ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

METRİKLERİN GENİŞLEMESİ

Melek ARAS

Yönetici: Yrd. Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN

Y. Lisans Tezi

ÖZET

Bu tezde, bir Riemannian manifoldunun tanjant demetinde çeşitli metrikler incelenmiştir. II metriğinin $\tilde{\Gamma}^{A}_{CB}$ Christoffel sembolleri $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre hesaplandı ve $\tilde{K}$ eğrilik tensörünün $\tilde{K}^{A}_{DCB}$ bileşenleri bulundu. $I+II$ metriği tanımlanarak II ve $I+II$ metriklerinin Levi-Civita konneksiyonunun aynı olduğu gösterildi. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyonu tanımlanarak, $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyonun $\bar{R}^{A}_{DCB}$ eğrilik tensörünün bileşenleri hesaplandı. Ayrıca, bir Riemannian manifoldunun tanjant demetinde $I+III$ metriği tanımlandı ve $I+III$ metriğinin bileşenleri incelendi. Adapte olmuş çatı kavramı verilerek $I+III$ metriği adapte olmuş çatıda gözönüne alınmışdı. Son olarak, tanjant demette $I+III$ metriğine göre almost Kahler yapılar ve geodeziklerin diferensiyel denklemi incelenmiştir.

SUMMARY

In this thesis, same metrics in the tangent bundle of a Riemannian manifold were investigated. Christoffel symbols $\overset{\sim}{\Gamma}{}^{A}_{CB}$ of the metric II were obtained with respect to the induced coordinates in $T(M_n)$ and the components $\tilde{K}{}^{A}_{DCB}$ of curvature tensor $\tilde{K}$ were found. $I+II$ metric was defined and it was shown that the Levi-Civita connection of the metric II and the metric $I+II$ coincide. The metric connection $\overline{\nabla}$ is defined and the components $\overline{R}{}^{A}_{DBC}$ of curvature tensör $\overline{R}$ of the $\overline{\nabla}$ were calculated. In addition, the metric $I+III$ in the Tangent Bundle of a Riemannian manifold was defined and its components were investigated with respect to the induced coordinates in $T(M_n)$. The concept of the adapted frame was defined and the metric $I+III$ was considered with respect to the adapted frame. Finally, we considered the almost Kahler structure and the differential equations of the geodezics of the tangent bundle $T(M_n)$ with respect to the metric $I+III$.

TEŞEKKÜR

Beni bu konuya yönelten, her adımda bilgilerini esirgemeyen, Sayın Hocam Yrd.Doç.Dr. Abdullah MAĞDEN'e teşekür ederim. Ayrıca çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Arif SALİMOV'a, Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim elemanlarından Arş. Gör. Nejmi CENGİZ'e, saygı ve şükranlarımı arz etmeyi bir borç bilirim.

Melek ARAS
Ağustos-2001

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Tanjant demetlerin diferensiyel geometrisinin incelenmesi 1960 lı yıllarda E.T.Davies [3,4], Yano and Davies [23,24], P.Dombrowski [5], A.J.Ledger (Ledger and Yano [10,11]), M.Okumura (Tachibana and Okumara [20], S.Sasaki [19], S.Tachibana (Tachibana and Okumara [20]) ve K.Yano [21,22] tarafından başlatılmıştır. S.Kobayashi [7], Yano and Kobayashi [26,27,28] tensör alanlarının ve konneksiyonların tanjant demete tam ve dikey liftlerini geliştirmişlerdir.

II metriği İngiliz geometriciler Afifi [1], Patterson [13],[14],[15], Patterson and Walker [16], Ruse, Walker and Willmore [17] tarafından incelenmiştir. S.Sasaki [19], Davies [23] tarafından kullanılan $I+III$ metriği Riemannian manifoldlarının tanjant demetlerininin geometrisini incelemek için kullanılmıştır. $I+II$ ve $II+III$ metrikleri Yano - Ishihara [25] tarafından verilmiştir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmada $T(M_n)$ de metrik konneksiyonları ve $II, I+II$ ve $I+III$ metrikleri daha detaylı olarak verilmiştir. Bu amaçla çalışmalarımızın anlaşılabilmesi ve konunun sınırlanması bakımından ikinci bölümde ilgili özelikler ve tanımlar önbilgiler adı altında verilmiştir. Ayrıca konunun anlaşılmasını kolaylaştıracak çalışmalar yapılmıştır.

Üçüncü bölümde $II, I+II$ ve $I+III$ Riemannian metrikleri hakkında bilgi verildikten sonra bu metriklerin $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatları elde edilmiştir. II metriğinin tam,dikey ve yatay liftleri çalışılmış ayrıca Riemannian konneksiyonunun $\tilde{\nabla}$ tam liftinin $\tilde{\Gamma}^{k}_{ij}$ Christoffel sembolleri bulunmuştur. Vertikal ve horizontal dağılım konusunda iki teorem verilmiştir. İndirgenmiş koordinatlara göre $\tilde{\nabla}_{C_Y}\tilde{X}, \tilde{\nabla}_B \bar{X}^{A}, \tilde{\nabla}_A$ $'\overset{*}{X}_B$ ve $\tilde{\nabla}_A \tilde{\overset{*}{X}}_B$ matrislerinin bileşenleri elde edilmiş ve $\tilde{K}$ eğrilik tensörünün bileşenleri indirgenmiş koordinatlara göre elde edilmiştir. Ayrıca $\tilde{K}^{A}_{DCB}$ eğrilik tensörünün $\tilde{\nabla}_E \tilde{K}^{A}_{DCB}$ kovaryant türevi indirgenmiş koordinatlara göre hesaplanmıştır. $I+II$ metriği tanımlandı ve $I+II$ metriği g nin ∇ Levi-Civita konneksiyonunun $^{C}\nabla$ tam liftinin burulmasız olduğu gösterildi ve bir teorem ispat edildi. II mertiğinin $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu çalışıldı. $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre tam,dikey ve yatay liftlerin bileşenleri elde edildi. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyonunun $\bar{R}$ eğrilik tensörünün $\bar{R}^{A}_{DCB}$bileşenleri bulundu.

Dördüncü bölümde $I+III$ metriği çalışıldı. $^{D}g_{AB}$ ve $^{D}g^{AB}$ matrislerinin bileşenleri çalışıldı. Tabii çatıdan adapte olmuş çatıya geçiş formülleri elde edildi. Adapte olmuş çatıda $^{D}g_{\alpha\beta}$ ve $^{D}g^{\alpha\beta}$ matrislerinin bileşenleri elde edildi.

Beşinci bölümde tanjant demette almost Kahler yapılar ve $I+III$ metriğine göre Geodezikler çalışılmıştır.

2.ÖNBİLGİLER

2.1.Tanım(Manifold): X Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset R^n$ bölgesinde

$$\varphi : U \rightarrow V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bazen harita (U, φ) şeklinde de gösterilir.
Eğer $x \epsilon U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, ...x^n) \epsilon R^n$$

olur. $x^1, ...x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Eğer X Hausdorff topolojik uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse , yani

$$X = \bigcup_{\alpha \epsilon A} U_\alpha, \quad (A\text{-indisler kümesi})$$

ise X'e n boyutlu topolojik manifold veya sadece n boyutlu manifold denir[18] .

2.2.Tanım(Atlas): X Hausdorff topolojik uzay ve $k \epsilon N$ ($N-$ doğal sayılar kümesi) olsun.Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \epsilon A, \ \ U_\alpha \subset X\}$ lokal haritalar ailesine$X$ üzerinde C^k sınıfından n boyutlu atlas denir[18].

i. Lokal haritaların U_α bölgesi X'i örter, yani X,n boyutlu manifolddur.
ii. Keyfi $\alpha, \beta \ \epsilon A$ için $U_\alpha \cap \ U_\beta \neq 0$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \ U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap \ U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır.

$U_\alpha \cap \ U_\beta = 0$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tayin edilemez.

M, Hausdorff sayılabilir baza sahip olan topolojik uzay olsun. Eğer, M üzerinde n-boyutlu C^∞ yapısı verilmiş ise M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir[18] .

2.3.Tanım: M_n manifoldu üzerinde $\mathcal{T}_0^1(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X, Y) : \mathcal{T}_0^1(M_n) \times \mathcal{T}_0^1(M_n) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z\,, \quad \forall f,g \in F(M_n)$
ii. $\nabla_Z(fX+gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$
şartlarını sağlıyorsa ∇'ya afin konneksiyon denir. Bu halde

$$\nabla_X : \mathcal{T}_0^1(M_n) \to \mathcal{T}_0^1(M_n)$$

dönüşümüne kovariant diferensiyellenme denir [2].

Lokal koordinatlarda $x \in U \subset M_n$ olmak üzere $\varphi(x) = (x^1, ..., x^n)$ olsun. $\nabla_X = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_i$ olmak üzere.

$$\nabla_i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad , \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x^1, ..., x^n) \tag{2.1}$$

yazılır. Diğer taraftan $x \in U'$ olacak şekilde $\psi(x) = \left(x^{1'}, ..., x^{n'}\right)$ koordinat komşuluğunu alalım . Burada

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{i'}}} = \nabla_{i'} \ , \quad \nabla_{i'}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}}\right) = \Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \tag{2.2}$$

olur. $\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = A_{i'}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ olduğundan ve kovariant türevin özelliğinden dolayı

$$\nabla_{A_{i'}^i \frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}}\right) = A_{i'}^i \nabla_i\left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}}\right) \tag{2.3}$$

yazılır.Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial x^{j'}} = A_{j'}^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

olduğundan bu (2.3) denkleminde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla_i\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} A_j^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} + A_{i'}^i A_{j'}^j \Gamma_{ij}^k A_k^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}}\right)\end{aligned}$$

bulunur. (2.3) eşitliğinden

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = A_k^{k'} A_{i'}^i A_{j'}^j \Gamma_{ij}^k + A_k^{k'} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \tag{2.4}$$

yazılır. Bu kurala göre dönüşen n^3 sayıdaki Γ_{ij}^k sayılarına afin konneksiyon katsayıları denir. Bazen afin konneksiyon yerine bu katsayılar kullanılır.

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{x^i\partial_i}(y^j\partial_j) = x^i\nabla_i(y^j\partial_j)\\ &= x^i\partial_i y^k\partial_k + x^i y^j\Gamma_{ij}^k\partial_k\\ &= x^i(\partial_i y^k + \Gamma_{ij}^k y^j)\partial_k\end{aligned}$$

şeklinde lokal koordinatlarda yazarız. Buradan

$$\nabla_i y^k = \partial_i y^k + \Gamma_{ij}^k y^j \tag{2.5}$$

olur. (2.5) denklemine du^i ile çarpılırsa

$$du^i\nabla_i y^k = dy^k + \Gamma_{ij}^k du^i y^j \tag{2.6}$$

olarak yazılır. Burada $\delta y^k = du^i\nabla_i y^k$ ve $w^k = \Gamma_{ij}^k du^i$ ile gösterilirse,

$$\delta y^k = dy^k + w^k y^j \tag{2.7}$$

olur. Buna du yönünde kovaryant türev denir. Bu kovaryant türev vektör alanını öteler. Eğer $\delta y^k = 0$ ise vektör alanına paralel vektör alanı denir.

$f = W_k y^k$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer $df = 0$ ise W_k vektör alanı paralel olur. Bunu kullanarak f nin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}df &= \delta W_k y^k + W_k\delta y^k\\ 0 &= \delta W_k y^k + W_k(dy^k + w_j^k y^j)\\ &= \delta W_k y^k + (-dW_k y^k + W_k w_j^k y^j)\end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$\delta W_k = dW_k + W_j w_k^j$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\nabla_i W_k = \partial_i W_k - \Gamma_{ik}^j W_j \tag{2.8}$$

olarak yazılır. (2.5) ve (2.8) eşitlikleri yardımıyla tensörlerin kovariyant türevi

$$\nabla_k t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} = \partial_k t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} + \sum_{\lambda=1}^{p}\Gamma_{km}^{i_\lambda} t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots m\ldots i_p} - \sum_{\mu=1}^{q}\Gamma_{kj_\mu}^{m} t_{j_1\ldots m\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} \tag{2.9}$$

denklemiyle verilir[7].

2.4.Tanım(Vektör Alanı): M_n, C^∞sınıfından olan bir manifold ve T_p, $\forall p\in M_n$ noktasındaki teğet(tanjant) uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall p\in M_n$ noktasına T_p

uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir.

2.5.Tanım(Tanjant Demeti): M_n, C^∞ sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \tag{2.10}$$

ile tanımlana $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir .

$T(M_n)$' nin herhangi bir $\widetilde{p}$ noktası, yani $\widetilde{p} \in T_p(M_n)$ için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayan $\pi : T(M_n) \to M_n$ demet projeksiyonu $\widetilde{p} \mapsto p$ karşılık getirir. Yani $\pi(\widetilde{p}) = p$ olur. $\pi^{-1}(p) = T_p(M_n)$ kümesine M_n temel uzayının p noktasındaki fibre denir. Doğal olarak burada $f : M_n \to T(M_n)$ kesiti bulunur. $f(p)$, M_n manifoldunun keyfi p noktasındaki $T_p(M_n)$ nin sıfır vektörüdür. Bu f kesitine veya $f(M_n)$'nin götüntüsüne sıfır kesit denir. $f(M_n)$ sıfır kesiti M_n temel uzayı ile aynıdır ve bu nedenle M_n manifoldunun kendisi $T(M_n)$ de diferensiyellenebilir imbedding olmuş (içine daldırılmış) altmanifoldudur.

M_n temel uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğünü farzedelim. Burada (x^h), U komşuluğunnda tanımlı lokal koordinat sistemidir. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfizimdir. R^n, R reel alan üzerindeki n-boyutlu vektör uzayı olur. $\widetilde{p} \in T_p(M_n)$ $(p \in U)$ noktası (p, X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}$ $(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h})$ doğal bazına göre $\widetilde{p}$ nın $(y^h) = (x^{\overline{h}})\ \overline{h} \doteq n+1, ..., 2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $p = \pi(\widetilde{p})$ nin koordinatları (x^h) $h = 1, ..., n$ ile gösterilirse $\widetilde{p}$ noktası uygun $(x^h, x^{\overline{h}}) \mapsto \widetilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Biz $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\overline{h}})$ lokal koordinatlar sistemini elde ederiz. Burada $(x^h, x^{\overline{h}})$ ya (x^h) dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $p = \pi(\widetilde{p})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U', x^{h'}\}$ ise $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğu $\widetilde{p}$ ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U')$ göre $\widetilde{p}$ nın indirgenmiş koordinatları $(x^{h'}, y^{h'})$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x)\,, \\ y^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h\,, \end{cases} \tag{2.11}$$

olarak verilir. $x^{h'}(x)$, p noktasındak $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\overline{h}} = y^h$, $x^{\overline{h'}} = y^{h'}$ ile gösterirsek (2.11) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}(x). \tag{2.12}$$

olarak yazılır. (2.11) denkleminin Jacobianı

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^{h} \partial x^{i}} y^{i} & \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

matrisi ile verilir. (2.11) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^{h} = x^{h}(x'), \\ y^{h} = \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \tag{2.14}$$

veya

$$x^{p} = x^{p}(x'), \tag{2.15}$$

olarak yazılır. (2.14) denkleminin Jacobianı

$$\left(\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{h'} \partial x^{i'}} y^{i'} & \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

matrisi ile verilir. (2.13) ve (2.16) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir.

M_n manifoldu üzerindeki C^{∞} sınıfında (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesini $\mathcal{T}_s^r(M_n)$ ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesini ise $\mathcal{T}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathcal{T}_s^r(M_n)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümelerini ise sırasıyla $\mathcal{T}_s^r(T(M_n))$ ve $\mathcal{T}(T(M_n))$ olarak göstereceğiz[25].

2.6.Tanım: M_n manifoldu üzerinde $\mathcal{T}_0^1(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y) : \mathcal{T}_0^1(M_n) \times \mathcal{T}_0^1(M_n) \to \mathcal{T}_0^1(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z\,, \quad \forall f,g \in F(M_n)$

ii. $\nabla_Z(fX+gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇'ya afin konneksiyon denir. Bu halde

$$\nabla_X : \mathcal{T}_0^1(M_n) \to \mathcal{T}_0^1(M_n)$$

dönüşümüne kovariant diferensiyellenme denir [2].

2.7.Tanım(Lie Türevi): M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde X vektör alanı olmak üzere X vektör alanı için aşağıdaki şartları sağlıyan L_X operatörüne Lie türevi denir[7].

i. $L_X(K \otimes K') = L_X K \otimes K' + K \otimes L_X K' \quad \forall K, K' \epsilon T(M_n)$

ii. $L_X f = Xf,\ f \epsilon T_0^0(M_n) = F(M_n)$

iii. $L_X df = dL_X f$

iv. $L_X Y = [X,Y]$

2.8.Tanım(Dual (kovektör) Uzay): B_n vektör uzayında tayin edilmiş $z=\alpha(\vec{x})$ vektör değişkenli reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $\forall\vec{x},\ \vec{y}\epsilon B_n$ ve $\forall\lambda,\mu\epsilon R$ için

$$\alpha(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda\alpha(\vec{x})+\mu\alpha(\vec{y})$$

şartı sağlanırsa $z=\alpha(\vec{x})$ fonksiyonuna lineer fonksiyon denir.

Bu durumda $\alpha=B_n\to R$ dönüşümüne lineer operatör de denir. α lineer fonksiyonunun $\vec{x}$ vektörü üzerindeki değeri olarak alınan $z=\alpha(\vec{x})=\alpha\vec{x}$ değerine α operatörünün $\vec{x}$ vektörü üzerindeki izi denir.

B_n vektör uzayının bütün lineer operatörlerinin oluşturduğu B_n^* vektör uzayına B_n uzayının dual uzayı denir[2] .

2.9.Tanım(Tensör): $\vec{x}_j\,\epsilon B_n,\ j=1,...,q$ vektör ve $\overset{i}{\xi}\epsilon B_n^*,\ i=1,...,p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega=t(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. $\lambda,\mu\epsilon R$ olmak üzere birinci vektör değişkenlerine göre lineerlik şartı

$$t(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},...,\overset{p}{\xi})=\lambda t(\vec{x},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},...,\overset{p}{\xi})+\mu t(\vec{y},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},...,\overset{p}{\xi})$$

olmak üzere bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, bu fonksiyona multilineer fonksiyon denir [2] .

B_n bir vektör uzay olsun. $\omega=t(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi})$ multilineer fonksiyonuna karşılık gelen

$$t:B_n\times...\times B_n\times B_n^*\times...\times B_n^*\to R$$

reel değerli operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir[2] .

2.10.Tanım(Ricci Tensörü): Eğrilik tensörü

$$R^i_{lkm}=\partial_{[l}\Gamma^i_{k]m}+\Gamma^i_{[l|s|}\Gamma^s_{k]m}$$

şeklinde olup l ile kontraksiyon yapılırsa elde edilen

$$R_{ks} = R^i_{iks}$$

tensörüne Ricci tensörü denir[7].

2.11.Tanım(Dış Çarpım):

$$\Lambda : T'(V) \otimes T'(V) \to \Lambda^2 V^*$$

$$(f,g) \to f\Lambda g = A_2(f \otimes g)$$

şeklinde tanımlı, Λ fonksiyonuna dış çarpım fonksiyonu ve $f\Lambda g$ tensörüne de f ve g tensörlerinin dış çarpımı denir[6].

2.12. Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f(u^1, ..., u^n)$ diferensiyellenebilir foksiyonu ile verilmiş skalar alanına bakalım. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_i f du^i$ ifadesi, koordinatların verilmesi halinde invaryant kalır ve df fonksiyonunun du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.17}$$

olur. Bu vektöre f alanının gradientı denir. f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.18}$$

olmasıdır [7].

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevini alırsak

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k_{ji} V_k \tag{2.19}$$

olur. (2.19) denkleminden j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.18) eşitliği kullanılarak

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S^k_{ij} V_k \tag{2.20}$$

yazılır. Burada

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} \tag{2.21}$$

biçimindedir. (2.20) denkleminin sağ tarafındaki V_k keyfi kovektör, sol tarafındaki kovaryant türev ise (0,2) tipli tensör olduğuna göre S^k_{ij} kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensör tayin eder. (2.21) tensörüne A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi X, Y vektör alanları için eğrilik tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.22}$$

biçimindedir [7].

Keyfi v^k vektörünün kovaryant türevi $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma^i_{sm} v^m$ biçimindedir. Bu (1,1) tipli tesörün kovaryant türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma^i_{rm} \nabla_s v^m - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\ &= \partial_r(\partial_s v^i + \Gamma^i_{sk} v^k) + \Gamma^i_{rm}(\partial_s v^m + \Gamma^m_{sk} v^k) - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\ &= \partial^2_{rs} v^i + \partial_r \Gamma^i_{sk} v^k + \Gamma^i_{sk} \partial_r v^k + \Gamma^i_{rm} \partial_s v^m + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} v^k - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i\end{aligned}$$

son eşitliğin heriki tarafını r, s indislerine göre alterneleştirme işlemi yaparsak

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R^i_{rsk} v^k - 2S^k_{rs} \nabla_k v^i \tag{2.23}$$

denklemini elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned}R^i_{rsk} &= \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm} \Gamma^m_{rk} \\ &= 2(\partial_{[r} \Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|} \Gamma^m_{s]k})\end{aligned} \tag{2.24}$$

yazılır. (2.23) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduklarından ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının eğrilik tensörü veya Riemann-Christoffer tensörü denir.

(2.23) formülüne benzer olarak aşağıdaki formülleri yazarız.

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} w_k = - R^m_{rsk} w_m - 2S^m_{rs} \nabla_m w_k \tag{2.25}$$

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \varphi^j_i = R^j_{rsm} \varphi^m_i - R^m_{rsi} \varphi^j_m - 2S^k_{rs} \nabla_k \varphi^j_i \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}2\nabla_{[r} \nabla_{s]} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= R^{i_1}_{rsm} t^{m i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots + R^{i_p}_{rsm} t^{i_1 \dots m}_{j_1 \dots j_q} \\ &\quad - R^m_{rsj_1} t^{i_1 \dots i_p}_{m j_2 \dots j_q} - \dots - R^m_{rsj_q} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots m} - 2S^k_{rs} \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\end{aligned} \tag{2.27}$$

(2.26) formülüne bazen φ^j_i afinorunun Ricci eğriliği de denir.

A_n manifoldundan alınmış keyfi X, Y, Z vektör alanları olmak üzere burulma tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.28}$$

biçimindedir[7].

2.13.Tanım(Riemannian Metriği): Herbir $X \epsilon M_n$ noktasında $g(X,Y) = 0$, $\forall Y \epsilon T_X(M_n)$ eşitliğinden $X = 0$ oluyorsa g ye M_n üzerinde Riemannian Metriği denir. g nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g için

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır[7].
2.14.Tanım: C^{r+1} sınıfında olan $2n$-boyutlu M_{2n} uzayını gözönüne alalım.

$$\varphi_j^i \varphi_i^h = -\delta_j^h, \tag{2.29}$$

şartını sağlayan C^r sınıfından φ_i^h karışık tensörlerin meydan getirdiği yapıya hemen hemen kompleks yapı ve bu yapının oluşturduğu uzayada hemen hemen kompleks uzay denir[25].

2.15.Tanım: φ_i^h hemen hemen kompleks yapısıyla C^r sınıfından $2n$-boyutlu M_{2n} uzayı verilmiş olsun. M_{2n} uzayında pozitif tanımlı Riemannian metriği

$$ds^2 = g_{ij}(\xi)d\xi^j d\xi^i \tag{2.30}$$

olmak üzere eğer Riemann metriği

$$\varphi_j^t \varphi_i^s g_{ts} = g_{ji} \tag{2.31}$$

olarak veriliyorsa bu Riemann metriğine, M_{2n} hemen hemen kompleks uzayında Hermit metrik denir. Hermit metriği vasıtasıyla meydana gelen hemen hemen kopleks uzaya hemen hemen Hermit uzay denir[9].

Diğer bir ifade ile pozitif tanımlı Riemann metrik tensörü hibrid ise bu metriğe Hermit metrik denir ve bu Hermit metriği ile verilen kompleks uzaya Hermit manifold denir. g_{ji} hibrid tensörü

$$O_{ji}^{cb} g_{cb} = 0 \text{ veya } \varphi_j^c \varphi_i^b g_{cb} = g_{ji}$$

olarak da yazılabilir.

Eğer

$$\varphi_{ji} = \varphi_j^t g_{ti} \tag{2.32}$$

olarak yazarsak (2.29) ve (2.31) denklemlerinden

$$\varphi_j^i \varphi_{ih} = -g_{jh} \text{ ve } \varphi_j^i \varphi_{hi} = g_{jh} \tag{2.33}$$

yazılır. Bu da

$$\varphi_{ji} = -\varphi_{ij} \tag{2.34}$$

olduğunu gösterir. Yani φ_{ji} tensörü antisimetriktir.

Diğer taraftan φ_{ji} antisimetrik tensörü

$$\varphi_j^t \varphi_i^s g_{ts} = g_{ji} \ , \quad (\varphi_j^t = \varphi_{ji} g^{it})$$

olarak tanımlanmış ise

$$\varphi_j^t \varphi_t^i = -\delta_j^i$$

elde edilir. Bu ise hemen hemen kompleks uzay olduğunu gösterir.

Hemen hemen kompleks uzayda g_{ji} Hermit metriği

$$\nabla_j \varphi_i^h = 0 \ \text{veya} \ \nabla_j \varphi_{ih} = 0 \tag{2.35}$$

olarak tanımlanıyorsa bu Hermit metriğe M_{2n} uzayında Kahler metriği denir[8]. Bu metriğin meydana getirdiği uzaya hemen hemen Kahler uzay denir[8].

Burada ∇_k, g_{ji} metriği ile formülize edilmiş Christoffer sembolü ile ilgili kovaryant diferensiyeldir.

2.16.Tanım: $T_q^p(M_n)$ M_n manifoldu üzerinde üzerinde tanımlanmış (p,q) tipli tensör alanı olmak üzere

$$\mathcal{T}(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} T_q^p(M_n)$$

ifadesi M_n manifoldu üzerinde tensör cebiri oluşturur. Bu cebire (p,q) tipli tensör alanlarının modülü denir[7].

2.17.Tanım(Vektör Alanların Vertikal(dikey) Lifti): Her $f \epsilon T_0^0(M_n)$ için $X\,{}^V f = 0$ olacak şekilde $X \ \epsilon T_0^1(T(M_n))$ alalım. Buna göre X 'e vertikal vektör alanı denir ve $T(M_n)$ indirgenmiş koordinatlara göre ${}^V X$ dikey lift

$${}^V X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir[25].

2.18.Tanım(Vektör Alanların Complete(tam) Lifti): $X \ \epsilon T_0^1(M_n)$ olsun.

$${}^C X\,{}^C f = {}^C(Xf)$$

eşitliği ile tanımlanan ${}^{C}X$'e X in $T(M_n)$ de tam lifti denir. Burada f keyfi bir fonksiyon dur. M_n de X^h bileşenlerine göre ${}^{C}X$ tam lifti, $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{C}X = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir[25].

