ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

k. MERTEBEDEN GENEL TETA FONKSİYONUNUN PERİYOTLARININ REEL KATLARINA GÖRE DEĞER DEĞİŞİMLERİ

Abdullah KAPLAN

Yönetici : Prof.Dr. Rahim OCAK

Doktora Tezi

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

k. MERTEBEDEN GENEL TETA FONKSİYONUNUN PERİYOTLARININ REEL KATLARINA GÖRE DEĞER DEĞİŞİMLERİ

Abdullah KAPLAN

Doktora Tezi

ERZURUM 1995

ÖZET

Bu çalışmada, $\mathcal{C}$ kompleks düzlem ve $\mathcal{H}$ üst yarı düzlem olarak alındı. Genelleştirilmiş teta fonksiyonu için,

$$\frac{\partial^{2n}\theta}{\partial z^{2n}} - \left(\frac{-4}{i\pi}\right)^n \frac{\partial^n \theta}{\partial \tau^n} = 0$$

denklemi elde edildi [16]. k. mertebeden genel teta fonksiyonunun periyotlarının $\frac{1}{2^r}$ katlarına göre değer değişimleri incelendi [26]. Bu çalışmalar kullanılarak, kompleks düzlemde holomorf olarak tanımladığımız,

$$\Phi(z,\tau) = exp\left(\frac{k\pi i}{12}\right) \sum_{n\in Z} exp\left\{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z\right\}$$

fonksiyonunun kısmi türevleri alınmak suretiyle, yukarıdaki denklemden bir katsayı kadar fark eden yeni,

$$\frac{\partial^{2k}\Phi}{\partial z^{2k}} - (i)^k (4\pi)^k \frac{\partial^k \Phi}{\partial \tau^k} = 0$$

kısmi diferensiyel denklemi elde edildi. Ayrıca, Φ fonksiyonunun periyot katlarından eliptik fonksiyon elde edildi. Çalışmanın esasını teşkil eden son bölümde, k. mertebeden genel teta fonksiyonunun periyotlarının reel katlarına göre değer değişimleri incelendi. Periyotların reel katlarından doğan ve yakınsak olan katsayılar dizisi yardımıyla

$$\frac{d}{dz_1} \log \varphi(z_1 + \Omega_\pi, \tau) = \frac{d}{dz_1} \log \varphi(z_1, \tau)$$

eliptik fonksiyonu kuruldu.

SUMMARY

In this study, $\mathcal{C}$ and $\mathcal{H}$ always denote complex plane and upper half plane, respectively. The equation

$$\frac{\partial^{2n}\theta}{\partial z^{2n}} - \left(\frac{-4}{i\pi}\right)^n \frac{\partial^n \theta}{\partial \tau^n} = 0$$

was obtained for a generalized theta function [16]. Further, the value changes according to the $\frac{1}{2^r}$ times of periods of the k^{th}−order general theta function were investigated [26]. Using those works, a new partial differential equation that differs by a coefficient from that of [16],

$$\frac{\partial^{2k}\Phi}{\partial z^{2k}} - (i)^k(4\pi)^k \frac{\partial^k \Phi}{\partial \tau^k} = 0$$

was constructed by computing the partial derivatives of the function

$$\Phi(z,\tau) = exp\left(\frac{k\pi i}{12}\right) \sum_{n\in\mathcal{Z}} exp\Big\{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z\Big\}$$

which we defined it in complex plane as a holomorphic one. Moreover, an elliptic function was formed by the multiples of periods of the function Φ. In final chapter which forms the basis of this work, the value changes according to the real multiples of periods of the k^{th}−order general theta function were investigated. Also, an elliptic function

$$\frac{d}{dz_1}\log\varphi(z_1 + \Omega_\pi, \tau) = \frac{d}{dz_1}\log\varphi(z_1, \tau)$$

was found by the sequence of the coefficients which arises from real multiples of periods and converges.

TEŞEKKÜR

Konunun seçilmesinde ve bu çalışmanın ortaya çıkış sürecinin her aşamasında ki katkılarından dolayı tez yöneticim sayın hocam Prof. Dr. Rahim OCAK'a ve bölüm elamanlarına teşekkürlerimi arz ederim.

Ayrıca, bu tezin yazılmasını itina ile gerçekleştiren Yrd.Doç.Dr. Bünyamin YILDIZ'a da teşekkürü bir borç bilirim.

Abdullah KAPLAN

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Genel olarak eliptik fonksiyon kurmak için, zaman zaman değişik metodlarla çeşitli fonksiyon grupları baz olarak alınmıştır. Bu fonksiyon gruplarından biri olan teta fonksiyonlarını kullanarak eliptik fonksiyonlara iki türlü klasik yaklaşım mevcuttur. Bu konuda ilk çalışmalar, Jacobi ve Weierstrass tarafından yapılmıştır. Her iki matematikçide eliptik fonksiyonlara yaklaşım için kendilerine ait olan, sırasıyla teta ve sigma yarı eliptik fonksiyonlarını kullanmışlardır. Buna rağmen, günümüzde Jacobi'nin $\theta-$teta ve Weierstrass'ın $\sigma-$ sigma fonksiyonlarının birbirine denkliği bilinmektedir [6]. Buna görede, 1. mertebeden genel teta fonksiyonu kullanılarak, her iki yaklaşımıda içeren yeni bir metod geliştirilmiştir [19]. Ayrıca, [26] çalışmasında Weierstrass'ın eliptik ve yarı eliptik fonksiyonlarının $\frac{1}{2^r}$ periyot katlarına göre değer değişimleri incelenmiş ve [16] çalışmasında ise, genelleştirilmiş teta fonksiyonun parçalı türevleri alınmak suretiyle

$$\frac{\partial^{2n}\theta}{\partial z^{2n}} - \left(\frac{-4}{i\pi}\right)^n \frac{\partial^n\theta}{\partial\tau^n} = 0$$

denklemi elde edilmiştir. [12]'de ise teta fonksiyonları ile oluşturulan karesel bağıntılar ve diferensiyel denklemler bulunmuştur.

Bunlara paralel olarak dört bölümden olan bu çalışmada, Giriş kısmına ayırdığımız birinci bölümde, çalışma ile ilgili kısa bir literatür özeti ve bu çalışmanın içeriği anlatılmıştır. Temel kavramlara ayırdığımız ikinci bölümde ise bu çalışma esnasında kullanılan bazı temel Tanım, Teorem ve özelliklerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp\Big\{2iz(n+\frac{\varepsilon}{2}) + i\pi\tau(n+\frac{\varepsilon}{2})^2 - i\pi\varepsilon'(n+\frac{\varepsilon}{2})\Big\}$$

serisi ile tanımlanan, 1. mertebeden genel teta fonskiyonu ve bazı özellikleri, bu seride $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ karakteristiğinin, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alınmasıyla elde edilen dört esas θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, teta fonksiyonlarının sıfır yerleri ve bu fonksiyonlarla ilgili bazı bağıntılar incelendi. Bu bağıntılar tablolarla gösterildi. Ayrıca bu bölümde, k. mertebeden genel teta fonksiyonunda tanımı yapıldı; k. mertebeden genel teta fonksiyonunun π ve $\pi\tau$ periyotlarına göre, değer değişimleri incelenerek bu fonksiyonların yarı eliptik oldukları gösterilmiştir.

Sonuncu bölüm olan dördüncü bölümün ilk kesiminde ise, $z \in \mathcal{C}, \tau \in \mathcal{H}$ ve $k, n \in \mathcal{Z}$ için kompleks düzlemde holomorf olan

$$\Phi(z,\tau) = exp\left(\frac{k\pi i}{12}\right) \sum_{n\in\mathcal{Z}} exp\left\{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z\right\}$$

fonksiyonu tanımlanarak, periyotlarının $\frac{1}{2^r}$ katlarına göre değer değişimleri incelendi ve eliptik fonksiyon teşkil edildi.

Aynı bölümün ikinci kesiminde ise, $\Phi(z,\tau)$ fonksiyonunun kısmi türevleri alınmak suretiyle,

$$\frac{\partial^{2k}\Phi}{\partial z^{2k}} - (i)^k(4\pi)^k \frac{\partial^k \Phi}{\partial \tau^k} = 0$$

şeklinde yeni bir kısmi diferensiyel denklemi elde edildi. Çalışmanın esasını teşkil eden bu bölümün son kısmında, k. mertebeden genel teta fonksiyonunun periyotlarının reel katlarına göre değer değişimleri incelendi ve periyotların reel katlarından doğan, ayrıca yakınsak olan, katsayılar dizisi yardımıyla

$$\frac{d}{dz_1} \log \varphi(z_1 + \Omega_\pi, \tau) = \frac{d}{dz_1} \log \varphi(z_1, \tau)$$

eliptik fonksiyonu elde edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1: Bir D bölgesinde tanımlı tek değerli $f(z)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. D bölgesinin her noktasında türevlenebilen $f(z)$ fonksiyonuna analitik fonksiyon denir [1].

Tanım 2.1.2: Verilen bir bölgede, kutuptan başka singüler noktası olmayan fonksiyona meromorf fonksiyon adı verilir.

Meromorf fonksiyonlar cümlesi bir cisim oluşturur. Bir meromorf fonksiyonun tanım bölgesindeki kutupları ve sıfırları sonlu sayıdadır. Meromorf fonksiyonların türevleri ve tersleri de meromorf fonksiyondur.

