

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Ayça BÜYÜKYILMAZ

**BAZI KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ  
VE ÜFE-TÜFE ARASINDAKİ BAĞIMLILIK YAPISI  
ÜZERİNE BİR UYGULAMA**

Ekonometri Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Antalya, 2011

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Ayça BÜYÜKYILMAZ

**BAZI KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ  
VE ÜFE-TÜFE ARASINDAKİ BAĞIMLILIK YAPISI  
ÜZERİNE BİR UYGULAMA**

**Danışman**

Yrd. Doç. Dr. Emre İPEKÇİ ÇETİN

Ekonometri Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Antalya, 2011

Akdeniz Üniversitesi  
Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğüne,

Ayça BÜYÜKYILMAZ'ın bu çalışması jürimiz tarafından Ekonometri Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan

: Prof. Dr. İbrahim GÜNGÖR

Üye (Danışmanı)

: Yrd. Doç. Dr. Emre İPEKÇİ GETİN

Üye

: Yrd. Doç. Dr. Aslıhan ALHAN

Tez Konusu: BAZI KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ  
VE ÜFE-TÜFE ARASINDAKİ BAĞIMLILIK  
YAPISI ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Onay : Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Tez Savunma Tarihi : 24/06/2011

Mezuniyet Tarihi : 28/06/2011

Prof. Dr. Mehmet ŞEN  
Müdür

.....

## İÇİNDEKİLER

<b>TABLolar LİSTESİ</b> .....	<b>iii</b>
<b>ŞEKİLLER LİSTESİ</b> .....	<b>iv</b>
<b>KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ</b> .....	<b>v</b>
<b>ÖZET</b> .....	<b>vi</b>
<b>SUMMARY</b> .....	<b>vii</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>viii</b>
<b>GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>

### BİRİNCİ BÖLÜM

#### KAPULALAR VE ÖZELLİKLERİ

1.1. Kapulaların Tanımı ve Matematiksel Özellikleri .....	3
1.1.1. Uyum sıralaması.....	4
1.2. Sklar Teoremi .....	8
1.2.1. Yarı ters fonksiyon .....	8
1.3. Kapulalar ve Simetri Özellikleri.....	9
1.3.1. Marjinal Simetrik, İşinsal Simetrik ve Ortak Simetrik Kavramları .....	9
1.4. Çok Değişkenli Kapulalar.....	10
1.4.1. $n$ Boyutlu Kapula ve $n$ Boyutlu Sklar Teoremi .....	11
1.5. Arşimedyen Kapulalar .....	13
1.5.1. Arşimedyen Kapulaların Özellikleri .....	13
1.6. Bazı Arşimedyen Kapulalar.....	14
1.6.1. Ali-Mikhail-Haq Kapula Ailesi (AMH).....	15
1.6.2. Clayton Kapula Ailesi .....	16
1.6.3. Frank Kapula Ailesi .....	16
1.6.4. Gumbel Hougaard Kapula Ailesi .....	17
1.7. Bazı Bağımlılık Katsayıları .....	17
1.7.1. Kendall'ın Tau( $\tau$ ) Değeri .....	18
1.7.2. Spearman'ın Rho( $\rho_S$ )'su.....	21
1.7.3. Kendall Tau( $\tau$ ) ve Spearman Rho( $\rho_S$ ) Arasındaki İlişki .....	22

## İKİNCİ BÖLÜM

### KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ

2.1. Parametrik Tahmin Yöntemleri .....	24
2.1.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi (MLE) .....	24
2.1.2. Marjinallere İlişkin Çıkarsama Yöntemi (IFM) .....	25
2.2. Yarı Parametrik Tahmin Yöntemi .....	27
2.2.1. Sözde En Çok Olabilirlik Yöntemi (PMLE) .....	28
2.3. Parametrik Olmayan Tahmin Yöntemleri .....	29
2.3.1. Kendall Tau .....	29
2.3.2. Spearman Rho .....	30
2.4. Uyum İyiliği Testi.....	33
2.4.1. Ki-kare Uyum İyiliği Testi .....	33
2.5. Rastgele Örnek Üretme.....	34

## ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

### ÜFE-TÜFE ARASINDAKİ BAĞIMLILIK YAPISININ KAPULALARLA ANALİZİ

3.1. Üretici Fiyatları Endeksi (ÜFE).....	44
3.2. Tüketici Fiyatları Endeksi (TÜFE) .....	45
3.3. Endeks Hesaplanması .....	46
3.4. ÜFE – TÜFE Bağımlılık Yapısının Araştırılması .....	47
3.5. Veri Kümesi.....	48
3.5.1. Ali-Mikhail-Haq Kapula Ailesinin Tahmini .....	50
3.5.2. Clayton Kapula Ailesinin Tahmini .....	51
3.5.3. Frank Kapula Ailesinin Tahmini.....	52
3.5.4. Gumbel Hougaard Kapula Ailesinin Tahmini .....	53
<b>SONUÇ .....</b>	<b>54</b>
<b>KAYNAKÇA.....</b>	<b>56</b>
<b>EKLER .....</b>	<b>58</b>
<b>Ö Z G E Ç M İ Ş .....</b>	<b>67</b>

**TABLULAR LİSTESİ**

Tablo 1. 1 Bazı Arşimedyen kapulaların fonksiyonları ve üreticileri .....	15
Tablo 2. 1 Bazı Arşimedyen kapulaların fonksiyonları ve önemli ilişki katsayıları.....	32
Tablo 3. 1 ÜFE ve TÜFE aylık % değişimine ilişkin gözlenen frekanslar.....	48
Tablo 3. 2 ÜFE ve TÜFE endeksleri arasındaki ilişki katsayısı.....	49
Tablo 3. 3 Ali-Mikhail-Haq kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar .....	50
Tablo 3. 4 Clayton kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar .....	51
Tablo 3. 5 Frank kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar .....	52
Tablo 3. 6 Gumbel Hougaard kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.....	53

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. 1 Frénchet-Hoeffding alt sınır kapulasının grafiği .....	5
Şekil 1. 2 Frénchet-Hoeffding alt sınır kapulasının düzey eğrileri .....	5
Şekil 1. 3 Frénchet-Hoeffding üst sınır kapulasının grafiği .....	5
Şekil 1. 4 Frénchet-Hoeffding alt sınır kapulasının düzey eğrileri .....	6
Şekil 1. 5 Bağımsızlık kapulasının ( $\Pi(u,v)$ ) grafiği .....	6
Şekil 1. 6 Bağımsızlık kapulasının ( $\Pi(u,v)$ ) düzey eğrileri .....	7
Şekil 2. 1 $\theta = 0,3$ için Farlie-Gumbel-Morgernstern kapula ailesi .....	35
Şekil 2. 2 $\theta = -0,3$ için Farlie-Gumbel-Morgernstern kapula ailesi .....	36
Şekil 2. 3 $\theta = -0,9$ için Farlie-Gumbel-Morgernstern kapula ailesi .....	36
Şekil 2. 4 $\theta = 0,9$ için Farlie-Gumbel-Morgernstern kapula ailesi .....	37
Şekil 2. 5 $\theta = 6$ için Gumbel-Hougaard kapula ailesi .....	39
Şekil 2. 6 $\theta = 10$ için Gumbel-Hougaard kapula ailesi .....	39
Şekil 2. 7 $\theta = 100$ için Gumbel-Hougaard kapula ailesi.....	40
Şekil 2. 8 $\theta = -0,4$ için Clayton kapula ailesi .....	41
Şekil 2. 9 $\theta = 2$ için Clayton kapula ailesi .....	42
Şekil 2. 10 $\theta = 4$ için Clayton kapula ailesi .....	43
Şekil 2. 11 $\theta = -1$ için Clayton kapula ailesi .....	42
Şekil 3. 1 ÜFE-TÜFE endeks değerlerinin aylık % değişimlerine ilişkin serpm diyagramı ..	49

## KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

### Kısaltmalar Listesi

AHM	Ali-Mikhail-Haq Kapula Ailesi
FGM	Farli-Gumbel-Mongenstern Kapula Ailesi
IFM	Marjinallere İlişkin Çıkarsama Tahmini
MLE	En Çok Olabilirlik Tahmini Türk Lirası
PMLE	Sözde En Çok Olabilirlik Tahmini
TÜFE	Tüketici Fiyatları Endeksi
TÜİK	Türkiye İstatistik Kurumu
ÜFE	Üretici Fiyatları Endeksi

### Simgeler Listesi

$C, C_\theta(u, v)$	Kapula
$Dom C, Dom H$	C ve H fonksiyonunun tanım kümesi
$F, G$	Marjinal dağılım fonksiyonları
$H$	İki ya da daha fazla rastgele değişkenli dağılım fonksiyonu
$I$	[0,1] birim aralık
$I^n$	[0,1] <sup>n</sup> birim n-küb
$M(u, v)$	Frénchet-Hoeffding üst sınırı
$\Pi(u, v)$	Bağımsızlık kapulası
$\varphi$	Arşimedyen kapulanın üreticisi
$Ran F, Ran G$	Marjinal dağılım fonksiyonlarının değer kümesi
$\rho$	Sperman Rho değeri
$\tau$	Kendall Tau değeri
$W(u, v)$	Frénchet-Hoeffding alt sınırı
$V_H(B)$	B' nin H hacmi



## ÖZET

Kapulalar, tek değişkenli marjinalleri  $[0,1]$  aralığı üzerinde düzgün dağılıma sahip ve çok değişkenli dağılımları bu tek değişkenli marjinallerine bağlayan fonksiyonlardır. Kapulalar, basit bir ifade ile rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koymak amacıyla kullanılmaktadır. Son yıllarda kapulalarla ilgili istatistiksel araştırmalar yapılmakta ve uygulama alanları gün geçtikçe artmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, bazı kapula tahmin yöntemlerinden olan parametrik, parametrik olmayan, yarı parametrik ile uyum iyiliği testi hakkında bilgi vermek ve Arşimedyen kapulalardan bazılarını kullanarak örnek uygulama yapmaktır. Bu amaçla, Türkiye İstatistik Kurumu'nun (TÜİK) 1982 temel yılı, 1982:01 tarihinden 2011:02 tarihine kadar olan zaman aralığındaki Üretici Fiyatları Endeksi (ÜFE) ve Tüketici Fiyatları Endeksi (TÜFE) arasındaki bağımlılık yapısı kapula yöntemiyle ortaya konmaya çalışılmıştır.

Uygulama bölümünde uygulanabilirliğinin daha elverişli olduğu düşünölen parametrik olmayan tahmin yöntemi incelenmiştir. Ayrıca çözüme daha kolay ulaşılmasına imkan veren Kendall Tau ( $\tau$ ) birliktelik ölçüsü kullanılmıştır. İki endeks arasındaki ilişki Ki-kare uyum iyiliği testi kullanılarak analiz edilmiştir. Ki-kare uyum iyiliği testinin sonuçlarına göre iki endeks arasındaki bağımlılık yapısını  $\theta = 2,907$  parametrelili Gumbel-Hougaard kapula ailesinin açıkladığı görölmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Kapula, bağımlılık yapısı, tahmin yöntemleri, fiyat endeksi

## SUMMARY

### SOME COPULA ESTIMATION METHODS AND AN APPLICATION ON DEPENDENCE STRUCTURE BETWEEN PPI(PRODUCER PRICE INDEX)-CPI (CONSUMER PRICE INDEX)

Copulas are the functions which connect one-dimensional margins possessing uniform distribution on the interval  $[0,1]$  to multivariate distribution functions. To put it simply, copulas are used to demonstrate the dependence structure among the random variables. In the recent years, statistical copulas have been studied and their fields of application have been increasing day by day.

The purpose of this study is to provide information about several estimation methods which are parametric, non-parametric, semi-parametric, goodness of fit, and is to make sample applications by using some Archimedean copulas. To this end, it is tried to examine the dependence structure between the producer price index (PPI) and the consumer price index (CPI) in the period 1982:01-2011:02 with the 1982 base year of Turkish Statistical Institute (TUIK) through the copula method.

In the application section of the third part, non-parametric estimation method, which is considered to be more convenient in application, is examined. Besides, the Kendall Tau ( $\tau$ ) scale of association, which allows us to reach the result easily, is used. The relation between the two indexes is analyzed through chi-square test of goodness of fit. According to the results of the test in question, it is seen that the Gumbel-Hougaard copula family explains the dependence structure with parameter  $\theta = 2,907$  between the two indexes.

**Key Words:** Copula, dependence structure, estimation methods, price index.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma sürecinde yardımlarıyla beni yönlendiren danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Emre İPEKÇİ ÇETİN'e, Ekonometri bölümü öğretim üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Mehmet MERT'e, ne zaman başım sıkışsa yanımda olan ve değerli yardım ve katkılarını benden esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Aslıhan ALHAN'a ve bu süreçte manevi destekleriyle bana yardımcı olan çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Son olarak, her zaman yanımda olan ve manevi desteklerini benden esirgemeyen sevgili babam Bekir BÜYÜKYILMAZ'a, annem Filiz BÜYÜKYILMAZ'a ve ablam Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayça BÜYÜKYILMAZ

## GİRİŞ

Kapula; ilişki kurmak, bağlamak anlamlarına gelen Latince bir kelime olup istatistiksel anlamda ilk kez 1959 yılında Abe Sklar tarafından ortaya çıkarılmıştır. Sklar, kapulaların çok değişkenli dağılım fonksiyonlarıyla dağılımın bir boyutlu marjinalleri arasında bir bağıntı kurmaya yardımcı olduğunu göstermiştir. Kapula teorisinin izleri 1940 yıllarında Hoeffding'in çalışmalarına dayanmaktadır. Kapulalarla ilgili 1958 ile 1976 yılları arasında en önemli sonuçları olasılıklı metrik uzayları teorisinin gelişimiyle ilişkili olarak elde edilmiştir. Kapulalar literatüre 1959 yılında girmiş olsa da kapula fonksiyonlarının teorisi ve uygulamaları üzerine birçok çalışma yapılmıştır ve yapılmaya devam etmektedir.

İstatistik biliminde değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını belirleyen yöntemlerden biri, bağımlı ve bağımsız değişken veya değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel bir bağıntı ile açıklayan uygulamalı istatistik yöntemlerinden regresyon analizidir. Uygulanan şekliyle regresyon analizi, değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olduğunu ve hata terimlerinin dağılımının normal olduğunu varsaymaktadır. Fakat uygulamada birçok durumda bu varsayımların tamamen sağlanması mümkün olmadığından bu varsayımlardan sapmalar olmaktadır.

Kapula, rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koymaktadır. Daha kesin anlamıyla kapulalar, tek değişkenli marjinalleri  $[0,1]$  aralığı üzerinde düzgün dağılıma sahip ve çok değişkenli dağılımları kendi tek değişkenli marjinallerine bağlayan fonksiyonlardır. Kapulalar, değişkenlerin dağılımlarının ortak bir marjinal dağılım ile modellenmesi için oldukça güçlü bir araç olarak literatürde yer almaktadır. Kapulaların temelinde yatan en önemli özellik, kapula fonksiyonunun değişkenler arasındaki ortak dağılımla ilgili olarak normallik varsayımında bulunmaması ve çok boyutlu ortak dağılım için çok sayıda marjinal dağılımı tespit edebilmesidir.

Kapula fonksiyonunun temel amacı, gözlenen verilere en uygun olan çok değişkenli dağılımı bağımlılık yapısını da ortaya koyarak elde etmektir. Son yıllarda özellikle finasta, aktüeryada, ekonomide, işletmede, hidrolojide, finansal zaman serilerinde, sağkalım analizlerinde, tıp istatistiklerinde kullanılmakta ve gün geçtikçe uygulama alanları artmaktadır.

Bu bağlamda, tezin bölümleri şöyle oluşturulmuştur: Tezin birinci bölümünde kapulaların tanımları, temel özellikleri, bazı bağımlılık katsayıları, Arşimedyen kapula aileleri ve bu

kapula ailelerinin özellikleri anlatılmıştır. İkinci bölümünde, rastgele örnek üretme algoritmalarından ve kapula tahmin yöntemlerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümünde ise, 1982 temel yılı 1982:01 ve 2011:02 yılları arasındaki aylık Üretici Fiyatları Endeksi (ÜFE) ve Tüketici Fiyatları Endeksi (TÜFE) verileri kullanılarak endeksler arası bağımlılık yapısını açıklayan kapulaların tahmini ve yapılan uygulamadan elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

## BİRİNCİ BÖLÜM

### KAPULALAR VE ÖZELLİKLERİ

Kapulalar, çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını kendi bir değişkenli  $[0,1]$  aralığı üzerinde düzgün dağılıma sahip marjinallerine bağlayan, çok değişkenli dağılım fonksiyonlarıdır. Kapulalar stokastik modellemede, yeni parametrik olmayan bağımlılık ölçülerini geliştirmede, çok değişkenli bağımlılık mekanizmalarının araştırılmasında, yeni çok değişkenli dağılımların elde edilmesinde ve Markov süreçlerine yeni yaklaşımlarda kullanılmaktadır (Çelebioğlu, 2007). Kapula fonksiyonunun asıl amacı, gözlenen verilere en uygun düşen çok değişkenli dağılımı bağımlılık yapısını da ortaya koyarak elde etmektir (Alhan, 2008, s.1). Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapılarını ortaya koymak amacıyla kullanılan kapulaların; finansta, aktüeryada, ekonomide, işletmede, hidrolojide, finansal zaman serilerinde, sağkalım analizlerinde, tıp istatistiklerinde kullanımı ve yeni uygulamaları gün geçtikçe artmaktadır.

#### 1.1.Kapulaların Tanımı ve Matematiksel Özellikleri

Kapulaların tanımını daha açık bir şekilde vermek gerekirse,  $F(X \leq x) = P(X \leq x)$  ve  $G(Y \leq y) = P(Y \leq y)$  dağılımına sahip  $X$  ve  $Y$  rastgele değişken çiftleri ve  $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$  ortak dağılım fonksiyonu ele alınsın. Her bir  $(x, y)$  reel sayı çifti sırasıyla  $F(x), G(y)$  ve  $H(x, y)$  sayıları ile ilişkilendirilebilir. Bu her bir sayı  $[0,1]$  aralığında değer alır. Bir başka deyişle, her bir  $(x, y)$  reel sayı çifti  $[0,1] \times [0,1]$  birim karesinde bir  $(F(x), G(y))$  noktasını ifade eder. Ayrıca bu sıralı çiftler  $[0,1]^2$  de  $H(x, y)$  ortak dağılım fonksiyonuna karşı gelir. Ortak dağılım fonksiyonunun değerini tek değişkenli dağılım fonksiyonlarının değerlerini kullanarak düzenli çiftlere atayan fonksiyonlara Kapula denir (Nelsen, 2006, s.7).

