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [Y_i - \pi(x_i)] = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} [Y - \pi(x_i)] = 0 \qquad j = 1,2, \dots, k \end{aligned} \tag{2.105}$$

şeklindedir. Bu denklemler taraf tarafa çözülerek bilinmeyen β parametrelerine ilişkin β'ların en çok olabilirlik tahminleri olarak adlandırılan $\hat{\beta}$ parametre değerleri tahmin edilir.

Lojistik regresyon modelinin en çok olabilirlik tahminlerini elde etmek için doğrusal olmayan bir tahmin işleyişi gereklidir.[88] Bu modellerde olabilirlik eşitliklerinin β'larla doğrusal olmamaları nedeni ile en çok olabilirlik yönteminden tekrarlı bir algoritma ile çözüme gidilir. Bu tekrarlı çözümlemede, öncelikle β'lara başlangıç değerleri verilerek ilk tahminler elde edildikten sonra, her adımda δ kadarlık artırma veya eksiltme yapılıp, türevlerin alınması ile sonuca ulaşılmaya çalışılır.

---

[87] William E. Griffiths, R. Carter Hill, Peter J. Pope, "Small Sample Properties of Probit Model Estimators", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, 1987, 929.

[88] Therese A. Stukel, "Generalized Logistic Models", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 83, 1988, 427.

Tekrarlı işlemler arasında fark olmadığında, yakınsama sağlanmıştır ve böylece sürecin sona ermesi gerektiği anlaşılmış olur. $\pi(x)$'in en çok olabilirlik tahmini olan $\hat{\pi}(x)$, $\hat{\beta}$ ve x_i yardımı ile hesaplanır ve $\pi(x)$ ile $\hat{\pi}(x)$ arasında;

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i) \qquad (2.106)$$

ilişkisi bulunmaktadır.[89]

2.14.1.4.2. Yeniden Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi

Lojistik regresyon modeli;

$$g(x) = \ln\left[\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right] = \ln\left[\frac{P(Y=1|x)}{1-P(Y=1|x)}\right] = \beta_0 + \beta_1 x \qquad (2.107)$$

$$P(Y = 1|x_1, x_2, \dots, x_k) = \pi(x) = \frac{1}{1+e^{-[g(x)]}} \qquad (2.108)$$

şeklinde ifade edilmişti.

Verilerin j tane gruba ayrıldığı düşünüldüğünde; her bir grupta n_j deneme sonucunda r_j adet başarı sağlandığında başarı oranı $P_j = r_j/n_j$ olarak hesaplanabilir. Varyans;

$$\mathrm{Var}\left(\frac{r_j}{n_j}\right) = P_j = \frac{1-P_j}{n_j} \qquad (2.109)$$

olduğuna göre, her bir binom dağılımlı gözlem için varyansın değişeceği söylenebilir. Bu durumda $w_j = n_j/P_j(1 - P_j)$ ağırlık değeri kullanılarak ağırlıklı regresyon uygulanmalıdır. Fakat w_j değeri P_j'nin fonksiyonu olduğundan dolayı, en küçük kareler yöntemi tekrarlı bir algoritma izlenerek uygulanacak ve w_j ağırlık değerleri her adımda tahmin değerlerine bağlı olarak yeniden üretilecektir.[90]

2.14.1.4.3. Minimum Lojit Ki-Kare Yöntemi

Minimum lojit ki-kare yöntemi, $2 \times j$ çapraz tablolarındaki beklenen ve gözlenen lojit değerleri arasındaki farktan yararlanılarak uygulanır. Bu yöntem tekrarlı verilerin söz konusu olduğu durumlarda kullanılır.

---

[89] Jacop Cohen, Patricia Cohen, Stephen G. West, Leona S. Aiken, *Applied Multiple Regression/ Correlation Analysis fort he Behavioral Sciences*, Third Edition, Lawrence Erlbaum Associates, 2003, London, 481-485.

[90] Bayo Lawal, *Categorical Data Analysis with SAS and SPSS Applications*, Lawrence Erlbaum Associates, London, 2003, 286-294

En çok olabilirlik yöntemi, yeniden ağırlıklı tekrarlı en küçük kareler yöntemi ve minimum lojit ki-kare yöntemi dışında, lojistik regresyon modelini tahmin etmede çok istisnai durumlarda tekrarlı olmayan en küçük kareler yöntemi ve diskriminant fonksiyonuna dayalı tahmin yönteminden yararlanılır.[91]

2.14.1.5. Lojistik Regresyon Modelinin Uyum İyiliği ve Parametrelerin Anlamlılık Testleri

Lojistik regresyon analizi, sonuçları açısından çoklu regresyon analizine benzemektedir. Fakat katsayıları tahmin etmede kullanılan yöntem açısından çoklu regresyondan farklıdır. Lojistik regresyon analizinde, sapmaların karelerini minimize etmek yerine meydana gelecek bir olayın olabilirliği maksimize edilmeye çalışılır. Bu alternatif tahmin tekniğini kullanmak, farklı yollarla model uyumunu değerlendirmeyi gerektirir.[92]

2.14.1.5.1. Modelin Uyum İyiliği

Lojistik regresyon modeli, herhangi bir tahmin tekniği ile tahmin edildikten sonra kurulan modelin uyum iyiliği test edilmelidir. Bağımlı değişkenin ne derece etkin olarak tanımlandığının bilinmesi gerekir. Bunun için modelin uyum iyiliğine bakılmalıdır.

Modelin bağımlı değişkeni Y için gözlenen örneklem değerlerinin vektör formunda $\mathrm{Y}' = (\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \dots, \mathrm{Y}_\mathrm{n})$ olarak ve modelden tahmin edilen bağımlı değişken değerlerinin $\widehat{\mathrm{Y}}' = (\widehat{\mathrm{Y}}_1, \widehat{\mathrm{Y}}_2, \dots, \widehat{\mathrm{Y}}_\mathrm{n})$ olarak vektör şeklinde gösterildiği varsayılsın. Bu durumda,

- Y ve $\widehat{\mathrm{Y}}$ arasındaki mesafe küçük ve
- $\left(\mathrm{Y}_\mathrm{i}, \widehat{\mathrm{Y}}\right)$ $\mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{n}$ ikililerinin her biri için ilişki modelin hata yapısından bağımsız ve sistematik değil ise, söz konusu modelin uygun olduğu sonucu çıkarılabilir.

---

[91] Dilek Murat, a.g.tz., 82.

[92] Joseph F., Hair, Rolph E., Anderson, Ronald L., Tatham, William C., Black, *Multivariate Data Analysis*, Fifth Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1998, 280.

Modelin uyum iyiliğinin değerlendirilmesi için çeşitli istatistiksel ölçütlerden faydalanılır. Fakat bu ölçütlerden önce, model uygunluğu ile ilgili önemli bir kavram olan birliktelik örüntüsü terimini açıklamak yerinde olacaktır. Birliktelik örüntüsü, bir modeldeki birliktelikler için tek bir değişken setini kümesini tanımlamak için kullanılır.[93] Bir model kurulurken yararlanılan veri kümesinin yaş, cinsiyet ve medeni durum v.b. verileri içerdiği varsayılsın. Bu durumda sözü edilen bu faktörlerin çeşitli kombinasyonlarından çok sayıda farklı birliktelik örüntüsü oluşacaktır. Diğer taraftan, model sadece her biri iki şıklı olarak kodlanan medeni durum ve cinsiyet değişkenlerini içeriyorsa, mümkün olan birliktelik örüntüsü sayısı sadece dört olacaktır.

Lojistik regresyon modelinin uyum iyiliğini araştırmada kullanılan en önemli istatistiki ölçütler su şekilde sıralanabilir:

1) Doymuş model olarak adlandırılan değişken sayısı kadar parametre içeren model ile tahmin edilen model atıfta bulunulan, sadece önemli olduğu düşünülen modele ait olabilirlik oranları farkına dayanan ölçütler ki-kare dağılımı gösterir. D istatistiği bu ölçütlerden biridir. D istatistiği,

$$D = -2 \ln \left[\frac{\text{Tahmin edilen modelin olabilirliği}}{\text{Doymuş modelin olabilirliği}} \right] \tag{2.110}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca D istatistiği log olabilirlik fonksiyonu kullanılarak,

$$D = -2 \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i \ln \left(\frac{\hat{\pi}(x_i)}{Y_i} \right) + (1 - Y_i) \ln \left(\frac{1-\hat{\pi}(x_i)}{1-Y_i} \right)_i \right] \tag{2.111}$$

biçiminde de ifade edilebilir. Sapma olarak da adlandırılan D istatistiği doğrusal regresyonda hata kareler toplamına karşılık gelmektedir.[94] Bu durumda sapma değeri minimum olan modelin, diğer modellere göre daha iyi bir model olduğu düşünülebilir.

Bağımlı değişkenin 0 veya 1 değerini aldığı, $\pi = \hat{Y}_i$ eşitliğinin geçerli olduğu doymuş modelin olabilirliği,

$$l(\text{Doymuş Model}) = \prod_{i=1}^{n} {Y_i}^{Y_i} (1 - Y_i)^{1-Y_i} = 1_i \tag{2.112}$$

olarak 1'e eşittir. Bu durumda D istatistiği,

---

[93] Steven G. Heeringa, Brady T. West, Patricia A.Berglund, *Applied Survey Data Analiysis*, Cahpman & Hall, USA, 2010, 239-245.

[94] D. G. Kleinbaum, M. Klein, *"Logistic Regression: A Self-Learing Text"*, 2nd. Ed., Springer, USA, (2002), 301-325.

$$D = -2\ln(\text{Tahmin edilen modelin olabilirliği}) \quad (2.113)$$

biçimine dönüşür. Sözü edilen test istatistiği parametre sayısı k ile ifade edilecek olursa, (n-k) serbestlik dereceli ki-kare tablo değeri ile karşılaştırılır.

Lojistik regresyon modelinde normallik varsayımı kısıtlaması bulunmadığından, uyum iyiliği testlerinde diğer çok değişkenli testlerin çoğunda olduğu gibi, t ve F tablo değerleri karşılaştırmak amacı ile kullanılamadığından, bunların yerine bilinen en basit parametrik olmayan ölçütler olan ki-kare ve log-olabilirlik oranı istatistiği olan G^2 gibi ölçütler kullanılmaktadır.

Lojistik modelin uyum iyiliğinin değerlendirilmesinde, David W. Hosmer ve Stanley Lemeshow tarafından geliştirilen ve ki-kare dağılımına uygunluk gösteren Hosmer-Lemeshow testi de kullanılabilir. Bu testin amacı, tahmin edilen olasılık değerlerini gruplandırmaktır. Hosmer-Lemeshow uyum iyiliği istatistiği olan $\hat{C}$ gözlenen ve beklenen frekanslardan oluşan $g \times 2$ tablosundan, Pearson ki-kare istatistiği olarak hesaplanır. $\hat{C}$ istatistiği,

$$\hat{C} = \sum_{k=1}^{g} \frac{\left(\hat{o}k - n'_k \overline{\pi_k}\right)^2}{n'_k \overline{\pi_k}} \quad (2.114)$$

biçiminde ifade edilir.

