35105

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

n-EUCLİDEAN UZAYINDA SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLER

Zülfigar AKDOĞAN

Yönetici : Yrd. Doç Dr. Abdullah MAĞDEN

Doktora Tezi

ÖZET

Bu çalışmada, n-Euclidean uzayında bir eğrinin Taylor açılımı için genel formül verildi. Ardından Frenet formüllerinin bir integral karakterizasyonu $v' = Av$ Cauchy probleminin çözümü yardımıyla elde edildi.

Ayrıca n-Euclidean uzayında sabit genişlikli eğriler için

$$\begin{aligned}
m_1' &= m_2 - f \\
m_2' &= -m_1 + \rho k_2 m_3 \\
m_3' &= -\rho k_2 m_2 + \rho k_3 m_4 \\
&\vdots \\
m_{n-1}' &= -\rho k_{n-2} m_{n-2} + \rho k_{n-1} m_n \\
m_n' &= -\rho k_{n-1} m_{n-1}
\end{aligned}$$

differensiyel denklem sistemi verilerek bu sistemin yaklaşık bir çözümü

$$m_{1,k} = \int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^n}{n!}(\widetilde{a_1}(s) m_{1,k-1}^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{a_n}(s) m_{1,k-1})\, ds + \int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^n}{n!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

biçiminde elde edildi. Bu çözüm yardımıyla sabit genişlikli bir eğrinin vektörel ifadesi verildi. Son olarak sabit genişlikli eğrilerin eğrilikleri arasında

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(s)\, ds = 0$$

bağıntısının mevcut olduğu ve k yıncı yaklaşımları keyfi seçmek suretiyle

$$a_n(\phi) = a_0(\phi) \int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

olduğu gösterildi.

SUMMARY

In this study, a genaral formula was given for Taylor expression of a curve in n-Euclidean space. Then, a integral characterization of Frenet formulae $v' = Av$ has been obtained using solution of Cauchy Problem.

Furthermore, differential equation system

$$\begin{aligned} m_1' &= m_2 - f \\ m_2' &= -m_1 + \rho k_2 m_3 \\ m_3' &= -\rho k_2 m_2 + \rho k_3 m_4 \\ &\vdots \\ m_{n-1}' &= -\rho k_{n-2} m_{n-2} + \rho k_{n-1} m_n \\ m_n' &= -\rho k_{n-1} m_{n-1} \end{aligned}$$

was given for the curves of constant breadth in n-Euclidean space and a approximate solution of the system was obtained as

$$m_{1,k} = \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^n}{n!} (\widetilde{a}_1(s) m_{1,k-1}^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{a}_n(s) m_{1,k-1})\, ds + \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^n}{n!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds.$$

Using this solution vectorial expression of the curves of constant breadth has been given. Finally it was shown that a relationship

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(s)\, ds = 0$$

between curvature of the curves of constant breadth and it was also shown that

$$a_n(\phi) = a_0(\phi) \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

choosing k^{th} iteration arbitrarily.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN'e ve tez içerisinde geçen differensiyel denklemlerle ilgili problemlerin çözümünde yardımcı olan sayın Prof. Dr. Y. C. MAMEDOV'a teşekkürlerimi arz ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

n-Euclidean uzayında $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{V_1(s), \cdots V_n(s)\}$ olmak üzere Frenet formülleri

$$V'(s) = K(s)V(s)$$

biçimindeki matris denklemi ile temsil edilir. Burada $K(s)$, (3.2) denklemindeki katsayılar matrisi olup $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilikleri ile tanımlanır. Bu eğriliklerin hesabı H.Gluck tarafından verilmiştir[4]. V.Dannon $n = 3$ için bu denklemlerin bir integral karakterizasyonunu elde etmiştir[2]. Ayrıca H.C.Chung bir eğrinin kapalılığıyla ilgili bir kriter vermiştir[1]. M.Sezer, Ö.Köse ve Ş.Nizamoğlu bunu bir dual küresel eğriye taşıyarak bu eğrinin kapalı olması için eğrinin jeodezik eğriliğinin sağlaması gereken bir kriter elde etmişlerdir[13].

Sabit genişlikli eğrilerin 3-Euclidean uzayındaki bir tanımı ve böyle bir eğrinin oluşturulması 1914 de M. Fujivara tarafından incelenmiştir[3]. 1986 yılında Ö.Köse, aynı uzayda bu tür eğrilerin bir vektörel ifadesini elde etmiştir[7]. M. Sezer E^4 küresel eğrileri için bir diferensiyel denklem ve integral karakterizasyon vermiştir[12]. 1990 yılında Abdullah Mağden 4-Euclidean uzayında bu tür eğrilerin integral karakterizasyonunu vermiştir[9].

Beş bölümden ibaret olan bu çalışmada gerekli ön bilgiler verilerek üçüncü bölümde eğrinin Taylor açılımını kullanmak suretiyle eğriliklerin geometrik anlamları üzerinde duruldu. Dördüncü bölümde ise Victor Dannon'un [2] çalışması genelleştirilerek Frenet formülleri, yani (3.2) denklem sistemi bir başlangıç değer problemine dönüştürülerek bir çözüm verilip integral karakterizasyonu elde edildi. Son bölümde de bir n-Euclidean uzayında sabit genişlikli eğriler için oluşturulan diferensiyel denklem sistemi yaklaşım metodu ile çözülerek bir integral karakterizasyonu elde edildi.

2. ÖNBİLGİLER

2.1. Tanım : A boş olmayan bir küme ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.
(A1) Her $P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$,
(A2) Her $P \in A$ ve her $\alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [5].

2.2. Tanım : U, $\Re^n$ Euclidean uzayında açık bir küme ve f fonksiyonu da bu küme üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun k. mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k- sınıfındandır denir. Her mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli iseler, f fonksiyonuna C^∞ sınıfındandır denir ve $f \in C^\infty(U, \Re)$ şeklinde yazılır [5].

2.3. Tanım : Eğer tüm $f \in C^k(\Re^m, \Re)$ için $f \circ \psi \in C^k(U, \Re)$ ise $\psi : U \to \Re^m$ dönüşümüne differensiyellenebilir ya da kısaca C^k- sınıfındandır denir. Her mertebeden differensiyellenebilen bu tür dönüşümlerin kümesi ise $C^\infty(U, \Re^m)$ ile gösterilir [5].

2.4. Tanım : A boştan farklı bir küme ve A nın alt kümelerinin bir kolleksiyonu τ olsun. τ kolleksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa; τ ya A üzerinde bir topoloji, (A, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.
(T1) $A, \emptyset \in \tau$,
(T2) Her $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$,
(T3) $A_i \in \tau, i \in I, \quad \cup_{i \in I} A_i \in \tau$ [5].

2.5. Tanım : A bir topolojik uzay olsun. A nın P ve Q gibi farklı noktaları için A da sırası ile P ve Q noktalarını içine alan U ve V açık alt kümesi $U \cap V = \phi$ olacak şekilde bulunabilirse A topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir [5].

2.6. Tanım : A ve B birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : A \to B$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve sürekli ise f ye A dan B ye bir homeomorfizm (topolojik eş yapı dönüşümü) denir. f bir homeomorfizm olduğu zaman A ile B uzaylarına da topolojik olarak denktirler veya kısaca homeomorfiktirler denir [5].

2.7. Tanım : N bir topolojik uzay olsun. N için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa N ye bir n-boyutlu topolojik manifolddur (veya kısaca topolojik n-manifold) denir.
(N1) N bir Hausdorff uzayıdır,
(N2) N nin herbir açık alt kümesi $\Re^n$ ye veya $\Re^n$ nin bir açık alt kümesine homeomorftur,
(N3) N sayılabilir çoklukta açık kümelerle örtülebilir [5].

2.8. Tanım : N bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da $\Re^n$ nin bir açık alt kümesi olsun. O zaman (2.6) tanımı gereğince U bir Ψ homeomorfizmi ile N nin bir W açık alt kümesine eşlenebilir,

$$\Psi : U \subset \Re^n \to W \subset N$$

olmak üzere (Ψ, W) ikilisine N de bir koordinat komşuluğu veya harita denir [5].

2.9. Tanım : $\Re^n$, n-boyutlu bir manifolddur. 1-boyutlu alt manifolduna bir eğri denir [5].

Eğriyi (I, α) koordinat komşuluğu ile ifade edeceğiz. Burada α, aşağıdaki gibi tanımlanır.

2.10. Tanım : Reel sayılar kümesindeki bir $I = \{t : a < t < b\}$ açık aralığında tanımlı, $\alpha : I \to \Re^n$ şeklindeki differensiyellenebilir bir fonksiyondur. α $\Re^n$ de bir eğri ve bu eğrinin $d\alpha(t)/dt$ türevi her yerde sıfırdan farklı ise, bu eğriye düzgün (regüler) eğri denir [5].

$I \subseteq \Re$ bir açık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan

$\alpha(I) \subset \Re^n$ eğrisini α ile göstereceğiz. Demek ki, α eğrisi dediğimiz zaman,

$$\alpha : I \to \Re^n, \quad I \subseteq \Re$$

olmak üzere, $\alpha(I) \subset \Re^n$ eğrisini anlayacağız. Buradaki $I \subset \Re$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi diyeceğiz.

2.11. Tanım : $I = \{t : a \leq t \leq b\}$ olmak üzere $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$ eğrisi için $\alpha(a) = \alpha(b)$ ise eğriye kapalı eğri, kendisini kesmeyen (çift noktası olmayan) eğriye de basit kapalı eğri denir [5].

2.12. Tanım : $M \subset \Re^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : \; & I \to \Re \\ & t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir [5].

$\alpha(t)$ eğrisinin $t = t_0$ noktasından $t = t$ noktasına kadar olan yay uzunluğu ise,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\frac{d\alpha}{dt}\| \, dt$$

şeklindedir.

2.13. Tanım : M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer her $s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α)'ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir [5].

2.14. Tanım : Birim hızlı bir eğriye yay parametreli bir eğri denir [5].

I, $\Re$ de herhangibir aralık ve

$$\begin{aligned} \alpha : \; & I \to \Re^n \\ & s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \ldots, \alpha_n(s)) \end{aligned}$$

yay uzunluğuyla verilmiş C^k sınıfından bir eğri olsun. Her $s \in I$ için

$$\alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{(r)}(s), \quad r < k$$

vektörleri lineer bağımsız ve

$$\alpha^{(r+1)}(s) \in Sp\{\alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{(r)}(s)\}$$

ise bu vektörlere Gramm-Schmidt Ortonormalleştirme Metodu uygulanabilir. Buna göre,

$$E_1 = \alpha'$$

ve

$$E_i = \alpha^{(i)} - \sum_{j<i} \frac{<\alpha^{(i)}, E_j>}{<E_j, E_j>} E_j, \quad 1 < i \leq r \tag{2.1}$$

olmak üzere

$$\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$$

sistemi, ortogonal sistemdir. Bu sistem normlanırsa,

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\|E_1\|} E_1 \\ &\vdots \\ V_i &= \frac{1}{\|E_i\|} E_i \\ &\vdots \\ V_r &= \frac{1}{\|E_r\|} E_r \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$$

ortonormal sistemi elde edilir [5].

