

58478

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MEKANİK ANABİLİM DALI

**KOMPOZİT MALZEMELERDE ZAMANA BAĞLI ISI
TRANSFERİ İLE OLUŞAN TERMAL GERİLMELERİN SONLU
ELEMEN YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ**

Murat Demir AYDIN

Erzurum-1997

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MEKANİK ANABİLİM DALI**

**KOMPOZİT MALZEMELERDE ZAMANA BAĞLI ISI
TRANSFERİ İLE OLUŞAN TERMAL GERİLMELERİN SONLU
ELEMEN YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ**

Murat Demir AYDIN

Yönetici : Yrd. Doç. Dr. Adnan ÖZEL

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

Kompozit malzemelerde, zamana bağılı ısı trasferi ile oluşan gerilme ve şekil değiştirmeler sonlu elemanlar metodu kullanılarak incelenmiştir.

Problemi çözmek için dört düğümlü düzlem izoparametrik eleman özellikleri kullanılarak, bilgisayar programı yazılmıştır. Hesaplamalar bu program kullanılarak çeşitli kompozit malzemelerde ve çelik üzerinde denenmiştir. Sonuçlar grafikler halinde sunulmuş ve bunlarla ilgili karşılaştırmalar yapılmıştır.

Başlangıçta yüzeyde termal çeki gerilmeleri oluşurken merkezde termal bası gerilmeleri oluşur. Soğumanın ilerleyen safhalarında gerilmeler yön değiştirerek başlangıçta bası olan gerilmeler çekiye, çeki olan gerilmeler ise basıya dönüşmektedir.

Yapılan incelemeler sonucunda, soğuma süresince kompozit malzemelerde oluşan sıcaklık ve gerilme dağılımının zamanla değişiminin nasıl olduğunun bilinmesi, son derece önemli olduğu gözlemlenmiştir.

SUMMARY

Stress and strain resulting from transient heat transfer on the composite materials have been investigated by using finite element method.

In order to solve the problem, a computer program has been written by using characteristics of four node isoparametric plane element. The Calculations have been tested on various composite materials and steel by this program . The results have been shown in diagrams and relevant comparisons with these have been made.

At the beginning, the thermal compressive stresses occur in the center as the thermal tensile stresses occur on the surface. In the further stages of the cooling, stresses which were initially compressive transform to tensile by changes direction, while tensile stresses transform to compressive stresses.

Through these investigations, it was observed that the variation of the stress and temperature distribution with time which occur during cooling of composite material had vital importance.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince her türlü yardımlarını benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Adnan Özel 'e teşekkürü bir borç bilirim. Sürekli olarak bana yol gösteren, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Sadri Şen 'e, Doç. Dr. Ayhan ÇELİK 'e, Doç. Dr. İhsan EFEOĞLU 'na, Yrd.Doç.Dr. Bünyamin AKSAKAL 'a ve tüm hocalarıma teşekkür eder saygılar sunarım.

Murat Demir AYDIN



	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
SUMMARY	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU	4
2.1. Ara Yüzeylerde Süreklilik	4
2.2. Sonlu Elemanların Formülasyonu	4
2.3. Sonlu Eleman İnterpolasyon Fonksiyonları	6
2.3.1. Tek Boyutlu Elemanlarda İnterpolasyon Fonksiyonları	7
2.3.2. İki Boyutlu Elemanlarda İnterpolasyon Fonksiyonları	8
2.4. Nümerik İntegrasyon	12
3. GEÇİŞLİ HAL ISI İLETİMİNİN SONLU ELEMAN METODU İLE İNCELENMESİ	15
3.1. Giriş	15
3.2. Sonlu Eleman Formülasyonu	17
3.2.1. İzoparametrik Eleman	20
3.2.2. Eleman Matrislerinin Türetilmesi	22
3.2.3. İki Boyutlu Geçişli Isı İletimi İçin Sıcaklık Dağılımı	23
3.2.4. Kritik Zaman Aralığı	25
4. GERİLME VE ŞEKİL DEĞİŞTİRME ANALİZİNDE TEMEL EŞİTLİKLER	27
4.1. Gerilme Şekil Değişirme Bağıntıları	27

	<u>Sayfa</u>
4.1.1. Üç Boyutlu Durum	27
4.1.2. İki Boyutlu Durum	29
4.2. Anizotropik Malzemeler İçin Gerilme-Şekil Değişirme Bağlıları	31
4.3. Ortotropik Malzemeler	34
5. BİR TABAKANIN MEKANİĞİ	36
5.1. Giriş	36
5.2. Elastiklik Matrisi Bileşenlerinin Tanımlanması	37
5.2. Takviye Elemanının Doğrultusuna Bağlı Olarak Malzemenin Mekanik Davranışının İncelenmesi	42
5.3. Hooke Sabitlerinin Bulunması	44
5.3.1. E_{11} Elastisite Modülünün Bulunması	44
5.3.2. Poisson Oranının Bulunması (ν_{12})	46
5.3.3. E_{22} Elastisite Modülünün Bulunması	46
5.3.4. G_{12} Kayma Modülünün Bulunması	47
6. KOMPOZİT MALZEMELERDE TERMAL GERİLME ANALİZİ	50
6.1. Giriş	50
6.2. Termal Artık Gerilmeler	50
6.2.1. Mikroskobik Termal Gerilmeler	50
6.2.2. Makroskobik Termal Gerilmeler	51
7. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU	55
7.1. Gerilme ve Şekil Değişirmelerin Sonlu Eleman Formülasyonu	55
7.2. Elemanın Direngelik Matrisinin Oluşturulması	58
7.3. Rijidlik Matrisinin İntegrasyonu	60
7.4. Sıcaklık Gradyantı (ΔT)	61

	<u>Sayfa</u>
8. BU ÇALIŞMADA KULLANILAN MODELE SONLU ELEMEN FORMÜLASYONUNUN UYGULANMASI	65
8.1. Sıcaklık ve Gerilmelerin Hesabı	65
9. SONUÇLAR	74
PROGRAM AKIŞ ŞEMASI	76
KAYNAKLAR	77



KISALTMALAR VE SİMGELER

A	: Alan	(m ²)
B	: Şekil-değiştirme, yer-değiştirme ve sıcaklık granyantı, sıcaklık dönüşüm matrisi	-
B _i	: Biot Sayısı	-
c _p	: Özgül ısı kapasitesi	(J/Kg ^o K)
[c]	: Kapasitans matrisi	-
[C]	: Elastisite matrisi	-
[D]	: Elastisite matrisinin tersi	-
E	: Elastisite modülü	(Mpa)
G	: Kayma modülü	(Mpa)
h	: Taşınım ile ısı transferi katsayısı	(W/m ^{2o} K)
J	: Jacobian operatörü	-
k	: İletim ile ısı transfer katsayısı	(W/m ^o K)
[k]	: İletim ile ısı transferi katsayılar matrisi	-
[K]	: Rijidlik matrisi	-
[K _c]	: İletim matrisi	-
[K _h]	: Taşınım matrisi	-
[K _r]	: Radyasyon matrisi	-
L	: Lagrange interpolasyon polinomu	-
[N]	: İnterpolasyon matrisi	-
R	: Kuvvet vektörü	-
R _m	: Mekanik kuvvet vektörü	-
[R _h]	: İletimden kaynaklanan ısı yük vektörü	-
[R _q]	: Yüzey ısı akısından kaynaklanan ısı yük vektörü	-
[R _r]	: Radyasyondan kaynaklanan ısı yük vektörü	-
R _T	: Termal kuvvet vektörü	-
r, s	: Lokal koordinatlar	-
t	: Zaman	(sn)
T	: Sıcaklık	(^o K)
u, v, w	: Lokal yer değiştirmeler	-
U, V	: Yer değiştirme interpolasyon fonksiyonları	-
W _{ij}	: Ağırlık faktörü	-
[u]	: Yer değiştirme vektörü	-

x, y	: Kartezyen koordinatlar	-
$[\epsilon]$: Şekil değiştirme vektörü	-
$[\epsilon_0]$: Başlangıç Şekil değiştirme vektörü	-
α	: Termal genleşme katsayısı	(1/°K)
$[\alpha_{i,j}]$: Termal genleşme matrisi	-
λ_{ff}	: Sistemin en bűyűk űzdeęeri	-
Δt	: Zaman aralığı	-
ΔT	: Sıcaklık gradyanı	-
δ	: Yer değiştirme vektörü	-
γ	: Kayma Şekil değiştirme oranı	-
ρ	: Yoğunluk	(kg/m ³)
ν	: Poison oranı	-
θ	: Takviye aası	(°)
σ	: Normal gerilme	(Mpa)
τ	: Kayma gerilmesi	(Mpa)

1. GİRİŞ

20. asrın ikinci yarısında tekniğin hızla gelişmesi, beraberinde sanayinin temel girdisi olan malzeme ve malzeme biliminde de gelişmelerin hızlanmasını sağlamıştır. Fakat bu gelişim, yeryüzünde bulunan ana malzemelerin sınırlı olmasından dolayı, malzemeler ve bu malzemelerin özellikleri, teknolojisinin gelişmesine ayak uyduramamıştır. Uzay araçlarının yapımına geçilen asrımızda, bilim adamları çağın yenilikleri ile birlikte mevcut malzemelerin özelliklerinden bilimin gelişmesi paralelinde günün şartlarına uyacak şekilde gerek ekonomik gerekse teknik yönden daha uygun malzemeler imal etme yolunu seçmişlerdir. Dolayısıyla hem ekonomik hem daha mukavemetli hem de çok hafif malzemelerin teşekkülü için yapılan çalışmalar yoğunlaşmıştır. Böylece malzemeyi meydana getiren bileşenler büyük önem kazanması, kompozit malzemelere yönelik çalışmaları artırmıştır.

İmalat sanayinde daha mukavim, bakım-onarımının daha avantajlı oluşu, aynı zamanda hafif ve uzun ömürlü oluşu ile de bir çok parça artık kompozit malzemelerden yapılmaktadır.

İki veya daha fazla malzemenin kullanım yerindeki aranan özellikleri verebilecek daha uygun bir malzeme teşkil etmek için makro seviyede birleştirilmesi sonucu meydana gelen malzemelere kompozit malzemeler denir. Doğrudan doğruya istenilen maksatla kullanılmayan en az iki ayrı malzemedan belli olan bir özelliği elde edebilmek için bunların belli şartlar altında ve belli bir oranda fiziksel olarak birleştirilmesi ile elde edilirler. Kompozit malzemeler genellikle matriks adı verilen ana faz ile takviyelendirici olarak adlandırılan tali fazdan oluşurlar.

Farklı malzemeler mikroskobik seviyede birleştirilebilirler. Fakat neticede metal alaşımlarında olduğu gibi makroskobik olarak homojendir. Kompozit malzemelerde ise malzeme makroskobik seviyede anizotropiktir. Kompozit malzemeler ekseriya kendilerini meydana getiren malzemelerin en iyi özelliklerini gösterecek tarzda birleştirilirler. Fazla ağırlık istenmeyen fakat fazla mukavim olması istenen yerlerde çelik ve benzeri metaller yerine kompozit malzemeler kullanılmaktadır.

Bir cisimdeki ilkel gerilmelerin sebeplerinden biri düzgün olmayan ısıtmadır. Sıcaklığın artması ile cisim genişir. Böyle bir genişleme sürekli bir cisimde genel olarak serbestçe yürüyemez ve ısıtmadan ileri gelen gerilmeler ortaya çıkar. Buhar türbinleri ve Diesel motorların hesabında olduğu gibi makinaların boyutlandırılmalarında çoğu zaman ısı gerilmeleri büyük pratik önemi haizdir ve daha ayrıntılı göz önüne alınmalıdır.

Kompozit malzemelerin yüksek ısı dayanımına sahip olmasından dolayı onların uzay sanayi, türbin nozul ve kanatçıkları gibi yüksek sıcaklık altında çalışan bir çok elemanın yapımında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu çalışmada özellikle kompozit malzemelerin termal davranışları sonlu eleman yöntemi kullanılarak incelenecektir.

Sonlu eleman yöntemiyle izotropik ve kompozit malzemelerden imal edilmiş malzemelerde zamana bağlı ısı transferi ile oluşan termal gerilmeler üzerine birçok çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmaların genelinde öncelikle geçişli ısı iletimi problemi ele alınarak sıcaklık dağılımı üzerinde durulmuştur. Sıcaklık dağılımının nümerik çözümü için birçok yöntem vardır ve bu yöntemlerin kullanımında zaman aralığının belirlenmesi oldukça önemlidir. Sonlu eleman yöntemi kullanılarak iki boyutlu geçişli ısı iletimi için kritik zaman aralığının belirlenmesi üzerine Myers [1], Yalamanchili ve Chu [2], Hughes [3], Wood ve Lewis [4] çalışmışlardır.

Sıcaklık dağılımı hesaplanan malzemenin, termal gerilme analizi ise problemin çözümünde ikinci basamağı oluşturmaktadır. Rao ve Sinha sonlu elemanlar yöntemini kullanarak kompozit bir kirişin termal gerilme analizini yapmışlardır [5]. Wang ve Chou ise ortotropik bir levhada geçişli termal gerilme analizini incelemişlerdir [6]. El-Hawary, Ragab, Osman ve Abd El-Razzak yüksek sıcaklığa maruz bir levhanın davranışını deneysel ve analitik olarak incelemişlerdir [7]. Chen, Sun ve Chang termal ve mekanik yüklemeye maruz kompozit malzemeler üzerinde çalışmışlar yapmışlardır [8].

Yukarıdaki literatürler temel alınarak yapılan çalışma genel olarak dokuz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde problemin tanıtımı, konunun önemi anlatılıp, kompozit malzemelerin genel özelliklerine kısaca değinilmiş, literatür araştırması yapıp konuyla ilgili çalışmalar incelenmiş ve kısaca bu çalışmalar özetlenmiştir. İkinci bölümde, sonlu eleman yönteminin genel eşitlikleri hakkında bilgi verilmiş ve nümerik integrasyondan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, geçişli ısı iletim problemi ele alınarak gerekli sonlu eleman formülasyonları yapılmıştır. Daha sonra kritik zaman aralığı hesaplanmış ve bu kritik zaman aralığı kullanılarak sıcaklık dağılımı matris formda ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde, temel gerilme-şekil değiştirme bağıntıları verilmiştir. Beşinci bölümde kompozit malzemeler için gerilme-şekil değiştirme ifadeleri matris formda ifade edilmiştir. Altıncı bölümde ise, kompozit malzemelerde meydana gelen termal gerilmeler incelenmiştir. Yedinci bölümde, termal gerilme ve şekil değiştirme analizi, sonlu eleman yöntemi kullanılarak izoparametrik eleman için yeniden formüle edilmiştir. Sekizinci bölümde, formülasyonu önceki bölümlerde verilen izoparametrik sonlu elemanla problemin çözümü bilgisayar programı ile mümkün olduğu için hazırlanan bilgisayar programı kullanılarak üzerinde çalışılan kompozit levha için sıcaklık ve gerilme analizi yapılmıştır. Dokuzuncu bölümde ise, sonuçlar irdelenmiştir.

2. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Sonlu eleman yöntemiyle, formülasyonun matris şeklinde ifade edilmesi oldukça önemlidir. İzoparametrik elemanın pratikte problemlere geometrik olarak daha uygun olması, dolayısıyla çözümün daha sağlıklı bir şekilde yapılabilmesi bu elemanların tercihine sebep olarak gösterilebilir ve kullanılan modele izoparametrik eleman formülasyonu uygulanacaktır.

Bu formülasyonun kullanılmasındaki asıl amaç; İnterpolasyon fonksiyonları (Şekil değiştirme fonksiyonları) kullanılarak elemanın herhangi bir noktasındaki yer değiştirmeler ile elemanların düğüm noktaları yer değiştirmeleri arasındaki bağıntıları doğrudan elde etmektir. Yani dönüşüm matrisleri yerine eleman matrislerinin yerini tutan gerekli serbestlik derecelerine sahip ifadeleri elde etmektir [11].

2.1 Ara Yüzeylerde Süreklilik

Sonlu eleman formülasyonunda en önemli adımlardan birisi interpolasyon matrislerinin seçimidir. İnterpolasyon fonksiyonlarının seçimindeki zorluk, elemanların ara yüzeylerinde sürekliliğin sağlanmasıdır.

Süreklilik için ortak eleman yüzeylerinde elemanların koordinatları ve yer değiştirmeleri aynı olmalıdır. Bu da rijit cisim yer değiştirmelerinin ve sabit şekil değiştirmelerin olmasıyla sağlanmaktadır. Bu durum üç düğümlü üçgen elemanlarda görülmektedir. Böyle bir elemanda süreklilik otomatik olarak sağlanmış olur [13],[14], [15].

Sonlu eleman metodunda genelleştirilmiş koordinatların kullanılması ile ara yüzeylerde süreklilik elde edilmektedir. Bunun için lokal koordinat sisteminde tanımlanan yer değiştirmeler, izoparametrik sonlu eleman formülasyonunda da ihtiva edilmelidir. Bu nedenle interpolasyon fonksiyonları her düğümde bir olacak şekilde ayarlanmaktadır.

2.2 Sürekli Elemanların Formülasyonu

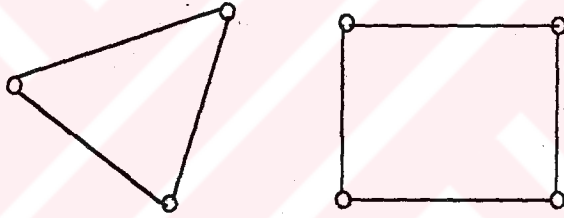
Bir sürekli elemanın global serbestlik derecesine uyan eleman matrislerinin doğrudan

hesaplanması sonlu eleman formülasyonunun en önemli kısımlarından biridir. Bununla beraber önce elemanın lokal serbestlik derecesine uyan matrislerin formülasyonu çıkarılır ve daha sonra bu değerler global koordinatlara dönüştürülür.

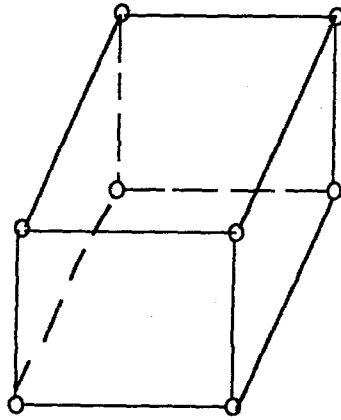
Diğer taraftan izoparametrik sonlu eleman formülasyonunda temel işlem, elemanın yer değiştirmelerinin ve koordinatlarının elemanın tabii koordinat sistemi kullanılarak interpolasyon formunda ifade edilmesidir (Bathe, 1982). Eleman matrislerinin oluşturulmasında gözönüne alınan değişik düğüm sayılarına sahip bazı elemanlar Şekil 2.1 'de görülmektedir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 2.1. Sürekli elemanlara ait örnekler
a) Tek boyutlu çubuk eleman, b) iki boyutlu elemanlar, c) Üç boyutlu eleman

2.3. Sonlu Eleman İnterpolasyon Fonksiyonları

Sonlu eleman analizinde eleman içerisindeki her bir noktadaki alan değişkenlerinin değerleri ve elemanın düğüm noktalarındaki alan değişkenlerinin değerleri bilinmeyenlerdir. Elemanın değişik düğümlerindeki düğüm bilinmeyenleri ile eşdeğer olan bir interpolasyon fonksiyonu seçilerek problemler özelleştirilmiş olur.

Sonlu eleman formülasyonunda genellikle Lagrange ve Hermite polinomları kullanılır. Hermite polinomları özellikle ince plak ve kabukların hesaplanmasında kullanılmaktadır [12].

n. derece için Lagrange İnterpolasyon Polinomu ;

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (2.1)$$

eşitliği ile verilir. Burada $L_k(x)$, n. dereceden bir polinomdur ve n lineer faktörlerinin çarpımıdır, n ise polinomun derecesini göstermektedir. $x = x_k$ için $L_k(x_k) = 1$ değerine eşittir. $x = x_i$ ve $i \neq k$ olduğunda $L_k(x) = 0$ olacaktır. $L_k(x)$ 'in bu özelliği x ekseninde takribi bir aralıkta keyfi bir $\phi(x)$ fonksiyonu ile gösterilerek kullanılabilir. $\phi(x)$ 'in değeri sadece x_0, x_1, x_2 ve x_3 farklı noktalarında biliniyorsa bu ϕ fonksiyonu yaklaşık olarak üçüncü dereceden bir polinomla ,

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^3 \phi_i L_i(x) = \phi_0 L_0 + \phi_1 L_1 + \phi_2 L_2 + \phi_3 L_3 = [L]\{\phi\} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ϕ_i değerleri, ϕ 'nin $x = x_i$, ($i=0, 1, 2, 3$) olduğu durumlardaki değeridir. Mesela ϕ_3 'ün katsayısı L_3 , (2.1) eşitliğinden,

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \quad (2.3)$$

şeklinde elde edilir. Buradan tek boyutlu bir eleman için interpolasyon fonksiyonu ,

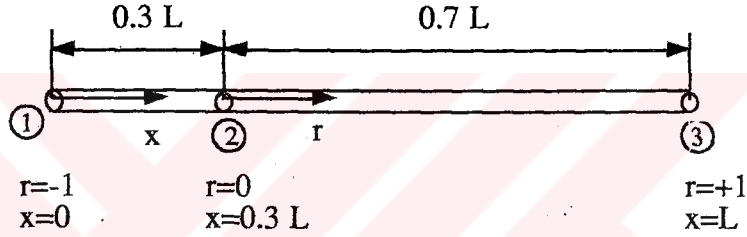
$$N_i(x) = L_i(x) \quad (2.4)$$

yazılarak,

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n N_i X_i$$

şeklinde gösterilebilir.