Bu eşitlikte,

n'_k : k. gruptaki örneklerin toplam sayısı

c_k : k. desildeki toplam birliktelik örüntüsü sayısı

o_k : gözlenen frekansı ifade eder ve $o_k = \sum_{j=1}^{c_k} y_j$'dir.

$\overline{\pi_k}$: ortalama tahmin edilen olasılığı ifade eder ve $\overline{\pi_k} = \sum_{j=1}^{c_k} \frac{m_j \hat{\pi}_j}{n'_k}$ eşittir.

Hosmer-Lemeshow test istatistiği $\hat{C}$, (g-2) serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına yaklaşmaktadır.

2) Modelin uyum iyiliğini incelemek için hata terimlerinin bağımsız değişken değerlerine ya da tahmin sonucu elde edilen olasılık değerlerine karsı çizilen grafikten yararlanılabilir. Bu sayede sapan değer araştırması da yapılmış olur.

3) Hata kareler toplamı ve olabilirlik oranlarına dayalı determinasyon katsayısı türü ölçütler de uyum iyiliği testinde kullanılabilir. Model uygunluğunu belirlemede kullanılan bir diğer ölçü de Psuedo R_L^2 olup,

$$R_L^2 = 1 - \left(\frac{\ln L_p}{\ln L_0}\right) \qquad (2.115)$$

şeklinde formüle edilir. Bu ölçü, doğrusal regresyon analizindeki çoklu determinasyon katsayısının benzeridir. Formüldeki L_0, yalnızca kesmenin yer aldığı modelin en çok olabilirlik değerini ve L_p ise ilgilenilen modelin en çok olabilirlik değerini göstermektedir. Psuedo R^2 değeri, verideki belirsizliğin model tarafından açıklanabilen oranını ifade etmektedir.[95] $L_p = 1$ olduğunda $\ln L = 0$ ve dolayısıyla $R^2 = 1$ olur ve mevcut değişkenle kurulan modelin araştırılan ilişkinin çok iyi bir göstergesi olduğu düşünülür. Diğer taraftan, $\ln L_p = \ln L_0$ durumunda ise $R^2 = 0$ değerini alacak ve açıklayıcı değişkenlerin modele hiçbir katkıda bulunmadıkları anlaşılacaktır. Bu yönüyle, R^2 değeri lojistik regresyon modelinde uyum iyiliğini değerlendirmekten ziyade, model kurma aşamasında yardımcı bir istatistik olabilir.

4) Lojistik regresyon modelinin uyum iyiliğini test etmek için doğru sınıflandırma oranı kullanılabilir. Bu amaçla sınıflandırma tablolarından yararlanılır. Bu tablolar bağımlı değişkenin gözlenen gerçek değerleri ile tahmin edilen değerlerinin çaprazlanması sonucu meydana gelir. Sınıflandırma tablosunu oluşturmak için öncelikle bir sınır değeri c belirlenir ve tahmin edilen değerler, bu sınır değeri ile karşılaştırılarak uygun gruba atama yapılır. Tahmin edilen değer, c değerini aşar ise 1 grubuna, aşmaz ise 0 grubuna dâhil edilir. Burada sözü edilen sınır değeri c için genellikle 0,5 değeri kullanılır.[96]

2.14.1.5.2. Model Parametrelerinin Anlamlılık Testleri

Lojistik regresyon analizinde modele dâhil edilmesi gereken açıklayıcı değişkenleri belirlemede D istatistiğinden faydalanılabilir. Lojistik modelin uyum iyiliğinin değerlendirilmesinde de önemli bir ölçüt olarak kullanılan D istatistiği, bir anlamda kurulan modelin önemliliğini test eder. Bu amaçla daha önce de belirtildiği

[95] Özer Özdinç, *Derecelendirme Sürecinde Ekonometrik Bir Değerlendirme*, Sermaye Piyasası Kurulu, Yayın no:130, y.y., 1999, 111.
[96] Dilek Murat, a.g.tz., 86-87.

gibi doymuş model; değişken sayısı kadar parametre içeren model, tahmin edilen model; yalnızca önemli olduğu düşünülen değişkenleri içeren model olmak üzere,

$$D = -2\ln\left[\frac{\text{Tahmin edilen modelin olabilirliği}}{\text{Doymuş modelin olabilirliği}}\right] \tag{2.116}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Sapma ölçütü olarak da bilinen D istatistiği, k parametre sayısını göstermek üzere $(n-k)$ serbestlik dereceli ki-kare tablo değeri ile karşılaştırılır. Ayrıca sapma değeri minimum olan modelin en iyi model olduğunu söylemek mümkündür.

Çoklu doğrusal regresyon modelinde parametrelerin anlamlılığının test edilmesinde kullanılan tümel F testine karşılık gelebilecek benzer bir test, lojistik regresyon analizi için de geliştirilmiştir. Burada test edilen hipotezler,

$$H_0: \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$$

$$H_1: \beta_0 \neq \beta_1 \neq \beta_2 \neq \cdots \neq \beta_k \neq 0 \quad \text{(En azından birisi farklı)}$$

biçimindedir. L_0 yalnızca sabit terimden oluşan modelin olabilirlik değerini, L_1 de açıklayıcı değişkenleri içeren modelin olabilirlik değerini ifade etmek üzere,

$$C = -2\log\left(\frac{L_0}{L_1}\right) = -2(\log L_0 - \log L_1) \tag{2.117}$$

biçiminde tanımlanan test istatistiği, $(k-1)$ serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımı göstermektedir.

Katsayıların bireysel anlamlılıklarının değerlendirilmesinde kullanılan bir diğer ölçüt Wald testidir. Çoklu doğrusal regresyon analizinde, modeldeki açıklayıcı değişkenlerin bağımlı değişken üzerinde istatistiksel olarak anlamlı (önemli) bir katkısının olup olmadığını belirlemede, diğer bir deyişle parametrelerin anlamlılığını test etmede t testinden yararlanılır. Lojistik regresyon ise aynı amaçla Wald istatistiğini kullanır. Çoklu regresyon katsayılarının anlamlılığının testinde kullanılan standart hata yaklaşımı ile aynı mantığa sahip olan Wald test istatistiği, açıklayıcı değişkenlere ait β_k katsayısının kendi standart hatasına oranlanması sonucu,

$$W_k = \left[\frac{\hat{\beta}_k - 0}{SE(\hat{\beta}_k)}\right]^2 \tag{2.118}$$

biçiminde elde edilir.[97] Bu istatistik,

$$H_0: \beta_k = 0$$

$$H_1: \beta_k \neq 0$$

şeklindeki sıfır ve alternatif hipotezleri için bireysel olarak test edilir. Wald testi sonucunda W değeri standart normal dağılıma ait tablo değeri ile karşılaştırılır. Çok değişkenin söz konusu olduğu durumlarda,

$$H_0: \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$$

$$H_1: \beta_0 \neq \beta_1 \neq \beta_2 \neq \cdots \neq \beta_k \neq 0 \quad \text{(En azından birisi farklı)}$$

hipotezleri altında Wald istatistiği,

$$W = \hat{\beta}'\left[\mathrm{Var}(\hat{\beta})\right]^{-1}\hat{\beta} = \hat{\beta}'(X'VX)\beta \tag{2.119}$$

biçiminde hesaplanır. Ayrıca söz konusu istatistik, $(k+1)$ serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımı gösterir.

Değişkenlerin modele katkısını belirlemek amacıyla kullanılabilecek bir diğer yöntem de, bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki kısmi korelasyonların belirlenmesidir.[98] Kısmi korelasyon katsayıları,

$$R = \pm\sqrt{\frac{W-2K}{-2L_0}} \tag{2.120}$$

biçiminde belirlenir. L_0 sadece sabit terimin yer aldığı modelin olabilirlik değerini, K ise değişkenin serbestlik derecesini gösterir ve elde edilen değere değişkenin işareti eklenerek sonuca ulaşılır. Wald istatistiği 2K'dan küçük olduğunda R değeri 0 olur. R, (-1, 1) aralığında değerler alabilir ve R'nin küçük değerleri, söz konusu değişkenin modele olan katkısının az olduğunu ifade edecektir.

Model parametrelerinin anlamlılığı Score testi ile de sınanabilir. Log olabilirlik fonksiyonunun türevlerinin dağılımına dayanan Score testi için hesaplanan test istatistiği,

---

[97] Barbara G. Tabachnick, Linda S. Fidel, *Using Multivariate Statistics*, Harper Collins College Publishers, Third Edition, New York, 1996, 581.
[98] Özdinç, a.g.e., 110.

$$\mathrm{ST} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\bar{Y}(1-\bar{Y})\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} \tag{2.121}$$

şeklindedir.

Sonuç olarak, lojistik regresyon analizinde bağımsız değişken katsayılarının anlamlılık testlerinde kullanılan yaklaşım, doğrusal regresyonda kullanılan yaklaşıma benzerdir. Bununla birlikte lojistik regresyon analizi bağımlı değişkenin ikili olduğu durumda olabilirlik fonksiyonunu kullanır.

2.14.1.6. Lojistik Regresyon Modelinin Çapraz Tablodan Elde Edilmesi

Kontenjans tabloları ya da diğer adıyla çapraz tablolar, sosyal bilimcilerin çok yaygın bir biçimde kullandığı en eski istatistiksel araçlardandır. Bu tabloların bu kadar rağbet görmesinin önemli bir nedeni, sade bir yapıya sahip olmalarıdır. Diğer neden ise çapraz tabloların parametrik olmamaları veya çok zayıf parametrik varsayımlar gerektirmeleridir.

Bir olayın meydana gelme olasılığının, meydana gelmeme olasılığına oranı odds oranı olan odds oranı 2×2 boyutuna sahip bir çapraz tablo ile anlaşılabilir.

Aşağıda tablo 2.4.'te odds oranının 2×2 boyutlu çapraz tablo yardımıyla nasıl hesaplanacağı verilmiştir.

Tablo2.4. 2×2 Boyutlu Çapraz Tablo Yardımıyla Odds Oranının Hesaplanması

Risk Faktörü	Temel Sonuç		Toplam
	$Y = 1$	$Y = 0$	
$X = 1$	a	b	$a + b$
$X = 0$	c	d	$c + d$
Toplam	$a + c$	$b + d$	$n = a + b + c + d$

Tablo 2.4. yardımıyla Odds oranı,

$$\mathrm{OR} = \frac{[a/(a+b)]/[b/(a+b)]}{[c/(c+d)]/[d/(c+d)]} \tag{2.122}$$

biçiminde ifade edilir. [99]Bu denklem sadeleştirildiğinde,

$$\mathrm{OR} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a.d}{c.b} \tag{2.123}$$

ifadesi elde edilir. Bu son denklem odds oranının, 2×2 boyutlu bir tablonun basit çapraz çarpım oranına eşit olduğunu göstermektedir.