2.15. Tanım : $M \subset \Re^n$ eğrisi,

$$\begin{aligned} \alpha : \ & I \rightarrow \Re^n \\ & s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \ldots, \alpha_n(s)) \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda,

$$\Psi = \{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\}$$

sistemi lineer bağımsız ve her $\alpha^{(k)}$, $k > r$ için

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$$

olmak üzere Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r-çatı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \ldots, V_r(m)\}$ sistemine ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-çatısı denir. Herbir V_i, $1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü adı verilir(bu çalışmada sadece Frenet ismini kullanacağız) [5].

2.16. Tanım : $M \subset \Re^n$ eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet r-çatısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ olsun. Bu durumda, $\alpha(s)$ seçilmiş bir nokta olmak üzere $\Re^n$ nin,

$$Sp\{V_1(m), V_2(m), \ldots, V_p(m)\}, \quad p \leq r$$

vektör uzayı ile birleşen afin alt uzayına, $\alpha(s)$ noktasında M eğrisinin p yinci oskülatör hiperdüzlemi denir [5].

$M \subset \Re^n$ eğrisinin $m \in M$ noktasında, eğer Frenet r-çatısı kurulabiliyor ise M eğrisinin farklı r tane oskülatör hiperdüzlemi mevcuttur. Bu hiperdüzlemlerden 1-inci oskülatör hiperdüzlem, teğet doğru ve r yinci oskülatör hiperdüzlem ise $m \in M$ nin bir komşuluğunda eğrinin yayıldığı en dar afin alt uzayıdır.

$\alpha = \alpha(t)$ eğrisi $\Re^n$ Euclidean uzayında basit kapalı regüler bir eğri olsun ve bu eğriyi M ile gösterelim. Bu eğri üzerinde keyfi bir A noktası ve kendi koordinatlarının sürekli fonksiyonu olan değişken bir P noktası gözönüne alalım. Eğrinin bu noktalardaki teğetleri arasındaki en kısa δ_{AP} uzunluğu, P noktasının belli bir A' noktasında M_A maksimum değerini alır. Yani $Max\delta_{AP} = \delta_{AA'} = M_A$ olur. Bu M_A maksimum değeri A noktası ve M üzerinde A nın herbir durumu için tek olarak belirlenir [3].

2.17. Tanım : Bu maksimum M_A uzaklığına M eğrisinin A noktasına göre genişliği ve A' noktasına da A noktasının eşleniği denir [7].

Eğer M eğrisi düzlemsel ise A ve A' noktalarındaki teğetler paralel olur. M eğrisinin A noktasına göre M_A uzaklığı bu iki teğet arasındaki uzaklıktır. Bu halde A'

noktasına A noktasının karşıtı, (A, A') ikilisine karşıt noktalar ve $\overline{AA'}$ kirişine de bu eğrinin A noktasına göre çapı denir [3],[7]. $\Re^n$ Euclidean uzayında basit kapalı bir M eğrisinin bir P noktasındaki 2. oskülatör hiperdüzlemi(normal hiperdüzlem), M eğrisini P noktasından başka bir tek Q noktasında kesiyorsa bu noktaya P noktasının karşıtı denir. eğer $\overline{PQ}$ kirişi bu eğrinin P ve Q noktalarındaki teğetlerine dik ise $\overline{PQ}$ kirişi çift normal olarak adlandırılır.

Diferensiyel geometri diferensiyel denklemler ile sıkı sıkıya bağlıdır Bir diferensiyel denklemi için konulmuş Cauchy problemini çeşitli metotlarla çözmek mümkündür (Matris metodu, Ardışık yaklaşım metodu, Zeydel metodu, vs.).

$A(s)$ matris fonksiyonu ve $f(s)$ vektör fonksiyonunun, $[0, L]$ aralığında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu halde,

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{dF}{ds} = &\quad A(s)F(s) + f(s) \\ F(0) = &\quad F_0 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

problemi,

$$F(s) = F_0 + \int_0^s A(t)F(t)dt + \int_0^s f(t)dt$$

integral denklemine eşdeğerdir. Bu integral denklemi için ardışık yaklaşım,

$$F_p(s) = F_0 + \int_0^s A(t)F_{p-1}(t)dt + \int_0^s f(t)dt \tag{2.3}$$

formülleri ile tanımlanır. Burada $(p = 1, 2, \ldots)$ *ve* $F_0(s)$ $(0 \leq s \leq L)$ keyfi fonksiyonlardır.

2.18. Tanım : $A(s)$ $(0 \leq s \leq L)$ ve $f(s)$ $(0 \leq s \leq L)$ sürekli olsun. Bu taktirde (2.2) probleminin $[0, L]$ aralığında tanımlanan tek bir çözümü var ve bu çözüm (2.3) yaklaşımının limitine eşittir. Yığılma hızı,

$$\|F_p(s) - F(s)\| \leq \frac{[\|A(s)\|L]^p}{p!}\|F_0 - F(s)\|$$

olur [10].

3. n-EUCLİDEAN UZAYINDA EĞRİLİKLER

3.1. Eğrilik Fonksiyonları ve Eğrilikler

3.1.1. Tanım : $M \subset \Re^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-çatısı

$$\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$$

olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} k_i : \ & I \to \Re \\ & s \to k_i(s) = < V_i'(s), V_{i+1}(s) > \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i yinci eğriliği denir [5].

3.1.2. Örnek : $M \subset \Re^3$ eğrisi, $a, b \in \Re$ birer sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : \ & \Re \to \Re^3 \\ & s \to \alpha(s) = (a\cos\tfrac{s}{c}, a\sin\tfrac{s}{c}, \tfrac{bs}{c}), \quad c = \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $(\Re, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilsin. Buna göre

$$\begin{aligned} V_1(s) &= (-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}) \\ V_2(s) &= (-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0) \\ V_3(s) &= (\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}) \end{aligned}$$

vektörleri birim vektörler olup $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ sistemi M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-çatısıdır. O halde her $s \in I$ için

$$\begin{aligned} k_1(s) &= < V_1'(s), V_2(s) > \\ k_1(s) &= < (-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0), (-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0) \\ k_1(s) &= \frac{a}{c^2} \Rightarrow k_1(s) = \frac{a}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} k_2(s) &= < V_2'(s), V_3(s) > \\ k_2(s) &= < (\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c}, 0), (\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}) \\ k_2(s) &= \frac{b}{c^2} \Rightarrow k_2(s) = \frac{b}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

şeklindedir [5].

α eğrisi boyunca Frenet vektörlerinin türevleri ile eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle verilir.

3.1.3. Teorem : $M \subset \Re^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasında i yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-çatısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ ise

$$\left.\begin{array}{rcl} V_1'(s) & = & k_1(s)V_2(s) \\ V_i'(s) & = & -k_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r \\ V_r'(s) & = & -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s) \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

biçimindedir.

$\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ Frenet r-çatısının $V_i(s)$ Frenet vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri ile ilgili eşitlikler

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{r-2}' \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. (3.1) veya aynı şey demek olan (3.2) ifadelerine n-Euclidean uzayında Frenet formülleri denir [5].

$k_i(s)$ eğriliklerinin hesabı (3.1.1) tanımından yapılabilir. Ancak eğrilikleri aşağıdaki teorem yardımıyla hesaplamanın pratik bakımından değeri vardır.

3.1.4. Teorem : $M \subset \Re^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasında Frenet r-çatısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ ve

$$E_i(s) = \alpha^{(i)}(s) - \sum_{j<i} < \alpha^{(i)}(s), V_j(s) > V_j(s), \quad 1 \le i \le r$$

olmak üzere

$$k_i(s) = \frac{\|E_{i+1}(s)\|}{\|E_i(s)\|}, \quad 1 \leq i < r$$

şeklindedir.

İspat : Frenet vektörlerini $E_i(s)$ vektörleri yardımıyla

$$V_i(s) = \frac{1}{\|E_i(s)\|} E_i(s)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.1.1.) tanımı yardımıyla

$$\begin{aligned}
k_i(s) &= < V_i'(s), V_{i+1}(s) > \\
&= < \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{\|E_i(s)\|} E_i(s)\Big), V_{i+1}(s) > \\
\Rightarrow k_i(s) &= \frac{1}{\|E_i(s)\|} < E_i'(s), V_{i+1}(s) > - \left(\frac{1}{\|E_i(s)\|}\right)' < E_i(s), V_{i+1}(s) >
\end{aligned}$$

yazılır. $E_i(s)$ ve $V_{i+1}(s)$ ortogonal olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim sıfırdır. Böylece

$$k_i(s) = \frac{1}{\|E_i(s)\|} < E_i'(s), V_{i+1}(s) >$$

olur. Diğer taraftan Gramm-Schimidt Ortogonalleme metodundan

$$\begin{aligned}
E_i(s) &= \alpha^{(i)}(s) - \sum_{j<i} < \alpha^{(i)}(s), V_j(s) > V_j(s) \\
\Rightarrow E_i'(s) &= \alpha^{(i+1)}(s) - \frac{d}{ds}\Big(\sum_{j<i} < \alpha^{(i)}(s), V_j(s) > V_j(s)\Big) V_j(s) \\
&- \sum_{j<i} < \alpha^{(i)}(s), V_j(s) > V_j'(s)
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafında $\alpha^{i+1}(s)$ nin dışındaki herbir vektör $V_1(s), V_2(s), \ldots, V_i(s)$ vektörlerinin bir lineer terkibidir ve bunların hepsi de $V_{i+1}(s)$ vektörüne ortogonaldir. Dolayısıyla

$$< E_i'(s), V_{i+1}(s) > = < \alpha^{(i+1)}, V_{i+1}(s) > \tag{3.3}$$

elde edilir. Burada

$$E_{i+1}(s) = \alpha^{(i+1)}(s) - \sum_{j<i+1} < \alpha^{(i+1)}(s), V_j(s) > V_j(s)$$

olduğundan $\alpha^{(i+1)}(s)$ nin değeri çekilir (3.3) de yerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
< E_i'(s), V_{i+1}(s) > &= < E_{i+1}(s), V_{i+1}(s) > \\
&= < E_{i+1}(s), \frac{1}{\|E_{i+1}(s)\|} E_{i+1}(s) > \\
\Rightarrow < E_i'(s), V_{i+1}(s) > &= \|E_{i+1}(s)\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$k_i(s) = \frac{1}{\|E_i(s)\|} < E_i'(s), V_{i+1}(s) >$$

eşitliği

$$k_i(s) = \frac{\|E_{i+1}(s)\|}{\|E_i(s)\|}, \quad 1 \leq i \leq r$$

şekilini alır. Bu ise teoremin ispatıdır [4],[5].