2.19.Tanım(Vektör Alanların Horizontal(yatay) Lifti): $X \ \epsilon T_0^1(M_n)$ verilsin. ${}^{H}X$ yatay lifti $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{H}X = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Burada $\Gamma_i^h = y^i \Gamma_{ji}^h$ şeklindedir[25].

2.20.Tanım((0,2) tipli tensör alanın liftleri): (0,2) tipli G tensör alanının G_{ji} lokal bileşenlerine göre ${}^{V}G, {}^{C}G$ ve ${}^{H}G$ liftlerinin $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$^{V}G = \begin{pmatrix} G_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ ^{C}G = \begin{pmatrix} \partial G_{ji} & G_{ji} \\ G_{ji} & 0 \end{pmatrix} \text{ve } ^{H}G = \begin{pmatrix} \Gamma_j^t G_{ti} + \Gamma_i^t G_{jt} & G_{ji} \\ G_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir[25].

2.21.Tanım(Tanjant Demette Geodezikler): $\tilde{C} : [0,1] \to T(M_n)$, $T(M_n)$ de bir eğri olsun ve farzedelim ki $\tilde{C}$ lokal olarak $x^A = x^A(t)$, yani $T(M_n)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre

$$x^h = x^h(t), \qquad y^h = y^h(t) \tag{2.36}$$

şelinde tanımlansın. Burada t bir parametredir. O zaman M_n de $C = \pi \circ \tilde{C}$ eğrisine $\tilde{C}$ eğrisinin dönüşümü denir. Lokal olarak $x^h = x^h(t)$ ile ifade edilir ve $\pi\tilde{C}$ şeklinde gösterilir. M_n de lokal olarak $x^h = x^h(t)$ ile ifade edilen bir C eğrisi verilsin. O zaman $T(M_n)$ de $x^h = x^h(t)$, $y^h = dx^h/dt$ lokal ifadelere sahip olan $\tilde{C}$ eğrisine C eğrisinin doğal lifti denir ve C^* ile gösterilir.

∇, M_n de bir afin konneksiyon olsun. (2.36) ile belirtilen bir $\tilde{C}$ eğrisinin ${}^{C}\nabla$'e göre $T(M_n)$ de geodezik olması için gerek ve yeter şart onun (2.36) lokal ifadelerinin

$$\frac{d^2x^A}{dt^2} + \tilde{\Gamma}_{CB}^A \frac{dx^C}{dt}\frac{dx^B}{dt} = 0 \tag{2.37}$$

eşitliğini sağlamasıdır. Burada t, $\tilde{C}$ nin bir afin parametresi ve $\tilde{\Gamma}_{CB}^A$ de ${}^{C}\nabla$ nin bileşenleridir. (2.37) eşitliğinden

$$\frac{d^2x^h}{dt^2}+\Gamma^h_{ji}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=0, \tag{2.38}$$
$$\frac{d^2y^h}{dt^2}+(\partial_k\Gamma^h_{ji})y^k\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}+2\Gamma^h_{ji}\frac{dy^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=0$$

elde edilir ve Γ^h_{ji} ,∇ nin bileşenleridir. Son eşitlikten

$$\frac{d}{dt}(\frac{dy^h}{dt}+\Gamma^h_{ji}\frac{dx^j}{dt}y^i)+\Gamma^h_{ka}\frac{dx^k}{dt}(\frac{dy^a}{dt}+\Gamma^a_{ji}\frac{dx^j}{dt}y^i)$$
$$+(\partial_k\Gamma^h_{ji}-\partial_j\Gamma^h_{ki}+\Gamma^h_{ka}\Gamma^a_{ji}-\Gamma^h_{ja}\partial_k\Gamma^a_{ki})y^k\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=0$$

yazılır. Burada

$$\frac{\delta y^h}{dt}=\frac{dy^h}{dt}+\Gamma^h_{ji}\frac{dx^j}{dt}y^i$$

eşitliği kullanılırsa

$$\frac{\delta^2y^h}{dt^2}+R^h_{kji}y^k\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=0$$

ifadesi bulunur. Burada R^h_{kji}, ∇nin eğrilik tensörünün bileşenleridir. Böylece $C=\pi\tilde{C}$ üzerinde tanımlı $y^h(t)$ vektör alanı C üzerinde bir jakobyendir ve C, (2.38) den bir geodeziktir[25].

2.22. Tanım (Riemannian Manifoldu): Burulmasız afin konneksiyonlu manifold verilsin bunun üzerinde simetrik kovaryant regüler tensör verilirse bu uzaya Rieman manifoldu denir[7].

M bir Riemannian manifoldu olmak üzere, $\chi(M)$ de tanımlı $\langle,\rangle$ iç çarpım fonksiyonu , M nin her bir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger. Şöyle ki, $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere $P\in M$ için X_P, $Y_P \in T_M(P)$ dir. Diğer taraftan, $\langle X, Y\rangle \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olduğunu biliyoruz. Buna göre, $\langle X, Y\rangle(P)\in\mathbb{R}$ dir. Böylece,

$$\langle\, ,\rangle(P) : T_M(P) \text{ x } T_M(P) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\forall$ X_P, $Y_P \in T_M(P)$ için

$$\langle X_P,\, Y_P\ \rangle=\langle X,Y\ \rangle(P)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $T_M(P)$ nin elemanlarını $X(M)$ de indirgenmiş elemanlar olarak görmek mümkündür. Yani, $\forall$ $X\in\chi(M)$ için $X_P \in T_M(P)$ dir. Buna göre, $\langle,\rangle(P)$, $T_M(P)$ de bir iç çarpım fonksiyonudur[6] .

2.23. Tanım (Yarı-Riemannian manifoldu): M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası da $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\langle\, , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

fonksiyonu,
1) $2-$lineer
2) Simetrik
3) $\forall\, X \epsilon\, \chi(M)$ için $\langle X,Y \rangle = 0 \Rightarrow Y = 0 \,\epsilon\, \chi(M)$
özelliklerini sağlıyor ise, M ye Yarı-Riemannian manifoldu denir[6].

2.24. Tanım (Riemannian konneksiyonu): M bir yarı-Riemannian manifoldu ve D, M üstünde bir afin konneksiyon olsun. Eğer
1) D, C^{∞}sınıfındandır.
2) M nin bir A bölgesi üzerinde , C^{∞} olan $\forall\, X, Y \epsilon\, \chi(M)$ için,

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

dir.
3) M nin bir A bölgesi üzerinde , C^{∞} olan $\forall\, X, Y \epsilon\, \chi(M)$ ve $\forall p \epsilon A$ için,

$$X_P \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle \big|_P + \langle Y, D_X Z \rangle \big|_P$$

özellikleri sağlanıyorsa, D konneksiyonuna , M üstünde bir konneksiyonu ve D_X e de X e göre Riemannian anlamında kovaryant türev operatörü denir[6].

2.25. Tanım (1-Formlar): E^n in $P \epsilon E^n$ noktasındaki kovaryant uzayı, $T^*_{E^n}(P)$ olsun. Buna göre, bir

$$\omega : E^n \to \bigcup_{P \epsilon E^n} T^*_{E^n}(P)$$

fonksiyonu için,

$$\pi \circ \omega : E^n \to E^n \text{ (özdeşlik)}$$

olacak şekilde bir,

$$\pi : \bigcup_{P \epsilon E^n} T^*_{E^n}(P) \to E^n$$

fonksiyonu mevcut ise ω ya E^n üstünde 1-form denir[6].

∇ M_n de bir afin konneksiyonu olsun. M_n nin her $\{U, x^h\}$ koordinat komşuluğunda

$$X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

şeklindedir. Her bir $\widetilde{P} \epsilon \pi^{-1}(P)$ noktasında 2n boyutlu $X^H_{(i)}$ ve $X^V_{(i)}$lokal vektör alanları $T_p(T(M_n))$ tanjant uzayının bir bazıdır ve bileşenleri $T(M_n)$ de indirgenmiş (x^h, y^h) koordinatlara göre

$$X_{(i)}^{H}=\begin{pmatrix}\delta_i^h\\ -\Gamma_i^h\end{pmatrix},\quad X_{(i)}^{V}=\begin{pmatrix}0\\ \delta_i^h\end{pmatrix}$$

biçimindedir[6].

2.26. Tanım: $\{X_{(i)}^H, X_{(i)}^V\}$ ifadesine $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda ∇ afin konneksiyonuna göre adapte olmuş çatı denir.

Adapte olmuş çatıda $(0,2)$ tipli G tensör alanının G_{ji} lokal bileşenlerine göre ${}^{V}G$, ${}^{H}G$ ve ${}^{C}G$ liftlerinin bileşenleri

$${}^{V}G=\begin{pmatrix}G_{ji} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ {}^{C}G=\begin{pmatrix}0 & G_{ji}\\ G_{ji} & 0\end{pmatrix} \text{ ve } {}^{H}G=\begin{pmatrix}y^k\nabla_k G_{ji} & G_{ji}\\ G_{ji} & 0\end{pmatrix}$$

şeklindedir[25].

2.27. Tanım (Killing vektör alanı): Her hangi bir pseudo-Riemannian metriğine göre eğer $L_X g=0$ ise X vektör alanına Killing vektör alanı denir ve eğer $L_X g=ag$ ise X 'e konform vektör alanı denir[25]. Burada a bir fonksiyondur.

Hemen hemen F kompleks yapısına göre eğer $L_X F=0$ oluyorsa X vektör alanına hemen hemen analitik vektör alan denir[25].

2.28. Tanım (Eş-afin konneksiyonlar): Burulmasız M_n uzayında $V_1, V_2, ..., V_n$ vektörlerinin paralel taşınması durumunda $\mathcal{V}$ hacmi korunursa bu tür uzaylara eş -afin uzay denir.Bu uzayın konneksiyonuna da eş -afin konneksiyon denir[25].

2.29. Tanım(Metrik uzay): Burulmasız uzayda her bir noktadaki yönler tanjant uzayında bu yönlerin paralel taşınması şartı dahilinde korunan poloriteat verilmişse böyle uzaylara metrik uzaylar denir[25].

M_n Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla_k g_{ij}=0$ şartını sağlayan burulması olan konneksiyonlara metrik konneksiyonlar denir.

2.30. Tanım(Weyl uzayı): Farzedelim ki metrik uzay verilmiş olsun. Eğer bu g_{ij} esas tensörü regüler ise yani $Det(g_{ij})\neq 0$ ise bu tür uzaylara weyl uzayı denir[25].

$Det(g_{ij})\neq 0$ ise $\overset{\sim ij}{g}$ tersi de vardır. Bu matrislerin tersi özelliğine göre $\overset{\sim ij}{g}\, g_{ij}=\delta_k^i$ şartı verilmiş olur. Böylece weyl uzayı burulmasız uzayda esas tensörün (simetrik,regüler) verilmesi ile karakterize olunur. Weyl uzayındaki weyl konneksiyonu

$$\Gamma_{ij}^k=\left\{ {k \atop ij} \right\}_g-(w_i\delta_j^r+w_j\delta_i^r-w_k\overset{\sim rk}{g}\, g_{ij})$$

şeklindedir.Weyl uzayı aslında bir Riemannian uzayıdır sadece konneksiyonları farklıdır.

2.31. Tanım (Riemannian uzayı): Eş-afin weyl uzayına Riemannian uzayı denir[25].

Riemannian uzayı bir metrik uzaydır. M_n manifoldu üzerinde g_{ij} tensörü olsun. Bu uzayda $\nabla_k g_{ij} = 0$ şartını sağlayan burulmasız tek bir $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}_g$ konneksiyonu vardır. Bu konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir ve

$$\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}_g = \frac{1}{2}\tilde{g}^{kr}\left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ri} - \partial_r g_{ij}\right)$$

şeklinde gösterilir.

2.32. Tanım (Sabit eğrilikli Riemannian uzayı): İzotropik Riemannian uzayının tüm noktalarındaki kesit eğrilikleri aynı ise buna sabit eğrilikli Riemannian uzayı denir.

$R = R_{ij}g^{ij}$ skalarına Riemannian manifoldunda skalar eğrilik denir.

2.33. Tanım (Einstein uzayı): Riemannian uzayı $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ şartını sağlıyorsa bu tür uzaylara Einstein uzayı denir[25].

Sabit eğrilikli Riemannian uzayı Einstein uzayıdır.

2.34. Tanım(Konform dönüşüm): M_n in metrik tensörü g ve $\overline{M}_n$ nin metrik tensörü $\overline{g}$ olsun. Eğer

$$f : (M_n, g) \to (\overline{M}_n, \overline{g})$$

dönüşümünde açı korunuyorsa buna konform dönüşüm denir ve $g_{ij} = \lambda \overline{g}_{ij}$ şartı ile tanımlanır[6].

3. RIEMANNIAN MANİFOLDUNUN TANJANT DEMETİNDE METRİKLER

3.1. Metrikler

M_n,g metriği ile belirtilen bir Riemanian manifoldu olsun. g metriğinin herhangi bir U koordinat komşuluğunda bileşenleri g_{ji} olur ve Christoffel sembolleri Γ^h_{ji} ile gösterilir. Eğer $T(M_n)$ nin $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda U,M nin herhangi bir komşuluğu oluyorsa $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma^h_i dx^i$$

ifadesini yazarız. Burada

$$\Gamma^h_i = y^j \Gamma^h_{ji}$$

biçimindedir. Böylece

$$\begin{aligned} I &: g_{ji} dx^j dx^i \\ II &: 2g_{ji} dx^j \delta y^i \\ III &: g_{ji} \delta y^j \delta y^i \end{aligned}$$

şeklinde $T(M_n)$ tanjant demette global olarak tanımlanan ikinci dereceden diferensiyel formlar elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} II &: 2g_{ji} dx^j \delta y^i \\ I + II &: g_{ji} dx^j dx^i + 2g_{ji} dx^j \delta y^i \\ I + III &: g_{ji} dx^j dx^i + g_{ji} \delta y^j \delta y^i \\ II + III &: 2g_{ji} dx^j \delta y^i + g_{ji} \delta y^j \delta y^i \end{aligned}$$

diferensiyel formların hepsi singüler değildirler ve sonuç olarak $T(M_n)$ tanjant demeti üzerinde Riemannian veya pseudo-Riemannian metrikleri olarak bakılabilirler[25].

II metriği $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$$II : \begin{pmatrix} \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. $T(M_n)$ de koordinatlar $(x^i, y^{\bar{i}}=y^i)$ idi. O halde

$$\begin{aligned} II &= 2g_{ij}dx^i(dy^j + \Gamma^j_{ks}dx^k y^s) \\ &= 2g_{ij}dx^i dy^j + 2g_{ij}\Gamma^j_{ks}dx^i dx^k y^s \\ &= 2g_{ij}dx^i dy^j + g_{ij}\Gamma^j_{ks}dx^s dx^k y^s + g_{ij}\Gamma^i_{ks}dx^j dx^i y^s \end{aligned}$$

diğer yandan Riemannian metriği burulmasız olduğundan

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \Leftrightarrow \partial_k g_{ij} - \Gamma^s_{ki}g_{sj} - \Gamma^s_{kj}g_{is} = 0$$

olup

$$II : 2g_{ij}(dy^i + \Gamma^i_{ks}dx^k y^s)dx^j$$

yazılır. Buradan II metriğinin ${}^C g = {}^H g$ ile çakışır. $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre $I + II$ metriği

$$I + II = \begin{pmatrix} g_{ji} + \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Diğer yandan

$${}^V g = \begin{pmatrix} g_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^C g = \begin{pmatrix} \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

ifadelerinden dolayı $I + II$ metriğinin ${}^V g + {}^C g$ ile aynı olduğu görülür. Ayrıca $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre $I + III$ metriği

$$I + III = \begin{pmatrix} g_{ji} + g_{ts}\Gamma^t_j\Gamma^s_i & \Gamma^s_j g_{si} \\ \Gamma^s_i g_{js} & g_{ji} \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Ayrıca

$${}^D g = \begin{pmatrix} g_{ji} + g_{ts}\Gamma^t_j\Gamma^s_i & \Gamma^s_j g_{si} \\ \Gamma^s_i g_{js} & g_{ji} \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı $I + III$ metriğine g nin diagonal lifti adı verilir ve ${}^D g$ ile gösterilir.

Yine $T(M_n)$ de indirgenmiş kordinatlara göre $II + III$ metriği ,

$$II + III = \begin{pmatrix} \partial g_{ji} + g_{ts}\Gamma^t_j\Gamma^s_i & g_{ji} + \Gamma^s_j g_{is} \\ g_{ji} + \Gamma^s_i g_{js} & g_{ji} \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir.

3.2. Tanjant Demette II Metriği

M_n,lokal bileşenleri g_{ji} olan g metrikli bir Riemannian manifoldu olsun. Tanjant demette indirgenmiş (X^A) , yani (x^h, y^h) koordinatlarına göre lokal ifadesi

$$\tilde{g}_{CB}dx^C dx^B = 2g_{ji}dx^j \delta y^i$$

şeklinde olan $\tilde{g}$ Riemannian metriği verilsin. Burada

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma_i^h dx^i \quad , \quad \Gamma_i^h = y^k \Gamma_{ki}^h$$

biçimindedir. Γ_{ji}^h ifadeleri ise g_{ji} ile belirlenen Christoffel sembolleridir. Bu metriğe II metriği denir. $\tilde{g}_{CB}$ metriğinin koordinatları

$$(\tilde{g}_{CB}) = \begin{pmatrix} \partial g_{ji} & gji \\ gji & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

şeklinde olup bu ise tanjant demette g nin tam liftinin kordinatları ile aynıdır ve contravariant bileşenleri ise

$$(\tilde{g}^{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ji} \\ g^{ji} & \partial g^{ji} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada g^{ji} , M_n manifoldundaki g nin contravariant bileşenleri olup

$$g_{ji}g^{ih} = \delta_j^h$$

biçiminde yazılır. Şimdi M_n de X vektör alanını gözönüne alalım. X in $\{\partial_i\}$ cinsinden yazılışı

$$X = X^i \partial_i$$

şeklindedir. Buna göre $T(M_n)$ indirgenmiş kordinatlara göre X in dikey lifti

$$^V X = ({}'X^A) = \begin{pmatrix} o \\ X^h \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Xin tam lifti

$$^C X = (\tilde{X}^A) = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}$$

ve X in horizontal lifti

$$^H X = (\bar{X}^A) = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{sm}^i X^m \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (3.1) ve (3.2) ifadelerini kullanarak

$$\tilde{g}_{IJ}\, {}'X^I \, {}'X^J = 0$$

elde ederiz. Burada II metriğine göre $^V X$ bir sıfır vektördür.

$$\tilde{g}_{IJ}\bar{X}^{I}\bar{X}^{J} = \begin{pmatrix} y^s\partial_s g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^i \\ -y^s\Gamma^i_{sm}X^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^j \\ -y^s\Gamma^j_{sm}X^m \end{pmatrix}$$
$$= (X^i y^s\partial_s g_{ij} - g_{ij}y^s\Gamma^i_{sm}X^m \quad , \quad X^i g_{ij}) \begin{pmatrix} X^j \\ -y^s\Gamma^j_{sm}X^m \end{pmatrix}$$
$$= X^iX^jy^s\partial_s g_{ij} - g_{ij}y^s\Gamma^i_{sm}X^mX^j - g_{ij}X^iy^s\Gamma^j_{sm}X^m$$
$$= X^iX^jy^s(\partial_s g_{ij} - \Gamma^m_{si}g_{mj} - \Gamma^m_{sj}g_{im}) = 0$$

olur. Burada üçüncü satırın ikinci teriminde $m \leftrightarrow i$ ve üçüncü terimde $m \leftrightarrow j$ indisleri değiştirilmiştir ve

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^m_{ki}g_{mj} - \Gamma^m_{kj}g_{im} = 0$$

değeri kullanılmıştır. Bu da gösteriyor ki II metriğine göre X in yatay lifti ve dikey lifti sıfırdır.

Ayrıca X ve Y vektör alanlarının tam lifti ${}^CX$ ve ${}^CY$ olmak üzere

$${}^Cg\,({}^CX, {}^CY\,) = {}^C(g(X,Y))$$

idi. Buna göre

$${}^Cg({}^CX,\, {}^CY\,) = {}^Cg_{IJ}\,{}^CX^I\,{}^CY^J = y^s\partial_s(g_{ij}X^iY^j)$$

olur. Buna göre $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ tam liftlerinin iç çarpımı

$$\tilde{g}(\,\tilde{X},\tilde{Y}\,) = \partial(g_{ji}X^jY^j)$$

biçiminde verilir. Böylece $g_{ji}X^iY^j$ iç çarpımı sabit ise $y^s\partial_s(g_{ij}X^iY^j)$=0 olur. $g_{ij}X^iY^j$ nin sabit olması normunun yani $\vec{X}^2$ nin sabit olmasıdır. Bu da verilen vektörün sabit uzunluğa sahip olması demektir.

II metriğine göre $T(M_n)$ de tanımlı $\tilde{\nabla}$, Riemannian koonneksiyonun tam lifti ise ∇;

$$\tilde{\nabla}_{C_X}\,{}^CY = {}^C\nabla_{C_X}\,{}^CY = {}^C(\nabla_XY) \tag{3.3}$$

şartını sağlayan tek bir konneksiyondur. Şimdi $\tilde{\nabla}$ nın $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ Christoffel sembollerini bulalım:

$$\tilde{\nabla}_{C_X}\,{}^CY={}^C(\nabla_XY)$$

ifadesini açık şekilde yazarsak

$$\tilde{X}^I\partial_I\tilde{Y}^J + \tilde{\Gamma}^J_{IM}\,\tilde{Y}^M\,\tilde{X}^I = (\tilde{\nabla}_XY)^J$$

olur.

1) Burada $J = j$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^{I}\partial_I \tilde{Y}^{j} + \tilde{\Gamma}^{j}_{IM}\tilde{Y}^{M}\tilde{X}^{I} &= \tilde{X}^{i}\partial_i\tilde{Y}^{j} + \Gamma^{j}_{im}\tilde{Y}^{m}\tilde{X}^{i} \\
&= \tilde{X}^{i}\partial_i\tilde{Y}^{j} + \tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}\tilde{Y}^{j} + \tilde{\Gamma}^{j}_{im}\tilde{Y}^{m}\tilde{X}^{i} + \tilde{\Gamma}^{j}_{\bar{i}m}\tilde{Y}^{m}\tilde{X}^{\bar{i}} \\
&+ \tilde{\Gamma}^{j}_{\bar{i}\bar{m}}\tilde{Y}^{\bar{m}}\tilde{X}^{\bar{i}} + \tilde{\Gamma}^{j}_{i\bar{m}}\tilde{Y}^{\bar{m}}\tilde{X}^{i} \\
&= X^{i}\partial_i Y^{j} + \Gamma^{j}_{im}Y^{m}X^{i}
\end{aligned}$$

bulunur, burada $\tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}\tilde{Y}^{j} = 0$ dır. Son eşitlikten,

$$\tilde{\Gamma}^{j}_{im} = \Gamma^{j}_{im}\ ,\ \ \tilde{\Gamma}^{j}_{\bar{i}m} = \tilde{\Gamma}^{j}_{i\bar{m}} = \tilde{\Gamma}^{j}_{\bar{i}\bar{m}} = 0 \tag{3.4}$$

elde edilir.

2) $J = \bar{j}$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^{I}\partial_I \tilde{Y}^{\bar{j}} + \tilde{\Gamma}^{\bar{j}}_{IM}\tilde{Y}^{M}\tilde{X}^{I} &= \tilde{X}^{i}\partial_i\tilde{Y}^{\bar{j}} + \tilde{\Gamma}^{\bar{j}}_{im}\tilde{Y}^{m}\tilde{X}^{i} \\
&= \tilde{X}^{i}\partial_i\tilde{Y}^{\bar{j}} + \tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}\tilde{Y}^{\bar{j}} + \tilde{\Gamma}^{\bar{j}}_{im}\tilde{Y}^{m}\tilde{X}^{i} \\
&+ \tilde{\Gamma}^{\bar{j}}_{\bar{i}m}\tilde{Y}^{m}\tilde{X}^{\bar{i}} + \tilde{\Gamma}^{\bar{j}}_{\bar{i}\bar{m}}\tilde{Y}^{\bar{m}}\tilde{X}^{\bar{i}} + \tilde{\Gamma}^{\bar{j}}_{i\bar{m}}\tilde{Y}^{\bar{m}}\tilde{X}^{i} \\
&= X^{i}\partial_i Y^{\bar{j}} + \Gamma^{\bar{j}}_{im}Y^{m}X^{i}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\tilde{\Gamma}^{\bar{j}}_{im} = \partial\,\Gamma^{j}_{im}\ ,\ \ \tilde{\Gamma}^{\bar{j}}_{i\bar{m}} = \tilde{\Gamma}^{\bar{j}}_{\bar{i}m} = \Gamma^{j}_{im}\ ,\ \ \tilde{\Gamma}^{\bar{j}}_{\bar{i}\bar{m}} = 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. $X\epsilon\mathcal{T}_0^1(M_n)$ vektör alanının ${}^{V}X$ dikey lifti için

$$\tilde{\nabla}_{C_Y}{}^{V}X = {}^{C}\nabla_{C_Y}{}^{V}X = {}^{V}(\nabla_Y X)$$

olduğundan $\tilde{\nabla}_{C_Y}{}^{V}X$ konneksiyonu

$$\tilde{\nabla}_{C_Y}{}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ Y^{k}\nabla_k X^{h} \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

şeklinde $T(M_n)$de bileşenlere sahiptir. Burada $X, Y\epsilon\mathcal{T}_0^1(T(M_n))$ şeklindedir.Fibrenin teğet düzlemleri $T(M_n)$ de vertikal dağılım adı verilen bir dağılımdır. Buna göre $(*)$ ifadesinden şu teoremi verebiliriz.

3.1.Teorem: $T(M_n)$ de vertikal dağılım Levi-Civita konneksiyonuna göre paraleldir[3].

$T(M_n)$ de bir $\tilde{X}$ horizontal vektör alanı

$$\Gamma^{h}_{i}\tilde{X}^{i} + \tilde{X}^{\bar{h}} = 0$$

şartını sağlar. Şimdi $\tilde{\tilde{\nabla}}_{C_Y}\tilde{\tilde{X}}$ konneksiyonunun bileşenlerini bulalım:

$$\tilde{\tilde{\nabla}}_{C_Y}\tilde{\tilde{X}}^I = {}^C\nabla_{C_Y}\tilde{\tilde{X}}^I = {}^CY^K\tilde{\tilde{\nabla}}_K\tilde{\tilde{X}}^I = {}^CY^K(\partial_K\tilde{\tilde{X}}^I + \tilde{\tilde{\Gamma}}^I_{KJ}\tilde{\tilde{X}}^J)$$

yazılır.