Ayrıca bir olayın meydana gelme olasılığına π ile ifade edilirse, bu olayın meydana gelme olasılığı ile odds oranı arasında,

$$\mathrm{Odds} = \frac{\pi}{1-\pi} \tag{2.124}$$

biçiminde bir ilişki tanımlanabilir. Söz konusu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\pi = \frac{\mathrm{Odds}}{1+\mathrm{Odds}} \tag{2.125}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemlerden hareketle, odds değerinin logaritmasının lojit değerini ve lojit fonksiyonunun anti-logaritmasının da odds değerini verdiği söylenebilir. Buna ilave olarak, lojistik regresyon modelindeki katsayıların anti-logaritmaları katsayıların odds değerini vermektedir. Odds oranlarının doğal logaritmaları da model parametrelerine eşittir; $\mathrm{Odds\ oranı} = e^{\beta}$ şeklinde ifade edilebilir.[100]

Ayrıca odds oranı nisbi riskin hesaplanmasında da kullanılabilir. Risk, bir olayın meydana gelme olasılığının toplam olasılık içindeki oranıdır. Mutlak risk, bağımsız değişkenlerin seçilen değerleri için bir olayın meydana gelme olasılığı olarak tanımlanır ve $P(Y = 1|\ X = x)$ biçiminde ifade edilebilir. Nisbi risk ise bağımsız değişken X'in verilen bazı temel değerleri için bir olayın olasılığı ile aynı olasılıktır ve $P(Y = 1|X = 1)/P(Y = 1|X = 0)$ şeklinde verilebilir.[101] Daha açık bir şekilde nisbi risk bir durumdaki riske karşılık diğer durumdaki riskin varlığı olarak tanımlanabilir. Nisbi risk bu tanımlardan yola çıkılarak ve çapraz tablo göz önünde bulundurularak,

$$\mathrm{RR} = \frac{[d/(c+d)]}{[b/(a+b)]} = \frac{d(a+b)}{b(c+d)} \tag{2.126}$$

---

[99] Odds Ratio and Yule's Q, http://john-uebersax.com/stat/odds.htm, (11.02.2015).
[100] Barbara G. Tabachnick, Linda S. Fidel,, a.g.e., 548.
[101] Gary King, Langche Zeng, "Logistic Regrssion in Rare Events Data", http://gking.harvard.edu/files/0s.pdf, (10.02.2015), 141.

şeklinde hesaplanabilir.[102]

2.14.2. Poisson Regresyon Modeli

Genelleştirilmiş lineer modellerin diğer bir önemli üyesi poisson regresyon modelleridir. Poisson regresyon, lojistik regresyon analizinden sonra en genel olan ikinci genelleştirilmiş lineer modeldir. Poisson regresyon modellerinde bağımlı değişken poisson dağılımına sahiptir. Bu durumda bağımlı değişken kesikli rastgele değişken şeklindedir. Örneğin, bir üretimde meydana gelen kusurların sayısı, belirli bir hastalığa yakalanan insanların sayısı veya doğa olaylarının meydana gelme sayısı gibi nadir olaylar düşünülebilir. Araştırmacı gözlenen sayılar ile potansiyel olarak kullanılabilecek açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemeyle ilgilenir. Örneğin, bir mühendis üretimdeki kusurların sayısı ile üretim şartları arasındaki ilişkiyi modellemekle ilgilenebilir. Bu özel model tipinin lojistik regresyon modelinde olduğu gibi önemli uygulama alanları mevcuttur.[103] Poisson regresyon modeli için $Y_i = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere y_i bağımlı değişkeni sayı şeklindedir. Poisson dağılımına sahip bağımlı değişken için olasılık fonksiyonu,

$$f(Y) = \frac{\mu^{Y} e^{-\mu}}{Y!}\ ,\quad Y = 0,1,2,\ldots \tag{2.127}$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (2.126)'da $\mu > 0$ dır. Teorik olarak, bir poisson rastlantısal değişkeni herhangi bir negatif olmayan tamsayı değeri alabilmektedir ve μ değerinin bir fonksiyonu olarak değişmektedir. Poisson dağılımı çoğunlukla nadir olayların oluş sayısını modellemek için kullanılmaktadır. Poisson dağılımına sahip bir rasgele değişken için;

$$E(Y) = \mu \qquad Var(Y) = \mu \tag{2.128}$$

şeklinde tanımlanan varyans ve beklenen değer, μ parametresine, dolayısıyla birbirlerine eşittirler. Lojistik regresyon modelindekine benzer olarak poisson regresyon model,

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k = X_i'\beta \tag{2.129}$$

[102] Dilek Murat, a.g.tz., s.90.
[103] Özlem Deniz, "Poisson Regresyon Analizi", *İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7, Bahar 2005/1, 59-72.

olarak ifade edilir. Denklem (2.128)'de g fonksiyonu link fonksiyonu olarak adlandırılır. Daha önceden bahsedildiği gibi g link fonksiyonu,

$$\mu_i = g^{-1}(\eta_i) = g^{-1}(X_i'\beta) \tag{2.130}$$

şeklinde yanıtın ortalaması ile lineer kestirici arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir. Poisson dağılımıyla kullanılan pek çok link fonksiyonu bulunmaktadır. Bunlardan biri,

$$g(\mu_i) = \mu_i = X_i'\beta \tag{2.131}$$

şeklinde tanımlanan birim linktir. Birim link kullanıldığı durumda $\mu_i = g^{-1}(X_i'\beta) = X_i'\beta$ olduğundan $E(Y_i) = \mu_i = X_i'\beta$ dır. Poisson dağılımı için kullanılan diğer bir popüler link fonksiyonu,

$$g(\mu_i) = \ln(\mu_i) = X_i'\beta \tag{2.132}$$

şeklinde tanımlanan log linktir. Eşitlik (2.132) ile tanımlanan log link için bağımlı değişkeninin ortalaması ile lineer kestirici arasındaki ilişki,

$$\mu_i = g^{-1}(X_i'\beta) = e^{(X_i'\beta)} \tag{2.133}$$

şeklinde ifade edilir. Bağımlı değişken için kestirilen tüm değerler negatif olmayacağından dolayı, log link fonksiyonunun poisson regresyon modeli için önemli bir etkisi bulunmaktadır.[104]

2.14.2.1. Poisson Regresyon Modeli İçin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri

Poisson regresyon modelinde parametre tahmini için en çok olabilirlik yöntemi kullanılmaktadır. Yapılacak olan yaklaşımlar Lojistik regresyon modelinde yer alan tekniklere benzemektedir. Eğer bağımlı değişken Y ve X bağımsız değişkenleri üzerinde n tane gözlemin bir rastgele örneklemi göz önüne alınırsa olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f_i(Y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{[\mu_i]^{Y_i} \exp[-\mu_i]}{Y_i!}$$

$$= \frac{\{\prod_{i=1}^{n}[\mu_i]^{Y_i}\} \exp[-\sum_{i=1}^{n} \mu_i]}{\prod_{i=1}^{n} Y_i!} \tag{2.134}$$

---

[104] John Neter, Michael Kutner, Christopher Nachtsheim, William Wasserman, *Applied Linear Statistical Models*, IRWIN, USA, Fourth Edition, 1996, 609-610.

şeklinde gösterilir. Denklem (2.134)'de verilen fonksiyonda $\mu_i = g^{-1}(X_i'\beta)$'dir. Link fonksiyonu seçilerek,

$$\ln L(\beta) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ln(\mu_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i!) \qquad (2.135)$$

şeklinde tanımlanan log olabilirlik fonksiyonu maksimum yapılır. Önceki bölümde verilen iteratif yöntemler, lojistik regresyon modeline benzer olarak, poisson regresyon modelindeki parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerini bulmak için kullanılabilir.[105] Parametre tahmini $\hat{\beta}$ elde edildikten sonra uydurulmuş poisson regresyon modeli,

$$\hat{Y}_i = g^{-1}(X_i'\hat{\beta}) \qquad (2.136)$$

şeklinde ifade edilir. Örneğin, birim link kullanılırsa eşitlik (2.136) ile belirtilen bağımlı değişkenin tahmini,

$$\hat{Y}_i = g^{-1}(X_i'\hat{\beta}) = g^{-1}(X_i'\hat{\beta})$$

şeklinde olur. Eğer, log link kullanılırsa,

$$\hat{Y}_i = g^{-1}(X_i'\hat{\beta}) = \exp(X_i'\hat{\beta})$$

şeklinde elde edilir. Poisson regresyon model üzerinde yapılan sonuç çıkarım işlemleri lojistik regresyon modeli için kullanılan yaklaşımlarla aynıdır.[106]

2.14.2.2. Poisson Regresyon Modelinde Parametrelerin Yorumlanması

Poisson regresyon modelinde, parametrelerin yorumlanması lojistik regresyon modeline benzer olarak link fonksiyonlarının lineer olmaması nedeniyle zordur. Poisson dağılımı ile birlikte birim link kullanılması halinde parametrelerin yorumlanması diğer link fonksiyonlarına göre daha kolaydır. Örneğin, Y, poisson dağılımına sahip bir bağımlı değişken olmak üzere açıklayıcı değişken olarak, X_1ve X_2 göz önüne alınsın. Açıklayıcı değişkenler kategorik veya sürekli olabilir. Kanonik link fonksiyonu için risk farkı,

$$\Delta Y_i = \exp\{\beta_0 + \beta_1(X_{1i} + 1) + \beta_2(X_{2i})\} - \exp(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i})$$

[105] S. K., Sapra," Pre-Test Estimation in Poisson Regression Model", *Applied Economics Letters*,10, 2003, 541–543.
[106] D.C., Montgomery, A.P., Elizabeth, G.G.,Vining, (Çev.Editörü: M.Aydın Erar), a.g.e., 444-446

şeklinde ifade edilir. Burada risk farkı yine lojistik regresyon modelinde olduğu gibi değişkenlere bağlıdır. Bu nedenle değişkenlerin değerlerine bağlı olmayan ve yorumlanması daha kolay olan oluş derecesi oranı kullanılmaktadır.[107]

Bağımlı değişkendeki değişim oranı olarak X_1'in oluş derecesi oranın bir ölçüsü,

$$X_1 \text{ in oluş derecesi oranı} = \frac{\exp\{\beta_0 + \beta_1(X_{1i} + 1) + \beta_2(X_{2i})\}}{\exp(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i})} = \exp(\beta_1)$$

olarak tanımlanmaktadır. Oluş derecesi oranı, değişkenlerin belirli değerlerine bağlı değildir. Bu durumda, poisson regresyon modelinde kanonik link kullanılmasıyla yorumlama, parametrelerin üstel değeri alınarak yapılmaktadır. Üstel değeri alınan bu parametreler, oluş derecesi oranlarını göstermektedir.[108]

2.14.3. Lojistik ve Poisson Regresyon Modellerinde Az Yayılım ve Aşırı Yayılım Problemi

Üssel ailenin iki önemli kesikli olasılık dağılımı binom ve poisson dağılımlarıdır. Bu iki dağılım, üssel aile yapısında ele alınması halinde önemli bir kısıtlayıcı özellik $a(\phi) = 1$ dir. Yani, yayılım parametresinin bire eşit olması anlamına gelmektedir. Başka bir deyişle, yapılan analizden doğru sonuçlar elde edilebilmesi için çoğu kez yayılım parametresinin tahmin edilmesi gereklidir.