2.3.1 Tek Boyutlu Elemanlarda İnterpolasyon Fonksiyonları

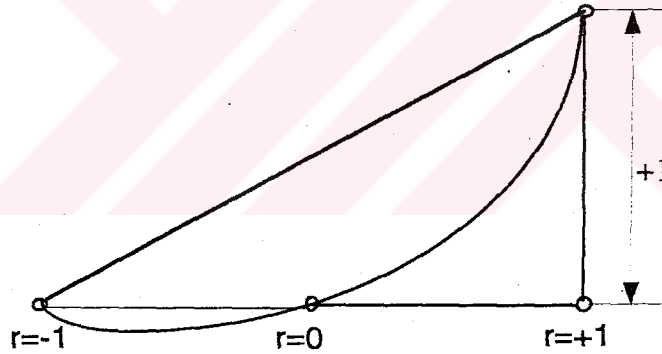
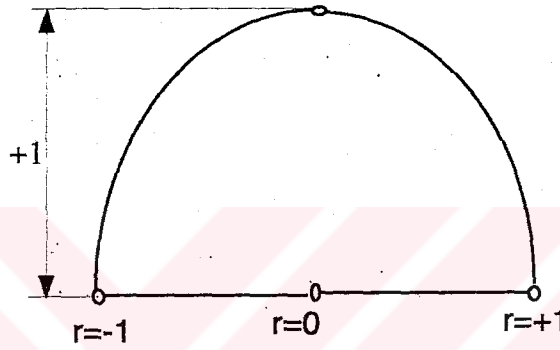
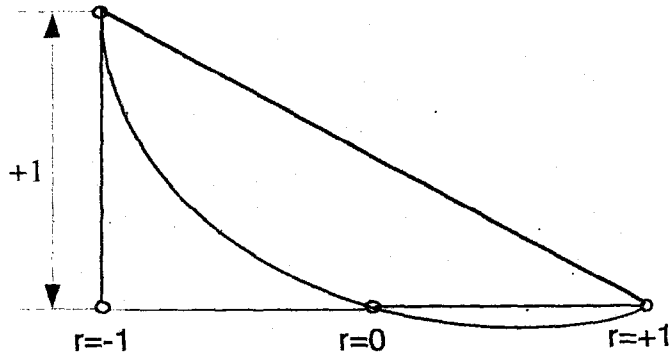


Şekil 2.2. Üç düğüme sahip bir çubuk eleman

Bunun için Şekil 2.2 'deki gibi üç düğüme sahip bir çubuk eleman için seçilen interpolasyon fonksiyonu parabolik olmalıdır. Böylece L_2 fonksiyonu daha kolay bir şekilde elde edilmiş olur. Şöyleki, $(1-r^2)$ olarak verilen parabol $r=0$ 'da bire eşit ve $r=\pm 1$ 'de sifıra eşit olması şartlarını sağlamalıdır. Diğer iki interpolasyon fonksiyonu L_1 ve L_3 , lineer bir fonksiyon ile parabolik fonksiyonun süperpoze edilmesi ile oluşturulabilir. L_3 interpolasyon fonksiyonu için, $(1+r)/2$ fonksiyonu kullanılırsa, $r=+1$ 'de bir ve $r=-1$ 'de sifır olmasını sağlamak için,

$$L_3 = \frac{1}{2}(1+r) - \frac{1}{2}(1-r^2)$$

fonksiyonunun kullanılması gerekir. Şekil 2.2 'deki çubuk elemana ait interpolasyon fonksiyonları aşağıdaki şekillerde görülmektedir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. Çubuk elemana ait interpolasyon fonksiyonları

2.3.2 İki Boyutlu Elemanlarda İnterpolasyon Fonksiyonları

Bir boyutlu elemanlar için (2.1) eşitliğinde tanımlanan Lagrange interpolasyon polinomları iki veya üç boyutlu elemanlar için uyarlanıp kullanılabilir. Lagrange interpolasyon polinomları ikişer ve üçer çarpımlarıyla sırasıyla iki ve üç boyutlu elemanların interpolasyon fonksiyonları çıkarılır [12].

Kartezyen koordinatlarda verilen iki boyutlu elemanların lokal koordinatlara transformasyonu Şekil 2.4 ' deki gibidir. Burada lokal koordinatlardaki transformasyonu dikdörtgen ve üçgen olan, genel halde eğrisel çizgilerle çevrili iki boyutlu izoparametrik elemanlar görülmektedir. Örneğin Şekil 2.5 ' de verilen dört düğümlü izoparametrik elemanın interpolasyon fonksiyonu ;

$$\phi(r,s) = [N] \cdot \phi_e = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \phi_e \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ;

$$N_i(r,s) = L_i(r) \cdot L_i(s) \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (2.7)$$

$$\bar{\phi}^e = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi(r = -1, s = -1) \\ \phi(r = +1, s = -1) \\ \phi(r = +1, s = +1) \\ \phi(r = -1, s = +1) \end{Bmatrix}^e \quad (2.8)$$

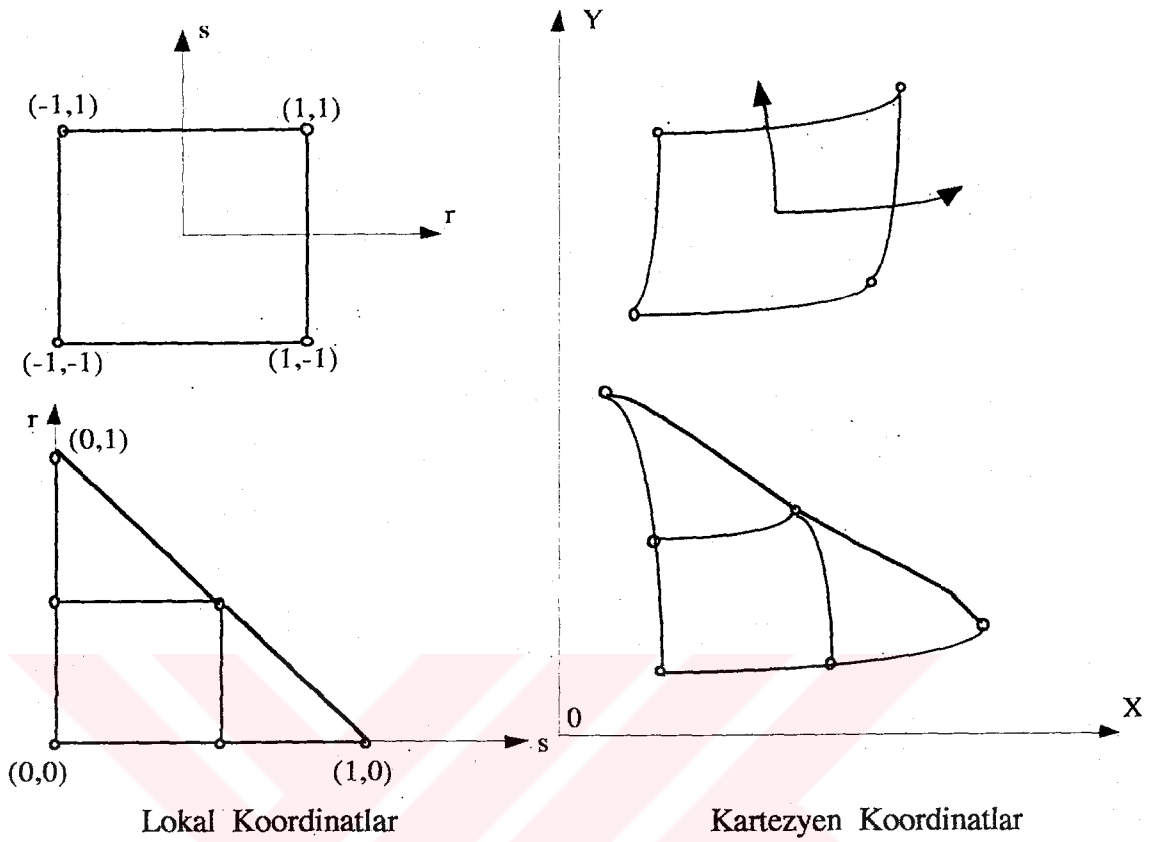
ifadesine eşittir.

Dikdörtgen elemanın düğümleri için tanımlı bir i düğümü gözönüne alınıp, r ve s doğrultularındaki Lagrange interpolasyon fonksiyonları sırasıyla $L_i(r)$ ve $L_i(s)$ ile gösterilerek aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

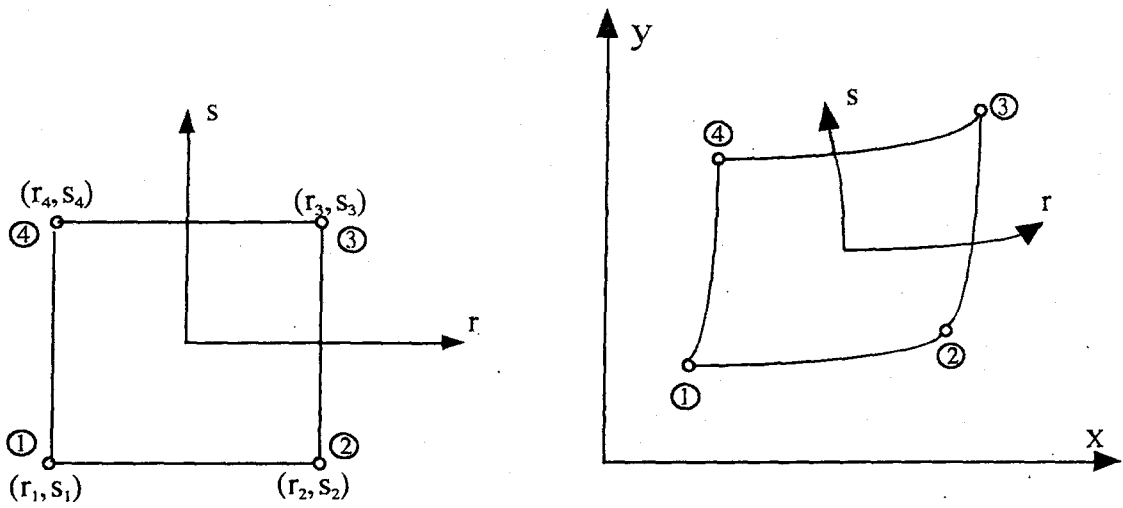
$$L_1(r) = \frac{r - r_2}{r_1 - r_2} ; L_2(r) = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} ; L_3(r) = \frac{r - r_4}{r_3 - r_4} ; L_4(r) = \frac{r - r_3}{r_4 - r_3} \quad (2.9)$$

$$L_1(s) = \frac{s - s_4}{s_1 - s_4} ; L_2(s) = \frac{s - s_3}{s_2 - s_3} ; L_3(s) = \frac{s - s_2}{s_3 - s_2} ; L_4(s) = \frac{s - s_1}{s_4 - s_1} \quad (2.10)$$

Eşitlik (2.7) ' de verilen düğüm interpolasyon fonksiyonları, iki lineer fonksiyonun çarpımı olarak tanımlandığından bilineer olarak isimlendirilir. Bu ifadelerde herbir düğümün koordinatları o düğüm için değerleri yerine yazıldığında N değeri bir, diğer koordinatlar için diğer N katsayıları sıfır olmaktadır. Bu sayede ara yüzelerde bire bir uygunluk sağlanmakta ve dolayısıyla süreklilik meydana gelmektedir. Aynı zamanda interpolasyon fonksiyonu her düğümdeki özellikleri sağlamaktadır.



Şekil 2.4 İki boyutlu elemanlarda transformasyon



Şekil 2.5. Dört düğümlü izoparametrik eleman

İnterpolasyon fonksiyonu Şekil 2.5 esas alınarak dikdörtgen bir elemanın dört düğümü için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 N_1(r, s) &= L_1(r)L_1(s) = \frac{r-1}{-1-1} \cdot \frac{s-1}{-1-1} = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\
 N_2(r, s) &= L_2(r)L_2(s) = \frac{r+1}{1+1} \cdot \frac{s-1}{-1-1} = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\
 N_3(r, s) &= L_3(r)L_3(s) = \frac{r+1}{1+1} \cdot \frac{s+1}{+1+1} = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\
 N_4(r, s) &= L_4(r)L_4(s) = \frac{r-1}{-1-1} \cdot \frac{s+1}{1+1} = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

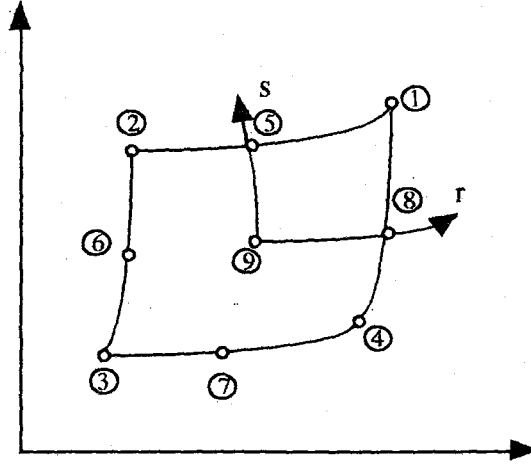
Dörtten fazla düğümlü elemanlarda interpolasyon fonksiyonları benzer şekilde elde edilir. Böyle bir izoparametrik elemanda genel olarak interpolasyon fonksiyonunun elemanı i düğüm için ;

$$N_i(r, s) = L_i(r)L_i(s) \tag{2.12}$$

şeklinde yazılmıştı. n düğümlü bir eleman için interpolasyon fonksiyonu,

$$\phi(r, s) = \sum_{i=1}^n L_i(r) \cdot L_i(s) \cdot \phi_i = L_1(r) \cdot L_1(s) \cdot \phi_1 + \dots + L_n(r) \cdot L_n(s) \cdot \phi_n \tag{2.13}$$

şeklinde yazılır. Düğüm sayısı dört düğümden dokuz düğüme kadar değişen izoparametrik düzlem elemanlar için interpolasyon fonksiyonları Şekil 2.6 'ya göre Tablo 2.1 'de verilmiştir.



Şekil 2.6. Dörtten dokuza kadar değişken düğüm sayısı ihtiva eden izoparametrik düzlem eleman

Tablo 2.1 İnterpolasyon Fonksiyonları

		i=5	i=6	i=7	i=8	i=9
N_1	$1/4(1+r)(1+s)$	$-1/2N_5$			$-1/2N_8$	$-1/4N_9$
N_2	$1/4(1-r)(1+s)$	$-1/2N_5$				$-1/4N_9$
N_3	$1/4(1-r)(1-s)$		$-1/2N_6$			$-1/4N_9$
N_4	$1/4(1+r)(1-s)$		$-1/2N_6$	$-1/2N_7$		$-1/4N_9$
N_5	$1/2(1-r^2)(1+s)$			$-1/2N_7$	$-1/2N_8$	$-1/2N_9$
N_6	$1/2(1-r)(1-s^2)$					$-1/2N_9$
N_7	$1/2(1-r^2)(1-s)$					$-1/2N_9$
N_8	$1/2(1+r)(1-s^2)$					$-1/2N_9$
N_9	$(1-r^2)(1-s^2)$					

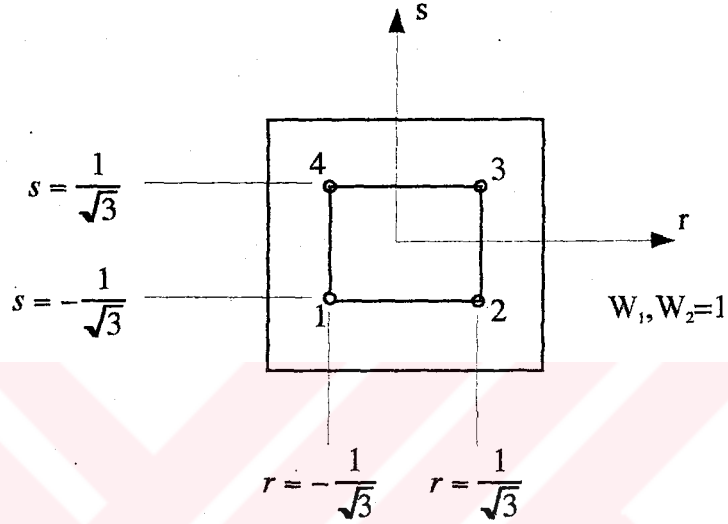
2.4 Nümerik İntegrasyon

Değişik nümerik integrasyon metodları mevcuttur. En yaygın olarak ve en kullanışlı metodlar şunlardır [12].

1- Newton-Cotes formülleri,

2- Gauss Formülleri

Her iki metotta nümerik integrasyonda etkilidir. Gauss integrasyon metodunda modelleme noktaları yüzeyin iç tarafındadır (Şekil 2.7). Dönel elemanların çözümünde kutupsal koordinatlarda ve silindirik koordinatlarda türev işlemlerinde R yarıçapına bağlı $1/R$ çarpanı işleme girdiğinde Gauss integrasyon metodu daha uygun olmaktadır.



Şekil 2.7. Gauss noktaları

Tek katlı bir integral işlemi aşağıda verildiği gibi olsun,

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr \quad (2.14)$$

z düğüm olduğu düşünülürse,

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr \approx w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \dots + w_z f(r_z) \quad (2.15)$$

olur. w_1, w_2, \dots, w_z ağırlık faktörleridir. r_1, r_2, \dots, r_z gauss noktalarıdır ve bu değerler Tablo 2.2.de verilmiştir. İki katlı integral için ,

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds$$

$$I = \sum_{i=1}^z \sum_{j=1}^z W_i W_j f(r_i, s_j) \quad (2.16)$$

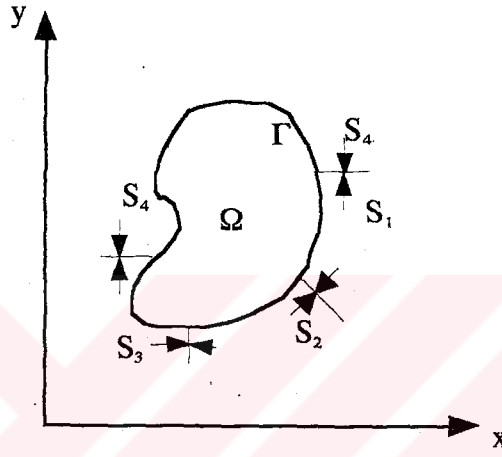
eşitliği elde edilir.

Tablo 2.2. Gauss Noktaları ve Ağırlık Faktörleri

$I = \int_{-1}^1 f(r) dr \approx w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \dots + w_z f(r_z)$		
r_i		w_i
0.0000000000000000	$z=1$	2.0000000000000000
∓ 0.577350269189626	$z=2$	1.0000000000000000
0.0000000000000000	$z=3$	0.8888888888888889
∓ 0.774596669241483		0.5555555555555556
∓ 0.339981043584856	$z=4$	0.652145154862546
∓ 0.861136311594053		0.347854845137454
0.0000000000000000		0.5688888888888889
∓ 0.538469310105683	$z=5$	0.478628670499366
∓ 0.906179845938664		0.236926885056189
∓ 0.238619186083197		0.467913934572691
∓ 0.661209386466265	$z=6$	0.360761573048139
∓ 0.932469514203152		0.171324492379170

3. GEÇİŞLİ HAL ISI İLETİMİNİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

3.1 Giriş



Şekil 3.1. İki boyutlu genel ısı iletimi için çözüm bölgesi

Sonlu eleman yöntemi, gerilme analizi, akışkanlar mekaniği, elektrik ve magnetik alanlarında kullanıldığı gibi ısı transferi problemlerinde de yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Ele alınan bu problemler genellikle skaler ve vektörel alan problemleri olarak iki şekilde sınıflandırılır [12], [13].

Bu bölümde, modele göre belirlenmiş sınır şartlarında kullanılarak geçişli hal ısı iletimi problemi çözülecektir. Skaler alan problemlerinin en çarpıcı özelliği, mühendisliğin hemen hemen her dalında bulunabilmesidir. Bunlar genellikle Helmholtz denklemi olarak adlandırılan,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \lambda \phi + Q = 0 \quad (3.1)$$

formülüyle ifade edilir. Bu denklemden $\phi = \phi(x, y, z)$ aranan alan değişkenidir. Γ yüzeyi ile sınırlanmış anizotropik iki boyutlu Ω cisminde kararlı şartlarda veya geçişli ısı transferi olduğunu düşünelim (Şekil 3.1). Bu durumda enerjinin korunumundan ;

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2)$$

ifadesi elde edilir. Burada q_x , ve q_y birim alındaki ısı akısını , Q birim hacimdeki iç enerji üretimini, t zamanı, ρ yoğunluğu ve c ise özgül ısı kapasitesini göstermektedir.