Kapulalarla ilgili temel kavramların ve matematiksel özelliklerin incelendiği bu bölümde ilk olarak 2-boyutlu kapula kavramına değinilmektedir. Aşağıdaki iki özelliği sağlayan  $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  fonksiyonu şeklinde tanımlanmış  $C(u,v)$  fonksiyonuna “2-boyutlu kapula” veya kısaca “kapula” denilmektedir:

1. Her  $u, v \in [0,1]$  için

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0 \quad (1.1)$$

ve

$$C(u, 1) = u \text{ ve } C(1, v) = v \quad (1.2)$$

2. Her  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$  için  $u_1 \leq u_2$  ve  $v_1 \leq v_2$  olacak şekilde

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (1.3)$$

**Teorem 1.1.**  $C$  bir kapula olsun.  $[0,1]^2$  tanım kümesindeki her  $(u, v)$  çifti için,

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) \text{ 'dir} \quad (1.4)$$

(1.4) eşitsizliğindeki alt ve üst sınırların kendileride birer kapuladır ve genellikle  $M(u, v) = \min(u, v)$  ve  $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$  ile gösterilir. Bu durumda,  $[0,1]^2$ 'deki her  $(u,v)$  çifti her  $C$  kapulası için,

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \quad (1.5)$$

biçiminde ifade edilebilir.

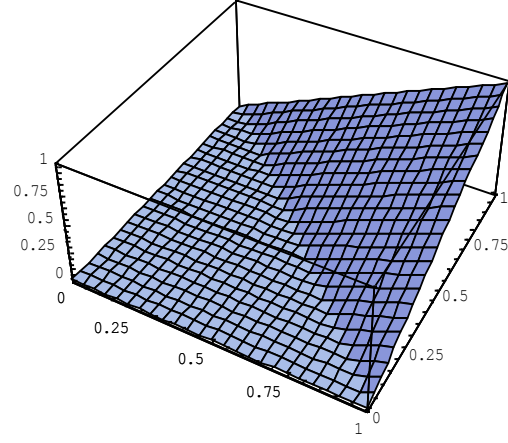
(1.5) eşitsizliği Fréchet-Hoeffding sınırlarının kapula versiyonu olarak adlandırılır. Bu eşitsizlikte geçen  $M(u, v)$ 'ye Fréchet-Hoeffding alt sınırı ve  $W(u, v)$ 'ye Fréchet-Hoeffding üst sınırı denilmektedir. Fréchet-Hoeffding sınırları eşitsizliği olarak bilinen ve her  $C$  kapulası için sağlanan  $W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$  eşitsizliği her  $(u, v) \in I^2$  için kapulalar kümesi üzerinde kısmi bir sıralama verir.

### 1.1.1. Uyum sıralaması

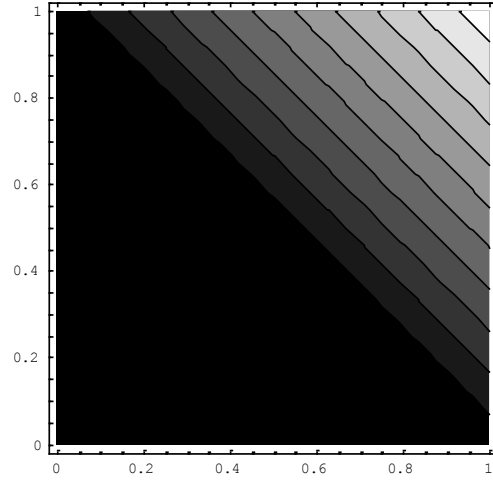
$C_1$  ve  $C_2$  iki kapula olsun. Her  $(u, v) \in I^2$  için  $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$  oluyorsa,  $C_1, C_2$ 'den küçüktür (veya  $C_2, C_1$ 'den büyüktür) denir ve  $C_1 < C_2$  (veya  $C_2 > C_1$ ) ile gösterilir.

Bir başka ifadeyle, Fréchet-Hoeffding alt sınır kapulası  $W(u, v)$  her kapuladan küçüktür ve Fréchet-Hoeffding üst sınır kapulası  $M(u, v)$  her kapuladan büyüktür. Kapulalar kümesine ilişkin bu kısmi sıralamaya uyum sıralaması denir (Nelsen, 2006, s.38-39).

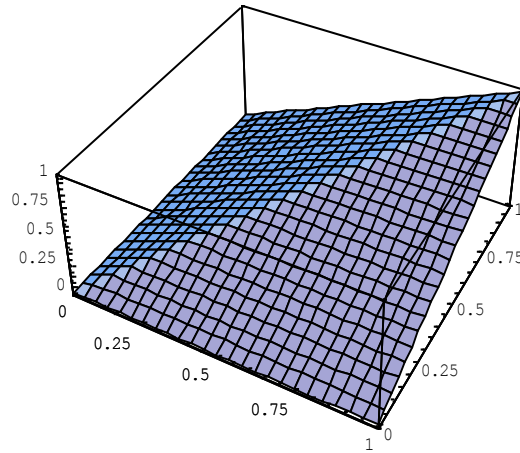
Fréchet-Hoeffding alt ve üst sınırların grafikleri ve düzey eğrileri Şekil 1.1, Şekil 1.2, Şekil 1.3 ve Şekil 1.4'de görülmektedir.



**Şekil 1. 1 Fréchet-Hoeffding alt sınır kapulasının grafiği**

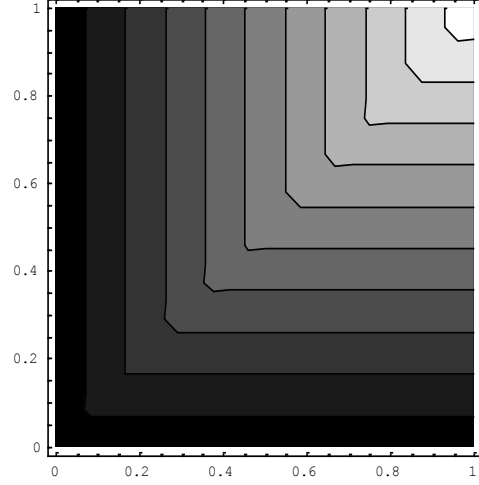


**Şekil 1. 2 Fréchet-Hoeffding alt sınır kapulasının düzey eğrileri**



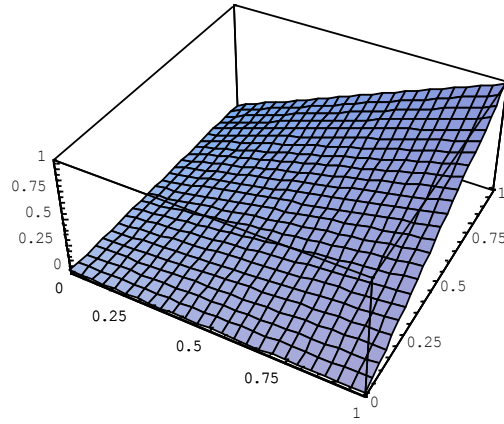
**Şekil 1. 3 Fréchet-Hoeffding üst sınır kapulasının grafiği**



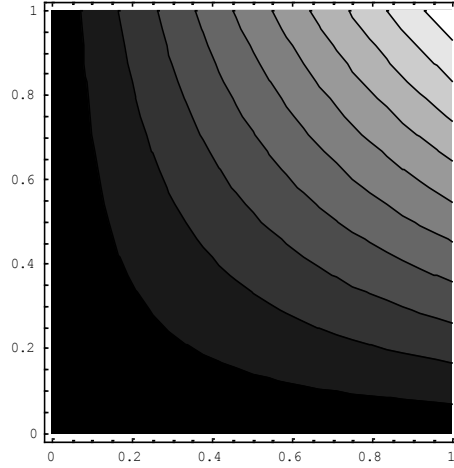


**Şekil 1. 4 Fréchet-Hoeffding alt sınır kapulasının düzey eğrileri**

Sıklıkla karşılaşılan önemli bir kapula,  $\Pi(u, v) = u \cdot v$  çarpım kapulasıdır. Çarpım kapulasının bir diğer ismi bağımsızlık kapulasıdır. Şekil 1.5’de bağımsızlık kapulasının grafiği ve Şekil 1.6’da bağımsızlık kapulasının düzey eğrisinin şekli görülmektedir (Nelsen, 2006, s.10-11).



**Şekil 1. 5 Bağımsızlık kapulasının ( $\Pi(u,v)$ ) grafiği**



**Şekil 1. 6 Bağımsızlık kapulasının  $(\Pi(u,v))$  düzey eğrileri**

Kapularar rastgele değişkenlere uygulanan kesin artan dönüşümler altında değişmez kalırlar. Aşağıdaki teoremdede değişkenlere uygulanan kesin azalan dönüşümler altında kapulalarda meydana gelen değişimler verilmiştir.

**Teorem 1.2.**  $X$  ve  $Y$ ,  $C_{XY}$  kapulasına sahip sürekli rastgele değişkenler olsun.  $\alpha$  ve  $\beta$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$  rastgele değişkenlerin değer kümesi üzerinde kesin monoton dönüşümler ise, aşağıdaki özellikler geçerlidir (Nelsen, 2006, s.26):

1. Eğer  $\alpha$  ve  $\beta$  kesin artansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = C_{XY}(u, v)'dir.$$

2. Eğer  $\alpha$  kesin artan ve  $\beta$  kesin azalansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)'dir.$$

3. Eğer  $\alpha$  kesin azalan ve  $\beta$  kesin artansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v)'dir.$$

4. Eğer  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin her ikisi de kesin azalansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v)'dir.$$

## 1.2. Sklar Teoremi

Çok değişkenli dağılım fonksiyonları ve bu fonksiyonların bir değişkenli marjinalleri arasındaki ilişkilerde kapulaların oynadığı rol Sklar Teoremi ile açıklanır. Bu teorem, kapulaların teorisinin en önemli teoremidir. Bu teoreme göre;

$H(x, y)$ , marjinalleri  $F(x)$  ve  $G(y)$  olan ortak bir dağılım fonksiyonu olsun. O zaman  $x, y \in \bar{R}$  için

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (1.6)$$

olacak şekilde bir  $C$  kapulası vardır. Eğer  $F(x)$  ve  $G(y)$  süreklirse,  $C$  tektir; aksi halde,  $C$ ,  $F(x)$  ve  $G(y)$ ' nin değer kümelerinin kartezyen çarpımı ( $\text{Dom}C = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$ ) üzerinde tek türlü tanımlanmıştır. Tersine, Eğer  $C$  bir kapula ve  $F(x)$  ile  $G(y)$  marjinal dağılım fonksiyonları ise, o zaman (1.6) ile tanımlanan  $H(x, y)$  fonksiyonu marjinalleri  $F(x)$  ve  $G(y)$  olan ortak bir dağılım fonksiyonudur (Nelsen, 2006, s.18).

(1.6) eşitliği ortak dağılım fonksiyonlarının bir kapula ve iki değişkenli dağılım fonksiyonu cinsinden ifadesini verir. Ancak (1.6) eşitliği kapulaları, ortak bir dağılım fonksiyonu ve iki marjinal dağılım fonksiyonunun tersleri cinsinden ifade eden bir eşitliğe dönüştürülebilir. Fakat bir marjinal dağılım fonksiyonu kesin artan değilse, bilinen anlamda terse sahip değildir. Bu nedenle önce dağılım fonksiyonlarının yarı terslerini tanımlamak yerinde olacaktır.

### 1.2.1. Yarı ters fonksiyon

$F(x)$  bir dağılım fonksiyonu olsun.  $F$ 'nin yarı tersi tanım kümesi  $[0,1]$  olan aşağıdaki özellikleri sağlayan  $F^{-1}$  fonksiyonudur:

1.  $t$ ,  $F$ 'nin değer kümesinin ( $\text{Ran}F$ ) bir elemanı ise,  $F^{-1}(t)$ ,  $F(x) = t$  olacak şekilde  $\bar{R}$ ' deki herhangi bir  $x$  değeridir; yani  $\forall t \in \text{Ran}F$  için

$$F(F^{-1}(t)) = t \quad (1.7)$$

dir.

2.  $t \notin \text{Ran}F$  ise,

$$F^{-1}(t) = ebas\{x|F(x) \geq t\} = eküs\{x|F(x) \leq t\} \quad (1.8)$$

dir.

Eğer  $F$  kesin artan bir fonksiyon ise,  $F$ 'nin bilinen tek bir yarı tersi vardır, bu ters ilerleyen bölümlerde  $F^{-1}$  ile ifade edilecektir.

$H(x, y)$ , marjinal dağılım fonksiyonları  $F(x)$  ve  $G(y)$  olan ortak dağılım fonksiyonu ve  $C$ , tanım kümesi  $DomC = RanF \times RanG$  ve  $H(x, y) = C(F(x), G(y))$  olacak şekilde bir kapula fonksiyonu olsun.  $F^{-1}$  ve  $G^{-1}$  sırasıyla  $F$  ve  $G$ 'nin yarı tersleri olsun. Herhangi bir  $(u, v) \in DomC$  için

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \quad (1.9)$$

olur.

$F(x)$  ve  $G(y)$  fonksiyonları sürekli ise yukarıdaki sonuç kapulalar içinde sağlanır ve ortak dağılım fonksiyonlarından kapulaları oluşturan bir yöntem sağlar (Nelsen, 2006, s.17-22).

### 1.3. Kapulalar ve Simetri Özellikleri

$X$  bir rastgele değişken ve  $a$  bir gerçekte sayı ise,  $X - a$  ve  $a - X$  rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları aynıysa, yani herhangi bir  $x \in R$  için  $P[X - a \leq x] = P[a - X \leq x]$  ise,  $X$  a çevresinde simetriktir, denir. Simetriklik, marjinal simetrik, ışınsal simetrik ve ortak simetrik olarak çeşitli şekillerde karşımıza çıkabilir. Bu ifadelerle ilgili tanımlara aşağıdaki kısımda yer verilecektir.

#### 1.3.1. Marjinal Simetrik, Işınsal Simetrik ve Ortak Simetrik Kavramları

$X$  ile  $Y$  rastgele değişkenler ve  $(a, b)$ ,  $R^2$ 'de bir nokta olsun.

- $X$  ile  $Y$  rastgele değişkenleri sırasıyla  $a$  ve  $b$  çevresinde simetrikse,  $(X, Y)$ 'ye  $(a, b)$  çevresinde marjinal olarak simetriktir, denir.
- $X - a$  ile  $Y - b$ 'nin ortak dağılım fonksiyonu  $a - X$  ile  $b - Y$ 'nin ortak dağılım fonksiyonuyla aynıysa,  $(X, Y)$ 'ye  $(a, b)$  çevresinde ışınsal simetriktir, denir.

- $(X - a, Y - b), (X - a, b - Y), (a - X, Y - b)$  ve  $(a - X, b - Y)$  rastgele değişken çifti bilinen ortak dağılıma sahipse,  $(X, Y)$  'ye  $(a, b)$  çevresinde ortak olarak simetriktir, denir.

Nelsen'in (2006) simetriklikle ilgili vermiş olduğu tanımı şöyledir;

$X$  ile  $Y$  ortak dağılım fonksiyonu  $H$ , marjinal dağılım fonksiyonları sırasıyla  $F$  ve  $G$ , kapulası  $C$  olan sürekli rastgele değişkenler olsun.  $F = G$  ve  $I^2$ 'deki tüm  $(u, v)$  çiftleri için  $C(u, v) = C(v, u)$  ise,  $X$  ve  $Y$  rastgele değişkenleri değiştirilebilirdir. Her  $(u, v) \in I^2$  için  $C(u, v) = C(v, u)$  olduğunda  $C$ 'ye basitçe simetriktir denir (Nelsen, 2006, s.36-38).

#### 1.4. Çok Değişkenli Kapulalar

Daha önce 2 boyutlu kapula tanımı verilmişti. Bu bölümde çok değişkenli kapulaların tanımı ve özelliklerine değinilmektedir.

Herhangi bir  $n$  pozitif tamsayısı için,  $\bar{R}^n$  ile genişletilmiş  $n$  - uzay  $R \times R \times \dots \times R$  gösterilecektir.  $\bar{R}^n$  'deki noktalar için  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ve  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  vektörleri tanımlanmıştır. Her  $k$  için  $a_k \leq b_k$  olduğunda bu  $a \leq b$  ile, her  $k$  için  $a_k \leq b_k$  olduğunda  $a \leq b$  ile göstereceğiz.  $a \leq b$  iken,  $[a, b]; B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  şeklinde tanımlı  $n$  kapalı aralığın Kartezyen çarpımını ifade etsin.  $B$ ,  $n$  kapalı aralığın köşeleri, her biri  $a_k$  veya  $b_k$  'ya eşit olan  $c_k$  'lardan oluşan  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  noktalarıdır. Birim  $n$ -küb  $I^n$ ,  $I \times I \times \dots \times I$  çarpımıdır.  $n$ - yerli bir  $H$  gerçek fonksiyonu tanım kümesi  $\bar{R}^n$ 'nin alt kümesi olan  $DomH$  ve değer kümesi  $RanH$ ,  $R$  'nin alt kümesi olan bir fonksiyondur.

#### Tanım

$S_1, S_2, \dots, S_n, R$ 'nin boş olmayan alt kümeleri ve  $H, DomH = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  olacak şekilde  $n$ - yerli gerçek bir fonksiyon olsun.  $B = [a, b]$ , bütün köşeleri  $DomH$ ' da olan bir aralık olsun.  $H$  fonksiyonunun  $B$  bölgesindeki hacmi,

$$sgn(c) = \begin{cases} 1, & \text{çift sayıda } k \text{ için } c_k = a_k \text{ ise} \\ -1, & \text{tek sayıda } k \text{ için } c_k = a_k \text{ ise} \end{cases}$$

iken

$$V_H(B) = \sum \text{sgn}(c)H(c)$$

dir.

$B$  üzerinde  $H$ 'ın  $n$  tane birinci mertebeden farklarını tanımlayacak olursak

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(t) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n)$$

$H$  fonksiyonunun  $B$  kapalı aralığı üzerindeki hacmi,  $B$  üzerinde  $H$ 'ın  $n$ -inci mertebeden farkıdır ve

$$V_H(B) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1}$$

şeklinde gösterilir.

#### 1.4.1. $n$ Boyutlu Kapula ve $n$ Boyutlu Sklar Teoremi

$C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  aşağıdaki özellikleri sağlarsa  $n$  boyutlu kapula adını alır:

1. Her  $u \in [0,1]^n$  için

$$C(u) = 0, u' \text{ nun en az bir koordinatı } 0 \quad (1.10)$$

ve

$$C(u) = u_k, u_k \text{ hariç } u' \text{ nun bütün koordinatları } 1 \text{ ise,} \quad (1.11)$$

dir.

2.  $a \leq b$  olan her  $a, b \in I^n$  için

$$V_C([a, b]) \geq 0$$

dır.

**Teorem1.3.** ( $n$  boyutlu Sklar teoremi)  $H$ , marjinalleri  $F_1, F_2, \dots, F_n$  olan  $n$  boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. O zaman her  $x \in \bar{R}^n$  için

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (1.12)$$

olacak şekilde bir  $C$ ,  $n$ - kapulası vardır.  $F_1, F_2, \dots, F_n$ 'lerin hepsi süreklilyse, o zaman  $C$  tekdir; aksi takdirde  $C$ ,  $DomF_1 \times DomF_2 \times \dots \times DomF_n$  üzerinde tek türlü belirlenmiştir. Tersine  $C$  bir  $n$  kapula ve  $F_1, F_2, \dots, F_n$  dağılım fonksiyonlarıysa, o zaman (1.12) ile tanımlanan  $H$  fonksiyonu marjinalleri  $F_1, F_2, \dots, F_n$  olan  $n$  boyutlu bir dağılım fonksiyonudur.

$H, C, F_1, F_2, \dots, F_n$ 'ler Nelsen'in (2006) simetriklerle ilgili vermiş olduğu tanımdaki gibi ve  $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ 'ler  $F_1, F_2, \dots, F_n$ 'lerin yarı tersleri olsun. O zaman herhangi bir  $u \in I^n$  için

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)) \quad (1.14)$$

olur.