$\Re^n$ deki M eğrisinin (J, β) koordinat komşuluğu yay parametresi değilse yukarıdaki gibi $k_i(s)$ nin hesabını veren formül şu şekildedir:

3.1.5. Teorem : $M \subset \Re^n$ eğrisi herhangi bir (J, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $t \in J$ ye karşılık gelen $\beta(t)$ noktasındaki Frenet r-çatısı

$$V_1(t), V_2(t), \ldots, V_r(t)$$

ve

$$F_i(t) = \beta^{(i)}(t) - \sum_{j<i} < \beta^{(i)}(t), V_j(t) > V_j(t)$$

olmak üzere i yinci $k_i(t)$ eğriliği için

$$k_i(t) = \frac{\|F_{i+1}(t)\|}{\|F_i(t)\|\|F_1(t)\|}, \quad 1 \leq i \leq r$$

şeklindedir [4],[5].

3.1.6. Örnek :

$$
\begin{aligned}
\alpha : \ & \Re \rightarrow \Re^4 \\
& t \rightarrow \alpha(t) = (\cos pt, \sin pt, \cos qt, \sin qt), \quad p, q \in \Re, 0 < p < q
\end{aligned}
$$

olmak üzere $\Re^4$ de $M = \alpha(\Re)$ eğrisi verilsin. Bu eğri $\Re^4$ de

$$\{T = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

torunun (tor yüzeyinin) üzerindeki bir eğridir. Bu eğrinin eğriliklerini $t = 0$'a karşılık gelen $\alpha(0)$ noktasında hesap edelim.

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (-p\sin pt, p\cos pt, -q\sin qt, q\cos qt)\\
\alpha''(t) &= (-p^2\cos pt, -p^2\sin pt, -q^2\cos qt, -q^2\sin qt)\\
\alpha'''(t) &= (p^3\sin pt, -p^3\cos pt, q^3\sin qt, -q^3\cos qt)\\
\alpha^{(4)}(t) &= (p^4\cos pt, p^4\sin pt, q^4\cos qt, q^4\sin qt)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\alpha'(0) &= (0, p, 0, q)\\
\alpha''(0) &= (-p^2, 0, -q^2, 0)\\
\alpha'''(0) &= (0, -p^3, 0, -q^3)\\
\alpha^{(4)} &= (p^4, 0, q^4, 0)
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\{\alpha'(0), \alpha''(0), \alpha'''(0), \alpha^{(4)}(0)\}$ sistemi lineer bağımsızdır. Bu sisteme Gram-Schmidt metodu uygulanarak

$$\{E_1(0), E_2(0), E_3(0), E_4(0)\}$$

ortogonal sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
E_1(0) &= (0, p, 0, q)\\
E_2(0) &= (-p^2, 0, -q^2, 0)\\
E_3(0) &= \frac{pq(q^2-p^2)}{p^2+q^2}(0, q, 0, -p)\\
E_4(0) &= \frac{p^2q^2(q^2-p^2)}{p^4+q^4}(-q^2, 0, p^2, 0)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
V_1(0) &= \frac{1}{\|E_1(0)\|}E_1(0) \Rightarrow V_1(0) = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(0, p, 0, q)\\
V_2(0) &= \frac{1}{\|E_2(0)\|}E_2(0) \Rightarrow V_2(0) = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(-p^2, 0, -q^2, 0)\\
V_3(0) &= \frac{1}{\|E_3(0)\|}E_3(0) \Rightarrow V_3(0) = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(0, q, 0, -p)\\
V_4(0) &= \frac{1}{\|E_4(0)\|}E_4(0) \Rightarrow V_4(0) = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(-q^2, 0, p^2, 0)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\{V_1(0), V_2(0), V_3(0), V_4(0)\}$$

ortonormal sistemi veya başka bir deyimle $\alpha(0)$ noktasındaki Frenet 4-çatısı elde edilir. Şimdi M eğrisinin $\alpha(0)$ noktasındaki eğriliklerini hesap edelim.

$$k_i(0) = \frac{\|E_{i+1}(0)\|}{\|E_1(0)\|\|E_i(0)\|}, \quad 1 \le i < 4$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
i = 1 \text{ için } k_1(0) &= \frac{\|E_2(0)\|}{\|E_1(0)\|^2} = \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p^2+q^2} = \frac{\sqrt{1+r^4}}{1+r^2}, \quad r = \frac{p}{q} \\
i = 2 \text{ için } k_2(0) &= \frac{\|E_3(0)\|}{\|E_1(0)\|\|E_2(0)\|} = \frac{pq(q^2-p^2)}{(p^2+q^2)\sqrt{p^4+q^4}} = \frac{r(1-r^2)}{(1+r^2)\sqrt{1+r^4}} \\
i = 3 \text{ için } k_3(0) &= \frac{\|E_4(0)\|}{\|E_3(0)\|\|E_1(0)\|} = \frac{pq}{\sqrt{p^4+q^4}} = \frac{r}{\sqrt{1+r^4}}
\end{aligned}$$

bulunur [4],[5].

3.2. Eğriliklerin Geometrik Anlamları

n-Euclidean uzayında $\alpha : I \to \Re^n$ birim hızlı bir eğri olmak üzere $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $s = s_0$ noktasındaki Taylor açılımına bakarak eğriliklerin geometrik anlamları verilebilir ki bu eğrilikler oskülatör hiperdüzlemlerin değişme oranlarını ölçerler. Oskülatör hiperdüzlemleri, eğriliklerle daha yakından inceleyebiliriz. Bunun için eğrinin koordinat fonksiyonlarını ele alacağız.

$M \subset \Re^n$ eğrisi,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in C^\infty(I, \Re), \quad 1 \le i \le n$$

olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Şimdi α_i, $1 \le i \le n$ fonksiyonlarını Taylor serisine veya $s_0 = 0$ noktasındaki Maclaurin serisine açalım.

$$\alpha_i(s) \cong \alpha_i(0) + \frac{d\alpha_i}{ds}\Big|_0 \frac{s}{1!} + \frac{d^2\alpha_i}{ds^2}\Big|_0 \frac{s^2}{2!} + \frac{d^3\alpha_i}{ds^3}\Big|_0 \frac{s^3}{3!} + \cdots$$

ve buradan da

$$\alpha(s) \cong \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2!}\alpha''(0) + \frac{s^3}{3!}\alpha'''(0) + \cdots \tag{3.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\alpha(0)$ noktasındaki Frenet n-çatısı

$$\{V_1(0), V_2(0), \ldots, V_n(0)\}$$

ise

$$\alpha'(0) = V_1(0) \tag{3.5}$$

olur (Burada $' = \frac{d}{ds}$ s ye göre türevi gösterir). $a_{11} = 1, \quad a_{10} = 0$ olmak üzere (3.5) eşitliğini $\alpha'(0) = a_{11}V_1(0)$ biçiminde yeniden yazalım. Buradan

$$\alpha''(0) = a'_{11}V_1(0) + a_{11}V'_1(0)$$

veya (3.1) yardımıyla

$$\alpha''(0) = a'_{11}V_1(0) + a_{11}k_1(0)V_2(0) \tag{3.6}$$

yazılır. $a_{21} = a'_{11} = 0, a_{22} = a_{11}k_1(0), a_{20} = 0$ olmak üzere (3.5) denklemini

$$\alpha''(0) = a_{21}V_1(0) + a_{22}V_2(0) \tag{3.7}$$

biçiminde yazarız. (3.7) denkleminin türevi alınır ve (3.1) Frenet formülleri kullanılırsa $a_{31} = a'_{21} - a_{22}k_1(0), \quad a_{32} = a'_{22} + a_{21}k_1(0), \quad a_{33} = a_{22}k_2(0), \quad a_{30} = 0$ olmak üzere

$$\alpha'''(0) = a_{31}V_1(0) + a_{32}V_2(0) + a_{33}V_3(0) \tag{3.8}$$

elde edilir. Aynı şekilde (3.8) eşitliğinin türevi alınır aynı muhakemeyle, $a_{41} = a'_{31} - a_{32}k_1(0), \quad a_{42} = a'_{32} = a_{31}k_1(0) - a_{33}k_2(0), \quad a_{43} = a'_{33} + a_{32}k_2(0), \quad a_{44} = a_{33}k_3(0)$ konumu yapılırsa

$$\alpha^{(4)}(0) = a_{41}V_1(0) + a_{42}V_2(0) + a_{43}V_3(0) + a_{44}V_4(0) \tag{3.9}$$

denklemi elde edilir. Benzer muhakeme ardarda devam ettirilirse, $a_{i0} = 0$ ve $j = 1, 2, \ldots, n; \quad i \geq 2$ için

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{(i-1)(i-1)}k_{(i-1)}(0), & i = j \\ a'_{(i-1)j} + a_{(i-1)(j-1)}k_{(j-1)}(0) - a_{(i-1)(j+1)}k_j(0), & i > j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\alpha^{(n-1)}(0) = a_{(n-1)1}V_1(0) + a_{(n-1)2}V_2(0) + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}V_{(n-1)}(0) \tag{3.10}$$

ve buradan da

$$\alpha^{(n)}(0) = a_{n1}V_1(0) + a_{n2}V_2(0) + \cdots + a_{nn}V_n(0) \tag{3.11}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu değerler (3.4) de yerine yazılır ve düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned}\alpha(s) \cong\ & \alpha(0) + (\tfrac{s}{1!}a_{11} + \tfrac{s^2}{2!}a_{21} + \tfrac{s^3}{3!}a_{31} + \cdots + \tfrac{s^n}{n!}a_{n1} + \cdots)V_1(0)\\ & +(\tfrac{s^2}{2!}a_{22} + \tfrac{s^3}{3!}a_{32} + \cdots + \tfrac{s^n}{n!}a_{n2} + \cdots)V_2(0)\\ & + \cdots + (\tfrac{s^{n-1}}{(n-1)!}a_{(n-1)(n-1)} + \tfrac{s^n}{n!}a_{n(n-1)} + \cdots)V_{n-1}(0)\\ & +(\tfrac{s^n}{n!}a_{nn} + \cdots)V_n(0)\end{aligned}$$

veya başka bir ifade ile

$$\begin{aligned}\alpha(s) & \cong \alpha(0) + \left(\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{s^k}{k!}a_{k1}\right)V_1(0) + \left(\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{s^k}{k!}a_{k2}\right)V_2(0)\\ & + \cdots + \left(\textstyle\sum_{k=n}^{\infty} \tfrac{s^k}{k!}a_{kn}\right)V_n(0) \qquad (3.12)\\ & \cong \alpha(0) + \textstyle\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=l}^{\infty} \tfrac{s^k}{k!}a_{kl}\right)V_l(0)\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğrinin $s_0 = 0$ noktası komşuluğundaki (3.11) Maclaurin açılımının herbir bileşenindeki s nin en küçük kuvvetlerini ihtiva eden terimleri alalım. Buna göre