Termal olarak anizotropik ortamda Fourier kanunu ;

$$\begin{aligned} q_x &= -\left(k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y}\right) \\ q_y &= -\left(k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

eşitliği ifade edilebilir. Bu denklemlerde k_{ij} simetrik ısı iletim tensörüdür. Malzeme özellikleri olan ρ , c ve k_{ij} sıcaklığa bağlı olabilir. Yukarıdaki denklemler ısı iletim denklemleri olup başlangıç ve sınır şartlarına göre çözümü yapılır. Başlangıç şartı, iki boyutlu hal için $t=0$ anında $T(x, y, t) = T_0(x, y)$ şeklinde olup, başlangıç halindeki sıcaklık dağılımı olarak ele alınır. Şekil 3.1 ' de gösterilen cisim için sınır şartları ise, sırasıyla sabit yada zamana ve koordinata göre tanımlanmış sıcaklık, sabit yada zamanla ve konumla değişen ısı akısı, taşınım ile ısı akısı ve ışınım ile ısı akısı şeklindedir. Bu şartlar aşağıdaki şekilde formüle edilir.

$$\begin{aligned} S_1 \text{ üzerinde} \quad T_s &= T_1(x, y, t) \\ S_2 \text{ üzerinde} \quad -q_s &= q_x n_x + q_y n_y \\ S_3 \text{ üzerinde} \quad h(T_s - T_c) &= q_x n_x + q_y n_y \\ S_4 \text{ üzerinde} \quad \sigma \cdot \varepsilon \cdot T_s^4 - \alpha \cdot q_r &= q_x n_x + q_y n_y \end{aligned} \quad (3.4)$$

Burada T_1 yüzey sıcaklığı, n_x, n_y yüzeyin doğrultman kosinüsleri, q_s birim alanda

tanımlı ısı akısı, h konveksiyonla ısı transfer katsayısını, T_s bilinmeyen yüzey sıcaklığını, T_c çevre sıcaklığını, σ Stephan-Boltzman sabitini, ε ve α yüzey özelliklerini, q_r birim alandan yapılan radyasyonla ısı transferini göstermektedir.

3.2 Sonlu Eleman Formülasyonu

Şekil 3.1' de verilen Ω çözüm bölgesi herbirinde z adet düğüm bulunan M elemana bölünürse, bir eleman içindeki sıcaklık ve sıcaklık gradyanı aşağıdaki gibi gösterilebilir [12], [13].

$$T^e(x, y, t) = \sum_{i=1}^z N_i(x, y) T_i(t) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^e}{\partial x}(x, y, t) &= \sum_{i=1}^z \frac{\partial N_i}{\partial x}(x, y) T_i(t) \\ \frac{\partial T^e}{\partial y}(x, y, t) &= \sum_{i=1}^z \frac{\partial N_i}{\partial y}(x, y) T_i(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Matris notasyonunda ifade edilirse

$$T^e(x, y, t) = [N(x, y)] \{T(t)\} \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T^e}{\partial x}(x, y, t) \\ \frac{\partial T^e}{\partial y}(x, y, t) \end{bmatrix} = [B(x, y)] \{T_i(t)\} \quad (3.8)$$

olur. Burada $[N]$ sıcaklık interpolasyon matrisini, $[B]$ ise sıcaklık gradyanı, sıcaklık dönüşüm matrisi olarak adlandırılır. T_i her düğümün sıcaklığı $\{T_i(t)\}$ 'de eleman düğüm sıcaklıkları vektörüdür.

$$[N(x,y)] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_r] \quad (3.9)$$

$$[B(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_r}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_r}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Burada enerji denklemi olan (3.2) eşitliğine minimum potansiyel enerji ilkesi uygulanırsa,

$$\int \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - Q + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) \cdot N_i \cdot \partial\Omega = 0 \quad (3.11)$$

ve

$$\int \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \cdot N_i \cdot \partial\Omega \quad (3.12)$$

kısmı integre edilir ve ifade yeniden yazılırsa ,

$$\int_{\Omega'} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} N_i \partial\Omega - \int_{\Omega'} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \cdot \partial\Omega = \int_{\Omega'} Q \cdot N_i \cdot \partial\Omega - \int_{\Gamma'} (q \cdot \hat{n}) \cdot N_i \cdot \partial\Gamma \quad (3.13)$$

$$i=1, 2, 3, \dots, z$$

olur. Yüzey bölgesi her bölgede etkili olan sınır şartlarının toplamı olarak ifade edilebileceği için, son terim her bir sınır şartı için ayrı ayrı integre edilirse,

$$\int_{\Omega'} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} N_i \partial\Omega - \int_{\Omega'} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \cdot \partial\Omega =$$

$$\int_{\Omega'} Q N_i \partial\Omega - \int_{S_1} (q \cdot \hat{n}) N_i \partial\Gamma - \int_{S_2} q_s N_i \partial\Gamma - \int_{S_3} h(T - T_e) N_i \partial\Gamma - \int_{S_4} (\sigma \epsilon T^4 - \alpha q_r) N_i \partial\Gamma$$

$$i=1, 2, 3, \dots, z$$

elde edilir. Sonuçta genel denklem ve eleman denklemleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$[C] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} + \left[[K_c] + [K_h] + [K_r] \right] \cdot \{T\} = \{R_T\} + \{R_Q\} + \{R_q\} + \{R_h\} + \{R_r\} \quad (3.14)$$

Burada ;

$$[C] = \int_{\Omega^e} \rho c \{N\} [N] \partial \Omega$$

$$[K_c] = \int_{\Omega^e} [B]^T [k] [B] \partial \Omega$$

$$[K_h] = \int_{S_3} h \cdot \{N\} [N] \partial \Gamma$$

$$[K_r] \cdot \{T\} = \int_{S_4} \sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4 \cdot \{N\} \cdot \partial \Gamma$$

$$\{R_T\} = - \int_{S_1} (q \cdot \hat{n}) \{N\} \partial \Gamma$$

$$\{R_Q\} = - \int_{\Omega} Q \{N\} \partial \Omega$$

$$\{R_q\} = \int_{S_2} q_s \{N\} \partial \Gamma$$

$$\{R_h\} = \int_{S_3} h T_c \{N\} \partial \Gamma$$

$$\{R_r\} = - \int_{S_4} \alpha q_r \{N\} \partial \Gamma$$

şeklinde dir. Verilen herbir ifade sırası ile şu şekilde tanımlanır. [C] eleman kapasitans matrisi, [K_c], [K_h], [K_r] eleman ısı iletim matrisleri olup sırası ile iletim, taşınım, radyasyon şartlarını ifade etmektedir. Taşınım ve ışı nım matrisleri yalnızca yüzeyle ilgili sınır şartlarına maruz elemanlar için hesaplanır. {R_T}, {R_Q}, {R_q}, {R_h} ve {R_r} sırasıyla tanımlı düğüm sıcaklığı, iç ısı kaynağı, tanımlı yüzey ısı akısı, yüzey taşınımı, ve ışı nımdan kaynaklanan ısı l yük vektörleridir.

Elde edilen bu genel ifade (3.14) ele alınan problemin durumuna göre çeşitli şekillerde düzenlenebilir. Bunlardan en çok karşılaşılan dört örnek aşağıda verilmiştir.

1- Lineer kararlı hal ısı iletimi

$$\left[[K_c] + [K_h] \right] \cdot \{T\} = \{R_Q\} + \{R_q\} + \{R_h\} \quad (3.15)$$

2- Linear geçişli hal ısı iletimi

$$[C]\{\dot{T}(t)\} + [[K_c] + [K_h(t)]] \cdot \{T(t)\} = \{R_Q(t)\} + \{R_q(t)\} + \{R_h(t)\} \quad (3.16)$$

3- Nonlinear kararlı hal ısı iletimi

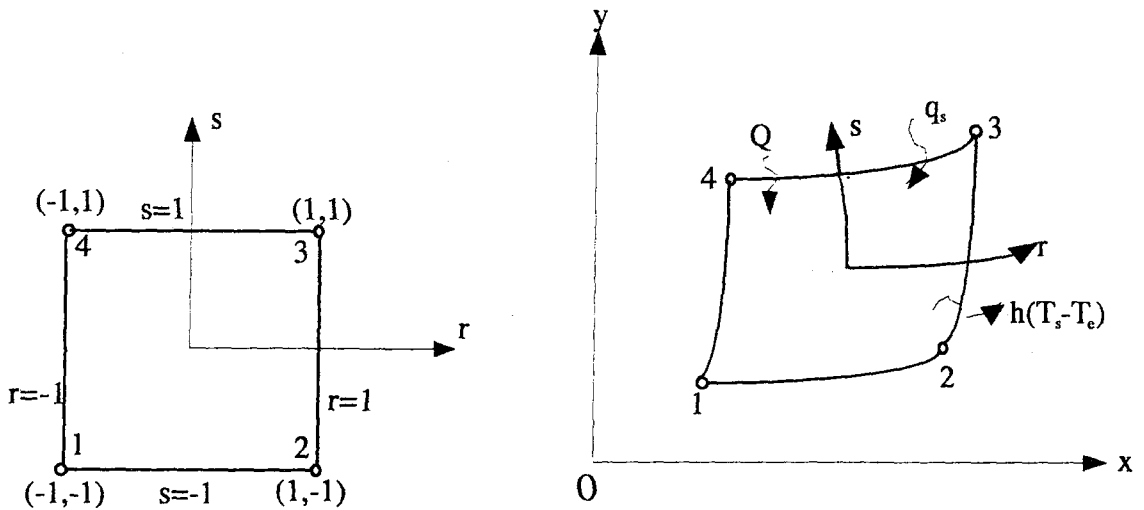
$$[[K_c(T)] + [K_h(T)] + [K_r(T)]] \cdot \{T\} = \{R_Q(T)\} + \{R_q(T)\} + \{R_h(T)\} + \{R_r(T)\} \quad (3.17)$$

4- Nonlinear geçişli hal ısı iletimi

$$[C(T)]\{\dot{T}\} + [[K_c(T)] + [K_h(T, t)] + [K_r(T)]] \cdot \{T(t)\} = \{R_Q(T, t)\} + \{R_q(T, t)\} + \{R_h(T, t)\} + \{R_r(T, t)\} \quad (3.18)$$

elde edilen bu genel denklemler çözülecek probleme göre yeniden düzenlenerek çözüm yapılır.

3.2.1 İzoparametrik Eleman



Şekil 3.2. İzoparametrik elemanda ısı transferi

İzoparametrik yaklaşım kullanılarak, r-s düzlemindeki noktalar interpolasyon fonksiyonları kullanılarak, x-y düzlemindeki noktalara transform edilirse,

$$x(r, s) = \sum_{i=1}^z N_i(r, s)x_i \quad (3.19.a)$$

$$y(r, s) = \sum_{i=1}^z N_i(r, s)y_i \quad (3.19.b)$$

$$T(r, s) = \sum_{i=1}^z N_i(r, s)T_i \quad (3.19.c)$$

İnterpolasyon fonksiyonları $N_i(r, s)$ (2.11) eşitliklerinde tanımlanmıştır. Hacim integrali içeren element matrisleri aşağıdaki şekilde dönüştürülebilir.

$$d\Omega = t \cdot dx \cdot dy = t \cdot |J(r, s)| \cdot dr \cdot ds$$

Bu eşitlikteki $|J|$ ifade Jacobian Matrisinin determinantını göstermektedir ve aşağıdaki şekilde türetilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial r} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.20)$$

veya

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

olur. Bu denklikte $[J]$ jacobian matrisi olarak tanımlanır ve

$$[J] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

olur. (3.19.a) ve (3.19.b) kullanılarak

$$[J(r,s)] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^z \frac{\partial N_i}{\partial r}(r,s) \cdot x_i & \sum_{i=1}^z \frac{\partial N_i}{\partial r}(r,s) \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^z \frac{\partial N_i}{\partial s}(r,s) \cdot x_i & \sum_{i=1}^z \frac{\partial N_i}{\partial s}(r,s) \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

ifadesi elde edilir.

3.2.2 Eleman Matrislerinin Türetilmesi

$$[C] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho c \{N(r,s)\} [N(r,s)]^t [J(r,s)] dr ds$$

eşitliğindeki kapasitans matrisi, nümerik integrasyon kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$[C] = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} W_i W_j \rho c t \{N(r_i, s_j)\} [N(r_i, s_j)]^t [J(r_i, s_j)] \quad (3.24)$$

olur. NG her bir integrasyon doğrultusundaki gaus noktalarının sayısını, W_i , W_j ağırlık faktörlerini göstermektedir.

Benzer şekilde eleman iletim matrisi de hesaplanabilir. Sıcaklık değişim interpolasyon matrisi ,

$$[B(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_r}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_r}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J(r,s)]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

(3.10) ifadesi, (3.25) ifadesi kullanılarak dönüştürülürse,

$$[B(r,s)] = [J(r,s)]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_r}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_r}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

olur. Eleman iletim matrisi ,

$$[K_c] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(r,s)]^T [k [B(r,s)] J(r,s)] dr ds$$

Bu ifade nümerik integrasyonu alındığında,

$$[K_c] = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} W_i W_j [B(r_i, s_j)]^T [k [B(r_i, s_j)] J(r_i, s_j)] \quad (3.27)$$

eşitliği elde edilir [12]. Benzer şekillerde diğer eleman matrisleri aşağıdaki gibi elde edilebilir .

$$[K_h] = \sum_{i=1}^{NG} W_i h [N_i]^T [N_i] \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial N_i}{\partial r} x_i\right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} y_i\right)^2} \cdot t \quad (3.28)$$

$$[R_h] = \sum_{i=1}^{NG} W_i h T [N_i] \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial N_i}{\partial r} x_i\right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} y_i\right)^2} \cdot t \quad (3.29)$$

3.2.3 İki Boyutlu Geçişli Isı İletimi İçin Sıcaklık Dağılımı

Lineer ısı transfer problemleri kararlı durum sıcaklıkları için ;

$$[[K_c] + [K_h]] \cdot \{T\} = \{R_Q\} + \{R_q\} + \{R_h\} \quad (3.30)$$

denkleminin çözümünü, geçişli sıcaklıklar için ;

$$[C] \dot{T}(t) + [[K_c] + [K_h(t)]] \cdot \{T(t)\} = \{R_Q(t)\} + \{R_q(t)\} + \{R_h(t)\} \quad (3.31)$$

denkleminin çözümünü içerir ve her denklemin kullanıldığı yerde uygun başlangıç ve sınır şartları kullanılır.

Lineer kararlı şartlarda yapılan iletim problemlerinin nümerik çözümü özel zorluklar içermez. Bu tip problemler cebirsel denklemlerin simetrik sistemi, Gaus Eliminasyon gibi standart yöntemler kullanılarak kolayca çözümlenebilir.

Lineer geçişli ısı iletim problemlerinin nümerik çözümleri için düzenli diferansiyel denklemlerin birinci dereceden düzenlenmiş hali gereklidir. (3.31) eşitliği ele aldığımız sınır şartlarına göre yeniden düzenlenirse,

$$[C]\{\dot{T}(t)\} + [[K_c] + [K_h(t)]] \cdot \{T(t)\} = \{R_h(t)\} \quad (3.32)$$

şeklinde elde edilir. Yüzey film katsayısı yüzey sıcaklığına büyük bir bağlılık gösterdiğinden ilgili matris ve vektörün yüzey sıcaklığına bağlı olarak hesaplanması gerekmektedir. Bu arada sıcaklığa bağlı olarak değişen yoğunluk, özgül ısı ve iletim katsayısı gibi malzeme özelliklerinin de dikkate alınması ve ilgili matrislerin bu değişen özelliklere göre değişken olarak ele alınması gerekir. Türev sonlu farklar yaklaşımı ile (3.32) ifadesi,

$$[C]\left\{\frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t}\right\} + [[K_c] + [K_h(t)]] \cdot \{T_n\} = \{R_h(t)\} \quad (3.33)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$[C]\{T_{n+1}\} = [[C] - \Delta t \cdot [[K_c] + [K_h(t)]]] \cdot \{T_n\} + \Delta t \cdot \{R_h(t)\} \quad (3.34)$$

eşitliği elde edilir. (3.34) denklemini farklı algoritmalar kullanılarak çözümleri yapılabilir (Crank-Nicolson Metodu, Galerkin Metodu, Geri Farklar Metodu). Biz bu denklemini Crank-Nicolson Algoritmasını kullanarak yeniden düzenlersek,

$$[K] = [[K_c] + [K_h(t)]]$$

olmak üzere,

$$\left[[C] + [K] \cdot \frac{\Delta t}{2} \right] \{T_{n+1}\} = \left[[C] - \frac{\Delta t}{2} \cdot [K] \right] \cdot \{T_n\} + \Delta t \cdot \{R_h(t)\} \quad (3.35)$$

Böylece yukarıdaki denklemden düğüm sıcaklıkları kolayca hesaplanabilir. Fakat bu denklemin çözümünde dikkat edilmesi gereken en önemli husus zaman aralığı Δt 'nin belirlenmesidir. Bu zaman aralığı kritik zaman aralığından küçük olmalıdır [1].

3.2.4 Kritik Zaman Aralığı

Isı iletim problemlerinin çözümünde sonlu eleman yönteminin kullanılması düzensiz geometriler için kolaylık sağladığından yaygın olarak kullanılır. Fakat geçişli çözümlerde (zamana bağlı çözümlerde) zaman aralığının seçimi oldukça önemlidir. Çok büyük zaman aralığı anlamsız ve salınımlı bir çözüme götürdüğü gibi çok küçük zaman aralığı ise çözüm zamanı uzamaktadır. Bu tanımlamaya göre alınabilecek en büyük zaman aralığı kritik zaman aralığıdır (Δt_c) ve uygun bir çözümde $\Delta t_c \geq \Delta t$ olarak seçilmelidir. Yapılan çalışmalarda λ_n sistemin en büyük özdeğeri olmak üzere,

$$\Delta t_c = \frac{2}{\lambda_n} \quad (3.36)$$

alınabilecek en büyük değer olduğu saptanmıştır [12]. Maksimum eş değer (λ_n), dolayısıyla kritik zaman aralığının belirlenmesinde, [C] ve [K] matrislerinin ve düğüm noktalarının termal özellikleri (k, c, h, ρ) ile ilk durum ve sınır şartlarının önemi büyüktür. Tüm bu koşullar göz önünde bulundurularak sistemin kritik zaman aralığı izoparametrik eleman için,

$$\Delta t_c = \frac{1}{2} \text{Min}_{i=1}^z \left[\frac{C_i}{S_i + \sum_{j=i}^z |S_j|} \right] \quad (3.37)$$

ifadesi ile hesaplanabilir [2].

Sonuç olarak (3.35) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$\{T_{n+1}\} = \left[[C] + [K] \cdot \frac{\Delta t}{2} \right]^{-1} \left[\left[[C] - \frac{\Delta t}{2} \cdot [K] \right] \cdot \{T_n\} + \Delta t \cdot \{R_h(t)\} \right] \quad (3.38)$$

elde edilir. Böylece $\Delta t_c \geq \Delta t$ olduğu düşünülerek ve (3.37) eşitliği de kullanılırsa, (3.38) denkleminin çözümünden elemanın düğüm noktalarının sıcaklıkları elde edilmiş olur.



4. GERİLME VE ŞEKİL DEĞİŞTİRME ANALİZİNDE TEMEL EŞİTLİKLER

Gerilme analizi yada katı cismin mekaniği problemlerinde temel gaye, belirli yükleme durumu ve sınır şartları altında şekil değiştirmelerin, yer değiştirmelerin ve gerilmelerin bulunmasıdır. Çalışmada kullanılan sonlu eleman metoduyla bu büyüklüklerin hesaplanmasında, çözüm yönteminin özelliği gereği mevcut elastisite denklemlerinin matris formunda yazılması uygun olmaktadır. Bu nedenle temel eşitlikler, izotrop ve anizotrop malzemeler için matris formda ifade edilmiştir.

4.1. Gerilme Şekil Değiştirme Bağlantıları

4.1.1. Üç boyutlu durum

Üç boyutlu katı izotrop malzemeler için lineer elastik durumda Gerilme-Şekil Değiştirme Bağlantıları Hooke Kanunu olarak aşağıdaki gibi verilir [14].