1) $I = i$ için

$$(\tilde{\tilde{\nabla}}_{C_Y}\tilde{\tilde{X}})^i = \tilde{\tilde{\nabla}}_{C_Y}\tilde{\tilde{X}}^i = {}^CY^K(\partial_K\tilde{\tilde{X}}^i + \Gamma^i_{KJ}\tilde{\tilde{X}}^J)$$

$$= {}^CY^k(\partial_k\tilde{\tilde{X}}^i + \tilde{\tilde{\Gamma}}^i_{kj}\tilde{\tilde{X}}^j + \tilde{\tilde{\Gamma}}^i_{k\bar{j}}\tilde{\tilde{X}}^{\bar{j}}) + {}^CY^{\bar{k}}(\partial_{\bar{k}}\tilde{\tilde{X}}^i + \tilde{\tilde{\Gamma}}^i_{\bar{k}j}\tilde{\tilde{X}}^j + \tilde{\tilde{\Gamma}}^i_{\bar{k}\bar{j}}\tilde{\tilde{X}}^{\bar{j}})$$

olup $\partial_{\bar{k}}\tilde{\tilde{X}}^i=0$, $\tilde{\tilde{\Gamma}}^i_{\bar{k}j}=0$ ve $\tilde{\tilde{\Gamma}}^i_{\bar{k}\bar{j}} = 0$ oldukları gözönüne alınırsa

$$(\tilde{\tilde{\nabla}}_{C_Y}\tilde{\tilde{X}})^i = Y^k(\partial_k\tilde{\tilde{X}}^i + \Gamma^i_{kj}\tilde{\tilde{X}}^j)$$

bulunur. Aynı şekilde

2) $I = \bar{i}$ için

$$(\tilde{\tilde{\nabla}}_{C_Y}\tilde{\tilde{X}})^{\bar{i}} = {}^CY^k(\partial_k\tilde{\tilde{X}}^{\bar{i}} + \tilde{\tilde{\Gamma}}^{\bar{i}}_{km}\tilde{\tilde{X}}^m + \tilde{\tilde{\Gamma}}^{\bar{i}}_{k\bar{m}}\tilde{\tilde{X}}^{\bar{m}}) + {}^CY^{\bar{k}}(\partial_{\bar{k}}\tilde{\tilde{X}}^{\bar{i}} + \tilde{\tilde{\Gamma}}^{\bar{i}}_{\bar{k}m}\tilde{\tilde{X}}^m + \tilde{\tilde{\Gamma}}^{\bar{i}}_{\bar{k}\bar{m}}\tilde{\tilde{X}}^{\bar{m}})$$

$$= Y^k\left[\partial_k(-y^s\Gamma^i_{sh}\tilde{\tilde{X}}^h + y^s(\partial_s\Gamma^i_{km})\tilde{\tilde{X}}^m + \Gamma^i_{km}(-\Gamma^m_h\tilde{\tilde{X}}^h)\right]$$

$$+ y^s\partial_sY^k\left[\partial_{\bar{k}}(-y^s\Gamma^i_{sh}\tilde{\tilde{X}}^h) + \Gamma^i_{km}\tilde{\tilde{X}}^m\right]$$

$$= -Y^k\partial_k\Gamma^i_h\tilde{\tilde{X}}^h - Y^k\Gamma^i_h\partial_k\tilde{\tilde{X}}^h + Y^ky^s\partial_s\Gamma^i_{km}\tilde{\tilde{X}}^m$$

$$-Y^k\Gamma^i_{km}\Gamma^m_h\tilde{\tilde{X}}^h + y^s\partial_sY^k\left[\partial_{\bar{k}}(-y^s\Gamma^i_{sh}\tilde{\tilde{X}}^h) + \Gamma^i_{km}\tilde{\tilde{X}}^m\right]$$

$$= -Y^k\Gamma^i_h(\partial_k\tilde{\tilde{X}}^h + \Gamma^h_{km}\tilde{\tilde{X}}^m) + y^sY^k\Gamma^i_{sh}\Gamma^h_{km}\tilde{\tilde{X}}^m - Y^k\partial_k\Gamma^i_{sh}\tilde{\tilde{X}}^h y^s$$

$$+ y^s\partial_sY^k\Gamma^i_{km}\tilde{\tilde{X}}^m - Y^k\Gamma^i_{km}\Gamma^m_h\tilde{\tilde{X}}^h + y^s\partial_sY^k(-\Gamma^i_{kh}\tilde{\tilde{X}}^h) + Y^ky^s\partial_s\Gamma^i_{km}\tilde{\tilde{X}}^m$$

$$= -Y^k\Gamma^i_h(\partial_k\tilde{\tilde{X}}^h + \Gamma^h_{km}\tilde{\tilde{X}}^m) + y^sY^k\Gamma^i_{sh}\Gamma^h_{km}\tilde{\tilde{X}}^m - Y^k\partial_k\Gamma^i_{sm}\tilde{\tilde{X}}^m y^s$$

$$+ y^s\partial_sY^k\Gamma^i_{km}\tilde{\tilde{X}}^m - Y^k\Gamma^i_{kh}\Gamma^h_m\tilde{\tilde{X}}^m + y^s\partial_sY^k(-\Gamma^i_{kh}\tilde{\tilde{X}}^h) + Y^ky^s\partial_s\Gamma^i_{km}\tilde{\tilde{X}}^m$$

$$= -Y^k\Gamma^i_h(\partial_k\tilde{\tilde{X}}^h + \Gamma^h_{km}\tilde{\tilde{X}}^m) + Y^k\tilde{\tilde{X}}^m y^s(\partial_s\Gamma^i_{km} - \partial_k\Gamma^i_{sm} + \Gamma^i_{sh}\Gamma^h_{km} - \Gamma^i_{kh}\Gamma^h_{sm})$$

$$= -Y^k\Gamma^i_h(\partial_k\tilde{\tilde{X}}^h + \Gamma^h_{km}\tilde{\tilde{X}}^m) + Y^k\tilde{\tilde{X}}^m y^sK^i_{skm}$$

olur. Böylece indirgenmiş kordinatlara göre herhangi bir $Y\epsilon\mathcal{T}^1_0(M)$ için $\tilde{\tilde{\nabla}}_{C_Y}\tilde{\tilde{X}}$

bileşenleri

$$\tilde{\nabla}_{C_Y}\tilde{X}=\begin{pmatrix} Y^k(\partial_k \tilde{X}^i + \Gamma^i_{kj}\tilde{X}^j) \\ -Y^k\Gamma^i_h(\partial_k \tilde{X}^h + \Gamma^h_{km}\tilde{X}^m) + Y^k\tilde{X}^m y^s K^i_{skm} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada K^i_{skm} eğrilik tensörünün bileşenleridir.

3.2.Teorem: Yatay dağılım II metriğinin Levi-Civita konneksiyonuna göre parelel olması için gerek ve yeter şart M_n nin metriğinin lokal olarak Öklityen olmasıdır[3].

$$\tilde{g}_{CB}dx^C dx^B = 2g_{ji}dx^j\delta y^i$$

ifadesinde görüldüğü gibi $dx^h = 0$ ile temsil edilen fibre II metriğine göre $T(M_n)$de bir boş alt manifoltdur ve $\delta y^h = 0$ ile tanımlı horizontal dağılım aynı şekilde sıfırdır.

$\tilde{X},\tilde{Y}\epsilon T_\circ^1(T(M_n))$ olmak üzere $\tilde{w}(\tilde{Y}) = \tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})$ ile tanımlanan $\tilde{w}$ 1-formu $\tilde{X}$ ile birlikte kovektör alanı denir ve $\tilde{X}^*$ ile gösterilir. Eğer $\tilde{X}$ in lokal bileşenleri $\tilde{X}^A$ ise $\tilde{X}^*$ ın lokal bileşenleri

$$\tilde{X}_C = \tilde{g}_{CB}\tilde{X}^B$$

şeklinde olur.

w,M_n de w_i bileşenli 1-form olsun. Bu taktirde w nin $T(M_n)$ de dikey,tam ve yatay liftleri sırasıyla

$$({}'w_B)=(w_i,0)\,,(\tilde{w}_B) = (\partial w_i, w_i)\,,(\bar{w}_B) = (-\Gamma^h_i w_h, w_i)$$

şeklinde olur.

Bir X vektör alanının dikey ,tam ve yatay liftleri sırasıyla

$$({}'X^A) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix},\ (\tilde{X}^A) = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix},\ (\bar{X}^A) = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma^h_i X^i \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

şeklinde verilmişti. Buna göre $T(M_n)$ de II metriğine göre ${}^VX$, ${}^CX$ ve ${}^HX$ kovektör alanların bileşenleri sırasıyla

$$(X_i, 0)\,,(\partial X_i, X_i)\,,(-\Gamma^h_i X_h, X_i) \tag{3.7}$$

olur. Burada $X_i=g_{ij}X^j$, X^* kovektör alanının bileşenleridir. Buna göre diyebiliriz ki , (3.7) ifadeleri X^* nin dikey,tam ve yatay liftleridir.

3.3. Teorem : Herhangi $X\epsilon T^1_0(M_n)$ için $T(M_n)$ de II metriğine göre

$$({}^VX)^* = {}^V(X^*)\,,({}^CX)^* = {}^C(X^*)\,,\quad ({}^HX)^* = {}^H(X^*)$$

şeklindedir.

İspat:

$$X_A^* = {}^C g_{AB} X^B \quad \text{ve} \quad {}^V X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned}({}^V X)^* = \left(\left(({}^V X)^*\right)^{i}, \left(({}^V X)^*\right)^{\bar{i}}\right) &= \begin{pmatrix} y^s \partial_s g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X^j \end{pmatrix} \\ &= (g_{ij} X^j, 0)\end{aligned}$$

ve

$$X^* = (X^*)^i \partial_i \,,\ (X^*)^i = (g_{ij} X^j)$$

ifadelerinden

$${}^V(X^*) = (g_{ij} X^j \,,\ 0)$$

elde edilir. Buradan

$$({}^V X)^* = {}^V(X^*)$$

olduğu görülür. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}({}^C X)^* = \left(\left(({}^C X)^*\right)_i, \left(({}^C X)^*\right)_{\bar{i}}\right) &= \begin{pmatrix} y^s \partial_s g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^j \\ y^s \partial_s X^j \end{pmatrix} \\ &= (y^s \partial_s g_{ij} X^j + g_{ij} y^s \partial_s X^j \,, g_{ij} X^j) \\ &= (y^s \partial_s (g_{ij} X^j) \,, g_{ij} X^j)\end{aligned}$$

ve

$$(X^*)_i = (g_{ij} X^j)$$

olduğundan

$${}^C(X^*) = (y^s \partial_s (g_{ij} X^j) \,, g_{ij} X^j)$$

elde edilir. Bu ise

$$({}^C X)^* = {}^C(X^*)$$

olması demektir. Yine aynı şekilde hareketle

$$\begin{aligned}({}^H X)^* = (({}^H X)^*)_i, (({}^H X)^*)_{\bar{i}}) &= \begin{pmatrix} y^s \partial_s g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^j \\ -y^s \Gamma_{sl}^j X^l \end{pmatrix} \\ &= (y^s \partial_s g_{ij} X^j - y^s \Gamma_{sl}^j X^l g_{ij} \,, g_{ij} X^j) \\ &= (y^s X^l (\partial_s g_{il} - \Gamma_{sl}^j g_{ij}), g_{ij} X^j)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$0 = \nabla_s g_{il} = \partial_s g_{il} - \Gamma_{si}^j g_{jl} - \Gamma_{sl}^j g_{ij}$$

olduğundan

$$\partial_s g_{il} - \Gamma^j_{sl} g_{ij} = \Gamma^j_{si} g_{jl}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} ({}^H X)^* &= (y^s X^l \Gamma^j_{si} g_{jl} \, , g_{ij} X^j) \\ &= (y^s X^j \Gamma^l_{si} g_{lj} \, , g_{ij} X^j) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca ,

$$\begin{aligned} {}^H(X^*) &= {}^H(g_{ij} X^j) \\ &= (y^s X^j \Gamma^l_{si} g_{lj} \, , g_{ij} X^j) \end{aligned}$$

şeklinde olup buradan

$$({}^H X)^* = {}^H(X^*)$$

bulunur.

X , M_n de X^h bileşenlerine göre bir vektör alanı olsun.$T(M_n)$ de $\tilde{\nabla}\, {}^V X$, $\tilde{\nabla}\, {}^C X$ ve $\tilde{\nabla}$ ${}^H X$ kovaryant türevleri için indirgenmiş koordinatlara göre ;

$$(\tilde{\nabla}_B{}' X^A) = ({}^C \nabla_B{}^V X^A) = {}^V(\nabla_B X^A)$$

olduğundan

$$(\tilde{\nabla}_B{}' X^A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nabla_j X^h & 0 \end{pmatrix}$$

olur.Benzer olarak

$$(\tilde{\nabla}_B \tilde{X}^A) = ({}^C \nabla_B{}^C X^A) = {}^C(\nabla_B X^A)$$

olduğundan

$$(\tilde{\nabla}_B \tilde{X}^A) = \begin{pmatrix} \nabla_j X^h & 0 \\ \partial(\nabla_j X^h) & \nabla_j X^h \end{pmatrix}$$

yazılır.Şimdi ($\tilde{\nabla}_B \bar{X}^A$) koveryant türevi indirgenmiş koordinatlara göre yazalım:

$$\tilde{\nabla}_B{}^{\mathrm{H}} X^A = \partial_B \bar{X}^A + \tilde{\Gamma}^A_{BM} \bar{X}^M$$

bu eşitlikte $A = h, B = j$ alınırsa

$$\tilde{\nabla}_j {}^{\mathrm{H}}X^h = \partial_j \bar{X}^h + \tilde{\Gamma}^h_{jM}\bar{X}^M = \partial_j \bar{X}^h + \tilde{\Gamma}^h_{jm}\bar{X}^m + \tilde{\Gamma}^h_{j\bar{m}}\bar{X}^{\bar{m}}$$
$$= \partial_j X^h + \Gamma^h_{jm}X^m$$
$$= \nabla_j X^h,$$

$A = h$, $B = \bar{j}$ alınırsa

$$\tilde{\nabla}_{\bar{j}} {}^{\mathrm{H}}X^h = \partial_{\bar{j}} \bar{X}^h + \tilde{\Gamma}^h_{\bar{j}M}\bar{X}^M = \partial_{\bar{j}} \bar{X}^h + \tilde{\Gamma}^h_{\bar{j}m}\bar{X}^m + \tilde{\Gamma}^h_{\bar{j}\bar{m}}\bar{X}^{\bar{m}}$$
$$= 0,$$

$A = \bar{h}$, $B = \bar{j}$ alınırsa

$$\tilde{\nabla}_{\bar{j}} {}^{\mathrm{H}}X^{\bar{h}} = \partial_{\bar{j}} \bar{X}^{\bar{h}} + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}M}\bar{X}^M = \partial_{\bar{j}}(-y^s\Gamma^h_{sl}X^l) + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}m}\bar{X}^m + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{m}}\bar{X}^{\bar{m}}$$
$$= -\Gamma^h_{jl}X^l + \Gamma^h_{jm}X^m$$
$$= 0,$$

ve $A = \bar{h}$ ve $B = j$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_j {}^{\mathrm{H}}X^{\bar{h}} &= \partial_j \bar{X}^{\bar{h}} + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{jM}\bar{X}^M \\
&= \partial_j(-y^s\Gamma^h_{sl}X^l) + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{jm}\bar{X}^m + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{j\bar{m}}\bar{X}^{\bar{m}} \\
&= -y^s(\partial_j\Gamma^h_{sl})X^l - y^s\Gamma^h_{sl}(\partial_j X^l) - \Gamma^h_{jm}y^s\Gamma^m_{sl}X^l + y^s(\partial_s\Gamma^h_{jm})X^m \\
&= -y^k(\partial_j\Gamma^h_{ki})X^i - y^s\Gamma^h_{si}(\partial_j X^i) - \Gamma^h_{jm}y^k\Gamma^m_{ki}X^i + y^k(\partial_k\Gamma^h_{ji})X^i \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi

$$\begin{aligned}
&-y^s\Gamma^h_{si}\nabla_j X^i + K^h_{kji}y^kX^i = \\
&= -y^s\Gamma^h_{si}(\partial_j X^i + \Gamma^i_{jm}X^m) + y^kX^i\partial_k\Gamma^h_{ji} - y^kX^i\partial_j\Gamma^h_{ki} + y^kX^i\Gamma^h_{km}\Gamma^m_{ji} - y^kX^i\Gamma^h_{jm}\Gamma^m_{ki} \\
&= -y^s\Gamma^h_{si}\partial_j X^i - y^s\Gamma^h_{si}\Gamma^i_{jm}X^m + y^kX^i\partial_k\Gamma^h_{ji} \\
&\qquad\qquad - y^kX^i\partial_j\Gamma^h_{ki} + y^sX^m\Gamma^h_{si}\Gamma_{jm} - y^kX^i\Gamma^h_{jm}\Gamma^m_{ki} \\
&= -y^kX^i\partial_j\Gamma^h_{ki} - y^s\Gamma^h_{si}\partial_j X^i - y^kX^i\Gamma^h_{jm}\Gamma^m + y^kX^i\partial_k\Gamma^h_{ji} \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

olup (3.8) ve (3.9) ifadelerinin eşitliğinden

$$\partial_j \bar{X}^{\bar{h}} + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{jM}\bar{X}^M = -y^s\Gamma^h_{si}\nabla_j X^i + K^h_{kji}y^kX^i$$

olduğu görülür. Buna göre

$$(\tilde{\nabla}_B \overset{-A}{X}) = \begin{pmatrix} \nabla_j X^i & 0 \\ -\Gamma_i^h \nabla_j X^i + K_{kji}^h y^k X^i & 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Böylece $\nabla_j X^h = 0$ için $K_{kji}^h y^k X^i = 0$ olur.

3.4.Teorem: $T(M_n)$ de II metriğine göre M_n deki herhangi bir vektör alanının dikey, tam ve yatay liftlerinin paralel olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen vektör alanının paralel olmasıdır[3].

M_n deX^h bileşenli X vektör alanı, $Y \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ ve k sabiti için

$$\nabla_Y X = kY \quad \text{yani} \quad \nabla_j X^h = k\delta_j^h$$

şartı sağlanırsa X e concurrent diyeceğiz.

3.5.Teorem: $T(M_n)$ de II metriğine göre M_n deki bir vektör alanının tam liftinin concurrent olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen vektör alanının concurrent olmasıdır[3].

$M_n$de X^hbileşenlerine göre bir X vektör alanı alalım. X^* kovektör alanının tam ve dikey liftlerinin bileşenlere göre kovaryant türevlerini bulalım;

$$\tilde{\nabla}_A {}'X^*_B = \partial_A {}'X^*_B - \tilde{\Gamma}^M_{AB} {}'X^*_M$$

şeklindedir. Şimdi bu ifadeyi açık şekilde yazalım
$A = i$, $B = j$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_i {}'X^*_j &= \partial_i {}'X^*_j - \tilde{\Gamma}^M_{ij} {}'X^*_M \\ &= \partial_i(g_{il}X^l) - \tilde{\Gamma}^m_{ij} {}'X^*_m - \tilde{\Gamma}^{\bar{m}}_{ij} {}'X^*_{\bar{m}} \\ &= \partial_i X^*_j - \Gamma^m_{ij} X^*_m \\ &= \nabla_i X^*_j , \end{aligned}$$

$A = \bar{i}$, $B = j$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\bar{i}} {}'X^*_j &= \partial_{\bar{i}} {}'X^*_j - \tilde{\Gamma}^M_{\bar{i}j} {}'X^*_M \\ &= \partial_{\bar{i}}(g_{\bar{i}l}X^l) - \tilde{\Gamma}^m_{\bar{i}j} {}'X^*_m - \tilde{\Gamma}^{\bar{m}}_{\bar{i}j} {}'X^*_{\bar{m}} \\ &= 0 , \end{aligned}$$

$A = \bar{i}$, $B = \bar{j}$ için

$$\tilde{\nabla}_{\bar{i}}\,{}'X^{\bullet}_{\bar{j}} = \partial_{\bar{i}}\,{}'X^{\bullet}_{\bar{j}} - \tilde{\Gamma}^{M}_{\bar{i}\bar{j}}\,{}'X^{\bullet}_{M}$$
$$= \partial_{\bar{i}}\,{}'X^{\bullet}_{\bar{j}} - \tilde{\Gamma}^{m}_{\bar{i}\bar{j}}\,{}'X^{\bullet}_{m} - \tilde{\Gamma}^{\bar{m}}_{\bar{i}\bar{j}}\,{}'X^{\bullet}_{\bar{m}}$$
$$= 0\,,$$

$A = i\,,\quad B = \bar{j}$ için

$$\tilde{\nabla}_{i}\,{}'X^{\bullet}_{\bar{j}} = \partial_{i}\,{}'X^{\bullet}_{\bar{j}} - \tilde{\Gamma}^{m}_{i\bar{j}}\,{}'X^{\bullet}_{m} - \tilde{\Gamma}^{\bar{m}}_{i\bar{j}}\,{}'X^{\bullet}_{\bar{m}}$$
$$= 0$$

olur. Dolayısı ile bu matris

$$\tilde{\nabla}_{A}\,{}'X^{\bullet}_{B} = \begin{pmatrix} \nabla_i X^{\bullet}_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

şeklinde yazılır. Diğer yandan;

$$\tilde{\nabla}_{A}\,\tilde{X}^{*}_{B} = \partial_{A}\,\tilde{X}^{*}_{B} - \tilde{\Gamma}^{M}_{AB}\,\tilde{X}^{*}_{M}$$

şeklindedir. Şimdi bu ifadeyi açık şekilde yazalım.
$A = i\,, B = j$ olsun. Bu durumda,

$$\tilde{\nabla}_{i}\,\tilde{X}^{*}_{j} = \partial_{i}\,\tilde{X}^{*}_{j} - \tilde{\Gamma}^{m}_{ij}\,\tilde{X}^{*}_{m} - \tilde{\Gamma}^{\bar{m}}_{ij}\,\tilde{X}^{*}_{\bar{m}}$$
$$= \partial_i(y^s\partial_s X^{*}_{j}) - \Gamma^{m}_{ij} y^s \partial_s X^{*}_{m} - y^s\partial_s \Gamma^{m}_{ij} X^{*}{}_{m}$$
$$= y^s\partial_s\partial_i X^{*}_{j} - y^s\partial_s\,(\Gamma^{m}_{ij} X^{*}{}_{m})$$
$$= y^s\partial_s(\partial_i X^{*}_{j} - \Gamma^{m}_{ij} X^{*}{}_{m})$$
$$= y^s\partial_s(\nabla_i\,X^{*}_{j})\,,$$

$A = i\,, B = \bar{j}$ için

$$\tilde{\nabla}_{i}\,\tilde{X}^{*}_{\bar{j}} = \partial_{i}\,\tilde{X}^{*}_{\bar{j}} - \tilde{\Gamma}^{m}_{i\bar{j}}\,\tilde{X}^{*}_{m} - \tilde{\Gamma}^{\bar{m}}_{i\bar{j}}\,\tilde{X}^{*}_{\bar{m}}$$
$$= \partial_i X^{*}_{j} - \Gamma^{m}_{ij} X^{*}{}_{m}$$
$$= \nabla_i\,X^{*}_{j}\,,$$

$A = \bar{i}\,, B = j$ ise

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\bar{i}} \tilde{X}^*_j &= \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^*_j - \tilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^{m} \tilde{X}^*_m - \tilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^{\bar{m}} \tilde{X}^*_{\bar{m}} \\
&= \partial_{\bar{i}} (y^s \partial_s X^*_j) - \Gamma_{ij}^m X^*_m \\
&= \partial_i X^*_j - \Gamma_{ij}^m X^*_m \\
&= \nabla_i X^*_j ,
\end{aligned}$$

$A = \bar{i}$, $B = \bar{j}$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\bar{i}} \tilde{X}^*_{\bar{j}} &= \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^*_{\bar{j}} - \tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{m} \tilde{X}^*_m - \tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{m}} \tilde{X}^*_{\bar{m}} \\
&= \partial_{\bar{i}} X^*_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Dolayısı ile bu matris

$$\tilde{\nabla}_A \tilde{X}^*_B = \begin{pmatrix} y^s \partial_s (\nabla_i X^*_j) & \nabla_i X^*_j \\ \nabla_i X^*_j & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

şeklinde yazılır. Burada $X^*_i = g_{ih} X^h$ şeklindedir.(4.10) ve (4.11) matrislerine göre

$$\tilde{\nabla}_A {}' X^{\bullet}_B + \tilde{\nabla}_B {}' X^{\bullet}_A = \begin{pmatrix} \nabla_i X_j{}^* + \nabla_j X_i{}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\nabla}_A \tilde{X}^*_B + \tilde{\nabla}_B \tilde{X}^*_A = \begin{pmatrix} y^s \partial_s (\nabla_i X^*_j + \nabla_j X_i{}^*) & \nabla_i X^*_j + \nabla_j X_i{}^* \\ \nabla_i X^*_j + \nabla_j X_i{}^* & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

3.6.Teorem: $T(M_n)$ de II metriğine göre M_n deki bir vektör alanının tam ve dikey liftinin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $M_n$de verilen vektör alanının Killing vektör alanı olmasıdır[3].

(3.10) ifadesinden

$$\tilde{\nabla}_A {}' X^{\bullet}_B - \tilde{\nabla}_B {}' X^{\bullet}_A = \begin{pmatrix} \nabla_i X_j{}^* - \nabla_j X_i{}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Ayrıca

$$(\tilde{g}^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ji} \\ g^{ji} & \partial g^{ji} \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{AB}\tilde{\nabla}_A{}'X^{\bullet}_B &= \tilde{g}^{ij}\tilde{\nabla}_i{}'X^{\bullet}_j + \tilde{g}^{\bar{i}j}\tilde{\nabla}_{\bar{i}}{}'X^{\bullet}_j + \tilde{g}^{i\bar{j}}\tilde{\nabla}_i{}'X^{\bullet}_{\bar{j}} + \tilde{g}^{\bar{i}\bar{j}}\tilde{\nabla}_{\bar{i}}{}'X^{\bullet}_{\bar{j}}\\ &= \tilde{g}^{AB}\tilde{\nabla}_A{}'X^{\bullet}_B\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. (3.11) ifadesinden

$$\tilde{\nabla}_A\tilde{X}^{*}_B + \tilde{\nabla}_B\tilde{X}^{*}_A = \begin{pmatrix} y^s\partial_s(\nabla_i X^{*}_j - \nabla_j X_i^{*}) & \nabla_i X^{*}_j - \nabla_j X_i^{*} \\ \nabla_i X^{*}_j - \nabla_j X_i^{*} & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{AB}\tilde{\nabla}_A\tilde{X}^{*}_B &= \tilde{g}^{ij}\tilde{\nabla}_i\tilde{X}^{*}_j + \tilde{g}^{\bar{i}j}\tilde{\nabla}_{\bar{i}}\tilde{X}^{*}_j + \tilde{g}^{i\bar{j}}\tilde{\nabla}_i\tilde{X}^{*}_{\bar{j}} + \tilde{g}^{\bar{i}\bar{j}}\tilde{\nabla}_{\bar{i}}\tilde{X}^{*}_{\bar{j}} \qquad (3.12)\\ &= g^{ij}\nabla_i X^{*}_j + g^{ij}\nabla_i X^{*}_j\\ &= 2g^{ij}\nabla_i X^{*}_j\end{aligned}$$

elde edilir.