$$\alpha(s) \sim \alpha(0) + \frac{s}{1!}V_1(0) + \frac{s^2}{2!}a_{22}V_2(0) + \frac{s^3}{3!}a_{33}V_3(0) + \cdots + \frac{s^n}{n!}a_{nn}V_n(0) \tag{3.12}$$

yazılır. Buna eğrinin $s_0 = 0$ noktasındaki Frenet yaklaşımı denir [5],[11]. $U_1, U_2, \ldots, U_n$ birim vektörleri ile $V_1(0), V_2(0), \ldots, V_n(0)$ Frenet vektörlerini çakıştıralım. (3.12) açılımındaki ilk iki terim, $s \to \alpha(0) + \frac{s}{1!}V_1(0)$ teğet doğrusunu verir ki bu $\alpha(s)$ eğrisinin $\alpha(0)$ komşuluğundaki en iyi lineer yaklaşımıdır. İlk üç terim, $s \to \alpha(0) + \frac{s}{1!}V_1(0) + \frac{s^2}{2!}a_{22}V_2(0)$ parabolünü verir. Bu ise $\alpha(s)$ eğrisinin $\alpha(0)$ komşuluğundaki en iyi kuadratik yaklaşımıdır. Bu parabol V_1V_2-düzleminde bulunur. Bu parabol xy-düzlemindeki $y = k_1(0)\frac{x^2}{2}$ parabolü ile aynıdır ve $\alpha(s)$ eğrisinin $s_0 = 0$ noktasındaki $k_1(0)$ eğriliği ile tam olarak belirtilir. Buna göre şu sonuç verilebilir.

3.2.1. Sonuç : Birim hızlı bir eğrinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart k_1 eğriliğinin sıfır olmasıdır.

Bu sonuç bize birinci eğriliğin, eğrinin doğrudan uzaklaşmasının bir ölçüsü olduğunu söyler. (3.12) yaklaşımındaki ilk dört terim,

$$\alpha(s) \sim \alpha(0) + \frac{s}{1!}V_1(0) + \frac{s^2}{2!}a_{22}V_2(0) + \frac{s^3}{3!}a_{33}V_3(0)$$

kübiğini verir ki bu $\alpha(s)$ eğrisinin $\alpha(0)$ komşuluğundaki en iyi kübik yaklaşımıdır. Bu kübik V_1-V_2-V_3 alt uzayında bulunur. $k_2(0)$ burulması $\alpha(s)$ eğrisinin oskülatör düzleminden ayrılmasının ölçüsüdür. $k_2(0)$ özdeş olarak sıfır ise $\alpha(s)$ eğrisi oskülatör düzlemde bulunur. $k_3(0)$ üçüncü eğriliği ise $\alpha(0)$ noktasında V_1-V_2-V_3 alt uzayına ortogonal olan $\alpha(s)$ eğrisinin hareketini kontrol eder. $k_3(0)$ eğriliği, $\alpha(s)$ eğrisinin V_1-V_2-V_3 alt uzayından ayrılmasının bir ölçüsüdür. Eğer üçüncü eğrilik özdeş olarak sıfır ise eğri V_1-V_2-V_3 alt uzayında bulunur. $k_4(0)$ eğriliği, $\alpha(s)$ eğrisinin V_1-V_2-V_3-V_4 alt uzayından ayrılmasının bir ölçüsüdür. Bu muhakeme ile $k_{n-1}(0)$ eğriliği, $\alpha(s)$ eğrisinin $(n-1)$ inci oskülatör hiper düzleminden ayrılmasının bir ölçüsüdür. $k_{n-1}(0)$ eğriliği özdeş olarak sıfır ise eğri $(n-1)$ inci oskülatör hiperdüzlemde bulunur.

4. n-EUCLİDEAN UZAYINDA FRENET FORMÜLLERİNİN İNTEGRAL KARAKTERİZASYONU

Üçüncü bölümde Frenet formülleri ifade edilmişti. Burada (3.1) denklem sistemi çözülerek bu formüllerin bir değişik biçimi integral yardımıyla verilmiştir. $K(s) = (K_{ij}(s))$ ve $i,j = 1,2,\ldots,n$ olmak üzere

$$K(s) = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2(s) & 0 & k_3(s) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n-2}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-2}(s) & 0 & k_{n-1}(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1}(s) & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} &K_{11} = 0, K_{12} = k_1, \ldots, K_{1(n-1)} = 0, K_{1n} = 0 \\ &K_{21} = -k_1, K_{22} = 0, \ldots, K_{2(n-1)} = 0, K_{2n} = 0 \\ &\vdots \\ &K_{(n-1)1} = 0, K_{(n-1)2} = 0, \ldots, K_{(n-1)(n-1)} = 0, K_{(n-1)n} = k_{n-1} \\ &K_{n1} = 0, K_{n2} = 0, \ldots, K_{n(n-1)} = -k_{n-1}, K_{nn} = 0 \end{aligned}$$

olmak üzere (3.1) Frenet formüllerini vektör formunda yazarsak

$$V_j' = \sum_{k=1}^{n} K_{jk} V_k \quad (j = 1,\ldots,n) \tag{4.1}$$

olur.

$$V_j = \begin{bmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \\ \vdots \\ v_j^n \end{bmatrix}$$

denirse (4.1) differensiyel denklem sistemi

$$v_j'^i = \sum_{k=1}^{n} K_{jk} v_k^i \quad (i,j = 1,2,\ldots,n)$$

olur. Bu differensiyel denklem sisteminden görüldüğü gibi $v_j^1, v_j^2, \ldots, v_j^n$ bilinmeyenleri için aynı differensiyel denklem sistemi alınır. Buna göre $v_k^1 = v_k^2 = \cdots = v_k^n = v_k$ olmak üzere (4.1) denklem sistemi

$$v_j' = \sum_{k=1}^{n} K_{jk} v_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.2}$$

olarak yazılır. Buradan

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

denirse (4.2) differensiyel denklem sistemi

$$v'(s) = K(s)v(s) \tag{4.3}$$

şeklinde yazılır. Kabul edelimki

$$v_i(0) = v_i^0 \tag{4.4}$$

olsun. Burada v_i^0 $(i = 0, 1, \ldots, n)$ başlangıç değeri olarak alınan keyfi sabitlerdir.

4.1. Teorem : Kabul edelim ki $k_i(s)$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ fonksiyonları $[0, L]$ kapalı aralığında süreklidirler. Bu taktirde sırasıyla eğrilikleri $k_1, \ldots, k_{n-1}$ fonksiyonları ile verilen s yay uzunluklu uygun dönüşümlerle belirlenen bir eğrinin bir tek $\alpha(s)$ yayı vardır ve

$$v(s) = e^{\int_0^s K(t)\,dt} v^0 \tag{4.5}$$

eşitliği yazılır. Burada $B(s) = \int_0^s K(t)\,dt$ olmak üzere

$$B(s) = \begin{bmatrix} 0 & \int_0^s k_1(t)\,dt & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\int_0^s k_1(t)\,dt & 0 & \int_0^s k_2(t)\,dt & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\int_0^s k_2(t)\,dt & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \int_0^s k_{(n-2)}(t)\,dt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \int_0^s k_{(n-1)}(t)\,dt \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\int_0^s k_{(n-1)}(t)\,dt & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$e^B = I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{n!}B^n + \cdots \tag{4.6}$$

yazılabilir (Burada I birim matristir).

İspat : $k_i(s)$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad 0 \leq s \leq L)$ fonsiyonları sürekli olduklarından (4.3) ve (4.4) Cauchy probleminin bir tek çözümü vardır [8],[14] ve bu çözüm (4.5) formülü ile bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Genellikle (4.3) ve (4.4) probleminin çözümü (4.5) formülü ile hesaplamak pratik olarak çoğu durumlarda mümkün olmaz. Ancak $K(s)$ matrisi özel olduğundan çözümü (4.5) formülü ile hesaplamak için aşağıdaki kuralı verelim.

$$(b_0)_{ii} = 1, \quad (b_0)_{ij} = 0, \quad (b_k)_{i0} = 0, \quad (b_k)_{i(n+1)} = 0$$

ve $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ için,

$$(b_k)_{ij} = \int_0^s k_{j-1}(t)\, dt (b_{k-1})_{i(j-1)} - \int_0^s k_j(t)\, dt (b_{k-1})_{i(j+1)}$$

olmak üzere B yi

$$\mathrm{B(s)} = \begin{bmatrix} 0 & (b_1)_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (b_1)_{21} & 0 & (b_1)_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_1)_{32} & 0 & (b_1)_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b_1)_{43} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (b_1)_{(n-2)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (b_1)_{(n-1)(n-2)} & 0 & (b_1)_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (b_1)_{n(n-1)} & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yeniden yazalım. B nin yukarıdaki farklı iki gösterimini çarparsak

$$\mathrm{B}^2(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} (b_2)_{11} & 0 & (b_2)_{13} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_2)_{22} & 0 & (b_2)_{24} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (b_2)_{31} & 0 & (b_2)_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_2)_{42} & 0 & (b_2)_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (b_2)_{(n-2)(n-2)} & 0 & (b_2)_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (b_2)_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (b_2)_{n(n-1)} & 0 & (b_2)_{nn} \end{bmatrix}$$

elde edilir. B^2 ile B nin tekrar çarpımıyla

$$
\mathrm{B}^3(s) = \begin{bmatrix}
0 & (b_3)_{12} & 0 & (b_3)_{14} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
(b_3)_{21} & 0 & (b_3)_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & (b_3)_{32} & 0 & (b_3)_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & (b_3)_{43} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (b_3)_{(n-2)(n-1)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (b_3)_{(n-1)(n-2)} & 0 & (b_3)_{(n-1)n} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (b_3)_{n(n-1)} & 0
\end{bmatrix}
$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek

$$
\mathrm{B}^n(s) = \begin{bmatrix}
(b_n)_{11} & 0 & (b_n)_{13} & \cdots & 0 & (b_n)_{1(n-1)} & 0 \\
0 & (b_n)_{22} & 0 & \cdots & (b_n)_{2(n-2)} & 0 & (b_n)_{2n} \\
(b_n)_{31} & 0 & (b_n)_{33} & \cdots & 0 & (b_n)_{3(n-1)} & 0 \\
0 & (b_n)_{42} & 0 & \cdots & (b_n)_{4(n-2)} & 0 & (b_n)_{4n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & (b_n)_{(n-2)2} & 0 & \cdots & (b_n)_{(n-2)(n-2)} & 0 & (b_n)_{(n-2)n} \\
(b_n)_{(n-1)1} & 0 & (b_n)_{(n-1)3} & \cdots & 0 & (b_n)_{(n-1)(n-1)} & 0 \\
0 & (b_n)_{n2} & 0 & \cdots & (b_n)_{n(n-2)} & 0 & (b_n)_{nn}
\end{bmatrix}
$$

bulunur.