**Teorem1.4.** ( $n$  boyutlu kapula için Fréchet-Hoeffding alt ve üst sınırları)

$C$  herhangi bir  $n$  kapulasıysa, bu takdirde her  $u \in I^n$  için

$$W^n(u) \leq C(u) \leq M^n(u) \quad (1.15)$$

sağlanır. Burada

$$W^n(u) = \max\{u_1 + u_2 + \dots + u_n - n + 1, 0\}$$

$$M^n(u) = \min\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

dir. Bu fonksiyonlar sırasıyla,  $n$  boyutlu kapula için Fréchet-Hoeffding alt ve üst sınırlarıdır (Nelsen, 2006, s.42-48).

## 1.5. Arşimedyen Kapulalar

Son zamanlarda, çeşitli alanlarda bağımlılık yapısını modellemek için bir araç olarak kullanılan Arşimedyen kapulalar, değiştirilebilir iki değişken arasındaki bağımlılığı modellemek için matematiksel kolaylıkları ve esnekliklerinden dolayı çok fazla tercih edilmektedir. Arşimedyen kapulalar, ilk kez Kimberling tarafından tanıtılmıştır. Genest ve Mackay, Marshall ve Olkin, Ballerini ve Oakes, bazı temel katkılarda bulunmuştur. Aşağıdaki kısımda Arşimedyen kapularının özellikleri kısaca anlatılmaktadır.

### 1.5.1. Arşimedyen Kapularının Özellikleri

Arşimedyen yaklaşımı, çok değişkenli bir kapulanın, basit tek değişkenli bir üretici fonksiyonuna indirgenmesine izin verir. Basit olması açısından  $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  tanım aralığında iki değişkenli bir kapula düşünelim.  $\varphi: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ , sürekli, kesin azalan, konveks ve  $\varphi(1) = 0$  olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Arşimedyen bir kapula

$$u, v \in [0,1] \text{ için } C(u, v) = \varphi^{(-1)}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (1.16)$$

eşitsizliği biçiminde yazılabilir.  $\varphi$ 'ye,  $C$  kapulasının üreticisi denir ve Arşimedyen kapulayı belirler (Nelsen, 2005, s.2).

#### Tanım

$\varphi: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ 'a sürekli, kesin azalan, konveks ve  $\varphi(1) = 0$  olacak şekilde bir fonksiyon olsun.  $\varphi$ 'nin ters fonksiyonu tanım kümesi  $[0, \infty]$  ve değer kümesinde  $[0,1]$  olarak tanımlanan  $\varphi^{(-1)}$  fonksiyonu aşağıdaki gibidir,

$$\varphi^{(-1)} = \begin{cases} \varphi^{(-1)}, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \quad (1.17)$$

ile verilen fonksiyondur. Burada  $\varphi^{(-1)}$  fonksiyonu sürekli ve  $[0, \infty]$  üzerinde artmayan ve  $[0, \varphi(0)]$  üzerinde kesin azalandır. Ayrıca,  $[0,1]$  aralığında  $\varphi^{(-1)}(\varphi(u)) = u$  olur ve

$$\varphi(\varphi^{(-1)}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases}$$



$$= \min(t, \varphi(0))$$

dir.

Son olarak,  $\varphi(0) = \infty$  ise, o zaman  $\varphi^{(-1)} = \varphi^{-1}$ 'dir (Nelsen, 2006, s. 110).

Arşimedyen kapulaların özellikleri Teorem 1.5 ile verilmiştir.

**Teorem 1.5.**  $C$ , üreticisi  $\varphi$  olan Arşimedyen bir kapula olsun. O zaman:

1.  $C$  simetriktir; yani her  $u, v \in I$  için  $C(u, v) = C(v, u)$ ;
2.  $C$  birleşmelidir; yani her  $u, v, w \in I$  için  $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ ;
3.  $c > 0$  herhangi bir sabitse,  $c\varphi$  de  $C$ 'nin üreticisidir (Matteis, 2001).

Arşimedyen kapulalar birkaç nedenden ötürü uygulamalarda geniş yer tutmaktadır. Bu nedenler;

1. Bu ailenin kolayca inşa edilebilmesi,
2. Bu aileye ait kapula ailelerinin büyük değişkenlikleri içermesi,
3. Bu ailenin üyelerinin çok güzel cebirsel özelliklere sahip olması
4. Bu aileye ait birçok parametrik kapula ailelerinin olması

şeklinde özetlenebilir (Matteis, 2001).

Arşimedyen kapulalar çok çeşitli bağımlılık yapılarını yansıtabildikleri için genellikle menkul kıymetler borsasında, sigorta matematiğinde, portföy paylaşımında ve ömür analizlerinde kullanılmaktadır (Çelebioğlu, 2003).

### 1.6. Bazı Arşimedyen Kapulalar

Birçok kapula fonksiyonu vardır. Kapula fonksiyonları hakkında geniş bilgi için Joe (1997) ve Nelsen'e (2006) bakılabilir. Arşimedyen kapula ailesinden en çok kullanılan bazı kapulalar

Ali-Mikhail-Haq, Clayton, Frank ve Gumbel Hougaard' dır. Bu kapula aileleri ve bunların üreticilerine ilişkin eşitlikler Tablo 1.1'de görülmektedir (Frees ve Valdez, 1998).

**Tablo 1. 1 Bazı Arşimedyen kapulaların fonksiyonları ve üreticileri**

Aileler	Kapulanın Genel Formu ( $C_{\theta}(u, v)$ )	Üreticiler ( $\varphi(\theta)$ )	Parametre Aralığı
Ali-Mikail-Haq	$uv[1 - \theta(1 - u)(1 - v)]^{-1}$	$\ln \frac{1 - \theta(1 - t)}{t}$	$[-1, 1]$
Clayton	$[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[-1, \infty) - \{0\}$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right]$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$(-\infty, \infty) - \{0\}$
Gumbel-Hougaard	$\exp \left\{ -[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{1/\theta} \right\}$	$(-\ln t)^{\theta}$	$[1, \infty)$

Aşağıdaki kısımda sıklıkla kullanılan ve Tablo 1.1'de özetlenmiş olan bazı kapula aileleriyle ilgili ayrıntılı bilgilere değinilmektedir.

### 1.6.1. Ali-Mikhail-Haq Kapula Ailesi (AMH)

$X$  ve  $Y$  tesadüfi değişkenleri için Gumbel' in iki değişkenli lojistik dağılımı

$$H(X, Y) = (1 + e^{-X} + e^{-Y})^{-1} \text{ şeklindedir.}$$

$H(X, Y)$  ortak dağılım fonksiyonu, uygulamalarda yararlı bir parametrenin kısıtlanmasından oluşan hatadan dolayı sıkıntı çeker. Ali, Mikhail ve Haq ortak dağılım fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayarak doğrulamışlardır.

$$H_{\theta}(X, Y) = [1 + e^{-X} + e^{-Y} + (1 - \theta)e^{-X-Y}]^{-1} \quad \theta \in [-1, 1] \text{ için}$$

Olasılık dönüştürmeleri ve matematiksel yöntemler kullanılarak, AMH kapula elde edilir. Üretici fonksiyonu dikkate alınarak

$$\varphi(t) = \ln \frac{1 - \theta(1 - t)}{t}$$

ve (2.1)' den AMH kapula,

$$C_\theta(u, v) = uv[1 - \theta(1 - u)(1 - v)]^{-1}$$

şeklinde tanımlanır.

$[-1, 1]$  aralığında değer alan  $\theta$  parametresi pozitif ve negatif bağımlılığa izin verir.  $\theta = 0$  iken, yani  $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u, v) = uv = \Pi(u, v)$  bağımsızlık kapulasına eşit olur (Kumar, 2009).

### 1.6.2. Clayton Kapula Ailesi

Clayton kapula ailesi asimetrik bir Arşimedyen kapuladır. Alt kuyruk, üst kuyruktan daha büyük bağımlılık gösterir. Clayton kapula aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_\theta(u, v) = \max\left([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0\right) \quad (1.18)$$

Üretici fonksiyonu,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$$

dir.

$[-1, \infty) - \{0\}$  aralığında değer alan  $\theta$  parametresinin artmasıyla gözlemler arasındaki bağımlılık artar.  $\theta \rightarrow 0$  iken, yani  $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u, v) = uv = \Pi(u, v)$  bağımsızlık kapulasını ve  $\theta \rightarrow \infty$  iken mükemmel bağımlılığı işaret eder (Arnold, 2006).

### 1.6.3. Frank Kapula Ailesi

Frank kapula ailesi simetrik bir Arşimedyen kapuladır. Frank kapula aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right] \quad (1.19)$$

Üretici fonksiyonu,

$$\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$$

$\theta \rightarrow 0$  iken, yani  $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u, v) = uv = \Pi(u, v)$  bağımsızlık kapulasına ve  $\theta \rightarrow \infty$  iken, Fréchet-Hoeffding üst sınırına eşit olur. Frank kapula ailesi, diğer bazı kapulalardan farklı olarak marjinaler arasında negatif bağımlılığa izin vermesi ve bağımlılığın kuyrukların ikisinde de olmasından dolayı uygulamalarda daha çok tercih edilmektedir (Trivedi ve Zimmer, 2005).

#### 1.6.4. Gumbel Hougaard Kapula Ailesi

Gumbel Hougaard kapula ailesi asimetric bir Arşimedyen kapuladır. Bu kapula ailesi üst kuyruk bağımlılık gösterir. Gumbel Hougaard kapula aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_\theta(u, v) = \exp \left\{ - \left[ (-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{1/\theta} \right\} \quad (1.20)$$

Üretici fonksiyonu,

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$$

dir.

Clayton kapula ailesinde olduğu gibi  $\theta$  parametresinin artmasıyla gözlemler arasındaki bağımlılık artar.  $\theta \rightarrow 1^+$  iken, yani  $\lim_{\theta \rightarrow 1^+} C_\theta(u, v) = uv = \Pi(u, v)$  bağımsızlık kapulasına eşit olur ve  $\theta \rightarrow \infty$  iken, mükemmel bağımlılık gösterir (Joe, 1997, s. 202-206).

#### 1.7. Bazı Bağımlılık Katsayıları

Bu bölümde, rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık ve birliktelik yapıları anlatılmış ve bu yapıların kapulalar ile nasıl ifade edildikleri incelenmiştir.

Bir rastgele değişken çiftinin büyük değerleri büyük değerlere ve küçük değerleri küçük değerlere karşılık geliyorsa, bu değişken çiftine uyumludur denir. Matematiksel olarak ifade edecek olursak  $(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$  sürekli rastgele değişkenlerin vektörü olan  $(X, Y)$ 'de iki gözlemi ifade etsin. Eğer  $x_i < x_j$  ve  $y_i < y_j$  veya  $x_i > x_j$  ve  $y_i > y_j$  ise,  $(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$  gözlemleri uyumludur denir.

Benzer şekilde  $x_i < x_j$  ve  $y_i > y_j$  veya  $x_i > x_j$  ve  $y_i < y_j$  ise,  $(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$  gözlemleri uyumsuzdur denir. Yani  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$  ise,  $(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$  gözlemleri uyumludur,  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$  ise uyumsuzdur denir (Nelsen, 2006, s.157-158).

### 1.7.1. Kendall'ın Tau( $\tau$ ) Değeri

Kendall Tau ( $\tau$ )'su olarak bilinen birliktelik ölçüsünün örnek versiyonunu uyumluluk cinsinden Kruskal, Lehmann, Hollander ve Wolfe aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ , sürekli  $(X, Y)$  sürekli rastgele değişkenler vektöründen  $n$  gözlemlilik bir rastgele örneği gösterebilir. Bu örnekteki gözlemlerin  $\binom{n}{2}$  tane  $(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$  farklı gözlemleri vardır ve her bir çift ya uyumludur ya da uyumsuzdur.  $c$  uyumsuz çiftlerin sayısını,  $d$  uyumlu çiftlerin sayısını gösterebilir. Örnek için Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'su;

$$t = \frac{c-d}{c+d} = \frac{c-d}{\binom{n}{2}} \quad (1.21)$$

olarak tanımlanır.

$t$ , örnekten rastgele seçilen bir  $(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$  gözlem çifti için uyumluluk olasılığı eksi uyumsuzluk olasılığıdır.

Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'sunun yığın versiyonunu,  $H$  ortak dağılım fonksiyonuna sahip bir  $(X, Y)$  sürekli rastgele değişkenler vektörünü benzer şekilde ifade edebiliriz.  $(X_1, Y_1)$  ve  $(X_2, Y_2)$ ,  $H$  ortak dağılım fonksiyonuna sahip bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele vektörler olsun. Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'su yığın için,

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (1.22)$$

olarak tanımlanır (Nelsen, 2006, s.158).

**Teorem 1.6.**

$(X_1, Y_1)$  ve  $(X_2, Y_2)$  aynı  $F(X_1$  ve  $X_2$  için) ve  $G(Y_1$  ve  $Y_2$  için) marjinallerine sahip sırasıyla  $H_1$  ve  $H_2$  ortak dağılım fonksiyonları ile sürekli rastgele değişkenlerin bağımsız vektörleri olsun.  $C_1$  ve  $C_2$ ,  $H_1(X, Y) = C_1(F(X), G(Y))$  ve  $H_2 = C_2(F(X), G(Y))$  olacak şekilde sırasıyla  $(X_1, Y_1)$  ve  $(X_2, Y_2)$ ' nin kapulaları olsun.  $Q$ ,  $(X_1, Y_1)$  ve  $(X_2, Y_2)$ ' nin uyum ve uyumsuzluk olasılıkları arasındaki farkı gösterebilir. Yani,

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (1.23)$$

olsun. O zaman

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \quad (1.24)$$

dir.

**Sonuç**

$C_1, C_2$  ve  $Q$  Teorem (1.6)'deki gibi olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

1.  $Q$  argümanlarına göre simetriktir:  $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$ ' dir.
2.  $Q$  her bir argümanına göre azalmayandır: her  $(u, v) \in I^2$  için  $C_1 < C'_1$  ve  $C_2 < C'_2$  ise, o zaman  $Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2)$ ' dir.)
3.  $Q$ 'daki kapulalar sağkalım kapulalarıyla değiştirilebilir; yani,  $Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$ ' dir.

**Teorem 1.7.**

$X$  ve  $Y$ , kapulası  $C$  olan sürekli rastgele değişkenler olsun.  $X$  ve  $Y$ 'nin Kendall'in Tau ( $\tau$ )'sunun yığın versiyonu

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \iint C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (1.25)$$

ile verilir.

(1.25) eşitliğindeki integral ortak dağılım fonksiyonu  $C$  olan Düzgün  $[0,1]$  dağılımlı  $U$  ve  $V$  rastgele değişkenlerinin  $C(U,V)$  fonksiyonunun beklenen değeri aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Nelsen, 2006, s.158-162):

$$\tau_C = 4E[C(U,V)] - 1 \quad (1.26)$$

Aşağıdaki teorem Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'sunu Arşimedyen kapulanın üreticisi yardımıyla hesaplama imkanı vermektedir.

**Teorem 1.8.**

$X$  ve  $Y$ ,  $\varphi \in \Omega$  ile üretilmiş bir  $C$  Arşimedyen kapulasına sahip rastgele değişkenler olsun.  $X$  ve  $Y$  için Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'sunun yığın versiyonu  $\tau_C$ ,

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \quad (1.27)$$

biçiminde ifade edilir (Nelsen, 2006, s.163).

**Örnek:**

Arşimedyen kapula ailesinden Ali-Mikhail-Haq kapula ailesi için Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'su ve  $\theta$  arasındaki bağıntı,

$$\varphi(t) = \ln \frac{1-\theta(1-t)}{t} \text{ ve } \varphi'(t) = \frac{\left(-\frac{1-\theta(1-t)}{t^2} + \frac{\theta}{t}\right)}{1-\theta(1-t)}$$

eşitlikleri (1.27) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\ln \frac{1-\theta(1-t)}{t}}{\frac{\left(-\frac{1-\theta(1-t)}{t^2} + \frac{\theta}{t}\right)}{1-\theta(1-t)}} dt \\ &= \frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1-\theta)^2}{3\theta^2} \ln(1-\theta) \end{aligned}$$

dır.

### 1.7.2. Spearman'ın Rho( $\rho_S$ )'su

Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'sunda olduğu gibi Spearman'ın Rho ( $\rho_S$ )'su olarak bilinen birliktelik ölçüsünün yığın versiyonu uyum ve uyumsuzluğa dayanır. Bu ölçünün yığın biçimini elde etmek için  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  ve  $(X_3, Y_3)$ ,  $H$  ortak dağılım fonksiyonuna (marjinalleri  $F$  ve  $G$  olan) sahip ve kapulası  $C$  olan üç bağımsız rastgele vektör olsun. Spearman'ın Rho ( $\rho_S$ ) 'sunun yığın versiyonu,  $(X_1, Y_1)$  ve  $(X_2, Y_3)$  vektörleri için uyum olasılığı eksi uyumsuzluk olasılığı ile orantılıdır (Nelsen, 2006, s.167).

$$\rho = \rho_{X,Y} = 3(P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)) \quad (1.28)$$

Burada  $(X_3, Y_2)$  vektöründe aynı şekilde kullanılabilirdi.  $(X_1, Y_1)$  'in ortak dağılım fonksiyonu  $H(x, y)$  iken  $(X_2, Y_3)$  'ün ortak dağılım fonksiyonu  $F(x)G(y)$  (çünkü  $X_2$  ve  $Y_3$  bağımsızdır) iken  $X_2$  ve  $Y_3$  'ün kapulası  $\Pi$  olur.

#### **Teorem 1.9.**

$X$  ile  $Y$ , kapulası  $C$  olan sürekli rastgele değişkenler olsun. O zaman  $X$  ve  $Y$ 'ye ilişkin Spearman'ın Rho ( $\rho_S$ )'sunun yığın versiyonu

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} = \rho_C &= 3Q(C, \Pi) \\ &= 12 \iint uv dC(u, v) - 3 = 12 \iint C(u, v) dudv - 3 \end{aligned} \quad (1.29)$$

biçiminde ifade edilir (Cherubini vd, 2004).

#### **Örnek:**

$[-1,1]$  aralığında değer alan  $C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v)$  fonksiyonlu Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesi için Spearman'ın Rho ( $\rho_S$ )'su ve  $\theta$  arasındaki bağıntı,

$$\rho = 12 \iint uv dC_\theta(u, v) - 3 = 12 \iint uvc_\theta(u, v) dvdu - 3$$



Burada  $dC_\theta(u, v) = \frac{\partial^2 C_\theta(u, v)}{\partial u \partial v} dudv = [1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v)]dudv$  ve  $C_\theta$  mutlak sürekli olduğundan

$$\rho = 12 \iint uv [1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v)]dudv - 3 = 12 \left( \frac{1}{4} + \frac{\theta}{36} \right) - 3 = \frac{\theta}{3}$$

olur (Nelsen, 2006, s.167).

### 1.7.3. Kendall Tau( $\tau$ ) ve Spearman Rho( $\rho_S$ ) Arasındaki İlişki

Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'su ve Spearman'ın Rho ( $\rho_S$ )'su kapulası verilen rastgele değişkenler arasındaki uyum olasılığının ölçüsü olsalar da,  $\rho$  ve  $\tau$  değerleri birbirlerinden oldukça farklıdır.