3.7.Teorem: $T(M_n)$ de II metriğine göre M_n deki bir vektör alanının dikey liftinin harmonik olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen vektör alanının kapalı olmasıdır[3].

3.8.Teorem: $T(M_n)$ de II metriğine göre M_n deki bir vektör alanının tam liftinin harmonik olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen vektör alanının harmonik olmasıdır[3].

(3.4) ve (3.5) eşitliklerini kullanarak $T(M_n)$ deki II metriğine göre $\tilde{K}$ eğrilik tensörünün bileşenlerini indirgenmiş koordinatlara göre hesaplayalım ;

$$K^h_{kji} = \partial_k\Gamma^h_{ji} - \partial_j\Gamma^h_{ki} + \Gamma^h_{kt}\Gamma^t_{ji} - \Gamma^h_{jt}\Gamma^t_{ki}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\tilde{K}^h_{kji} &= \partial_k\tilde{\Gamma}^h_{ji} - \partial_j\tilde{\Gamma}^h_{ki} + \tilde{\Gamma}^h_{kt}\tilde{\Gamma}^t_{ji} - \tilde{\Gamma}^h_{jt}\tilde{\Gamma}^t_{ki} + \tilde{\Gamma}^h_{k\bar{t}}\tilde{\Gamma}^{\bar{t}}_{ji} - \tilde{\Gamma}^h_{j\bar{t}}\tilde{\Gamma}^{\bar{t}}_{ki}\\ &= \partial_k\Gamma^h_{ji} - \partial_j\Gamma^h_{ki} + \Gamma^h_{kt}\Gamma^t_{ji} - \Gamma^h_{jt}\Gamma^t_{ki}\\ &= K^h_{kji}\ ,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}{}^{\bar h}_{kji} &= \partial_k \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{ji} - \partial_j \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{ki} + \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{kt}\tilde\Gamma{}^{t}_{ji} - \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{jt}\tilde\Gamma{}^{t}_{ki} + \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{k\bar t}\tilde\Gamma{}^{\bar t}_{ji} - \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{j\bar t}\tilde\Gamma{}^{\bar t}_{ki} \\
&= \partial_k \partial\Gamma^{h}_{ji} - \partial_j \partial\Gamma^{h}_{ki} + \partial\Gamma^{h}_{kt}\Gamma^{t}_{ji} - \partial\Gamma^{h}_{jt}\Gamma^{t}_{ki} + \Gamma^{h}_{kt}\partial\Gamma^{t}_{ji} - \Gamma^{h}_{jt}\partial\Gamma^{t}_{ki} \\
&= \partial\, K^{h}_{kji}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}{}^{\bar h}_{kj\bar i} &= \partial_k \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{j\bar i} - \partial_j \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{k\bar i} + \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{kt}\tilde\Gamma{}^{t}_{j\bar i} - \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{jt}\tilde\Gamma{}^{t}_{k\bar i} + \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{k\bar t}\tilde\Gamma{}^{\bar t}_{j\bar i} - \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{j\bar t}\tilde\Gamma{}^{\bar t}_{k\bar i} \\
&= \partial_k \Gamma^{h}_{ji} - \partial_j \Gamma^{h}_{ki} + \Gamma^{h}_{kt}\Gamma^{t}_{ji} - \Gamma^{h}_{jt}\Gamma^{t}_{ki} \\
&= K^{h}_{kji}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}{}^{\bar h}_{k\bar j i} &= \partial_k \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{\bar j i} - \partial_{\bar j} \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{ki} + \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{kt}\tilde\Gamma{}^{t}_{\bar j i} - \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{\bar j t}\tilde\Gamma{}^{t}_{ki} + \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{k\bar t}\tilde\Gamma{}^{\bar t}_{\bar j i} - \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{\bar j\bar t}\tilde\Gamma{}^{\bar t}_{ki} \\
&= \partial_k \Gamma^{h}_{ji} - \partial_j \Gamma^{h}_{ki} + \Gamma^{h}_{kt}\Gamma^{t}_{ji} - \Gamma^{h}_{jt}\Gamma^{t}_{ki} \\
&= K^{h}_{kji}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}{}^{\bar h}_{\bar k ji} &= \partial_{\bar k} \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{ji} - \partial_j \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{\bar k i} + \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{\bar k t}\tilde\Gamma{}^{t}_{ji} - \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{jt}\tilde\Gamma{}^{t}_{\bar k i} + \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{\bar k\bar t}\tilde\Gamma{}^{\bar t}_{ji} - \tilde\Gamma{}^{\bar h}_{j\bar t}\tilde\Gamma{}^{\bar t}_{\bar k i} \\
&= \partial_k \Gamma^{h}_{ji} - \partial_j \Gamma^{h}_{ki} + \Gamma^{h}_{kt}\Gamma^{t}_{ji} - \Gamma^{h}_{jt}\Gamma^{t}_{ki} \\
&= K^{h}_{kji}
\end{aligned}
$$

olur. Aynı şekilde

$$
\tilde{K}{}^{\bar h}_{\bar k\bar j i} = 0\,,\ \tilde{K}{}^{\bar h}_{\bar k j\bar i} = 0\,,\ \tilde{K}{}^{\bar h}_{k\bar j\bar i} = 0\ ,\ \tilde{K}{}^{\bar h}_{\bar k\bar j\bar i} = 0
$$

olarak bulunur.

Şimdi II metriğine göre $T(M_n)$ nin $\tilde{K}{}^{A}_{DCB}$ eğrilik tensörünün $\tilde\nabla_E\, \tilde{K}{}^{A}_{DCB}$ kovaryant türevini indirgenmiş koordinatlara göre hesaplayalım ;

$$
\nabla_E\, K^{A}_{DCB} = \partial_E K^{A}_{DCB} + \Gamma^{A}_{EM} K^{M}_{DCB} - \Gamma^{M}_{ED} K^{A}_{MCB} - \Gamma^{M}_{EC} K^{A}_{DMB} - \Gamma^{M}_{EB} K^{A}_{DCM}
$$

ifadesini kullanarak

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_l\, K^{\sim h}_{kji} &= \partial_l K^{\sim h}_{kji} + \Gamma^{\sim h}_{lm} K^{\sim m}_{kji} + \Gamma^{\sim h}_{l\bar{m}} K^{\sim \bar{m}}_{kji} - \Gamma^{\sim m}_{lk} K^{\sim h}_{mji} \\
&\qquad - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{lk} K^{\sim h}_{\bar{m}ji} - \Gamma^{\sim m}_{lj} K^{\sim h}_{kmi} - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{lj} K^{\sim h}_{k\bar{m}i} - \Gamma^{\sim m}_{li} K^{\sim h}_{kjm} - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{li} K^{\sim h}_{kj\bar{m}} \\
&= \partial_l K^{h}_{kji} + \Gamma^{h}_{lm} K^{m}_{kji} - \Gamma^{m}_{lk} K^{h}_{mji} - \Gamma^{m}_{lj} K^{h}_{kmi} - \Gamma^{m}_{li} K^{h}_{kjm} \\
&= \nabla_l\, K^{h}_{kji}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_l\, K^{\sim \bar{h}}_{kji} &= \partial_l K^{\sim \bar{h}}_{kji} + \Gamma^{\sim \bar{h}}_{lm} K^{\sim m}_{kji} + \Gamma^{\sim \bar{h}}_{l\bar{m}} K^{\sim \bar{m}}_{kji} - \Gamma^{\sim m}_{lk} K^{\sim \bar{h}}_{mji} \\
&\qquad - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{lk} K^{\sim \bar{h}}_{\bar{m}ji} - \Gamma^{\sim m}_{lj} K^{\sim \bar{h}}_{kmi} - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{lj} K^{\sim \bar{h}}_{k\bar{m}i} - \Gamma^{\sim m}_{li} K^{\sim \bar{h}}_{kjm} - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{li} K^{\sim \bar{h}}_{kj\bar{m}} \\
&= \partial_l \partial K^{h}_{kji} + \partial\Gamma^{h}_{lm} K^{m}_{kji} + \Gamma^{h}_{lm} \partial K^{m}_{kji} - \Gamma^{m}_{lk} \partial K^{h}_{mji} - \partial\Gamma^{m}_{lk} K^{h}_{mji} \\
&\qquad - \Gamma^{m}_{lj} \partial K^{h}_{kmi} - \partial\Gamma^{m}_{lj}\, K^{h}_{kmi} - \Gamma^{m}_{li} \partial K^{h}_{kjm} - \partial\Gamma^{m}_{li}\, K^{h}_{kjm} \\
&= \partial(\nabla_l\, K^{h}_{kji})\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_l\, K^{\sim \bar{h}}_{kj\bar{i}} &= \partial_l K^{\sim \bar{h}}_{kj\bar{i}} + \Gamma^{\sim \bar{h}}_{lm} K^{\sim m}_{kj\bar{i}} + \Gamma^{\sim \bar{h}}_{l\bar{m}} K^{\sim \bar{m}}_{kj\bar{i}} - \Gamma^{\sim m}_{lk} K^{\sim \bar{h}}_{mj\bar{i}} \\
&\qquad - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{lk} K^{\sim \bar{h}}_{\bar{m}j\bar{i}} - \Gamma^{\sim m}_{lj} K^{\sim \bar{h}}_{km\bar{i}} - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{lj} K^{\sim \bar{h}}_{k\bar{m}\bar{i}} - \Gamma^{\sim m}_{l\bar{i}} K^{\sim \bar{h}}_{kjm} - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{l\bar{i}} K^{\sim \bar{h}}_{kj\bar{m}} \\
&= \partial_l K^{h}_{kji} + \Gamma^{h}_{lm} K^{m}_{kji} - \Gamma^{m}_{lk} K^{h}_{mji} - \Gamma^{m}_{lj} K^{h}_{kmi} - \Gamma^{m}_{li} K^{h}_{kjm} \\
&= \nabla_l\, K^{h}_{kji}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_l\, K^{\sim \bar{h}}_{k\bar{j}i} &= \partial_l K^{\sim \bar{h}}_{k\bar{j}i} + \Gamma^{\sim \bar{h}}_{lm} K^{\sim m}_{k\bar{j}i} + \Gamma^{\sim \bar{h}}_{l\bar{m}} K^{\sim \bar{m}}_{k\bar{j}i} - \Gamma^{\sim m}_{lk} K^{\sim \bar{h}}_{m\bar{j}i} \\
&\qquad - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{lk} K^{\sim \bar{h}}_{\bar{m}\bar{j}i} - \Gamma^{\sim m}_{l\bar{j}} K^{\sim \bar{h}}_{kmi} - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{l\bar{j}} K^{\sim \bar{h}}_{k\bar{m}i} - \Gamma^{\sim m}_{li} K^{\sim \bar{h}}_{k\bar{j}m} - \Gamma^{\sim \bar{m}}_{li} K^{\sim \bar{h}}_{k\bar{j}\bar{m}} \\
&= \partial_l K^{h}_{kji} + \Gamma^{h}_{lm} K^{m}_{kji} - \Gamma^{m}_{lk} K^{h}_{mji} - \Gamma^{m}_{lj} K^{h}_{kmi} - \Gamma^{m}_{li} K^{h}_{kjm} \\
&= \nabla_l\, K^{h}_{kji}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_l\, \tilde{K}^{\bar h}_{\bar k ji} &= \partial_l \tilde{K}^{\bar h}_{\bar k ji} + \tilde{\Gamma}^{\bar h}_{lm} \tilde{K}^{m}_{\bar k ji} + \tilde{\Gamma}^{\bar h}_{l\bar m} \tilde{K}^{\bar m}_{\bar k ji} - \tilde{\Gamma}^{m}_{l\bar k} \tilde{K}^{\bar h}_{mji} - \tilde{\Gamma}^{\bar m}_{l\bar k} \tilde{K}^{\bar h}_{\bar m ji} \\
&\quad - \tilde{\Gamma}^{m}_{lj}\, \tilde{K}^{\bar h}_{\bar k mi} - \tilde{\Gamma}^{\bar m}_{lj}\, \tilde{K}^{\bar h}_{\bar k \bar m i} - \tilde{\Gamma}^{m}_{li}\, \tilde{K}^{\bar h}_{\bar k jm} - \tilde{\Gamma}^{\bar m}_{li}\, \tilde{K}^{\bar h}_{\bar k j\bar m} \\
&= \partial_l K^{h}_{kji} + \Gamma^{h}_{lm} K^{m}_{kji} - \Gamma^{m}_{lk} K^{h}_{mji} - \Gamma^{m}_{lj} K^{h}_{kmi} - \Gamma^{m}_{li} K^{h}_{kjm} \\
&= \nabla_l\, K^{h}_{kji}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\bar l}\, \tilde{K}^{\bar h}_{kji} &= \partial_{\bar l} \tilde{K}^{\bar h}_{kji} + \tilde{\Gamma}^{\bar h}_{\bar l m} \tilde{K}^{m}_{kji} + \tilde{\Gamma}^{\bar h}_{\bar l \bar m} \tilde{K}^{\bar m}_{kji} - \tilde{\Gamma}^{m}_{\bar l k} \tilde{K}^{\bar h}_{mji} - \tilde{\Gamma}^{\bar m}_{\bar l k} \tilde{K}^{\bar h}_{\bar m ji} \\
&\quad - \tilde{\Gamma}^{m}_{\bar l j} \tilde{K}^{\bar h}_{kmi} - \tilde{\Gamma}^{\bar m}_{\bar l j}\, \tilde{K}^{\bar h}_{k\bar m i} - \tilde{\Gamma}^{m}_{\bar l i} \tilde{K}^{\bar h}_{kjm} - \tilde{\Gamma}^{\bar m}_{\bar l i} \tilde{K}^{\bar h}_{kj\bar m} \\
&= \partial_l K^{h}_{kji} + \Gamma^{h}_{lm} K^{m}_{kji} - \Gamma^{m}_{lk} K^{h}_{mji} - \Gamma^{m}_{lj} K^{h}_{kmi} - \Gamma^{m}_{li} K^{h}_{kjm} \\
&= \nabla_l\, K^{h}_{kji}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\tilde{\nabla}_l\, \tilde{K}^{\bar h}_{kj\bar i} = \tilde{\nabla}_l\, \tilde{K}^{\bar h}_{k\bar j i} = \tilde{\nabla}_l\, \tilde{K}^{\bar h}_{\bar k ji} = \tilde{\nabla}_{\bar l}\, \tilde{K}^{\bar h}_{kji} = \nabla_l\, K^{h}_{kji}
$$

olduğu görülür. Aynı şekilde hareketle diğer bileşenler sıfır bulunur.

$\tilde{K}^{A}_{DCB}$ eğrilik tensörünün yüksek mertebeden kovaryant türevleri indirgenmiş koordinatlara göre ;

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{l_{r\ldots}} \tilde{\nabla}_{l_1} \tilde{K}^{h}_{kji} = \nabla_{l_{r\ldots}} \nabla_{l_1} K^{h}_{kji}\,, \\
&\tilde{\nabla}_{l_{r\ldots}} \tilde{\nabla}_{l_1} \tilde{K}^{\bar h}_{kji} = \partial(\, \nabla_{l_{r\ldots}} \nabla_{l_1} K^{h}_{kji})\,, \\
&\tilde{\nabla}_{l_{r\ldots}} \tilde{\nabla}_{l_1} \tilde{K}^{h}_{kj\bar i} = \tilde{\nabla}_{l_{r\ldots}} \tilde{\nabla}_{l_1} \tilde{K}^{\bar h}_{k\bar j i} = \tilde{\nabla}_{l_{r\ldots}} \tilde{\nabla}_{l_1} \tilde{K}^{h}_{\bar k ji} \\
&\quad = \tilde{\nabla}_{l_{r\ldots}} \tilde{\nabla}_{\bar l_1} \tilde{K}^{\bar h}_{kji} = = \tilde{\nabla}_{\bar l_{r\ldots}} \tilde{\nabla}_{l_1} \tilde{K}^{\bar h}_{kji} = \nabla_{l_{r\ldots}} \nabla_{l_1} K^{h}_{kji}
\end{aligned}
$$

şeklinde olup diğer bileşenler sıfırdır.

3.9.Teorem: II metriğine göre $T(M_n)$ de $\tilde{K}$ eğrilik tensörünün r. kovaryant türevinin sıfır olması için gerek ve yeter şart M_n de K eğrilik tensörünün r. kovaryant türevinin sıfır olmasıdır[13].

3.10.Teorem: II metriğine göre $T(\mathrm{M_n})$ tanjant demetinin basit harmonik olması için gerek ve yeter şart M_n nın basit harmonik olmasıdır.

3.3. Tanjant Demette I+II Metriği

Metriği g olan M_n Riemannian manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tanjant demetindeki Riemannian metriği

$$\tilde{g}_{CB}dx^C dx^B = g_{ji}dx^j dx^i + 2g_{ji}dx^j \delta y^i \tag{3.13}$$

biçiminde verilsin. Bu metriğe $I+II$ metriği adı verilir. (X^A) indirgenmiş koordinatlara göre $I+II$ metriği

$$(\ \tilde{g}_{CB}\ ) = \begin{pmatrix} g_{ji} + y^s \partial_s g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

bileşenlere sahiptir. Şimdi $\tilde{g}^{AB}$ metriğinin bileşenlerini (X^A), yani (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre bulalım :

$$g_{AM}\ \tilde{g}^{MB} = \delta_A^B$$

tensörünü açık şekilde yazalım. $j = 1, ...n$ $\bar{i} = n+1, ...2n$

$$\begin{aligned} &1)\ \ g_{im}\tilde{g}^{mj} + g_{i\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}j} = \delta_i^j \\ &2)\ \ g_{\bar{i}m}\tilde{g}^{mj} + g_{\bar{i}\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}j} = \delta_{\bar{i}}^j = 0 \\ &3)\ \ g_{im}\tilde{g}^{m\bar{j}} + g_{i\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = \delta_i^{\bar{j}} = 0 \\ &4)\ \ g_{\bar{i}m}\tilde{g}^{m\bar{j}} + g_{\bar{i}\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = \delta_{\bar{i}}^{\bar{j}} = \delta_i^j \end{aligned} \tag{3.14}$$

sistemi elde ederiz. Bu sistemin ikinci eşitliğinden $g_{\bar{i}m} = g_{im}$ ve $g_{\bar{i}\bar{m}}=0$ olduğundan $g_{im}\tilde{g}^{mj} = 0$ olur. Bu ifadenin her iki tarafı g^{ik} ile çarpılırsa,

$$g^{ik}g_{im}\tilde{g}^{mj} = 0 \Rightarrow \delta_m^k \tilde{g}^{mj} = 0 \Rightarrow \tilde{g}^{kj} = 0 \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15) ifadesini (3.14) ün 1. denkleminde kullanırsak

$$g_{i\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}j} = \delta^{j}$$
$$g_{im}\tilde{g}^{\bar{m}j} = \delta_i^j$$

elde ederiz. Bu ifadenin de her iki tarafını g^{ik} ile çarpalım

$$\delta_m^k \tilde{g}^{\bar{m}j} = g^{jk} \Rightarrow \tilde{g}^{\bar{k}j} = g^{jk} \tag{3.16}$$

olur. (3.14) Sisteminin 4. denkleminden

$$g_{im}\tilde{g}^{m\bar{j}} + g_{\bar{i}\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = \delta_i^j$$

olur. Ayrıca $g_{\bar{i}\bar{m}} = 0$ olduğundan

$$g_{im}\tilde{g}^{m\bar{j}} = \delta_i^j$$

$$\tilde{g}^{m\bar{j}} = g^{mj}$$

elde edilir. Sistemin 3) denkleminden

$$g_{im}\tilde{g}^{m\bar{j}} + g_{i\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = 0$$

$$(y^s\partial_s g_{im} + g_{im})\tilde{g}^{m\bar{j}} + g_{im}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = 0$$

$$(y^s\partial_s g_{im})g^{mj} + g_{im}g^{mj} + g_{im}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = 0$$

$$(y^s\partial_s g_{im})g^{mj} + \delta_i^j + g_{im}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = 0 \tag{3.17}$$

olur. Ayrıca

$$g^{mj}g_{im} = 0$$

$$(y^s\partial_s g^{mj})g_{mi} = -g^{mj}(y^s\partial_s g_{mi})$$

olduğunu (3.17) eşitliğinde kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
-(y^s\partial_s g^{mj})g_{mi} + \quad \delta_i^j + g_{im}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} &= 0 \\
-(y^s\partial_s g^{mj})\,\delta_m^k + g^{jk} + \delta_m^k \tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} &= 0 \\
\tilde{g}^{\bar{k}\bar{j}} &= y^s\partial_s g^{kj} - g^{kj}
\end{aligned}
$$

olur. O halde bu matris

$$
\tilde{g}^{BA} = \begin{pmatrix} 0 & g^{ji} \\ g^{ji} & -g^{ji} + y^s\partial_s g^{ji} \end{pmatrix}
$$

şeklindedir. $dx^h = 0$ ile belirtilen fibrenin $I + II$ metriğine göre $T(M_n)$ deki alt manifoldu sıfırdır. Fakat $y^h = 0$ ile belirtilen yatay dağılım sıfır değildir. $I + II$ metriğine göre $T(M_n)$ deki X ve Y vektör alanlarının ${}^CX$, ${}^CY$ tam liftlerinin çarpımı

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_{CB}\, {}^C\tilde{X}\, {}^C\tilde{Y} &= \tilde{g}_{ij}\tilde{X}^i\tilde{Y}^j + \tilde{g}_{\bar{i}j}\tilde{X}^{\bar{i}}\tilde{Y}^j + \tilde{g}_{i\bar{j}}\tilde{X}^i\tilde{Y}^{\bar{j}} + \tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}}\tilde{X}^{\bar{i}}\tilde{Y}^{\bar{j}} \\
&= (g_{ij} + \partial g_{ij})\, X^iY^j + g_{ij}\,\partial X^iY^j + g_{ij}X^i\partial Y^j \\
&= g_{ij}X^iY^j + \partial g_{ij}\, X^iY^j + g_{ij}\,\partial X^iY^j + g_{ij}X^i\partial Y^j \\
&= \ g_{ij}X^iY^j + \partial(g_{ij}\, X^iY^j)
\end{aligned}
$$

olur. Burada X^h , Y^h M_n de X ve Y nin lokal bileşenleri. $\tilde{X}^B$ ve $\tilde{Y}^B$ ise ${}^CX$ ve ${}^CY$ tam liftlerin bileşenleridir. Böylece , $I + II$ metriğine göre $T(M_n)$ deki bir vektör alanının tam liftinin birim vektör olması için gerek ve yeter şart M_n de birim vektör olmasıdır. $T(M_n)$ deki iki vektör alanının ortagonal olması için gerek ve yeter şart M_n de iki vektör alanının ortagonal olmasıdır.

Diğer yandan $X \epsilon \mathcal{T}_0^1(M_n)$ için

$$
{}^C\nabla_{{}^CX}\, {}^Vg = {}^V(\nabla_X g) = 0 \ , \ {}^C\nabla_{{}^CY}\, {}^Cg = {}^C(\nabla_X g) = 0 \text{ ve } \nabla_X g = 0
$$

olduğundan

$$
{}^C\nabla_{{}^CX}\,({}^Vg + {}^Cg) = 0
$$

elde edilir. Böylece $I + II$ metriği ,yani ${}^Vg + {}^Cg$ metriği g nin ∇ Levi-civita konneksiyonunun ${}^C\nabla$ tam liftine göre sabittir. Diğer yandan ${}^C\nabla$ burulmasızdır.

3.11.Teorem: II metriğinin ve $I + II$ metriğinin Levi-Civita konneksiyonları aynıdır.

Şimdi,(M_n) de X^h lokal bileşenlerine göre X vektör alanının dikey tam ve yatay liftlerini düşünelim ve $I+II$ metriğine göre X^* kovektör alanının bileşenlerini hesaplayalım. Buna göre,

$$'X^A = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}$$

$$'X_C = \tilde{g}_{CB} X^B$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} 'X_i &= \tilde{g}_{ij}\, 'X^j + \tilde{g}_{i\bar{j}}\, 'X^{\bar{j}} \\ &= \tilde{g}_{i\bar{j}}\, 'X^j \\ &= g_{ij}\, X^j \\ &= X_i \end{aligned}$$

ve

$$'X_{\bar{i}} = \tilde{g}_{\bar{i}j}\, 'X^j + \tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}}\, 'X^{\bar{j}} = 0$$

bulunur. Buna göre

$$'X_B = (X_i\,,\, 0)$$

yazılır. Diğer yandan

$$\tilde{X}^B = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i = \tilde{g}_{ij} \tilde{X}^j + \tilde{g}_{i\bar{j}} \tilde{X}^{\bar{j}} &= (g_{ij} + \partial g_{ij}) X^j + g_{ij}(\partial X^j) \\ &= g_{ij} X^j + \partial g_{ij} X^j + g_{ij}(\partial X^j) = X_i + \partial X_i \end{aligned}$$

ve

$$\tilde{X}_{\bar{i}} = \tilde{g}_{\bar{i}j} \tilde{X}^j + \tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}} \tilde{X}^{\bar{j}} = g_{ij} X^j = X_i$$

elde edilir. Buradan

$$(\tilde{X}_i) = (X_i + \partial X_i\,, X_i) = (X_i, 0) + (\partial X_i, X_i)$$

yazılır. Ayrıca

$$\bar{X}^{B} = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\bar{X}_i &= \tilde{g}_{ij}\bar{X}^j + \tilde{g}_{i\bar{j}}\bar{X}^{\bar{j}} \\
&= (g_{ij} + \partial g_{ij})X^j + g_{ij}(-\Gamma_s^j X^s) \\
&= g_{ij}X^j + X^j \partial g_{ij} + g_{ij}(-\Gamma_s^j X^s) \\
&= X_i + X^j(\Gamma_i^h g_{hj} + \Gamma_j^h g_{ih}) + g_{ij}(-\Gamma_s^j X^s) \\
&= X_i + g_{hj}X^j\Gamma_i^h + g_{ih}X^j\Gamma_j^h - g_{ij}X^s\Gamma_s^j \\
&= X_i + g_{hj}X^j\Gamma_i^h + g_{ij}X^h\Gamma_h^j - g_{ij}X^s\Gamma_s^j \\
&= X_i + \Gamma_i^h X_h
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{\bar{i}} &= \tilde{g}_{\bar{i}j}\bar{X}^j + \tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}}\bar{X}^{\bar{j}} \\
&= g_{ij}X^j \\
&= X_i
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$(\bar{X}_B) = (X_i + \Gamma_i^h X_h, X_i) = (X_i, 0) + (\Gamma_i^h X_h, X_i)$$

elde edilir. Burada $X_i = g_{ij}X^j$, X^* vektör alanının lokal bileşenleri X^h da X vektör alanının lokal bileşenleridir.