(4.6) eşitliğinin ikinci tarafındaki matrislerin toplamlarını $n \in \mathcal{Z}^+$ ve $n = 2m$ için

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= 1 + \frac{1}{2!}(b_2)_{11} + \frac{1}{4!}(b_4)_{11} + \cdots + \frac{1}{(2m)!}(b_{2m})_{11} + \cdots \\
c_{12} &= (b_1)_{12} + \frac{1}{3!}(b_3)_{12} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)!}(b_{2m-1})_{12} + \cdots \\
c_{13} &= \frac{1}{2!}(b_2)_{13} + \frac{1}{4!}(b_4)_{13} + \cdots + \frac{1}{(2m)!}(b_{2m})_{13} + \cdots \\
c_{14} &= \frac{1}{3!}(b_3)_{14} + \frac{1}{5!}(b_5)_{14} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)!}(b_{2m-1})_{14} + \cdots \\
&\vdots \\
c_{1n} &= \frac{1}{(2m-1)!}(b_{2m-1})_{1n} + \cdots \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
c_{21} = (b_1)_{21} + (b_3)_{21} + \cdots + (b_{2m-1})_{21} + \cdots
$$

$$
\begin{aligned}
c_{22} &= 1 + (b_2)_{22} + (b_4)_{22} + \cdots + (b_{2m})_{22} + \cdots \\
c_{23} &= (b_1)_{23} + (b_3)_{23} + \cdots + (b_{2m-1})_{23} + \cdots \\
c_{24} &= (b_2)_{24} + (b_4)_{24} + \cdots + (b_{2m})_{24} + \cdots \\
c_{25} &= (b_3)_{25} + (b_5)_{25} + \cdots + (b_{2m-1})_{25} + \cdots \\
c_{26} &= (b_4)_{26} + (b_6)_{26} + \cdots + (b_{2m})_{26} + \cdots \\
&\vdots \\
c_{2n} &= (b_{2m})_{2n} + \cdots \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{31} &= (b_2)_{31} + (b_4)_{31} + \cdots + (b_{2m})_{31} + \cdots \\
c_{32} &= (b_1)_{32} + (b_3)_{32} + \cdots + (b_{2m-1})_{32} + \cdots \\
c_{33} &= 1 + (b_2)_{33} + (b_4)_{33} + \cdots + (b_{2m})_{33} + \cdots \\
c_{34} &= (b_1)_{34} + (b_3)_{34} + \cdots + (b_{2m-1})_{34} + \cdots \\
c_{35} &= (b_2)_{35} + (b_4)_{35} + \cdots + (b_{2m})_{35} + \cdots \\
c_{36} &= (b_3)_{36} + (b_5)_{36} + \cdots + (b_{2m-1})_{36} + \cdots \\
&\vdots \\
c_{3n} &= (b_{2m-1})_{3n} + \cdots \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{41} &= (b_3)_{41} + (b_5)_{41} + \cdots + (b_{2m-1})_{41} + \cdots \\
c_{42} &= (b_2)_{42} + (b_4)_{42} + \cdots + (b_{2m})_{42} + \cdots \\
c_{43} &= (b_1)_{43} + (b_3)_{43} + \cdots + (b_{2m-1})_{43} + \cdots \\
c_{44} &= 1 + (b_2)_{44} + (b_4)_{44} + \cdots + (b_{2m})_{44} + \cdots \\
c_{45} &= (b_1)_{45} + (b_3)_{45} + \cdots + (b_{2m-1})_{45} + \cdots \\
c_{46} &= (b_2)_{46} + (b_4)_{46} + \cdots + (b_{2m})_{46} + \cdots \\
&\vdots \\
c_{4n} &= (b_{2m})_{4n} + \cdots \quad , \\
&\vdots \\
c_{(n-2)1} &= (b_{2m-3})_{(n-2)1} + (b_{2m-1})_{(n-2)1} + \cdots \\
c_{(n-2)2} &= (b_{2m-4})_{(n-2)2} + (b_{2m-2})_{(n-2)2} + (b_{2m})_{(n-2)2} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{(n-2)3} &= (b_{2m-5})_{(n-2)3} + (b_{2m-3})_{(n-2)3} + (b_{2m-1})_{(n-2)3} + \cdots \\
c_{(n-2)4} &= (b_{2m-6})_{(n-2)4} + (b_{2m-4})_{(n-2)4} + (b_{2m-2})_{(n-2)4} + (b_{2m})_{(n-2)4} + \cdots \\
&\vdots \\
c_{(n-2)(n-3)} &= (b_1)_{(n-2)(n-3)} + (b_3)_{(n-2)(n-3)} + \cdots + (b_{2m-1})_{(n-2)(n-3)} + \cdots \\
c_{(n-2)(n-2)} &= 1 + (b_2)_{(n-2)(n-2)} + (b_4)_{(n-2)(n-2)} + \cdots + (b_{2m})_{(n-2)(n-2)} + \cdots \\
c_{(n-2)(n-1)} &= (b_1)_{(n-2)(n-1)} + (b_3)_{(n-2)(n-1)} + \cdots + (b_{2m-1})_{(n-2)(n-1)} + \cdots \\
c_{(n-2)n} &= (b_2)_{(n-2)n} + (b_4)_{(n-2)n} + \cdots + (b_{2m})_{(n-2)n} + \cdots \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{(n-1)1} &= (b_{2m-2})_{(n-1)1} + (b_{2m})_{(n-1)1} + \cdots \\
c_{(n-1)2} &= (b_{2m-3})_{(n-1)2} + (b_{2m-1})_{(n-1)2} + \cdots \\
c_{(n-1)3} &= (b_{2m-4})_{(n-1)3} + (b_{2m-2})_{(n-1)3} + (b_{2m})_{(n-1)3} + \cdots \\
c_{(n-1)4} &= (b_{2m-5})_{(n-1)4} + (b_{2m-3})_{(n-1)4} + (b_{2m-1})_{(n-1)4} + \cdots \\
&\vdots \\
c_{(n-1)(n-2)} &= (b_1)_{(n-1)(n-2)} + (b_3)_{(n-1)(n-2)} + \cdots + (b_{2m-1})_{(n-1)(n-2)} + \cdots \\
c_{(n-1)(n-1)} &= 1 + (b_2)_{(n-1)(n-1)} + (b_4)_{(n-1)(n-1)} + \cdots + (b_{2m})_{(n-1)(n-1)} + \cdots \\
c_{(n-1)n} &= (b_1)_{(n-1)n} + (b_3)_{(n-1)n} + \cdots + (b_{2m-1})_{(n-1)n} + \cdots
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
c_{n1} &= (b_{2m-1})_{n1} + \cdots \\
c_{n2} &= (b_{2m-2})_{n2} + (b_{2m})_{n2} + \cdots \\
c_{n3} &= (b_{2m-3})_{n3} + (b_{2m-1})_{n3} + \cdots \\
c_{n4} &= (b_{2m-4})_{n4} + (b_{2m-2})_{n4} + (b_{2m})_{n4} + \cdots \\
&\vdots \\
c_{n(n-1)} &= (b_1)_{n(n-1)} + (b_3)_{n(n-1)} + \cdots + (b_{2m-1})_{n(n-1)} + \cdots \\
c_{nn} &= 1 + (b_2)_{nn} + (b_4)_{nn} + \cdots + (b_{2m})_{nn} + \cdots
\end{aligned}
$$

olmak üzere,

$$c^B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1(n-2)} & c_{1(n-1)} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2(n-2)} & c_{2(n-1)} & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3(n-2)} & c_{3(n-1)} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{(n-2)1} & c_{(n-2)2} & c_{(n-2)3} & \cdots & c_{(n-2)(n-2)} & c_{(n-2)(n-1)} & c_{(n-2)n} \\ c_{(n-1)1} & c_{(n-1)2} & c_{(n-1)3} & \cdots & c_{(n-1)(n-2)} & c_{(n-1)(n-1)} & c_{(n-1)n} \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{n(n-2)} & c_{n(n-1)} & c_{nn} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazabiliriz.

Böylece (4.5) çözümü,

$$\begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) \\ \vdots \\ v_{r-2}(s) \\ v_{r-1}(s) \\ v_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1(n-1)} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2(n-1)} & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3(n-1)} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{(n-2)1} & c_{(n-2)2} & c_{(n-2)3} & \cdots & c_{(n-2)(n-1)} & c_{(n-2)n} \\ c_{(n-1)1} & c_{(n-1)2} & c_{(n-1)3} & \cdots & c_{(n-1)(n-1)} & c_{(n-1)n} \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{n(n-1)} & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \\ \vdots \\ v_{r-2}^0 \\ v_{r-1}^0 \\ v_r^0 \end{bmatrix}$$

haline gelir. Böylece

$$\begin{aligned} v_1(s) &= v_1^0 c_{11} + v_2^0 c_{12} + \cdots + v_{n-1}^0 c_{1(n-1)} + v_n^0 c_{1n} \\ v_2(s) &= v_1^0 c_{21} + v_2^0 c_{22} + \cdots + v_{n-1}^0 c_{2(n-1)} + v_n^0 c_{2n} \\ &\vdots \\ v_{n-1}(s) &= v_1^0 c_{(n-1)1} + v_2^0 c_{(n-1)2} + \cdots + v_{n-1}^0 c_{(n-1)(n-1)} + v_n^0 c_{nn} \\ v_n(s) &= v_1^0 c_{n1} + v_2^0 c_{n2} + \cdots + v_{n-1}^0 c_{n(n-1)} + v_n^0 c_{nn} \end{aligned}$$

veya başka bir ifade ile

$$v_i(s) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

yazılır. Buradan da

$$V_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v_j$$

olur. Bu v_j değerleri (3.1) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\left.\begin{array}{rcl} V_1'(s) & = & k_2[v_1^0 c_{21} + v_2^0 c_{22} + \cdots + v_{n-1}^0 c_{2(n-1)} + v_n^0 c_{2n}] \\ V_2'(s) & = & k_1[v_1^0 c_{11} + v_2^0 c_{12} + \cdots + v_{n-1}^0 c_{1(n-1)} + v_n^0 c_{1n}] \\ & - & k_2[v_1^0 c_{31} + v_2^0 c_{32} + \cdots + v_{n-1}^0 c_{3(n-1)} + v_n^0 c_{3n}] \\ \vdots & & \\ V_n'(s) & = & k_{n-1}[v_1^0 c_{(n-1)1} + v_2^0 c_{(n-1)2} + \cdots + v_{n-1}^0 c_{(n-1)(n-1)} + v_n^0 c_{(n-1)n}] \end{array}\right\} \quad (4.7)$$

bulunur. Böylece Frenet vektörlerinin bir integral karakterizasyonu elde edilmiş olur.

v_i^0 başlangıç değerlerini keyfi seçmek suretiyle uygun çeşitli formda Frenet formülleri türetilebilir. Buna [2] nin bir genellemesi olarak bakabiliriz.

5. SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLER

$\Re^n$- Euclidean uzayında α ve α^* gibi birim hızlı C^n- sınıfından iki eğri gözönüne alalım. Bu eğrilerin $\alpha(s) = p$ ve $\alpha^*(s) = p^*$ gibi karşılıklı noktalarındaki teğetleri paralel ve zıt yönlü olsun. α^* eğrisinin bir p^* noktasında yer vektörü,

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \sum_{i=1}^{n} m_i(s)V_i(s) \tag{5.1}$$

biçiminde ifade edilir. $\alpha^*(s)$ vektörünün $\alpha(s)$ eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınırsa s^*, $\alpha^*(s)$ eğrisinin yay parametresi olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha^*}{ds} &= \frac{d\alpha^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = V_1^*\frac{ds^*}{ds} \\
&= (1 + \frac{dm_1}{ds} - m_2k_1)V_1 + (\frac{dm_2}{ds} + m_1k_1 - m_3k_2)V_2 \\
&+ (\frac{dm_3}{ds} + m_2k_2 - m_4k_3)V_3 + (\frac{dm_4}{ds} + m_3k_3 - m_5k_4)V_4 + \cdots \\
&+ (\frac{dm_{n-1}}{ds} + m_{n-2}k_{n-2} - m_nk_{n-1})V_{n-1} + (\frac{dm_n}{ds} + m_{n-1}k_{n-1})V_n
\end{aligned}$$

bulunur. $V_1^* = -V_1$ olduğundan,

$$\left.\begin{array}{l}
-\frac{ds^*}{ds} = 1 + \frac{dm_1}{ds} - m_2k_1 \\
\frac{dm_2}{ds} + m_1k_1 - m_3k_2 = 0 \\
\frac{dm_3}{ds} + m_2k_2 - m_4k_3 = 0 \\
\frac{dm_4}{ds} + m_3k_3 - m_5k_4 = 0 \\
\vdots \\
\frac{dm_{n-1}}{ds} + m_{n-2}k_{n-2} - m_nk_{n-1} = 0 \\
\frac{dm_n}{ds} + m_{n-1}k_{n-1} = 0
\end{array}\right\} \tag{5.2}$$

yazılabilir.

5.1 Tanım : α eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki teğetinin sabit bir doğrultu ile yaptığı açıya ϕ denirse, bu eğrinin $\alpha(s)$ ve $\alpha(s+\Delta s)$ noktasındaki $V_1(s)$ ve $V_1(s+\Delta s)$ teğetleri arasındaki $\Delta\phi$ açısına kontengez açısı,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}$$

değerine de $\alpha(s)$ eğrisinin eğriliği denir [5]. $\frac{d\phi}{ds} = k_1$ olduğundan (5.2) denklemleri

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dm_1}{d\phi} &= m_2 - f(\phi)\\
\frac{dm_2}{d\phi} &= -m_1 + \rho k_2 m_3\\
\frac{dm_3}{d\phi} &= -\rho k_2 m_2 + \rho k_3 m_4\\
&\vdots\\
\frac{dm_{n-1}}{d\phi} &= -\rho k_{n-2} m_{n-2} + \rho k_{n-1} m_n\\
\frac{dm_n}{d\phi} &= -\rho k_{n-1} m_{n-1}
\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $f(\phi) = \rho + \rho^*$ ve $\rho = \frac{1}{k_1}$, $\rho^* = \frac{1}{k_1^*}$ ifadeside sırasıyla α ve α^* eğrilerinin eğrilik yarıçaplarıdır. $\frac{dm_i}{d\phi} = m_i'$ denirse, (5.3) denklemleri

$$\begin{bmatrix} m_1' \\ m_2' \\ m_3' \\ \vdots \\ m_{n-2}' \\ m_{n-1}' \\ m_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \rho k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho k_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f(\phi) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki ρ, k_i fonksiyonlarının ϕ nin fonksiyonu olduğuna dikkat edilmelidir. (5.4) denklem sisteminden

$$\left.\begin{aligned}
m_1' &= m_2 - f\\
m_2' &= -m_1 + \rho k_2 m_3\\
m_3' &= -\rho k_2 m_2 + \rho k_3 m_4\\
&\vdots\\
m_{n-1}' &= -\rho k_{n-2} m_{n-2} + \rho k_{n-1} m_n\\
m_n' &= -\rho k_{n-1} m_{n-1}
\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

yazılır. (5.5) den de

$$\left.\begin{aligned}
m_2 &= h_1^{-1}(m_1' + h_0 f)\\
m_3 &= h_2^{-1}(m_2' + h_1 m_1)\\
m_4 &= h_3^{-1}(m_3' + h_2 m_2)\\
&\vdots\\
m_{n-1} &= h_{n-2}^{-1}(m_{n-2}' + h_{n-3} m_{n-3})\\
m_n &= h_{n-1}^{-1}(m_{n-1}' + h_{n-2} m_{n-2})
\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

yazılabilir. Burada $h_i^{-1} = \frac{1}{\rho k_i}$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ $h_0 = 1$ şeklindedir. (5.6) nın birinci eşitliğinden,

$$m_2' = h_1^{-1} m_1'' + (h_1^{-1})' m_1' + (h_1^{-1} f)'$$

bulunur. $a_{22} = h_1^{-1}$, $a_{21} = (h_1^{-1})'$, $A_1 = (h_1^{-1} f)'$ denirse,

$$m_2' = a_{22} m_1'' + a_{21} m_1' + A_1 \tag{5.7}$$

yazılır. (5.7) nin ikinci türevi alınırsa,

$$m_2'' = a_{22} m_1^{(3)} + (a_{22}' + a_{21}) m_1^{(2)} + a_{21}' m_1^{(1)} + A_1' \tag{5.8}$$

olur. (5.6) nın ikinci eşitliğinin türevi alınır ve (5.8) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} m_3' &= h_2^{-1} a_{22} m_1^{(3)} + [(h_2^{-1} a_{22})' + h_2^{-1} a_{21}] m_1^{(2)} \\ &+ [(h_2^{-1} a_{21})' + h_2^{-1} h_1] m_1^{(1)} + h_2^{-1} h_1 m_1 + (h_2^{-1} A_1)' \end{aligned} \tag{5.9}$$

bulunur. $a_{33} = h_2^{-1} a_{22}$, $a_{32} = (h_2^{-1} a_{22})' + h_2^{-1} a_{21}$, $a_{31} = (h_2^{-1} a_{21})' + h_2^{-1} h_1$, $a_{30} = a_{20}'$, $a_{20} = h_2^{-1} h_1$, $A_2 = (h_2^{-1} A_1)'$ konumu yapılırsa (5.9) eşitliği

$$m_3' = a_{33} m_1^{(3)} + a_{32} m_1^{(2)} + a_{31} m_1^{(1)} + a_{30} m_1 + A_2 \tag{5.10}$$

şeklinde yazılır. Yine aynı şekilde (5.6) nın üçüncü eşitliğinin türevi alınır ve (5.10) un ikinci türevi olan

$$m_3'' = a_{33} m_1^{(4)} + (a_{33}' + a_{32}) m_1^{(3)} + (a_{32}' + a_{31}) m_1^{(2)} + (a_{31}' + a_{30}) m_1^{(1)} + a_{30}' m_1 + A_2'$$

değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} m_4' &= h_3^{-1} a_{33} m_1^{(4)} + [(h_3^{-1} a_{33})' + h_3^{-1} a_{32}] m_1^{(3)} \\ &+ [(h_3^{-1} a_{32})' + h_3^{-1} a_{31} + h_3^{-1} h_2 a_{22}] m_1^{(2)} \\ &+ [(h_3^{-1} a_{31})' + h_3^{-1} a_{30} + h_3^{-1} h_2 a_{21} + h_3^{-1} h_2 h_1^{-1}] m_1^{(1)} \\ &+ (h_3^{-1} a_{30})' m_1 + (h_3^{-1} A_2)' + h_3^{-1} h_2 A_1 + h_3^{-1} h_2 h_1^{-1} f \end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. Buradan

$$a_{44} = h_3^{-1}a_{33}, \quad a_{43} = (h_3^{-1}a_{33})' + h_3^{-1}a_{32}, \quad a_{42} = (h_3^{-1}a_{32})' + h_3^{-1}a_{31} + h_3^{-1}h_2a_{22}$$
$$a_{41} = (h_3^{-1}a_{31})' + h_3^{-1}a_{30} + h_3^{-1}h_2a_{21} + h_3^{-1}h_2h_1^{-1}, \quad a_{40} = (h_3^{-1}a_{30})'$$
$$A_3 = (h_3^{-1}A_2)' + h_3^{-1}h_2A_1 + h_3^{-1}h_2h_1^{-1}f$$

denilirse (5.11) denklemi,

$$m_4' = a_{44}m_1^{(4)} + a_{43}m_1^{(3)} + a_{42}m_1^{(2)} + a_{41}m_1^{(1)} + a_{40}m_1 + A_3 \qquad (5.12)$$

olur. (5.6) nın dördüncü denkleminin türevi alınır ve (5.12) nin ikinci türevi olan

$$\begin{aligned} m_4'' &= a_{44}m_1^{(5)} + (a_{44}' + a_{43})m_1^{(4)} + (a_{43}' + a_{42})m_1^{(3)} + (a_{42}' + a_{41})m_1^{(2)} \\ &+(a_{41}' + a_{40})m_1^{(1)} + a_{40}'m_1 + A_3' \end{aligned}$$

değeri yazılırsa,

$$\begin{aligned} m_5' &= h_4^{-1}a_{44}m_1^{(5)} + [(h_4^{-1}a_{44})' + h_4^{-1}a_{43}]m_1^{(4)} \\ &+[(h_4^{-1}a_{43})' + h_4^{-1}a_{42} + h_4^{-1}h_3a_{33}]m_1^{(3)} \\ &+[(h_4^{-1}a_{42})' + h_4^{-1}a41 + h_4^{-1}h_3a_{32} + (h_4^{-1}h_3)'h_2^{-1}a_{22}]m_1^{(2)} \\ &+[(h_4^{-1}a_{41})' + h_4^{-1}a_{40} + h_4^{-1}h_3a_{31} + (h_4^{-1}h_3)'h_2^{-1}a_{21}]m_1^{(1)} \\ &+[(h_4^{-1}a_{40})' + h_4^{-1}h_3a_{30} + (h_4^{-1}h_3)'h_2^{-1}h_1]m_1 \\ &+(h_4^{-1}A_3)' + h_4^{-1}h_3A_2 + (h_4^{-1}h_3)'h_2^{-1}A_1 \end{aligned}$$