#### ***Teorem 1.10.***

$X$  ve  $Y$ , sürekli rastgele değişkeler ve  $\rho$  ile  $\tau$  sırasıyla (1.23) ve (1.28)'de tanımlandığı gibi olsun.

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1 \quad (1.30)$$

dir.

#### ***Teorem 1.11.***

$X, Y, \tau$  ve  $\rho$  Teorem (1.9)'da tanımlandığı gibi olsun.

$$\frac{1+\rho}{2} \geq \left( \frac{1+\tau}{2} \right)^2 \quad (1.31a)$$

ve

$$\frac{1-\rho}{2} \geq \left( \frac{1-\tau}{2} \right)^2 \quad (1.31b)$$

Bu iki teoremin birleşmesinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

$X, Y, \tau$  ve  $\rho$  Teorem (1.9)'da gibi olsun. O zaman

$$\frac{3\tau-1}{2} \leq \rho \leq \frac{1+2\tau-\tau^2}{2}, \quad \tau \geq 0 \quad (1.32)$$

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 3\tau}{2}, \quad \tau \leq 0$$

dır (Nelsen, 2006, s.174-177).

## İKİNCİ BÖLÜM

### KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ

Kapularla istatistiksel modelleme problemi genelde iki aşamayı içerir: birincisi, marjinal dağılımların belirlenmesi ve ikincisi, uygun kapula fonksiyonunun tanımlanmasıdır (Cherubini vd, 2004). Kapula fonksiyonunun tanımlanmasında kullanılan tahmin yöntemleri temelde parametrik yöntemler, yarı parametrik yöntemler ve parametrik olmayan yöntemler olmak üzere üçe ayrılabilir. Bu yöntemlerle ilgili kapsamlı bilgiler aşağıdaki bölümde anlatılmıştır.

#### 2.1. Parametrik Tahmin Yöntemleri

Parametrik tahmin yöntemleri değişkenlere ait marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları ve kapula fonksiyonu ile ilgili bilgi edinildiği durumlarda kullanılan tahmin yöntemleridir. Aşağıdaki kısımda En Çok Olabilirlik (MLE) (Tam En Çok Olabilirlik (EMLE)) ve Marjinallere İlişkin Çıkarsama (IFM) yöntemleri hakkında bilgi verilmektedir.

##### 2.1.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi (MLE)

Bu tahmin yönteminden bahsetmeden önce kanonik gösterim olarak adlandırılan gösterimini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \prod_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (2.1)$$

Bu gösterimde

$$c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) = \frac{\partial^n C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2) \dots \partial F_n(x_n)} \quad (2.2)$$

$C$  kapulasının  $n$ . mertebeden kısmi türevi,  $c$  kapula yoğunluğu ve  $f_j$  'ler standart tek değişkenli marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdır. Çok değişkenli yoğunluk fonksiyonu için ifade edilen bu kanonik gösterim kapuların istatistiksel model probleminin çözümünün iki adımda yapılabileceğini göstermektedir:

2. Marjinal dağılımların belirlenmesi;
3. Uygun kapula fonksiyonunun tanımlanması.

$\mathfrak{X} = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ , örnek veri matrisi olsun. Buna göre, log-olabilirlik fonksiyonu

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt})) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \ln f_j(x_{jt}) \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\theta$ , kapula ve marjinallere ilişkin bütün parametrelerin kümesidir.

Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının kümesi ve kapula biliniyorsa, yukarıda ifade edilen log-olabilirlik fonksiyonu yazılabilir ve en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\theta}_{MLE} = \max l(\theta)$$

dir (Cherubini vd, 2004).

### 2.1.2. Marjinallere İlişkin Çıkarsama Yöntemi (IFM)

En çok olabilirlik yöntemi için marjinal dağılımların parametreleri ve kapula yoğunluk fonksiyonunun bilinmesi gerekli olduğundan, çok boyutlu durumlarda yoğun hesaplamalarla karşılaşılır. Ancak log-olabilirlik fonksiyonuna bakıldığında iki terimden oluşmaktadır. Birinci terim kapula yoğunluk fonksiyonu ve onun parametrelerinden oluşurken, ikinci terimde marjinalleri ve kapula yoğunluk fonksiyonunun bütün parametrelerini içerir. Bu nedenle Joe ve Xu, bu parametreler kümesinin iki adımda tahmin edilmesi için aşağıdaki yöntemi önermişlerdir.

1. Adım: Tek değişkenli marjinal dağılımların tahmini ile marjinal parametreleri  $\theta_1$  tahmin edilir:

$$\hat{\theta}_1 = \text{ArgMax}_{\theta_1} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \log f_j(x_{jt}; \theta_1) \quad (2.4)$$

2. Adım: Elde edilen  $\hat{\theta}_1$  log-olabilirlik fonksiyonunda yerine konarak kapula parametresi  $\theta_2$  tahmin edilir:

$$\hat{\theta}_2 = \text{ArgMax}_{\theta_2} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt}); \theta_2, \hat{\theta}_1) \quad (2.5)$$

Bu yöntemle marjinallere ilişkin çıkarsama (IFM) yöntemi denir. IFM tahmin edicisi

$$\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)' \quad (2.6)$$

vektörü ile gösterilir.

$l$ , log-olabilirlik fonksiyonu,  $l_j$ ,  $j$ 'inci marjinal log-olabilirlik fonksiyonu ve  $l_c$ , kapulanın log-olabilirlik fonksiyonu olsun. O zaman, IFM tahmin edicisi aşağıda verilen eşitliğin çözümüdür:

$$\left( \frac{\partial l_1}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_2} \right) = 0' \quad (2.7)$$

MLE tahmin edicisi ise

$$\left( \frac{\partial l}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l}{\partial \theta_2} \right) = 0' \quad (2.8)$$

eşitliğinin çözümüdür.

Bu iki eşitlik genellikle birbirine eşit çıkmamaktadır. IFM tahmin edicisi MLE tahmin edicisine göre daha kolay hesaplanabilmektedir.

Sayısal olarak IFM tahmin edicisi MLE tahmin edicisinden daha kolay elde edilir. Bu nedenle, IFM tahmin edicisinin MLE tahmin edicisi ile asimptotik etkinliğinin karşılaştırılması mantıklı olacaktır. Bunun için iki tahmin edicinin asimptotik kovaryans matrislerinin karşılaştırılması gerekir.

IFM teorisi, parametre vektörünün tahmini için uygun sonuç eşitliklerinin kümesinin kullanılmasına dayanan özel bir durumdur. Bu durumdaki her eşitlik bir skor fonksiyonudur. Yani eşitliğin sol tarafı, her marjinal yoğunluk fonksiyonunun log-olabilirliğinin kısmi türevidir.

Joe (1997), MLE tahmin edicisi gibi IFM tahmin edicisinin de yoğunluk koşulları altında asimptotik normallik özelliğine sahip olduğunu kanıtlamıştır:

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \rightarrow N(0, G^{-1}(\theta_0))$$

Burada  $G(\theta_0)$ , Godambe bilgi matrisidir. Böylece skor fonksiyonu

$$s(\theta) = \left( \frac{\partial l_1}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_2} \right)'$$

şeklinde tanımlanır.

$l_1, l_2, \dots, l_n$  her marjinal fonksiyonun log-olabilirlik fonksiyonu ve  $l_c$  ise kapula log-olabilirlik fonksiyonu olsun. Godambe bilgi matrisi ise;

$$G(\theta_0) = D^{-1}V(D^{-1})'$$

dir. Burada

$$D = E \left[ \frac{\partial s(\theta)}{\partial \theta} \right] \text{ ve } V = E[s(\theta)s(\theta)']$$

Bu kovaryans matrisinin tahmini birçok türev hesaplamalarını gerektirmektedir. Joe (1997), IFM yöntemi MLE yöntemi ile karşılaştırıldığında oldukça etkili olduğunu ifade etmiştir (Cherubini vd, s. 156-157).

## 2.2. Yarı Parametrik Tahmin Yöntemi

Yarı parametrik tahmin yöntemleri kapula fonksiyonuna ait yoğunluk fonksiyonunun var olması durumunda kullanılan tahmin yöntemleridir. Bu kısım da Sözde En Çok Olabilirlik Yöntemi (PMLE) tanıtılacaktır.

### 2.2.1. Sözde En Çok Olabilirlik Yöntemi (PMLE)

Klasik istatistikte, en çok olabilirlik tahmini, genellikle daha etkin olan ve özellikle  $\theta$  parametresi çok boyutlu olduğunda bu etkinliğin daha da arttığı momentler yöntemine iyi bir alternatiftir.

$c_\theta$  yoğunluğuna sahip  $C_\theta$  kapulasının kesinlikle sürekli olmasını gerektiren en çok sözde olabilirlik yöntemi, basit sıra sayılarına dayalı

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ c_\theta \left( \frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right\} \quad (2.9)$$

log- olabilirlik fonksiyonunu maksimum hale getirecek parametrenin tahminini elde eder. Klasik log-olabilirlik fonksiyonu

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \{ c_\theta (F(X_i), G(Y_i)) \} \quad (2.10)$$

ifadesinde bilinmeyen  $F$  ve  $G$  marjinal dağılım fonksiyonlarının yerine

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) = \frac{R_i}{n+1} \quad (2.11)$$

$$G_n(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(Y_i \leq y) = \frac{S_i}{n+1} \quad (2.12)$$

$R_i$  ve  $S_i$ ,  $X_i$  ve  $Y_i$  rastgele değişkenlerinin gözlem değerlerinden elde edilen sıra sayıları değeridir. En çok sözde olabilirlik yöntemi, daha çok sayısal işlem içerdiği ve  $c_\theta$  yoğunluğunun var olmasını gerektirdiği için Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'sunu ve Spearman'ın Rho ( $\rho_S$ )'sunu içeren yöntemlere göre daha az çekiciliğe sahiptir. Bununla birlikte, bu yöntem bağımlılık parametresi  $\theta$ 'nın gerçek sayı olmasını gerektirmediğinden, genellikle diğer yöntemlere göre daha fazla uygulanabilir (Genest ve Favre, 2007).

### 2.3. Parametrik Olmayan Tahmin Yöntemleri

Parametrik olmayan tahmin yöntemleri marjinal dağılımlar ve parametreler ile ilgili bir bilgi edinilemediği durumlarda kullanılan tahmin yöntemleridir. Bu kısımda parametrik olmayan yöntemlerden Kendall Tau ( $\tau$ ) değerine dayanan ve Spearman Rho ( $\rho_S$ ) değerine dayanan yöntem tanıtılacaktır.

#### 2.3.1. Kendall Tau ( $\tau$ ) Değerine Dayanan Yöntem

Genel olarak,  $\theta = g(\tau)$  düzgün bir fonksiyona sahipse,  $\hat{\theta}_n = g(\tau_n)$ ,  $\theta$  nın Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'suna dayalı bir tahmin edici olduğu ifade edilebilir.

Genest ve Rivest (1993)

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i + \tilde{W}_i - 2\bar{W})^2 \quad (2.13)$$

ve

$$\tilde{W}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{ji} = \frac{1}{n} \#\{j: X_i \leq X_j, Y_i \leq Y_j\} \quad (2.14)$$

olmak üzere  $\sqrt{n} \frac{\tau_n - \tau}{4S} \approx N(0,1)$  olduğunu göstermiştir. Delta metodu uygulandığında,  $n \rightarrow \infty$  ise,

$$\hat{\theta}_n \approx N \left[ \theta, \frac{1}{n} \{4Sg'(\tau_n)\}^2 \right]$$

olur. Bu nedenle,  $\theta$  için  $1 - \alpha$  güven katsayılı güven aralığı

$$\hat{\theta}_n \pm Z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} 4Sg'|\tau_n|$$

şeklinde ifade edilir.

Arşimedyen kapula aileleri için Genest ve Mackay tarafından



$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \quad (2.15)$$

eşitliğinin var olduğu gösterilmiştir (Genest ve Favre, 2007).

### 2.3.2. Spearman Rho ( $\rho_S$ ) Değerine Dayanan Yöntem

Genel olarak,  $\theta = h(\rho)$  düzgün bir fonksiyona sahipse,  $\tilde{\theta}_n = h(\rho_n)$ ,  $\theta$ 'nin Spearman'ın Rho ( $\rho_S$ )'suna dayalı bir tahmin edici olduğu ifade edilebilir.

Gaenssler ve Stute,

$$\rho_n \approx N\left(\rho, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

şeklinde bulmuşlardır. Borkowf buradaki asimptotik varyans  $\sigma^2$ 'nin ilgili  $C$  kapulasına bağlı olduğunu ayrıntılı bir şekilde ifade etmiştir.

Kendall'ın Tau ( $\tau$ ) değerinde de bahsedildiği gibi Delta metodu uygulandığında,

$$\hat{\theta}_n \approx N\left[\theta, \frac{1}{n} \{\sigma_n h'(\rho_n)\}^2\right]$$

olur. Burada  $\sigma_n^2$ ,  $\sigma^2$ 'nin iyi bir tahmin edicisidir. Bu nedenle,  $\theta$  için  $1 - \alpha$  güven katsayılı güven aralığı

$$\hat{\theta}_n \pm Z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_n h'|\rho_n|$$

şeklinde ifade edilir. Borkowf,  $C$  kapulasının yerine  $C_n$  koyarak,  $\sigma^2$  için tutarlı bir tahmin edicisi olan

$$\sigma_n^2 = 144(-9A_n^2 + B_n + 2C_n + 2D_n + 2E_n)$$

şeklinde olduğunu göstermiştir.

Burada,

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1}$$

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{R_i}{n+1} \right)^2 \left( \frac{S_i}{n+1} \right)^2$$

$$C_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1} I(R_k \leq R_i, S_k \leq S_i) + \frac{1}{4} - A_n$$

$$D_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{S_i}{n+1} \frac{S_j}{n+1} \max \left( \frac{R_i}{n+1} \frac{R_j}{n+1} \right)$$

$$E_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{R_j}{n+1} \max \left( \frac{S_i}{n+1} \frac{S_j}{n+1} \right)$$

olarak tanımlanmıştır (Genest ve Favre, 2007).

Arşimedyen kapuların fonksiyonları ve önemli ilişki katsayıları Tablo 2.1'de görülmektedir.

**Tablo 2. 1 Bazı Arşimeden kapulaların fonksiyonları ve önemli ilişki katsayıları**

Aileler	Kapuların Genel Formu ( $C_\theta(u, v)$ )	Parametre Aralığı	Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'su	Spearman'ın Rho ( $\rho_S$ )'su
Ali-Mikaail-Haq	$uv[1 - \theta(1 - u)(1 - v)]^{-1}$	$\theta \in [-1, 1]$	$\left(\frac{3\theta - 2}{3\theta}\right) - \frac{2(1 - \theta)^2}{3\theta^2} \ln(1 - \theta)$	-
Clayton	$[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}$	$[-1, \infty) - \{0\}$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	-
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right]$	$(-\infty, \infty) - \{0\}$	$1 - \frac{4}{\theta} [D_1(-\theta) - 1]$	$1 - \frac{12}{\theta} [D_2(-\theta) - D_1(-\theta)]$
Gumbel-Hougaard	$\exp \left\{ - [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta} \right\}$	$[1, \infty)$	$1 - \theta^{-1}$	-

Kaynak: Alhan, 2008, s.80

Tablo 2.1'deki  $D_1$  ve  $D_2$  'ler Debye fonksiyonu olarak ifade edilir ve aşağıdaki eşitlikle hesaplanır (Özbakış, 2006, s.39):

$$D_k(-x) = D_k(x) + \frac{kx}{k+1}$$

$$D_k(x) = \frac{k}{x} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$$

## 2.4. Uyum İyiliği Testi

Tahmin edilen kapula ailesinin gerçekte veriye uygun olup olmadığı Ki-kare analizi ile test edilmektedir.

### 2.4.1. Ki-kare Uyum İyiliği Testi

Uyum iyiliği testinde, gözlenen frekanslar ile beklenen frekanslar arasındaki farklara dayanan Ki-kare istatistiği hesaplanır. Burada hesaplanan Ki-kare değerinin serbestlik derecesi  $sd = ((I - 1)(J - 1)) - p - (q - 1)$  olup,  $I$  satır sayısını,  $J$  sütun sayısını,  $p$  tahmin edilen parametre sayısını ve  $q$  birleştirilen hücre sayısını ifade eder. Hesaplanmış en küçük Ki-kare değerine sahip kapula ailesi veya serbestlik derecesine karşılık gelen tablo değeri, Ki-kare hesap değerinden büyük ise  $H_0$  hipotezindeki kapula ailesi verilere en uygun aileyi verir (Genest ve Rivest, 1993; Alhan, 2008, s.94).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(G_i - B_i)^2}{B_i}$$

$G_i$ : Gözlenen frekans değeri

$B_i$ : Beklenen frekans değeri

$k$ : n adet veride hücre sayısı

## 2.5. Rastgele Örnek Üretme

Kapuların temel uygulamalarından biri simülasyon ve Monte Carlo çalışmalarıdır. Bu kısımda belirli bir ortak dağılımdan bir örnek üretme problemi üzerinde durulacaktır. Böyle örnekler gerçek dünya sistemlerine veya istatistiksel çalışmalara ilişkin matematiksel modelleri çalışmada, yeni bir istatistiksel yöntemi rakipleriyle karşılaştırmada, sağlamlık özelliklerini veya küçük örnek sonuçlarının asimptotik uyuşumunu çalışmada kullanılabilir (Nelsen, 2006, s.40-41).

Diğer yandan uygulama açısından hangi kapulanın hangi durumlarda kullanılacağı bir sorun olarak karşımıza çıkmaktadır. En azından iki değişkenli dağılımlar için kapuların yansıttığı bağımlılık yapısını incelemek ihtiyacı ortaya çıkmaktadır.

Dolayısıyla parametrelere bağlı olarak bağımlılık yapısındaki değişimi gözlemlemek ve daha sonra benzer bir veri seti ile karşılaşıldığında az çok hangi kapulanın kullanılacağını söyleyebilmek için serpm diyagramlarından yararlanılabilir (Alhan, 2008, s.99).

Bu tez çalışmasında önceki paragrafta geçen düşünceleri örneklendirmek için Farlie-Gumbel-Morgenstern, Frank, Clayton ve Gumbel-Hougaard kapula ailelerinden farklı parametrik değerlere sahip bağımlılık durumlarını yansıtacak şekilde aşağıdaki 3 algoritma kullanılarak Minitab 14 paket programı ile düzgün dağılıma sahip 500 birimlik örnekler üretilmiştir. Bu algoritmalarından ikinci ve üçüncü algoritma Arşimedyen kapula aileleri için kullanılır.