Tanım 2.1.3: Tüm açık kompleks düzlemde analitik olan fonksiyona tam fonksiyon denir. Bir tam fonksiyon, sonsuz noktası hariç hiç bir noktada singülerliğe sahip değildir [21].

Tanım 2.1.4: Ω, C kompleks sayılar cisminin boş olmayan bir alt cümlesi olmak üzere,

i) Ω, toplama işlemine göre bir gruptur.

ii) Ω, nın sıfırdan farklı elemanları mutlak değerce alttan sınırlıdır. Yani $w \in \Omega$ ve $w \neq 0$ ise $|w| \geq k$ olacak şekilde bir $k > 0$ reel sayısı vardır.

şartlarını sağlayan Ω cümlesine latis denir [7].

Latisler $0, 1$ ve 2 boyutlu olmak üzere, üç çeşittir.

a) Elemanı, sıfır kompleks sayısından ibaret olan latise, yani $\Omega = \{0\}$ latisine sıfır boyutlu latis veya sıfır latisi denir.

b) Elemanları, sıfırdan farklı bir kompleks sayının bütün tam katlarından ibaret olan, yani bu anlamda sıfırdan farklı bir kompleks sayı tarafından gerilen latise, 1-boyutlu latis veya basit latis denir. Bu tanıma göre $w \in C$ ve $w \neq 0$ için

$$\Omega = \{mw : m \in Z\}$$

cümlesi bir basit latistir.

c) w_1, w_2 oranları reel olmayan iki kompleks sayı olmak üzere,

$$\Omega = \{mw_1 + nw_2 : m, n \in Z\}$$

latisine 2-boyutlu latis veya çift latis denir. O halde 2-boyutlu latis, lineer bağımsız iki kompleks sayı tarafından bu anlamda gerilen bir latisdir. Ω latisini geren (w_1, w_2) çiftine, Ω latisi için bir baz denir. 2-boyutlu Ω latisinin (w_1, w_2) bazı tek değildir. $a, b, c, d \in Z$ ve $ad - bc = \pm 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} w &= aw_1 + bw_2 \\ w' &= cw_1 + dw_2 \end{aligned}$$

ise (w, w') çifti de Ω latisi için bir bazdır. Bu (w_1, w_2) ve (w, w') baz çiftlerine eşdeğer baz çiftleri denir. Eğer, $Im(\frac{w_2}{w_1}) > 0$ ise $Im(\frac{w'}{w}) > 0$ olması için $ad - bc = +1$ alınmalıdır [7]. Ω herhangi bir latis ve λ sıfırdan farklı herhangi bir kopmleks sayı ise,

$$\lambda\Omega = \{\lambda w : w \in \Omega\}$$

cümleside bir latisdir. Eğer (w_1, w_2) çifti Ω latisi için bir baz ise $(\lambda w_1, \lambda w_2)$

çiftide Ω latisi için bir bazdır. Bu Ω ve $\lambda\Omega$ latislerine benzer latisler denir. Latisler arasındaki bu benzerlik bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.1.5: Ω bir latis olmak üzere $z_1 - z_2 \in \Omega$ ise z_1 ve z_2 kopmleks sayıları Ω modülüne göre denktir denir ve bu husus

$$z_1 \equiv z_2 (mod\Omega)$$

yazılarak belirtilir [25]. Ω modülüne göre denk olma, C de bir denklik bağıntısıdır. $z \in C$ nin denklik sınıfını $\bar{z}$ ile gösterirsek,

$$\bar{z} = z + \Omega = \{z + w : \quad w \in \Omega\}$$

dır. Bu cümleye Ω modülünün bir kalan sınıfı veya bir $(mod\Omega)$ kalan sınıf denir. Ω latisinin kendisininde Ω modülünün bir kalan sınıfı olduğu açıktır. Bu kalan sınıfların $\{z + \Omega : \quad z \in C\}$ cümlesi,

$$(z_1 + \Omega) + (z_2 + \Omega) = (z_1 + z_2) + \Omega$$

olarak tanımlanan toplama işlemine göre bir gruptur.

Tanım 2.1.6: Ω bir latis olsun. Sonlu kompleks düzlemde $(mod\Omega)$ nın herhangi bir kalan sınıfının sadece bir tek elemanını ihtiva eden basit irtibatlı bölgeye Ω latisinin temel bölgesi denir. Diğer bir ifadeyle Ω latisinin temel bölgesi, $(mod\Omega)$ ya göre birbirine denk olan noktalardan sadece birini ihtiva eder. O halde sıfır latisinin her bir kalan sınıfı bir z kompleks sayısından ibaret olduğundan, sıfır latisinin temel bölgesi bütün düzlemdir. Eğer, Ω latisi, w tarafından gerilen basit latis ise, temel bölgesi, iki parelel doğru ile sınırlanan sonsuz bir şerittir. z, bu doğruların biri üzerinde ise diğer doğru $z + w$ noktalarının geometrik yeridir. Bu doğruların biri temel bölgeye dahil fakat diğeri dahil değildir. Latis çift ise, temel bölgesi, bir çok şekilde seçilebilir. Örneğin,

$$\Omega = \{mw_1 + nw_2 : \quad 0 \leq m, \quad n < 1\}$$

parelelkenarı bunlardan biridir. Bu temel bölgeye bir köşe ve bu köşeyi oluşturan iki kenar dahildir.

Tanım 2.1.7: Kompleks düzlemin bir D bölgesinde tanımlanan ve sabit olmayan analitik $f(z)$ fonksiyonu, $f(z+2w) = f(z)$ şartını sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna periyodik fonksiyon, $2w \in C$ ye de $f(z)$ nin periyodu denir. $f(z)$ periyodik fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} f(z+2w) &= f(z) \\ f(z-2w) &= f(z) \\ f(z+n2w) &= f(z), \quad (n \in Z) \end{aligned}$$

yazılabileceğinden, $2w$ periyodlarının cümlesi bir latistir. Bu latise $f(z)$ nin periyod latisi denir. $f(z)$ nin periyod latisi 1-boyutlu ise $f(z)$ ye basit periyodik fonksiyon denir. Basit periyodik fonksiyonların periyodları $n2w$ şeklindedir. $2w$, fonksiyonun esas periyodudur. Eğer, $f(z)$ periyodik fonksiyonunun periyot latisi 2-boyutlu ise, bu fonksiyona çifte periyodik fonksiyon denir. Çifte periyodik fonksiyonların periyotları $m2w_1 + n2w_2$ şeklindedir $(m, n \in Z)$. Bir periyodik fonksiyonun türevide aynı periyotlu bir periyodik fonksiyondur.

Tanım 2.1.8: Açık kompleks düzlemde meromorf olan basit periyodik fonksiyonlara dairesel yada trigonometrik fonksiyon denir.

Teorem 2.1.1: Eğer $f(z)$ ve $g(z)$, aynı periyotlu periyodik fonksiyonlar ise

$$f(z) \pm g(z), \quad f(z)g(z) \quad \text{ve} \quad \frac{f(z)}{g(z)}, \quad (g(z) \neq 0)$$

fonksiyonları da aynı periyotlarla periyodik fonksiyondurlar [6].

Tanım 2.1.9: Açık kompleks düzlemde meromorf olan çifte periyodik fonksiyonlara eliptik fonksiyon denir. Bir eliptik fonksiyonun mertebesi diye, bir periyot paralelkenarındaki kutuplarının veya sıfırlarının sayısına denir (Burada her kutup ve sıfır yeri, katlılığı kadar sayılır).

Teorem 2.1.2: $f(z)$ eliptik fonksiyonu tam ise sabittir.

İspat: $f(z)$ eliptik fonksiyonu tam ise periyot paralelkenarında hiçbir singüler noktası yoktur. Dolayısıyla $|f(z)| < K$ olacak şekilde bir K sabiti vardır. Böylece, $|f(z)| < K$ ise $f(z)$ açık kompleks düzlemde sınırlı olur ki Liouville Teoremi gereğince sabittir.

Teorem 2.1.3: $f(z)$ ve $f_1(z)$, verilen bir latiste ortak periyotlu iki eliptik fonksiyon olsun. Bu taktirde,

i) Bu iki fonksiyon, aynı kutuplara ve bu kutuplarda sırasıyla aynı esas kısımlara sahipse bu fonksiyonların farkları sabittir.

ii) Katlılıkları hesaba katılmak üzere, kutup ve sıfır yerleri aynı ise bu fonksiyonlardan biri diğerinin sıfırdan farklı bir sabit katıdır [6].

Teorem 2.1.4: Bir $f(z)$ fonksiyonunun bir kafesdeki bütün kutuplarına karşılık gelen rezidüleri toplamı sıfırdır [6].

Teorem 2.1.5: Birinci mertebeden bir eliptik fonksiyon sabittir.

İspat: $f(z)$ birinci mertebeden bir eliptik fonksiyon ise, kafesde basit bir kutbu vardır. Bu kutbu, $z = \beta$ ile gösterirsek, $f(z)$ nin β kutbundaki esas kısmı $\frac{A}{z-\beta}$ dır. Böylece, A sayısı bu kafesde $f(z)$ fonksiyonunun $z = \beta$ noktasındaki rezidüsüdür. $A \neq 0$ olduğundan bu durum Teorem 2.1.4 e ters düşer. O halde sabitten farklı birinci mertebeden eliptik fonksiyon yoktur. Yani, sabitten farklı eliptik fonksiyonun mertebesi en az 2 dir.