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = [C] \cdot \{\sigma\} + \{\varepsilon_0\} = [C] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx_0} \\ \varepsilon_{yy_0} \\ \varepsilon_{zz_0} \\ \varepsilon_{xy_0} \\ \varepsilon_{yz_0} \\ \varepsilon_{zx_0} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Burada $[C]$ elastik katsayılar matrisi olarak ;

$$[C] = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

şeklinde verilir. ε_0 başlangıç şekil değiştirme vektörünü, E malzemenin elastisite modülünü ve ν poisson oranını göstermektedir. İzotrop bir malzemenin ısıtılması durumunda başlangıç şekil değiştirme vektörü ;

$$\varepsilon_0 = \alpha \cdot T \cdot [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (4.3)$$

olarak verilir. Burada α ($1/^\circ C$) malzemenin ısı genleşme katsayısını ve T ($^\circ C$) sıcaklığı göstermektedir. Bazı zamanlar gerilmeleri açıklamak için şekil değiştirmelere bağlı olarak yazılan eşitlikler gereklidir. Isıl şekil değiştirmeler de dahil olmak kaydıyla (4.1) eşitliğinden gerilmeler için ;

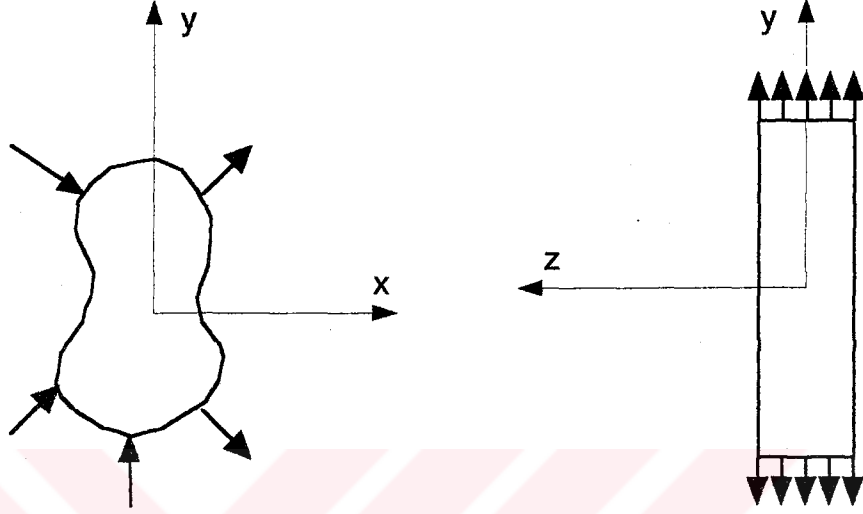
$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}\} = [D] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-2\nu} \cdot \alpha \cdot T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

eşitliği yazılabilir. $[D]$ matrisi, $[C]$ ' nin tersidir ve bu matris aşağıdaki gibi ifade edilebilir ;

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

(4.5)

4.1.2. İki boyutlu durum



Şekil 4.1. Düzlem gerilme

Cismin boyutları için koordinat doğrultularından birinde çok küçük alınarak yapılan uygulama düzlem gerilme olarak kabul edilir. Böylece düzlem yüklü ince levhaların analizi, düzlem gerilme durumundaki kabuller kullanılarak yapılır. Düzlem gerilme durumunda ;

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \quad (4.6)$$

kabulü yapılmaktadır. Burada z şekil 4.1 ' de gösterildiği gibi levha düzlemine dik doğrultuyu göstermektedir ve levha kalınlığı boyunca (z doğrultusunda) gerilme değişmemektedir. Bu durumda gerilme şekil değiştirme bağıntıları (4.1) ve (4.4) eşitliklerinden ;

$$\bar{\epsilon} = [C] \cdot \bar{\sigma} + \bar{\epsilon}_0 \quad (4.7)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ;

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} ; \quad \bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} ; \quad [\mathbf{C}] = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

eşitlikleri ve ısıl şekil değiştirme durumunda ise ;

$$\bar{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx_0} \\ \varepsilon_{yy_0} \\ \gamma_{xy_0} \end{Bmatrix} = \alpha \cdot T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(4.9)

eşitliği yazılabilir. Gerilme değeri için ise ;

$$\bar{\sigma} = [\mathbf{D}] \cdot (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_0) = [\mathbf{D}] \cdot \bar{\varepsilon} - \frac{E \cdot \alpha \cdot T}{1-\nu} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $[\mathbf{D}]$ matrisi ;

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

şeklindedir. Düzlem gerilme durumunda z doğrultusundaki şekil değiştirmeler sıfır olmayacaktır ve (4.1) denkleminde ;

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T \quad (4.12)$$

bulunur. Ayrıca ;

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (4.13)$$

olur.

4.2. Anizotropik Malzemeler İçin Gerilme-Şekil Değişirme Bağlıları

Yukarıdaki kısımda, izotrop elastik malzemeler için gerilme-şekil değişirme bağıntıları açıklanmıştır. İzotrop terimi, malzeme özelliklerinin cismin içerisindeki her bir noktada aynı olması anlamında kullanılmaktadır. Diğer bir ifadeyle, malzeme içerisindeki tüm noktalardan geçen her bir düzlemdaki malzeme özelliklerinin aynı olmasıdır.

Cismin içerisinde her bir noktada farklı özelliğe sahip olan belirli birtakım malzemeler (takviyeli beton, fiber takviyeli kompozitler, tuğla v.s.) vardır. Böyle malzemeler genellikle anizotropik malzemeler olarak isimlendirilirler ve kısaca özellikleri her bir doğrultuda farklı değişimler gösteren malzemeler şeklinde tarif edilirler [22]. Bu durum malzemeler için en genel haldir ve bu hal için gerilme-şekil değişirme arasındaki bağıntı Genelleştirilmiş Hooke Kanunu olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir ;

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (4.15)$$

$$S_{ijkl} = (C_{ijkl})^{-1} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (4.16)$$

Burada, σ_{ij} gerilme tansörünün bileşenlerini, ε_{ij} şekil değişirme tansörünün bileşenlerini, C_{ijkl} elastik direngenlik tansörünü ve S_{ijkl} elastik gevşeklik tansörünü göstermektedir. (4.14) ve (4.15) denklemleri açık olarak yazıldığında herbirinde dokuz terim bulunan, dokuz denklem ortaya çıkar. C_{ijkl} ve S_{ijkl} dördüncü dereceden tansörler olup seksen bir bağımsız değişken içerirler. Kütle kuvvetleri olmadığı durumda gerilme ve şekil değişirme tansörleri simetrik olup ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ve $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) sabitler otuzaltıya indirgenmiş olur. Mekanikte genellikle kısaltılmış notasyonların (Love Notasyonu) kullanılması ile direngenlik ve gevşeklik tansörlerinin ikinci dereceden

olması sağlanır. Kısaltılmış notasyonda gerilme ve şekil değiştirme büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{array}{ll}
 \sigma_{11} = \sigma_1 & \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \\
 \sigma_{22} = \sigma_2 & \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \\
 \sigma_{33} = \sigma_3 & \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \\
 \sigma_{23} = \sigma_4 = \tau_{23} & \varepsilon_{23} = \varepsilon_4 = \gamma_{23} \\
 \sigma_{13} = \sigma_5 = \tau_{13} & \varepsilon_{13} = \varepsilon_5 = \gamma_{13} \\
 \sigma_{12} = \sigma_6 = \tau_{12} & \varepsilon_{12} = \varepsilon_6 = \gamma_{12}
 \end{array}
 \quad \text{ve} \quad (4.17)$$

Ayrıca, direngelik ve gevşeklik matrislerinin otuzaltı elemanının birbirinden tamamen bağımsız olmadığı şekil değiştirme enerjisi yardımı ile gösterilebilir. Malzeme σ_i gerilmesi altında $\partial\varepsilon_i$ elastik şekil değişimine uğrarsa, birim hacim başına elastik enerji artımı ;

$$\partial\omega_i = \sigma_i \cdot \partial\varepsilon_i \quad (4.18)$$

olarak yazılabilir.

$$\sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j \quad (4.19)$$

olup (4.18) eşitliğinin integralinden ,

$$\omega = (C_{ij} \cdot \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i) / 2 \quad (4.20)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, σ_i gerilmesi altında $\partial\varepsilon_j$ şekil değişimi için hesaplanırsa,

$$\omega = (C_{ji} \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) / 2 \quad (4.21)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla bu denklemlerin türevleri alınarak aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varepsilon_i} = C_{ij} \cdot \varepsilon_j \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_j} = C_{ji} \cdot \varepsilon_i$$

(4.22) eşitliklerinin tekrar türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varepsilon_i \cdot \partial \varepsilon_j} = C_{ji}$$

(4.23)

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varepsilon_i \cdot \partial \varepsilon_j} = C_{ij}$$

elde edilir. Türev alma sırası türevin değerini değiştirmeyeceğinden,

$$C_{ij} = C_{ji}$$

(4.24)

eşitliği geçerli olacaktır. Benzer şekilde,

$$S_{ij} = S_{ji}$$

(4.25)

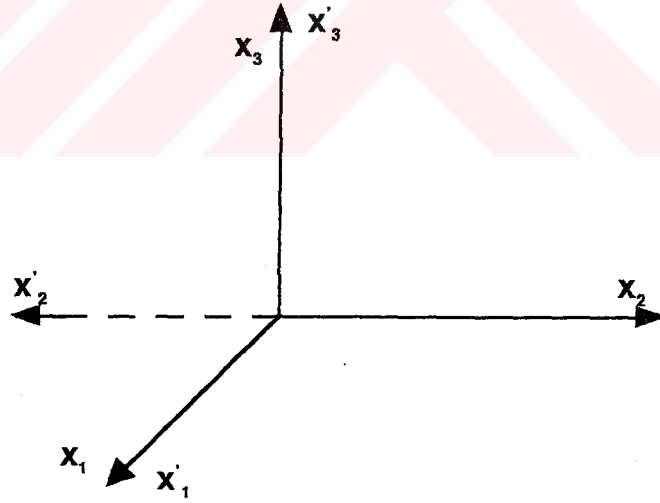
bağıntısında gösterilebilir. Yani direngelik ve gevşeklik matrislerinin her ikisi de simetriktir ve birbirinden bağımsız sabit sayısı yirmibire düşmektedir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Bu eşitlik malzeme bakımından hiçbir simetri düzlemi olmayan anizotropik malzemeleri temsil etmektedir. Böyle bir malzemenin diğer adı triklinik malzemedir. Karma malzemelerde mekanik davranışlar bakımından bazı simetri düzlemleri

mevcuttur. Eğer malzeme özellikleri sadece bir düzlemde simetriye sahipse, böyle malzemeler monoklinik olarak adlandırılır. Burada simetri düzlemi (z) ' tir ve bağımsız elastik sabit sayısı onüçtür. Eğer malzemede mekanik özellikler bakımından üç simetri düzlemi (ortogonal düzlemler) varsa, malzeme ortotropik (ortogonal anizotropik) olarak adlandırılır. Bu durumda bağımsız sabit sayısı sadece dokuz olur. Bir malzemede bu simetrilere ek olarak mekanik özelliklerin tüm doğrultularda eşit olduğu bir düzlem mevcut ise bu tip malzemeler transvers izotropik olarak adlandırılır. Böylece gerilme-şekil değiştirme bağıntısındaki bağımsız sabit sayısı beşe düşer. Eğer malzeme özelliklerine ait simetri düzlemleri sonsuz sayıda ise, başka bir ifadeyle malzeme özellikleri bütün doğrultularda aynı ise, yukarıdaki bağıntıları izotropik malzeme durumuna indirgenebilir ve bu durumda direngenlik ve gevşeklik matrisindeki bağımsız sabit sayısı yalnızca iki tane olur.

4.3. Ortotropik Malzemeler



Şekil 4.2. Ortotropik malzemeler için simetri düzlemleri

Ortotropik bir malzemede karşılıklı birbirine dik üç simetri düzlemi vardır. x_1x_3 düzleminde simetri varsa, bu durumda kosinüs doğrultmanları aşağıda verilen tabloda olduğu gibidir.

Tablo 4.1 Doğrultman Cosinüsleri

	x_1	x_2	x_3
x_1	$l_{11}=1$	$l_{12}=0$	$l_{13}=0$
x_2	$l_{21}=0$	$l_{22}=-1$	$l_{23}=0$
x_3	$l_{31}=0$	$l_{32}=0$	$l_{33}=1$

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{11} &= \sigma_{11} & \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} \\
 \sigma'_{22} &= \sigma_{22} & \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{22} \\
 \sigma'_{33} &= \sigma_{33} & \varepsilon'_{33} &= \varepsilon_{33} \\
 \sigma'_{23} &= -\sigma_{23} & \varepsilon'_{23} &= -\varepsilon_{23} \\
 \sigma'_{31} &= \sigma_{31} & \varepsilon'_{31} &= \varepsilon_{31} \\
 \sigma'_{12} &= -\sigma_{12} & \varepsilon'_{12} &= -\varepsilon_{12}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & C_{3131} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.28}$$

Simetrik

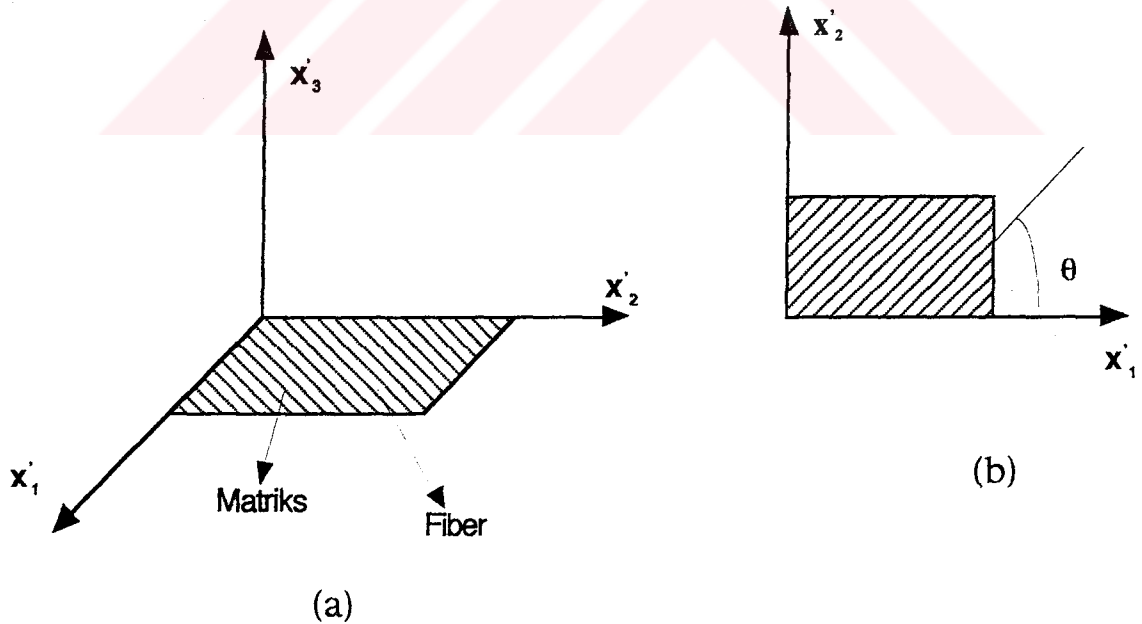
Benzer şekilde x_2x_3 simetri düzlemleri içinde (4.28) bağıntısı yazılabilir. Bu yüzden (4.28) ortotropik bir ortam için genel gerilme-şekil değiştirme bağıntısıdır.

5. BİR TABAKANIN MEKANIĞI

5.1. Giriş

Mühendislik uygulamalarında fiberle güçlendirilmiş çoğu kompozit malzemeler ortotropik özellik gösterirler. Bu bölümde ortotropik bir tabakanın mekanik özellikleri incelenecektir. Bunun içinde bir önceki bölümde çıkarılan sonuçlar burada kullanılacaktır. Daha önce aşağıdaki tanımlamaların yapılması fayda sağlayacaktır.

- Matriks fiberle güçlendirilmiş materyaldir.
- Lamina Şekil 5.1.a ' de gösterildiği gibi tüm fiberleri tek bir doğrultuda yönlenmiş bir kompozit malzeme tabakasıdır.
- Özel ortotropik kompozit malzemeler için θ açısı, 0° veya 90° ' dir .
- Genelde ortotropik kompozit malzemelerde θ açısı, 0° ile 90° arasında bir değer alır.



Şekil 5.1. Ortotropik malzemedeki takviye açısı

5.2. Elastiklik Matrisi Bileşenlerinin Tanımlanması

Ortotropik kompozit malzemenin elastik davranışını belirleyen elastiklik matrisi bileşenlerini, malzemenin mühendislik sabitleri veya elastik sabitleri olarak adlandırılan E, ν , G büyüklükleri cinsinden ifade etmek için tek eksenli çekme veya kayma deneyleri yapılmaktadır.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & C_{3131} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Simetrik

Bir tabakada kalınlık boy ve en ile karşılaştırıldığında oldukça küçüktür. Bu yüzden ;

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= 0 \\ \sigma_{23} &= 0 \\ \sigma_{31} &= 0 \\ 2\varepsilon_{23} &= 0 \\ 2\varepsilon_{31} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Olur. Buradan ;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & C_{3131} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Simetrik

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & S_{3131} & 0 \\ & & & & & S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Simetrik

(5.2)' den ;

$$\varepsilon_{33} = -\frac{C_{1133}}{C_{3333}} \varepsilon_{11} - \frac{C_{2233}}{C_{3333}} \varepsilon_{22}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_{1111} - \frac{C_{1133}^2}{C_{3333}}) & (C_{1122} - \frac{C_{1133}C_{2233}}{C_{3333}}) & 0 \\ (C_{1122} - \frac{C_{1133}C_{2233}}{C_{3333}}) & (C_{2222} - \frac{C_{2233}^2}{C_{3333}}) & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Elastiklik matrisindeki ifadeler ;

$$Q_{1111} = (C_{1111} - \frac{C_{1133}^2}{C_{3333}})$$

$$Q_{2222} = (C_{2222} - \frac{C_{2233}^2}{C_{3333}})$$

$$Q_{1122} = Q_{2211} = (C_{1122} - \frac{C_{1133}C_{2233}}{C_{3333}})$$

$$Q_{1112} = 0$$

$$Q_{1211} = 0$$

$$Q_{2212} = 0$$

$$Q_{1222} = 0$$

$$Q_{1212} = C_{1212}$$

Tensörel Olarak ;

$$Q_{ijkl} = (C_{ijkl} - \frac{C_{ij33}C_{kl33}}{C_{3333}}) \quad (i, j, k, l = 1, 2) \quad (5.5)$$

Denklem (5.4), Takviye yönünde çekme için (özel ortotropik malzemeler) gerilme bağıntısı ;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1111} & Q_{1122} & 0 \\ Q_{1122} & Q_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

şeklini alır.

(5.3) Eşitliği Takviye Yönündeki Çekme Hali İçin Şekil Değiştirme Bağıntısı ;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & 0 \\ S_{1122} & S_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & S_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 2\sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_{33} \neq 0$$

şeklindedir. (5.7) ifadesi düzenlenirse ;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 4S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_6 = \sigma_{12}$$

eşitliği elde edilir. Burada $2\varepsilon_{12}$ malzeme de meydana gelen kaymayı gösterir. (5.8) denkliğindeki mühendislik sabitleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_{22}} \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \\ S_{66} &= \frac{1}{4G_{12}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

- E_{11} Fiber yönündeki (x_1 yönündeki) Young Modülünü
- E_{22} Fiber' e dik dorultudaki (x_2 yönündeki) Young Modülünü
- ν_{12} Fiber yönünde şekil değiştirmesinin x_2 yönündeki şekil değiştirmeye oranıdır ve Poisson Oranı diye ifade edilir.
- G_{12} x_1x_2 düzlemindeki Kayma Modülünü göstermektedir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{12} = \frac{-S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{1212} = Q_{66} = \frac{1}{4S_{66}}$$

(5.11)

(5.9) eşitlikleri, (5.11) denklemlerinde yerine konursa ;

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

(5.12)

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

Sonuçta benzer şekillerde düşünülerek gevşeklik matrisi takviye yönünde çekme için malzeme özellikleri cinsinden genelleştirilmiş olarak (5.13) ' de ifade edilmiştir. Direngenlik matrisi ise $C_{ij} = S_{ij}^{-1}$ dönüşümü ile oluşturulabilir. Direngenlik matrisi elemanları, mühendislik sabitleri cinsinden (5.14) eşitlikleri ile ifade edilebilir.