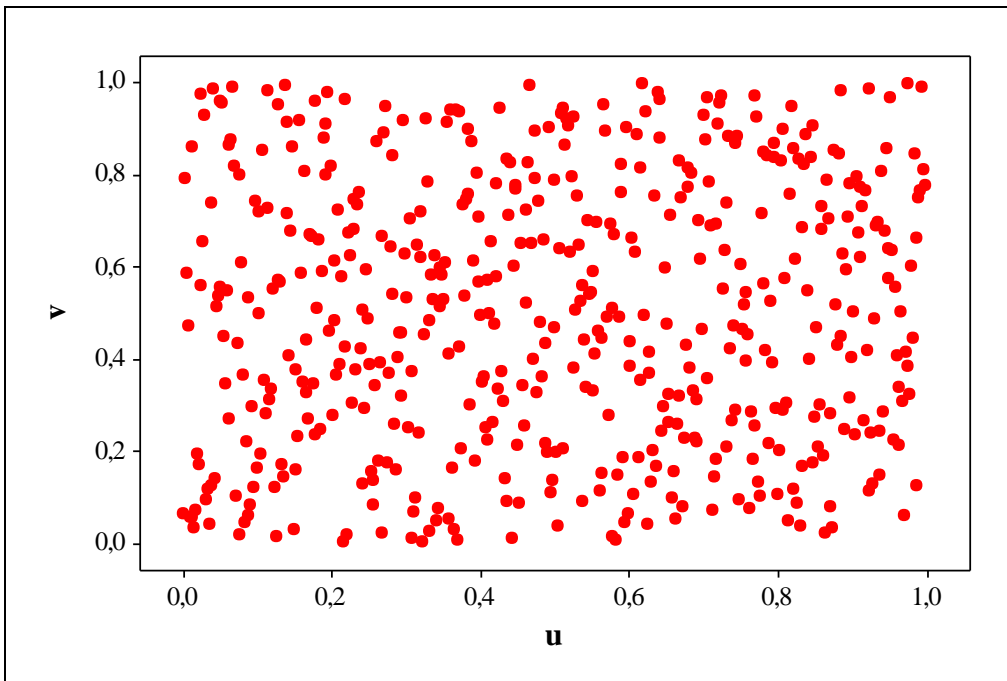
### 1. Algoritma:

- i.  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılıma sahip bağımsız  $u$  ve  $t$  değerleri üretilir;
- ii.  $c_u^{-1}(t)$ ,  $c_u$ 'nun yarı tersi olmak üzere  $v = c_u^{-1}(t)$  alınır;
- iii. İstenen  $(u, v)$  çifti elde edilmiş olur (Nelsen, 2006, s.41).

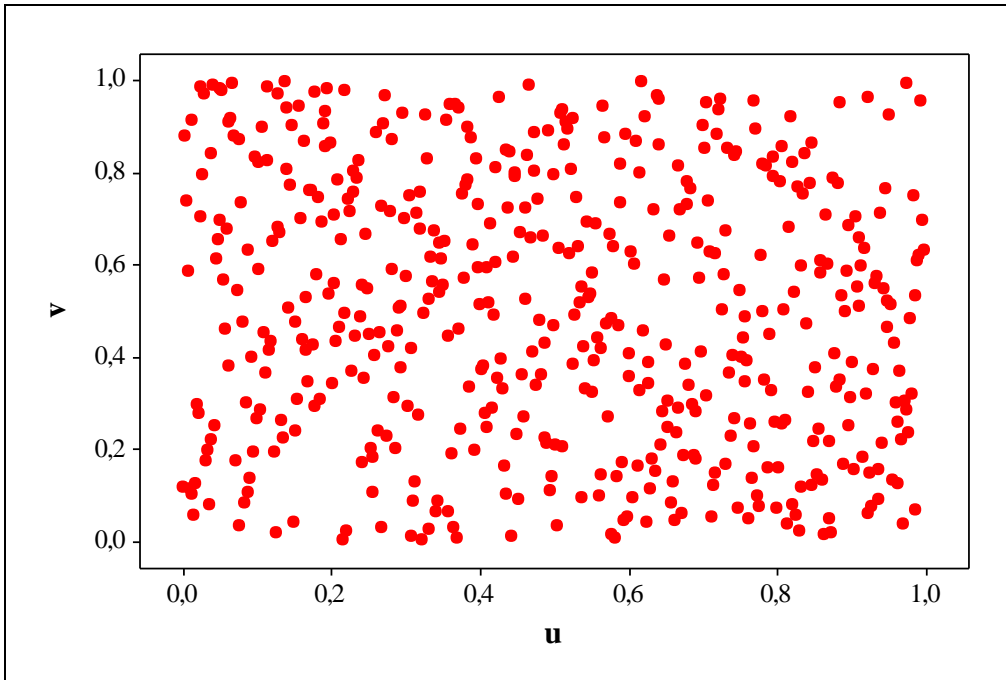
**Örnek:**

$C_{\theta}(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v)$ ,  $\theta \in [-1, 1]$  fonksiyonlu Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kapula ailesinden iki değişkenli rastgele değişken üretilmesi için gerekli algoritma

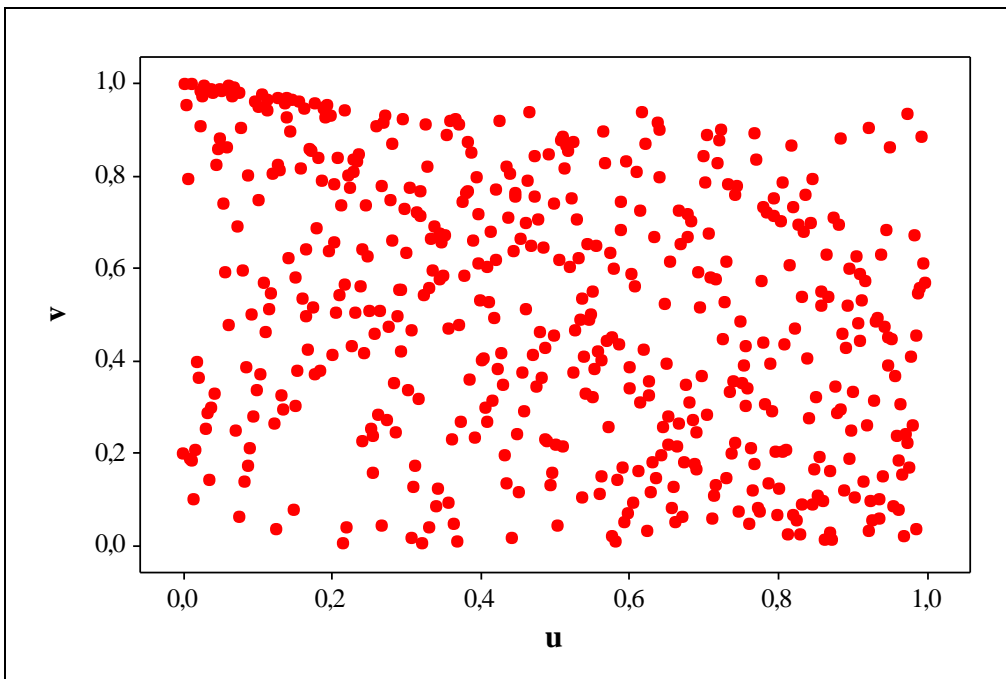
- (0,1) aralığında düzgün dağılıma sahip bağımsız  $u$  ve  $t$  değerleri üretilir;
- $A = \theta(2u - 1) - 1$  ve  $B = [1 - \theta(2u - 1)]^2 + 4\theta t(2u - 1)$ ;
- $v = 2t(\sqrt{B} - A)$ ;
- FGM kapula ailesinden üretilen  $(u, v)$  vektörü (Romano, 2002, s.13-14).



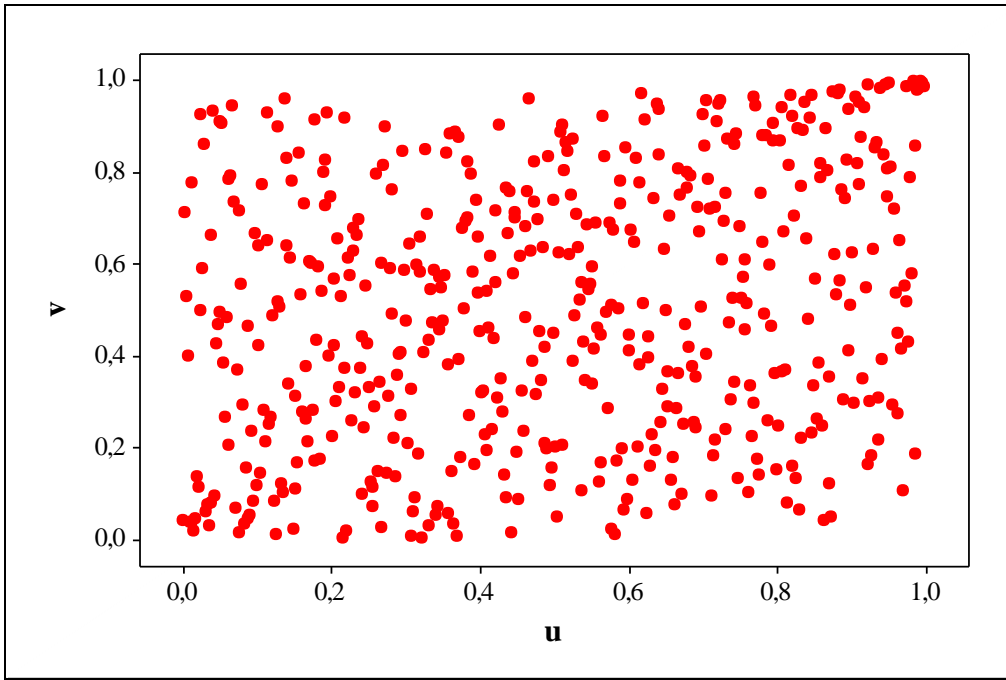
**Şekil 2.1**  $\theta = 0,3$  için Farlie-Gumbel-Morgernstern kapula ailesi



Şekil 2. 2  $\theta = -0,3$  için Farlie-Gumbel-Morgernstern kapula ailesi



Şekil 2. 3  $\theta = -0,9$  için Farlie-Gumbel-Morgernstern kapula ailesi



Şekil 2. 4  $\theta = 0,9$  için Farlie-Gumbel-Morgernstern kapula ailesi

$\theta$  parametresi  $[-1,1]$  aralığında değer alan Farlie-Gumbel- Morgenstern kapula ailesi pozitif ve negatif bağımlılığa izin vermektedir. Parametre sınır değerlerine yaklaştıkça bağımlılığın gücünde artmaktadır. Şekil 2.1 ve Şekil 2.2'deki veri yapısına bakıldığında  $\theta = 0,3$  ve  $\theta = -0,3$  parametre değerleri için FGM kapula ailesinde iki değişken arasında önemsenecek bir bağımlılığın olmadığı görülmektedir. Şekil 2.4'e bakıldığında  $\theta = 0,9$  parametre değeri için köşegen üzerinde yoğunlaşma olduğundan hafif düzeyde pozitif yönde bir bağımlılığın olduğu görülmektedir. Benzer şekilde Şekil 2.3'e bakıldığında  $\theta = -0,9$  parametre değeri için ters köşegen üzerinde yoğunlaşma olduğundan hafif yönde negatif bir bağımlılık olduğu söylenebilir.

## 2. Algoritma:

- i.  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılıma sahip bağımsız  $s$  ve  $t$  değerleri üretilir;
- ii.  $K_C = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$  olmak üzere,  $w = K^{(-1)}_C(t)$  alınır;
- iii.  $u = \varphi^{(-1)}(s\varphi(w))$  ve  $v = \varphi^{(-1)}((1-s)\varphi(w))$  alınır;
- iv. İstenen  $(u, v)$  çifti elde edilir (Nelsen, 2005).



**Örnek:**

Gumbel kapula ailesi,  $C_\theta(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right)$ 'in üretici fonksiyonu  $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta, \theta > 1$  biçimindedir. İkinci algoritmayı kullanarak Gumbel kapula ailesinden iki rastgele değişken üretilmesi için gerekli algoritma aşağıdaki gibi elde edilir.

– (0,1) aralığında düzgün dağılıma sahip bağımsız  $s$  ve  $t$  değerleri üretilir;

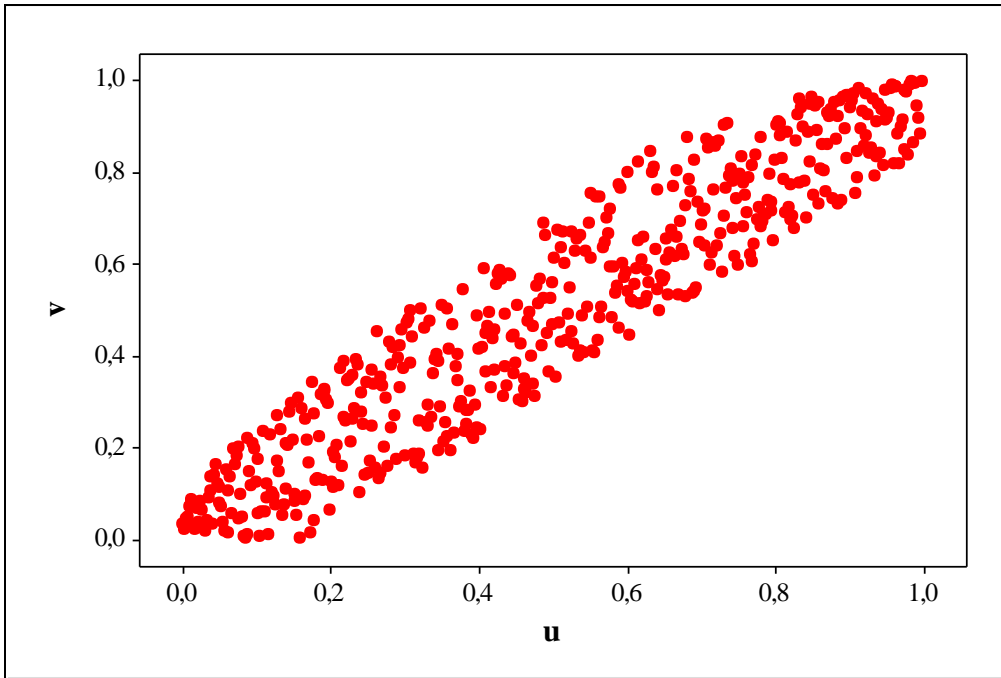
–  $\varphi'(t) = -\frac{\theta(-\ln t)^{\theta-1}}{t}$  ve  $\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{t(\ln t)}{\theta}$  olduğundan,

$w = \frac{\theta t}{\text{LambertW}(-\theta e^{-\theta t})}$  elde edilir;

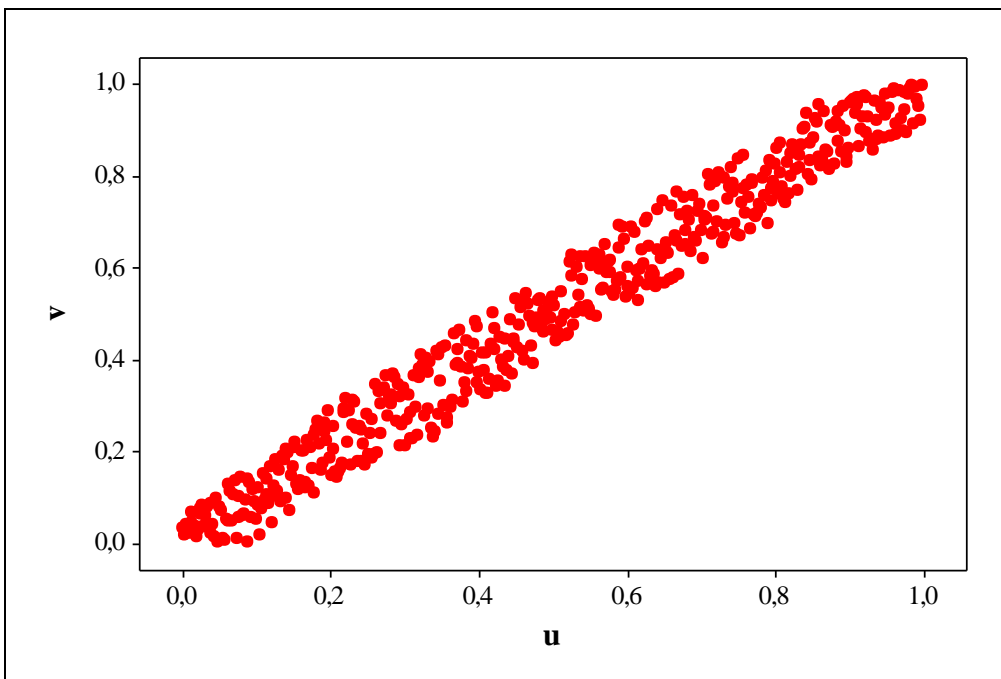
–  $\varphi^{(-1)}(t) = \exp(-t^{1/\theta})$  olduğundan,  $u = w^s$  ve  $v = w^{s-1}$  biçimindedir;

– Gumbel kapula ailesinden üretilen  $(u, v)$  vektörü elde edilir (Alhan, 2008, s.103).

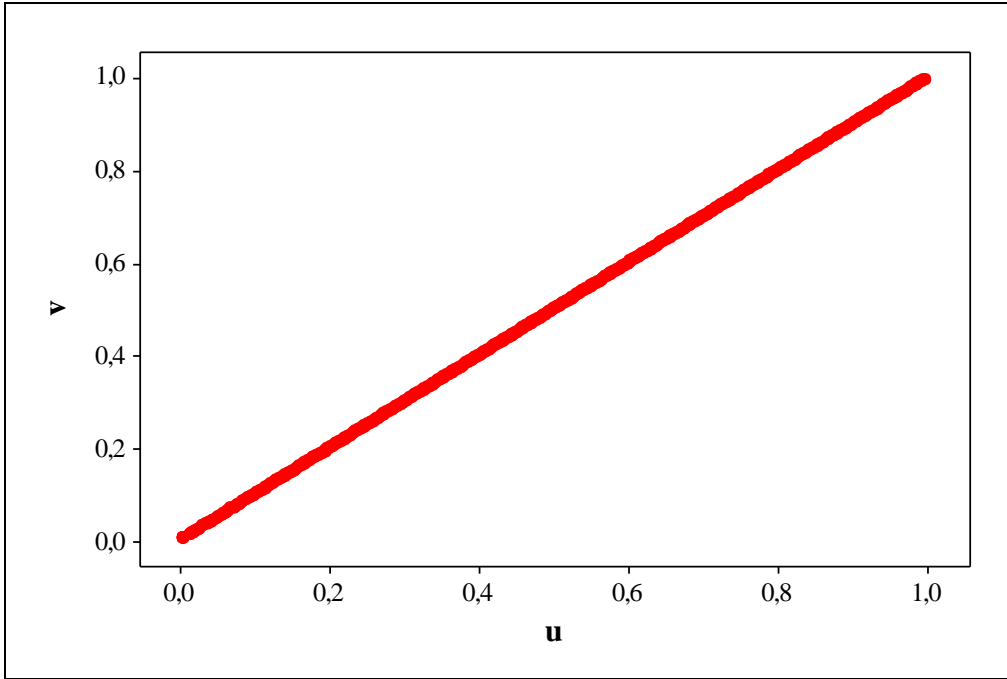
Lambert W fonksiyonu, Omega fonksiyonu ya da product log olarak da bilinir; bu fonksiyon  $w$  herhangi bir karmaşık sayı ve  $e^w$  doğal üstel fonksiyon olduğunda  $f(w) = we^w$ 'nin ters fonksiyonudur. Genellikle  $W$  ile gösterilir. Her bir  $z$  karmaşık sayısı için  $z = W(z)e^{W(z)}$  denklemi vardır (Wikipedia, 2011).