Teorem 2.1.6: Ortak periyotlu herhangi iki eliptik fonksiyonun toplamı, farkı, çarpımı ve bölümüde aynı periyotlu eliptik fonksiyondur [6].

Teorem 2.1.7: Bütün ortak periyotlu eliptik fonksiyonların cümlesi bir cisim oluşturur.

İspat: $f_1(z)$ ve $f_2(z)$, ortak periyotlu iki eliptik fonksiyon olsun. $f_2(z) \neq 0$ olmak üzere, meromorf ve periyodik fonksiyonların özelliklerinden,

$$f_1(z) \pm f_2(z), \quad f_1(z)f_2(z) \quad \text{ve} \quad \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

fonksiyonlarıda aynı periyotlu eliptik fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların cümlesine sabit fonksiyonları dahil edebiliriz. Çünkü, sabit fonksiyonlarda herhangi periyotlu periyodik fonksiyonlar olarak düşünülebilir. 1 ve 0 sabit fonksiyonlarını, sırasıyla çarpma ve toplama işlemlerinin özdeş elemanları olarak alabiliriz. Böylece ortak periyotlu eliptik fonksiyonlar bir cisim teşkil ederler.

Tanım 2.1.10: $f(z)$ meromorf fonksiyonu,

$$f(z + 2w_1) = K_1 f(z)$$

$$f(z + 2w_2) = K_2 f(z)$$

şartlarını sağlıyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna ikinci çeşit eliptik fonksiyon denir. Burada, K_1 ve K_2 sabitleri z den bağımsız olup Ω ya bağlıdırlar.

Tanım 2.1.11: $g(z)$ meromorf fonksiyonu,

$$g(z+2w_1) = e^{az+b}g(z)$$

$$g(z+2w_2) = e^{cz+d}g(z)$$

şartlarını sağlıyorsa, $g(z)$ fonksiyonuna üçüncü çeşit eliptik fonksiyon denir. Burada, a,b,c,d sabitler, z kompleks değişken ve $\frac{2w_2}{2w_1} \notin \mathcal{R}$ dir. İkinci ve üçüncü çeşit eliptik fonskiyonlara yarı-eliptik fonksiyonlar da denir.

Tanım 2.1.12: Reel sayılar cismi $\mathcal{R}$, kompleks sayılar cismi $\mathcal{C}$ ve Riemann küresi $\overline{\mathcal{C}}$ ile gösterilsin. $a,b,c,d \in \mathcal{C}$ ve $ad-bc \neq 0$ olmak üzere,

$$L : \bar{\mathcal{C}} \to \bar{\mathcal{C}}, \quad z \to w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

ile tanımlanan fonksiyona inhomojen lineer dönüşüm denir.

Tanım 2.1.13: $a,b,c,d \in \mathcal{C}$ için $detA = ad-bc \neq 0$ olmak üzere, $\mathcal{A}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şeklinde 2×2 matrislerinin grubu olsun. $L, \mathcal{C}^2$ den $\mathcal{C}^2$ üzerine tersi olan lineer dönüşümlerin bir grubu ise, $A \in \mathcal{A}$ için

$$L_A : \mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}^2, \quad z \to w = Az$$

şeklinde tanımlanan fonskiyona homojen lineer dönüşüm denir. Burada, Az çarpımı $z = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^2$ kolonu ile A nın matris çarpımıdır. Elemanları tamsayı ve $detA = 1$ olan homojen lineer dönüşüme, homojen modüler dönüşüm denir. Homojen modüler dönüşümler, fonksiyonlarda bileşke işlemi ile bir grup teşkil eder ki bu gruba modüler grup denir ve

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad a,b,c,d \in \mathcal{Z}, \quad detA = 1 \right\}$$

ile gösterilir. İnhomojen modüler dönüşümlerin grubu ise,

$$\bar{\Gamma} = \{\bar{A} : \quad A \in \Gamma\}$$

olarak tanımlanır. Burada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ iken

$$\bar{A} : z \longrightarrow w = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçiminde bir dönüşümdür.

Tanım 2.1.14: $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathcal{C} : \quad Im\tau > 0\}$ üst yarı düzlem ve $w_1, w_2 \in \mathcal{H}$ için $\tau = \frac{w_2}{w_1}$, $\quad Im\tau > 0$ olmak üzere, $f(\tau)$ fonksiyonu,

i) Bütün τ değerleri için genişletilmiş $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \{i\infty\}$ üst yarı düzleminde analitik ve

ii) Her $\tau \in \mathcal{H}^*$ ve $A \in \Gamma$ için

$$f(A(\tau)) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

yazılabiliyorsa, bu $f(\tau)$ fonksiyonuna k ağırlıklı modüler form denir. Eğer $k = 0$ ise bu bir modüler fonksiyon ifade eder.

3. TETA FONKSİYONLARI

3.1. Birinci Mertebeden Genel Teta Fonksiyonu

Tanım 3.1.1: $\varepsilon, \varepsilon'$ herhangi iki reel sayı olmak üzere,

$$\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp\Big\{2iz(n+\frac{\varepsilon}{2}) + i\pi\tau(n+\frac{\varepsilon}{2})^2 - i\pi\varepsilon'(n+\frac{\varepsilon}{2})\Big\} \quad (1)$$

şeklindeki düzgün yakınsak bir seri ile tanımlanan fonksiyona 1. mertebeden genel teta fonskiyonu denir [18]. Burada $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ gösterimine teta fonksiyonunun karakteristiği denir. Biz bu çalışmamızda $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ karakteristiğini

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

den biri olarak seçeceğiz. z bir kompleks sayı, τ ise üst yarı düzlemde herhangi bir noktadır. $\tau = \frac{w_2}{w_1}$ ve $Im\tau > 0$ dır. $\mathcal{C}$ kompleks düzlem, $\mathcal{H}$ üst yarı düzlem olmak üzere, (1) serisi $\mathcal{C} \times \mathcal{H}$ uzayının kompakt alt kümelerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır ve $\mathcal{C} \times \mathcal{H}$ da analitik bir fonksiyon tanımlar. (1) serisi, $q = e^{i\pi\tau}$ alınarak, q parametresine göre,

$$\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{\varepsilon}{2})^2} e^{2iz(n+\frac{\varepsilon}{2}) - i\pi\varepsilon'(n+\frac{\varepsilon}{2})} \quad (2)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $\tau = \frac{w_2}{w_1} = r + is$ ve $s > 0$ ise $|q| = e^{-\pi s} < 1$ olur.

Birinci mertebeden genel teta fonksiyonu, çoğu kez q ve τ sabit kabul edilerek, sadece z nin fonksiyonu olarak düşünülür ve $\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z)$ şeklinde gösterilir. Burada, temel periyot latisinin $(2w_1, 2w_2)$ bazı, $(\pi, \pi\tau)$ olarak alınmıştır. Şimdi birinci mertebeden genel teta fonksiyonunun bazı özellikleri üzerinde duralım. Birinci mertebeden genel teta fonksiyonunun tanımından,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+2a\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau)=\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau) \tag{3}$$

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'+2b\end{bmatrix}(z,\tau)=e^{-b\varepsilon\pi i}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau) \tag{4}$$

eşitlikleri yazılır [18]. Burada, a ve b herhangi iki tamsayıdır. $e^{-b\varepsilon\pi i}$ nin değeri, ε çift bir tamsayı ise 1, tek tamsayı ise $(-1)^b$ dir. (3) ve (4) ü birlikte düşünürsek,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+2a\\ \varepsilon'+2b\end{bmatrix}(z,\tau)=(-1)^{b\varepsilon}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau) \tag{5}$$

yazılır. Yine tanımdan,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(-z,\tau)=\theta\begin{bmatrix}-\varepsilon\\ -\varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau)$$

olduğu hemen görülür. Bu eşitlikte ε bir tamsayı ise, ε sayısının işaret değişimi eşitliği değiştirmez. Fakat ε' bir tamsayı olduğunda ε' sayısının işaret değişimi herbir terimi $e^{-i\varepsilon\varepsilon'\pi}$ kadar değiştirir. Eğer her ikiside tamsayı ise,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(-z,\tau)=(-1)^{\varepsilon\varepsilon'}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau) \tag{6}$$

olur [19]. O halde, $\varepsilon\varepsilon'$ çarpımı tek ise $\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau)$ fonksiyonu tek, $\varepsilon\varepsilon'$ çarpımı çift ise $\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau)$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

Teorem 3.1.1: α ve β reel sayılar olmak üzere,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+\beta\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau)=q^{\frac{\beta^2}{4}}e^{i\beta(z-\frac{\pi\varepsilon'}{2})}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\frac{1}{2}\beta\pi\tau,\tau) \tag{7}$$

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'-\alpha\end{bmatrix}(z,\tau)=\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\alpha\frac{\pi}{2},\tau) \tag{8}$$

dır.