bulunur. a_{5i}, m_5 in türevinin, m_1 in i yinci türevine göre katsayıları ve A_4 de kalan diğer terimler olmak üzere

$$m_5' = a_{55}m_1^{(5)} + a_{54}m_1^{(4)} + a_{53}m_1^{(3)} + a_{52}m_1^{(2)} + a_{51}m_1^{(1)} + a_{50}m_1 + A_4 \qquad (5.13)$$

yazılır. Bu muhakemeye devamla m_n nin türevinin m_1 in türevlerinin kuvvetleri cinsinden yazılışı,

$$
\begin{aligned}
m_n' &= h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-1)}m_1^{(n)} + [(h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-1)})' \\
&+h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-2)}]m_1^{(n-1)} + [(h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-2)})' + h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-3)} \\
&+h_{n-1}^{-1}h_{n-2}a_{(n-2)(n-2)}]m_1^{(n-2)} + [(h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-3)})' \\
&+h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-4)} + h_{n-1}^{-1}h_{n-2}a_{(n-2)(n-3)} \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}a_{(n-3)(n-3)}]m_1^{(n-3)} \\
&+[(h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-4)})' + h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-5)} + h_{n-1}^{-1}h_{n-2}a_{(n-2)(n-4)} \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}a_{(n-3)(n-4)}]m_1^{(n-4)} \\
&+[(h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-5)})' + h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)(n-6)} + h_{n-1}^{-1}h_{n-2}a_{(n-2)(n-5)} \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}a_{(n-3)(n-5)} \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}a_{(n-5)(n-5)}]m_1^{(n-5)} \\
&+\cdots + [(h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)1})' + h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)0} + h_{n-1}^{-1}h_{n-2}a_{(n-2)1} \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}a_{(n-3)1} \\
&+(h_{(n-1)}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}a_{(n-5)1} \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}h_{n-6}h_{n-7}^{-1}a_{(n-7)1} \\
&+\cdots + (h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}\cdots h_3^{-1}h_2h_1^{-1}]m_1^{(1)} \\
&+[(h_{n-1}^{-1}a_{(n-1)0})' + h_{n-1}^{-1}h_{n-2}a_{(n-2)0} + (h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}a_{(n-3)0} \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}a_{(n-5)0} + \cdots \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}\cdots h_4h_3^{-1}a_{30}]m_1 \\
&+(h_{n-1}^{-1}A_{n-2})' + h_{n-1}^{-1}h_{n-2}A_{n-3} + (h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}A_{n-4} \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}A_{n-6} \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}h_{n-6}h_{n-7}^{-1}A_{n-8} \\
&+\cdots + (h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}\cdots h_5^{-1}h_4h_3^{-1}A_2 \\
&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}\cdots h_5^{-1}h_4h_3^{-1}h_2h_1^{-1}A_0
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

olarak elde edilir. Burada $A_0 = f$ şeklindedir. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sırayla (5.14) denklemindeki $m_1^{(n)}, m_1^{(n-1)}, \ldots, m_1', m_1$ lerin katsayıları olmak üzere (5.14) denkleminden,

$$a_0 m_1^{(n)} + a_1 m_1^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} m_1' + a_n m_1 = \widetilde{f} \tag{5.15}$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
\widetilde{f} \;&= -[(h_{n-1}^{-1} A_{n-2})' + h_{n-1}^{-1} h_{n-2} A_{n-3} + (h_{n-1}^{-1} h_{n-2})' h_{n-3}^{-1} A_{n-4} \\
&+ (h_{n-1}^{-1} h_{n-2})' h_{n-3}^{-1} h_{n-4} h_{n-5}^{-1} A_{n-6} \\
&+ (h_{n-1}^{-1} h_{n-2})' h_{n-3}^{-1} h_{n-4} h_{n-5}^{-1} h_{n-6} h_{n-7}^{-1} A_{n-8} \\
&+ \cdots + (h_{n-1}^{-1} h_{n-2})' h_{n-3}^{-1} h_{n-4} h_{n-5}^{-1} \cdots h_5^{-1} h_4 h_3^{-1} A_2 \\
&+ (h_{n-1}^{-1} h_{n-2})' h_{n-3}^{-1} h_{n-4} h_{n-5}^{-1} \cdots h_5^{-1} h_4 h_3^{-1} h_2 h_1^{-1} A_0]
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\widetilde{a}_i = -\frac{a_i}{a_0}, (i = 1, 2, \ldots, n)$ olmak üzere (5.15) denklemi

$$m_1^{(n)} = \widetilde{a}_1 m_1^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{a}_n m_1 + \frac{\widetilde{f}(\phi)}{a_0(\phi)}$$

şeklinde yazılır. Ardarda integral almak suretiyle,

$$\begin{aligned}
m_1^{(n-1)} &= \int_0^\phi (\widetilde{a}_1(s) m_1^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{a}_n(s) m_1)\, ds + \int_0^\phi \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds \\
m_1^{(n-2)} &= \int_0^\phi (\phi - s)(\widetilde{a}_1(s) m_1^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{a}_n(s) m_1)\, ds + \int_0^\phi (\phi - s) \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds \\
m_1^{(n-3)} &= \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^2}{2!} (\widetilde{a}_1(s) m_1^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{a}_n(s) m_1)\, ds + \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^2}{2!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds \\
&\vdots \\
m_1 &= \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^n}{n!} (\widetilde{a}_1(s) m_1^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{a}_n(s) m_1)\, ds + \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^n}{n!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerden m_1 i hesaplamak mümkün değildir. Fakat yaklaşık metotla,

$$m_{1,k} = \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^n}{n!} (\widetilde{a}_1(s) m_{1,k-1}^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{a}_n(s) m_{1,k-1})\, ds + \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^n}{n!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
m_{1,k}' &= \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^{n-1}}{(n-1)!} (\widetilde{a}_1(s) m_{1,k-1}^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{a}_n(s) m_{1,k-1})\, ds + \int_0^\phi \frac{(\phi - s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds \\
&\vdots \\
m_{1,k}^{(n)} &= \widetilde{a}_1(\phi) m_{1,k-1}^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{a}_n(\phi) m_{1,k-1} + \frac{\widetilde{f}(\phi)}{a_0(\phi)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $m_{1,k}$ nın m_1'e yaklaşma hızını hesaplayalım.

$$\varepsilon_{1,k} = \|m_1 - m_{1,k}\|$$

denirse,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,k} &\le \int_0^\phi \tfrac{(\phi-s)^n}{n!}[\|\widetilde{a_1}\|\varepsilon_{1,k-1}^{(n-1)} + \cdots + \|\widetilde{a_n}\|\varepsilon_{1,k-1}]\,ds \\ &\vdots \\ \varepsilon_{1,k}^{(n-1)} &\le \int_0^\phi[\|\widetilde{a_1}\|\varepsilon_{1,k-1}^{(n-1)} + \cdots + \|\widetilde{a_n}\|\varepsilon_{1,k-1}]\,ds \\ \varepsilon_{1,k}^{(n)} &\le \|\widetilde{a_1}\|\varepsilon_{1,k-1}^{(n-1)} + \cdots + \|\widetilde{a_n}\|\varepsilon_{1,k-1} \end{aligned}$$

bulunur.

$$L_1 = max\{\|\widetilde{a_1}\|, \ldots, \|\widetilde{a_n}\|\}$$

denirse,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,k} &\le L_1 \int_0^\phi \tfrac{(\phi-s)^n}{n!}(\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{1,k-1}^{(j)})\,ds \\ \varepsilon'_{1,k} &\le L_2 \int_0^\phi \tfrac{(\phi-s)^{n-1}}{(n-1)!}(\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{1,k-1}^{(j)})\,ds \\ &\vdots \\ \varepsilon_{1,k}^{(n-1)} &\le L_{n-1} \int_0^\phi(\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{1,k-1}^{(j)})\,ds \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{1,k}^{(j)} \le \int_0^\phi [L_1 \frac{(\phi-s)^n}{n!} + \cdots + L_{n-1}] \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{1,k-1}^{(j)})\,ds$$

bulunur. Bu durumda

$$\delta_k = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{1,k}^{(j)}$$

denirse,

$$\delta_k \le \int_0^\phi [\sum_{j=0}^{n-1} L_j \frac{(\phi-s)^{n-j}}{(n-j)!}\delta_{k-1}]\,ds$$

yazılır. Burada,

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j \frac{(\phi-s)^{n-j}}{(n-j)!} \le L$$

ise

$$\delta_k \le L \int_0^\phi \delta_{k-1} ds$$

yazılır. Şimdi δ_k nın yakınsamasını ve yakınsama hızını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\delta_1 &\le L\delta_0\phi \\
\delta_2 &\le L\int_0^{\phi}\delta_1 ds \le L^2\delta_0\tfrac{\phi^2}{2!} \\
&\vdots \\
\delta_k &\le \delta_0\tfrac{(L\phi_0)^k}{k!} \quad (0\le\phi\le\phi_0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon_{1,k}^{(j)} \le \delta_0\frac{(L\phi_0)^k}{k!}$$

yazılır. Terimlerin toplamları $\delta_0\frac{(L\phi_0)^k}{k!}$ den küçük olduğundan her bir terimde küçüktür. Yani,

$$\varepsilon_{1,k}^{(j)} \le \delta_0\frac{(L\phi_0)^k}{k!}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\|m_1 - m_{1,k}\| &\le \delta_0\tfrac{(L\phi_0)^k}{k!} \\
\|m_1' - m_{1,k}'\| &\le \delta_0\tfrac{(L\phi_0)^k}{k!} \\
&\vdots \\
\|m_1^{(n-1)} - m_{1,k}\| \cdot &\le \delta_0\tfrac{(L\phi_0)^k}{k!}
\end{aligned}$$

ve

$$\varepsilon_{1,k}^{(n)} \le L_n\delta_0\frac{(L\phi_0)^k}{k!}$$

olduğundan

$$\|m_1^{(n)} - m_{1,k}^{n}\| \le L_n\delta_0\frac{(L\phi_0)^k}{k!}$$

olur. Buradan

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_{i,k}^{(j)} \le \lim_{k\to\infty}\delta_0\frac{(L\phi_0)^k}{k!}$$

ise

$$\lim_{k\to\infty} m_{1,k}^{(j)} = m_1^{(j)} \quad (\quad j=0,1,2,\cdots,n-1)$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} m_{1,k}^{(n)} = m_1^{(n)}$$

elde edilir.

$$
\left.\begin{aligned}
m_2 &= m_1' + f\\
m_3 &= h_2^{-1}(m_2' + h_1 m_1)\\
m_4 &= h_3^{-1}(m_3' + h_2 m_2)\\
&\vdots\\
m_n &= h_{n-1}^{-1}(m_{n-1}' + h_{n-2} m_{n-2})
\end{aligned}\right\} \qquad (5.16)
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{2,k} &= \varepsilon_{1,k}'\\
\varepsilon_{3,k} &= k_2^{-1}\varepsilon_{2,k}' + k_1\varepsilon_{1,k}\\
\varepsilon_{4,k} &= k_3^{-1}\varepsilon_{3,k}' + k_2\varepsilon_{2,k}\\
&\vdots\\
\varepsilon_{n,k} &= k_{n-1}^{-1}\varepsilon_{n-1,k}' + k_{n-2}\varepsilon_{n-2,k}
\end{aligned}
$$

elde edilir. m_1 in değeri bilindiğinden (5.16) dan $m_2, m_3, \ldots, m_n$ değerleri hesap edilebilir. O halde $\varepsilon_{1,k}$ nın hatası ne ise $\varepsilon_{2,k}$, $\varepsilon_{3,k}$, $\cdots, \varepsilon_{n,k}$ nında hatası $\varepsilon_{1,k}$ nı n hatasına bağlı olarak hesap edilebilir. O halde $m_{1,k}$ nın değeri $k \to \infty$ için m_1 in değerine yığılır. m_i nin (5.16) ile bulunan değerleri (5.1) de yerine yazılmak suretiyle α^* eğrisi α eğrisi ve onun invaryantları cinsinden ifade edilmiş olur.

