ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RELATİVİSTİK İKİ-CİSİM PROBLEMİ VE ONUN SÜPERSİMETRİK GENELLEŞTİRİLMESİ

Ali Ulvi YILMAZER

DOKTORA TEZİ
FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

1987

ANKARA

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RELATİVİSTİK İKİ-CİSİM PROBLEMİ VE ONUN SÜPERSİMETRİK GENELLEŞTİRİLMESİ

Ali Ulvi YILMAZER

DOKTORA TEZİ
FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu Tez .28-12-1987 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından .100.(Yüz).. Not Takdir Edilerek Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile Kabul Edilmiştir.

Prof.Dr.Z.Zekeriya AYDIN Danışman	Prof.Dr.Hüseyin AKÇAY	Doç.Dr.Namık Kemal PAK

ÖZET

Doktora Tezi

RELATİVİSTİK İKİ-CİSİM PROBLEMİ VE ONUN SÜPERSİMETRİK GENELLEŞTİRİLMESİ

Ali Ulvi YILMAZER

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.Z.Zekeriya AYDIN

1987, Sayfa : 176

Jüri: Prof.Dr.Z.Zekeriya AYDIN
Prof.Dr.Hüseyin AKÇAY
Doç.Dr.Namık Kemal PAK

Bu tezin ilk kısmında önce relativistik iki-cisim probleminin sistematik bir analizi sunulmuştur. Bethe-Salpeter denklemi ve relatif zamanın neden olduğu güçlükleri gidermek için başvurulan ani etkileşme ve quasipotansiyel yaklaşıklıkları incelendikten sonra kuantumlu alanlar teorisinden elde edilen "tek-zamanlı" relativistik iki-fermiyon Hamiltonyeni ile yazılan enerji özdeğer denklemi grup teorik yöntemlerle çözülmüştür. İki-parçacık bağlı-durumlarının sınıflandırılması için uygun işlemciler belirlenip pozitronyumun enerji spektrumu çıkartılmış ve literatürle karşılaştırılmıştır. Elektron-nötrino ve nötroni-antinötrino gibi diğer olası bağlı haller tartışıldıktan sonra, Kemmer-Duffin-Petiau formalizmi ile karşılaştırmaya gidilmiştir. Tezin ikinci kısmında ise önce süpersimetrik alan teorileri (global) incelenmiş ve standard modelin süpersimetrik genişletilmesi tartışılmıştır. Süpersimetrik kuantum mekaniği ve pseudoklâsik mekanik ele alındıktan sonra, spinli parçacıkların dış elektromagnetik veya gravitasyonel alanla etkileşmelerinin süpersimetrik tasviri irdelenmiştir. Son olarak iki-parçacık sistemlerinin süpersimetrik genelleştirilmesi araştırılmıştır. Öklidyen süpersimetriden

hareket edilerek önerilen süpersimetrik Schrödinger denkleminden relativistik iki-cisim denklemleri elde edilmiştir. Modelimizde Lorentz invaryans, dinamik bir simetri olarak yorumlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER : Kuantum elektrodinamiği, Bethe-Salpeter denklemi, Dirac ve Klein Gordon denklemleri, iki-parçacık sistemleri, kovaryans, pozitronyum, bağlı haller, süpersimetri, süperuzay formalizmi, derecelenmiş Lie cebiri, kendiliğinden simetri kırılması, süpersimetrik ayar teorileri (global), kısıtlanmış Hamiltonyen dinamiği.

ABSTRACT

Ph D Thesis

RELATIVISTIC TWO-BODY PROBLEM and ITS SUPERSYMMETRIC EXTENSION

Ali Ulvi YILMAZER

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Engineering Physics

Supervisor : Prof.Dr. Z.Zekeriya AYDIN

1987, Page: 176

Jury: Prof.Dr.Z.Zekeriya AYDIN

Prof.Dr.Hüseyin AKÇAY

Assoc.Prof.Namık Kemal PAK

In the first part of the thesis first a systematic analysis of the relativistic two-body problem is presented. After examining the Bethe-Salpeter equation and discussing the instantaneous and quasipotential approximations to remove the difficulties caused by the relative time, the energy eigenvalue equation written with the so-called one-time relativistic two-fermion Hamiltonian, derived from quantum field theory, has been solved by using the group theoretic methods. After determining the appropriate operators to classify the two-particle bound-states the positronium energy spectra has been obtained and compared with the literature. The other possible two-body bound states such as $e-\nu$ and $\nu-\bar{\nu}$ systems are discussed in detail then a comparison with Kemmer-Duffin-Petiau formalism has been made. In the second part of the thesis first supersymmetric field theories (global) have been examined and the supersymmetric version of the standard model has been discussed. After a study of the supersymmetric quantum mechanics and pseudoclassical mechanics we investigated the supersymmetric description of the spinning particles in external electromagnetic or gravitational fields. Finally the supersymmetric extension of the two-particle systems has been explored. Starting

with the Euclidean supersymmetry we proposed a supersymmetric Schrödinger equation which produce relativistic two-body equations. The Lorentz invariance of the model has been interpreted as a dynamical symmetry.