**Şekil 2. 5  $\theta = 6$  için Gumbel-Hougaard kapula ailesi**



**Şekil 2. 6  $\theta = 10$  için Gumbel-Hougaard kapula ailesi**



**Şekil 2.7  $\theta = 100$  için Gumbel-Hougaard kapula ailesi**

$\theta$  parametresi  $[1, \infty)$  aralığında değer alan Gumbel-Hougaard kapula ailesi pozitif bağımlılığa izin vermektedir. Şekil 2.5, Şekil 2.6 ve Şekil 2.7'ye bakıldığında  $\theta$  parametre değeri arttıkça köşegen üzerinde pozitif yönde güçlü bir ilişkinin olduğu görülmektedir.

### 3. Algoritma:

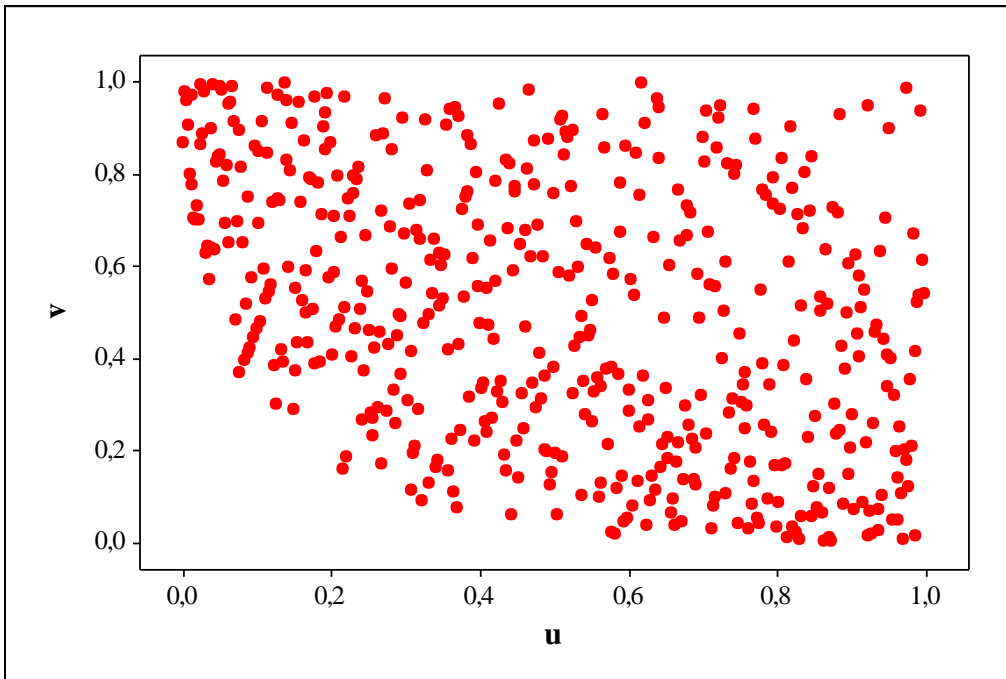
- i.  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılıma sahip bağımsız  $u$  ve  $t$  değerleri üretilir;
- ii.  $w = \varphi^{(-1)}\left(\frac{\varphi'(u)}{t}\right)$  alınır;
- iii.  $v = \varphi^{(-1)}(\varphi(w) - \varphi(u))$  alınır;
- iv. İstenen  $(u, v)$  çifti elde edilmiş olur (Nelsen, 2005).

### Örnek:

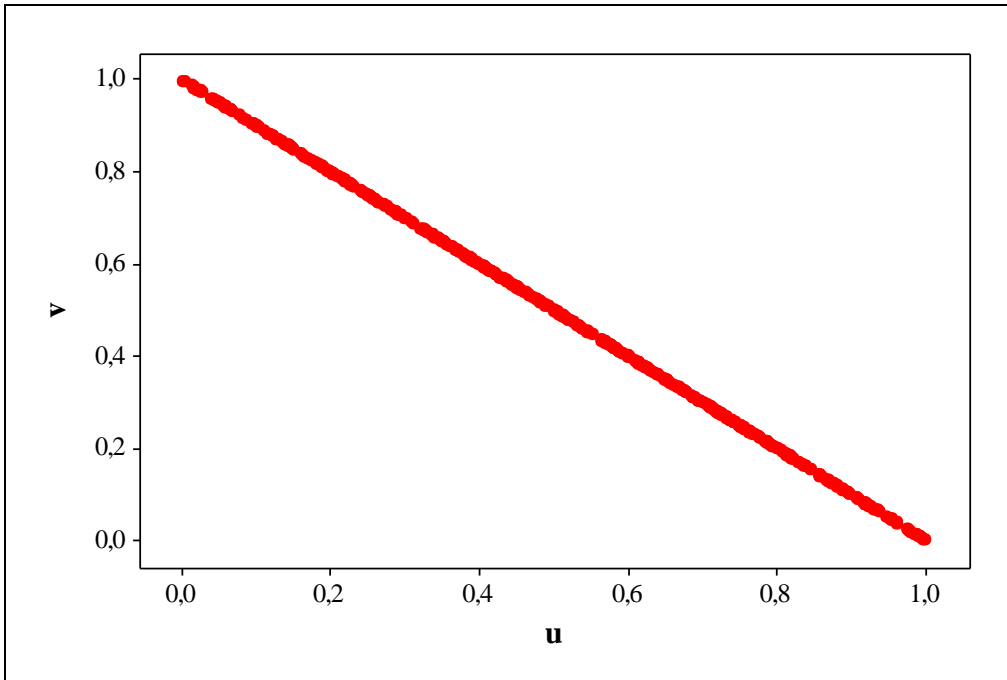
Clayton ailesi,  $C_\theta(u, v) = \max\left([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0\right)$ 'nin üretici fonksiyonu

$\varphi(t) = \frac{t^{-\theta}-1}{\theta}, \theta \in [-1, \infty) - \{0\}$  biçimindedir. Üçüncü algoritmayı kullanarak Clayton kapula ailesinden iki değişkenli rastgele değişken üretilmesi için gerekli algoritma aşağıdaki gibi elde edilir.

- (0,1) aralığında düzgün dağılıma sahip bağımsız  $u$  ve  $t$  değerleri üretilir;
- $\varphi'(u) = \frac{-u^{-\theta-1}}{t}, \varphi'^{(-1)}(t) = (-t)^{t/-(\theta+1)}$  olduğundan  $w = \frac{u}{t^{1/-(\theta+1)}}$  dir;
- $\varphi^{(-1)}(t) = (\theta t + 1)^{-1/\theta}$  olduğundan  $v = \left(\frac{u^{-\theta}}{t^{\theta/\theta+1}} - u^{-\theta} + 1\right)^{-1/\theta}$  biçimindedir;
- Clayton kapula ailesinden üretilen  $(u, v)$  vektörü elde edilir (Alhan, 2008, s.105-106).

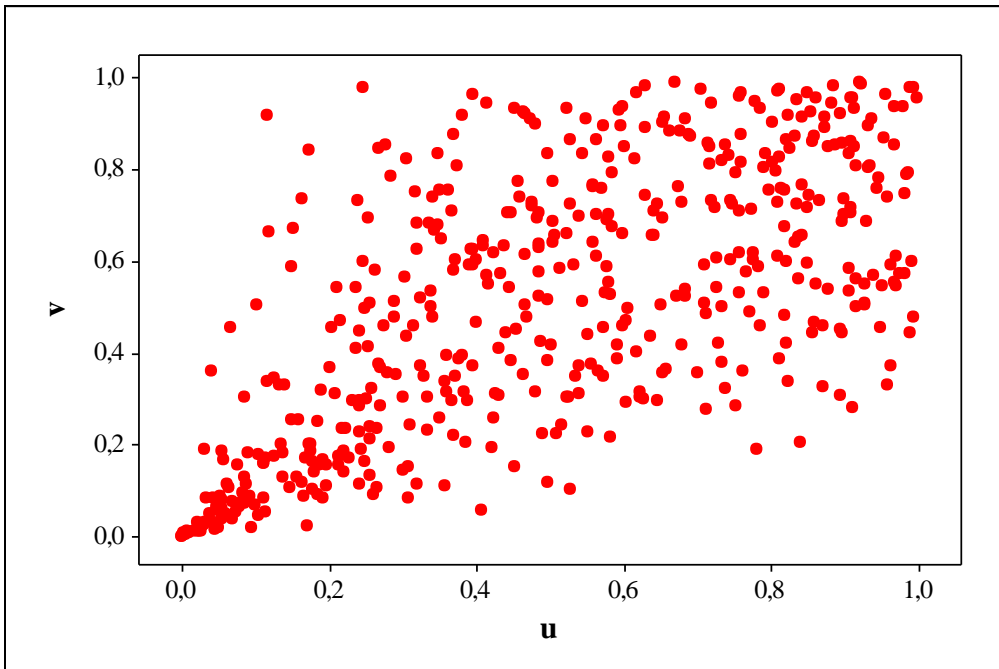


Şekil 2. 8  $\theta = -0,4$  için Clayton kapula ailesi

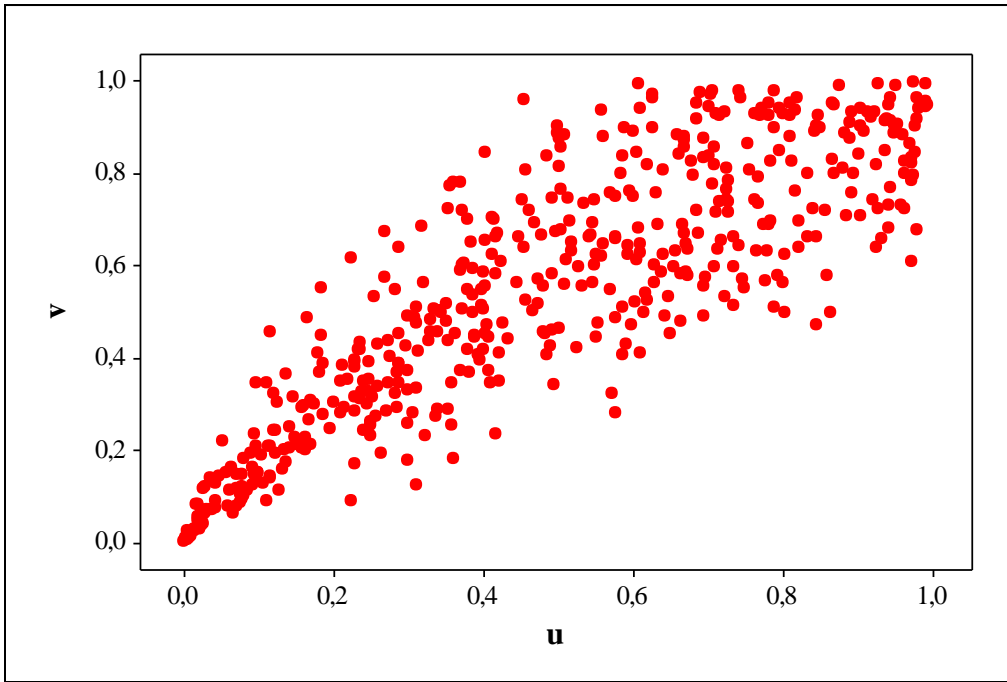


**Şekil 2.9  $\theta = -1$  için Clayton kapula ailesi**

Şekil 2.8 ve Şekil 2.9’da olduğu gibi parametre alt sınır değerine yaklaştıkça negatif yönde bağımlılık yapısının güçlendiği ve hatta  $\theta = -1$  değerinde tam negatif bağımlılık olduğu görülmektedir.



**Şekil 2. 10  $\theta = 2$  için Clayton kapula ailesi**



**Şekil 2. 11  $\theta = 4$  için Clayton kapula ailesi**

$\theta$  parametresi  $[-1, \infty) - \{0\}$  aralığında değer alan Clayton kapula ailesi pozitif ve negatif bağımlılığa izin vermektedir. Şekil 2.10 ve Şekil 2.11'deki veri yapısına bakıldığında parametre değeri arttıkça pozitif yönde bağımlılık yapısının gittikçe güçlendiği görülmektedir.

## ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

### ÜFE-TÜFE ARASINDAKİ BAĞIMLILIK YAPISININ

#### KAPULALARLA ANALİZİ

Enflasyon, fiyatlar genel düzeyinin etkili bir şekilde devamlı yükselmesi nedeniyle paranın sürekli olarak değer kaybetmesi, bunun sonucu olarak da tüketicilerin satın alma gücünü yitirmesidir. Bu tanımdan anlaşıldığı üzere enflasyon sadece belli bir malın veya hizmetin fiyatının tek başına artması değil, fiyatlar genel düzeyinin sürekli bir artış göstermesidir. Fiyatlar genel düzeyi, piyasada alım-satım konu olan mal ve hizmetlerin belirli bir dönemdeki (belirli bir ay veya yıldaki) ortalama fiyatlarıdır. Ortalama fiyatların seyri, fiyat endeksleri ile ölçülmektedir.

Fiyat endeksi, seçilmiş mal ve hizmetlerin ortalama fiyatlarının belli bir döneme göre değişimini ölçer. Endeks oluşturmak için ilgilenilen piyasaya göre (tüketici, üretici, ithalat, ihracat vb.) ve bu piyasayı temsil edecek bir mal ve hizmet sepeti oluşturulur. Seçilmiş söz konusu maddelerin fiyatları dönemsel olarak izlenir. Fiyat endeksleri, fiyatların izlendiği mal ve hizmet piyasasına göre isimlendirilir. Bunlara tüketici fiyatları endeksi, üretici fiyatları endeksi, ithalat fiyatları endeksi, ihracat fiyatları endeksi örnek olarak gösterilebilir. Enflasyon, piyasada seçilmiş mal ve hizmetlerin ortalama fiyatlarının dönemsel değişimini gösteren fiyat endeksleri ile hesaplanmaktadır. Dolayısıyla enflasyon oranı, yani fiyatlar genel düzeyindeki değişim oranının ölçüsü olarak tüketici fiyatları endeksi ve üretici fiyatları endeksi değişim oranları kullanılır.

Bu tez kapsamında üretici fiyatları ile tüketici fiyatları endeksi arasındaki bağımlılık yapısının kapulalarla analiz edilmesi amaçlanmıştır. Bu bölümde öncelikle ÜFE ve TÜFE hakkında kısa bir bilgi verdikten sonra bağımlılık yapısına değinilmiş ve bu bağımlılık yapısını en iyi açıklayan kapula ailesi belirlenmiştir (TÜİK, 2008, s.1-2).

#### **3.1. Üretici Fiyatları Endeksi (ÜFE)**

Üretici fiyatı, yurtiçinde üretimi yapılan ürünlerin, KDV vb. vergiler hariç, peşin satış fiyatıdır. Üretici fiyatları endeksinde, tarım, avcılık, ormancılık ve balıkçılık sektörlerinde faaliyet gösteren üreticilerin yetiştirdiği ve piyasaya arz ettiği ürünlerin ilk el satış fiyatları izlenmektedir. Tarım sektörüne ilişkin bu fiyatlar, üreticinin eline geçen fiyatlar olarak

adlandırılmaktadır. Sanayi sektörüne ilişkin ürünlerin fiyatları da doğrudan sanayi sektöründeki üretici firmalardan alınmaktadır.

ÜFE, belirli bir referans döneminde ülke ekonomisinde üretimi yapılan ve yurtiçine satışı konu olan ürünlerin, üretici fiyatlarını zaman içinde karşılaştırarak fiyat değişikliklerini ölçen fiyat endeksidir.

Temel Yıllı ÜFE için madde sepeti belirlenirken temel yılın ülke ekonomisinde üretimi yapılan tüm maddeler göz önüne alınmıştır. Bu maddelere ilişkin bilgiler Türkiye İstatistik Kurumu tarafından üretilmekte olan tarım, imalat sanayi, maden ve enerji üretim istatistiklerinden elde edilmiştir. Her bir ana sektör altında üretimi yapılan maddeler, yurtiçindeki satış değerine göre sıralanmış ve üretimden yurtiçi satışı en fazla olan maddeler endeks kapsamına alınmıştır. Ayrıca temel yıl boyunca uygulanan “ÜFE Bilgi Derleme Anketi” ile üretici firmalardan, yurtiçine sattıkları maddelerin tanım, satış miktarı ve fiyatına ilişkin bilgiler derlenmiştir. Ülke ekonomisinde üretim yapısında meydana gelen değişimler dikkate alınarak mevcut maddelerin ağırlıkları, firmalarla yapılan görüşmeler, tarım ve sanayi üretim istatistiklerinden elde edilen bilgiler ışığında güncellenmektedir. Bunun yanısıra üretimde önemli paya sahip olan yeni maddeler belirlenmekte, üreticileri ile temasa geçilerek endeks kapsamına alınmaktadır.

Üretici fiyatları endeksinde ülke ekonomisi içinde üretimi yapılan tüm malların fiyatlarının takip edilmesi imkansızdır. Bu nedenle, ürünün toplam satış değerinin, toplam satış gelirlerinden aldığı paya göre bir seçim yapılmaktadır. Ürün seçimi sektörler (tarım, imalat, maden, enerji) ve alt sektörler (gıda ürünleri imalatı, makina imalatı vb.) ayırımında yapıldığı için herhangi bir üretim faaliyetinin değerlendirme dışı kalmaması sağlanmaktadır. Hizmetler ÜFE kapsamında yer almamaktadır (TÜİK, 2008, s.37-42).

### **3.2. Tüketici Fiyatları Endeksi (TÜFE)**

Tüketici Fiyatları Endeksi (TÜFE), belirli bir referans döneminde bireylerin ortalama tüketim kalıplarını yansıtan bir mal ve hizmet sepetinin zaman içinde fiyat değişimini ölçer. Endeks sepetinde yer alan mal ve hizmetlerin miktar ve kalite değişimleri göz önüne alınarak endeksin sadece fiyat hareketlerini yansıtması sağlanmaktadır.



Perakende fiyat değişimleri ve bu fiyat değişimlerinden bireylerin nasıl etkilendikleri ile ilgili enflasyon oranı, TÜFE değişim oranıdır. TÜFE'yi hesaplamak için bir mal ve hizmet sepeti ile bu mal ve hizmetler için yapılan harcama değerlerine, temel yıl ve cari ay fiyatlarına ihtiyaç vardır. TÜFE mal ve hizmet sepeti her yılın Aralık ayında güncellenmektedir.

TÜFE'nin temeli, hanelerin belirli bir dönemde yaptıkları tüketim harcamalarına dayanmaktadır. Tüketim harcamalarına konu olan mal ve hizmetlerin neler olduğu ve ne miktarda satın alındığının belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için hanehalklarının tüketim harcamaları "Hanehalkı Bütçe Anketi" ile, turistlerin tüketim harcamaları "Yabancı Ziyaretçiler Anketi" ile, okul, yurt, otel, çocuk yuvası, huzurevi, hastane, hapisane, kışla ve orduevlerinde yaşıyan kişilerin tüketim harcamaları da "Kurumsal Nüfusa Yönelik Tüketim Harcamaları Anketi" ile belirlenmektedir.