Bağımlı değişken, binom veya poisson dağılımına sahip olduğu zaman, doğru belirlenmiş bir model için Pearson ki-kare istatistiği ve sapma değeri, kendi serbestlik derecelerine bölündüğü zaman yaklaşık olarak 1 değerine yakın olmalıdır.[109] Ancak üssel ailenin kesikli dağılımları (binom, poisson) için, yayılım parametresi 1 değerine yakınsa kurulan modelin iyi olduğunu söylenebilir. Bu değer 1 den büyük veya küçük ise, kullanılan olasılık fonksiyonları uygun üssel formu karşılamadıkları için veri analizinde problem oluşmaktadır.

---

[107] J., Hardin, J., Hilbe, a.g.e.,189.

[108] Lung-Fei Lee, "Specification Test for Poisson Regression Models", *International Economic Rewiew*, Vol. 27, No. 3, October, 1986, 689-706.

[109] P.McCullagh, J.A. Nelder, *Generlized Linear Models*, Chapman and Hall, Second Edition, 1983, 125-130.

Eğer tahmin edilen yayılım parametresi 1 den büyük ise, bu durumda modelin aşırı yayılım sergilediğini, aksi takdirde, 1 den küçük ise az yayılım sergilemektedir.[110] Az veya aşırı yayılım modeldeki parametrelerin standart hatalarını etkilemektedir. Bu durumda, modeldeki bireysel parametreler üzerinde kurulacak hipotez testleri yanıltıcı olmaktadır. Ayrıca parametrelerin güven aralıkları da standart hataların etkilenmesi nedeniyle etkilenmektedir.[111]

Böyle bir durum ile karşılaşıldığı zaman, binom veya poisson dağılımlarının haricinde, daha çok parametre içeren dağılımlar kullanılmaktadır. Örneğin, binom dağılımı için aşırı yayılım durumunda beta-binom dağılımı, az yayılım durumunda ise çarpımsal modeller daha iyi sonuç vermektedirler. Poisson dağılımı için ise, aşırı yayılım olması halinde yine bir üssel aile üyesi olan negatif binom dağılımı kullanılmaktadır.[112]

Ancak bununla birlikte bu tür dağılımları kullanmadan önce, modelin neden az veya aşırı yayılıma sebep olduğu incelenmelidir. Genellikle, göz ardı edilen değişkenler (etkileşim veya lineer olmayan terimler) modele eklenerek, az veya aşırı yayılım problemi ortadan kaldırılabilir. Diğer bir olasılık ise, etkili veya aykırı değerlerinde bu problemi oluşturabileceğidir.

[110] James W. Hardin, Joseph M. Hilbe, a.g.e., 49-51.
[111] Dipak K. Dey, Alan E. Gelfand, Fengchun Peng, "Overdispersed generalized linear models", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 64, (1997), 93-107.
[112] James W. Hardin, Joseph M. Hilbe, a.g.e., 50.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

AKADEMİK DANIŞMANLIK HİZMETLERDEN MEMNUNİYETİN GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER MODELLERLE İNCELENMESİ

Bu bölümde, Atatürk Üniversitesinde 2013-2014 eğitim öğretim yılı itibari ile öğrenim görmekte olan lisansüstü öğrencilerinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet araştırması sonuçları Genelleştirilmiş Lineer Modeller ile analiz edilmiştir.

Lisansüstü öğrenim gören öğrencilerin memnuniyeti araştırmaları; öğrencilerin memnuniyet düzeylerini ölçerek memnuniyetsizliğin kaynağı olan alanları belirleyip sebeplerini bulurken, öğrencilerin profilini oluşturup, yapılacak iyileştirmeler için bir yön haritası oluşturur.

3.1. MATERYAL VE METOT

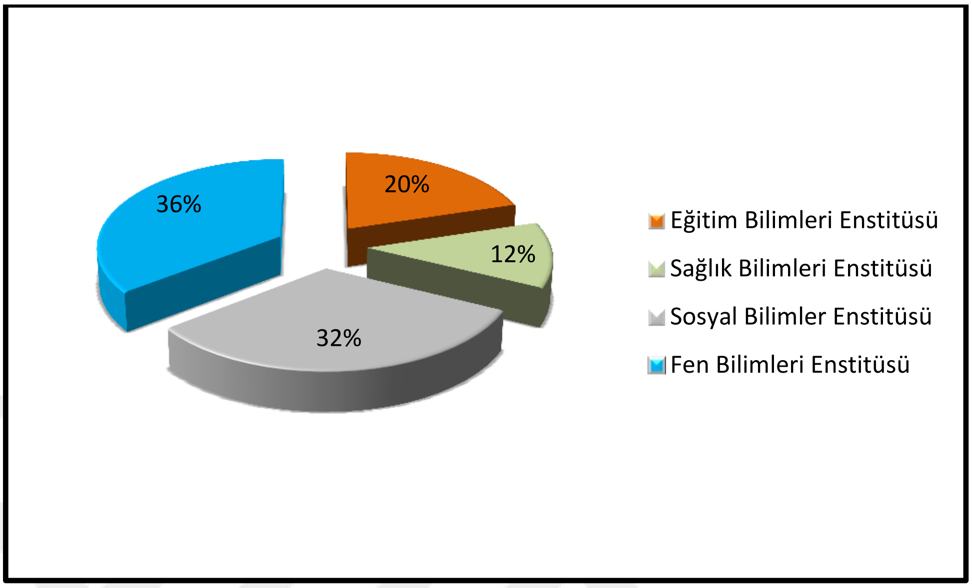
Çalışmanın anakütlesini Atatürk Üniversitesinde lisansüstü eğitim gören öğrenciler oluşturmaktadır. Aralık 2013 ayı itibari ile Atatürk Üniversitesinde öğrenime devam eden sosyal, sağlık, fen ve eğitim bilimleri enstitülerinde öğrenim gören lisansüstü öğrenci sayısı 6709 olarak belirlenmiştir. Çalışmada kullanılacak veri seti, Atatürk Üniversitesinde öğrenim gören lisansüstü öğrencilerinden bir anket yardımıyla elde edilecek yatay kesit verilerinden oluşmaktadır.

Örneklem büyüklüğünün belirlenebilmesi amacıyla akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olan ve olmayanların oranı 0,5 olarak alınmış, %5 önem düzeyinde %5 hata payı ile anakütleyi temsil edecek örneklem büyüklüğü,

$$\mathrm{n} = \frac{6709(0{,}5)(0{,}5)(1{,}96)^{2}}{(6709-1)0{,}05^{2}+(0{,}5)(0{,}5)(1{,}96)^{2}} \cong 363$$

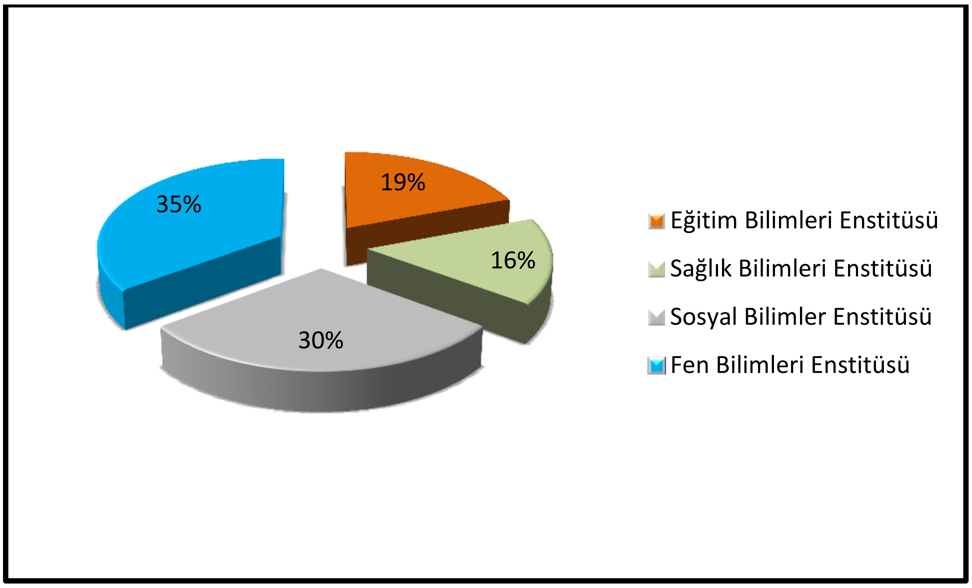
olarak hesaplanmıştır. Araştırmada hedeflenen minimum örneklem büyüklüğü 363olarak belirlenmiştir ancak eksik ve hatalı doldurulmuş anketlerin olabileceği düşünülerek 400 adet anket uygulanmıştır. Çalışma için hazırlanan anket Atatürk Üniversitesinde Lisansüstü Eğitim alan öğrencilerin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyeti ve iyi bir lisansüstü eğitim için gerekli olan faktörleri belirlemek için tasarlanmıştır.

Atatürk Üniversitesinin mevcut enstitülerinde öğrenim gören, ders kaydını yapmış 6709 yüksek lisans ve doktora öğrencisinin enstitülere göre dağılımı aşağıdaki grafiklerde verilmiştir.



Şekil 3.1. Enstitülere Göre Yüksek Lisans Öğrencilerinin Dağılımı

Şekil 3.1.'de enstitülere göre yüksek lisans öğrencilerin dağılımı ele alınmıştır. Fen bilimleri %36 ile ilk sırada, sosyal bilimler %32 ile ikinci sırada, %20 ile eğitim bilimleri enstitüsü üçüncü sırada ve %12 ile sağlık bilimleri enstitüsü son sırada yer almaktadır.



Şekil 3.2. Enstitülere Göre Doktora Öğrencilerinin Dağılımı

Şekil 3.2.'de enstitülere göre doktora öğrencilerin dağılımı ele alınmıştır. Fen bilimleri %35 ile ilk sırada, sosyal bilimler %30 ile ikinci sırada, %19 ile eğitim bilimleri enstitüsü üçüncü sırada ve %16 ile sağlık bilimleri enstitüsü son sırada yer almaktadır.

Bu çalışma için tasarlanan anket öğrencilerin enstitülere göre dağılımları dikkate alınarak paylaştırılmıştır. Hazırlanan anket sahaya sürülmeden güvenilirlik analizi yapılmıştır. Eksiksiz işaretlenen 345 anketteki 50 soru için Cronbach alfa katsayısı 0,948 bulunmuştur.