İspat: (1) serisinden,

$$\begin{aligned}
\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+\beta\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2iz(n+\frac{\alpha+\beta}{2})+i\pi\tau(n+\frac{\alpha+\beta}{2})^2-i\pi\varepsilon'(n+\frac{\alpha+\beta}{2})}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2iz(n+\frac{\varepsilon}{2})}e^{iz\beta}q^{(n+\frac{\varepsilon+\beta}{2})^2}e^{-i\pi\varepsilon'(n+\frac{\varepsilon}{2})}e^{-i\pi\varepsilon'(\frac{\beta}{2})}\\
&= e^{iz\beta-i\pi\varepsilon'\frac{\beta}{2}}q^{\frac{\beta^2}{4}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2iz(n+\frac{\varepsilon}{2})+i\pi\tau(n+\frac{\varepsilon}{2})^2+i\pi\tau(n+\frac{\varepsilon}{2})\beta-i\pi\varepsilon'(n+\frac{\varepsilon}{2})}\\
&= q^{\frac{\beta^2}{4}}e^{i\beta(z-\frac{\pi\varepsilon'}{2})}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i(z+\frac{1}{2}\beta\pi\tau)(n+\frac{\varepsilon}{2})+i\pi\tau(n+\frac{\varepsilon}{2})^2-i\pi\varepsilon'(n+\frac{\varepsilon}{2})}\\
&= q^{\frac{\beta^2}{4}}e^{i\beta(z-\frac{\pi\varepsilon'}{2})}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\frac{1}{2}\beta\pi\tau,\tau)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine, (1) serisinde ε' yerine $\varepsilon'-\alpha$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'-\alpha\end{bmatrix}(z,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2iz(n+\frac{\varepsilon}{2})+i\pi\tau(n+\frac{\varepsilon}{2})^2-i\pi(\varepsilon'-\alpha)(n+\frac{\varepsilon}{2})}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2iz(n+\frac{\varepsilon}{2})+i\pi\tau(n+\frac{\varepsilon}{2})^2-i\pi\varepsilon'(n+\frac{\varepsilon}{2})+i\pi\alpha(n+\frac{\varepsilon}{2})}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i(z+\alpha\frac{\pi}{2})(n+\frac{\varepsilon}{2})+i\pi\tau(n+\frac{\varepsilon}{2})^2-i\pi\varepsilon'(n+\frac{\varepsilon}{2})}\\
&= \theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\alpha\frac{\pi}{2},\tau)
\end{aligned}$$

elde edilir. (7) eşitliğinden

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\frac{1}{2}\beta\pi\tau,\tau)=q^{-\frac{\beta^2}{4}}e^{-i\beta(z-\frac{\pi\varepsilon'}{2})}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+\beta\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau)$$

yazılır. Bu eşitlikte z yerine $z+\alpha\frac{\pi}{2}$ yazılıp, (8) eşitliğide gözönüne alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\frac{1}{2}(\alpha+\beta\tau)\pi,\tau)=q^{-\frac{\beta^2}{4}}e^{-i\beta[z-\frac{1}{2}(\varepsilon'-\alpha)\pi]}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+\beta\\ \varepsilon'-\alpha\end{bmatrix}(z,\tau) \quad (9)$$

elde edilir. Şimdi özel olarak, m,n tamsayılar olmak üzere, $\alpha=2m,\beta=2n$ ve $\varepsilon,\varepsilon'\in\mathcal{Z}$ ise (9) eşitliğinden,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+m\pi+n\pi\tau,\tau)=q^{-n^2}e^{-2in[z-\frac{1}{2}(\varepsilon'-2m)\pi]}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+2n\\ \varepsilon'-2m\end{bmatrix}(z,\tau)$$

yazılır. (5) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+m\pi+n\pi\tau,\tau)=q^{-n^2}e^{-2niz+in\pi\varepsilon'-2imn\pi}(-1)^{m\varepsilon}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau)$$

eşitliğinden,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+m\pi+n\pi\tau,\tau)=(-1)^{m\varepsilon+n\varepsilon'}q^{-n^2}e^{-2inz}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau) \qquad (10)$$

bulunur. Demek ki, birinci mertebeden genel teta fonksiyonu, çifte periyodik değildir. Bu fonksiyon, çifte periyodik olmadığından eliptik fonksiyon da değildir. Ancak, z değişkeni $m\pi+n\pi\tau$ kadar değiştiğinde fonksiyon üstlü bir çarpan kadar fark eder. Bu nedenle, teta fonksiyonları yarı eliptik fonksiyonlardır. (α,β) reel sayı çifti $(\alpha,\beta)=(1,0),(0,1),(1,1)$ olarak alınırsa, (9) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\frac{\pi}{2}) &= \theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'-1\end{bmatrix}(z)\\
\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\frac{\pi\tau}{2}) &= q^{-\frac{1}{4}}e^{iz}e^{\frac{1}{2}\varepsilon'\pi i}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+1\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z)\\
\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}) &= q^{-\frac{1}{4}}e^{iz}e^{\frac{1}{2}(\varepsilon'-1)\pi i}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+1\\ \varepsilon'-1\end{bmatrix}(z)
\end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılara, $\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z)$ fonksiyonunun yarı periyotlara göre öteleme formülleri denir.

3.2. Dört Esas Teta Fonksiyonu

Birinci mertebeden genel teta fonksiyonunda, $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}$ karakteristiğinin $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$ değerlerine karşılık gelen $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ dört esas teta fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\theta_1(z,q)=\theta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z,\tau)=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{iz(2n+1)} \qquad (11)$$

$$\theta_2(z,q) = \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{-iz(2n+1)} \tag{12}$$

$$\theta_3(z,q) = \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz} \tag{13}$$

$$\theta_4(z,q) = \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz} \tag{14}$$

Bu dört esas teta fonksiyonunun periyodik olduğunu ve ayrıca θ_1 ile θ_2 fonksiyonlarının asli periyodunun $2\pi, \theta_3$ ile θ_4 ün asli periyodunun π olduğunu yukarıdaki eşitliklerden görmek kolaydır.

Teorem 3.2.1: $\theta_1(z,q)$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \theta_1(z+\pi) &= -\theta_1(z) \\ \theta_1(z+\pi\tau) &= -q^{-1}e^{-2iz}\theta_1(z) \\ \theta_1(z+\pi+\pi\tau) &= q^{-1}e^{-2iz}\theta_1(z) \end{aligned}$$

fonkiyonel denklemlerini sağlar.

İspat: (10) bağıntısında $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alınarak ve sıra ile ($m = 1$, $n = 0$), ($m = 0, n = 1$) ve ($m = 1, n = 1$) değerleri kullanılarak sırasıyla yukarıdaki bağıntılar elde edilir. Aynı düşünceyle, (10) bağıntısından, diğer teta fonksiyonları için benzer bağıntılar bulunur. Bu bağıntılar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 1			
	$z+\pi$	$z+\pi\tau$	$z+\pi+\pi\tau$
$\theta_1(z)$	$-\theta_1(z)$	$-N\theta_1(z)$	$N\theta_1(z)$
$\theta_2(z)$	$-\theta_2(z)$	$N\theta_2(z)$	$-N\theta_2(z)$
$\theta_3(z)$	$\theta_3(z)$	$N\theta_3(z)$	$N\theta_3(z)$
$\theta_4(z)$	$\theta_4(z)$	$-N\theta_4(z)$	$-N\theta_4(z)$
$N=q^{-1}e^{-2iz}$			

Teorem 3.2.2: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ve θ_4 fonksiyonları için,

$$\begin{aligned} \theta_1(z+\frac{\pi}{2}) &= \theta_2(z) \\ \theta_1(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}) &= q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\theta_3(z) \\ \theta_1(z+\frac{\pi\tau}{2}) &= iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\theta_4(z) \end{aligned}$$

bağıntıları vardır.

İspat: (9) bağıntısında $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak alıp, (α, β) reel sayı çiftini de özel olarak $(1,0), (1,1), (0,1)$ şeklinde seçersek yukarıdaki bağıntılar sırayla elde edilir.

Tablo 2			
	$z+\frac{\pi}{2}$	$z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}$	$z+\frac{\pi\tau}{2}$
$\theta_1(z)$	$\theta_2(z)$	$M^{-1}\theta_3(z)$	$iM^{-1}\theta_4(z)$
$\theta_2(z)$	$-\theta_1(z)$	$-iM^{-1}\theta_4(z)$	$M^{-1}\theta_3(z)$
$\theta_3(z)$	$\theta_4(z)$	$iM^{-1}\theta_1(z)$	$M^{-1}\theta_2(z)$
$\theta_4(z)$	$\theta_3(z)$	$M^{-1}\theta_2(z)$	$iM^{-1}\theta_1(z)$
$M=q^{\frac{1}{4}}e^{iz}$			

Aynı düşünce ile (9) bağıntısında $\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}$ karakteristiği sıra ile $\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$, olarak alınıp, her bir karakteristik için (α,β) reel sayı çifti $(1,0)$, $(1,1)$,

$(0,1)$ şeklinde seçildiğinde yarım periyotlar için bütün esas teta fonksiyonlarının dönüşüm bağıntıları elde edilir. Bu düşünceler yukarıdaki Tablo 2 ile verilmiştir.