Her bir mal ve hizmet için yapılan tüketim harcaması; toplam harcama içinde aldığı paya göre sıralanarak, her bir harcama grubunda önemli paya sahip mal ve hizmetler sepetine dahil edilmektedir. Hanehalkları tarafından belirli bir ihtiyacı karşılamak amacıyla satın alınan tüm mal ve hizmetlerin endeks kapsamı içinde yer alması imkansız olduğu için, en çok tüketim harcaması yapılan mal ve hizmetler endeks kapsamına alınmaktadır. Tüketim harcamaları, amacına göre sınıflandırılarak (ör. gıda harcamaları, giyim harcamaları, sağlık harcamaları, ulaştırma harcamaları vb.) herhangi bir mal ve hizmet grubunun değerlendirme dışı kalmaması sağlanmaktadır. Sonra, her bir grubu temsil eden mal ve hizmetler tüketilme ağırlığına göre büyükten küçüğe sıralanmakta ve belirli bir ağırlıktan yukarı değer alan (ör. 1/1000) mal ve hizmetler endeks kapsamına alınmaktadır (TÜİK, 2008, s.20-25).

### 3.3. Endeks Hesaplanması

Enflasyonu ölçmekte kullanılan temel yıl için formülü aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$I = w \times \frac{P_i}{P_0}$$

$I$  : Endeks

$P_i$ : Cari ay fiyatı

$P_0$ : Temel yıl fiyatı

$w$  : Ağırlık

Temel yıldan sonra gelen yıllarda bir önceki yılın Aralık ayı fiyatı  $P_0$  olarak alınmakta ve endeks bir önceki yılın Aralık ayı endeksi ile çarpılarak zincirlenmektedir. Bu suretle endeks referans dönemi değişmeden ağırlıklar güncellenmekte ve yeni önem kazanan mal ve hizmetler endeks madde sepetine dahil edilmektedir. Bu durumda formülasyon yeni ağırlık için şu şekilde olacaktır:

$$I_t = w' \times \frac{P_t}{P_{Aralık(t-1)}} \times I_{Aralık(t-1)}$$

$w'$ : Yeni ağırlık

$t$  : Cari ay

Bir ekonomide fiyat endekslerinin kullanılmasına şu nedenlerle ihtiyaç duyulmaktadır:

- Ülkenin ekonomik yapısının belirlenmesi
- Ekonomik karar alıcılara yol göstermesi
- Bireylerin satın alma gücünün tespit edilmesi
- Ücret ve maaşların belirlenmesi
- Tüketici tarafından satın alınan mal ve hizmetlerdeki perakende fiyatların zaman içindeki değişiminin bilinmesi
- Sosyo – ekonomik eğilimin belirlenmesi
- Konjonktürün yönünün tespit edilmesi (TÜİK, 2008, s.16, 52)

### 3.4. ÜFE – TÜFE Bağımlılık Yapısının Araştırılması

Enflasyonun piyasada seçilmiş mal ve hizmetlerin ortalama fiyatlarının dönemsel değişimini gösteren fiyat endeksleri ile hesaplandığını ve enflasyon oranı, yani fiyatlar genel düzeyindeki değişim oranının ölçüsü olarak tüketici fiyatları endeksi ve üretici fiyatları endeksi değişim oranlarının kullanıldığını üçüncü bölümün girişinde açıklamıştık. Bu çalışmada ÜFE ve TÜFE arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koymada kapula yönteminden yararlanılacaktır. Bu bağımlılık yapısı, uygun kapula ailesi ve parametrik olmayan yöntemler kullanılarak tahmin edilecektir.

### 3.5. Veri Kümesi

Bu çalışmada kullanılan veriler, Türkiye İstatistik Kurumu'nun 1982 Temel yıllı, 1982:01–2011:02 zaman aralığındaki ÜFE ve TÜFE endeks değerlerine ilişkin aylık % değişiminden oluşan 349 birimlik endeks değerlerini içermektedir.

Tablo 3.1'de iki değişkenin gözlenen frekanslarının  $4 \times 4$  'lük çapraz tablosunu göstermektedir. Bu iki değişken için hücre sınırları  $j = 1,2,3,4$  için yaklaşık olarak  $\left[349 \times \frac{j}{4}\right]$  sıra sayısına sahip sıra istatistiklerine karşı gelen değerler olarak alınmıştır. Daha açık bir şekilde ifade edilecek olursa, ÜFE endeks değerlerine bakıldığında 87. birim için 1,21, 174. birim için 2,62 ve 261. birim için 4,39 değeri bulunmuştur. SPSS paket programında Recode seçeneği kullanılarak ve  $x \leq 1,21$  değerleri için "1" kodu,  $1,21 < x \leq 2,62$  için "2" kodu,  $2,62 < x \leq 4,39$  için "3" kodu ve  $x > 4,39$  için "4" kodu kullanılarak sıra istatistik değerleri atanmıştır. Benzer işlemler TÜFE için gerçekleştirildiğinde 87. birim için 1,21, 174. birim için 2,59 ve 261. birim için 4,73 değeri bulunmuştur.  $y \leq 1,21$  değerleri için "1" kodu,  $1,21 < y \leq 2,59$  için "2" kodu,  $2,59 < y \leq 4,73$  için "3" kodu ve  $y > 4,73$  için "4" kodu kullanılarak sıra istatistik değerleri atanmıştır. Daha sonra Tablo 3.1'deki ÜFE-TÜFE kodlarına karşılık gelen çapraz tablo oluşturulmuştur.

**Tablo 3. 1 ÜFE ve TÜFE aylık % değişimine ilişkin gözlenen frekanslar**

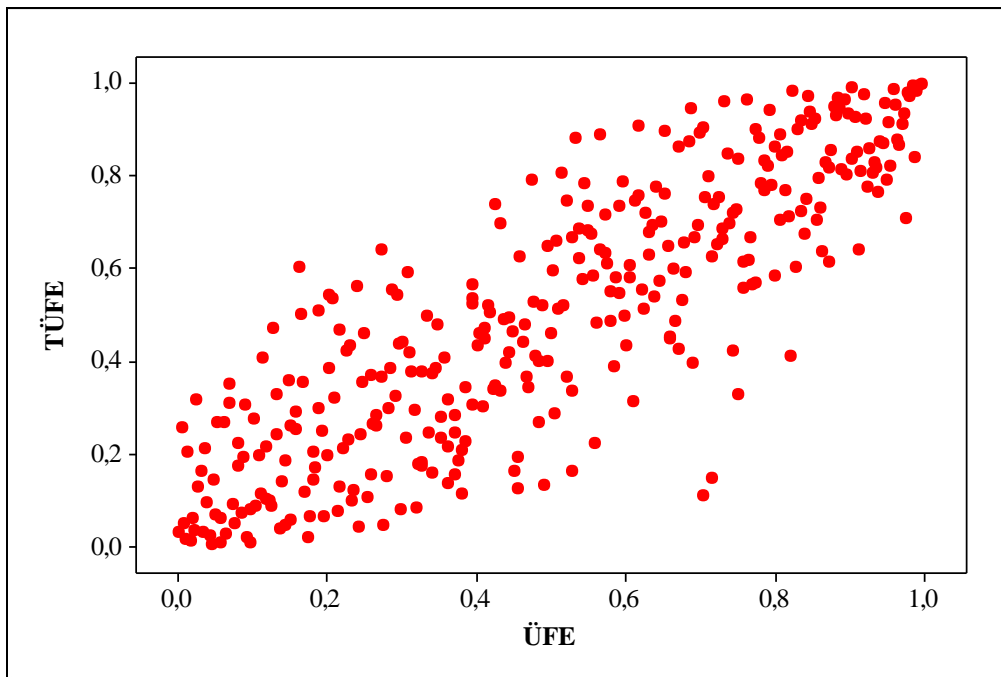
Değişkenler	$Y_{(87)}$	$Y_{(174)}$	$Y_{(261)}$	$Y_{(349)}$
$X_{(87)}$	58	23	6	0
$X_{(174)}$	25	46	15	1
$X_{(261)}$	4	16	47	20
$X_{(349)}$	0	2	19	67

Çalışmada uygulama yönünden daha pratik olduğundan parametrik olmayan tahmin yöntemi kullanılmıştır. Parametrik olmayan yöntemde, kapula ailelerine ait cebirsel formülün olması ve daha kolay çözüme ulaşılması nedeniyle Kendall Tau ( $\tau$ ) değeri kullanılmıştır. Analizler sonucunda Kendall'ın Tau ( $\tau$ ) değeri  $[-1,1]$  arasında olması beklenir.

**Tablo 3. 2 ÜFE ve TÜFE endeksleri arasındaki ilişki katsayısı**

			ÜFE	TÜFE
<b>Kendall Tau</b> <b>(<math>\tau</math>)</b>	<b>ÜFE</b>	<b>Korelasyon</b>	1,000	0,656
		<b>Katsayısı</b>		
		<b>Sig.(p)</b>		,000
		<b>N</b>	349	349
	<b>TÜFE</b>	<b>Korelasyon</b>	0,656	1,000
		<b>Katsayısı</b>		
		<b>Sig.(p)</b>	,000	
		<b>N</b>	349	349

Veri kümesi arasındaki bağımlılık ilişkisi SPSS paket programı kullanılarak analiz edilmiş ve Kendall Tau ( $\tau$ ) değeri Tablo 3.2'deki analiz sonucuna göre 0,656 olarak tahmin edilmiştir. Tablo 3.2'de görüldüğü gibi bu iki endeks arasında pozitif yönde iyi bir ilişki olduğu söylenebilir. Bu ilişki katsayısı kullanılarak veri kümesine en uygun kapula ailesi ve parametresi tahmin edilmeye çalışılmıştır.

**Şekil 3. 1 ÜFE-TÜFE endeks değerlerinin aylık % değişimlerine ilişkin serpm diyagramı**

Ayrıca, ÜFE-TÜFE arasındaki ilişkinin yönü ve büyüklüğü hakkında serpm diyagramına bakılarak da önsel bir bilgi verilebilir. Şekil 3.1'deki serpm diyagramına bakıldığında ÜFE-TÜFE endeks değerlerinin aylık % değişimlerinin pozitif bölgede olup birinci açığortay civarında yoğunlaştığı görülmektedir. Yani, iki endeks arasında pozitif yönde iyi bir ilişki olduğu söylenebilir.

### 3.5.1. Ali-Mikhail-Haq Kapula Ailesinin Tahmini

Tablo 2.1'de Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'su ve Ali-Mikhail-Haq kapula ailesi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi vermiştik.

$$\tau = \left( \frac{3\theta - 2}{3\theta} \right) - \frac{2(1 - \theta)^2}{3\theta^2} \ln(1 - \theta)$$

Bu eşitlik kullanılarak Kendall'ın Tau ( $\tau$ )'su 0,656 olarak ve bu ilişki katsayısına karşılık gelen Ali-Mikhail-Haq kapula ailesinin parametresi  $\theta = 0,836$  olarak tahmin edilmiştir.

$H_0$  = Veri seti Ali-Mikhail-Haq kapula ailesine uygundur.

$H_1$  = Veri seti Ali-Mikhail-Haq kapula ailesine uygun değildir.

**Tablo 3. 3 Ali-Mikhail-Haq kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar**

Değişkenler	$Y_{(87)}$	$Y_{(174)}$	$Y_{(261)}$	$Y_{(349)}$
$X_{(87)}$	41	23	13	10
$X_{(174)}$	23	23	23	18
$X_{(261)}$	13	23	25	27
$X_{(349)}$	10	18	27	32

Tablo 3.1'deki ÜFE ve TÜFE endeks değerlerine ilişkin aylık % değişim değerlerinden elde edilen gözlenen frekanslar ile Ali-Mikhail-Haq kapula ailesinden elde edilen beklenen frekanslar arasındaki Ki-kare değeri 157,2399 olarak elde edilmiştir. Böylece; 9 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyindeki Ki-kare tablo değeri 16,92 olduğundan, veri

kümesinin Ali-Mikhail-Haq kapula ailesine uygun olduğunu söyleyen  $H_0$  hipotezi istatistiksel olarak red edilir. ÜFE ve TÜFE bağımlılık yapısının Ali-Mikhail-Haq kapula ailesine uygun olmadığı sonucu çıkarılabilir.

### 3.5.2. Clayton Kapula Ailesinin Tahmini

Tablo 2.1’de Kendall’ın Tau ( $\tau$ )’su ve Clayton kapula ailesi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi vermiştik.

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

Bu eşitlik kullanılarak Kendall’ın Tau ( $\tau$ )’su 0,656 olarak ve bu ilişki katsayısına karşılık gelen Clayton kapula ailesinin parametresi  $\theta = 0,814$  olarak tahmin edilmiştir.

$H_0$  = Veri seti Clayton kapula ailesine uygundur.

$H_1$  = Veri seti Clayton kapula ailesine uygun değildir.

**Tablo 3. 4 Clayton kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar**

Değişkenler	$Y_{(87)}$	$Y_{(174)}$	$Y_{(261)}$	$Y_{(349)}$
$X_{(87)}$	73	13	1	0
$X_{(174)}$	25	46	15	1
$X_{(261)}$	1	20	40	27
$X_{(349)}$	0	6	27	54

Tablo 3.1’deki ÜFE ve TÜFE endeks değerlerine ilişkin aylık % değişim değerlerinden elde edilen gözlenen frekanslar ile Clayton kapula ailesinden elde edilen beklenen frekanslar arasındaki Ki-kare değeri 73,3579 olarak elde edilmiştir. Böylece; 9 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyindeki Ki-kare tablo değeri 16,92 olduğundan, veri kümesinin Clayton kapula ailesine uygun olduğunu söyleyen  $H_0$  hipotezi istatistiksel olarak red edilir. ÜFE ve TÜFE bağımlılık yapısının Clayton kapula ailesine uygun olmadığı sonucu çıkarılabilir.

### 3.5.3. Frank Kapula Ailesinin Tahmini

Tablo 2.1’de Kendall’in Tau ( $\tau$ )’su ve Frank kapula ailesi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\tau = 1 - \frac{4}{\theta} [D_1(-\theta) - 1]$$

Bu eşitlik kullanılarak Kendall’in Tau ( $\tau$ )’su 0,656 olarak ve bu ilişki katsayısına karşılık gelen Frank kapula ailesinin parametresi  $\theta = 9,613$  olarak tahmin edilmiştir.

$H_0 =$  Veri seti Frank kapula ailesine uygundur.

$H_1 =$  Veri seti Frank kapula ailesine uygun değildir.

**Tablo 3. 5 Frank kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar**

Değişkenler	$Y_{(87)}$	$Y_{(174)}$	$Y_{(261)}$	$Y_{(349)}$
$X_{(87)}$	64	20	3	0
$X_{(174)}$	20	45	20	2
$X_{(261)}$	3	23	43	22
$X_{(349)}$	0	2	22	63

Tablo 3.1’deki ÜFE ve TÜFE endeks değerlerine ilişkin aylık % değişim değerlerinden elde edilen gözlenen frekanslar ile Frank kapula ailesinden elde edilen beklenen frekanslar arasındaki Ki-kare değeri 9,385 olarak elde edilmiştir. Böylece; 9 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyindeki Ki-kare tablo değeri 16,92 olduğundan, veri kümesinin Frank kapula ailesine uygun olduğunu söyleyen  $H_0$  hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez. ÜFE ve TÜFE bağımlılık yapısının Frank kapula ailesine uygun olduğu sonucu çıkarılabilir.

### 3.5.4. Gumbel Hougaard Kapula Ailesinin Tahmini

Tablo 2.1’de Kendall’in Tau ( $\tau$ )’su ve Gumbel Hougaard kapula ailesi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi vermiştik.

$$\tau = 1 - \theta^{-1}$$

Bu eşitlik kullanılarak Kendall’in Tau ( $\tau$ )’su 0,656 olarak ve bu ilişki katsayısına karşılık gelen Gumbel Hougaard kapula ailesinin parametresi  $\theta = 2,907$  olarak tahmin edilmiştir.

$H_0$  = Veri seti Gumbel-Hougaard kapula ailesine uygundur.

$H_1$  = Veri seti Gumbel-Hougaard kapula ailesine uygun değildir.

**Tablo 3. 6 Gumbel Hougaard kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar**

Değişkenler	$Y_{(87)}$	$Y_{(174)}$	$Y_{(261)}$	$Y_{(349)}$
$X_{(87)}$	60	22	5	0
$X_{(174)}$	22	41	23	1
$X_{(261)}$	3	23	43	22
$X_{(349)}$	0	3	17	67

Tablo 3.1’deki ÜFE ve TÜFE endeks değerlerine ilişkin aylık % değişim değerlerinden elde edilen gözlenen frekanslar ile Gumbel Hougaard kapula ailesinden elde edilen beklenen frekanslar arasındaki Ki-kare değeri 6,956 olarak elde edilmiştir. Böylece; 9 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyindeki Ki-kare tablo değeri 16,92 olduğundan, veri kümesinin Gumbel Hougaard kapula ailesine uygun olduğunu söyleyen  $H_0$  hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez. ÜFE ve TÜFE bağımlılık yapısının Gumbel Hougaard kapula ailesine uygun olduğu sonucu çıkarılabilir. Burada en küçük Ki-kare değeri Gumbel-Hougaard kapula ailesine ait olduğundan, ÜFE ve TÜFE endeksleri arasındaki bağımlılık yapısının Gumbel-Hougaard kapula ailesine daha uygun olduğu sonucu çıkarılabilir.



## SONUÇ

Bu çalışmada, kapula yönteminin tanımı ve matematiksel özelliklerinden, bazı bağımlılık katsayılarından, uyumluluk tanımından bahsedilmiş ve sıklıkla kullanılan Arşimedyen kapulalardan olan Ali-Mikhail-Haq, Clayton, Frank, Gumbel-Hougaard kapula aileleri incelenmiştir. Bu kapula ailelerinin belirli bir tanım aralığında değer alan parametrelerine ait kapula modelleri ve üretici fonksiyonları tanımlanmıştır. İlk kez Kimberling tarafından tanıtılan Arşimedyen kapulaların iki değişken arasındaki bağımlılığı modellemek için sağladığı matematiksel kolaylıklar ve esneklikler üzerinde durulmuştur. Ayrıca, rastgele örnek üretme algoritmalarından bahsedilmiş ve bugüne kadar geliştirilmiş kapula tahmin yöntemleri parametrik, yarı parametrik, parametrik olmayan ve ki-kare uyum iyiliği testi başlıkları altında incelenmiştir.

Gerçek verilerin kullanıldığı uygulama kısmında, enflasyonu ifade etmek için kullanılan Üretici Fiyatları Endeksi (ÜFE) ve Tüketici Fiyatları Endeksi (TÜFE) arasındaki bağımlılık yapısını araştırmak için 1982 temel yıllı 1982:01 tarihinden 2011:02 tarihine kadar olan zaman aralığındaki ÜFE ve TÜFE endeks değerlerine ilişkin aylık % değişimlerinden oluşan 349 birimlik veri kümesi kullanılmıştır. Buradan yola çıkarak, iki endeks arasındaki bağımlılığın kapula yöntemi ile modellenmesi üzerinde durulmuştur.

Kapula yönteminin temelinde yatan en önemli özellik, normal dağılıma sahip olup olmadığı bilinmeyen veya dağılımı hakkında net bir fikir vermeyen veri seti için çok boyutlu bir model kurarak bağımlılık yapısını modelleyebilmesidir. Böylece verileri modellerken kullanılan diğer istatistiksel yöntemlerin varsayımlarının sağlanmadığı durumlarda kapula yöntemi ile değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koyarak tahmin edebilmesidir.