Anketin birinci kısmında, demografik bilgilere ve lisansüstü eğitim ile alakalı bilgilere yer verilmiştir. Anketin ikinci kısımda, akademik danışmanın yeterliliğine göre lisansüstü eğitim alan öğrencilerin dağılımları araştırılmıştır. Akademik danışmanın öğrencisi ile olan iletişimi, öğrenciye karşı olan ilgi, akademik danışmanın kişisel özelliklerinin öğrenci üzerinde etkisi gibi konular incelenmiştir. Anketin üçüncü kısımda lisansüstü eğitimin fiziki yeterliliği ile ilgili bilgiler araştırılmıştır. Bu bölümde lisansüstü eğitim için dersliklerin, araç ve donanımı, öğrencilerin ders çalışma koşulları, mesleki laboratuvarların yeterliliği gibi konular ele alınmıştır. Anketin dördüncü kısımda lisansüstü eğitimi veren akademisyenlerin yeterliliği araştırılmıştır. Akademisyenlerin konularına hâkimliği, dersi anlatma üslupları, öğrenciyi derse katmaları, sınıfın dikkatini çekmelerini, öğrencileri çalışmaya ve araştırmaya teşviklerini, dersi severek anlatmaları, konularla ilişkili güncel bilgileri sunmaları gibi konular ele alınmıştır. Anketin beşinci kısımda öğrencilerin enstitü görevlilerinin yeterliliği konusu ele alınmıştır. Bu bölümde enstitü görevlilerinin öğrenciye karşı olan tutum ve davranışları, problemlere karşı öğrenciye destekleri gibi konular araştırılmıştır. Anketin altıncı kısımda ise lisansüstü öğrenim gören öğrencilere göre Atatürk Üniversitesinin imajı incelenmiştir. Bu bölümde üniversitenin öğrencileri üzerindeki etkisi, bağlılık oluşturması gibi konular ele alınmıştır.

3.2. UYGULAMADA KULLANILAN DEĞİŞKENLER

Atatürk Üniversitesinde öğrenim gören lisansüstü öğrencilerin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyeti anket verilerinde, güçlü bir çoklu doğrusallığı bertaraf etmek, değişken sayısını azaltmak ve değişkenleri gruplandırmak amacıyla faktör analizine tabi tutulmuştur. Elde edilen faktör skorları ile akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyetin genelleştirilmiş lineer modeller ile analizi yapılmıştır. Çalışmada Microsoft Excel ve IBM SPSS Statistics 21 paket programları kullanılmıştır.

Ana başlıkları ile ankette yer alan değişkenler;

- Demografik bilgiler,
- Lisansüstü eğitim bilgileri,
- Akademik danışmanın yeterliliği,
- Lisansüstü eğitim için üniversitenin fiziki koşullarının yeterliliği,
- Lisansüstü eğitimde dersleri veren akademisyenlerin yeterliliği,
- Enstitü görevlilerinin yeterliliği ve
- Üniversitenin yeterliliği

şeklinde gruplandırılabilir. Grupların altında bulunan değişkenler EK1 de verilmiştir. Her bir grup için ayrı ayrı faktör analizi yapılmıştır. Tüm gruplar için Barlet testi uygulanmış ve korelasyon matrisi birim matrise eşit olduğunu ifade eden sıfır hipotezi reddedilmiştir. Faktör analizi neticesinde bağımsız değişkenleri temsilen 10 faktör yükü elde edilmiştir. Buna göre hangi değişkenin hangi faktör yükü altında olduğu aşağıda verilmiştir.

F1: yaş, aylık gelir, aile aylık geliri

F2: mezun olunan üniversite, mezun olunan bölüm

F3: lisansüstü eğitimde hangi aşamada olunduğu, eğitim süresi

F4: hangi enstitüde bulunulduğu, akademik danışmanla görüşülme süresi

F5: akademik danışmanın yeterliliği ile ilgili; ADY6, ADY7, ADY8, ADY9, ADY10, ADY11, ADY12, ADY13, ADY14, ADY15, ADY16, ADY17, ADY18, ADY19, ADY20 soruları kapsamaktadır.

F6: akademik danışmanın yeterliliği ile ilgili; ADY1, ADY2, ADY3, ADY4, ADY5 soruları kapsamaktadır.

F7: lisansüstü eğitimi veren akademisyenlerin yeterliliği ile ilgili; LEVAY1, LEVAY2, LEVAY3, LEVAY4, LEVAY5, LEVAY6, LEVAY7, LEVAY8, LEVAY9, LEVAY10, LEVAY11 soruları kapsamaktadır.

F8: lisansüstü eğitimin fiziki yeterliliği ile ilgili; LEFY1, LEFY2, LEFY3, LEFY4, LEFY5 soruları kapsamaktadır.

F9: akademik olmayan personelin yeterliliği ile ilgili; AOPY1, AOPY2, AOPY3, AOPY4, AOPY5, AOPY6, AOPY7, AOPY8 soruları kapsamaktadır.

F10: üniversite imajının yeterliliği ile ilgili; UIY1, UIY2, UIY3, UIY4, UIY5, UIY6 soruları kapsamaktadır.

Çalışmada kullanılan akademik danışmanın yeterliliği ile ilgili değişkenler aşağıda verilmiştir.

- Akademik danışman ile etkin bir iletişim içerisinde olma (ADY1),
- Akademik danışmanın beklenti ve ümitlerini öğrencisiyle paylaşması (ADY2),
- Akademik danışmanın bilimsel çalışmalarda öğrencisiyle sürekli ilgilenip, cesaretlendirmesi (ADY3),
- Öğrencinin akademik danışmanıyla geleceğe yönelik beklentilerini paylaşması (ADY4),
- Akademik danışmanın kendi programını öğrencisi ile paylaşması (ADY5),
- Akademik danışmanın öğrencisinin yaptığı çalışmalardan heyecan duymasını beklemesi (ADY6),
- Akademik danışmanın öğrencisini şüpheci, araştırıcı ve irdeleyici olmanın yollarını öğretmesi (ADY7),
- Akademik danışmanın örnek alınacak bir kişiliğe sahip olması (ADY8),
- Akademik danışmanın öğrencisine kurumu tanıtıp, yeni ortamına alışmasını sağlaması (ADY9),
- Akademik danışman öğrencinin ders dışında, kurs ve programlardan da faydalanmasını sağlaması (ADY10),

- Akademik danışmanın öğrencisini ders seçiminde yönlendirmesi (ADY11),
- Akademik danışmanın öğrencisini tez konusunda yönlendirmesi (ADY12),
- Akademik danışmanın öğrencisinin çalışmalardan elde ettiği sonuçları başkalarıyla paylaşmamı istemesi (ADY13),
- Akademik danışmanın kendi akademik etkinliklerine öğrencisini katması (ADY14),
- Akademik danışman öğrencisinin araştırmalarının gidişatını yakından izlemesi (ADY15),
- Akademik danışmanın öğrencisinin çalışma taslaklarını değerlendirerek çalışmada yolunu açması (ADY16),
- Akademik danışmanın öğrencisini bilimsel camiaya katılmasında yardımcı ve destek olması (ADY17),
- Akademik danışmanın alanındaki gelişmelerden haberdar olması ve kendisini sürekli güncellemesi (ADY18),
- Akademik danışmanın bilimsel faaliyetlerinden öğrencisinin haberi olması (ADY19).
- Akademik danışmanımın sunduğu danışmanlık hizmetlerinden memnun olma. (ADY20)

Çalışmada kullanılan lisansüstü eğitimin fiziki yeterliliği ile ilgili değişkenler aşağıda verilmiştir.

- Ders işlemek için yeterince derslik bulunmaktadır. (LEFY1)
- Lisansüstü dersliklerde modern öğretim araçları ve donanımı vardır. (LEFY2)
- Ders çalışabilmek için lisansüstü öğrencilerine üniversitemizde yeterince yer tahsis edilmiştir. (LEFY3)
- Lisansüstü öğrenim için yeterli kapasitede bilgisayar veya mesleki laboratuvar vardır. (LEFY4)
- Lisansüstü eğitimim için üniversitenin fiziksel imkânları yeterlidir. (LEFY5)

Çalışmada kullanılan lisansüstü eğitimi veren akademisyenin yeterliliği ile ilgili değişkenler aşağıda verilmiştir.

- Derste konularına hâkimdirler. (LEVAY1)
- Dersi, açık ve anlaşılabilir bir üslupla anlatırlar. (LEVAY2)
- Öğrencilerin derse katılmasını teşvik ederler. (LEVAY3)
- Eleştiriye açıktırlar. (LEVAY4)
- Sınıfın dikkatini çekmesini bilirler. (LEVAY5)
- Çalışmaya ve araştırmaya teşvik ederler. (LEVAY6)
- Dersle ilgili verdikleri sözün arkasındadırlar. (LEVAY7)
- Dersi severek anlatırlar. (LEVAY8)
- Konuyla ilgili son gelişmeleri sunmaya çalışırlar. (LEVAY9)
- Sınavlar konusunda öğrencileri cesaretlendirirler. (LEVAY10)
- Lisansüstü eğitim veren akademisyenler yeterlidirler. (LEVAY11)

Çalışmada kullanılan akademik olmayan (enstitü görevlileri) personelin yeterliliği ile ilgili değişkenler aşağıda verilmiştir.

- Enstitü görevlileri öğrencilerin sorunlarını çözmeye samimi istek gösterirler. (AOPY1)
- Enstitü görevlileri öğrenciye karşı dürüsttürler. (AOPY2)
- Enstitü görevlileri öğrenciye saygılıdırlar. (AOPY3)
- Enstitü görevlileri öğrencinin isteklerine hemen yanıt verirler. (AOPY4)
- Enstitü görevlileri öğrencinin beklentilerini anlamaya çalışırlar. (AOPY5)
- Enstitü görevlileri sorulara yanıt verecek yeterli bilgiye sahiptirler. (AOPY6)
- Enstitü görevlileri dostça ve sıcak bir yaklaşım içindedirler. (AOPY7)

- Enstitü görevlileri öğrencileri ilgilendiren konularda yeterince yardımcı olurlar. (AOPY8)

Çalışmada kullanılan üniversite imajının yeterliliği ile ilgili değişkenler aşağıda verilmiştir.

- Bu üniversite bende her zaman iyi bir etki bırakmıştır. (UIY1)
- Bu üniversitenin imajı diğer üniversitelerin imajından daha iyidir. (UIY2)
- Bu üniversite akademik eğitim açısından Türkiye'de önemli bir paya sahiptir. (UIY3)
- Bu üniversiteyi başkalarına tavsiye ederim. (UIY4)
- Kendimi üniversiteme bağlı hissediyorum. (UIY5)
- Üniversitemle gurur duyuyorum. (UIY6)

Anket formu ekler bölümünde verilmiştir.

3.3. MODEL TAHMİNİ VE SONUÇLARI

Akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olup olamama durumu için uygun olasılık modeli binom modeli olduğundan verilere lojistik regresyon modeli uydurulmuştur. Model Newton-Raphson yöntemi ile lojistik link kullanılarak elde edilmiştir. Akaike bilgi kriterini minimum yapma amacıyla modelden F2 değişkeni çıkarılarak en uygun model tahmin edilmiştir.