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ \text{Simetrik} & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta}$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{44} = G_{23}$$

$$C_{55} = G_{31}$$

$$C_{66} = G_{12}$$

(5.14)

(5.14) eşitliklerindeki Δ notasyonu ;

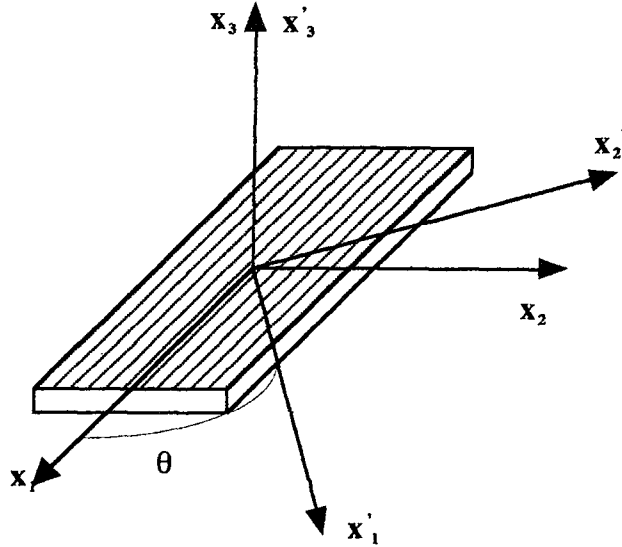
$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \quad (5.15)$$

şeklinde yazılabilir. Burada E_1, E_2, E_3 sırasıyla 1, 2 ve 3 eksenleri doğrultusundaki elastisite (young) modüllerini ve G_1, G_2, G_3 aynı eksen takımındaki kayma modüllerini göstermektedir. ν_{ij} poisson oranıdır ve malzemenin j doğrultusundaki şekil değiştirmesinin i doğrultusundaki şekil değiştirmesine oranıdır.

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \dots) \quad (5.16)$$

(5.10) Eşitliğinde görüldüğü gibi, özel ortotropik kompozit malzemelerde normal gerilmeler (σ_1, σ_2) ile kayma şekil değiştirmesi (ε_6) arasında bir ilişki olmadığı gibi (σ_6) kayma gerilmesi ile normal şekil değiştirmeler ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) gerilmeleri arasında bir ilişki yoktur.

5.2 Takviye Elemanının Doğrultusuna Bağlı Olarak Malzemenin Mekanik Davranışının İncelenmesi



Şekil 5. 2. Ortotropik bir levhada takviye doğrultusu

Yukarı da verilen eşitlikler ortotropik malzemeler için takviye doğrultusundaki gerilme-şekil değiştirme bağıntılarıdır. Uygulanan gerilmeler her zaman asal eksenler ile çakışmayabilir veya takviye doğrultusu asal eksenler ile çakışmayabilir (Şekil 5.2). Böyle durumlarda farklı yönlerdeki bağıntılar, dönüşüm tansörü kullanılarak yazılabilir. Böylece genel ortotropik kompozit malzemelerde gerilme şekil değiştirme bağıntıları ;

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

veya ;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

Bu durumda ;

$$Q'_{16} \neq 0$$

$$Q'_{26} \neq 0$$

$$S'_{16} \neq 0$$

$$S'_{26} \neq 0$$

olur. (5.17) ve (5.18) eşitliğindeki ifadeler ;

$$m = \cos \theta$$

$$n = \sin \theta$$

olmak üzere ;

$$\begin{aligned}
Q'_{11} &= m^4 Q_{11} + 2m^2 n^2 Q_{12} + n^4 Q_{22} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\
Q'_{12} &= (m^4 + n^4) Q_{12} + m^2 n^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \\
Q'_{22} &= n^4 Q_{11} + 2m^2 n^2 (Q_{12} + 2Q_{66}) + m^4 Q_{22} \\
Q'_{16} &= mn(n^2 - m^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) + mn(m^2 Q_{11} - n^2 Q_{22}) \\
Q'_{26} &= mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) + mn(n^2 Q_{11} - m^2 Q_{22}) \\
Q'_{66} &= m^2 n^2 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) + (m^2 - n^2)^2 Q_{66}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

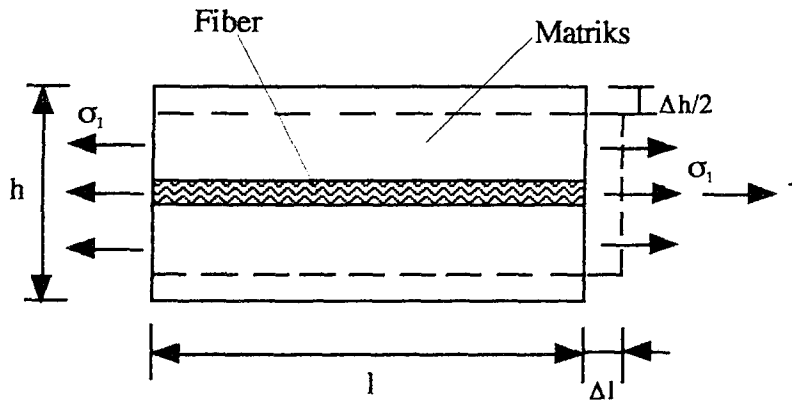
$$\begin{aligned}
S'_{11} &= m^4 S_{11} + 2m^2 n^2 S_{12} + n^4 S_{22} + 4m^2 n^2 S_{66} \\
S'_{12} &= (m^4 + n^4) S_{12} + m^2 n^2 (S_{11} + S_{22} - 4S_{66}) \\
S'_{22} &= n^4 S_{11} + 2m^2 n^2 (S_{12} + 2S_{66}) + m^4 S_{22} \\
S'_{16} &= mn(n^2 - m^2)(S_{12} + 2S_{66}) + mn(m^2 S_{11} - n^2 S_{22}) \\
S'_{26} &= mn(m^2 - n^2)(S_{12} + 2S_{66}) + mn(n^2 S_{11} - m^2 S_{22}) \\
S'_{66} &= m^2 n^2 (S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) + (m^2 - n^2)^2 S_{66}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

şeklindedir.

5.3. Hooke Sabitlerinin Bulunması

Bazen kompozit malzemenin mukavemet değerleri ve mühendislik sabitleri bulunmaz fakat buna karşılık olarak malzemeyi oluşturan matriks ve tali fazın mühendislik sabitleri ve konsantrasyonu biliniyor olabilir. Kompozit malzemenin takviye istikametinde veya buna dik istikametteki mühendislik sabitleri buna bağlı olarak rijidlik ve elastiklik matrisleri kompozit malzeme ile deney yapılmaksızın teorik olarak bulunabilir.

5.3.1. E_{11} Elastisite Modülünün Bulunması



Şekil 5.3. Matriks ve fiberle aynı doğrultuda yüklenmiş kompozit bir levha

Matriks ve lifler birbirlerine yükleme doğrultusunda Şekil 5.3 'de görüldüğü gibi birleştirilmişlerse veya malzeme takviye doğrultusunda bir σ_1 gerilmesi etkisi altında kalıyorsa, bu malzemeler seri haldedir denilebilir. Temel kabulde hem lifler hemde matriks aynı miktarda ε_1 kadar uzar.

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_1$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_1$$

yazılabilir. Bu malzemenin kesit alanı A kadar ise ve bu kesit alan içinde fiber A_f kadar matriks de A_m kadar yer işgal ediyorsa P kuvveti σ_1 ile A 'nın çarpımı kadardır.

$$P = \sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (5.21)$$

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1$$

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_1$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_1$$

(5.22)

(5.22) eşitlikleri (5.21) de yerine konursa,

$$E_1 \varepsilon_1 A = E_f \varepsilon_1 A_f + E_m \varepsilon_1 A_m \quad (5.23)$$

elde edilir. Buradan,

$$E_1 = \frac{A_f E_f}{A} + \frac{E_m A_m}{A} \quad (5.24)$$

Hacimsel konsantrasyon ,

$$V_f = \frac{A_f l}{Al} = \frac{A_f}{A}$$

$$V_m = \frac{A_m}{A}$$

$$V_f + V_m = 1$$

(5.25)

(5.24) ve (5.25) 'ten,

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (5.26)$$

5.3.2. Poisson Oranının Bulunması (ν_{12})

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (5.27)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\Delta h}{h} \quad (5.28)$$

(5.27) ve (5.28) 'den

$$\Delta h = -h \cdot \varepsilon_2 = h \cdot \varepsilon_1 \cdot \nu_{12} \quad (5.29)$$

Δh diğer bir ifade şekli ile matriks ve fiberlerin kısaltmalarının toplamı olduğuna göre,

$$\Delta h = \Delta h_m + \Delta h_f \quad (5.30)$$

$$\Delta h_m = h V_m \varepsilon_1 \nu_m$$

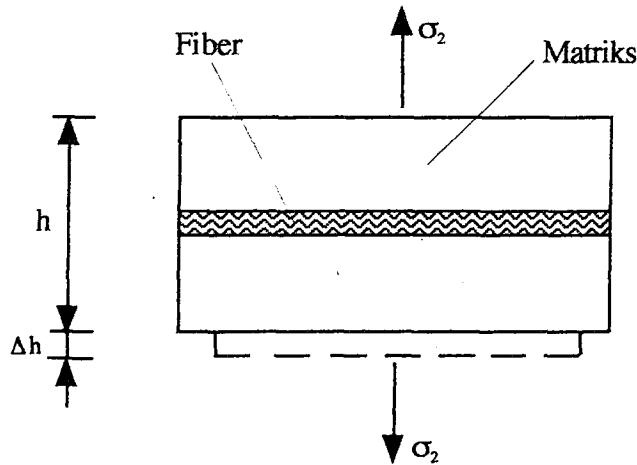
$$\Delta h_f = h V_f \varepsilon_1 \nu_f \quad (5.31)$$

(5.29), (5.30) ve (5.31) eşitlikleri kullanılarak,

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (5.32)$$

eşitliği elde edilir.

5.3.3. E_{22} Elastisite Modülünün Bulunması



Şekil 5.4. Matriks ve fiberle dik doğrultuda yüklenmiş kompozit bir levha

Matriks ve lifler birbirlerine yükleme doğrultusuna dik ekseninde Şekil 5.4 'te görüldüğü gibi birleştirilmişlerse veya malzeme takviye doğrultusuna dik ekseninde bir σ_2 gerilmesi etkisinde kalıyorsa bu malzemeler paralel haldedir denilebilir. Kabul olarak σ gerilmesi matriks ve fiberde eşit olarak taşınır.

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_{\text{kompozit}} \quad (5.33)$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m$$

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f \quad (5.34)$$

$$\sigma_{\text{kompozit}} = E_2 \varepsilon_2$$

P yükü tatbik edildiğinde h kalınlığındaki malzeme Δh kadar uzuyorsa bu uzama matriksin ve fiberin uzamalarının toplamıdır.

$$\Delta h = \Delta h_m + \Delta h_f \quad (5.35)$$

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta h_m}{h_m}$$

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta h_f}{h_f} \quad (5.36)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta h}{h}$$

$$V_m = \frac{h_m}{h}$$

$$V_f = \frac{h_f}{h}$$

$$(5.37)$$

Yukarıdaki (5.33), (5.34), (5.35), (5.36), (5.37) eşitlikleri kullanılarak,

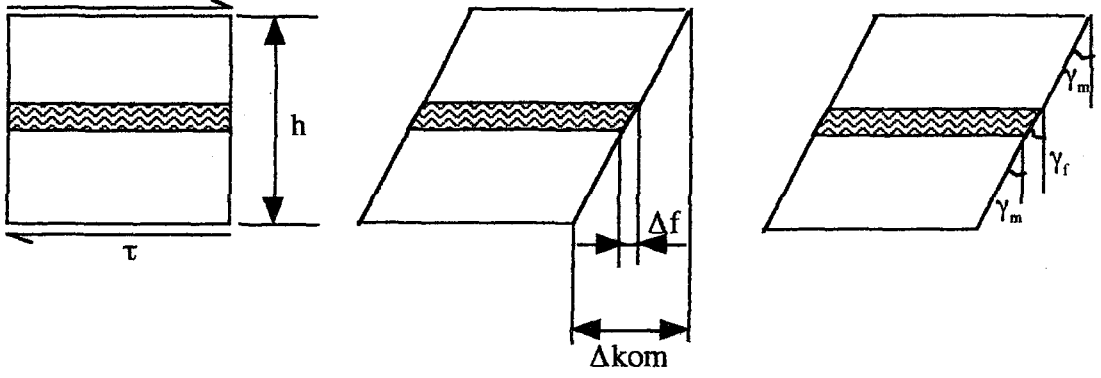
$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{E_m} V_m + \frac{1}{E_f} V_f \quad (5.38)$$

elde edilir.

5.3.4. G_{12} Kayma Modülünün Bulunması

Kompozit malzemede h kalınlığında ve l boyunda alınan deney parçalarına kayma gerilmeleri uygulandığında parçalar Şekil 5.5 'de görüldüğü gibi bir şekil değişikliğine

uğrar ve θ kadar bir dönme meydana getirir.



Şekil 5.5. Kompozit malzemede dönme

Şekil 5.5 'de abartılarak çizilmiş olan dönme gerçekte çok azdır. Bu sebepten dolayı dönmeden sonra parça kalınlığı h 'ın sabit kaldığı kabul edilir. γ_m matrisin, γ_f fiberin kayma gerilmesi altında dönme açılarıdır. Kompozit malzemeden alınan h kalınlığındaki parçalarda dönmeler çok az olduğundan dönme açılarının tanjantları radyan olarak kendisine eşittir.

$$\gamma_m = \frac{\tau_{12}}{G_m}$$

$$\gamma_f = \frac{\tau_{12}}{G_f} \quad (5.39)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

$$\Delta_{kom} = \Delta_m + \Delta_f$$

$$\Delta_{kom} = h \cdot \gamma_{12}$$

$$\Delta_m = h \cdot V_m \cdot \gamma_m$$

$$\Delta_f = h \cdot V_f \cdot \gamma_f$$

(5.40)

(5.39) ve (5.40) bağıntıları kullanılarak,

$$\Delta_{km} = h \cdot \gamma_{12} = h \cdot V_m \cdot \gamma_m + h \cdot V_f \cdot \gamma_f$$

$$\gamma_{12} = V_m \cdot \gamma_m + V_f \cdot \gamma_f$$

elde edilir ve sonuçta G_{12} kayma modülü,

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_m} V_m + \frac{1}{G_f} V_f \quad (5.41)$$

bağıntısı elde edilir.

Böylece iki fazdan oluşmuş kompozit malzemenin tüm mühendislik sabitleri kompoziti oluşturan malzemelerin mühendislik sabitleri cinsinden bulunmuş olur. Kompozit eğer ikiden fazla malzemedden oluşmuş ise bu denklemlere diğer malzemeler ile ilgili terimleri ilave etmek gerekir.

6. KOMPOZİT MALZEMELERDE TERMAL GERİLME ANALİZİ

6.1. Giriş

Kompozit malzemelerde artık gerilme konusu karmaşıktır. Artık gerilmeler bileşiği oluşturan materyallerin termal genişleme katsayılarının uygunsuzluğundan, ana fazın (matriks) büzülmesinden, sıcaklık gradyanı farklılığı gibi sebeplerden dolayı oluşur. Artık gerilmeler aşağıda ifade edildiği gibi iki katogoride incelenebilir.

- 1-) Mikroskobik Termal Artık Gerilmeler
- 2-) Makroskobik Termal Artık Gerilmeler

6.2. Termal Artık Gerilmeler

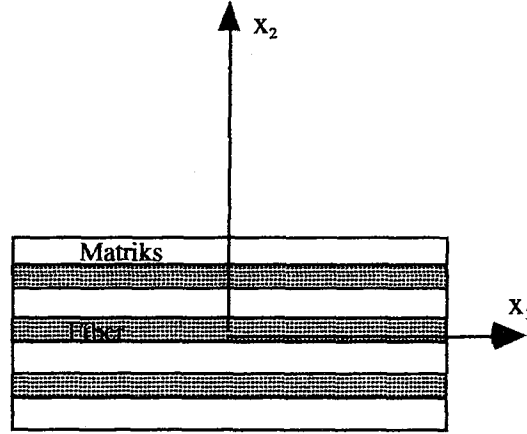
6.2.1. Mikroskobik Termal Gerilmeler



Şekil 6.1. Basit bir kompozit malzeme

Epoksi reçine parçası ve cam fiber ayrı ayrı düşünüldüğünde aynı üniform sıcaklığa sahip olsalar bile, Epoksi' nin termal genişleme katsayısı, cam fiberinkinden daha büyüktür. Bu iki materyal Şekil 6.1 de gösterildiği gibi T_c üniform sıcaklığına sahip basit bir kompozit malzeme oluşturduklarını düşünelim. T_c üniform sıcaklığındaki kompozit malzemedeki herhangi bir termal gerilme oluşmaz. T_c 'den daha büyük bir sıcaklıkta cam fiberin eksen boyunca çeki gerilmesi oluşurken aynı yönde epoksi reçinede ise bası gerilmesi oluşur. Ayrıca cam/epoksi ara yüzeyinde termal bir kayma gerilmeside oluşur. Yukarıda anlatılan bu gerilmeler mikroskobik termal gerilmeler olarak adlandırılır.

6.2.2. Makroskobik Termal Gerilmeler



Şekil 6.2. Ortotropik kompozit malzeme

Şekil 6.2 ' de gösterilen ortotropik malzemede sadece normal termal gerilmeler oluşur. Termal kayma gerilmesi oluşmaz. x_1x_2 düzlemindeki termal şekil değiştirmeler aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij} \Delta T \quad i, j = 1, 2 \quad (6.1)$$

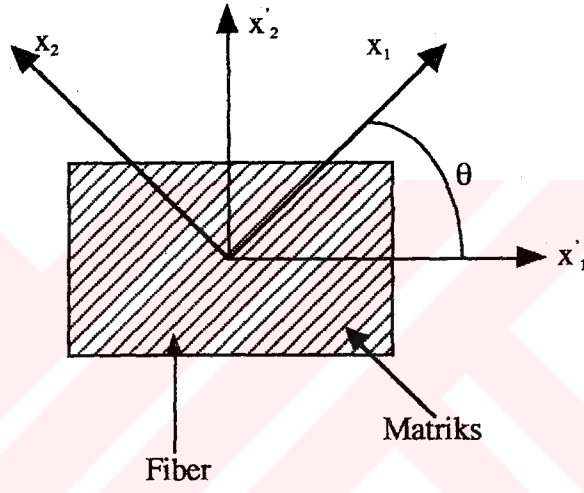
$$\Delta T = T_0 - T_c$$

dir. T_0 çalışma sıcaklığı T_c ise malzemenin ilk sıcaklığıdır. Termal genişleme katsayısı ortotropik bir tabaka için

$$\alpha_{ij} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

ifadesi ile tanımlanır. α_{11} ve α_{22} termal genişleme x_1 ve x_2 eksenleri boyunca katsayılarıdır. Buradan,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^T \\ \varepsilon_{22}^T \\ \varepsilon_{12}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (6.3)$$



Şekil 6.3. Genel ortotropik kompozit malzeme

Aslında Şekil 6.3 ' te gösterilen genel ortotropik kompozit malzemelerde termal şekil değiştirmeler,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{i'T} \\ \varepsilon_{22}^{i'T} \\ \varepsilon_{12}^{i'T} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

(6.3) eşitliği (6.4) 'te yerine konursa,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}'^T \\ \varepsilon_{22}'^T \\ \varepsilon_{12}'^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (6.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}'^T \\ \varepsilon_{22}'^T \\ \varepsilon_{12}'^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11}' \\ \alpha_{22}' \\ \alpha_{12}' \end{Bmatrix} \Delta T \quad (6.6)$$

α_{11}' ve α_{22}' sırasıyla x_1' ve x_2' eksenleri boyunca oluşan termal genişleme katsayılarıdır. (6.5) ve (6.6) eşitliklerinden ,

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{11}' \\ \alpha_{22}' \\ \alpha_{12}' \end{Bmatrix} \Delta T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T$$

Buradan,

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{11}' \\ \alpha_{22}' \\ \alpha_{12}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

eşitliği elde edilir. Eğer (6.6) eşitliğinde verilen termal şekil değiştirmelere izin verilmezse, termal kuvvetler oluşur. Bu termal kuvvetler,

$$R_{ij}'^T = \begin{Bmatrix} R_{11}'^T \\ R_{22}'^T \\ R_{12}'^T \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}'^T \\ \sigma_{22}'^T \\ \sigma_{12}'^T \end{Bmatrix} dx_3' \quad (6.8)$$

$\sigma_{ij}'^T$ global koordinat sisteminde meydana gelen gerilmeleri göstermektedir. t ise kalınlıktır.

$$\sigma_{ij}'^T = Q'_{ijkl} \varepsilon_{kl}'^T \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad (6.9)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}'^T \\ \sigma_{22}'^T \\ \sigma_{12}'^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1111}' & Q_{1122}' & Q_{1112}' \\ & Q_{2222}' & Q_{2212}' \\ \text{Simet.} & & Q_{1212}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}'^T \\ \varepsilon_{22}'^T \\ 2\varepsilon_{12}'^T \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

(6.8) eşitliği, (6.10)' a göre yeniden düzenlenirse,

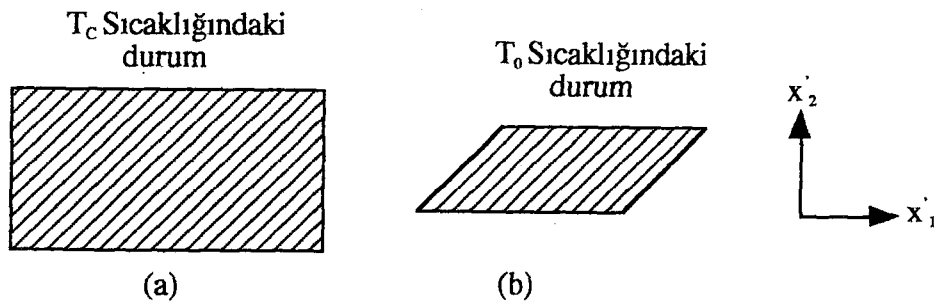
$$\begin{Bmatrix} R_{11}'^T \\ R_{22}'^T \\ R_{12}'^T \end{Bmatrix} = \int_{-1/2}^{1/2} \begin{bmatrix} Q_{1111}' & Q_{1212}' & Q_{1112}' \\ & Q_{22}' & Q_{2212}' \\ \text{Sim.} & & Q_{1212}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}'^T \\ \varepsilon_{22}'^T \\ 2\varepsilon_{12}'^T \end{Bmatrix} \cdot dx_3' \quad (6.11)$$

(6.6) eşitliği, (6.11) 'de yerine konursa,

$$\begin{Bmatrix} R_{11}'^T \\ R_{22}'^T \\ R_{12}'^T \end{Bmatrix} = \Delta T \int_{-1/2}^{1/2} \begin{bmatrix} Q_{1111}' & Q_{1212}' & Q_{1112}' \\ & Q_{22}' & Q_{2212}' \\ \text{Sim.} & & Q_{1212}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11}'^T \\ \alpha_{22}'^T \\ 2\alpha_{12}'^T \end{Bmatrix} \cdot dx_3'$$

termal genişleme katsayıları $\alpha_{11}'^T$, $\alpha_{22}'^T$ ve $\alpha_{12}'^T$, x_3' ekseninden bağımsızdır. Bu durumda,

$$\begin{Bmatrix} R_{11}'^T \\ R_{22}'^T \\ R_{12}'^T \end{Bmatrix} = \int_{-1/2}^{1/2} \begin{bmatrix} Q_{1111}' & Q_{1212}' & Q_{1112}' \\ & Q_{22}' & Q_{2212}' \\ \text{Sim.} & & Q_{1212}' \end{bmatrix} \cdot dx_3' \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_{11}'^T \\ \alpha_{22}'^T \\ 2\alpha_{12}'^T \end{Bmatrix} \cdot \Delta T \quad (6.12)$$



Şekil 6.4

7. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Bu bölümde, yukarıda anlatılan gerilme ve şekil değiştirme analizi, izoparametrik eleman kullanılarak incelenecektir.