Çelebioğlu (2007), yaptığı çalışmasında 1978-1979 temel yıllı 1982:01 tarihinden 2007:01 tarihine kadar olan zaman aralığındaki ÜFE ve TÜFE endekslerini kullanarak kapula yöntemiyle bağımlılık yapısını modellemeye çalışmıştır. İki endeks arasındaki bağımlılığı modellemek için Arşimedyen kapulalardan Frank, Clayton ve Gumbel-Hougaard kapula ailelerini kullanmıştır. Analizler sonucunda  $\theta = 8,39$  parametrelili Frank ve  $\theta = 2,35$  parametrelili Gumbel-Hougaard kapula ailelerinin iki endeks arasındaki bağımlılık yapısını yansıtmada kullanılabileceğini bulmuştur. Buna ek olarak, hesaplanan Ki-kare değerlerine bakıldığında en küçük test istatistiğine sahip olması sebebiyle Frank kapula ailesinin iki endeks arasındaki bağımlılık yapısına daha uygun düştüğünü belirlemiştir.

Buna benzer olarak kapula yöntemiyle yapılan modelleme sonucunda, uygulanabilirliği daha kolay olan kapula tahmin yöntemlerinden Ki-kare uyum iyiliği testi ile bahsedilen kapula aileleri analiz edilmiştir. Analiz sonucunda  $\theta = 2,907$  parametrelili Gumbel-Hougaard ve  $\theta = 9,613$  parametrelili Frank kapula ailelerinin iki endeks arasındaki bağımlılık yapısını yansıtmada kullanılacağı bulunmuştur. Fakat hesaplanan Ki-kare değerlerine bakıldığında en küçük test istatistiğine sahip olması sebebiyle Gumbel-Hougaard kapula ailesinin daha uygun düştüğü belirlenmiştir. Temel yılları ve zaman aralıkları farklı olan fakat aynı iki endeks arasındaki bağımlılık yapısını araştırılan bu iki çalışmada benzer sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

## KAYNAKÇA

ALHAN, A., **“Bağımsızlık Kapulasını İçeren Kapula Aileleri, Kapula Tahmin Yöntemleri ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında Sektörler Arası Bağımlılık Yapısı”**, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2008, 1–161.

ARNOLD, H., **“Dependence Modelling Via The Copula Method”**, Vacation Student Project, CSIRO Mathematical and Information Sciences Macquarie University, 2006, 1-33.

CHERUBİNİ, U., LUCIANO, E. And VECCHIADO, W., **“Copula Methods In Finance”**, John Wiley and Sons, England, 2004.

ÇELEBİOĞLU, S., **“Arsimediyen Kapulalar ve Bir Uygulama”**, Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 2003, 22:43-52.

ÇELEBİOĞLU, S., **“Üretici Fiyat Endeksi ve Tüketici Fiyat Endeksi Arasındaki Bağımlılık Yapısı Üzerine Bir Çalışma”**, 16. İstatistik Araştırma Sempozyumu Bildiriler Kitabı, 2007, 56-66.

FRESS, E. W. And FAVRE, A. C., **“Understanding Relationships Using Copulas”**, North American Actuarial Journal, 1998, 1-25.

GENEST, C., FAVRE, A.C., **“Everything You Always Wanted to Know About Copulas But Were Afraid to Ask”**, Journal of Hydrologic Engineering, 2007, 347-368.

JOE, H., **“Multivariate Models and Dependence Concepts”**, Chapman and Hall, London, 1997.

KUMAR, P., **“Probability Distributions and Estimation of Ali-Mikhail-Haq Copula”**, Pranesh, Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, No.14, 2010, 657-666

MATTEİS, R., **“Fitting Copulas to Data”**, Diploma thesis, Institute of Mathematics of the University of Zurich, 2001, 1-95.

ROMANO, C., “**Calibrating and simulating copula functions: An application to the Italian Stock Market**”, Working Paper, Centro Interdipartimentale sul Diritto e l’Economia ei Mercati, 2002, 1-23.

NELSEN, R.B., “**An Introduction to Copulas**”, Springer Verlag, New York, 2006.

NELSEN, R.B., “**Dependence Modeling with Archimedean Copulas**”, Proceeding of The Second Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance, Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, 2005, 1-9.

ÖZBAKIŞ, Y.G., “**Bazı Kopula Tahmin Yöntemleri ve Bir Uygulama**”, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006, 1-71.

TRİVEDİ, P. K., ZIMMER, D. M., “**Copula Modeling: An Introduction for Practitioners**”, Foundations and Trends in Econometrics, Volume 1 Issue 1, 2005, 1-115.

#### **İNTERNET KAYNAKLARI**

TÜRKİYE İSTATİSTİK KURUMU (TÜİK), “**Fiyat Endeksleri ve Enflasyon, Sorularla Resmi İstatistikler Dizisi-3**”, 2008.

WIKIPEDIA, The Free Encyclopedia, “Lambert W Function”, [http://en.wikipedia.org/wiki.Lambert\\_W\\_Function](http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_Function), 2011.

**EKLER**

Yıllar	Aylar	ÜFE Aylık % Değişim	TÜFE Aylık % Değişim
1982	Şubat	3,72	2,31
	Mart	3,37	2,26
	Nisan	1,89	0,95
	Mayıs	1,24	0,31
	Haziran	1,43	1,66
	Temmuz	2,01	1,02
	Ağustos	1,87	1,31
	Eylül	1,16	3,19
	Ekim	0,76	2,71
	Kasım	1,04	2,26
	Aralık	0,56	3,50
	1983	Ocak	9,61
Şubat		2,38	2,30
Mart		1,58	2,17
Nisan		1,39	1,47
Mayıs		1,69	0,72
Haziran		1,27	1,28
Temmuz		1,18	1,10
Ağustos		2,09	2,26
Eylül		2,05	3,28
Ekim		2,75	5,31
Kasım		4,12	3,71
Aralık		4,38	4,19
1984	Ocak	3,86	3,44
	Şubat	3,40	1,57
	Mart	3,29	3,09
	Nisan	8,28	6,23
	Mayıs	6,87	4,85
	Haziran	4,72	6,51
	Temmuz	-0,74	0,91
	Ağustos	3,19	2,50
	Eylül	2,32	2,05
	Ekim	3,26	4,35
	Kasım	3,71	3,85
	Aralık	1,77	1,90
1985	Ocak	4,81	5,54
	Şubat	4,72	3,32
	Mart	5,33	4,77
	Nisan	2,36	0,83
	Mayıs	2,16	2,41
	Haziran	-1,29	-0,77
	Temmuz	0,51	1,44
	Ağustos	1,74	2,59
	Eylül	2,77	4,73

Yıllar	Aylar	ÜFE Aylık % Değişim	TÜFE Aylık % Değişim
	Ekim	4,98	6,28
	Kasım	3,06	4,63
	Aralık	1,89	1,62
1986	Ocak	4,52	3,18
	Şubat	2,01	1,75
	Mart	1,29	1,32
	Nisan	2,00	0,37
	Mayıs	1,59	1,91
	Haziran	0,95	2,37
	Temmuz	1,25	1,89
	Ağustos	0,16	0,85
	Eylül	2,16	2,31
	Ekim	3,89	7,34
	Kasım	1,47	2,29
	Aralık	0,92	1,64
1987	Ocak	3,60	2,94
	Şubat	2,21	2,70
	Mart	3,52	3,74
	Nisan	2,62	2,08
	Mayıs	4,77	4,95
	Haziran	0,45	-0,12
	Temmuz	1,72	1,92
	Ağustos	2,80	1,71
	Eylül	2,05	2,93
	Ekim	3,47	4,81
	Kasım	2,85	6,24
	Aralık	10,75	11,20
1988	Ocak	6,90	5,99
	Şubat	6,17	5,37
	Mart	7,00	7,57
	Nisan	4,81	4,89
	Mayıs	2,11	2,35
	Haziran	2,55	2,16
	Temmuz	2,18	2,77
	Ağustos	3,14	3,42
	Eylül	3,67	4,84
	Ekim	6,10	7,46
	Kasım	5,28	6,88
	Aralık	4,30	3,91

Yıllar	Aylar	ÜFE Aylık % Değişim	TÜFE Aylık % Değişim
1989	Ocak	7,74	5,45
	Şubat	5,11	4,33
	Mart	2,30	2,53
	Nisan	4,54	3,61
	Mayıs	3,77	2,52
	Haziran	6,28	5,24
	Temmuz	5,02	5,68
	Ağustos	3,13	3,96
	Eylül	4,16	4,71
	Ekim	4,31	7,59
	Kasım	3,51	4,46
	Aralık	3,28	3,52
1990	Ocak	6,43	3,79
	Şubat	5,54	4,23
	Mart	3,63	4,90
	Nisan	3,06	3,99
	Mayıs	2,27	1,78
	Haziran	1,44	3,03
	Temmuz	1,30	1,88
	Ağustos	2,53	2,84
	Eylül	5,26	6,53
	Ekim	4,90	7,22
	Kasım	3,79	5,95
	Aralık	2,63	2,35
1991	Ocak	4,98	4,23
	Şubat	5,60	5,12
	Mart	3,39	3,51
	Nisan	4,52	3,60
	Mayıs	2,80	3,95
	Haziran	2,48	5,04
	Temmuz	2,58	2,77
	Ağustos	5,28	4,53
	Eylül	4,91	4,91
	Ekim	4,02	6,55
	Kasım	3,22	6,34
	Aralık	4,39	4,44
1992	Ocak	12,80	8,90
	Şubat	6,65	5,26
	Mart	3,26	3,75
	Nisan	0,09	1,30
	Mayıs	0,23	0,95
	Haziran	0,90	2,93
	Temmuz	2,92	3,35
	Ağustos	5,30	3,96

Yıllar	Aylar	ÜFE Aylık % Değişim	TÜFE Aylık % Değişim
	Eylül	6,30	7,12
	Ekim	6,47	8,22
	Kasım	3,65	4,20
	Aralık	3,64	3,34
1993	Ocak	6,34	5,59
	Şubat	4,96	3,42
	Mart	4,68	3,23
	Nisan	2,40	2,42
	Mayıs	3,32	4,68
	Haziran	2,97	4,95
	Temmuz	6,37	7,01
	Ağustos	3,34	2,59
	Eylül	4,30	4,05
	Ekim	3,67	6,48
	Kasım	6,16	7,35
	Aralık	2,64	3,47
1994	Ocak	5,21	3,50
	Şubat	8,44	5,97
	Mart	7,04	5,08
	Nisan	31,48	26,15
	Mayıs	9,75	8,46
	Haziran	2,91	3,69
	Temmuz	1,55	3,44
	Ağustos	2,33	2,17
	Eylül	6,41	5,73
	Ekim	7,98	9,60
	Kasım	5,42	7,86
	Aralık	7,99	7,48
1995	Ocak	8,55	6,64
	Şubat	6,94	5,98
	Mart	5,65	3,78
	Nisan	4,00	6,43
	Mayıs	0,89	3,01
	Haziran	0,76	1,47
	Temmuz	2,33	2,54
	Ağustos	3,97	3,95
	Eylül	5,43	7,21
	Ekim	4,53	7,63
	Kasım	4,32	5,69
	Aralık	3,75	3,49
1996	Ocak	10,58	8,19
	Şubat	5,93	3,59
	Mart	6,58	4,90



Yıllar	Aylar	ÜFE Aylık % Değişim	TÜFE Aylık % Değişim
	Nisan	9,52	7,13
	Mayıs	2,27	4,71
	Haziran	1,88	2,12
	Temmuz	2,00	0,90
	Ağustos	3,43	4,72
	Eylül	5,98	5,80
	Ekim	6,19	7,63
	Kasım	6,62	5,81
	Aralık	4,39	2,21
1997	Ocak	6,82	5,38
	Şubat	5,08	5,74
	Mart	4,96	5,84
	Nisan	5,15	8,47
	Mayıs	4,66	3,95
	Haziran	2,42	1,88
	Temmuz	4,47	4,54
	Ağustos	5,93	5,44
	Eylül	6,12	7,65
	Ekim	6,34	9,93
	Kasım	6,11	7,02
	Aralık	5,06	4,87
1998	Ocak	7,40	6,87
	Şubat	4,28	4,78
	Mart	3,52	3,98
	Nisan	4,10	5,17
	Mayıs	3,32	3,08
	Haziran	1,72	0,65
	Temmuz	2,05	2,81
	Ağustos	2,37	3,73
	Eylül	5,47	6,89
	Ekim	3,47	6,60
	Kasım	3,33	5,01
	Aralık	2,74	2,74
1999	Ocak	3,99	4,10
	Şubat	3,72	2,33
	Mart	3,55	4,10
	Nisan	4,88	5,45
	Mayıs	3,30	2,01
	Haziran	2,23	1,72
	Temmuz	3,48	3,17
	Ağustos	3,31	3,40
	Eylül	5,87	5,53
	Ekim	4,76	6,24

Yıllar	Aylar	ÜFE Aylık % Değişim	TÜFE Aylık % Değişim
	Kasım	4,07	4,78
	Aralık	6,77	5,53
2000	Ocak	5,63	4,58
	Şubat	3,84	3,88
	Mart	3,39	3,38
	Nisan	2,34	2,36
	Mayıs	1,53	2,30
	Haziran	-0,04	0,06
	Temmuz	1,01	2,20
	Ağustos	1,40	1,95
	Eylül	2,76	2,77
	Ekim	2,62	3,80
	Kasım	2,28	4,15
	Aralık	1,79	1,95
2001	Ocak	2,56	2,10
	Şubat	2,70	1,43
	Mart	10,78	5,67
	Nisan	15,20	10,55
	Mayıs	6,45	5,34
	Haziran	3,83	2,91
	Temmuz	3,79	2,24
	Ağustos	3,96	2,05
	Eylül	5,44	6,62
	Ekim	6,55	6,94
	Kasım	4,50	5,59
	Aralık	4,25	3,86
2002	Ocak	3,87	6,09
	Şubat	2,28	1,71
	Mart	1,87	1,07
	Nisan	1,86	2,42
	Mayıs	0,08	0,17
	Haziran	1,48	0,13
	Temmuz	2,80	0,60
	Ağustos	2,43	1,75
	Eylül	3,22	3,79
	Ekim	2,91	4,09
	Kasım	1,30	3,79
	Aralık	2,05	1,52
2003	Ocak	5,13	2,15
	Şubat	3,29	2,52
	Mart	2,72	3,89
	Nisan	1,41	3,16
	Mayıs	-1,00	1,63

Yıllar	Aylar	ÜFE Aylık % Değişim	TÜFE Aylık % Değişim
	Haziran	-1,69	-0,76
	Temmuz	-0,26	-0,94
	Ağustos	0,64	-0,60
	Eylül	0,02	1,53
	Ekim	0,29	1,70
	Kasım	1,22	2,35
	Aralık	0,69	0,63
2004	Ocak	4,12	0,56
	Şubat	1,68	0,21
	Mart	1,54	1,09
	Nisan	1,77	0,59
	Mayıs	0,08	-0,78
	Haziran	-0,45	-1,15
	Temmuz	-1,17	-0,04
	Ağustos	1,14	0,27
	Eylül	1,89	0,49
	Ekim	3,50	2,74
	Kasım	0,43	1,86
	Aralık	-0,77	0,60
2005	Ocak	-1,37	0,87
	Şubat	0,19	0,37
	Mart	2,61	0,46
	Nisan	1,75	1,20
	Mayıs	-0,13	1,56
	Haziran	0,66	0,87
	Temmuz	-0,26	-0,04
	Ağustos	1,37	0,57
	Eylül	1,94	1,19
	Ekim	0,21	2,12
	Kasım	-2,55	1,24
	Aralık	-0,33	0,53
2006	Ocak	1,96	0,75
	Şubat	0,26	0,22
	Mart	0,25	0,27
	Nisan	1,94	1,34
	Mayıs	2,77	1,88
	Haziran	4,02	0,34
	Temmuz	0,86	0,85
	Ağustos	-0,75	-0,44
	Eylül	-0,23	1,29
	Ekim	0,45	1,27
	Kasım	-0,29	1,29
	Aralık	-0,12	0,23

Yıllar	Aylar	ÜFE Aylık % Değişim	TÜFE Aylık % Değişim
2007	Ocak	-0,05	1,00
	Şubat	0,95	0,43
	Mart	0,97	0,92
	Nisan	0,80	1,21
	Mayıs	0,39	0,50
	Haziran	-0,11	-0,24
	Temmuz	0,06	-0,73
	Ağustos	0,85	0,02
	Eylül	1,02	1,03
	Ekim	-0,13	1,81
	Kasım	0,89	1,95
	Aralık	0,15	0,22
2008	Ocak	0,42	0,80
	Şubat	2,56	1,29
	Mart	3,17	0,96
	Nisan	4,50	1,68
	Mayıs	2,12	1,49
	Haziran	0,32	-0,35
	Temmuz	1,25	0,58
	Ağustos	-2,34	-0,24
	Eylül	-0,90	0,45
	Ekim	0,57	2,60
	Kasım	-0,03	0,83
	Aralık	-3,54	-0,41
2009	Ocak	0,23	0,29
	Şubat	1,17	-0,34
	Mart	0,29	1,10
	Nisan	0,65	0,02
	Mayıs	-0,05	0,64
	Haziran	0,94	0,11
	Temmuz	-0,71	0,25
	Ağustos	0,42	-0,30
	Eylül	0,62	0,39
	Ekim	0,28	2,41
	Kasım	1,29	1,27
	Aralık	0,66	0,53
2010	Ocak	0,58	1,85
	Şubat	1,66	1,45
	Mart	1,94	0,58
	Nisan	2,35	0,60
	Mayıs	-1,15	-0,36
	Haziran	-0,50	-0,56
	Temmuz	-0,16	-0,48
	Ağustos	1,15	0,40

<b>Yıllar</b>	<b>Aylar</b>	<b>ÜFE Aylık % Değişim</b>	<b>TÜFE Aylık % Değişim</b>
	Eylül	0,51	1,23
	Ekim	1,21	1,83
	Kasım	-0,31	0,03
	Aralık	1,31	-0,30
2011	Ocak	2,36	0,41
	Şubat	1,72	0,73

**Ö Z G E Ç M İ Ş**

**Adı ve SOYADI** : Ayça BÜYÜKYILMAZ

**Doğum Tarihi ve Yeri** : 08/01/1985 - Ankara

**Medeni Durumu** : Bekar

**Eğitim Durumu**

**Mezun Olduğu Lise** : Ankara Bahçelievler Deneme Lisesi

**Lisans Diploması** : Gazi Üniversitesi, İstatistik Bölümü  
Gazi Üniversitesi, Ekonometri Bölümü (Yandal)

**Yüksek Lisans Diploması** : Gazi Üniversitesi, Ekonometri Bölümü(2008-2009)  
Akdeniz Üniversitesi, Ekonometri Bölümü (2009-2011)

**Tez Konusu** : Bazı Kapula Tahmin Yöntemleri ve ÜFE-TÜFE Arasındaki Bağımlılık Yapısı Üzerine Bir Uygulama

**Yabancı Dil / Diller** : İngilizce

**İş Deneyimi**

**Stajlar** : Ziraat Bankası Bireysel Krediler (2006)  
Exime Bankası Risk Yönetimi (2007)

**Çalıştığı Kurumlar** : Akdeniz Üniversitesi İ.İ.B.F Ekonometri Bölümü (2009– )

**Adres** : Akdeniz Üniversitesi İ.İ.B.F Ekonometri Bölümü ANTALYA