Model;

$$\hat{\pi} = 1.458 - 0.10F_1 + 0.17F_3 - 0.61F_4 + 1.1F_5 + 1.22F_6 + 1.52F_7 + 2.4F_8 + 1.58\,F_9 + 1.66F_{10}$$

şeklinde elde edilmiştir. Modele göre, faktör 1 skorunun barındırdığı değişkenler olan yaş, aile geliri ve aile aylık geliri ile memnuniyet arasında ters yönlü ilişki bulunmuştur. Faktör 4 skorunun barındırdığı değişken, akademik danışmanla görüşülme süresi ile memnuniyet arasında ters yönlü ilişki bulunmuştur. Faktör 5 ve faktör 6 skorunun barındırdığı değişken, akademik danışmanın yeterliliği ile memnuniyet arasında pozitif yönlü ilişki bulunmuştur. Faktör 7 skorunun barındırdığı değişken, lisansüstü eğitimi veren akademisyenlerin yeterliliği ile memnuniyet arasında pozitif yönlü ilişki bulunmuştur. Faktör 8 skorunun barındırdığı değişken, lisansüstü fiziki yeterlilik ile memnuniyet arasında pozitif yönlü ilişki bulunmuştur. Faktör 9 skorunun barındırdığı akademik olmayan personelin yeterliliği ile memnuniyet arasında pozitif yönlü ilişki bulunmuştur. Faktör 10 skorunun barındırdığı üniversite imajının yeterliliği ile memnuniyet arasında pozitif yönlü ilişki bulunmuştur.

Tahmin edilen modelin parametre değerleri, Wald Ki-kare istatistikleri ve anlamlılıkları, odds oranları değerleri aşağıdaki Tablo 3.1.'de verilmiştir.

Tablo 3.1. SPSS ile Elde Edilen Model Parametre Sonuçları

Parametre	B	Std. Hata	Hipotez Testi			Exp(B)
			Wald Ki-kare	sd	p	
Sabit	1,455	0,2282	40,849	1	0,000	4,298
F1	-0,099	0,2494	0,157	1	0,692	0,906
F3	0,169	0,2094	0,648	1	0,421	1,184
F4	-0,613	0,2262	7,340	1	0,007	0,542
F5	1,093	0,2338	21,852	1	0,001	2,983
F6	1,220	0,2228	29,991	1	0,000	3,387
F7	1,518	0,2699	31,628	1	0,000	4,562
F8	2,401	0,2807	73,137	1	0,000	11,032
F9	1,577	0,2310	46,616	1	0,000	4,842
F10	1,661	0,2634	39,798	1	0,000	5,267

Tablo 3.1.'e göre; F4 değişkeni %5 önem seviyesinde, F5, F6, F7, F8, F9 ve F10 değişkenleri ise %1 önem seviyesinde Wald- Ki kare test istatistiğine göre anlamlı bulunmuştur.

F1, F3 değişkenleri ise %5 önem seviyesinde Wald- Ki kare test istatistiğine göre anlamsız bulunmuştur.

Tablo 3.1.'de bulunan Exp(B), bağımsız değişkendeki 1 birimlik artışa karşılık odds oranında beklenen değişimdir. Beta katsayısının işaretine bakılarak, F4 skoru arttıkça, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet azalacaktır yani akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı azalacaktır. F4 faktör skorunda bulunan; hangi enstitüde bulunulduğu, akademik danışman ile görüşülme süresi değişken değerlerinin artması durumunda, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı 0,544 kat azalacaktır.

F5 skoru arttıkça, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet artacaktır yani akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı artacaktır. F5 faktör skorunda bulunan;ADY6, ADY7, ADY8, ADY9, ADY10, ADY11, ADY12, ADY13, ADY14, ADY15, ADY16, ADY17, ADY18, ADY19, ADY20 değişken değerlerinin artması durumunda, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı yaklaşık 3 kat artacaktır.

F6 skoru arttıkça, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet artacaktır yani akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı artacaktır. F6 faktör skorunda bulunan;ADY1, ADY2, ADY3, ADY4, ADY5 değişken değerlerinin artması durumunda, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı yaklaşık 3,4 kat artacaktır.

F7 skoru arttıkça, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet artacaktır yani akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı artacaktır. F7 faktör skorunda bulunan; LEVAY1, LEVAY2, LEVAY3, LEVAY4, LEVAY5, LEVAY6, LEVAY7, LEVAY8, LEVAY9, LEVAY10, LEVAY11 değişken değerlerinin artması durumunda, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı yaklaşık 4,5 kat artacaktır.

F8 skoru arttıkça, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet artacaktır yani akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı artacaktır. F8 faktör skorunda bulunan; LEFY1, LEFY2, LEFY3, LEFY4, LEFY5 değişken değerlerinin artması durumunda, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı yaklaşık 11 kat artacaktır.

F9 skoru arttıkça, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet artacaktır yani akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı artacaktır. F9 faktör skorunda bulunan; AOPY1, AOPY2, AOPY3, AOPY4, AOPY5, AOPY6, AOPY7, AOPY8 değişken değerlerinin artması durumunda, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı yaklaşık 5 kat artacaktır.

F10 skoru arttıkça, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet artacak yani akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı artacaktır. F10 faktör skorunda bulunan; UIY1, UIY2, UIY3, UIY4, UIY5, UIY6 değişken değerlerinin artması durumunda, akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma olasılığı yaklaşık 5 kat artacaktır.

3.3.1 Model Parametrelerinde İstatistiksel Çıkarsama

Lojistik regresyon analizinde istatistiksel çıkarsama en çok olabilirliğin bazı özelliklerine ve olabilirlik oran testlerine bağlıdır. Tahmin edilen modele ilişkin olabilirlik oran testi sonuçları aşağıda Tablo 3.2'de verilmiştir.

Tablo 3.2. Olabilirlik Oran Testi Sonuçları

Olabilirlik Oran Ki-kare test istatiği	sd	p
431,785	10	0,000

Olabilirlik oran testi hipotezleri;

H_0: Modelde yer alan bağımsız değişkenler anlamsızdır.

H_1: En az bir bağımsız değişken anlamlıdır.

şeklindedir. Buna göre %1 önem seviyesinde, $p = 0{,}000 < \alpha = 0{,}01$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilerek, en az bir bağımsız değişkenin istatistiki olarak anlamlı olduğuna karar verilir.

3.3.2. Uyum İyiliği Testi Sonuçları

Lojistik regresyon modellerinde uyum iyiliği değerlendirmesinde sapma ve ölçeklenmiş sapma istatistiği kullanılmaktadır. Buna göre modelin sapma ölçüsü istatistikleri aşağıda Tablo 3.3.'de verilmiştir.

Tablo 3.3. Modelin Uyum İyiliğinde Sapma İstatistikleri

	Değer	sd	Değer/sd
Sapma	109,663	243	0,453
Ölçeklenmiş Sapma	209,897	243	

Yukarıda verilen değerlere göre, 243 serbestlik derecesi ile sapma $D = 109{,}667$ olarak elde edilmiştir. Buna bağlı olarak sapma $değeri/sd$ değeri 0,453 olarak elde edilmiştir. Bu değerin 1 den küçük olması uyum iyiliği için aranmaktadır. Buna göre modelin uyum iyiliğinin sağlandığı ifade edilebilir.

Uyum iyiliği, herbir gözlemde başarı ve başarısızlığın gözlenen ve beklenen olasılıklarını karşılaştıran Pearson ki-kare istatistiği ile de incelenebilir. Buna göre tahmin edilen modelin Pearson ki-kare istatistiği aşağıda tablo 3.4.'te verilmiştir.

Tablo 3.4. Modelin Uyum İyiliğinde Pearson ki-kare istatistiği

	Değer	sd	Değer/sd
Pearson Ki-Kare	126,435	243	0,522
Ölçeklenmiş Pearson Ki-Kare	242,000	243	

Tablo 3.4.'de verilen değerlere göre, 243 serbestlik derecesi ile ki-kare test istatistiği 126,279 bulunmuştur. Ki-kare/sd değeri 0,520 olup 1'i aşmamıştır. Bu durumda modelin uyumunun iyi olduğuna ve bağımsız değişkenlerdeki değişimlerin bağımlı değişkeni yeterince açıkladığına karar verilebilir.

3.3.3. Anlamlı Bulunan Parametrelerin Güven Aralıkları

Lojistik regresyon analizinde güven aralıklarını oluşturmak için Wald istatistikleri kullanılmaktadır. Buna göre parametrelerin %5 önem seviyesinde güven aralıkları aşağıda Tablo 3.5.'te verilmiştir.

Tablo 3.5. Parametrelerin Güven Aralıkları

Parametre	B	Std. Hata	%95 Wald Güven Aralıkları	
			Alt	Üst
Sabit	1,455	0,2282	1,011	1,905
F4	-0,609	0,2262	-1,056	-1,169
F5	1,092	0,2338	0,635	1,551
F6	1,219	0,2228	0,783	1,656

F7	1,516	0,2699	0,989	2,047
F8	2,400	0,2807	1,851	2,951
F9	1,579	0,2310	1,125	2,030
F10	1,662	0,2631	1,145	2,178

Güven aralığı sonuçlarına göre, katsayıların sıfırı barındırdığı sıfır hipotezi %5 önem seviyesinde reddedilir. Böylece, %5 önem seviyesinde parametreler istatistiki olarak anlamlı bulunmuştur.

Odds oranlarının %5 önem seviyesinde Wald güven aralıkları aşağıda Tablo 3.6.'da verilmiştir.

Tablo 3.6. Odds Oranlarının Güven Aralıkları

Parametre	Exp(B)	%95 Exp(B) için Wald Güven Aralıkları	
		Alt	Üst
Sabit	4,298	2,748	6,772
F4	0,542	0,348	0,844
F5	2,983	1,887	4,718
F6	3,387	2,189	5,241
F7	4,562	2,688	7,743
F8	11,032	6,364	19,126
F9	4,842	3,079	7,616
F10	5,267	3,143	8,825

Güven aralığı sonuçlarına göre, odds oranlarının sıfırı barındırdığı sıfır hipotezi %5 önem seviyesinde reddedilir. %5 önem seviyesinde odds oranları istatistiki olarak anlamlı bulunmuştur.