3.3. Teta Fonksiyonlarının Serisel İfadeleri ve Sıfır Yerleri

$$\begin{aligned}
\theta_1(z,q) &= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{iz(2n+1)}, \\
&= -i\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{iz(2n+1)}+(-1)^{-n-1}q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{-iz(2n+1)}\right\} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\left\{\frac{e^{iz(2n+1)}-e^{-iz(2n+1)}}{2i}\right\} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z
\end{aligned}$$

$$\theta_1(z,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin z - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3z + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5z - \cdots \tag{15}$$

elde edilir. Buradan, $\theta_1(z,q)$ fonksiyonunun tek ve tam fonksiyon olduğu görülür. Açık olarak, $z=0$, bir sıfır yeridir. Genel olarak, sıfır yerleri, bazı $(\pi,\pi\tau)$ olan, Ω_π periyot latisinin noktalarıdır. Yani, $z = m\pi + n\pi\tau$ veya $z \equiv 0\ (mod\Omega_\pi)$ dir.

$$\begin{aligned}
\theta_2(z,q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{iz(2n+1)}, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{iz(2n+1)}+q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{-iz(2n+1)}\right\} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\left\{\frac{e^{iz(2n+1)}+e^{-iz(2n+1)}}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \; 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z$$

$$\theta_2(z,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos z + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3z + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5z + \cdots \tag{16}$$

elde edilir. Böylece $\theta_2(z,q)$ fonksiyonunun çift ve tam fonksiyon olduğu görülür. $\theta_2(z) = \theta_1(z+\frac{\pi}{2})$ bağıntısından, $\theta_2(z,q)$ fonksiyonu için $z = \frac{\pi}{2}$ noktası sıfır yeridir. Genel olarak, bu fonksiyonun sıfır yerleri, $z = m\pi + n\pi\tau + \frac{\pi}{2}$ veya $z \equiv \frac{\pi}{2}(mod\Omega_\pi)$ noktalarıdır.

$$\begin{aligned}
\theta_3(z,q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2niz}, \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^{n^2}e^{2niz}+q^{n^2}e^{-2niz}\right\} \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\left\{\frac{e^{2niz}+e^{-2niz}}{2}\right\} \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos(2nz)
\end{aligned}$$

$$\theta_3(z,q) = 1 + 2q\cos 2z + 2q^4\cos 4z + \cdots \tag{17}$$

elde edilir. Böylece, $\theta_3(z,q)$ fonksiyonu da çift ve tam fonksiyondur. $\theta_3(z,q) = q^{\frac{1}{4}}e^{iz}\theta_1(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2})$ eşitliği gözönüne alınırsa, $\theta_3(z,q)$ fonksiyonunun sıfır yerinin $z = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}$ olduğu açıktır. Genel olarak, bu fonksiyonun sıfır yerleri, $z = m\pi + n\pi\tau + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\tau}{2}$ veya $z \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\tau}{2}(mod\Omega_\pi)$ noktalarıdır.

$$\begin{aligned}
\theta_4(z,q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}e^{2niz}, \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n q^{n^2}e^{2niz}+(-1)^{-n}q^{n^2}e^{-2niz}\right\} \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\left\{\frac{e^{2niz}+e^{-2niz}}{2}\right\} \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos(2nz)
\end{aligned}$$

$$\theta_4(z,q) = 1 - 2q\cos 2z + 2q^4\cos 4z - 2q^9\cos 6z + \cdots \tag{18}$$

elde edilir. Bu ifadeden, $\theta_4(z,q)$ fonksiyonunun çift ve tam fonksiyon olduğu görülür. $\theta_4(z,q) = -iq^{\frac{1}{4}}e^{iz}\theta_1(z+\frac{\pi\tau}{2})$ eşitliğinden, $\theta_4(z,q)$ fonksiyonunun sıfır yerinin $z = \frac{\pi\tau}{2}$ noktası olduğu görülür. Genel olarak, bu fonksiyonun sıfır yerleri, $z = m\pi + n\pi\tau + \frac{\pi\tau}{2}$ veya $z \equiv \frac{\pi\tau}{2}(mod\Omega_\pi)$ noktalarıdır.

Teorem 3.3.1: $r = 1,2,3,4$ olmak üzere, $\theta_r(z)$ fonksiyonunun z ye göre türevi $\theta_r'(z)$ ise,

$$\begin{aligned}\frac{\theta_r'(z+\pi)}{\theta_r(z+\pi)} &= \frac{\theta_r'(z)}{\theta_r(z)}\\ \frac{\theta_r'(z+\pi\tau)}{\theta_r(z+\pi\tau)} &= -2i+\frac{\theta_r'(z)}{\theta_r(z)}\end{aligned}$$

dır [6].

Teorem 3.3.2: Teta fonksiyonları herhangi bir latiste bir tek sıfır yerine sahiptir.

İspat: Rezidü teoreminden,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz = \{C \text{ nin içindeki } \theta_r(z)\text{nin sıfırlarının sayısı}\}$$

yazılır. Burada, $\theta(z)$, dört esas teta fonksiyonlarından herhangi birisidir. C, köşeleri t, $t+\pi$, $t+\pi+\pi\tau$, $t+\pi\tau$ olan kafesin çevresidir.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_t^{t+\pi} + \int_{t+\pi}^{t+\pi+\pi\tau} + \int_{t+\pi+\pi\tau}^{t+\pi\tau} + \int_{t+\pi\tau}^{t}\right]\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_t^{t+\pi}\left\{\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} - \frac{\theta'(z+\pi\tau)}{\theta(z+\pi\tau)}\right\}dz + \int_t^{t+\pi\tau}\left\{\frac{\theta'(z+\pi)}{\theta(z+\pi)} - \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\right\}dz\right]\\ &\text{Teorem 3.3.1 den}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi} 2i\,dz = 1\end{aligned}$$

bulunur.

3.4. k. Mertebeden Genel Teta Fonksiyonu

Tanım 3.4.1: k, pozitif bir tam sayı, $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$, bir karakteristik ve $Im\tau > 0$ olmak üzere, her bir τ için $\theta_k \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z,\tau)$, z nin analitik bir fonksiyonu olsun. Ayrıca, bu fonksiyon,

$$\begin{aligned} \theta_k \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z+1,\tau) &= (-1)^{\varepsilon} \theta_k \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z,\tau) \\ \theta_k \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z+\tau,\tau) &= (-1)^{\varepsilon'} e^{\pi i k(-2z-\tau)} \theta_k \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z,\tau) \end{aligned}$$

eşitliklerini de sağlıyorsa, $\theta_k \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z,\tau)$ fonksiyonuna (z, değişkenine, τ periyoduna ve $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ karakteristiğine sahip) k. mertebeden genel teta fonksiyonu denir [22]. Burada, $\theta_k \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z,\tau)$ açık bir bağıntıdan ziyade fonksiyonel eşitlikler yardımıyla tanımlanmış fonksiyonların bir sınıfını temsil eder. Dikkat edilecek diğer bir husus ise, daha önce ele aldığımız teta fonksiyonları birinci mertebeden teta fonksiyonlarıdır. Ayrıca, dikkat edilmelidir ki, $\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z,\tau)$ ile $\theta \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} (z,\tau)$ nin çarpımı, bu tanıma göre, karakteristiği $\begin{bmatrix} \varepsilon+\mu \\ \varepsilon'+\mu' \end{bmatrix}$ olan 2. mertebeden bir teta fonksiyonudur. k. mertebeden bir teta fonksiyonu, 1. mertebeden k tane teta fonksiyonunun çarpımı olarak bulunabilir. k. mertebeden, teta fonksiyonunun karakteristiği, k tane karakteristiğin matris toplamıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1' \end{bmatrix} (z,\tau) \theta \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2' \end{bmatrix} (z,\tau) \cdots \theta \begin{bmatrix} \varepsilon_k \\ \varepsilon_k' \end{bmatrix} (z,\tau) &= \theta_k \begin{bmatrix} \varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k \\ \varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\cdots+\varepsilon_k' \end{bmatrix} (z,\tau) \\ &= \theta_k \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} (z,\tau) \qquad (19) \end{aligned}$$

dır.

$$
\begin{aligned}
\mu &= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k \equiv 0(mod2) \text{ ise } \mu=0\\
\mu &= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k \equiv 1(mod2) \text{ ise } \mu=1\\
\mu' &= \varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\cdots+\varepsilon_k' \equiv 0(mod2) \text{ ise } \mu'=0\\
\mu' &= \varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\cdots+\varepsilon_k' \equiv 1(mod2) \text{ ise } \mu'=1
\end{aligned}
$$

olacağından, $\begin{bmatrix}\mu\\ \mu'\end{bmatrix}$ karakteristiği, $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, değerlerini alacaktır.