7.1. Gerilme ve Şekil Değiştirmelerin Sonlu eleman Formülasyonu

İzoparametrik sonlu eleman formülasyonundaki esas işlem, elemanın doğal koordinat sistemi kullanılarak eleman koordinatları ile eleman yerdeğiştirmelerinin interpolasyonlar şeklinde ifadesidir. Bu koordinat sistemi elemanın boyutlarına bağlı olarak bir, iki ve üç boyutlu olabilir. Genel olarak üç boyutlu bir eleman için yazılan eşitlikler indirgenmek suretiyle bir ve iki boyutlu problemlere uyarlanabilir.

Üç boyutlu bir eleman için koordinat interpolasyonları

$$x = \sum_{i=1}^z N_i x_i \quad (7.1.a)$$

$$y = \sum_{i=1}^z N_i y_i \quad (7.1.b)$$

$$z = \sum_{i=1}^z N_i z_i \quad (7.1.c)$$

Burada X, Y, Z elemanın koordinat interpolasyonları ve X_i, Y_i, Z_i ise elemanın düğüm noktalarının koordinatlarıdır. N_i ise r, s, t lokal koordinatlarına bağlı interpolasyon fonksiyonlarıdır. Bir ve iki boyutlu elemanlar için, (7.1) eşitlikleri ilgili olan eşitlikler alınıp lokal koordinatlara bağlı ifade edilirler.

N_i interpolasyon fonksiyonları (7.1) eşitliklerinde bilinmeyen niceliklerdir. İnterpolasyon matrisi N_i 'nin önemli bir özelliği lokal koordinat sisteminde i düğümü için bir sayı, diğer tüm düğümlerde sıfır olmasıdır. Bu özellikler kullanılmak şartı ile interpolasyon fonksiyonları sistemli bir düğüm düzenine göre çözülmüş olur.

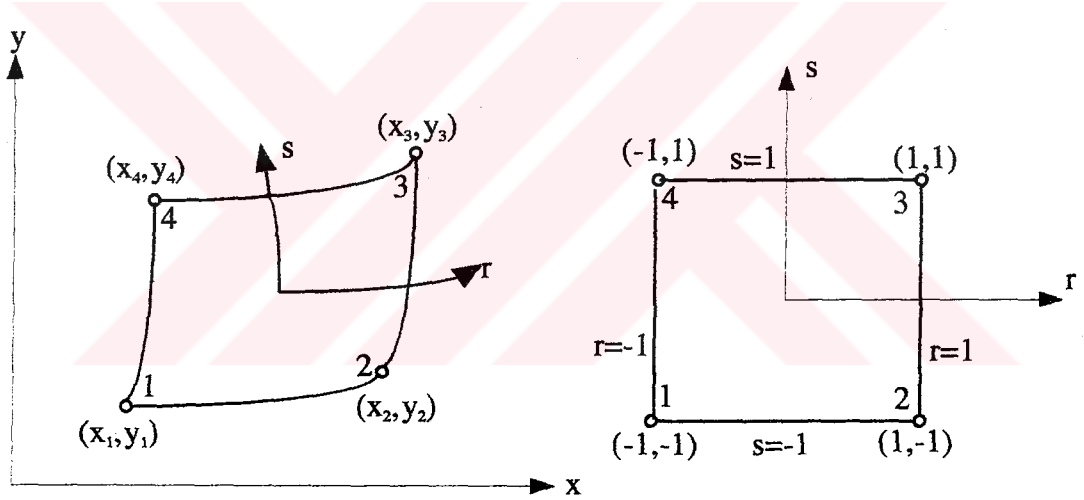
İzoparametrik formülasyonda elemanın yer değiştirmeleri geometrik olarak aynı şekilde aşağıdaki eşitliklerle tanımlanmaktadır.

$$u = \sum_{i=1}^z N_i u_i \quad (7.2.a)$$

$$v = \sum_{i=1}^z N_i v_i \quad (7.2.b)$$

$$w = \sum_{i=1}^z N_i w_i \quad (7.2.c)$$

Burada u, v ve w elemanın herhangi bir noktasındaki lokal eleman yer değiştirmelerini, u_i, v_i ve w_i ($i=1, \dots, z$) ait oldukları düğümlerin yer değiştirmelerini göstermektedir.



Şekil 7.1. İki boyutlu, dört düğümlü izoparametrik eleman

Problem düzlemsel çözüleceğinden Şekil 7.1 ' deki iki boyutlu, dört düğümlü izoparametrik eleman gözönüne alınarak Tablo 2.1 'de tanımlanmış interpolasyon fonksiyonları (N_1, N_2, N_3, N_4) kullanılarak, koordinatlara ait interpolasyonlar aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s)x_1 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)x_2 + \frac{1}{4}(1+r)(1+s)x_3 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)x_4 \\
Y &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s)y_1 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)y_2 + \frac{1}{4}(1+r)(1+s)y_3 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)y_4
\end{aligned} \tag{7.3}$$

veya bu eşitlikler kısaca,

$$\begin{aligned}
X &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\
Y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4
\end{aligned} \tag{7.4}$$

şeklinde yazılabilir. Dört düğümlü bir eleman için yer değiştirmeler polinomlar kullanılarak,

$$\begin{aligned}
u &= \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4xy \\
v &= \alpha_5 + \alpha_6x + \alpha_7y + \alpha_8xy
\end{aligned} \tag{7.5}$$

şeklinde yazılıp dört düğüm için genişletilir ve matris formunda yazılırsa ,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \tag{7.6}$$

Bu eşitlik sembolik olarak,

$$\begin{aligned}
\{\delta\} &= [T]\{\alpha\} \\
\{\alpha\} &= [T]^{-1}\{\delta\}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

şeklinde yazılabilir. Bir elemanın direngenlik matrisini oluşturabilmek için şekil değiştirme ile yer değiştirme arasındaki dönüşüm matrisini hesaplamak gerekir. Eleman şekil değiştirmeleri, lokal koordinatlara göre eleman yer değiştirmelerinin türetilmesi ile elde edilebilir.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

dönüşümünün yapılabileceği daha önceki bölümde anlatılmıştı. (7.2) ve (7.3) eşitlikleri kullanılarak $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ türevleri bulunup şekil değiştirme ile yer değiştirme bileşenleri arasındaki dönüşüm matrisi teşkil edilebilir. Bu dönüşüm matrisi [B] ile gösterilirse, şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasında,

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (7.9)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $\{u\}$ (7.2) eşitliğinden bulunabilir), elemanın düğüm noktaları yer değiştirmelerini gösteren bir vektördür.

7.2. Elemanın Direngenlik Matrisinin oluşturulması

Elemanın direngenlik matrisi, elemanın lokal serbestlik derecesine bağlı olarak, en kolay varyasyon hesabı olan virtüel işler prensibi kullanılarak teşkil edilebilir (Sayman, 1988).

Gerilmelerden doğan iç kuvvetlerin virtüel işi,

$$\delta W = \int \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (7.10)$$

dış kuvvetlerin virtüel işi ise,

$$\delta W = \{\bar{\delta}\delta\}^T \{P\} \quad (7.11)$$

eşitlikleriyle ifade edilebilir. Enerji prensibine göre iç kuvvetlerin yaptığı iş, dış kuvvetlerin yaptığı işe eşittir. Yani,

$$\{\bar{\delta}\delta\}^T \{P\} = \int \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dv$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte,

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$\{\bar{\delta}\delta\}^T \{P\} = \int \{\bar{\delta}\varepsilon\}^T [C]\{\varepsilon\} dv$$

$$\{\bar{\delta}\delta\}^T \{P\} = \int \{\bar{\delta}\delta\}^T [B]^T [C] [B] dv \{\delta\}$$

$$\{\bar{\delta}\delta\}^T \{P\} = \{\bar{\delta}\delta\}^T \int [B]^T [C] [B] dv \{\delta\}$$

ve buradan kuvvetler vektörü,

$$[P] = \int [B]^T [C] [B] dv \{\delta\} \quad (7.12)$$

şeklinde elde edilir. Direngenlik matrisi [K],

$$[K] = \int [B]^T [C] [B] dv \quad (7.13)$$

ifadesine eşit olur. Burada [B] şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasındaki dönüşüm matrisi, [C] gerilmeler ile şekil değiştirmeler arasındaki dönüşüm matrisi (Elastisite matrisi) ve $\{\delta\}$ yer değiştirmeler matrisidir. Sisteme etki eden kuvvetler vektörü ,

$$[P] = [K]\{\delta\} \quad (7.14)$$

şeklinde yazılabilir. Direngenlik matrisinde, hacim diferansiyeli dv lokal koordinatlarda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$dv = t \cdot \det J \cdot dr \cdot ds$$

eşitliği yazılabilir. Sonuç olarak direngenlik matrisi,

$$[K] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [C][B] \det J dr ds \quad (7.15)$$

ifadesi bulunur.

7.3. Rijidlik Matrisinin İntegrasyonu

Rijidlik matrisi yukarıdaki bölümde,

$$[K] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [C][B] \det J dr ds \quad (7.15)$$

olarak çıkarılmıştı. Bu ifade Gauss formülleri kullanılarak,

$$[K_c] = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} W_i W_j t [B(r_i, s_j)]^T [C][B(r_i, s_j)] J(r_i, s_j) \quad (7.19)$$

şeklinde integre edilmiş olur. Sisteme etki eden (7.12) eşitliği (kuvvetler vektörü),

$$\{R\} = [K]\{\delta\} \quad (7.20)$$

ifadesi ile tanımlanabilir. Burada, Kuvvetler vektörü hem mekanik hemde termal kuvvetleri içermektedir.

$$\{R\} = \{R^m\} + \{R^T\} \quad (7.21)$$

Termal kuvvetler daha önce kompozit malzemeler için ,

$$\begin{Bmatrix} R'_{11} \\ R'_{22} \\ R'_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-1/2}^{1/2} \begin{bmatrix} Q'_{1111} & Q'_{1122} & Q'_{1112} \\ Q'_{2222} & Q'_{2212} \\ \text{Simet.} & & Q'_{212} \end{bmatrix} dx'_3 \begin{Bmatrix} \alpha'_{11} \\ \alpha'_{22} \\ \alpha'_{12} \end{Bmatrix} \Delta T \quad (7.12)$$

denklemleri ile tanımlanmıştır. Bu eşitlik sonlu eleman formülasyonu ile,

$$\{R^T\} = \int_V [B]^T [Q'] \{\alpha'\} \Delta T dV \quad (7.22)$$

eşitliği ile gösterilip, aynı eşitliğin nümerik integrasyonu Gauss metoduna göre alınır,

$$\{R^T\} = \sum_{i=1}^z \sum_{j=1}^z W_i W_j [B(r_i, s_i)]^T [Q'] \{\alpha'\} \Delta T |J| \quad (7.23)$$

ifadesi elde edilir. $\{R^m\} = 0$ için,

$$\{R\} = \{R^T\}$$

olur. Böylece şekil değiştirmeler,

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \{R^T\}$$

eşitliği ile kolayca bulunabilir. Şekil değiştirmelerin hesabından sonra, gerilmeler aşağıda gösterildiği gibi hesaplanabilir.

$$\{\sigma\} = [Q'] [B] \{\delta\} - [Q'] \{\alpha'\} \Delta T \quad (7.24)$$

Böylece ortotropik bir kompozit tabakada termal yükten dolayı oluşacak gerilmeler (7.24) denklemi ile hesaplanır. Bu eşitlik yalnız elastik kısmın çözümünü verir. ΔT sıcaklık gradyanıdır ve aşağıda gösterildiği gibi hesaplanır.

7.4. Sıcaklık Gradyantı (ΔT)

Geçişli hal için sıcaklık dağılımı malzeme özelliklerinden boyutsuz Biot sayısına bağlıdır.

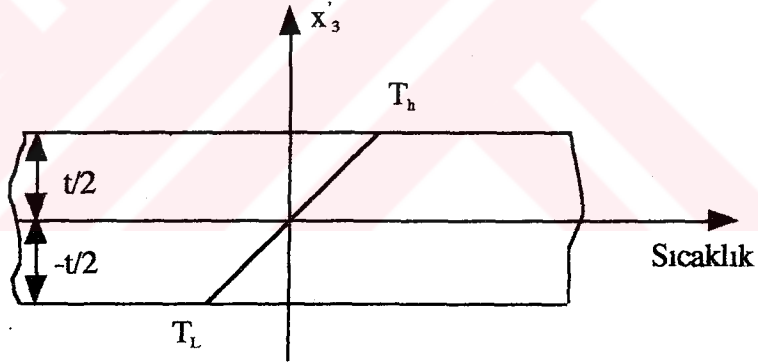
$$Bi = \frac{hL}{k}$$

h konveksiyon ile ısı transfer katsayısı, k kondüksiyonla ısı transferi katsayısı, L ise kondüksiyonun olduğu boyut boyunca uzunluktur.

$$Bi \leq 1$$

için, malzemedeki ısı iletimi, ısı taşınımından daha az önemlidir. Mühendislikteki çoğu metalik malzemeler bu kategoriye girer. Metalik olmayan kompozit malzemelerde Biot sayısı bire eşit veya büyüktür. Bu durumda ısı iletimi, ısı taşınımına göre oldukça önemlidir. Sonuç olarak kararlı şartlarda bile metalik olmayan kompozit malzemelerde sıcaklık gradyanı önemli bir hal alır.

Malzemelerdeki sıcaklık gradyanının varlığı termal gerilmeleri doğurur. Şekil 7.2 de gösterilen kompozit levhanın kalınlığı boyunca sıcaklık dağılımı kararlı hal için aşağıdaki gibi çıkarılabilir.



Şekil 7.2. Sıcaklık Dağılımı

$$T_h > T_L$$

orta düzlemin sıcaklığı,

$$\frac{(T_h + T_L)}{2}$$

kompozit levhanın kalınlığı t ise, o zaman sıcaklık gradyanı,

$$\frac{(T_h - T_L)}{t}$$

olur. Bu durumda herhangi bir noktadaki sıcaklık T ,

$$T = \frac{(T_h + T_L)}{2} + \frac{(T_h - T_L)}{t} x_3'$$

olur. T_c ortalama sıcaklığı göstermek üzere sıcaklık gradyanı ΔT ,

$$\Delta T = T - T_c$$

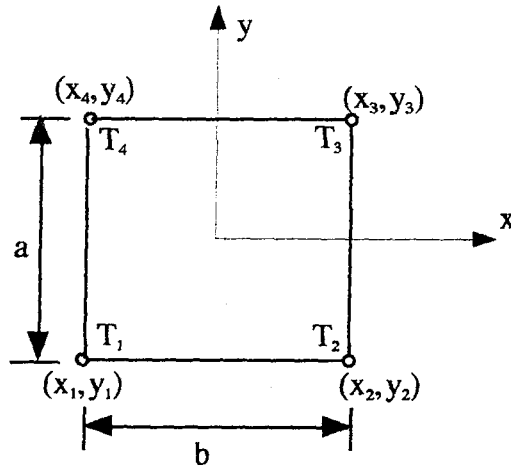
dır.

İki boyutlu izoparametrik eleman için T_c ortalama sıcaklığı (Şekil 7.3),

$$a = y_3 - y_2$$

$$b = x_2 - x_1$$

$$T_c = (a \cdot b) \cdot \frac{(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)}{4 \cdot (a \cdot b)} = \frac{(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)}{4} \quad (7.25)$$



Şekil 7.3. İzoparametrik eleman

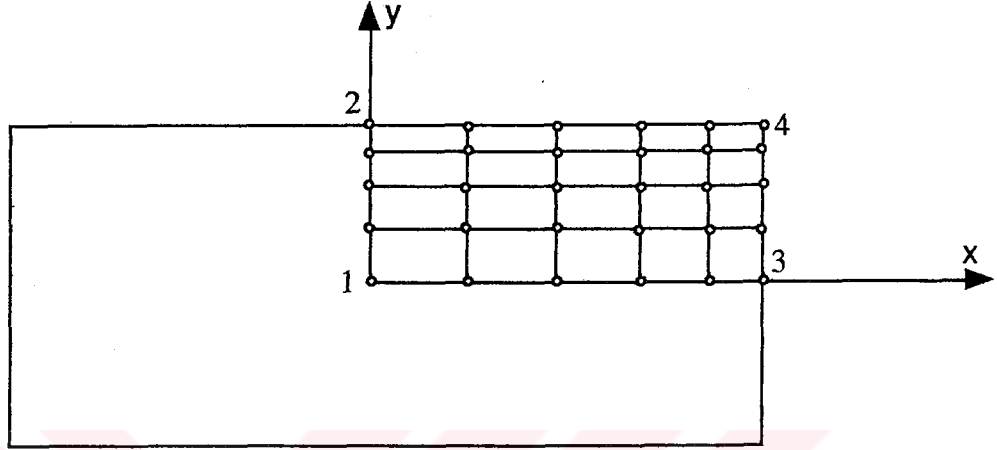
(7.25) ve (3.38) eşitlikleri kullanılarak her düğümün sıcaklık gradyanı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\Delta T = T - T_c \quad (7.27)$$

(7.27) eşitliğindeki T düğüm noktalarının sıcaklığı olup (3.38) eşitliği ile hesaplanır.



8. BU ÇALIŞMADA KULLANILAN MODELE SONLU ELEMAN FORMÜLASYONUNUN UYGULANMASI



Şekil 8.1. Çalışmada kullanılan elemanın sonlu eleman modeli

Sıcaklık ve gerilme dağılımını hesaplamak için sonsuz uzunluktaki bir elemanın modeli Şekil 8.1 'de gösterilmiştir.