Model tahmini yapıldıktan sonra Akaike bilgi kriterine göre akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyeti temsil edecek en iyi model de F1, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9, F10 değişkenleri yer almış olup Fac2 değişkeni çıkarılmıştır. Modele giren değişkenlerden F1 ve F3 değişkeni Wald Ki-kare testine göre istatistiki olarak anlamsız bulunmuştur. F4 değişkeni hangi enstitüde bulunulduğu ve akademik danışmanla görüşülme süresini gösteren değişkenlerin faktör skorlarını göstermektedir. Bu değişkenleri gösteren faktör skorunda meydana gelecek bir birim değişme, diğer değişkenler sabit olma kaydıyla akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma durumunu 0,54 kat düşüreceği sonucuna ulaşılmıştır. Akademik danışmanla görüşülen sürenin uzaması öğrenci üzerinde olumsuz etki yapmaktadır. F5 ve F6 değişkenleri akademik danışmanın yeterliliği ile ilgili değişkenleri barındırmaktadır. Bu faktör yüklerinde meydana gelecek artış, diğer değişkenler sabit olma kaydıyla akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma bahsini sırasıyla yaklaşık 3 ve 3,4 kat artırmaktadır. Akademik danışmanın öğrencisiyle etkin bir iletişim içerisinde olması, öğrencisinin beklentilerini ve geleceğe dair ümitlerini paylaşması, öğrencisinin çalışmalarına olan ilgisi, öğrenciye çalışmalarda cesaret ve destek vermesi ve programını öğrencisiyle paylaşmasında meydana gelecek artışlar öğrencinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyetini 3 kat artıracaktır. Akademik danışmanın öğrencinin yaptığı çalışmalardan heyecan duyma beklentisi, öğrenciye şüpheci ve irdeleyici olmanın yollarını öğretmesi, örnek alınacak bir kişiliğe sahip olması, öğrenciye yeni ortamına uyum sağlamasında yardımcı olması, öğrencinin ders dışında kurs ve programlardan faydalanmasını sağlaması, ders ve tez konusu seçiminde yönlendirici olması öğrencinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyetini yaklaşık 3,5 kat artıracaktır. Yine akademik danışmanın öğrencisinin çalışmalarından elde ettiği sonuçları paylaşmasını istemesi, öğrencisini kendi akademik etkinliklerine katması, öğrencisinin araştırmalarını takip etmesi ve çalışma taslaklarını değerlendirmesi, öğrencisini bilimsel camiaya katılımını sağlaması, kendisini sürekli güncellemesi ve bilimsel faaliyetlerinden öğrencisini haberdar etmesi öğrencinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyetini yaklaşık olarak 3,5 kat artıracaktır. F7 değişkeni lisansüstü eğitimi veren akademisyenlerin yeterliliği değişkenin faktör yüklerini belirtmektedir. Diğer değişkenler sabitken, bu faktör yükünde meydana gelecek bir birimlik artış akademik danışmanlık hizmetlerinden memnun olma bahsini yaklaşık 4,5 kat artıracaktır. Dersi veren akademisyenlerin alanlarında yetkin kişiler olması, derslerini açık ve anlaşılabilir üslupta anlatmaları, öğrenciyi derse katmaları, eleştiriye açık olmaları, sınıfın dikkatini çekebilmeleri, öğrencilerini çalışmaya ve araştırmaya teşvik etmeleri, dersle ilgili güncel bilgiler vermeleri, dersi severek anlatmaları, öğrenciyi cesaretlendirmeleri öğrencinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyetlerini yaklaşık 4,5 kat artıracaktır. F8 değişkeni lisansüstü eğitimin fiziki yeterliliğini gösteren değişkenlerin faktör yüküdür. Diğer değişkenler sabitken bu faktör yükünde meydana gelecek bir birimlik artış memnun olma bahsini 11 kat artıracaktır. Lisansüstü dersliklerin yeterliliği, dersliklerde modern araçların varlığı, üniversitenin öğrencilere sunduğu imkanlar öğrencinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyeti 11 kat artırmaktadır. F9 değişkeni akademik olmayan personelin (enstitü görevlileri) yeterliliğini gösteren faktör yüküdür. Diğer değişkenler sabitken bu faktör yükünde meydana gelecek bir birimlik artış memnun olma bahsini yaklaşık 5 kat artıracaktır. Enstitü görevlilerinin öğrencinin sorunun çözmede yardımcı olması, öğrencilere karşı dürüst olmaları, öğrenciye saygılı davranmaları, öğrenci isteklerine hemen yanıt vermeleri, öğrenci beklentilerini anlamaları, yeterli bilgiye sahip olmaları, dostça ve sıcak bir yaklaşımda bulunmaları öğrencinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyetini yaklaşık 5 kat artıracaktır. F10 değişkeni ise üniversite imajının yeterliliği ile ilgili değişkenleri barındıran faktör yüküdür. Diğer değişkenler sabitken bu faktör yükünde meydana gelecek artış memnun olma bahsini yaklaşık 9 kat artıracaktır. Üniversitenin öğrenci üzerinde iyi bir etki bırakması, imajının diğer üniversitelerle karşılaştırıldığında daha iyi bir konumda olması, akademik eğitim açısından önemli konumda bulunması, öğrencide bağlılık etkisi uyandırması, tavsiye edilebilir olması öğrencinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyetini yaklaşık 9 kat artıracaktır.

Model bütünlüğü testi olan log olabilirlik Ki-kare test istatistiği anlamlı bulunmuş olup, model parametrelerinin sıfır olduğu sıfır hipotezi reddedilmiştir. Model uyum iyiliği ölçütü olarak sapma ve Pearson istatistikleri ele alınmış uyumdan şüphe edilecek herhangi bir durum olmadığı sonucuna varılmıştır. Güven aralıkları ile parametrelerin sıfırı barındırmadığı görülmüş istatistiki olarak anlamlı oldukları bir kez daha teyit edilmiştir.

Model sonuçlarına göre, danışmanla daha fazla görüşme, danışmanın akademik beklentilerini karşılama, eğitim alınan akademisyenlerin yeterliliği, üniversite koşullarının yeterliliği, enstitü personelinin tutum ve davranışı öğrenci memnuniyeti üzerinde etkili olduğu tespit edilmiştir.

SONUÇ

Lineer ve lineer olmayan regresyon modellerinde bağımlı değişkeninin genellikle normal dağılıma uygun olduğu varsayılmaktadır. Fakat bu varsayım her durumda geçerli olmayabilir. Bu durumlarda, bağımlı değişkenin modellenmesi için bağımlı değişken dönüşüm teknikleri kullanılarak, bağımlı değişkenin normal dağılım özelliklerini elde etmesi sağlanabilir. Ancak bu durumda en çok karşılaşılan problem, normallik, sabit varyans ve basit model formu gibi istenilen özelliklerin hepsinin tek bir dönüşüm ile elde edilebilirliğinin kesin olmamasıdır. Bu duruma çok güçlü bir alternatif olarak genelleştirilmiş lineer modeller kullanılmaktadır. Genelleştirilmiş lineer modeller, üssel dağılım ailesi üyelerinden birinin, araştırmacı tarafından bir bağımlı değişken dağılımı olarak seçimine izin veren lineer ve lineer olmayan regresyon modellerin bir bütünüdür. Genelleştirilmiş Lineer Modeller ile normallik ve sabit varyans varsayımı gerekmemektedir. Bunun yanı sıra günümüzde pek çok bilgisayar programı bu modelleri desteklediği ve kolaylıkla parametre tahminlerini bulduğu için çok yaygın bir kullanım alanı vardır.

Bu tezde genelleştirilmiş lineer modeller kullanılarak Atatürk Üniversitesinde öğrenim gören lisansüstü öğrencilerinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyeti araştırılmıştır.

Genelleştirilmiş lineer modeller analizi ile elde edilen sonuçlara göre akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet ile öğrencinin akademik danışman ile görüşme süresi arasında negatif yönlü ilişki bulunmuştur. Öğrencinin danışmanı ile görüşme süresinin uzaması, danışmanıyla arasında olumsuz sonuçlar doğurabilir ve bu durum öğrencinin memnuniyetsizliğini artıracaktır. Elde edilen sonuca göre akademik danışman ile öğrencinin birlikte geçirecekleri zamanı mümkün olduğunca verimli ve kısa süreli kullanmaları durumunda, öğrencinin memnuniyeti üzerinde olumlu bir sonuç ortaya çıkacaktır. Etkin iletişim kişiler arasındaki diyaloğun kalıcılığı ve sürdürülebilirliği açısından önem taşımaktadır. Akademik danışman ile öğrenci arasında etkili bir iletişimin varlığı öğrenci memnuniyeti üzerinde önemli bir katkı sağlayacağı aşikârdır ve nitekim analiz sonuçlarına göre öğrencinin memnuniyetinin artmasında danışmanıyla arasındaki etkili iletişim oldukça önemlidir. Öğrencinin çalışmalarıyla ilgilenilmesi ve yeni çalışmalara teşviki öğrenci memnuniyeti üzerinde artırıcı bir etkisinin olacağı muhtemeldir.

Analiz sonuçlarına göre danışmanın öğrencinin çalışmalarına olan ilgisini ve öğrenciyi akademik çalışmalara teşvikini artırması, öğrencinin memnuniyetini de artıracaktır. Danışmanın öğrencisiyle programını paylaşması öğrenci memnuniyeti üzerinde olumlu etki ortaya çıkaracaktır. Danışmanın öğrencisine şüpheci, araştırıcı ve irdeleyici olmanın yöntemlerini göstermesi ile öğrencinin memnuniyeti de artacaktır. Danışmanın örnek alınacak bir kişilikte olması öğrencinin mesleğe olan bakış açısını da iyileştirecek ve memnuniyetini artıracaktır. Danışmanın öğrencisinin derslerinin seçiminde, çalışma taslaklarının değerlendirilmesinde, tez konusunun belirlenmesinde titiz ve dikkatli davranması öğrencinin memnuniyetini artıracaktır. Danışmanın öğrencisini bilimsel camiaya katılmasında yardımcı olarak ve bilimsel faaliyetlerine öğrencisini dâhil ederek öğrenci memnuniyeti üzerine olumlu katkı sağlayacaktır. Danışmanın alanındaki gelişmeleri takibi ve kendisini bu gelişmelere uydurması öğrencinin memnuniyeti üzerine olumlu katkı sağlayacaktır.

Yapılan analiz neticesinde akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyet üzerinde en çok etkinin lisansüstü eğitimin fiziki yeterliliği olduğu belirlenmiştir. Dersliklerin yeterliliği, dersliklerde modern eğitim öğretim araçlarının ve bilgisayar, mesleki laboratuvarların varlığı öğrencilerin memnuniyetlerini de artıracaktır.

Lisansüstü eğitimi veren akademisyenlerin deste konularına hâkim olmaları, derslerini açık ve anlaşılabilir üslupta anlatmaları, öğrenciyi derse dâhil etmeleri, eleştiriye açık olmaları, sınıfın dikkatini çekebilmeleri, öğrenciyi araştırmaya teşvik etmeleri, derslerini severek anlatmaları, kendilerini güncellemelerine paralel olarak öğrenci memnuniyeti de artacaktır.

Enstitü görevlilerinin öğrenci sorunlarında bakış açılarında, öğrenciye karşı saygılı ve nazik olmalarında, öğrenci beklenti ve isteklerine yanıt verebilmelerinde samimi davranmalarında meydana gelecek iyileşmeler öğrenci memnuniyetini artıracaktır.

Üniversite koşullarının iyileşmesi ve üniversitenin akademik anlamda diğer üniversitelere karşı başarı sağlaması öğrencinin memnuniyeti üzerinde olumlu bir etki ortaya çıkarmaktadır.

Elde edilen bu sonuçlara göre, öğrencinin akademik danışmanlık hizmetlerinden memnuniyetinin artırılmasında beş önemli faktör bulunmuştur. Bunlar akademik danışman öğrenci ilişkisi, lisansüstü eğitimini fiziki koşulları, lisansüstü eğitimi veren akademisyenler, akademik olmayan personel ve üniversite imajıdır.