Şimdi, k. mertebeden genel teta fonksiyonunun iki boyutlu genel periyot latisine göre değer değişimlerine bakalım. Bu latisin, $2w_1, 2w_2$ lineer bağımsız iki kompleks sayı ve $Im\frac{2w_2}{2w_1} = Im\tau > 0$ olmak üzere,

$$\Omega = \{m2w_1 + n2w_2 : \quad m, n \in \mathcal{Z}\}$$

olduğunu biliyoruz. Eğer, $(2w_1, 2w_2) = (\pi, \pi\tau)$ alınırsa bu latis,

$$\Omega_\pi = \{m\pi + n\pi\tau : \quad m, n \in \mathcal{Z}\}$$

olacaktır. Birinci mertebeden genel teta fonksiyonunun Ω_π latisine göre değer değişimi (10) ifadesiyle,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_1'\end{bmatrix}(z+m\pi+n\pi\tau,\tau) = (-1)^{m\varepsilon_1+n\varepsilon_1'}e^{-i\pi\tau n^2-2niz}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_1'\end{bmatrix}(z,\tau)$$

olarak verilmişti. Bundan faydalanarak, genel teta fonksiyonunun Ω_π latisine göre periyodiklik durmumunu inceleyelim. Bunun için,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_1'\end{bmatrix}(z+m\pi+n\pi\tau,\tau) = (-1)^{m\varepsilon_1+n\varepsilon_1'}e^{-i\pi\tau n^2-2niz}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_1'\end{bmatrix}(z,\tau)$$

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_2'\end{bmatrix}(z+m\pi+n\pi\tau,\tau) = (-1)^{m\varepsilon_2+n\varepsilon_2'}e^{-i\pi\tau n^2-2niz}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_2'\end{bmatrix}(z,\tau)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon_k\\ \varepsilon'_k\end{bmatrix}(z+m\pi+n\pi\tau,\tau)=(-1)^{m\varepsilon_k+n\varepsilon'_k}e^{-i\pi\tau n^2-2niz}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon_k\\ \varepsilon'_k\end{bmatrix}(z,\tau)$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\theta_k\begin{bmatrix}\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k\\ \varepsilon'_1+\cdots+\varepsilon'_k\end{bmatrix}(z+m\pi+n\pi\tau,\tau) &= (-1)^{m(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k)+n(\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\cdots+\varepsilon'_k)}\\ &\quad\times e^{-\pi ik\tau n^2-2inkz}\theta_k\begin{bmatrix}\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k\\ \varepsilon'_1+\cdots+\varepsilon'_k\end{bmatrix}(z,\tau)\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\theta_k\begin{bmatrix}\mu\\ \mu'\end{bmatrix}(z+m\pi+n\pi\tau,\tau)=(-1)^{m\mu+n\mu'}e^{-i\pi k\tau n^2-2nikz}\theta_k\begin{bmatrix}\mu\\ \mu'\end{bmatrix}(z,\tau) \quad (20)$$

elde edilir [19]. Bu (20) eşitliğide bize, k. mertebeden genel teta fonksiyonunun Ω_π latisine göre, çifte periyodik olmadığını ifade eder. Dolayısıyla, k. mertebeden genel teta fonksiyonu eliptik değil, yarı eliptik bir fonksiyondur. (20) ifadesinden, m ve n üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\theta_k\begin{bmatrix}\mu\\ \mu'\end{bmatrix}(z+m\pi+n\pi\tau,\tau) &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(-1)^{m\mu+n\mu'}e^{-i\pi k\tau n^2-2nikz}\\ &\quad\times\theta_k\begin{bmatrix}\mu\\ \mu'\end{bmatrix}(z,\tau) \qquad (21)\end{aligned}$$

bulunur [20].

4. ELİPTİK FONKSİYON VE DİFERENSİYEL DENKLEM TEŞKİLİ

4.1. Teta ve Eta Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanan $\Phi(z,\tau)$ Fonksiyonu İle Eliptik Fonksiyon Teşkili

Bu bölümde, dört esas teta fonksiyonu ve teta fonksiyonu cinsinden tanımlanan Dedekind'in Eta fonksiyonunun toplamsal ifadeleri esas alınarak, kompleks düzlemde holomorf olan $\Phi(z,\tau)$ fonksiyonu tanımlandı. Bu fonksiyonun, periyotlarının, rasyonel katlarına göre, değer değişimleri incelenerek, yarı eliptik ve daha sonrada eliptik fonksiyon teşkil edildi.

Tanım 4.1.1: $z \in \mathcal{C}$ ve $Imz > 0$ için

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n z}) \tag{22}$$

fonksiyonuna Dedekind'in Eta fonksiyonu denir [5].

Tanım 4.1.2. $\theta_3(z,\tau)$ fonksiyonunun serisel ifadesi, $Im\tau > 0$ için

$$\theta_3(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z} \tag{23}$$

şeklinde z nin bir tam fonksiyonu olarak tanımlanır [4].

(22) ve (23) ifadelerini birlikte düşünerek, $z \in \mathcal{C}, \tau \in \mathcal{H}$ ve $k, n \in \mathcal{Z}$ için

$$\Phi(z,\tau) = e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n \in \mathcal{Z}} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z} \tag{24}$$

şeklinde iki değişkenli Φ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyondaki sonsuz seri, $\mathcal{C} \times \mathcal{H}$ uzayının kompakt alt kümelerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla, Φ analitik bir fonksiyondur. Bu fonksiyon için $|Imz| < c$ ve $Im\tau > \varepsilon$ alınırsa,

$$\left|e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z}\right| < e^{(-\pi\varepsilon)^{n^4}} e^{(2\pi c)^{n^2}}$$

yazılır. Ayrıca,

$$e^{(-\pi c)^{n_0}} e^{(2\pi c)} < 1$$

olacak şekilde bir n_0 sayısının seçilmesi ile

$$\left|e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z}\right| < e^{(-\pi c)^{n^2(n^2-n_0)}}$$

eşitsizliğinden serinin düzgün yakınsaklığı görülür [15].

Şimdi, (24) ile tanımlanan fonksiyonun $\frac{\pi}{n^2}$ ve $\frac{\pi\tau}{n^2}$ yarı periyotlarının, r nin $1, 2, \ldots, r$ değerleri için, $\frac{1}{2^r}$ katlarına göre değer değişimini elde etmek için, (24) ifadesinde z yerine $z + \frac{1}{2^r}(\frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi\tau}{n^2})$ alarak,

$r = 1$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi[z + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi\tau}{n^2}), \tau] &= e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n\in Z} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 \left[z + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi\tau}{n^2})\right]} \\
&= e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n\in Z} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z + \pi^2 i + \pi^2 i\tau} \\
&= e^{\pi^2 i + \pi^2 i \tau} \Phi(z, \tau)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki, katsayı değişimi,

$$\alpha_1 = exp\{\pi^2 i + \pi^2 i\tau\}$$

dur.

$r = 2$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi[z + \frac{1}{2^2}(\frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi\tau}{n^2}), \tau] &= e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n\in Z} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 \left[z + \frac{1}{2^2}(\frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi\tau}{n^2})\right]} \\
&= e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n\in Z} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z + \frac{\pi^2 i}{2} + \frac{\pi^2 i\tau}{2}} \\
&= e^{\frac{\pi^2 i}{2} + \frac{\pi^2 i\tau}{2}} \Phi(z, \tau)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradaki, katsayı değişimi ise,

$$\alpha_2 = exp\{\frac{\pi^2 i}{2} + \frac{\pi^2 i\tau}{2}\}$$

olur. Bu şekilde devam edilerek benzer işlemler tekrar edilirse nihayet,

r için,

$$\begin{aligned}
\Phi[z + \frac{1}{2^r}(\frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi\tau}{n^2}), \tau] &= e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n\in\mathcal{Z}} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 \left[z + \frac{1}{2^r}(\frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi\tau}{n^2})\right]} \\
&= e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n\in\mathcal{Z}} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z + \frac{2\pi^2 i}{2^r} + \frac{2\pi^2 i\tau}{2^r}} \\
&= e^{\frac{2\pi^2 i}{2^r} + \frac{2\pi^2 i\tau}{2^r}} \Phi(z, \tau) \qquad (25)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu son ifadedeki katsayı değişimi ise,

$$\alpha_r = exp\{\frac{2\pi^2 i}{2^r} + \frac{2\pi^2 i\tau}{2^r}\}$$

şeklindedir. Böylece, $\frac{\pi}{n^2}$ ve $\frac{\pi\tau}{n^2}$ yarı periyotlarının $\frac{1}{2^r}$ katlarına göre değer değişiminden elde edilen katsayılardan terimleri,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$$

olan bir fonksiyon dizisi oluşturulursa, bu dizinin genel terimi $r \in \mathcal{N}^+$ için,

$$\{\alpha_r\} = \left\{exp(\frac{2\pi^2 i}{2^r} + \frac{2\pi^2 i\tau}{2^r})\right\}$$

olur. Bu dizi için,

$$\lim_{r\to\infty} \{\alpha_r\} = 1$$

olacağı açıktır. Buna göre, $U_r = \frac{1}{2^r}(\frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi\tau}{n^2})$ alınırsa, katsayılar dizisi yakınsak olan,

$$\Phi(z + U_r, \tau) = exp\{\frac{2\pi^2 i}{2^r} + \frac{2\pi^2 i\tau}{2^r}\}\Phi(z, \tau) \qquad (26)$$

elde edilir.

Yapılan işlemlere göre, (26) yarı eliptik bir fonksiyondur. Yarı eliptik fonksiyondan, eliptik fonksiyon elde etmek için, (26) ifadesinin her iki tarafının önce logaritması, sonra türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dz}\log\Phi(z+U_r,\tau)=\frac{d}{dz}\log\Phi(z,\tau) \tag{27}$$

fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon ise, $\frac{\pi}{n^2}$ ve $\frac{\pi\tau}{n^2}$ periyotlarının $\frac{1}{2^r}$ katlarına göre çifte periyodik ve meromorf olduğundan eliptik bir fonksiyondur.