8.1. Sıcaklık ve Gerilmelerin Hesabı

Tablo 8.1. Çeşitli kompozit malzemelere ve çeliğe ait termal özellikleri

Malzeme Türü	ρ (kg/m^3)	k_{xx} ($\text{W/m}\cdot^\circ\text{K}$)	k_{yy} ($\text{W/m}\cdot^\circ\text{K}$)	C_p ($\text{J/kg}\cdot^\circ\text{K}$)
Boron/Polyimide	2066	23.7	6.95	1241
SiC/6021 Al	2900	109.0	82.0	1050
Çelik	7833	54.0	54.0	465

Tablo 8.2. Çeşitli kompozit malzemelere ve Çeliğe ait elastik özellikler

Malzeme Türü	E_{11} (Mpa)	E_{22} (Mpa)	G_{12} (Mpa)	ν_{12}
Boron/Polyimide	241.4	14.87	5.53	0.26
SiC/6021 Al	202.0	105.0	40.0	0.37
Çelik	210000.	210000.	81000.	0.3

Tablo 8.3. Çeşitli kompozit malzemelere ve çeliğe ait termal genişleme katsayısı

Malzeme Türü	α_{11} ($10^{-6} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$)	α_{22} ($10^{-6} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$)
Boron/Polyimide	5.28	14.81
SiC/6021 Al	8.66	16.86
Çelik	14.46	14.46

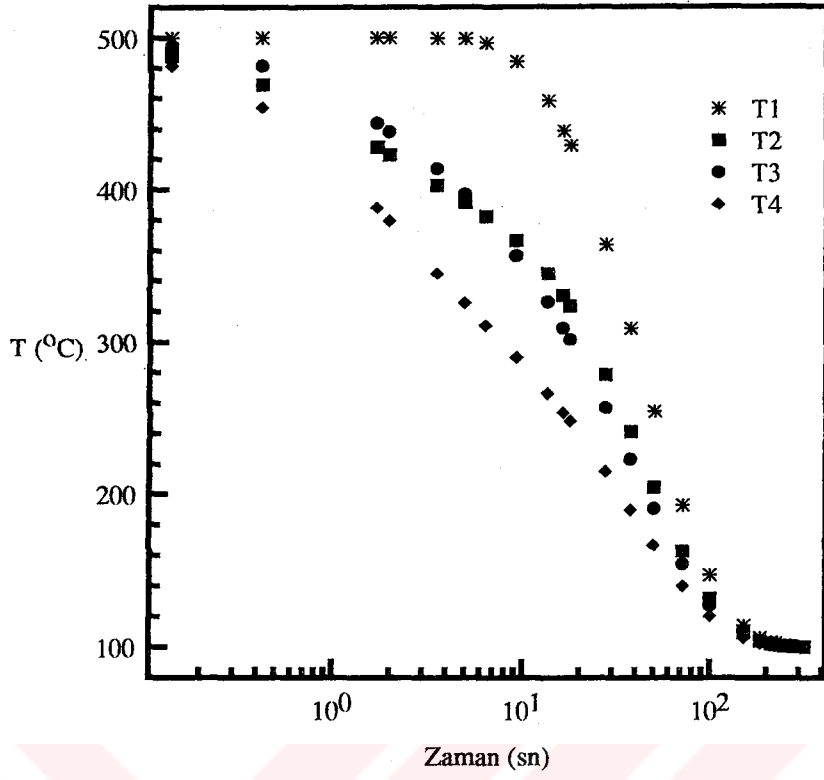
Çalışmada kullanılan malzemelerin termal ve elastik özellikleri referans [21] ve [24]'e göre Tablo 8.1, Tablo 8.2 ve Tablo 8.3 'de verilmiştir.

Çözümde kullanılan ve formülasyonu önceki bölümlerde verilen izoparametrik sonlu elemanlarla problemin çözümü ancak bilgisayar programı ile mümkün olmaktadır. Bunun için hazırlanan bilgisayar programını ana hatlarıyla şu şekilde sıralamak mümkündür.

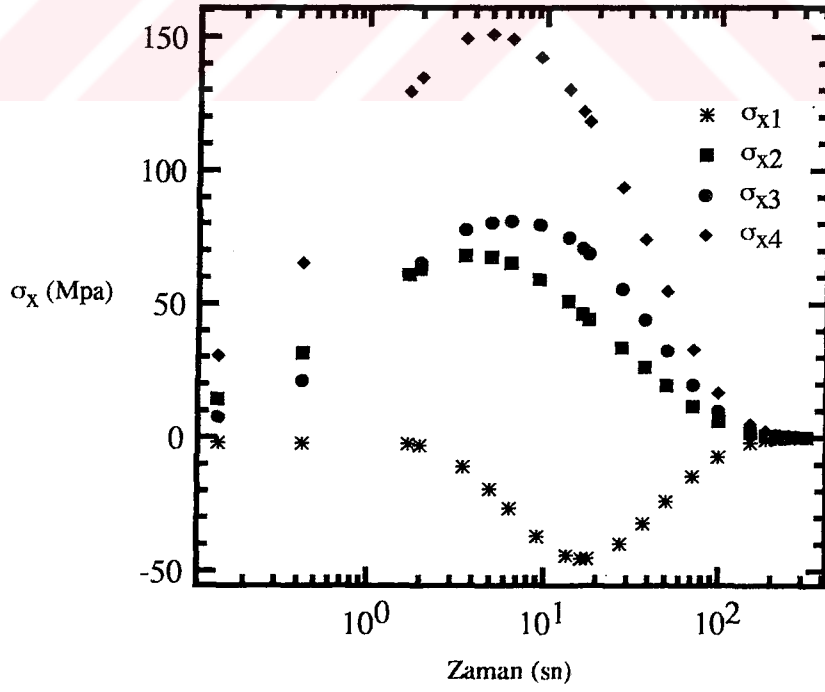
Birinci adımda malzemeye ait elastik ve termal özellikler ile kullanılan malzemenin boyutları girilir. Bu adımda ayrıca otomatik bölmelendirme yapılmıştır. Bu bölmelendirme yapılırken yüzeydeki noktalarda, ısı transferinin fazla olmasından dolayı elemanlar yüzeye doğru yaklaştırılmıştır. Otomatik bölmelendirme sonucu izoparametrik sonlu eleman modeli , eleman numaraları, elemanların düğüm noktaları ve koordinatları belirlenmiş olur. Sonra sıcaklık dağılımı için gerekli matrisler oluşturulur. Bunun içinde direngenlik matrisinin oluşturulmasında gerekli alt matrisler her bir eleman için teşkil edilir. İzoparametrik sonlu elemanların direngenlik matrisi oluşturulurken, integralin çözümü Gauss Nümerik İntegrasyon Metodu ile yapıldığından, bu kısımda izoparametrik bir elemanın düğüm noktalarındaki seçilen noktalar ve ağırlık faktörleri tanımlanır (Tablo 2.2). İnterpolasyon fonksiyonları Tablo 2.1' den girilir ve bu fonksiyonların lokal koordinatlara (r, s) göre türetilmesi işlemi

yapılır. Lokal koordinatlara göre türetilerek elde edilen izoparametrik eleman yer değiştirmelerinin, kartezyen koordinatlara dönüştürülmesinde gerekli olan dönüşüm matrisi J (Jacobian Matrisi) oluşturulup, bu matrisin determinantı ve tersi hesaplatılır. Daha sonra B dönüşüm matrisi elde edilerek, tüm sistem için toplam dirençlik matrisi oluşturulur ve bu matrisler kullanılarak denklem (3.38) 'deki matrisler teker teker hesaplatılır. Sonra (3.37) eşitliğine göre kritik zaman aralığı hesaplatılır. Bu zaman aralığı kullanılarak denklem (3.38) 'in çözümünden sistemin sıcaklık dağılımı elde edilir. Sonra bu sıcaklık dağılımı kullanılarak sisteme etki eden toplam kuvvetler matrisi oluşturulur. Toplam kuvvetler ve rijidlik matrisi cinsinden yazılmış denklem takımının çözümünden önce herbir eleman için izoparametrik eleman için düğüm noktaları yer değiştirmeleri, buna bağlı olarak Şekil değiştirmeler ve gerilme dağılımı hesaplanır.

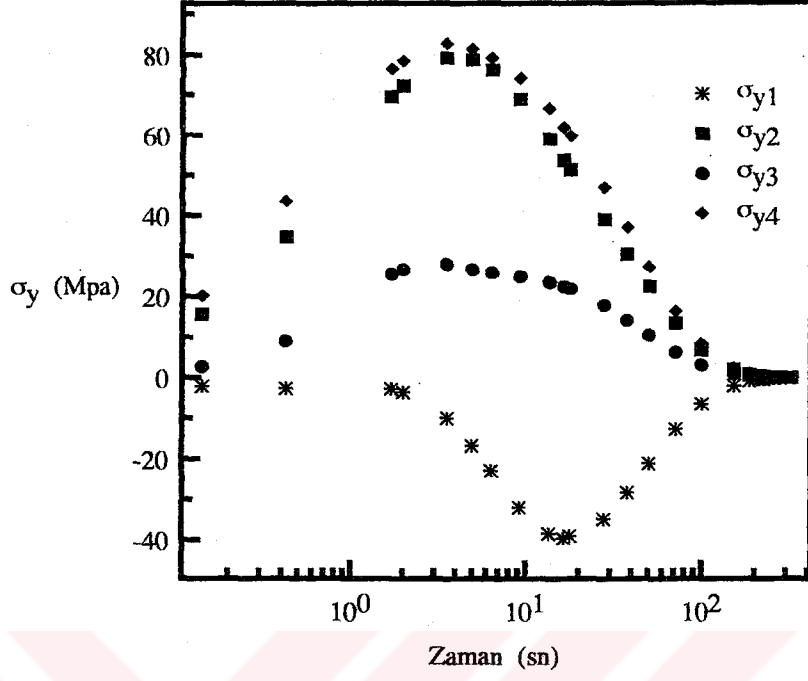
Fortran bilgisayar programına ait akış Şeması Ek 1 'de verilmiştir.



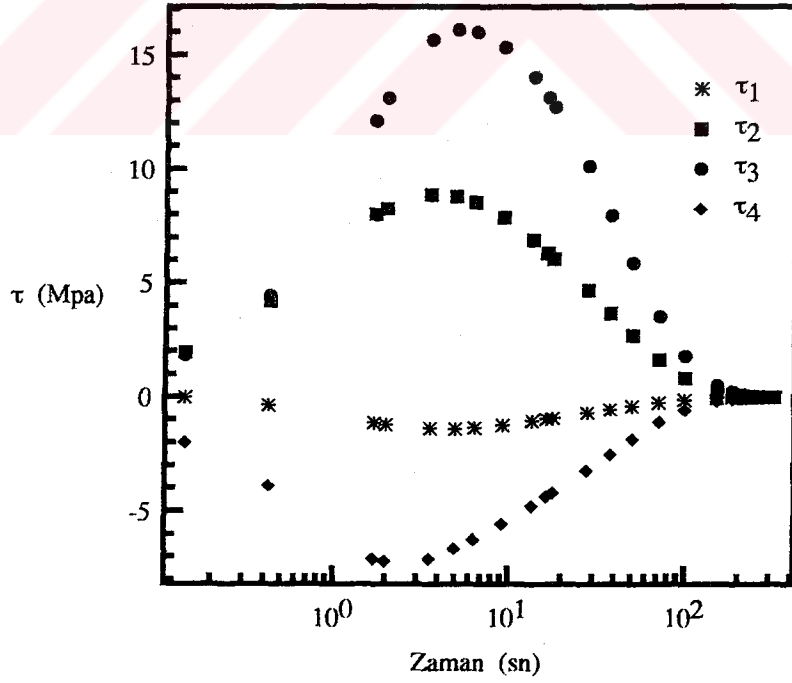
Şekil 8.2. SiC/6021 Al için sıcaklığın zamanla değişimi



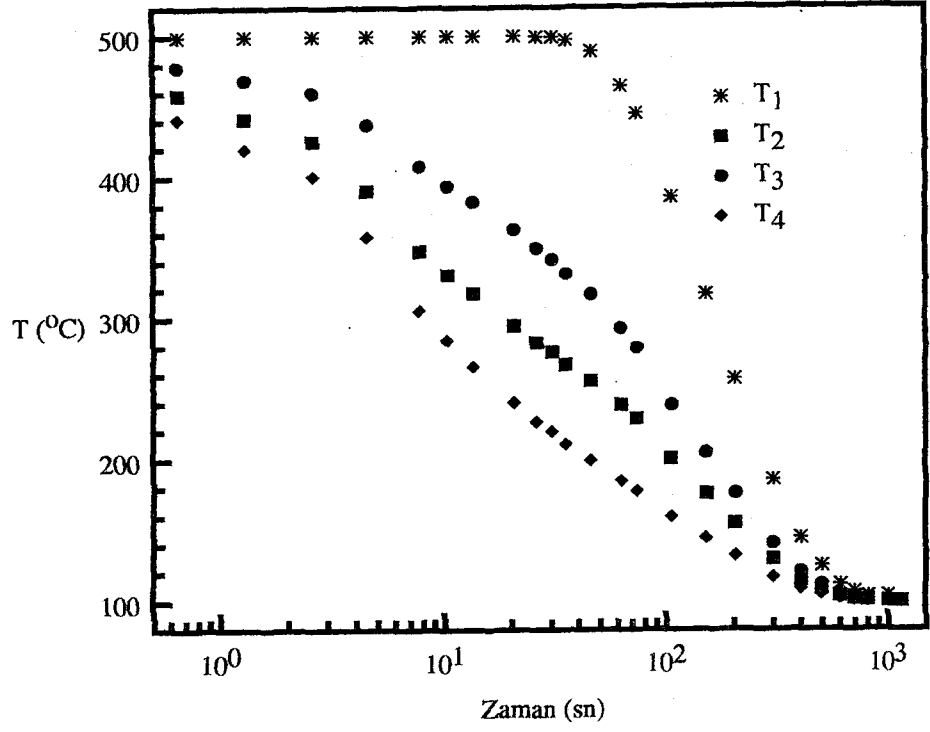
Şekil 8.3. SiC/6021 Al için σ_x 'in zamanla değişimi



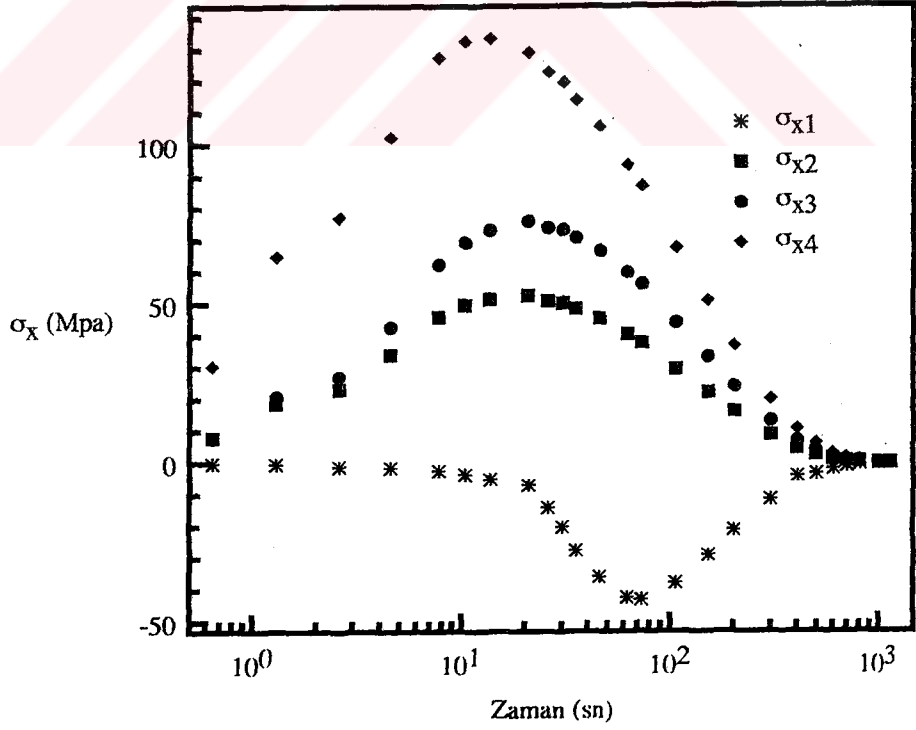
Şekil 8.4. SiC/6021 Al için σ_y 'nin zamanla değişimi



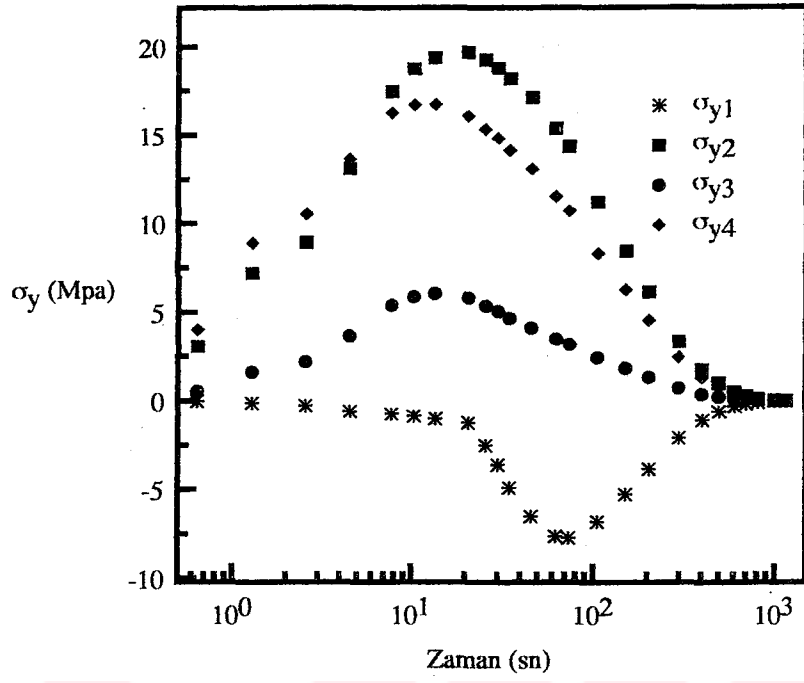
Şekil 8.5. SiC/6021 Al için τ 'nin zamanla değişimi



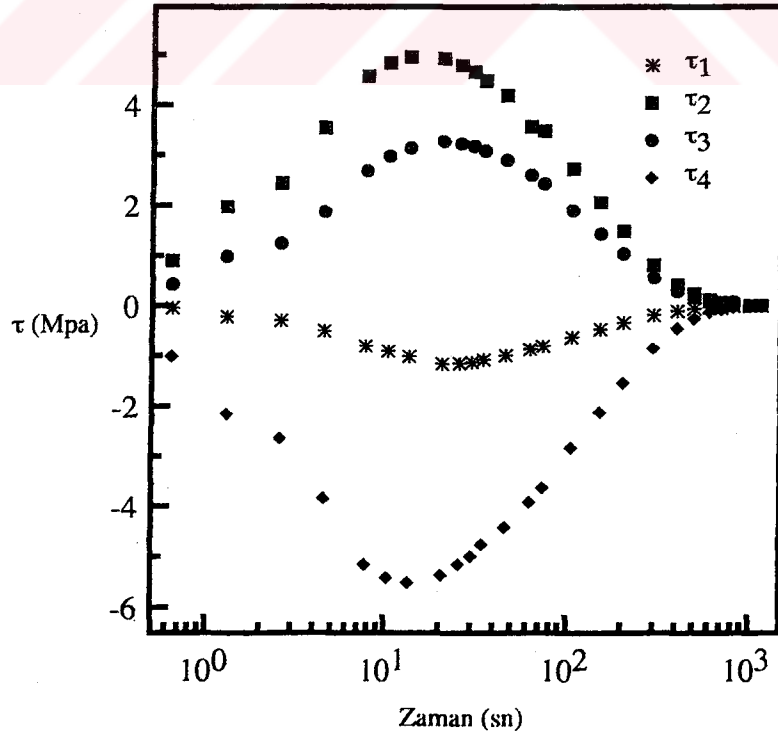
Şekil 8.6. Boron/Polymide için sıcaklığın zamanla değişimi



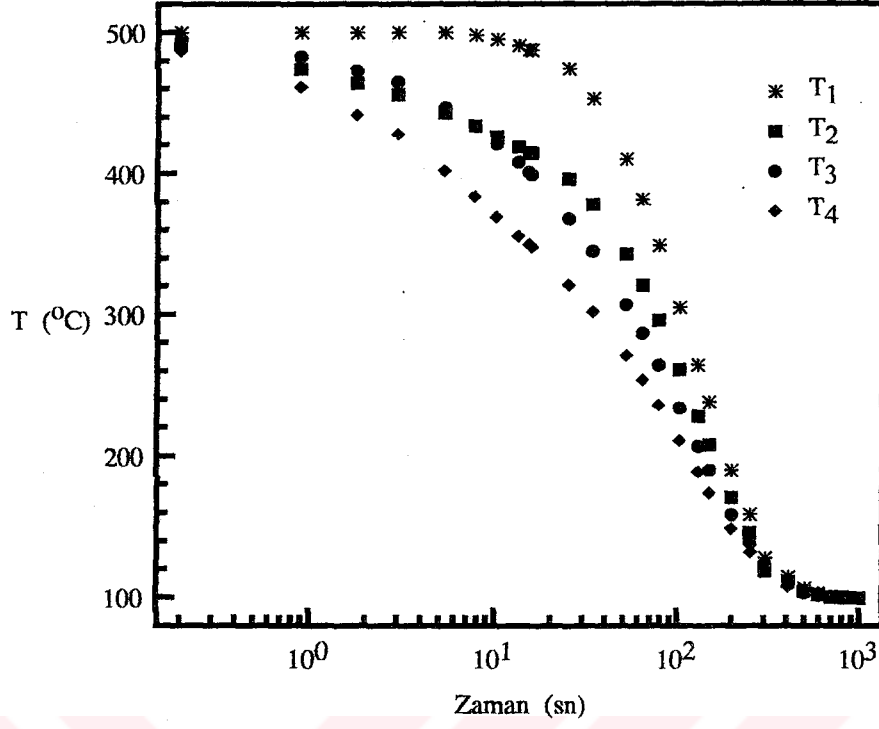
Şekil 8.7. Boron/Polymide için σ_x 'in zamanla değişimi