Akademik danışman öğrencisiyle sıcak, samimi, içten ve etkili bir diyalog kurmalıdır. Danışmanın öğrenci çalışmalarına olan ilgisi ve yönlendirmesi öğrencinin yolunu açacak öğrencinin geleceğe umutla bakmasını sağlayacaktır. Danışmanın bilimsel faaliyetlerde öğrencisine yer vermesi hiç şüphe yok ki öğrenciyi cesaretlendirecektir.

Lisansüstü eğitimde en önemli sorunlardan biri dersliklerin yetersizliğidir. Dersliklerin sayısı artırılmalıdır. Tüm alanlarda bilgisayar ve mesleki laboratuvarın varlığı araştırmacı olan lisansüstü öğrencileri için hayati öneme sahiptir. Yeni laboratuvarlar kurulmalı, mevcut olanlar ise iyileştirilmeli çağa uygun hale getirilmelidir.

Lisansüstü eğitimi veren akademisyenler, öğrencinin alanında yetkin bir birey olmasını yolunda önemli bir etkiye sahiptir. Akademisyenlerin derste konularına hâkim olmaları, derslerini anlaşılabilir üslupta anlatmaları, öğrenci isteklerine uygun şekilde karşılık vermeleri, öğrenciyi araştırmaya teşvik etmeleri öğrencinin mesleğe bakış açısını zenginleştirecektir.

Enstitü görevlileri, lisansüstü öğrenim gören öğrencilerin birebir muhatap oldukları idari personeldir. Enstitü görevlilerinin öğrenci sorunlarına karşı bakış açılarını iyileştirmeli, öğrencilere karşı dürüst ve samimi olmalıdırlar ayrıca öğrencinin beklenti ve isteklerine cevap verebilmelidirler. Karşılıklı ilişkilerin olumlu geçmesi öğrenci memnuniyetini artıracaktır.

Üniversite imajının yeterliliği, lisansüstü eğitim gören öğrencilerin akademik kariyerlerinin devamlılığı üzerinde etkili bir faktördür. Üniversitenin fiziki koşulları iyileştirilmeli, öğrencinin kendisini rahat hissedebileceği ortam oluşturulmalı, akademik açıdan üniversite kendisini geliştirmeli, üniversite tarafından öğrencilere yol gösterici eğitimler düzenlenmelidir.

KAYNAKÇA

Agresti, A., *Categorical Data Analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc, New York, (2002), 143-145.

Akay, Kadri Ulaş, *Genelleştirilmiş Lineer Modeller Yardımıyla Karma Denemelerin Analizi*, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2007.

Akdeniz, Fikri, *Olasılık ve İstatistik*, Nobel Kitapevi, Adana 2012, 200-208.

Akgül, Aziz, Çevik, Osman, *İstatistiksel Analiz Teknikleri "SPSS' de İşletme Yönetimi Uygulamaları"*, Emek Ofset, Ankara, 2003, 390.

Aytaç, Mustafa, *Matematiksel İstatistik,* Ezgi Kitapevi, Bursa 2012, 225-337.

Başar, Alaattin, Oktay, Erkan, *Uygulamalı İstatistik 1*, Erzurum Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum, 2012, 125-126.

Benghia, S., *Diagnostics for Generalized Linear Models*, (Master Thesis), Concordia University, Monreal, 2001, 34.

Bickel, P.J., Doksum, K.A., *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics,* 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, (2001).

Bozdogan, Hamparsum, *Statistical Data Mining and Knowledge Discovery*, Chapman&Hall/CRC, USA, 15-56.

Burnham, Kenneth P., Anderson, David R., *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information Theoretic Approach*, Springer, Second Edition, USA.

Cohen, Jacop, Cohen, Patricia, West, Stephen G., Aiken, Leona S., *Applied Multiple Regression/ Correlation Analysis for the Behavioral Sciences*, Third Edition, Lawrence Erlbaum Associates, 2003, London, p. 481-485.

Collett, D., *Modelling Binary Data*, London, Chapman and Hall, (1991), 65.

Deniz, Özlem, "Poisson Regresyon Analizi", *İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7, Bahar 2005/1, s.59-72.

Dey, Dipak K., Gelfand, Alan E., Peng, Fengchu, "Overdispersed generalized linear models", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 64, (1997), 93-107.

Erdem, İsmail, *Matematiksel İstatistik Problemler ve Çözümleri,* Seçkin Yayıncılık, Ankara 2012, 211-245.

Griffiths, William E., Hill, R. Carter, Pope, Peter J., "Small Sample Properties of Probit Model Estimators", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, 1987, 929.

Gujarati, Domodar N., *Temel Ekonometri*, (Çev.: Ümit Şenesen, Gülay Günlük Şenesen), Literatür Yayıncılık, Eylül 2010, 59-69.

Hamada, M., Nelder, J. A., "Generalized Linear Models for Quality Improvement Experiments", *J. of Quality Technology*, 29, (1997), 292-304.

Hair, Joseph F., Anderson, Rolph E., Tatham, Ronald L., Black, William C., *Multivariate Data Analysis*, Fifth Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1998, 280.

Hardin, J., Hilbe, J., *Generalized Linear Models and Extensions*, Stata Press, (2001).

Hardin, James W., Hilbe, Joseph M., Generalized Linear Models and Extensions, Stata Press, Second Edition,2007, 49-51.

Heeringa, Steven G., West, Brady T., Berglund, Patricia A., *Applied Survey Data Analiysis*, Cahpman & Hall, USA, 2010, 239-245.

Hosmer, David W., Lemeshow, Jr. Stanley, Sturdivant, Rodney X., *Applied Logistic Regression*, Third Edition, John Wiley & Sons, USA, 2013, 1.

Hua, Bo, Shaob, Jun, "Generalized linear model selection using R^2", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138, 2008, 3705-3712.

Nelder, A.J., Wedderburn, R.W.M.,"Generalized Linear Models", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, 135, 1972, 370-384.

Johnson, E. Dallas, *Applied Multivariate Methods For Data Analysis*, Duxbury Pres, Pacific Grove, 1998, 287.

Kalaycı, Şeref, *SPSS Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistik Teknikleri*, Asil Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Ankara, 2005, 279.

Kleinbaum, D. G., Klein, M., *Logistic Regression: A Self-Learing Text*, 2nd. Ed., Springer, USA, 2002.

Khuri, A., *Linear Models Methodology*, Chapman & Hall, USA, 2010, 483-485.

King, Gary, Zeng, Langche, "Logistic Regrssion in Rare Events Data", http://gking.harvard.edu/files/0s.pdf, (10.02.2015), 141.

Korucu, Özlem, *Genelleştirilmiş Lineer Modellerde Model Seçimi Üzerine Alternatif Bir Yaklaşım*, (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi), İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2010.

Koutsiyannis, A., *Ekonometri Kuramı*, (Çev.: Ümit Şenesen, Gülay Günlük Şenesen), İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul, 1992, 441.

Lawal, Bayo, *Categorical Data Analysis with SAS and SPSS Applications*, Lawrence Erlbaum Associates, London, 2003, 286-294.

Lee, Lung-Fei, "Specification Test for Poisson Regression Models", *International Economic Rewiew*, Vol. 27, No. 3, October, 1986, pp. 689-706.

Lewis, S.L., Montgomery, D.C., Myers, R.H., "Examples of Designed Experiments with Nonnormal Responses", *Journal of Quality Technology*, 33,(2001a), 265-278.

Lewis, S. L., Montgomery, D.C., Myers, R. H., "Confidence Interval Coverage for Designed Experiments Analyzed with GLMs", *Journal of Quality Technology*, 33, (2001b), 279-292.

Mccullagh,P., Nelder, J.A., *Generalized Linear Models*, 2nd ed., Chapman & Hall, 1989.

Mccullogh, C.E., Searle, C.E., *Generalized*, *Linear and Mixed Models*, Wiley-Interscience; 2nd ed.,2008.

McCullagh, P., Nelder, J.A., *Generlized Linear Models*, Chapman and Hall, Second Edition, 1983,125-130.

Montgomery, D.C., Elizabeth, A.P., Vining, G.G., *Doğrusal Regresyon Analizine Giriş*, (Çev.: M.Aydın Erar), Beşinci Basım, Nobel Yayıncılık, Ankara, 2013, 608-612.

Murat, Dilek, *Parasal Krizlerin İstatistiksel Analizi ve Türkiye Uygulaması*, (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa 2006.

Myers, R. H., Montgomery, D. C., Vining, G. G., *Generalized Linear Models: with Applications in Engineering and the Sciences,* 2nd ed., John Willey & Sons, New York, 2010.

Neter, John, Kutner, Michael, Nachtsheim, Christopher, Wasserman, William, *Applied Linear Statistical Models,* IRWIN, USA, Fourth Edition, 1996, 609-610.

Odds Ratio and Yule's Q, http://john-uebersax.com/stat/odds.htm, (11.02.2015)

Olsson, M., *Generalized Linear Models: An Applied Approach,* Studentlitterattur, 2002, 46-47.

Özdamar, Kazım, *Paket Programlarla İstatistiksel Veri Analizi*, Kaan Kitabevi, Eskisehir,1999, 477.

Özdinç, Özer, *Derecelendirme Sürecinde Ekonometrik Bir Değerlendirme*, Sermaye Piyasası Kurulu, Yayın no:130,1999, 111.

Rao, C.R., Toutenburg, H., *Linear Models: Least Squares and Alternatives,* 3rd. ed., Springer series in Statistics, USA, 1999.

Roussas, George, *Olasılığa Giriş*, (Çev.: Şanslı Şenol, Güzin Yüksel), Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2014, 131-132.

Sapra, S. K.," Pre-Test Estimation in Poisson Regression Model", *Applied Economics Letters*,10, 2003, 541–543.

Serper, Özer, *Uygulamalı İstatistik*, Ezgi Kitapevi, Bursa, 2010.

Schall, Robert, "Estimation in generalized linear models with random effects", *Biometrika*, 78(4), 1991, 719-727

Smith, Tony E., *Notes On Logistic Regression*, http://www.seas.upenn.edu/~ese302/extra_mtls/Logistic_Regression.pdf, (03.02.2015).

Steven, James, *Applied Multivariate Statistics For The Social Sciences*, Fourth Edition, New Jersey, 2002,146.

Stukel, Therese A., "Generalized Logistic Models", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 83, 1988, 427.

Tabachnick, Barbara G., Fidel, Linda S., *Using Multivariate Statistics*, Harper Collins College Publishers, Third Edition, New York, 1996, 581.

Taha, Hamdy A., *Yöneylem Araştırması*, (Çev.: Ş. Alp Baray, Şakir Esnaf), Altıncı basımdan çeviri, Literatür Yayıncılık, 2010.

Tatlıdil, Hüseyin, *Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz*, Ziraat Matbaacılık A.S., Ankara, 2002, 295.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	İkram Yusuf YARBAŞI
Doğum Yeri ve Tarihi	Eskişehir/1990
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	Atatürk Üniversitesi İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce
İş Deneyimi	
Çalıştığı Kurumlar	
İletişim	
E-Posta Adresi	yusufyarbasi@hotmail.com
Tarih	20.07.2015