Böylece aşağıdaki teoremi ispat etmiş oluruz.

5.2 Teorem : $k_i(s)$, $(i = 1,2,\ldots,n; 0 \le s \le L)$ fonksiyonları sıfırdan farklı ve C^∞−sınıfından sürekli fonksiyonlar olsun. Bu taktirde (5.3) diferensiyel denklem sistemi, bulunan $m_{i,k}(k = 0,1,2,\ldots)$ lar bu sistemin bir tek çözümüne aşağıdaki hızla yığılır.

$$
\|m_1^{(i)} - m_{1,k}^{(i)}\| \le L_i\delta_0\frac{(L\phi_0)^k}{k!} \quad (i = 0,1,\ldots,n; k = 0,1\ldots),
$$

$$
\|m_\ell^{(i)} - m_{\ell,k}^{(i)}\| \le L_{\ell,i}^*\delta_0\frac{(L_\ell^*\phi_0)^k}{k!} \quad (\ell = 2,3,\ldots,n).
$$

Burada L_i, L, $L_{\ell,i}^*$, L_ℓ^* ler bilinen sayılardır.

Eğer α ve α^* eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabit ise, k bir sabit olmak üzere

$$
\|\alpha^* - \alpha\|^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2 = k^2
$$

olur. Bu ifadenin ϕ değişkenine göre türevi alınırsa

$$m_1\frac{dm_1}{d\phi}+m_2\frac{dm_2}{d\phi}+\cdots+m_n\frac{dm_n}{d\phi}=0 \tag{5.17}$$

bulunur. (5.3) sistemindeki $\frac{dm_2}{d\phi}$, $\frac{dm_3}{d\phi}$, $\cdots$, $\frac{dm_n}{d\phi}$ değerleri (5.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&m_1\tfrac{dm_1}{d\phi}-m_1m_2+\rho k_2m_2m_3-\rho k_2m_2m_3+\rho k_3m_3m_4-\rho k_3m_3m_4+\cdots\\&\rho k_{n-2}m_{n-2}m_{n-1}-\rho k_{n-2}m_{n-2}m_{n-1}+\rho k_{n-1}m_{n-1}m_n-\rho k_{n-1}m_{n-1}m_n=0\end{aligned}$$

olur. Buradan da,

$$m_1(\frac{dm_1}{d\phi}-m_2)=0 \tag{5.18}$$

bulunur. Bu durumda ya $m_1=0$ ya da $\frac{dm_1}{d\phi}-m_2=0$ veya eşdeğer olarak $f(\phi)=0$ olmalıdır. $f(\phi)=0$ olması durumunda α^* eğrisi, α eğrisinin

$$\ell=m_1V_1+m_2V_2+\cdots+m_nV_n \tag{5.19}$$

sabit vektörü ile ötelenmesidir. $m_1=0$ ise (5.14) ifadesinden,

$$\left.\begin{aligned}&(h_{n-1}^{-1}A_{n-2})'+h_{n-1}^{-1}h_{n-2}A_{n-3}+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}A_{n-4}\\&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}A_{n-6}\\&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}h_{n-6}h_{n-7}^{-1}A_{n-8}\\&+\cdots+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}\cdots h_5^{-1}h_4h_3^{-1}A_2\\&+(h_{n-1}^{-1}h_{n-2})'h_{n-3}^{-1}h_{n-4}h_{n-5}^{-1}\cdots h_5^{-1}h_4h_3^{-1}h_2h_1^{-1}A_0=0\end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

olur. O halde $f(\phi)$ fonksiyonu (5.20) diferensiyel denklemini sağlayan bir fonksiyondur.

Sabit genişlikli eğri kapalı olduğundan $\alpha^*(0)=\alpha^*(2\pi)$ eşitliği vardır. Buna göre (5.1) ifadesinden,

$$\begin{aligned}\alpha^*(0)&=\alpha(0)+\textstyle\sum_{i=2}^n m_i(0)V_i(0)=\alpha^*(2\pi)\\&=\alpha(2\pi)+\textstyle\sum_{i=2}^n m_i(2\pi)V_i(2\pi)\end{aligned}$$

yazılır. Buradan $m_i(0)=m_i(2\pi)$ olur.

5.3. Sonuç : (5.5) denklem sisteminin çözümü için yaklaşım metodu ile elde edilen

$$m_{1,k}=\int_0^\phi\frac{(\phi-s)^n}{n!}(\widetilde{a_1}(s)m_{1,k-1}^{(n-1)}+\cdots+\widetilde{a_n}(s)m_{1,k-1})\,ds+\int_0^\phi\frac{(\phi-s)^n}{n!}\frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\,ds$$

eşitliğinde sıfırıncı yaklaşım olan $m_{1,0} = 0$ olarak seçersek

$$m_{1,1} = \int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^n}{n!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

bulunur. $m_{1,k}$, $k = 1$ için m_1 e yığılsın. Sabit genişlikli eğri için $m_{1,1} = 0 = m_1$ olduğundan,

$$\int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^n}{n!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds = 0 \tag{5.21}$$

bulunur.

5.4. Sonuç : $m_{1,1}$, 1-yaklaşım 1 alınırsa ($m_{1,1} = 1$)

$$m_{1,2} = \int_0^{\phi} \widetilde{a}_n(s) ds + \int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^n}{n!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

bulunur. $m_{1,k}$, $k = 2$ için m_1'e yığılsın. $m_{1,2} = m_1 = 0$ olacağından,

$$\int_0^{\phi} \widetilde{a}_n(s) ds = -\int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^n}{n!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

bulunur. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\widetilde{a}_n(\phi) = -\int_0^{\phi} \frac{n(\phi - s)^{n-1}}{n!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

ve

$$\widetilde{a}_n(\phi) = -\int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

olur. Buradan da

$$a_n(\phi) = a_0(\phi) \int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

elde edilir.

$n = 2$ için

$$\widetilde{a}_2(\phi) = -\int_0^{\phi} (\phi - s) \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds = -\frac{a_2(\phi)}{a_0(\phi)}$$

ve $a_0 = 1, a_1 = 0$ ve $a_2 = 0$ olduğundan

$$a_2(\phi) = a_0(\phi) \int_0^{\phi} (\phi - s) \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds = 0$$

bulunur.

$n = 3$ için

$$\widetilde{a_3}(\phi) = -\int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^2}{2!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds = -\frac{a_3(\phi)}{a_0(\phi)}$$

olduğundan

$$a_3(\phi) = a_0(\phi) \int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^2}{2!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

olur. Buradan da

$$(h_2^{-1})' h_1' = \int_0^{\phi} \frac{(\phi - s)^2}{2!} \frac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds$$

elde edilir.

5.5. Sonuç : $m_{1,k-1}$, $k-1$ inci yaklaşım ϕ ise

$$\begin{aligned} m_{1,k} &= \int_0^{\phi} [\widetilde{a_{n-1}}(s) + \widetilde{a_n}(s) s]\, ds + \int_0^{\phi} \tfrac{(\phi-s)^n}{n!} \tfrac{\widetilde{f}(s)}{a_0(s)}\, ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılır.

5.6. Sonuç : (5.14) ifadesinden $m_1 = 0$ için

$$m_n' = -\widetilde{f}$$

ve

$$m_n = -\int_0^{\phi} \widetilde{f}\, ds$$

olur. $m_n(0) = m_n(2\pi)$ olduğundan,

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(s)\, ds = 0$$

bulunur. Bu sabit genişlikli eğrilerin eğriliklerinin sağladığı bağıntıdır.

KAYNAKLAR

[1] CHENG-CHUNG, H., (1981), A Differential-Geometric Criterion For A Space Curve to be Closed. Proc. Amer. Math. Soc., 81(4), p 357-361

[2] DANNON, V., (1981), İntegral Characterizationc and The Theory of Curves. Proc. Amer. Math. Soc., 81(4), p 600-602.

[3] FUJİVARA, M., (1914), On Space Curve of Constant Breadth. Tohoku Math. Journal, 5, p 179-184.

[4] GLUCK, H., (1966), Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space. Proc. Amer. Math. Montly, 73, p 699-704.

[5] HACISALİHOĞLU, H. H., (1983), Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Yayınları. Math. No:2, s 174-262.

[6] KÖSE, Ö., (1984), Düzlemde Ovaller ve Sabit Genişlikli Eğrilerin Bazı Özellikleri. Doğa Bilim Dergisi, seri B, 8(2), p 119-126.

[7] KÖSE, Ö., (1986), On Space Curve of Constant Breadth. Doğa Türk Matematik Dergisi, 10(1), p 11-14.

[8] KREYSZİG, E., (1991), Differential Geometry. Dover Publications, Inc. New York, p 56.

[9] MAĞDEN, A., (1990), $\Re^4$-Uzayında Özel Eğriler ve Karakterizasyonları. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Erzurum.

[10] MAMEDOV, Y. C., (1975), Adi Diferensiyel Denklemlerin Yaklaşık Metodla Çözümü. Maarif, Bakü (Rusca).

[11] O'NEİLL, B., (1966), Elementary Differential Geometry. Academic Press, New York, p 51-66.

[12] SEZER, M.,(1989),Differential Equations And Integral Characterizations For E^4 Spherical Curves. Doğa-Tr. J. of Mathematics, 13, p 125-131.

[13] SEZER, M. ve KÖSE, Ö. ve NIZAMOĞLU, Ş., (1990), A Criterion For A Ruled Surface to be Closed. Doğa-Tr. J. of Mathematics, 14, p 39-47.

[14] ZİLL, D. G., (1993), Differential Equations With Boundary Value Problems. Pws-Kent Publishing Compny, Boston.