3.12.Teorem: Herhangi bir $X \epsilon \mathcal{T}_0^1(M_n)$ için $I + II$ metriğine göre

$${}^V(X^*) = ({}^V X)^* \;,\; ({}^C X)^* = {}^V(X^*) + {}^C(X^*) \;,\; ({}^H X)^* = {}^V(X^*) + {}^H(X^*)$$

olur.

İspat:

$${}^V(X^*) = {}^V(g_{ij}X^j) = (g_{ij}X^j, 0)\,, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
({}^V X)^* &= \begin{pmatrix} 0 \\ X^j \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} g_{ij} + y^s\partial_s g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ X^j \end{pmatrix} \\
&= (g_{ij}X^j, 0)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

şeklindedir. (3.18) ve (3.19) ifadelerinden

$${}^V(X^*) = ({}^V X)^*$$

olduğu görülür. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
({}^{C}X)^{*} &= \begin{pmatrix} X^{j} \\ y^{s}\partial_{s}X^{j} \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} g_{ij}+y^{s}\partial_{s}g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^{j} \\ y^{s}\partial_{s}X^{j} \end{pmatrix} \\
&= (\, y^{s}\partial_{s}g_{ij}X^{j} + g_{ij}X^{j} + g_{ij}\,y^{s}\partial_{s}X^{j}, g_{ij}X^{j}) \\
&= (g_{ij}X^{j}, 0) + (\, y^{s}\partial_{s}(g_{ij}X^{j}), g_{ij}X^{j}) \\
({}^{C}X)^{*} &= {}^{V}(X^{*}) + {}^{C}(X^{*})
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
({}^{H}X)^{*} &= \begin{pmatrix} X^{j} \\ -\,y^{s}\Gamma^{j}_{sm}X^{m} \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} g_{ij}+y^{s}\partial_{s}g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^{j} \\ -\,y^{s}\Gamma^{j}_{sm}X^{m} \end{pmatrix} \\
&= (\, y^{s}\partial_{s}g_{ij}X^{j} + g_{ij}X^{j} - y^{s}\Gamma^{j}_{sm}X^{m}g_{ij},\; g_{ij}X^{j}) \\
&= (\, y^{s}\partial_{s}g_{ij}X^{j} + g_{ij}X^{j} - y^{s}\Gamma^{m}_{sj}X^{j}g_{im},\; g_{ij}X^{j}) \\
&= (g_{ij}X^{j}, 0) + (\, y^{s}X^{j}(\partial_{s}g_{ij} - \Gamma^{m}_{sj}g_{im}), g_{ij}X^{j}) \\
&= (g_{ij}X^{j}, 0) + (\, y^{s}X^{j}\Gamma^{m}_{si}g_{mj}, g_{ij}X^{j}) \\
({}^{H}X)^{*} &= {}^{V}(X^{*}) + {}^{H}(X^{*})
\end{aligned}$$

olarak bulunur■.

Levi-Civita konneksiyonu II metriği ve $I+II$ metriği için aynı olduğundan (3.4) ve (3.5) teoremleri $I+II$ metriği için de geçerlidir.

Şimdi, X^{h}bileşenli bir X vektör alanı alalım. Böylece X in liftlerinin kovektör alanlarına göre

$$(\tilde{\nabla}_{A}{}'X_{B}) = \begin{pmatrix} \nabla_{i}X_{j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (\tilde{\nabla}_{A}\,\tilde{X}_{B}) = \begin{pmatrix} \nabla_{i}X_{j} + \partial(\nabla_{i}X_{j}) & \nabla_{i}X_{j} \\ \nabla_{i}X_{j} & 0 \end{pmatrix}$$

olur ve $I+II$ metriğine göre 3.6 teoremi geçerli olduğundan sonuç olarak

$$(\tilde{\nabla}_{A}{}'X_{B} + \tilde{\nabla}_{B}{}'X_{A}) = \begin{pmatrix} \nabla_{i}X_{j} + \nabla_{j}X_{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{\nabla}_{A}\,\tilde{X}_{B} + \tilde{\nabla}_{B}\,\tilde{X}_{A}) = \begin{pmatrix} \nabla_{i}X_{j} + \nabla_{j}X_{i} + \partial(\nabla_{i}X_{j} + \nabla_{j}X_{i}) & \nabla_{i}X_{j} + \nabla_{j}X_{i} \\ \nabla_{i}X_{j} + \nabla_{j}X_{i} & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Diğer yandan 3.7 ve 3.8 teoremleri $I+II$ metriği için de geçerli olduğundan

$$(\tilde{\nabla}_{A}{}'X_{B} - \tilde{\nabla}_{B}{}'X_{A}) = \begin{pmatrix} \nabla_{i}X_{j} - \nabla_{j}X_{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}^{AB}\,\tilde{\nabla}_{A}{}'X_{B} = 0$$

ve

$$(\tilde{\nabla}_A \tilde{X}_B - \tilde{\nabla}_B \tilde{X}_A) = \begin{pmatrix} \nabla_i X_j - \nabla_j X_i + \partial(\nabla_i X_j - \nabla_j X_i) & \nabla_i X_j - \nabla_j X_i \\ \nabla_i X_j - \nabla_j X_i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{g}^{AB} \tilde{\nabla}_A \tilde{X}_B = 2g^{ij}\nabla_i X_j$$

olur.

3.4. II Metriğine Göre Metrik Konneksiyonu

II metriğinin $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu

$$\tilde{\nabla}_C \tilde{g}_{BA} = 0 \tag{3.20}$$

şartını sağlayan ve burulmaya sahip olmayan tek konneksiyondur. Ayrıca bu konneksiyon $I + II$ metriğinin $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu ile aynıdır. Fakat (3.20) eşitliğini sağlayan C ve B indislerine göre anti – simetrik olan $\bar{T}_{CB}^{A}$ aşikar olmayan burulma tensörüne sahip başka bir konneksiyon mevcuttur.Bu konneksiyon $\bar{\nabla}$ ile gösterilir ve bileşenleri $\bar{\Gamma}_{CB}^{A}$ şeklindedir. O zaman $\bar{\nabla}$ konneksiyonu

$$\bar{\nabla}_C \tilde{g}_{BA} = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\Gamma}_{CB}^{A} - \bar{\Gamma}_{BC}^{A} = \bar{T}_{CB}^{A} \tag{3.21}$$

eşitliklerini sağlar. (3.20) eşitliğinin çözümünden

$$\bar{\Gamma}_{CB}^{A} = \tilde{\Gamma}_{CB}^{A} + \tilde{U}_{CB}^{A}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\Gamma}_{CB}^{A}$ II metriğine göre yapılanmış Christoffel sembolleri ve

$$\tilde{U}_{CBA} = \frac{1}{2}(\bar{T}_{CBA} + \bar{T}_{ACB} + \bar{T}_{ABC})$$
$$\tilde{U}_{CBA} = \tilde{U}_{CB}^{E}\,\tilde{g}_{EA} \quad , \quad \bar{T}_{CBA} = \bar{T}_{CB}^{E}\,\tilde{g}_{EA}$$

şeklindedir. Eğer

$$\bar{T}_{CB}^{A} = K_{jik}^{h} y^{k}$$

alınırsa $(1,2)$ tipli C ve B indislerine göre antisimetrik $\bar{T}_{CB}^{A}$ tensör alanı elde edilir.

$$\bar{T}_{jih} = K_{jik}^{h}\, y^{k} \quad , \quad K_{jikh} = K_{jik}^{s}\, g_{sh}$$

olduğundan

$$\bar{T}_{CBA} + \bar{T}_{ACB} + \bar{T}_{ABC} = \bar{T}_{jih} + \bar{T}_{hji} + \bar{T}_{hij}$$
$$= (\, K_{jikh} + K_{hjki} + K_{hikj})y^k$$
$$= -\,2K_{kjih}\, y^k$$

elde edilir. Buna göre

$$\tilde{U}_{CBA} = \frac{1}{2}(\bar{T}_{jih} + \bar{T}_{hji} + \bar{T}_{hij}) = -\,K_{kjih}\, y^k$$

yani

$$\tilde{U}^{\bar{h}}_{ji} = -\,K^h_{kji}\, y^k$$

ve diğer $\tilde{U}^A_{CB}$ bileşenler sıfır bulunur. Böylece,

$$\bar{\Gamma}^A_{CB} = \tilde{\Gamma}^A_{CB} + \tilde{U}^A_{CB}$$

formülünde değerler yerine yazılarak

$$\bar{\Gamma}^h_{ji} = \Gamma^h_{ji}\,, \quad \bar{\Gamma}^h_{j\bar{i}} = 0\,, \quad \bar{\Gamma}^h_{\bar{j}i} = 0\,, \quad \bar{\Gamma}^h_{\bar{j}\bar{i}} = 0,$$
$$\bar{\Gamma}^{\bar{h}}_{ji} = \partial\Gamma^h_{ji} - K^h_{kji}\, y^k\,, \quad \bar{\Gamma}^{\bar{h}}_{j\bar{i}} = \Gamma^h_{ji}\,, \quad \bar{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}i} = \Gamma^h_{ji}\,, \quad \bar{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}} = 0$$

elde edilir. Bu $\bar{\nabla}$ konneksiyonu M_n de g metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun ∇^{II} yatay lifti olarak adlandırılır. Çünkü $\tilde{U}^A_{CB}$ ve $\bar{T}^A_{CB}$, II ve $I+II$ metriklerine göre $\tilde{U}^E_{CB}\, \tilde{g}_{EA}$ ve $\bar{T}^E_{CB}\, \tilde{g}_{EA}$ ile aynıdır. Buradan görüyoruz ki, II metriğine göre verilen $\bar{T}^A_{CB}$ tensörü ile birlikte $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyonu $I+II$ metriğine göre verilen metrik konneksiyonu ile aynıdır. $\bar{\nabla}$ konneksiyonu kısaca g metriği ile birlikte bir M_n Riemannian manifoldu üzerine $T(M_n)$ tanjant demetinde metrik konneksiyonu olarak adlandırılır.

X, M_n de X^h lokal bileşenleri ile birlikte bir vektör alanı olsun. X in $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre dikey, tam ve yatay liftlerini bulalım :

$$\bar{\nabla}_A {}^V X^B = \partial_A {}^V X^B + \bar{\Gamma}^B_{AM}\, {}^V X^M$$

ifadesini açık yazalım.

$$\bar{\nabla}_i {}^V X^h = \partial_i {}^V X^h + \bar{\Gamma}^h_{im}\, {}^V X^m + \bar{\Gamma}^h_{i\bar{m}}\, {}^V X^{\bar{m}}$$
$$= 0\,,$$

$$\begin{aligned}\bar\nabla_{\bar i}\,{}^{V}X^{h} &= \partial_{\bar i}\,{}^{V}X^{h} + \bar\Gamma_{\bar i m}^{h}\,{}^{V}X^{m} + \bar\Gamma_{\bar i\bar m}^{h}\,{}^{V}X^{\bar m} \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar\nabla_{i}\,{}^{V}X^{\bar h} &= \partial_{i}\,{}^{V}X^{\bar h} + \bar\Gamma_{im}^{\bar h}\,{}^{V}X^{m} + \bar\Gamma_{i\bar m}^{\bar h}\,{}^{V}X^{\bar m} \\ &= \partial_i\,X^{h} + \Gamma_{im}^{h}\,X^{m} \\ &= \nabla_i\,X^{h}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar\nabla_{\bar i}\,{}^{V}X^{\bar h} &= \partial_{\bar i}\,{}^{V}X^{\bar h} + \bar\Gamma_{\bar i m}^{\bar h}\,{}^{V}X^{m} + \bar\Gamma_{\bar i\bar m}^{\bar h}\,{}^{V}X^{\bar m} \\ &= 0\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\bar\nabla_{C}\,{}'X^{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nabla_i\,X^{h} & 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Aynı şekilde hareketle

$$\begin{aligned}\bar\nabla_{i}\,{}^{C}X^{h} &= \partial_{i}\,{}^{C}X^{h} + \bar\Gamma_{ij}^{h}\,{}^{C}X^{j} + \bar\Gamma_{i\bar j}^{h}\,{}^{C}X^{\bar j} \\ &= \partial_i\,X^{h} + \Gamma_{ij}^{h}\,X^{j} \\ &= \nabla_i\,X^{h}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar\nabla_{\bar i}\,{}^{C}X^{h} &= \partial_{\bar i}\,{}^{C}X^{h} + \bar\Gamma_{\bar i j}^{h}\,{}^{C}X^{j} + \bar\Gamma_{\bar i\bar j}^{h}\,{}^{C}X^{\bar j} \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar\nabla_{i}\,{}^{C}X^{\bar h} &= \partial_{i}\,{}^{C}X^{\bar h} + \bar\Gamma_{ij}^{\bar h}\,{}^{C}X^{j} + \bar\Gamma_{i\bar j}^{\bar h}\,{}^{C}X^{\bar j} \\ &= \partial_i\partial X^{h} + (\partial\Gamma_{ij}^{h} - K_{kij}^{h}y^{k})X^{j} + \Gamma_{ij}^{h}\,\partial X^{j} \\ &= \partial_i\partial X^{h} + \partial\Gamma_{ij}^{h}\,X^{j} - K_{kij}^{h}y^{k}X^{j} + \Gamma_{ij}^{h}\,\partial X^{j} \\ &= \partial(\partial_i X^{h} + \Gamma_{ij}^{h}\,X^{j}) - K_{kij}^{h}y^{k}X^{j} \\ &= \partial(\nabla_i\,X^{h}) - K_{kij}^{h}y^{k}X^{j}\,,\end{aligned}$$

$$\bar{\nabla}_{\bar{i}}\, {}^{C}X^{\bar{h}} = \partial_{\bar{i}}\, {}^{C}X^{\bar{h}} + \bar{\Gamma}_{\bar{i}\,j}^{\bar{h}}\, {}^{C}X^{j} + \bar{\Gamma}_{\bar{i}\,\bar{j}}^{\bar{h}}\, {}^{C}X^{\bar{j}}$$
$$= \partial_{\bar{i}}\partial X^{h} + \Gamma_{ij}^{h} X^{j}$$
$$= \partial_{i} X^{h} + \Gamma_{ij}^{h} X^{j}$$
$$= \nabla_{i}\, X^{h}$$

olduğuna göre buradan

$$\bar{\nabla}_{C}\tilde{X}^{A} = \begin{pmatrix} \nabla_{i}\, X^{h} & 0 \\ \partial(\nabla_{i}\, X^{h}) - K_{kij}^{h} y^{k} X^{j} & \nabla_{i}\, X^{h} \end{pmatrix}$$

yazılır. Ayrıca

$$\bar{\nabla}_{i}\, {}^{H}X^{h} = \partial_{i}\, {}^{H}X^{h} + \bar{\Gamma}_{i\,j}^{h}\, {}^{H}X^{j} + \bar{\Gamma}_{i\,\bar{j}}^{h}\, {}^{H}X^{\bar{j}}$$
$$= \partial_{i} X^{h} + \Gamma_{ij}^{h} X^{j}$$
$$= \nabla_{i}\, X^{h}\,,$$

$$\bar{\nabla}_{\bar{i}}\, {}^{H}X^{h} = \partial_{\bar{i}}\, {}^{H}X^{h} + \bar{\Gamma}_{\bar{i}\,j}^{h}\, {}^{H}X^{j} + \bar{\Gamma}_{\bar{i}\,\bar{j}}^{h}\, {}^{H}X^{\bar{j}}$$
$$= 0\,,$$

$$\bar{\nabla}_{i}\, {}^{H}X^{\bar{h}} = \partial_{i}\, {}^{H}X^{\bar{h}} + \bar{\Gamma}_{i\,j}^{\bar{h}}\, {}^{H}X^{j} + \bar{\Gamma}_{i\,\bar{j}}^{\bar{h}}\, {}^{H}X^{\bar{j}}$$
$$= \partial_{i}(-\Gamma_{m}^{h} X^{m}) + (\partial\Gamma_{ij}^{h} - K_{kij}^{h} y^{k}) X^{j} + \Gamma_{ij}^{h}(-\Gamma_{m}^{h} X^{m}\ )$$
$$= -\partial_{i}\Gamma_{m}^{h} X^{m} - \partial_{i} X^{m}\Gamma_{m}^{h} + \partial\Gamma_{ij}^{h} X^{j} - \partial_{k}\Gamma_{ij}^{h} y^{k} X^{j}$$
$$+ \partial_{i}\Gamma_{kj}^{h} y^{k} X^{j} - \Gamma_{km}^{h}\Gamma_{ij}^{m} y^{k} X^{j} + \Gamma_{im}^{h}\Gamma_{kj}^{m} y^{k} X^{j} - \Gamma_{ij}^{h}\Gamma_{m}^{j} X^{m}$$
$$= -\partial_{i} X^{m}\Gamma_{km}^{h} y^{k} - \Gamma_{km}^{h}\Gamma_{ij}^{m} y^{k} X^{j}$$
$$= -y^{k}\Gamma_{km}^{h}(\partial_{i} X^{m} + \Gamma_{ij}^{m} X^{j})$$
$$= -y^{k}\Gamma_{km}^{h}(\nabla_{i}\, X^{h})$$
$$= -\Gamma_{m}^{h}\nabla_{i}\, X^{m}\,,$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\bar{i}}\, {}^{H}X^{\bar{h}} &= \partial_{\bar{i}}\, {}^{H}X^{\bar{h}} + \bar{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{i}j}\, {}^{H}X^{j} + \bar{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{i}\bar{j}}\, {}^{H}X^{\bar{j}} \\
&= \partial_{\bar{i}}(- \Gamma^{h}_{m}X^{m} + \Gamma^{h}_{ij}X^{j}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir ve buradan

$$
\bar{\nabla}_{C}\bar{X}^{A} = \begin{pmatrix} \nabla_{i}X^{m} & 0 \\ -\Gamma^{h}_{m}\nabla_{i}X^{m} & 0 \end{pmatrix}
$$

matrisi yazılır.

3.13.Teorem: $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir vektör alanının yatay, tam ve dikey liftinin paralel olması için gerek ve yeter şart verilen vektör alanının M_n de paralel olmasıdır[3].

k sabitine göre $\nabla_j X^h = k\,\delta^h_j$ olduğu için $K^h_{kji} = 0$ şeklindedir.

3.14.Teorem: $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir vektör alanının tam liftinin concurrent olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen vektör alanının concurrent olmasıdır[3].

$\bar{\nabla}$ metrik konneksiyonunu $\bar{R}$ eğrilik tensörünün $\bar{R}^{A}_{DCB}$ bileşenlerini bulalım. Buna göre

$$
[\bar{R}({}^{C}X, {}^{C}Y)]^{S}_{K} = \bar{R}^{S}_{IJK}\, {}^{C}X^{I}\, {}^{C}Y^{J}
$$

ifadesini açalım:

$$
\begin{aligned}
[\bar{R}({}^{C}X, {}^{C}Y)]^{S}_{K} &= \bar{R}^{S}_{IJK}\, {}^{C}X^{I}\, {}^{C}Y^{J} \\
&= \bar{R}^{s}_{ijk}\, {}^{C}X^{i}\, {}^{C}Y^{j} + \bar{R}^{s}_{\bar{i}jk}\, {}^{C}X^{\bar{i}}\, {}^{C}Y^{j} + \bar{R}^{s}_{i\bar{j}k}\, {}^{C}X^{i}\, {}^{C}Y^{\bar{j}} + \bar{R}^{s}_{\bar{i}\bar{j}k}\, {}^{C}X^{\bar{i}}\, {}^{C}Y^{\bar{j}} \\
&= \bar{R}^{s}_{ijk}X^{i}Y^{j} + \bar{R}^{s}_{\bar{i}jk}\, y^{n}(\partial_{n}X^{i})Y^{j} + \bar{R}^{s}_{i\bar{j}k}X^{i}y^{m}(\partial_{m}Y^{j}) \\
&\qquad + \bar{R}^{s}_{\bar{i}\bar{j}k}y^{n}(\partial_{n}X^{i})y^{m}(\partial_{m}Y^{j}) \\
&= R^{s}_{ijk}X^{i}Y^{j}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\bar{R}^{s}_{ijk} = R^{s}_{ijk}
$$

yazılır. Diğer yandan $\bar{R}^{\bar{s}}_{ijk}$ için

$$
\begin{aligned}
R^{\bar{s}}_{ijk} X^i Y^j = \bar{R}^{\bar{s}}_{ijk} X^i Y^j + \bar{R}^{\bar{s}}_{\bar{i}jk}\, y^n(\partial_n X^i) Y^j + \bar{R}^{\bar{s}}_{i\bar{j}k} X^i y^m(\partial_m Y^j) \\
+ \bar{R}^{\bar{s}}_{\bar{i}\bar{j}k} y^n(\partial_n X^i) y^m(\partial_m Y^j) \\
= -\, y^m \Gamma^s_{mt} R^t_{ijk} + y^m \Gamma^t_{mk} R^s_{ijt}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\bar{R}^{\bar{s}}_{ijk} = -\, y^m \Gamma^s_{mt} R^t_{ijk} + y^m \Gamma^t_{mk} R^s_{ijt}
$$

yazılır. Şimdi $\bar{s}$ ve $\bar{k}$ için bakalım:

$$
\begin{aligned}
\bar{R}^{\bar{s}}_{ij\bar{k}} = \bar{R}^{\bar{s}}_{ij\bar{k}} X^i Y^j + \bar{R}^{\bar{s}}_{\bar{i}j\bar{k}}\, y^n(\partial_n X^i) Y^j + \bar{R}^{\bar{s}}_{i\bar{j}\bar{k}} X^i y^m(\partial_m Y^j) \\
+ \bar{R}^{\bar{s}}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} y^n(\partial_n X^i) y^m(\partial_m Y^j) \\
= R^s_{ijk} X^i Y^j
\end{aligned}
$$

olup

$$
\bar{R}^{\bar{s}}_{ij\bar{k}} = R^s_{ijk}
$$

bulunur. Aynı şekilde hareketle diğer bileşenlerin sıfır olduğu görülür.

$\bar{\nabla}$ metrik konneksiyonunun kontraksiyona uğramış eğrilik tensörü $\bar{R}_{CB} = \bar{R}^E_{ECB}$ bileşenlerine sahiptir ve

$$
\bar{R}^E_{Eji} = K_{ji}\,, \quad \bar{R}^E_{E\bar{j}i} = 0\,, \quad \bar{R}_{Ej\bar{i}} = 0\,, \quad \bar{R}_{E\bar{j}\bar{i}} = 0 \qquad (*)
$$

şeklindedir. Burada $K_{ji} = K^h_{hji}$. M_n Riemannian manifoldunun Ricci tensörünün bileşenleridir. Şimdi ($*$) ifadelerini ispat edelim,

$$
\begin{aligned}
\bar{R}^E_{Eij} &= \bar{R}^s_{sij}\, {}^C X^i\, {}^C Y^j + \bar{R}^s_{s\bar{i}j}\, {}^C X^{\bar{i}}\, {}^C Y^j + \bar{R}^s_{si\bar{j}}\, {}^C X^i\, {}^C Y^{\bar{j}} + \bar{R}^s_{s\bar{i}\bar{j}}\, {}^C X^{\bar{i}}\, {}^C Y^{\bar{j}} \\
&= \bar{R}^s_{sij}\, X^i\, Y^j + \bar{R}^s_{s\bar{i}j}\, y^m \partial_m X^{\bar{i}}\, Y^j + \bar{R}^s_{si\bar{j}} X^i y^n \partial_n Y^{\bar{j}} + \bar{R}^s_{s\bar{i}\bar{j}}\, \partial X^{\bar{i}} \partial Y^{\bar{j}} \\
&= R^s_{sij}\, X^i\, Y^j
\end{aligned}
$$

olup

$$
\bar{R}^E_{Eij} = \bar{R}_{ij} = R_{ij}
$$

şeklindedir. Diğer yandan

$$\bar{R}^{E}_{E\bar{i}j} = \bar{R}^{s}_{s\bar{i}j}\,{}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{j} + \bar{R}^{s}_{s\bar{i}j}\,{}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{j} + \bar{R}^{s}_{s\bar{i}\bar{j}}\,{}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{\bar{j}} + \bar{R}^{s}_{s\bar{i}\bar{j}}\,{}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{\bar{j}}$$
$$= 0\,,$$

$$\bar{R}^{E}_{Ei\bar{j}} = \bar{R}^{s}_{si\bar{j}}\,{}^{C}X^{i}\,{}^{C}Y^{\bar{j}} + \bar{R}^{s}_{s\bar{i}\bar{j}}\,{}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{\bar{j}} + \bar{R}^{s}_{si\bar{j}}\,{}^{C}X^{i}\,{}^{C}Y^{\bar{j}} + \bar{R}^{s}_{s\bar{i}\bar{j}}\,{}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{\bar{j}}$$
$$= 0\,,$$

$$\bar{R}^{E}_{E\bar{i}\bar{j}} = \bar{R}^{s}_{si\bar{j}}\,{}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{\bar{j}} + \bar{R}^{s}_{s\bar{i}\bar{j}}\,{}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{\bar{j}} + \bar{R}^{s}_{s\bar{i}\bar{j}}\,{}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{\bar{j}} + \bar{R}^{s}_{s\bar{i}\bar{j}}\,{}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{\bar{j}}$$
$$= 0$$

olduğu bulunur■.

3.15.Teorem: $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyonuna göre $T(M_n)$ tanjant demetinin sıfır olan kontraksiyona tabi tutulmuş eğrilik tensörüne sahip olması için gerek ve yeter şart sıfır olan Ricci tensörüne sahip olmasıdır[3].

Metrik konneksiyonu ile birlikte $T(M_n)$ nin skaler eğriliği için

$$\bar{R} = \tilde{g}^{CB}\,\bar{R}_{CB} = \tilde{g}^{IJ}\,\bar{R}_{IJ} = \tilde{g}^{ij}\,\bar{R}_{ij} + \tilde{g}^{i\bar{j}}\,\bar{R}_{i\bar{j}} + \tilde{g}^{\bar{i}j}\,\bar{R}_{\bar{i}j} + \tilde{g}^{\bar{i}\bar{j}}\,\bar{R}_{\bar{i}\bar{j}} = 0$$

olup buradan

$$\bar{R} = \tilde{g}^{CB}\,\bar{R}_{CB} = 0$$

yazılır. Burada $\tilde{g}^{CB}$, II veya $I+II$ metriğinin ters(anti) simetrik bileşenleridir.

3.16.Teorem: Metrik konneksiyonuna göre $T(M_n)$ tanjant demet II veya $I+II$ metriğine göre sıfır olan skaler eğriliğe sahiptir[3].