4.2. $\Phi(z,\tau)$ Fonksiyonunun Sağladığı Bağıntılar

Bu kesimde, daha önce genelleştirilmiş teta fonksiyonu için elde edilen,

$$\frac{\partial^{2n}\theta}{\partial z^{2n}}-\left(\frac{-4}{i\pi}\right)^n\frac{\partial^n\theta}{\partial\tau^n}=0$$

denklemi gözönüne alınarak [16], $\Phi(z,\tau)$ fonksiyonunun kısmi türevleri alınmak suretiyle benzer bağıntılar teşkil edildi. Burada, $Im\tau>0$ ve $k=1,2,3\ldots$ alınacaktır.

Teorem 4.2.1: $\Phi(z,\tau)$ fonksiyonu,

$$\frac{\partial^{4k}\Phi}{\partial z^{4k}}+(-1)^{k-1}(4\pi)^{2k}\frac{\partial^{2k}\Phi}{\partial\tau^{2k}}=0 \tag{28}$$

şeklindeki bağıntıyı sağlar.

İspat: Bunun için, (24) ifadesinden, z ve τ ya göre ardışık türevleri alalım. Buna göre,

$k=1$ için;

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4\Phi}{\partial z^4} &= (2\pi i)^4 exp\left(\frac{k\pi i}{12}\right)\sum_{n\in Z} n^{2\times 4}e^{\pi i n^4\tau+2\pi i n^2 z}\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} &= (\pi i)^2 exp\left(\frac{k\pi i}{12}\right)\sum_{n\in Z} n^{2\times 4}e^{\pi i n^4\tau+2\pi i n^2 z}\end{aligned}$$

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^8\Phi}{\partial z^8} &= (2\pi i)^8 exp\left(\frac{k\pi i}{12}\right)\sum_{n\in Z} n^{2\times 8}e^{\pi i n^4\tau+2\pi i n^2 z} \\
\frac{\partial^4\Phi}{\partial \tau^4} &= (\pi i)^4 exp\left(\frac{k\pi i}{12}\right)\sum_{n\in Z} n^{4\times 4}e^{\pi i n^4\tau+2\pi i n^2 z} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \\
\frac{\partial^{4k}\Phi}{\partial z^{4k}} &= (2\pi i)^{4k} exp\left(\frac{k\pi i}{12}\right)\sum_{n\in Z} n^{2\times 4k}e^{\pi i n^4\tau+2\pi i n^2 z} \\
\frac{\partial^{2k}\Phi}{\partial \tau^{2k}} &= (\pi i)^{2k} exp\left(\frac{k\pi i}{12}\right)\sum_{n\in Z} n^{4\times 2k}e^{\pi i n^4\tau+2\pi i n^2 z}
\end{aligned}$$

türevleri elde edilir. Buradaki, katlı mertebeden türevler dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4\Phi}{\partial z^4} + 2^4\pi^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial \tau^2} &= 0 \\
\frac{\partial^8\Phi}{\partial z^8} - 2^8\pi^4\frac{\partial^4\Phi}{\partial \tau^4} &= 0 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{\partial^{4k}\Phi}{\partial z^{4k}} + (-1)^{k-1}(4\pi)^{2k}\frac{\partial^{2k}\Phi}{\partial \tau^{2k}} &= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise, teoremin ispatıdır.

Teorem 4.2.2: $\Phi(z,\tau)$ fonksiyonu,

$$\frac{\partial^{2(2k-1)}\Phi}{\partial z^{2(2k-1)}} + (-1)^k i(4\pi)^{2k-1}\frac{\partial^{2k-1}\Phi}{\partial \tau^{2k-1}} = 0 \qquad (29)$$

şeklindeki bağıntıyı sağlar.

İspat: İspatı yapabilmek için, $\Phi(z,\tau)$ fonksiyonundan, önce z ye göre $2(2k-1)$ ve daha sonra τ ya göre $(2k-1)$. mertebeden parça türevler alınırsa,

$k = 1$ için;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} &= (2\pi i)^2 e^{\frac{k\pi i}{12}}\sum_{n\in Z} n^{2\times 2}e^{\pi i n^4\tau+2\pi i n^2 z} \\
\frac{\partial\Phi}{\partial \tau} &= \pi i e^{\frac{k\pi i}{12}}\sum_{n\in Z} n^{2\times 2}e^{\pi i n^4\tau+2\pi i n^2 z}
\end{aligned}$$

$k = 2$ için,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^6 \Phi}{\partial z^6} &= (2\pi i)^6 e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n\in Z} n^{2\times 6} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z} \\
\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \tau^3} &= (\pi i)^3 e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n\in Z} n^{3\times 4} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\frac{\partial^{2(2k-1)} \Phi}{\partial z^{2(2k-1)}} &= (2\pi i)^{2(2k-1)} e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n\in Z} n^{2\times 2(2k-1)} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z} \\
\frac{\partial^{2k-1} \Phi}{\partial \tau^{2k-1}} &= (\pi i)^{2k-1} e^{\frac{k\pi i}{12}} \sum_{n\in Z} n^{4\times 2k-1} e^{\pi i n^4 \tau + 2\pi i n^2 z}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Buradaki, türev fonksiyonları dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 4\pi i \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} &= 0 \\
\frac{\partial^6 \Phi}{\partial z^6} + (4\pi)^3 i \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \tau^3} &= 0 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{\partial^{2(2k-1)} \Phi}{\partial z^{2(2k-1)}} + (-1)^k (4\pi)^{2k-1} i \frac{\partial^{2k-1} \Phi}{\partial \tau^{2k-1}} &= 0
\end{aligned}
$$

denklemleri elde edilir. Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Sonuç 4.2.1: (28) ve (29) bağıntıları birlikte düşünülürse, $\Phi(z,\tau)$ fonksiyonu,

$$
\frac{\partial^{2k} \Phi}{\partial z^{2k}} - (i)^k (4\pi)^k \frac{\partial^k \Phi}{\partial \tau^k} = 0 \qquad (30)
$$

kısmi diferensiyel denklemini sağlar.

4.3. k. Mertebeden Genel Teta Fonksiyonunda Periyotların Reel Katlarına Göre Değer Değişimi ve Eliptik Fonksiyon Teşkili

Bu kesimde, daha önce periyotların rasyonel katlarına göre değer değişimi incelenmiş olan [26], k. mertebeden genel teta fonksiyonunun periyotlarının

İkinci mertebeden genel teta fonksiyonu için;

$$
\begin{aligned}
\theta^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1'+\varepsilon_2' \end{bmatrix} (z+2^{\frac{1}{2}}(\pi+\pi\tau),\tau) &= (-1)^{m(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+n(\varepsilon_1'+\varepsilon_2')} e^{-2\pi i\tau n^2-2\times 2ni(z+2^{\frac{1}{2}}(\pi+\pi\tau))} \\
&\quad \theta^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1'+\varepsilon_2' \end{bmatrix} (z,\tau) \\
&= (-1)^{m(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+n(\varepsilon_1'+\varepsilon_2')} e^{-2^{\frac{1}{2}}2\times 2ni(\pi+\pi\tau)} e^{-2\pi i\tau n^2-2\times 2niz} \\
&\quad \theta^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1'+\varepsilon_2' \end{bmatrix} (z,\tau) \\
&\vdots \qquad \vdots \\
\theta^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1'+\varepsilon_2' \end{bmatrix} (z+2^{\frac{1}{r}}(\pi+\pi\tau),\tau) &= (-1)^{m(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+n(\varepsilon_1'+\varepsilon_2')} e^{-2\pi i\tau n^2-2\times 2ni(z+2^{\frac{1}{r}}(\pi+\pi\tau))} \\
&\quad \theta^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1'+\varepsilon_2' \end{bmatrix} (z,\tau) \\
&= (-1)^{m(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+n(\varepsilon_1'+\varepsilon_2')} e^{-2^{\frac{1}{r}}2\times 2ni(\pi+\pi\tau)} e^{-2\pi i\tau n^2-2\times 2niz} \\
&\quad \theta^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1'+\varepsilon_2' \end{bmatrix} (z,\tau)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada, katsayı değişimi ise,

$$\gamma_2 = (-1)^{m(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+n(\varepsilon_1'+\varepsilon_2')} exp\{-2\pi i\tau n^2 - 2\times 2ni[z+2^{\frac{1}{r}}(\pi+\pi\tau)]\}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse,

k. mertebeden genel teta fonksiyonu için,

$$
\begin{aligned}
\theta^k \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} (z+2^{\frac{1}{2}}(\pi+\pi\tau),\tau) &= (-1)^{m\mu+n\mu'} e^{-k\pi i\tau n^2-k2ni(z+2^{\frac{1}{2}}(\pi+\pi\tau))} \\
&\quad \theta^k \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} (z,\tau) \\
&= (-1)^{m\mu+n\mu'} e^{-2^{\frac{1}{2}}k2ni(\pi+\pi\tau)} e^{-k\pi i\tau n^2-k2niz} \\
&\quad \theta^k \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} (z,\tau)
\end{aligned}
$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\begin{aligned}
\theta^k \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} (z + 2^{\frac{1}{r}}(\pi + \pi\tau), \tau) &= (-1)^{m\mu + n\mu'} e^{-k\pi i\tau n^2 - k2ni(z + 2^{\frac{1}{r}}(\pi + \pi\tau))} \\
&\quad \theta^k \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} (z, \tau) \\
&= (-1)^{m\mu + n\mu'} e^{-2^{\frac{1}{r}} k2ni(\pi + \pi\tau)} e^{-k\pi i\tau n^2 - k2niz} \\
&\quad \theta^k \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} (z, \tau)
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Bu son ifadedeki katsayı değişimide,

$$\gamma_k = (-1)^{m\mu + n\mu'} exp\{-k\pi i\tau n^2 - k2ni[z + 2^{\frac{1}{r}}(\pi + \pi\tau)]\}$$