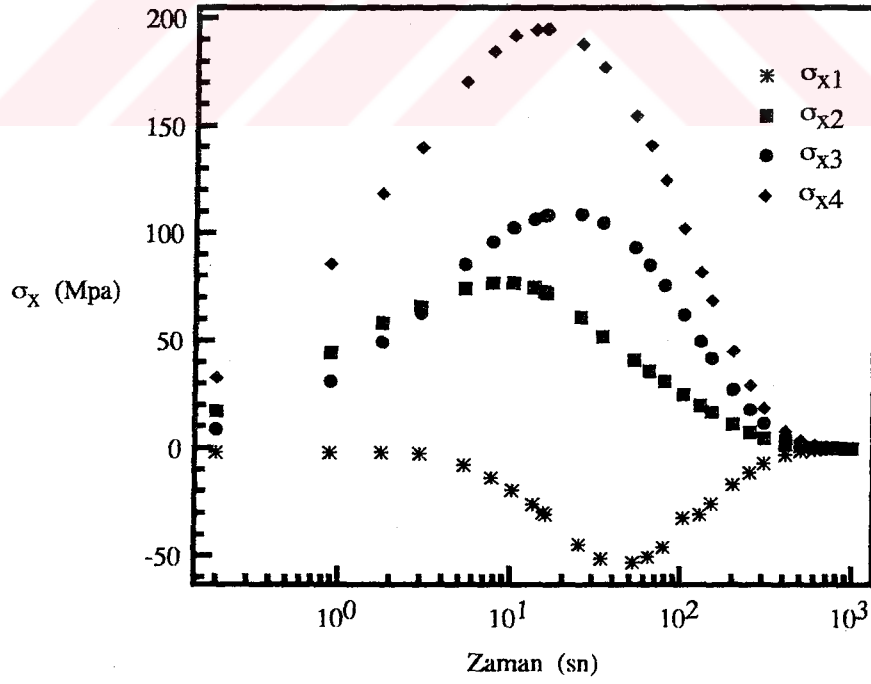
Şekil 8.8. Boron/Polymide için σ_y 'nin zamanla değişimi



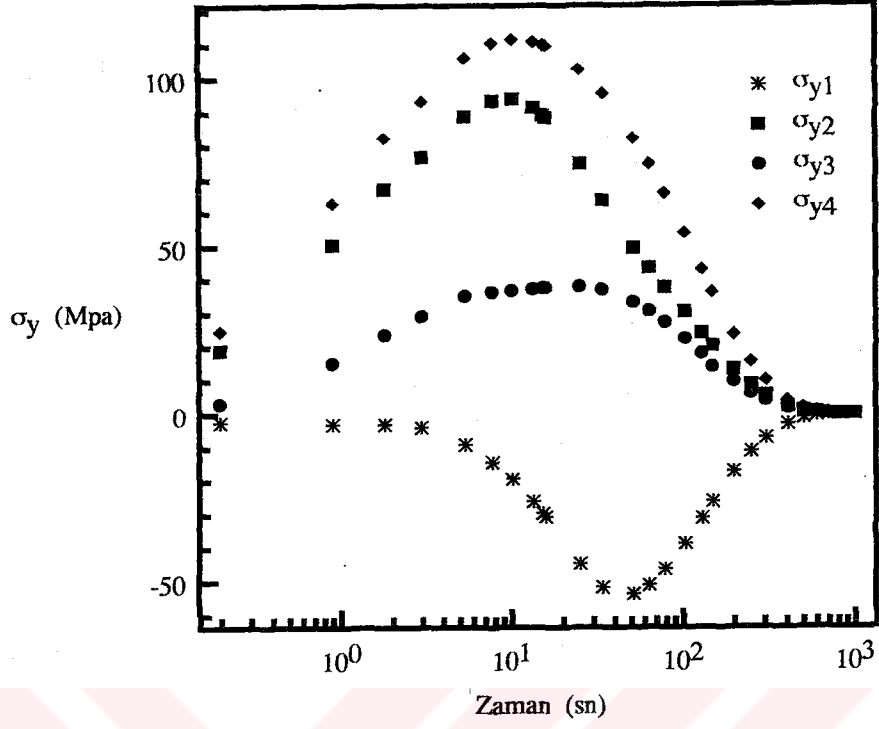
Şekil 8.9. Boron/Polymide için τ 'nin zamanla değişimi



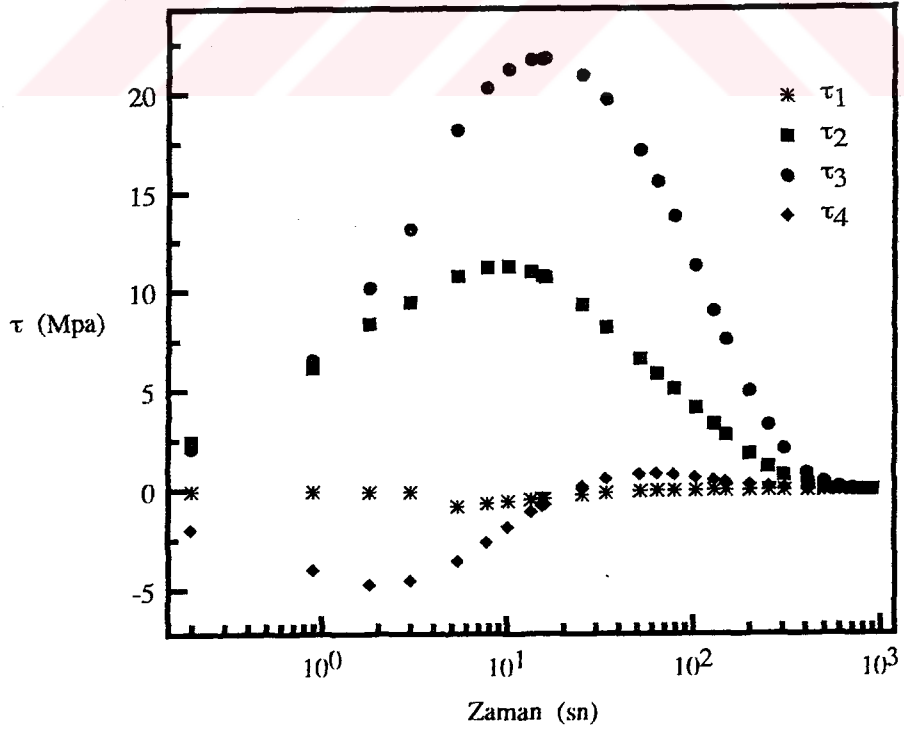
Şekil 8.10. Çelik için sıcaklığın zamanla değişimi



Şekil 8.11. Çelik için σ_x 'in zamanla değişimi



Şekil 8.12. Çelik için σ_y 'nin zamanla değişimi



Şekil 8.13. Çelik için τ 'nun zamanla değişimi

9. SONUÇLAR

Sıcaklık ve gerilme dağılımının hesabı için, üç değişik malzeme (SiC/6021 Al, Boron/Polymide ve Çelik) üzerinde yazılan bilgisayar programı kullanılarak, Şekil 8.1 'de gösterilen yüzeydeki 2, 3, 4 noktaları ve merkezdeki 1 noktası için çözüm yapılmıştır. Meydana gelen zamana bağlı sıcaklık ve gerilme dağılımları grafikler halinde sunulmuştur. Bu sıcaklık dağılımları ile gerilmeler referans [5] ile uyum içerisinde olduğu gözlemlenmiştir.

Şekil 8.2, Şekil 8.6, Şekil 8.10 soğuma boyunca sırasıyla SiC/6021 Al, Boron/Polymide ve Çelik için 1, 2, 3 ve 4 noktasındaki sıcaklığın zamanla değişimini göstermektedir. Sıcaklığın zamanla değişimi boyutsuz biot sayısına (B_i) dolayısıyla konveksiyon, kondüksiyon katsayılarına ve kondüksiyonun olduğu boyut boyunca uzunluğa bağlıdır. Bu katsayılardan oluşan biot sayısı birden küçükse ($B_i < 1$) ısı iletimi, ısı taşınımından daha az önemlidir (Şekil 8.10) ve mühendislikte kullanılan çoğu metalik malzeme bu kategoriye girmektedir. Metalik olmayan kompozit malzemelerde biot sayısı birden büyüktür ($B_i \geq 1$). Bu durumda ısı iletimi, ısı taşınımından daha önemlidir (Şekil 8.2, Şekil 8.6). Sonuç olarak kararlı şartlarda bile metalik olmayan kompozit malzemelerde sıcaklık gradyanı önemli bir hal alır. Malzemelerdeki sıcaklık gradyanının varlığı ise termal gerilmeleri doğurur.

SiC/6021 Al için 0.4 saniyelik bir soğutma sonucu, 1 noktasında x eksenini boyunca 2.36 Mpa 'lık bir bası gerilmesi 4 noktasında ise, aynı eksen boyunca 65.445 Mpa 'lık bir çeki gerilmesi oluşur. 4.96 saniye sonra bu değerler, 1 noktası için -19.3 Mpa ve 4 noktası için 151 Mpa olur. 16.3 saniyelik bir soğutma sonucunda ise, 1 noktasında -45.22 Mpa ve 4 noktasında 122 Mpa 'lık gerilme oluşur (Şekil 8.3) .

Boron/Polymide için 0.6 saniyelik bir soğutma sonucu, 1 noktasında x eksenini boyunca 0.1 Mpa 'lık bir bası gerilmesi, 4 noktasında ise aynı eksen boyunca 30.4 Mpa 'lık bir çeki gerilmesi oluşur. 13.6 saniye sonra bu değerler, 1 noktası için -5.2 Mpa ve 4 noktası için 133.6 Mpa olur. 73 saniyelik bir soğutma sonucunda ise, 1 noktasında -43 Mpa ve 4 noktasında 87 Mpa 'lık gerilme oluşur (Şekil 8.7) .

Çelik için 0.2 saniyelik bir soğutma sonucu, 1 noktasında x eksenini boyunca 2 Mpa 'lık bir bası gerilmesi, 4 noktasında ise aynı eksen boyunca 32.8 Mpa 'lık bir çeki gerilmesi oluşur. 15.3 saniye sonra bu değerler, 1 noktası için -29.8 Mpa ve 4 noktası

için 194 Mpa olur. 52 saniyelik bir soğutma sonucunda ise, 1 noktasında -53.25 Mpa ve 4 noktasında 155 Mpa 'lık gerilme oluşur (Şekil 8.11) .

Yukarıdaki verilen σ_x değerleri, her üç malzeme için karşılaştırıldığında, aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir:

Çelikte daha çabuk ve daha büyük termal gerilmeler diğer iki kompozit malzemede ise yavaş ve daha küçük termal gerilmeler oluşur. Buda kullanılan kompozit malzemelerin ısı dayanımlarının çeliğinkinden daha iyi olduğunu gösterir.

Her üç malzemede de soğuma oranının başlangıçta yüzeyde fazla, merkezde daha az , sonraki evrelerde ise merkezde fazla ve yüzeyde daha az olduğu görülmüştür. Bu yüzden başlangıçta yüzeyde termal çeki gerilmeleri, merkezde ise termal bası gerilmesi oluşur.

Sonra soğutma oranının değişiminden dolayı gerilmeler yön değiştirir. Böylece yüzeyde artık bası gerilmeleri, merkezde ise artık çeki gerilmeleri meydana gelir.

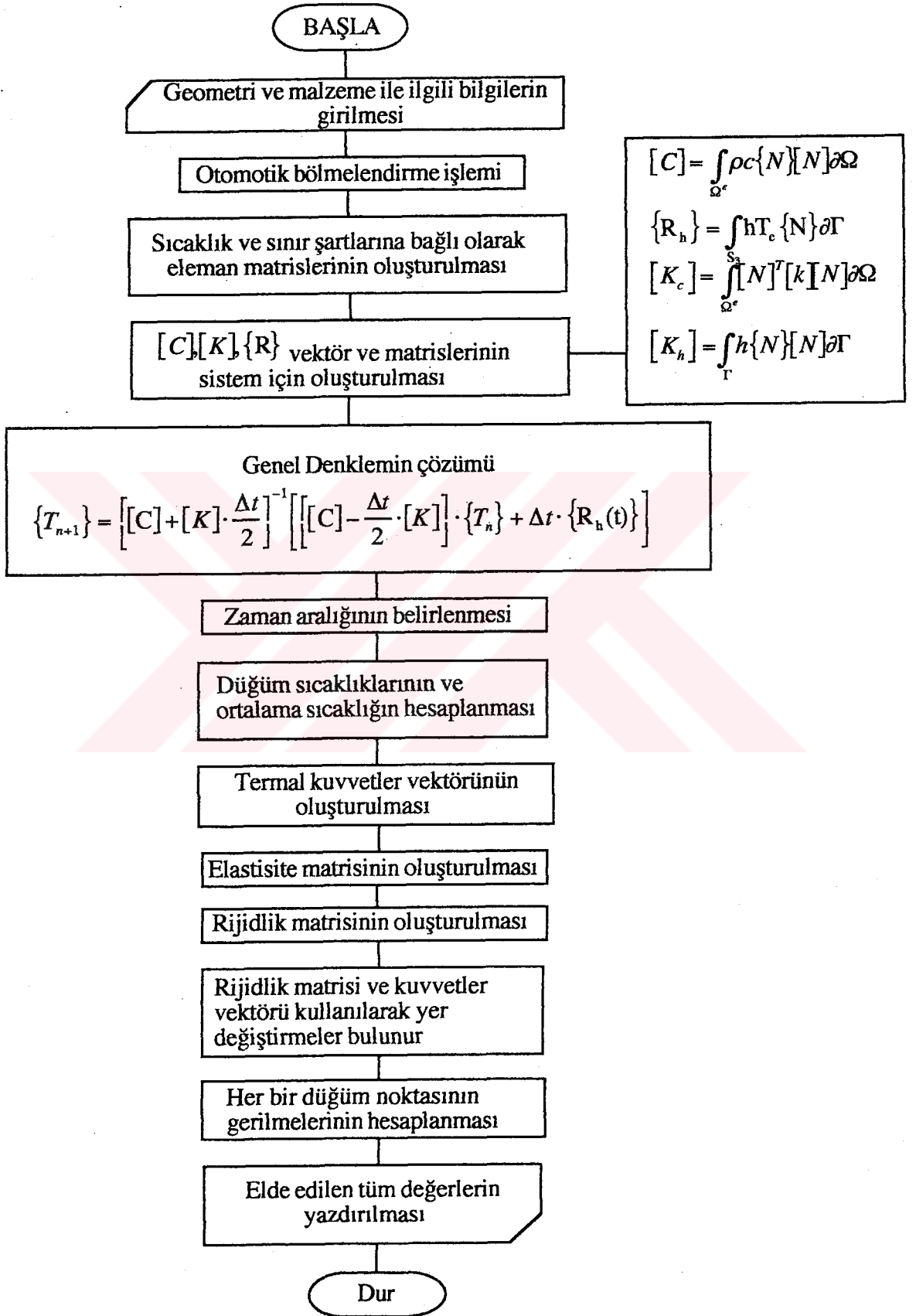
Eğer malzeme lineer elastik özellik gösteriyorsa soğuma bittiğinde, termal gerilmeler oluşmaz. Uygun sıcaklıklarda termal gerilmeler, akma gerilmesini aşarsa plastik deformasyon meydana gelir.

Malzemelerin boyutlarındaki artışlar, merkez ile yüzey arasındaki sıcaklık farkını artırır. Bu durumda çok yüksek termal gerilmelere sebep olur.

Malzemelerin termal özelliklerinin gerilme dağılımları üzerine etkisi çok önemlidir. Sıcaklık dağılımına bağımlı termal özellikler, kararlı şartlardaki termal özellikleri ile karşılaştırıldığında farklıdır. Bu durum, geçişli ısı transferine bağlı olarak oluşan termal gerilmeleri, kararlı halde oluşan gerilmelere göre çok daha büyük kılar .

Yapılan incelemeler sonucunda, soğuma süresince malzemelerde oluşan gerilme dağılımının zamanla değişiminin bilinmesi, son derece önemli olduğu gözlemlenmiştir.

Ek-1 Bilgisayar programı akış diyagramı



KAYNAKLAR

- 1 . Myers, G.E.,1978, The Critical Time Step for Finite Element Solutions to Two Dimensional Heat Conduction Transients. J. Heat Transfer, 100, 120-128.
- 2 . Yalamanchili, R.V.S., and Chu, S.C.,1973,Stability and Oscillation Characteristics of Finite Element, Finite Difference and Weighted-Residuals Methods for Transient Two Dimensional Heat Conduction in Solids. J.Heat Transfer, 95, 235-246.
- 3 . Hughes, T. R. J., 1977, Unconditionally Stable Algorithms for Nonlinear Heat Conduction. Com. Meth. Appl. Mech.Eng., 10, 135-139.
- 4 . Wood- W.L., and Lewis, R.W., 1974, Comparison of Time Marching Schemes for The Transient Heat Conduction Equation. Int.J. Num. Meth. Eng., 9, 679-689.
- 5 . Yu, H.J., 1977, Berechnung von Abkühlungs, Umwandlungs, Schweiss, Sowie Verformungseigenstressungen mit Hilfeder Methode der Finiten Elemente.Tag der Münlichen Prüfung.
- 6 . Wang, H.S., and Chou, T.W., 1985, Transient Thermal Stress Analysis of a Rectangular Orthotropic Slab. J. Comp.Mat., 19, 424-442.
- 7 . El-Hawary, M.M., Ragab, A.M., Osman, K.M., and Abd El-Razzak, M.M.,1996, Behavior Investigation of Concrete Slabs Subjected to High Temperatures. Com. and Struct., 61, (2), 345-360.
- 8 . Chen, J.K., Sun, C.T., and Chang, C.I., 1985,Failure Analysis of Graphite /Epoxy Laminate Subjected to Combined Thermal and Mechanical Loading.J.Comp.Mat., 19, 408-423.
- 9 . Ootao, Y., Tanigawa, Y., and Murukami H., 1990, Transient Thermal Stress Analysis and Bending Behavior of An Angle-Ply Laminated Slab.J.Therm.Stress, 13, 177-192.
- 10 . Rao, D.M., and Sinha, P.K., 1997, Finite Element Coupled Thermostructural Analysis of Composite Beams. Comp. Struct., 63, (6), 539-549.
- 11 . Bathe, K.J., 1982, Finite Element Procedures ni Engineering Analysis. Prentice-Hall Inc., U.S.A.

12. Huebner, K.H., and Thornton, E.A., 1982, The Finite Element Method for Engineers. A Wiley-Interscience Publication., Newyork.
13. Chandrupatla, T.R., and Belegundu, A.D., 1991, Introduction to Finite Element in Eng. Prentice-Hall Inc., U.S.A.
14. Ross, C.T.F., 1990, Finite Element Methods in Engineering Science. Ellis Horwood Ltd., London.
15. Ottosen, N.S., and Petersson, H., 1992, Introduction to the Finite Element Meth. Prentice-Hall Inc., U.K.
16. Fung, Y.C., 1968, Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall Inc. U.K.
17. Hull, D., 1987, An Introduction to Composite Materials. Cambridge Uni. Press. U.K.
18. Vinson, J.R., and Chou T.W., 1975, Composite Materials and Their Use in Struct. Applied Science Publishers Ltd., London.
19. Choo, V.K.S., 1990, Fundamentals of Composite Materials. Knowen Academic Press Inc., U.S.A.
20. Tsai, S.W., and Hahn, H.T., 1980, Introduction to Composite Materials. Tech. Publishing Co. Inc., U.S.A.
21. Sayman, O., ve Aksoy, S., 1988, Kompozit Malzemeler. D.E.Ü. İzmir.
22. Timoshenko, S., and Goodier, J.N., 1969, Elastisite Teorisi. Şuhubi, E., ve Kayan, İ., (Der.). İ.T.Ü. İstanbul.
23. Tameroglu, S., 1991, Elastisite Teorisi. İ.T.Ü. İnşaat Fak. Matbaası.
24. Jones, R.M., 1975, Mechanics of Composite Materials. Mc.Graw-Hill Book Comp., Newyork.
25. Özişik, M.N., 1993, Heat Conduction. Jhon Wiley and Sons. Inc., U.S.A.

26. Hinton, E., and Owen, D.R.J., 1980, Finite Element Programing. Academic Press. Inc., London.
27. Taşgetiren, S., ve Topçu, M., 1995, Geçişli Hal Isı İletimi Probleminin Sonlu Elemanlar Metodu ile Çözümü. Pamukkale Üni. Müh. Bil. Der. , 1, 45-51.