4.TANJANT DEMETTE $I+III$ METRİĞİ

M_n, g_{ji} bileşenlerine sahip g metriğine göre bir Riemannian manifoldu olsun. (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre

$$\tilde{g}_{CB}\, dx^C\, dx^B = g_{ij}\, dx^i\, dx^j + g_{ij}\, \delta y^i \delta y^j \tag{4.1}$$

Riemannian metriği verilsin. Burada

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma^h_{ij}\, y^i\, dx^j$$

şeklindedir. Biz (4.1) metriğini $I+III$ metriği (veya g nin ${}^Dg$ diagonel lifti) olarak adlandıracağız. Şimdi $I+III$ metriğinin bileşenlerini bulalım.(4.1) ifadesinde

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{CB}\, dx^C\, dx^B &= g_{ij}\, dx^i\, dx^j + g_{ij}\, \delta y^i \delta y^j \\
&= g_{ij}\, dx^i\, dx^j + g_{ij}(dy^i + \Gamma^i_{sm} y^s dx^m)(dy^j + \Gamma^j_{ln} y^l dx^n) \\
&= g_{ij}\, dx^i\, dx^j + g_{ij}\, dy^i dy^j + g_{ij}\, dy^i \Gamma^j_{ln} y^l dx^n + g_{ij} dy^j \Gamma^i_{sm} y^s dx^m \\
&\qquad + g_{ij}\Gamma^i_{sm} y^s dx^m \Gamma^j_{ln} y^l dx^n \\
&= g_{ij}\, dx^i\, dx^j + g_{ij}\, dy^i dy^j + g_{ji}\, dy^j \Gamma^i_{ln} y^l dx^n + g_{mj} dy^j \Gamma^m_{si} y^s dx^i \\
&\quad + g_{mn}\Gamma^m_{si} y^s dx^i \Gamma^n_{lj} y^l dx^j \\
&= g_{ij}\, dx^i\, dx^j + g_{ij}\, dy^i dy^j + g_{jn}\, dy^j \Gamma^n_{li} y^l dx^i + g_{mj} dy^j \Gamma^m_{si} y^s dx^m \\
&\quad + g_{ij}\Gamma^i_{sm} y^s dx^m \Gamma^j_{ln} y^l dx^n
\end{aligned}$$

olur ve matris dilinde

$${}^D g_{AB} = I + III = \begin{pmatrix} g_{ij} + g_{mn}\Gamma^m_i \Gamma^n_j & g_{mj}\Gamma^m_i \\ g_{im}\Gamma^m_j & g_{ij} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

şeklinde yazılır. Şimdi bu matrisin tersini bulalım :

$${}^D g_{AB}\, {}^D g^{BC} = \delta^C_A$$

$${}^D g_{Aj}\, {}^D g^{jC} + {}^D g_{A\bar{j}}\, {}^D g^{\bar{j}C} = \delta^C_A$$

ifadesinde $A = i$, $C = k$ için

$${}^D g_{ij}\, {}^D g^{jk} + {}^D g_{i\bar{j}}\, {}^D g^{\bar{j}k} = \delta^k_i \tag{4.3}$$

$A = \bar{i}$, $C = k$ için

$${}^D g_{\bar{i}j}\, {}^D g^{jk} + {}^D g_{\bar{i}\bar{j}}\, {}^D g^{\bar{j}k} = \delta^k_{\bar{i}} = 0, \tag{4.4}$$

$A = i\,,\ C = \bar{k}$ için

$$ {}^{D}g_{ij}\,{}^{D}g^{j\bar{k}} + {}^{D}g_{i\bar{j}}\,{}^{D}g^{\bar{j}\bar{k}} = \delta_{i}^{\bar{k}} = 0, \tag{4.5}$$

$A = \bar{i}\,,\ C = \bar{k}$ için

$$ {}^{D}g_{\bar{i}j}\,{}^{D}g^{j\bar{k}} + {}^{D}g_{\bar{i}\bar{j}}\,{}^{D}g^{\bar{j}\bar{k}} = \delta_{\bar{i}}^{\bar{k}} = \delta_{i}^{k} \tag{4.6}$$

olur. Buna göre (4.2) ifadesi kullanılarak (4.6) denklemi

$$ g_{in}\Gamma_{j}^{n}\ {}^{D}g^{j\bar{k}} + g_{ij}\ {}^{D}g^{\bar{j}\bar{k}} = \delta_{i}^{k}, \tag{4.7}$$

(4.3) denklemi

$$ (g_{ij} + g_{mn}\Gamma_{i}^{m}\Gamma_{j}^{n})\,{}^{D}g^{jk} + g_{mj}\Gamma_{i}^{m}\ {}^{D}g^{\bar{j}k} = \delta_{i}^{k}, \tag{4.8}$$

(4.4)denklemi

$$ g_{in}\Gamma_{j}^{n}\,{}^{D}g^{jk} + g_{ij}\,{}^{D}g^{\bar{j}k} = 0, \tag{4.9}$$

ve (4.5)denklemi

$$ (g_{ij} + g_{mn}\Gamma_{i}^{m}\Gamma_{j}^{n})\,{}^{D}g^{j\bar{k}} + g_{mj}\Gamma_{i}^{m}\ {}^{D}g^{\bar{j}\bar{k}} = 0 \tag{4.10}$$

biçiminde olur. (4.9)denklemini g^{is} ile çarparsak

$$ \begin{aligned} \delta_{n}^{s}\Gamma_{j}^{n}\,{}^{D}g^{jk} + \delta_{j}^{s}\ {}^{D}g^{\bar{j}k} &= 0 \\ {}^{D}g^{\bar{j}k} &= -\Gamma_{s}^{j}\,{}^{D}g^{sk} \end{aligned} \tag{4.11}$$

bulunur. Ayrıca bu değeri (4.8) ifadesinde kullanılırsa,

$$ \begin{aligned} (g_{ij} + g_{mn}\Gamma_{i}^{m}\Gamma_{j}^{n})\,{}^{D}g^{jk} + g_{mj}\Gamma_{i}^{m}\ {}^{D}g^{\bar{j}k} &= \delta_{i}^{k} \\ (g_{ij} + g_{mn}\Gamma_{i}^{m}\Gamma_{j}^{n})\,{}^{D}g^{jk} - g_{mj}\Gamma_{i}^{m}\Gamma_{s}^{j}\ {}^{D}g^{sk} &= \delta_{i}^{k} \\ g_{ij}\ {}^{D}g^{jk} + g_{mn}\Gamma_{i}^{m}\Gamma_{j}^{n}\,{}^{D}g^{jk} - g_{mj}\Gamma_{i}^{m}\Gamma_{s}^{j}\ {}^{D}g^{sk} &= \delta_{i}^{k} \\ g_{ij}\ {}^{D}g^{jk} &= \delta_{i}^{k} \\ {}^{D}g^{jk} &= g^{jk} \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. Bu değeri (4.11) de kullanırsak

$$ \begin{aligned} {}^{D}g^{\bar{j}k} &= -\Gamma_{s}^{j}\,{}^{D}g^{sk} \\ {}^{D}g^{\bar{j}k} &= -\Gamma_{s}^{j}\ g^{sk} \end{aligned} \tag{4.13}$$

bulunur . Diğer yandan

$$g_{im}\Gamma_j^m \, {}^D g^{j\bar{k}} + g_{ij} \, {}^D g^{\bar{j}\bar{k}} = \delta_i^k$$
$$g_{ij} \, {}^D g^{\bar{j}\bar{k}} = \delta_i^k - g_{im}\Gamma_j^m \, {}^D g^{j\bar{k}}$$

ifadesinin her iki tarafı g^{in} ile çarpılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \delta_j^n \, {}^D g^{\bar{j}\bar{k}} &= g^{kn} - \delta_m^n \Gamma_j^m \, {}^D g^{j\bar{k}} \\ {}^D g^{\bar{j}\bar{k}} &= \delta_n^j g^{kn} - \delta_n^j \Gamma_j^n \, {}^D g^{j\bar{k}} \\ {}^D g^{\bar{j}\bar{k}} &= g^{kj} - \delta_n^j \Gamma_j^n \, {}^D g^{j\bar{k}} \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Bu değeri (4.10) da kullanılırsa,

$$(g_{ij} + g_{mn}\Gamma_i^m\Gamma_j^n) \, {}^D g^{j\bar{k}} + g_{mj}\Gamma_i^m \, (g^{kj} - \delta_n^j \Gamma_j^n \, {}^D g^{j\bar{k}}) = 0$$
$$(g_{ij} + g_{mn}\Gamma_i^m\Gamma_j^n - \delta_n^j \Gamma_j^n g_{mj}\Gamma_i^m) \, {}^D g^{j\bar{k}} = - g_{mj} g^{kj} \Gamma_i^m$$
$$g_{ij} \, {}^D g^{j\bar{k}} = - \Gamma_i^k \setminus g^{is}$$
$$\delta_i^s \, {}^D g^{j\bar{k}} = - g^{js} \Gamma_i^k$$
$${}^D g^{j\bar{k}} = - g^{js} \Gamma_s^k$$

bulunur. Bu değer (4.14) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}^D g^{\bar{j}\bar{k}} &= g^{kj} + \delta_n^j \Gamma_j^n g^{js} \Gamma_s^k \\ {}^D g^{\bar{j}\bar{k}} &= g^{kj} + g^{js} \Gamma_s^k \Gamma_j^n \delta_n^j \\ {}^D g^{\bar{j}\bar{k}} &= g^{kj} + g^{ns} \Gamma_s^k \Gamma_n^j \\ {}^D g^{\bar{j}\bar{k}} &= g^{jk} + g^{ns} \Gamma_n^j \Gamma_s^k \end{aligned}$$

elde edilir ve matris formunda

$$({}^D g_{AB}) = \begin{pmatrix} g^{jk} & - g^{js}\Gamma_s^k \\ - \Gamma_s^j g^{sk} & g^{jk} + g^{ns}\Gamma_n^j\Gamma_s^k \end{pmatrix}$$

şeklinde ters matris yazılır.

M_n de X^h lokal bileşenlere göre X vektör alanını düşünelim. X in ${}^H X$ yatay lifti

$$(\bar{X}^A) = \begin{pmatrix} X^h \\ - \Gamma_i^h X^i \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Buna göre

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_{CB}\overset{-C}{X}\,\overset{-B}{Y} &= \tilde{g}_{IJ}\overset{-I}{X}\,\overset{-J}{Y} \\
&= \tilde{g}_{ij}\overset{-i}{X}\,\overset{-j}{Y} + \tilde{g}_{\bar{i}j}\overset{-\bar{i}}{X}\,\overset{-j}{Y} + \tilde{g}_{i\bar{j}}\overset{-i}{X}\,\overset{-\bar{j}}{Y} + \tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}}\overset{-\bar{i}}{X}\,\overset{-\bar{j}}{Y} \\
&= (g_{ij} + g_{ts}\Gamma^t_i\Gamma^s_j)X^iY^j + \Lambda_{ij}(-\Gamma^i_m X^m)Y^j + \Lambda_{ji}X^i(-\Gamma^j_m X^m) \\
&\qquad + g_{ij}(-\Gamma^i_s X^s)(-\Gamma^j_t Y^t) \\
&= g_{ij} + 2g_{ij}\Gamma^i_t\Gamma^j_s X^tY^s - \Lambda_{ij}\Gamma^i_m X^mY^j - \Lambda_{ji}\Gamma^j_m X^iY^m \\
&= g_{ij} + 2g_{ij}\Gamma^i_t\Gamma^j_s X^tY^s - \Lambda_{ij}\Gamma^i_m X^mY^j - \Lambda_{im}\Gamma^i_j X^mY^j \\
&= g_{ij}X^iY^j
\end{aligned}
$$

olur. Burada Y^A bir Y vektör alanının ${}^HY$ yatay liftinin lokal bileşenleridir.Burada $\Lambda_{ji} = \Gamma^t_j g_{ti}$ şeklindedir.

4.1.Teorem: X , $Y \epsilon T^1_0(M)$ olsun. $I + III$ metriğine göre ${}^HX$ ve ${}^HY$ yatay liftlerin iç çarpımı X ve Y nin iç çarpımının dikey liftine eşittir.

$$X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial X^i} \quad i = n \text{ tane}$$

şeklinde idi. Tanjant demette dikey ve yatay liftler

$${}^VX = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix} \text{ ve } {}^HX = \begin{pmatrix} X^i \\ -\Gamma^i_h X^h \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi

$$X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial X^i}$$

vektörlerinin koordinatlarını yazalım.

$$X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial X^i} = \delta^h_i \frac{\partial}{\partial X^h}$$

$$X_{(i)} = \{\delta^h_i\} \Rightarrow {}^VX_{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix}$$

buluruz ve

$${}^VX_{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix} = (C^A_{\bar{i}})$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca

$$C^A_{\bar{i}} = \tilde{e}_{\bar{i}}$$

ile de gösterilir. Diğer yandan

$$^{H}X = \begin{pmatrix} X^i \\ -\Gamma^i_h X^h \end{pmatrix}$$

için

$$X_{(i)} = \{\delta^h_i\} \;\Rightarrow {}^{H}X_{(i)} = \begin{pmatrix} \delta^h_i \\ -\Gamma^h_j \delta^j_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^h_i \\ -\Gamma^h_i \end{pmatrix} = \tilde{e}_i$$

olur. Bu çatıya adapte olmuş çatı denir. Açık olarak yazarsak

$$\tilde{e}_\alpha = (\tilde{e}_i, \tilde{e}_{\bar{i}})$$
$$\tilde{e}_i = \delta^h_i \partial_h - \Gamma^h_i \partial_{\bar{h}}$$
$$\tilde{e}_{\bar{i}} = \delta^h_i \partial_{\bar{h}}$$

olur. Buna göre $\tilde{e}_\alpha = A^B_\alpha \, \partial_B$ olmak üzere

$$\tilde{e}_i = A^h_i \, \partial_h + A^{\bar{h}}_i \, \partial_{\bar{h}}$$
$$\tilde{e}_{\bar{i}} = A^h_{\bar{i}} \, \partial_h + A^{\bar{h}}_{\bar{i}} \, \partial_{\bar{h}}$$

olup tabii çatıdan adapte olmuş çatıya geçiş yapılır. Bu formülleri matris dilinde yazarsak

$$(\tilde{e}_i, \tilde{e}_{\bar{i}}) = (\partial_h, \, \partial_{\bar{h}}) \begin{pmatrix} A^h_i & A^h_{\bar{i}} \\ A^{\bar{h}}_i & A^{\bar{h}}_{\bar{i}} \end{pmatrix}$$

olur. Böylece tabii çatıdan adapte olmuş çatıya geçiş matrisi

$$(A^B_\alpha) = \begin{pmatrix} \delta^h_i & 0 \\ -\Gamma^h_i & \delta^h_i \end{pmatrix} = (A^B_i, A^B_{\bar{i}})$$

biçiminde bulunur. Şimdi bu matrisin tersini $\tilde{A}^\alpha_B$ ile gösterelim. Ters matrisin özelliğine göre

$$A^B_\alpha \tilde{A}^\alpha_C = \delta^B_C$$

yazılır. Buradan

$$A^B_i \tilde{A}^i_C + A^B_{\bar{i}} \tilde{A}^{\bar{i}}_C = \delta^B_C$$

yazılır. Buna göre

$$A^h_i \tilde{A}^{i}_{k} + A^h_{\bar i} \tilde{A}^{\bar i}_{k} = \delta^h_k \quad \Rightarrow \quad \delta^h_i \tilde{A}^{i}_{k} = \delta^h_k \quad \Rightarrow \quad \tilde{A}^{h}_{k} = \delta^h_k \,,$$

$$A^{\bar h}_i \tilde{A}^{i}_{k} + A^{\bar h}_{\bar i} \tilde{A}^{\bar i}_{k} = 0 \Rightarrow -\Gamma^h_i \delta^i_k + \delta^h_i \tilde{A}^{\bar i}_{k} = 0 \Rightarrow -\Gamma^h_k + \tilde{A}^{\bar h}_{k} = 0 \Rightarrow \tilde{A}^{\bar h}_{k} = \Gamma^h_k \,,$$

$$A^h_i \tilde{A}^{i}_{\bar k} + A^h_{\bar i} \tilde{A}^{\bar i}_{\bar k} = 0 \Rightarrow \delta^h_i \tilde{A}^{i}_{\bar k} = 0 \Rightarrow \tilde{A}^{h}_{\bar k} = 0 \,,$$

$$A^{\bar h}_i \tilde{A}^{i}_{\bar k} + A^{\bar h}_{\bar i} \tilde{A}^{\bar i}_{\bar k} = \delta^h_k \Rightarrow -\Gamma^h_i 0 + \delta^h_i \tilde{A}^{\bar i}_{\bar k} = \delta^h_k \Rightarrow \tilde{A}^{\bar i}_{\bar k} = \delta^i_k$$

olup

$$A^\alpha_B = \begin{pmatrix} \delta^h_k & 0 \\ \Gamma^h_k & \delta^h_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^h_B \\ A^{\bar h}_B \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$A^h_B = (\delta^h_k \,, 0) \qquad \text{ve} \qquad A^{\bar h}_B = (\Gamma^h_k, \delta^h_k)$$

şeklindedir.

$$g_{i'j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij}$$

dönüşüm kanunu adapte olmuş çatıda

$${}^D g_{\alpha\beta} = A^A_\alpha A^B_\beta \, {}^D g_{AB}$$

şeklinde yazılır. Tensör dilinde ise

$$({}^D g)_{(\tilde{e}_\alpha)} = A^T g_{\{\partial\}} A$$

şeklinde yazılır. Buna göre

$$
({}^{D}g)_{(\tilde{e}_\alpha)} = \begin{pmatrix} \delta_i^h & -\Gamma_i^h \\ 0 & \delta_i^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{hj} + g_{ts}\Gamma_h^t\Gamma_j^s & \Lambda_{jh} \\ \Lambda_{hj} & g_{hj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_k^j & 0 \\ -\Gamma_k^j & \delta_k^j \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} g_{ij} + g_{ts}\Gamma_i^t\Gamma_j^s - \Gamma_i^h\Lambda_{hj} & \Lambda_{ji} - \Gamma_i^h g_{hj} \\ \Lambda_{ij} & g_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_k^j & 0 \\ -\Gamma_k^j & \delta_k^j \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} g_{ik} & 0 \\ 0 & g_{ik} \end{pmatrix}
$$

olarak bulunur. ${}^{D}g_{\alpha\beta}$ nın tersini yazarsak

$$
{}^{D}\tilde{g}^{\alpha\beta} = A_A^\alpha A_B^\beta \tilde{g}^{AB}
$$

olur. Bu ise
$A = h$, $B = k$ için,

$$
{}^{D}\tilde{g}^{\alpha\beta} = A_h^\alpha A_k^\beta \tilde{g}^{hk} + A_{\bar{h}}^\alpha A_k^\beta \tilde{g}^{\bar{h}k} + A_h^\alpha A_{\bar{k}}^\beta \tilde{g}^{h\bar{k}} + A_{\bar{h}}^\alpha A_{\bar{k}}^\beta \tilde{g}^{\bar{h}\bar{k}} ,
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{D}\tilde{g}^{ij} &= A_h^i A_k^j \tilde{g}^{hk} + A_{\bar{h}}^i A_k^j \tilde{g}^{\bar{h}k} + A_h^i A_{\bar{k}}^j \tilde{g}^{h\bar{k}} + A_{\bar{h}}^i A_{\bar{k}}^j \tilde{g}^{\bar{h}\bar{k}} \\
&= \delta_h^i \delta_k^j g^{hk} \\
&= g^{ij} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{D}\tilde{g}^{\bar{i}j} &= A_h^{\bar{i}} A_k^j \tilde{g}^{hk} + A_{\bar{h}}^{\bar{i}} A_k^j \tilde{g}^{\bar{h}k} + A_h^{\bar{i}} A_{\bar{k}}^j \tilde{g}^{h\bar{k}} + A_{\bar{h}}^{\bar{i}} A_{\bar{k}}^j \tilde{g}^{\bar{h}\bar{k}} \\
&= \Gamma_h^i \delta_k^j g^{hk} + \delta_h^j \delta_k^j (-g^{kt}\Gamma_t^h) \\
&= \Gamma_j^i g^{hj} - g^{jt}\Gamma_t^i \\
&= 0 ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{D}\tilde{g}^{i\bar{j}} &= A_h^i A_k^{\bar{j}} \tilde{g}^{hk} + A_{\bar{h}}^i A_k^{\bar{j}} \tilde{g}^{\bar{h}k} + A_h^i A_{\bar{k}}^{\bar{j}} \tilde{g}^{h\bar{k}} + A_{\bar{h}}^i A_{\bar{k}}^{\bar{j}} \tilde{g}^{\bar{h}\bar{k}} \\
&= \delta_h^i g^{hk} + \delta_h^i \delta_k^j (-\Lambda^{hk}) \\
&= \Gamma_k^j g^{ik} + \delta_h^i \delta_k^j (-g^{ht}\Gamma_t^k) \\
&= 0 ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{D}\tilde{g}^{\bar{i}\bar{j}} &= A_h^{\bar{i}} A_k^{\bar{j}} \tilde{g}^{hk} + A_{\bar{h}}^{\bar{i}} A_k^{\bar{j}} \tilde{g}^{\bar{h}k} + A_h^{\bar{i}} A_{\bar{k}}^{\bar{j}} \tilde{g}^{h\bar{k}} + A_{\bar{h}}^{\bar{i}} A_{\bar{k}}^{\bar{j}} \tilde{g}^{\bar{h}\bar{k}} \\
&= \Gamma_h^i \Gamma_k^j g^{hk} + \delta_h^i \Gamma_k^j (-\Lambda^{hk}) + \delta_h^i \delta_k^j (g^{hk} + g^{ts}\Gamma_t^h \Gamma_s^k) \\
&= \Gamma_h^i \Gamma_k^j g^{hk} - \delta_h^i \Gamma_k^j g^{ht}\Gamma_t^k + \delta_h^i \delta_k^j g^{hk} + \delta_h^i \delta_k^j g^{ts}\Gamma_t^h \Gamma_s^k) \\
&= \Gamma_h^i \Gamma_k^j g^{hk} - \Gamma_k^j g^{it}\Gamma_t^k - \Gamma_k^j g^{it}\Gamma_t^k + g^{ij} + g^{ts}\Gamma_t^i \Gamma_s^j) \\
&= g^{ij}
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. Buna göre

$$ {}^{D}\widetilde{g}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & g^{ij} \end{pmatrix} $$

yazılır. Diğer yandan

$$ B_i = {}^{H}(\partial_i) = \widetilde{e}_i = (B_i^B) = (A_i^B) = \begin{pmatrix} A_i^h \\ A_i^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ -\Gamma_i^h \end{pmatrix}, $$

$$ C_{\bar{i}} = \widetilde{e}_{\bar{i}} = (C_{\bar{i}}^B) = (A_{\bar{i}}^B) = \begin{pmatrix} A_{\bar{i}}^h \\ A_{\bar{i}}^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_i^h \end{pmatrix}, $$

ve

$$ (A_h^i, A_{\bar{h}}^i) = (\delta_h^i, 0) \quad \text{ve} \quad (A_h^{\bar{i}}, A_{\bar{h}}^{\bar{i}}) = (\Gamma_h^i,\ \delta_h^i) $$

şeklinde elde edilmişti. Buna göre

$$ D_\alpha = \widetilde{e}_\alpha = \{\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_{\bar{i}}\} = A_\alpha^B \partial_B $$

şeklinde bir vektör alanı alalım. Bu vektör alanları bir baz oluşturur. Böylece tabii koçatı dx^B olmak üzere $\theta^\alpha = A_B^\alpha dx^B$ şeklinde yeni bir koçatı oluşturmuş oluruz. Şimdi D_α ları açık yazacak olursak $\alpha = i\,, B = h$ için

$$ D_i = A_i^h \partial_h + A_i^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}} = \partial_i - \Gamma_i^h \partial_{\bar{h}}\,, $$
$$ D_{\bar{i}} = A_{\bar{i}}^h \partial_h + A_{\bar{i}}^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}} = \partial_{\bar{i}}\,, $$

$$ \theta^i = A_h^i dx^h + A_{\bar{h}}^i dx^{\bar{h}} = dx^i\,, $$
$$ \theta^{\bar{i}} = A_h^{\bar{i}} dx^h + A_{\bar{h}}^{\bar{i}} dx^{\bar{h}} = \Gamma_h^i dx^h + dx^{\bar{i}} $$

olur. Şimdi holonom olmayan objenin bileşenlerini bulalım.

$$ \Omega_{\alpha\beta}^\gamma = (D_\alpha A_\beta^C - D_\beta A_\alpha^C) A_C^\gamma $$

ifadesinden

$$ \begin{aligned} \Omega_{ij}^k &= (D_i A_j^m - D_j A_i^m) A_m^k + (D_i A_j^{\bar{m}} - D_j A_i^{\bar{m}}) A_{\bar{m}}^k \\ &= (D_i \delta_j^m - D_j \delta_i^m) \delta_i^k + (D_i(-\Gamma_j^m) + D_j \Gamma_i^m).0 \\ &= (\partial_i - \Gamma_i^h \partial_{\bar{h}}) \delta_j^k - (\partial_i - \Gamma_j^h \partial_{\bar{h}}) \delta_i^k \\ &= 0\,, \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
\Omega^{\bar{k}}_{i\bar{j}} &= (D_i A^m_{\bar{j}} - D_{\bar{j}} A^m_i) A^{\bar{k}}_m + (D_i A^{\bar{m}}_{\bar{j}} - D_{\bar{j}} A^{\bar{m}}_i) A^{\bar{k}}_{\bar{m}} \\
&= \partial_{\bar{j}}(y^s \Gamma^k_{si}) \\
&= \delta^s_j \Gamma^k_{si} + y^s \partial_{\bar{j}} \Gamma^k_{si} \\
&= \Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega^{\bar{k}}_{\bar{i}j} &= (D_{\bar{i}} A^m_j - D_j A^m_{\bar{i}}) A^{\bar{k}}_m + (D_{\bar{i}} A^{\bar{m}}_j - D_j A^{\bar{m}}_{\bar{i}}) A^{\bar{k}}_{\bar{m}} \\
&= (-\partial_{\bar{i}} \Gamma^m_j) \delta^k_m \\
&= -\partial_{\bar{i}}(y^s c) \\
&= -\delta^s_i \Gamma^k_{sj} = -\Gamma^k_{ij} ,
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\Omega^{\bar{k}}_{ij} &= (D_i A^m_j - D_j A^m_i) A^{\bar{k}}_m + (D_i A^{\bar{m}}_j - D_j A^{\bar{m}}_i) A^{\bar{k}}_{\bar{m}} \\
&= \left[(\partial_i - \Gamma^h_i \partial_{\bar{h}})\delta^m_j - (\partial_j - \Gamma^h_j \partial_{\bar{h}})\delta^m_i\right] \Gamma^k_m + \left[(\partial_i - \Gamma^h_i \partial_{\bar{h}})\Gamma^m_j - (\partial_j - \Gamma^h_j \partial_{\bar{h}})\Gamma^m_i\right] \delta^k_m \\
&= \partial_i \Gamma^m_j \delta^k_m - \Gamma^h_i \partial_{\bar{h}}\, y^s \Gamma^m_{sj} \delta^k_m - \partial_j \Gamma^m_i \delta^k_m + \Gamma^h_j \partial_{\bar{h}}\, y^s \Gamma^m_{si} \delta^k_m \\
&= \partial_i \Gamma^k_j - \partial_j \Gamma^k_i - \Gamma^h_i \delta^s_h \Gamma^k_{sj} + \Gamma^h_j \delta^s_h \Gamma^k_{si} \\
&= \partial_i \Gamma^k_j - \partial_j \Gamma^k_i - \Gamma^s_i \Gamma^k_{sj} + \Omega^{\bar{k}}_{ij} \Gamma^k_{si} \\
&= -K^k_{jih}\, y^h
\end{aligned}
$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
\Omega^{\bar{k}}_{ij} &= -\Omega^{\bar{k}}_{ji} = -K^k_{ijh}\, y^h , \\
\Omega^{\bar{k}}_{\bar{i}j} &= -\Omega^{\bar{k}}_{j\bar{i}} = \Gamma^k_{ij}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada K_{ijh} ,g_{ij} metriğine göre eğrilik tensörünün bileşenleridir. Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
\left[D_\alpha, D_\beta\right] &= \left[A^A_\alpha \partial_A, A^B_\beta \partial_B\right] \\
&= A^A_\alpha \partial_A (A^B_\beta \partial_B) - A^B_\beta \partial_B (A^A_\alpha \partial_A) \\
&= A^A_\alpha (\partial_A A^B_\beta) \partial_B + A^A_\alpha A^B_\beta \partial^2_{AB} - A^B_\beta (\partial_B A^A_\alpha) \partial_A - A^B_\beta A^A_\alpha \partial_{BA} \\
&= (A^A_\alpha \partial_A A^C_\beta - A^A_\beta \partial_A A^C_\alpha) \partial_C \\
&= (D_\alpha A^C_\beta - D_\beta A^C_\alpha) A^\gamma_C A^C_\gamma \partial_C \\
&= \Omega^\gamma_{\alpha\beta} D_\gamma
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\widetilde{\Gamma}^{A}_{CB}$, $\widetilde{g}_{CB}$ metriğine göre Christoffel sembolleri olmak üzere, $I+III$ metriğine göre tanımlanan $\widetilde{\nabla}$ Riemannıan konneksiyonunun bileşenleri adapte olmuş çatıya göre