şeklindedir. Böylece elde edilen bu katsayılardan terimleri,

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, \ldots$$

olan bir fonksiyon dizisi oluşturulursa, bu dizinin genel terimi, $n \in \mathcal{N}^+$ için

$$\{\gamma_k\} = (-1)^{m\mu + n\mu'} exp\{-k\pi i\tau n^2 - k2ni[z + 2^{\frac{1}{r}}(\pi + \pi\tau)]\}$$

olur. Bu dizi için,

$$\lim_{k \to \infty} \{\gamma_k\} = 0$$

olacağı açıktır. O halde, katsayılar dizisi, bütün kompleks düzlemde yakınsak olan, $\theta^k \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} (z, \tau)$ fonksiyonunun periyotlarının, $r \geq 2$ için $2^{\frac{1}{r}}$ katlarına göre, katsayılarından oluşturulan, fonksiyonun çifte periyodik duruma getirilmesi daima mümkündür. Dolayısıyla, meromorf olan, bu fonksiyondan, eliptik fonksiyon kurulabilir. Bu katsayılar dizisinden bir sonsuz toplam kuralım ve bu toplam,

$$\varphi_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{m\mu + n\mu'} exp\{-k\pi i\tau n^2 - k2ni[z + 2^{\frac{1}{r}}(\pi + \pi\tau)]\} \tag{31}$$

olsun. Burada,

$$E_{\epsilon_j} = (-1)^{m\mu + n\mu'} \quad \text{ve} \quad z_1 = z + 2^{\frac{1}{r}}(\pi + \pi\tau)$$

alınırsa, (31) ifadesinden,

$$\varphi_k(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{\epsilon_j} exp\{-k\pi i\tau n^2 - k2niz_1\} \tag{32}$$

fonksiyonu elde edilir. (32) ifadesinin periyodikliğine bakılırsa,

$$\varphi_k(z_1+\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{\epsilon_j} exp\{-k\pi i\tau n^2 - k2ni(z_1+\pi)\} = \varphi_k(z_1)$$

$$\varphi_k(z_1+\pi\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{\epsilon_j} exp\{-k2ni\pi\tau\} exp\{-k\pi i\tau n^2 - k2niz_1\}$$

olduğu görülür. Yapılan işlemlere göre, $\varphi_k(z_1)$ fonksiyonun yarı eliptik fonksiyon olduğunu gördük. Bu yarı eliptik fonksiyondan, eliptik fonksiyon elde etmeye çalışalım. Bunun için, $\varphi_k(z_1)$ sonsuz toplamındaki, katsayılar dizisinin belirttiği,

$$\varphi(z_1,\tau) = E_{\epsilon_j} exp\{-k\pi i\tau n^2 - k2niz_1\}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu fonksiyonun, Ω_π latisine göre periyodikliğini incelersek,

$$\begin{aligned}\varphi(z_1+\Omega_\pi,\tau) &= E_{\epsilon_j} exp\{-k2n\pi i\tau\} exp\{-k\pi i\tau n^2 - k2niz_1\} \\ &= exp\{-k2n\pi i\tau\}\varphi(z_1,\tau) \qquad (33)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

(33) ifadesinin her iki tarafının önce logaritması, daha sonra z_1 değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\log\varphi(z_1+\Omega_\pi,\tau) &= \log e^{-2kni\pi\tau} + \log\varphi(z_1,\tau) \\ \frac{d}{dz_1}\log\varphi(z_1+\Omega_\pi,\tau) &= \frac{d}{dz_1}\left\{\log e^{-2kni\pi\tau} + \log\varphi(z_1,\tau)\right\} \\ &= \frac{d}{dz_1}\log\varphi(z_1,\tau) \qquad (34)\end{aligned}$$

fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonun, $m\pi$ ve $n\pi\tau$ periyotları ile çifte periyodik, meromorf bir fonksiyon olduğu görülür. Yani, (34) ile ifade edilen fonksiyon bir eliptik fonksiyondur. Böylece, k. mertebeden genelleştirilmiş teta fonksiyonunun periyotlarının irrasyonel katlarına göre, değer değişimlerinden elde edilen, katsayıların oluşturduğu fonksiyon dizisinin, bir eliptik fonksiyon teşkil ettiği gösterildi.

KAYNAKLAR

[1] Ahlfors, L. V., Complex Analysis, Mc Graw-Hill,Book Comp, New York 1966.

[2] Bowman, F., Introduction to Elliptic Functions With Applications, Dover Publications Inc., New York, 1961.

[3] Cayley, A., An Elemantary Treatise on Elliptic Functions, Dover, Publications Inc., New York, 1962.

[4] Chandrasekharan, K., Elliptic Functions, Springer Verlag, Berlin, Heildelberg, s. 1-136, 1985

[5] Dedekind, R., Erlauterungen Zu Zwei Fragmenten Von Riemann, Gesammelte Math., Werke, Vol 1., pp. 159-173, 1930.

[6] Dutta, M. and Debnath, L., Elements of The Theory of Elliptic and Associated Functions with Applications, The World Press, Calcutta, s. 1-171, 1965.

[7] Du Val, P., Elliptic Functions and Elliptic Curves, Cambridge University, London, s. 163-184, 1973.

[8] Goursat, E., Functions of a Complex Variable, Vol 2., Dover Publications, New York, s. 1-27, 1959.

[9] Işık, A., Eisenstein Serileri ve Çifte Periyodik Fonksiyonlara Tatbiki, Atatürk "Universitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, Erzurum, 1991.

[10] John, D. Fay.,Theta Functions on Riemann Surfaces, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[11] Knopp, K., Fonksiyonlar Teorisi, Cilt 2, Çeviren, Terzioğlu N., İstanbul Üniversitesi, Fen Fak. Yay. No 54, İstanbul, 1962

[12] Kültür, N., Teta Fonksiyonları İle Oluşturulan Karesel Bağıntılar ve Bazı Diferensiyel Denklemler, Atatürk

Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, Erzurum, 1994.

[13] Lang, S., Elliptic Functions, Yale University Press, New Haven, s. 5-239, 1973.

[14] Marsden, J.E., Elementary Classical Analysis, W. H. Freeman and Company, San Francisco, pp. 78-150, 1973.

[15] Mumford, D., Tata Lectures on Theta I, Boston, Basel, Stuttgart, 1983.

[16] Ocak, R., Sigma ve Teta Fonksiyonlarının Eşdeğer Periyot Çiftleri İle Oluşturulan Simetrik Latislere Göre Değerleri, Atatürk Üniversitesi, Doktora tezi, Erzurum, 1977.

[17] Ocak, R., Teta Fonksiyonları Üzerine Bazı Bağıntılar, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi, Cilt 1, Sayı 2, Erzurum, 1981.

[18] Ocak, R., Genelleştirilmiş Teta Fonksiyonu Vasıtasıyla Eliptik Fonksiyon Teşkili ve Bazı Bağıntılar. Atatürk Üniversitesi, Doçentlik tezi, Erzurum, 1982.

[19] Ocak, R., k. mertebeden Genel Teta Fonksiyonlarının Çifte Periyodik ve Meromorf Fonksiyonlara Uygulanışı, (Profesörlük takdim tezi), Erzurum, 1988.

[20] Ocak, R., Jacobi Eliptik Fonksiyonlar Üzerine Bir Çalışma, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, Sayı 6, s. 245-254, İstanbul, 1989.

[21] Ocak, R., Kompleks Analiz, Atatürk Üniversitesi Yayınları, No 750, Erzurum, 1993.

[22] Rauck, E.H. and Lebowitz, A., Elliptic Functions, Theta Functions and Riemann Surfaces, The Williams and

Wilkins Comp. Baltimore, s. 74-116, 1973.

[23] San, N., Eliptik Fonksiyonlara Ait Periyotların Jacobi Fonksiyon larının Değerleri Üzerindeki Etkileri. Atatürk Universitesi Yayınları, 338 Ankara, 1974.

[24] Schoeneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin, s. 1-221, 1974.

[25] Şeker, A., Weierstrass ve Jacobi Fonksiyonlarının Eşlenik Kompleks Periyotları ve Yarı Periyodik İçin Değer Değişimleri Atatürk Üniversitesi, Doktora tezi, Erzurum, 1976.

[26] Yıldız, İ., Weierstrass Eliptik ve Yarı Eliptik Fonksiyonlarının $\frac{1}{2^r}$ Periyot Katlarına Göre Değer Değişimleri, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, Erzurum, 1989.

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

k. MERTEBEDEN GENEL TETA FONKSİYONUNUN PERİYOTLARININ REEL KATLARINA GÖRE DEĞER DEĞİŞİMLERİ

Abdullah KAPLAN

Doktora Tezi

ERZURUM 1995