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}=(D_{\alpha}A^{A}_{\beta}+\widetilde{\Gamma}^{A}_{CB}A^{C}_{\gamma}A^{B}_{\beta})A^{\alpha}_{A}$$

şeklindedir. Ayrıca burada

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}-\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Omega^{\gamma}_{\alpha\beta}$$

olur. $I+III$ metriğinin kovaryant türevinin adapte olmuş çatıya göre bileşenleri

$$\nabla_{\delta}\widetilde{g}_{\gamma\beta}=D_{\delta}\widetilde{g}_{\gamma\beta}-\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\widetilde{g}_{\varepsilon\beta}-\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\beta}\widetilde{g}_{\gamma\varepsilon}$$

şeklindedir. Buna göre aşağıdaki gibi üç durum mevcuttur.

$$\begin{aligned}\nabla_{\delta}\widetilde{g}_{\gamma\beta}&=D_{\delta}\widetilde{g}_{\gamma\beta}-\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\widetilde{g}_{\varepsilon\beta}-\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\beta}\widetilde{g}_{\gamma\varepsilon}=0\,,\\ \nabla_{\gamma}\widetilde{g}_{\beta\delta}&=D_{\gamma}\widetilde{g}_{\beta\delta}-\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\widetilde{g}_{\varepsilon\delta}-\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\widetilde{g}_{\beta\varepsilon}=0\,,\\ \nabla_{\beta}\widetilde{g}_{\delta\gamma}&=D_{\beta}\widetilde{g}_{\delta\gamma}-\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\beta\delta}\widetilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\widetilde{g}_{\delta\varepsilon}=0\end{aligned}$$

Son iki ifade toplanıp birinciden çıkarılırsa

$$D_{\gamma}\widetilde{g}_{\beta\delta}+D_{\beta}\widetilde{g}_{\delta\gamma}-D_{\delta}\widetilde{g}_{\gamma\beta}-2\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\widetilde{g}_{\varepsilon\delta}+\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\widetilde{g}_{\delta\varepsilon}-2\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\beta}\widetilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\Omega^{\varepsilon}_{\beta\delta}\widetilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\widetilde{g}_{\beta\varepsilon}=0$$

bulunur. Burada

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}-\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Omega^{\alpha}_{\gamma\beta}$$

ifadesi kullanılmıştır. Buna göre

$$\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\widetilde{g}_{\varepsilon\delta}=\frac{1}{2}(D_{\gamma}\widetilde{g}_{\beta\delta}+D_{\beta}\widetilde{g}_{\delta\gamma}-D_{\delta}\widetilde{g}_{\gamma\beta})+\frac{1}{2}(\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\widetilde{g}_{\delta\varepsilon}-\Omega^{\varepsilon}_{\beta\delta}\widetilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\widetilde{g}_{\beta\varepsilon})$$

yazılır. Bu ifadenin her iki tarafı $\widetilde{g}^{\delta\theta}$ ile çarpılırsa,

$$\widetilde{\Gamma}^{\theta}_{\gamma\beta}=\frac{1}{2}\widetilde{g}^{\delta\theta}(D_{\gamma}\widetilde{g}_{\beta\delta}+D_{\beta}\widetilde{g}_{\delta\gamma}-D_{\delta}\widetilde{g}_{\gamma\beta})+\frac{1}{2}\widetilde{g}^{\delta\theta}(\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\widetilde{g}_{\delta\varepsilon}-\Omega^{\varepsilon}_{\beta\delta}\widetilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\widetilde{g}_{\beta\varepsilon})$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}-\Omega^{\varepsilon}_{\delta\gamma}&=\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\delta}-\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\gamma}=\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\,,\\ \widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\delta}&=\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\gamma}+\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\,,\end{aligned}$$

ifadesi kullanılarak

$$\tilde{\Gamma}^{\theta}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\delta\theta}(D_\gamma \tilde{g}_{\beta\delta} + D_\beta \tilde{g}_{\delta\gamma} - D_\delta \tilde{g}_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\delta\theta}(\,\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\tilde{g}_{\delta\varepsilon} + \Omega^{\varepsilon}_{\beta\delta}\tilde{g}_{\varepsilon\gamma} + \Omega^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\tilde{g}_{\beta\varepsilon})$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$\Omega^{\alpha}_{\gamma\beta} = \tilde{g}^{\alpha\varepsilon}\,\tilde{g}_{\delta\beta}\,\Omega^{\delta}_{\varepsilon\gamma}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\tilde{\Gamma}^{\theta}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\delta\theta}(D_\gamma \tilde{g}_{\beta\delta} + D_\beta \tilde{g}_{\delta\gamma} - D_\delta \tilde{g}_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}(\Omega^{\theta}_{\gamma\beta} + \Omega^{\theta}_{\gamma\beta} + \Omega^{\theta}_{\beta\gamma})$$

olur.Şimdi farklı indisler için $\tilde{\Gamma}^{\theta}_{\gamma\beta}$ değerlerini bulalım:

$$D_i = \partial_i - \Gamma^h_i \partial_{\bar{h}}\ ,\ D_{\bar{i}} = \partial_{\bar{i}}$$
$$\Omega^{\bar{h}}_{ji} = -\,K^h_{jik}y^k\ ,\ \Omega^{\bar{h}}_{j\bar{i}} = \Gamma^h_{ji}$$

şeklindedir.

$\gamma = j\,, \theta = h\,, \beta = i\,, \varepsilon = k\,, \delta = m$ için

$$\tilde{\Gamma}^{\theta}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\delta\theta}(D_\gamma \tilde{g}_{\beta\delta} + D_\beta \tilde{g}_{\delta\gamma} - D_\delta \tilde{g}_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}(\,\Omega^{\theta}_{\gamma\beta} + \Omega^{\varepsilon}_{\delta\beta}\tilde{g}^{\delta\theta}\,\tilde{g}_{\varepsilon\gamma} + \Omega^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\tilde{g}^{\delta\theta}\tilde{g}_{\beta\varepsilon})$$

formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{h}_{ji} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{mh}(D_j \tilde{g}_{im} + D_i \tilde{g}_{mj} - D_m \tilde{g}_{ji}) + \frac{1}{2}(\,\Omega^{h}_{ji} + \Omega^{k}_{mi}\tilde{g}^{mh}\,\tilde{g}_{kj} + \Omega^{k}_{mj}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{ik}) \\
&= \frac{1}{2}g^{mh}(\partial_j g_{im} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ji}) = \Gamma^h_{ji}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{h}_{j\bar{i}} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{mh}(D_j \tilde{g}_{\bar{i}m} + D_{\bar{i}} \tilde{g}_{mj} - D_m \tilde{g}_{j\bar{i}}) + \frac{1}{2}(\,\Omega^{h}_{j\bar{i}} + \Omega^{k}_{m\bar{i}}\tilde{g}^{mh}\,\tilde{g}_{kj} \\
&\quad + \Omega^{\bar{k}}_{m\bar{i}}\tilde{g}^{mh}\,\tilde{g}_{\bar{k}j} + \Omega^{k}_{mj}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{\bar{i}k} + \Omega^{\bar{k}}_{mj}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{\bar{i}\bar{k}}) \\
&= \frac{1}{2}\,\Omega^{\bar{k}}_{mj}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{\bar{i}\bar{k}} \\
&= -\,\frac{1}{2}K^k_{mjl}y^l g^{mh} g_{ik} = -\,\frac{1}{2}y^l K^h_{jli}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{m\bar{h}}(D_{\bar{j}} \tilde{g}_{\bar{i}m} + D_{\bar{i}} \tilde{g}_{m\bar{j}} - D_m \tilde{g}_{\bar{j}\bar{i}}) + \frac{1}{2}(\,\Omega^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}} + \Omega^{k}_{m\bar{i}}\tilde{g}^{m\bar{h}}\,\tilde{g}_{k\bar{j}} \\
&\quad + \Omega^{\bar{k}}_{m\bar{i}}\tilde{g}^{m\bar{h}}\,\tilde{g}_{\bar{k}\bar{j}} + \Omega^{k}_{m\bar{j}}\tilde{g}^{m\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{i}k} + \Omega^{\bar{k}}_{m\bar{j}}\tilde{g}^{m\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{i}\bar{k}}) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{h}_{\bar{j}i} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{mh}(D_{\bar{j}}\tilde{g}_{im} + D_{i}\tilde{g}_{m\bar{j}} - D_{m}\tilde{g}_{\bar{j}i}) + \frac{1}{2}(\Omega^{h}_{\bar{j}i} + \Omega^{k}_{mi}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{k\bar{j}} \\
&\quad + \Omega^{\bar{k}}_{mi}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{\bar{k}\bar{j}} + \Omega^{k}_{m\bar{j}}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{ik} + \Omega^{\bar{k}}_{m\bar{j}}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{i\bar{k}}) \\
&= -K^{k}_{mil}y^{l}g^{mh}g_{kj} = -\frac{1}{2}y^{l}K^{h}_{ilj},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{h}_{\bar{j}\bar{i}} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{mh}(D_{\bar{j}}\tilde{g}_{\bar{i}m} + D_{\bar{i}}\tilde{g}_{m\bar{j}} - D_{m}\tilde{g}_{\bar{j}\bar{i}}) + \frac{1}{2}(\Omega^{h}_{\bar{j}\bar{i}} + \Omega^{k}_{m\bar{i}}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{k\bar{j}} \\
&\quad + \Omega^{\bar{k}}_{m\bar{i}}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{\bar{k}\bar{j}} + \Omega^{k}_{m\bar{j}}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{\bar{i}k} + \Omega^{\bar{k}}_{m\bar{j}}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{\bar{i}\bar{k}}) \\
&= \frac{1}{2}g^{mh}(\partial_{m} - \Gamma^{h}_{m}\partial_{\bar{h}})g_{ji} + \frac{1}{2}(\Gamma^{k}_{mi}g^{mh}g_{kj} + \Gamma^{k}_{mj}g^{mh}g_{ik}) \\
&= \frac{1}{2}(g^{mh}\partial_{m}g_{ji}) + \frac{1}{2}(\Gamma^{k}_{mi}g^{mh}g_{kj} + \Gamma^{k}_{mj}g^{mh}g_{ik}) \\
&= \frac{1}{2}g^{mh}(\partial_{m}g_{ji} + \Gamma^{k}_{mi}g_{kj} + \Gamma^{k}_{mj}g_{ik}) \\
&= \frac{1}{2}g^{mh}\nabla_{m}g_{ji} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{ji} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{m\bar{h}}(D_{j}\tilde{g}_{im} + D_{i}\tilde{g}_{mj} - D_{m}\tilde{g}_{ji}) + \frac{1}{2}(\Omega^{\bar{h}}_{ji} + \Omega^{k}_{mi}\tilde{g}^{m\bar{h}}\tilde{g}_{kj} \\
&\quad + \Omega^{\bar{k}}_{mi}\tilde{g}^{m\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{k}j} + \Omega^{k}_{mj}\tilde{g}^{m\bar{h}}\tilde{g}_{ik} + \Omega^{\bar{k}}_{mj}\tilde{g}^{m\bar{h}}\tilde{g}_{i\bar{k}}) \\
&= \frac{1}{2}(-K^{h}_{jik}y^{k}) = -\frac{1}{2}K^{h}_{jik}y^{k},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{j\bar{i}} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{m\bar{h}}(D_{j}\tilde{g}_{\bar{i}m} + D_{\bar{i}}\tilde{g}_{mj} - D_{m}\tilde{g}_{j\bar{i}}) + \frac{1}{2}(\Omega^{\bar{h}}_{j\bar{i}} + \Omega^{k}_{m\bar{i}}\tilde{g}^{m\bar{h}}\tilde{g}_{kj} \\
&\quad + \Omega^{\bar{k}}_{m\bar{i}}\tilde{g}^{m\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{k}j} + \Omega^{k}_{mj}\tilde{g}^{m\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{i}k} + \Omega^{\bar{k}}_{mj}\tilde{g}^{m\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{i}\bar{k}}) \\
&= \Gamma^{h}_{ji},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{\bar h}_{\bar j i} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\bar m \bar h}(D_{\bar j}\, \tilde{g}_{i\bar m} + D_i\, \tilde{g}_{\bar m \bar j} - D_{\bar m}\tilde{g}_{\bar j i}) \\
&+ \frac{1}{2}(\,\Omega^{\bar h}_{\bar j i} + \Omega^{k}_{\bar m i}\tilde{g}^{\bar m \bar h}\,\tilde{g}_{k\bar j} + \Omega^{\bar k}_{\bar m i}\tilde{g}^{\bar m \bar h}\,\tilde{g}_{\bar k \bar j} + \Omega^{k}_{\bar m \bar j}\tilde{g}^{\bar m \bar h}\tilde{g}_{ik} + \Omega^{\bar k}_{\bar m \bar j}\,\tilde{g}^{\bar m \bar h}\,\tilde{g}_{i\bar k}) \\
&= \frac{1}{2}g^{mh}(\partial_i g_{mj}) + \frac{1}{2}(-\Gamma^h_{ij} - \Gamma^k_{im}g^{mh}g_{kj}) \\
&= \frac{1}{2}g^{mh}\partial_i g_{mj} - \frac{1}{2}\Gamma^h_{ij}g^{mh}g_{mk} - \frac{1}{2}\Gamma^k_{im}g^{mh}g_{kj} \\
&= \frac{1}{2}g^{mh}(\partial_i g_{mj} - \Gamma^h_{ij}g_{mk} - \frac{1}{2}\Gamma^k_{im}g_{kj} \\
&= \frac{1}{2}g^{mh}\nabla_i g_{mj} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

şeklinde adapte olmuş çatıya göre $\tilde{\Gamma}^{\theta}_{\gamma\beta}$ nın koordinatları elde edilmiş olur. Burada

$$K^h_{jki} = g^{ht}g_{is}K^s_{tjk}$$

şeklindedir. $\tilde{X}$, adapte olmuş çatıya göre bileşenleri

$$(\tilde{X}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^{h} \\ \tilde{X}^{\bar h} \end{pmatrix}$$

şeklinde olan bir vektör alanı olsun. Buna göre $\tilde{\nabla}\tilde{X}$ kovaryant türevin bileşenlerini bulalım.

$$(\tilde{\nabla}X)^B_A = \tilde{\nabla}_A X^B = \partial_A X^B + \Gamma^B_{AC}X^C$$

ifadesini açarsak

$$
\begin{aligned}
A^A_\alpha A^\beta_B(\tilde{\nabla}X)^B_A &= A^A_\alpha A^\beta_B(\partial_A X^B + \Gamma^B_{AC}X^C) \\
&= A^A_\alpha A^\beta_B(\partial_A X^B) + A^A_\alpha(\partial_A A^\beta_B)X^B - A^A_\alpha(\partial_A A^\beta_B)X^B \\
&\qquad + A^A_\alpha A^\beta_B \Gamma^B_{AC}X^C
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

olur. Diğer yandan adapte olmuş çatıda

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} &= A^A_\alpha A^B_\beta A^\gamma_C \Gamma^C_{AB} + (D_\alpha A^C_\beta)A^\gamma_C \\
\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma} &= A^A_\alpha A^C_\gamma A^\beta_B \Gamma^B_{AC} + (D_\alpha A^C_\gamma)A^\beta_C
\end{aligned}
$$

olduğundan bu ifadenin her iki tarafını X^γ ile çarpılırsa

$$X^{\gamma}\overset{\sim}{\Gamma}{}^{\beta}_{\alpha\gamma} = A^{A}_{\alpha}A^{C}_{\gamma}A^{\beta}_{B}\Gamma^{B}_{AC}X^{\gamma} + (D_{\alpha}A^{C}_{\gamma})A^{\beta}_{C}X^{\gamma}$$

elde edilir. Şimdi

$$A^{A}_{\alpha}A^{\beta}_{B}\Gamma^{B}_{AC}$$

ifadesini $A^{C}_{\gamma}X^{\gamma}$ ile çarpalım:

$$\begin{aligned} A^{A}_{\alpha}A^{\beta}_{B}\Gamma^{B}_{AC}A^{C}_{\gamma}X^{\gamma} &= X^{\gamma}\overset{\sim}{\Gamma}{}^{\beta}_{\alpha\gamma} - (D_{\alpha}A^{C}_{\gamma})A^{\beta}_{C}X^{\gamma} \\ &= A^{C}_{\gamma}(D_{\alpha}A^{\beta}_{C})X^{\gamma} \\ &= D_{\alpha}(A^{C}_{\gamma}A^{\beta}_{C}) \\ &= D_{\alpha}\delta^{\beta}_{\gamma} \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılır. Buna göre (4.15) ifadesi

$$\begin{aligned} A^{A}_{\alpha}A^{\beta}_{B}(\tilde{\nabla}X)^{B} &= D_{\alpha}X^{\beta} + \overset{\sim}{\Gamma}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}X^{\gamma} - (D_{\alpha}A^{C}_{\gamma})A^{\beta}_{C}X^{\gamma} - A^{A}_{\alpha}A^{\beta}_{B}X^{\beta} \\ &= D_{\alpha}X^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}X^{\gamma} \end{aligned}$$

olup

$$\tilde{\nabla}_{\alpha}\tilde{X}{}^{\beta} = D_{\alpha}\tilde{X}{}^{\beta} + \overset{\sim}{\Gamma}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}X^{\gamma}$$

elde edilir.

M_n de bir X vektör alanı düşünelim. Buna göre X in ${}^{V}X$ dikey lifti, ${}^{C}X$ tam lifti ve ${}^{H}X$ yatay lifti

$$({}'X^{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{h} \end{pmatrix}, \ (\tilde{X}{}^{A}) = \begin{pmatrix} X^{h} \\ \partial X^{h} \end{pmatrix}, \ (\bar{X}^{A}) = \begin{pmatrix} X^{h} \\ -\Gamma^{h}_{i}X^{h} \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. O zaman adapte olmuş çatıya göre

$${}'X^{\alpha} = A^{\alpha}_{A}\,{}'X^{A}\ , \quad \tilde{X}{}^{\alpha} = A^{\alpha}_{A}\tilde{X}{}^{A}\ , \quad \bar{X}^{\alpha} = A^{\alpha}_{A}\bar{X}^{A}$$

bileşenleri

$$({}'X^{\alpha}) = A^{\alpha}_{A}\,{}'X^{A} = \begin{pmatrix} \delta^h_k & 0 \\ \Gamma^h_k & \delta^h_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta^h_k X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix},$$
$$(\tilde{X}^{\alpha}) = A^{\alpha}_{A}\,\tilde{X}^{A} = \begin{pmatrix} \delta^h_k & 0 \\ \Gamma^h_k & \delta^h_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^h_k X^h \\ X^h\Gamma^h_k + \delta^h_k \partial X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ \nabla X^h \end{pmatrix},$$
$$(\bar{X}^{\alpha}) = A^{\alpha}_{A}\,\bar{X}^{A} = \begin{pmatrix} \delta^h_k & 0 \\ \Gamma^h_k & \delta^h_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma^h_k X^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ X^h\Gamma^h_k - \Gamma^h_k X^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur[19]. Şimdi bu liftlerin kovaryant türevlerini düşünelim .$\tilde{\nabla}\,{}^V X$, $\tilde{\nabla}\,{}^C X$ ve $\tilde{\nabla}\,{}^H X$ kovaryant türevleri adapte olmuş çatıya göre

$$(\tilde{\nabla}_{\beta}\,{}'X^{\alpha}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}K^h_{jki}y^k X^i & 0 \\ \nabla_j X^h & 0 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

$$(\tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{X}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \nabla_j X^h - \frac{1}{2}K^h_{jki}y^k \nabla_l X^i y^l & -\frac{1}{2}K^h_{ikj}y^k X^i \\ \nabla_j \nabla_l X^h - \frac{1}{2}K^h_{jik}y^k X^i & \nabla_j X^h \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$$(\tilde{\nabla}_{\beta}\bar{X}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \nabla_j X^h & -\frac{1}{2}K^h_{ikj}y^k X^i \\ -\frac{1}{2}K^h_{jik}y^k X^i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir.

4.2.Teorem: $I+III$ metriğine göre M_n de herhangi bir vektör alanının vertikal , tam ve horizontal liftlerinin parelel olması için gerek ve yeter şart verilen vektör alanının M_n de parelel olmasıdır[23].

(4.17), (4.17) ve (4.18) ifadelerinden

$$\tilde{\nabla}_{\beta}\,{}'X^{\alpha} = 0 \ , \ \tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{X}^{\alpha} = 2\nabla_i X^i, \ \tilde{\nabla}_{\beta}\bar{X}^{\alpha} = \nabla_i X^i$$

olarak yazılır.

M_n de X^h bileşenler ile verilen bir vektör alanının $I+III$ metriğine göre yatay, tam ve dikey liftleri adapte olmuş çatıya göre

$$({}'X_{\beta}) = (0, X_i) \ , \ (\tilde{X}_{\beta}) = (X_i, \nabla X_i) \ , \ (\bar{X}_{\beta}) = (X_i, 0)$$

şeklindedir. Burada $X_i = g_{ih}X^h$ şeklindedir. Böylece ${}^H X$, ${}^C X$ ve ${}^V X$ liftlerinin rotasyonlarının bileşenleri adapte olmuş çatıya göre

$$(\tilde{\nabla}_{\beta}\,{}'X_{\alpha} - \tilde{\nabla}_{\alpha}\,{}'X_{\beta}) = \begin{pmatrix} -K^h_{jik}y^k X_h & -\nabla_i X_j \\ \nabla_j X_i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

$$(\tilde{\nabla}_\beta \tilde{X}_\alpha - \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{X}_\beta) = \begin{pmatrix} (\nabla_j X_i - \nabla_i X_j) - (K_{jik}^h \nabla_l X_h) y^k y^l & -y^k \nabla_i \nabla_k X_j \\ y^k \nabla_j \nabla_k X_i & \nabla_j X_i - \nabla_i X_j \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{\nabla}_\beta \bar{X}_\alpha - \tilde{\nabla}_\alpha \bar{X}_\beta) = \begin{pmatrix} \nabla_j X_i - \nabla_i X_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

şeklinde olur. (4.20) eşitliklerinden birincisinden eğer X^* in tam lifti $T(M_n)$ de kapalı ise

$$\nabla_j X_i - \nabla_i X_j = 0 \ , \quad \nabla_j \nabla_i X_n = 0 \tag{4.21}$$

olduğunu görürüz. Ayrıca (4.21) sağlanırsa

$$(K_{jik}^h \nabla_l X_h) y^k y^l = 0$$

sonucu çıkar . Böylece eğer X^* kapalı ve X in ikinci türevi (M_n)de sıfır ise X^* in tam lifti $T(M_n)$ de kapalıdır. Yine (4.20) ifadesinden görüyoruz ki X^* in yatay liftinin $T(M_n)$ de kapalı olması için gerek ve yeter şart X^* in kapalı olmasıdır.

4.3.Teorem: M_n de bir X vektör alanının $I + III$ metriğine göre

i.Dikey liftinin $T(M_n)$ de harmonik olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen X vektör alanının paralel olmasıdır,

ii. Tam liftinin $T(M_n)$ de harmonik olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen X vektör alanının harmonik ve ikinci kovaryant türevinin sıfır olmasıdır

iii. Yatay liftinin $T(M_n)$ de harmonik olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen X vektör alanının harmonik olmasıdır[23].

Şimdi $I + III$ metriğinin Lie türevlerini

$$({}' X_\beta) = (0, X_i) \ , \ (\tilde{X}_\beta) = (X_i, \nabla X_i) \ , \ (\bar{X}_\beta) = (X_i, 0)$$

ifadelerini kullanarak ${}^V X, {}^C X$ ve ${}^H X$ liftlerine göre hesaplayalım. Böylece $T(M_n)$ de adapte olmuş çatıya göre Lie türevlerini

$$(\tilde{\nabla}_\beta {}' X_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha {}' X_\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_i X_j \\ \nabla_j X_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

$$(\tilde{\nabla}_\beta \tilde{X}_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{X}_\beta) = \begin{pmatrix} (\nabla_j X_i + \nabla_i X_j) & (\nabla_i \nabla_k X_j + K_{hikj} X^h) y^k \\ (\nabla_j \nabla_k X_i + K_{hjki} X^h) y^k & \nabla_j X_i + \nabla_i X_j \end{pmatrix},$$

$$(\tilde{\nabla}_\beta \bar{X}_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \bar{X}_\beta) = \begin{pmatrix} \nabla_j X_i + \nabla_i X_j & K_{jki}^h y^k X_h \\ K_{ikj}^h y^k X_h & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Böylece $\nabla_j X_i + \nabla_i X_j = 0$ [22], olmasının bir sonucu olarak

$$\nabla_{\mathrm{j}} X_{\mathrm{k}} X_{\mathrm{i}} + K_{h\mathrm{jki}} X^h = 0$$

elde ederiz. (4.22) ifadesinden söyleyebiliriz ki ,${}^C X$ tam liftinin $T(M_n)$ de bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart X in M_n de bir Killing vektör alanı olmasıdır. Ayrıca X in ikinci türevinin sıfır olmasının bir sonucu olarak

$$K_{jki}^{h} X_h = 0$$

elde ederiz. Yani $\nabla_j X_i + \nabla_i X_j = 0$ ve $K_{jki}^{h} X_h = 0$ olması X in ikinci kovaryant türevinin sıfır olması anlamına gelir.

4.4.Teorem: (M_n) de bir X vektör alanının $I + III$ metriğine göre ,

i.Dikey liftinin $T(M_n)$ bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart X in M_n de ikinci kovaryent türevi sıfır olan bir Killing vektör alanı olmasıdır.

ii. Tam liftinin $T(M_n)$ bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart X in M_n de bir Killing vektör alanı olmasıdır.

iii. Yatay liftinin $T(M_n)$ bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart X in M_n de parelel olmasıdır[23].

4.5.Teorem:M_n de bir X vektör alanının $I + III$ metriğine göre ,

i.Dikey liftinin bir infinitesimal konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart X in M_n de ikinci kovaryent türevi sıfır olan bir Killing vektör alanı olmasıdır.

ii. Tam liftinin bir infinitesimal konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart X in bir infinitesimal homothetik dönüşüm yani c sabitine göre $L_X g = cg$ olmasıdır.

iii. Yatay liftinin bir infinitesimal konform dönüşüm olması için gerek ve yeter X in M_n de paralel olmasıdır[3].

Şimdi $T(M_n)$ nin $\widetilde{K}$ eğrilik tensörünün bileşenlerini $I + III$ metriğine göre hesaplayalım. Adapte olmuş çatı $\{\bar{X}_{(\alpha)}\}$ ile ifade edilmiştir. Dolayısıyla

$$\widetilde{K}(\widetilde{X}_{(\delta)}, \widetilde{X}_{(\gamma)})\widetilde{X}_{(\beta)} = \widetilde{\nabla}_\delta \widetilde{\nabla}_\gamma \widetilde{X}_{(\beta)} - \widetilde{\nabla}_\gamma \widetilde{\nabla}_\delta \widetilde{X}_{(\beta)} - \Omega_{\gamma\delta}^{\varepsilon} \widetilde{\nabla}_\varepsilon \widetilde{X}_{(\beta)} \tag{4.23}$$

olduğu görülür. Burada

$$\tilde{\nabla}_\alpha = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_{(\alpha)}}$$

şeklindedir. Diğer yandan

$$\tilde{\nabla}_\gamma \tilde{X}_{(\beta)} = \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} \tilde{X}_{(\alpha)} \tag{4.24}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}$ adapte edilmiş çatıya göre $\tilde{\nabla}$ nın bileşenleridir. Böylece (4.23) ve (4.24) ifadelerinden

$$\tilde{K}^{\alpha}_{\delta\gamma\beta} = D_\delta \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} - D_\gamma \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\delta\beta} + \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\delta\varepsilon}\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\beta} - \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\beta} - \Omega^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\varepsilon\beta} \tag{7.25}$$

olduğu görülür. Böylece adapte olmuş çatıya göre

$$\tilde{K}^{h}_{kji} = K^{h}_{kji} + \frac{1}{4}(K^{h}_{atk}K^{a}_{jis} - K^{h}_{atj}K^{a}_{kis})y^t y^s - \frac{1}{2}(K^{a}_{kjt}K^{h}_{isa})y^t y^s \,,$$

$$\tilde{K}^{\bar{h}}_{kji} = -\frac{1}{2}(\nabla_k K^{h}_{jis} - \nabla_j K^{h}_{kis})y^s \,,$$

$$\tilde{K}^{\bar{h}}_{kj\bar{i}} = K^{h}_{kji} + \frac{1}{4}(K^{h}_{kat}K^{a}_{isj} - K^{h}_{jat}K^{a}_{isk})y^t y^s \,,$$

$$\tilde{K}^{h}_{\bar{k}\bar{j}i} = K^{h}_{kji} + \frac{1}{4}(K^{h}_{kta}K^{a}_{jsi} - K^{h}_{jta}K^{a}_{ksi})y^t y^s \,,$$

$$\tilde{K}^{\bar{h}}_{\bar{k}\bar{j}i} = 0, \quad \tilde{K}^{\bar{h}}_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}} = 0 \,, \quad \tilde{K}^{h}_{k\bar{j}i} = -\frac{1}{2}(\nabla_k K^{h}_{jsi})\, y^s \,,$$

$$\tilde{K}^{\bar{h}}_{k\bar{j}i} = \frac{1}{2}K^{h}_{kji} + \frac{1}{4}(K^{h}_{kat}K^{a}_{jsi})\, y^t y^s \,, \quad \tilde{K}^{\bar{h}}_{k\bar{j}\bar{i}} = 0$$

yazılır.

4.6.Teorem: Bir M_n Riemannian manifoldu üzerinde $T(M_n)$ tanjant demetin lokal olarak yüzey olması için gerek ve yeter şart M_n in lokal yüzey olmasıdır[3].

5. $I+III$ METRİĞİNE GÖRE TANJANT DEMETTE ALMOST KAHLER YAPILAR

Tanjant demette g_{ji} metriğine göre bir Riemannian manifoldunun

$$p = -\ g_{ji}y^j dx^i$$

şeklinde global olarak tanımlı $1-$ formu mevcuttur.

$$dp = \frac{1}{2}\tilde{F}_{CB}dx^C \Lambda\, dx^B$$

dış difarensiyeli global olarak tanımlanmış $2-$ formdur.İndirgenmiş koordinatlara göre

$$(\tilde{F}_{CB}) = \begin{pmatrix} -(\partial_j g_{is} - \partial_i g_{js})y^s & -\ g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

bileşenleri mevcuttur.

$$(\partial_j g_{is} - \partial_i g_{js})y^s = \Lambda_{ji} - \Lambda_{ij}$$

olduğundan (5.1) ifadesi

$$(\tilde{F}_{CB}) = \begin{pmatrix} \Lambda_{ij} - \Lambda_{ji} & -\ g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada $\Lambda_{ji} = \Gamma_j^t g_{ti}$ şeklindedir.

$$(\tilde{F}_C^{\ A}) = \tilde{F}_{CB}\tilde{g}^{BA}$$

eşitliğinden indirgenmiş koordinatlara göre

$$(\tilde{F}_C^{\ A}) = \begin{pmatrix} -\Gamma_j^h & -\delta_j^h \\ \Gamma_j^k \Gamma^h\, K + \delta_j^h & \Gamma_j^h \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

elde edilir. Buna göre

$$\tilde{F}_B^{\ A}\tilde{F}_C^{\ B} = -\ \delta_C^A \tag{5.3}$$

olduğunu görürüz. Burada $\tilde{F}_B^{\ A}$,$T(M_n)$ de bir almost kompleks yapı tanımlar.

$$(\tilde{g}_{CB}) = \begin{pmatrix} g_{ji} + g_{ts}\Gamma_j^t \Gamma_i^s & \Lambda_{ij} \\ \Lambda_{ji} & g_{ji} \end{pmatrix}$$

ve (5.3) ifadesinden

$$\tilde{F}_C^{\ E}\tilde{F}_B^{\ D}\tilde{g}_{ED} = \tilde{g}_{CB}$$

buluruz. ($\tilde{F}^{A}_{B}, \tilde{g}_{CB}$) gösterimi $T(M_n)$ de bir almost Hermit yapı tanımlar. Diğer yandan $\frac{1}{2}\tilde{F}_{CB}\, dx^C\, dx^B$, $2-$formu için

$$d(\frac{1}{2}\tilde{F}_{CB}\, dx^C \Lambda\, dx^B) = 0$$

olur. Çünkü bu form

$$dp = \frac{1}{2}\tilde{F}_{CB}\, dx^C \Lambda\, dx^B$$

ifadesine dayanarak çıkarılmıştır.

5.1.Teorem: $T(M_n)$ tanjant demette $I+III$ metrği ve (5.2) ifadesi ile tanımlı almost kompleks yapı bir almost Kahlerian yapıdır[3].

$\tilde{F}_{CB}$ ve $\tilde{F}^{A}_{C}$ tensör alanları adapte olmuş çatıya göre

$$(\tilde{F}_{\gamma\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{F}^{\alpha}_{\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^h_i \\ \delta^h_i & 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Şimdi $\tilde{F}^{A}_{C}$ almost kompleks yapının kovaryant türevini düşünelim.(5.4) ifadesi ve

$$\tilde{\Gamma}^{h}_{ji} = \Gamma^{h}_{ji}\ ,\ \tilde{\Gamma}^{h}_{j\bar{i}} = -\frac{1}{2}K^{h}_{jki}y^k\ ,\ \tilde{\Gamma}^{h}_{\bar{j}i} = -\frac{1}{2}K^{h}_{ikj}y^k\ ,\ \tilde{\Gamma}^{h}_{\bar{j}\bar{i}} = 0$$
$$\tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{ji} = -\frac{1}{2}K^{h}_{jik}y^k\ ,\ \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{j\bar{i}} = \Gamma^{h}_{ji}\ ,\ \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}} = 0\ ,\ \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}i} = 0$$

eşitlikleri kullanılarak $I+III$ metriğine göre $\tilde{F}^{A}_{C}$ almost kompleks yapının kovaryent türevi

$$\tilde{\nabla}_j\tilde{F}^{\bar{h}}_{i} = -\ \tilde{\nabla}_j\tilde{F}^{h}_{\bar{i}} = \frac{1}{2}(K^h_{jki} + K^h_{jik})y^k$$
$$\tilde{\nabla}_j\tilde{F}^{h}_{i} = \tilde{\nabla}_{\bar{j}}\tilde{F}^{h}_{i} = \frac{1}{2}K^h_{ikj}y^k$$

şeklinde olan $\tilde{\nabla}_\gamma\tilde{F}^{\alpha}_{\beta}$ bileşenlerine sahiptir ve diğer bileşenleri ise sıfırdır.

5.2.Teorem: Herhangi bir Riemanniann manifoldun tanjant demeti $I+III$ metriğine göre Kahleriandır ve (5.2) ile tanımlanan almost kompleks yapının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart Riemanniann manifoldun lokal flat olmasıdır[20].

$T(M_n)$ de bir $\tilde{X}$ vektör alanına göre $\tilde{F}_{CB}$ tensörünün $L_{\tilde{X}}\tilde{F}_{CB}$ Lie türevini inceleyelim.

$\tilde{X}$ vektör alanının bileşenleri $\tilde{X}^{A}$ olmak üzere

$$L_{\tilde{X}}\tilde{F}_{CB} = \tilde{X}^E \partial_E \tilde{F}_{CB} + \tilde{F}_{EB}\partial_C \tilde{X}^E + \tilde{F}_{CE}\partial_B \tilde{X}^E$$

şeklindedir. Adapte olmuş çatıya göre $L_{\tilde{X}}\tilde{F}_{CB}$ nın bileşenlerini $(L_{\tilde{X}}\tilde{F})_{\gamma\beta}$ ile gösterirsek

$$(L_{\tilde{X}}\tilde{F})_{\gamma\beta} = \tilde{X}^\varepsilon D_\varepsilon \tilde{F}_{\gamma\beta} + \tilde{F}_{\varepsilon\beta} D_\gamma \tilde{X}^\varepsilon + \tilde{F}_{\gamma\varepsilon} D_\beta \tilde{X}^\varepsilon + \tilde{X}^\varepsilon (\Omega^\delta_{\varepsilon\gamma}\tilde{F}_{\delta\beta} + \Omega^\delta_{\varepsilon\beta}\tilde{F}_{\gamma\delta})$$

elde ederiz. Burada $\tilde{X}^\alpha$ ve $\tilde{F}_{\gamma\beta}$ sırası ile $\tilde{X}$ ve $\tilde{F}_{CB}$ nin bileşenleridir. Böylece X vektör alanının ${}^V X$ dikey liftine göre Lie türevi

$$(\,(L_{V_X}\tilde{F})_{\gamma\beta}\,) = -\begin{pmatrix} \nabla_j X_i - \nabla_i X_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

${}^H X$ yatay liftine göre Lie türevi

$$(\,(L_{H_X}\tilde{F})_{\gamma\beta}\,) = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla_i X_j \\ \nabla_j X_i & 0 \end{pmatrix}$$

ve ${}^C X$ tam liftine göre Lie türevi

$$(\,(L_{C_X}\tilde{F})_{\gamma\beta}\,) = -\begin{pmatrix} g_{jb}(L_X\Gamma^b_{ia})X^a - g_{bi}(L_X\Gamma^b_{ja})X^a & L_X g_{ji} \\ -L_X g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptirler. Diğer yandan $L_X g_{ji} = 0$ olduğundan dolayı $L_X \Gamma^h_{ji} = 0$ olur[22].

5.3.Teorem: M manifoldundaki X vektör alanının $T(M_n)$ deki $\tilde{F}_{CB}$ nin Lie türevinin,

i.Dikey lift olması için gerek ve yeter şart harmonik olmasıdır,

ii. Yatay lift olması için gerek ve yeter şart parelel olmasıdır,

iii. Tam lift olması için gerek ve yeter şart Killing vektör alanı olmasıdır[23].

$\tilde{F}^A_B$ tensör alanına göre bir vektör alanının Lie türevi sıfır ise o vektör alanına almost analitik denir. Adapte olmuş çatıya göre $L_{\tilde{X}}\tilde{F}^A_B$ nin bileşenlerini $(L_{\tilde{X}}\tilde{F}_B)^\alpha_\beta$ ile gösterirsek,

$$(L_{\tilde{X}}\tilde{F})^\alpha_\beta = \tilde{X}^\varepsilon D_\varepsilon \tilde{F}^\alpha_\beta - \tilde{F}^\varepsilon_\beta D_\varepsilon \tilde{X}^\alpha + \tilde{F}^\alpha_\varepsilon D_\beta \tilde{X}^\varepsilon + \tilde{X}^\varepsilon (\Omega^\alpha_{\varepsilon\delta}\tilde{F}^\delta_\beta - \Omega^\delta_{\varepsilon\beta}\tilde{F}^\alpha_\delta)$$

olur. Böylece ${}^V X$ dikey lifti için

$$((L_{V_X}\tilde{\mathrm{F}})^{\alpha}_{\beta}) = -\begin{pmatrix} \nabla_i X^h & 0 \\ 0 & \nabla_i X^h \end{pmatrix},$$

${}^H X$ yatay lifti için

$$((L_{H_X}\tilde{\mathrm{F}})^{\alpha}_{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_i X^h \\ -\nabla_i X^h & 0 \end{pmatrix},$$

ve ${}^C X$ tam lifti için

$$((L_{C_X}\tilde{\mathrm{F}})^{\alpha}_{\beta}) = -\begin{pmatrix} (L_X \Gamma^h_{is})X^s & 0 \\ 0 & (L_X \Gamma^h_{is})X^s \end{pmatrix}$$

bulunur.

5.4.Teorem: Almost analitik olan $I + III$ metriği ile tanımlı almost -Kahlerian yapıya göre M_n de bir X vektör alanının

i.Dikey liftinin olması için gerek ve yeter şart X in parelel vektör alanı olmasıdır,

ii. Yatay liftinin olması için gerek ve yeter şart X in parelel vektör alanı olmasıdır,

iii.Tam liftinin olması için gerek ve yeter şart X in M_n de bir infinitesimal afin dönüşüm olmasıdır[3].

5.1. $I + III$ Metriğine Göre Tanjant Demette Geodezikler

C, M_n de lokal olarak $x^h = x^h(t)$ ile ifade edilen bir eğri ve $X^h(t)$,C boyunca bir vektör alanı olsun. g metriğine göre M_n Riemannian manifoldu üzerine Tanjant demette bir $\tilde{\mathrm{C}}$ eğrisini

$$x^h = x^h(t)\,,\, y^h = X^h(t) \tag{5.5}$$

ile tanımlarız. Eğer $\tilde{\mathrm{C}}$ eğrisi her noktada

$$\bar{C}^h_A \frac{dx^A}{dt} = 0 \quad \text{yani} \quad \frac{\delta X^h}{dt} = \frac{dX^h}{dt} + \Gamma^h_{ji}\frac{dx^j}{dt}X^i = 0$$

sağlıyorsa o zaman $\tilde{\mathrm{C}}$ eğrisi C eğrisinin bir horizontal lifti olur. Burada

$$\bar{C}^h_A = (\Gamma^h_i, \delta^h_i)$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece, eğer $t = t_{\circ}$ için $X^h = X^h_{\circ}$ başlangıç şartı verilmişse (5.5) eşitlikleri ile ifade edilen tek bir yatay lift mevcuttur. (5.5) ile verilen bir $\tilde{\mathrm{C}}$

eğrisinin $M_n$de $x^h = x^h(t)$ ile verilen eğrinin bir yatay lifti olması için gerek ve yeter şart X^h ın C boyunca parelel vektör alanı olmasıdır. X^h,C ye göre $\frac{dx^h}{dt}$tanjant vektör alanı ise $\tilde{C}$ eğrisi C nin doğal(tabii) lifti adını alır.

Şimdi $I+III$ metriğine göre $T(M_n)$ tanjant demetin geodeziklerinin diferensiyel denklemlerini düşünelim . Eğer t, $T(M_n)$ de bir eğrinin yay uzunluğu ise geodeziklerin denklemleri indirgenmiş koordinatlara göre

$$\frac{\delta^2 x^A}{dt^2} = \frac{d^2 x^A}{dt^2} + \tilde{\Gamma}^A_{CB}\frac{dx^C}{dt}\frac{dx^B}{dt} = 0 \tag{5.6}$$

şeklindedir. (5.6) denklemini A^A_α bileşenlerine göre $\{\tilde{X}_{(i)}, \tilde{X}_{(\bar{i})}\}$ adapte olmuş çatı tercih etmek daha uygundur.

Şimdi

$$\theta^h = B^h_A dx^A = dx^h \, ,$$

$$\theta^{\bar{h}} = C^{\bar{h}}_A dx^A = \delta y^h$$

yazabiliriz. $x^A = x^A(t)$ eğrisi boyunca

$$\frac{\theta^h}{dt} = B^h_A\frac{dx^A}{dt} = \frac{dx^h}{dt} \, ,$$

$$\frac{\theta^{\bar{h}}}{dt} = C^{\bar{h}}_A\frac{dx^A}{dt} = \frac{\delta y^h}{dt} = \frac{dy^h}{dt} + \Gamma^h_{ji}\frac{dx^j}{dt}y^i$$

olur. Buna göre (5.6) formülünü

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^A}{dt}\right) + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta}\left(\frac{\theta^\gamma}{dt}\right)\left(\frac{\theta^\beta}{dt}\right) = 0 \tag{5.7}$$

şeklinde yazabiliriz. O zaman

$$(a) \qquad \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + K^h_{kji}y^k\frac{\delta y^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0 \, , \tag{5.8}$$

$$(b) \qquad \frac{\delta^2 y^h}{dt^2} = 0$$

elde ederiz. (5.7) ifadesinde t parametresi yay uzunluğu olduğu için

$$\tilde{g}_{\beta\alpha}\left(\frac{\theta^\beta}{dt}\right)\left(\frac{\theta^\alpha}{dt}\right) = 1$$

olur. Bu ifadenin açılımını yaptığımızda

$$g_{ji}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}+g_{ji}\frac{\delta y^j}{dt}\frac{\delta y^i}{dt}=1$$

bulunur. Diğer yandan (5.8) , (b) ifadesi

$$\frac{\delta}{dt}(g_{ji}\frac{\delta y^j}{dt}\frac{\delta y^i}{dt})=0$$

anlamındadır. Böylece

$$(\frac{ds}{dt})^2=g_{ji}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=\text{sabit}$$

buluruz. Burada s, M_n de yay uzunluğu olur. Bu yüzden s ve t lineer bağımlıdır dolayısı ile aynı alınması uygun olabilir.

Eğer (5.8) (b) ifadesini sağlayan bir eğri, $x^h=$ sabit ile verilen fibre üzerinde bulunuyorsa

$$\frac{\delta^2 y^h}{dt^2}=0$$

denklemine indirgenir. Öyleki $y^h=a^h t+b^h$, a^h ve b^h sabit olur.

5.5.Teorem: Eğer herhangi bir geodezik $I+III$ metriğine göre M_n nin herhangi bir fibresinde uzanıyorsa, bu geodezik (x^h,y^h) indirgenmiş koordinatlara göre $x^h=c^h$, $y^h=a^h t+b^h$ lineer eşitliklerle gösterilir. Burada a^h , b^h ve c^h sabittir[3].

5.6.Teorem: (M_n) de bir geodeziğin yatay lifti $I+III$ metriğine göre $T(M_n)$de her zaman geodeziktir[3].

(M_n) de $x^h=x^h(t)$ ile tanımlı bir eğrinin doğal liftinin $T(M_n)$de geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$(a)\qquad \frac{\delta^2 x^h}{dt^2}+K^h_{kji}\frac{dx^k}{dt}\frac{\delta^2 x^j}{dt^2}\frac{dx^i}{dt}=0\,, \tag{5.9}$$

$$(b)\qquad \frac{\delta^3 x^h}{dt^3}=0$$

olmasıdır.

5.7.Teorem:(M_n) de herhangi bir geodeziğin yatay lifti $I+III$ metriğine göre $T(M_n)$de geodeziktir[3].

(5.9) de tanımlanan (M_n) deki eğrinin natural lifti hakkında şu sonuçlar elde edilir; (5.9) ifadesinin (b) eşitliğinden

$$\frac{d}{dt}(g_{ji}\frac{\delta^2 x^j}{dt^2}\frac{\delta^2 x^i}{dt^2}) = 0$$

olur. Burada ρ sabit olmak üzere

$$\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = \rho Y^h$$

şeklindedir ve Y^h , $\delta^2 x^h/dt^2$vektörünün yönünde birim vektördür. M_n deki eğrinin tanjantının yönünde $X^h = (dx^h/dt)$ birim vektörü alalım. Eğer $\rho \neq 0$ ise (5.9) in (b) eşitliği

$$Y^h + K^h_{kji} X^k Y^j X^i = 0$$

şeklinde yazılabilir. Böylece Y^h vektörüne göre

$$K_{kjih} X^k Y^j X^i Y^h = -1$$

elde edilir. Bu da, M_n deki eğrinin kesen(oskülatör) düzlemi tarafından belirlenen kesite göre Riemannian kesit eğriliği sabit olması demektir.

5.8.Teorem: Eğer M_n de bir C eğrisinin $\tilde{C}$ tabii lifti $I + III$ metriğine göre $T(M_n)$ de bir geodezik ise ya C geodeziktir veya C nin birinci eğriliği sabittir. C nin kesen(oskülatör) düzlemi tarafından belirlenen kesite göre Riemannian kesit eğriliği her noktada sabittir[23].

KAYNAKLAR

[1] Afifi, Z., 1954, Riemannian Extensions of Affinely Connected Spaces, Quart. Jour. Math., 5,321-320

[2] Bishop, R.L. and Goldberg, S.I., 1968, Tensor Analysis on Manifolds., The Macmillan Company, New York, p. 19-135.

[3] Davies, E.T.,1966, Some Applications of the Theory of Parallel Distributions, Hlavaty Testschript, 80-95

[4] Davies, E.T., 1969, On the Curvature of the Tangent Bundle, Annali di Mat., (I∇),81,193-204

[5] Dombrowski, P., 1962, On the Geometry of the Tangent Bundles, Jour.reine und angew. Math., 210,73-88

[6] Hacısalihoğlu, H.H.,1993, Difarensiyel Geometri A.Ü.Fen Fakültesi

[7] Kobayashi, S., and Nomızu, K., 1963, Foundations of Differential Geometry., Interscience Publishers, 1, p. 26-38.

[8] Koto, S., 1960, Some theorems on almost Kahlerian space, J. Math. Soc., Japan, 12, 422-433.

[9] Koto, S., 1960, Curvatures in Hermitian spaces, Mem. of the Fac. Ed. Niigata Univ., 2, 15-25.

[10] Ledger, A.J., and K. Yano, 1965, The Tangent Bundleof a Locally Symmetric Space, Jour. London Math. Soc.,40, 487-492

[11] Ledger, A.J., and K. Yano, 1967, Almost Complex Structures on Tensör Bundles, Jour. Diff. Geom., 1,355-368

[12] O'neil.B.,1983, Semi-Riemannian Geomerty With Applications to Relativity

[13] Patterson, E.M.,1952, Sımply Harmonic Riemannian Extension, Jour. London Math.Soc.,27,102-107

[14] Patterson, E.M., 1954, Riemannian Extension, Whiche Have Kähler Metric, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A,64,113-126

[15] Patterson, E.M., 1955 Symmetric Kähler Spaces, Jour. London Math. Soc., 30, 286-291

[16] Patterson, E.M., and A.G.Walker, 1952, Riemannian Extensions, Quart.Jour. Math. 3,, 18-28

[17] Ruse,H.S., A.G.Walker, and T.J.Willmore, 1961,Harmonic Spaces, Edizioni Cremonee, Roma

[18] Salimov,A.A., and Mağden,A., 1999, Diferensiyel Geometriye Giriş, Atatürk Üniversitesi

[19] Sasaki,S., 1985, On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds, Tohoku Math. Jour., 10,238-354

[20] Tachibana, S., and M. Okumara 1962, On Almost-Complex Structureof Riemannian Spaces, Tohoku Math. Jour., 14,156-161

[21] Yano,K., 1967, Tensör Fields and Connections on Cross-sections in the Cotangent Bundle, Tohoku Math. Jour.,19,32-48

[22] Yano,K., 1967, Tensör Fields and Connections on Cross-sections in the Tangent Bundle of Differentiable Manifold, Proc. Royal Soc. Edinburg, Sect. ALXVII, 277-288

[23] Yano,K., and E.T., Davies, 1963, On the Tangent Bundles of Finsler and Riemannian Manifolds, Rend. Circ. Mat. Palermo, 12,211-228

[24] Yano,K., and E.T., Davies, 1971, Metrics and Connections in the Tangent Bundle, Kodai Math. Sem. Rep., 23,493-504

[25] Yano,K., and S.Ishihara, 1966, Differential Geometry in Tangent Bundle, Kodai Math. Sem. Rep., 18, 271-292

[26] Yano,K., and S.Kobayashi, 1966, Prolongations of Tensör Fields and Connections to Tangent Bundles, I, General Theory, Jour. Math. Soc. Japon, 18, 194-210

[27] Yano,K., and S.Kobayashi, 1966, Prolongations of Tensör Fields and Connections to Tangent Bundles, II, Affine Automorphisms, Jour. Math. Soc. Japon, 18,236-246

[28] Yano,K., and S.Kobayashi, 1966, Prolongations of Tensör Fields and Connections to Tangent Bundles, III, Holonomy Groups, Jour. Math. Soc. Japon, 19, 486-488