KEY WORDS : Quantum electrodynamics, Bethe-Salpeter equation, Dirac and Klein-Gordon equations, two-particle states, covariance, positronium, bound-states, supersymmetry, superspace formalism, graded Lie algebra, spontaneous symmetry breaking, supersymmetric gauge theories (global), constrained Hamiltonian dynamics.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince büyük ilgi ve yardımlarını görmüş olduğum tez hocam Sayın Prof.Dr.Z.Zekeriya AYDIN'a içten teşekkür eder, kendisiyle çalışmaktan duyduğum mutluluğu belirtmek isterim. Ayrıca yapmış olduğu çeşitli öneriler ve sürekli desteğinden dolayı Sayın Prof.Dr.Asım BARUT'a içten şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

A	: Kompleks skaler alan
A_μ	: Elektromanyetik dörtlü potansiyel
$\vec{B}$	: Manyetik alan şiddeti
C	: Kompleks eşlenik alma matrisi
$D_A, \bar{D}_A$	: Kovaryant türev
E	: Enerji
$\vec{E}$	: Elektrik alan şiddeti
e	: Elektron yükü
F	: Yardımcı alan
$F_{\mu\bar{\nu}}$	: Antisimetrik elektromanyetik alan tensörü
$g_{\mu\nu}$	: Uzay-zaman metriği
$H, \mathcal{H}$	: Hamiltonyen
$\vec{L}$	: Yörüngesel açısal momentum
L	: Lagranjiyen
$\mathcal{L}$	: Larganjiyen yoğunluğu
$\vec{J}$	: Toplam açısal momentum
m	: Kütle
M	: Toplam kütle
$M_{\mu\nu}$	: Lorentz grubunun jeneratörleri
$\vec{P}$	: Momentum
P_μ	: Enerji-momentum dörtlü vektörü
$Q_A, \bar{Q}_A$	: Süpersimetri jeneratörleri
$\vec{r}$	: Konum vektörü
$\vec{S}$	: Spin
V	: Potansiyel
x_μ	: Dörtlü vektör
$Y_{jm}(\theta,\varphi)$	: Küresel harmonikler

α	: İnce yapı sabiti
$\vec{\alpha}$	: Dirac matrisleri
$\delta(\vec{r})$	: Dirac delta fonksiyonu
γ_μ	: Gamma matrisleri
σ_k	: Pauli matrisleri
Ψ	: Schrödinger dalga fonksiyonu
$\Psi_A, \bar{\Psi}_{\dot{A}}$	: Spinör alanlar-Weyl spinörleri
$\theta_A, \bar{\theta}_{\dot{A}}$	: Grassmann değişkenler
$\vec{\nabla}$	: Gradyent işlemcisi
$\Box^2$	: D'Alembertian
$[\,,\,]_\pm$	: Komütasyon, antikomütasyon
$\{\,,\,\}$	: Poisson parantezi
$\dagger$	: Hermitik eşlenik
$\star$	: Kompleks eşlenik

KISALTMALAR

Tr	:	İz
BS	:	Bethe-Salpeter
GLA	:	Derecelenmiş Lie-Cebri
GUT	:	Büyük Birleşme Teorisi
GWS	:	Glashow-Weinberg-Salam
IA	:	Ani etkileşme
KDP	:	Kemmer-Duffin-Petiau
QED	:	Kuantum elektrodinamiği
QCD	:	Kuantum renk dinamiği
QM	:	Kuantum mekaniği
QP	:	Quasipotansiyel
SQED	:	Süpersimetrik kuantum elektrodinamiği
SUSY	:	Süpersimetri
SYM	:	Süpersimetrik Yang-Mills
SSSM	:	Süpersimetrik Standart Model
SSB	:	Kendiliğinden simetri kırılması
VEV	:	Boşluk beklenti değeri
WZ	:	Wess-Zumino

1. GİRİŞ

Birbirleriyle etkileşen parçacıkların relativistik olarak incelenmesi oldukça eski, yoğun ve tamamlanmış olmaktan çok uzak bir problemdir. Ayrıca karşılıklı olarak etkileşen iki veya daha fazla sayıda fermiyonun relativistik dinamiği, düşük enerji bağlı-durum problemlerinde kuantum elektrodinamiğinin (QED) sınanması için (hidrojen, müonyum, pozitronyumun ince ve çok ince yapıları ve spektrumları) esas önemli konuyu oluşturur. Dolayısıyla QED bağlı-durum teorisi hem çok eski hem de temel bir problemdir ve bu konuda pekçok derleme makele değişik aralıklarla yayınlanmıştır (Bethe ve Salpeter 1957, Nakanishi 1969, Stroscio 1975, Bodwin ve Yennie 1978, Barut 1983 ve 1986).

İyi bilindiği gibi, relativistik olmayan klâsik mekanikte iki-cismin merkezcil kuvvet problemi eşdeğer bir tek-cisim problemine her zaman indirgenebilir (Goldstein 1980). Benzer şekilde relativistik olmayan kuantum mekaniğinde spinsiz iki parçacık için yazılan Schrödinger denklemi, eğer iki parçacık arasındaki potansiyel yanlızca relatif uzaklığa bağlı ise, ki Hidrojen atomu örneğinde olduğu gibi genellikle durum böyledir, yine tek cisim problemine indirgenebilir (Schiff 1968). Oysa iki-cisim probleminin tam relativistik çözümü klâsik mekanik çerçevesinde bile mümkün değildir. Öte yandan relativistik kuantum mekaniğinde merkezcil alan için yazılan Dirac denklemi hiçbir yaklaşıklığa gerek kalmadan, yine Hidrojen atomu örneğinde olduğu gibi, değişkenlere ayrılıp kesin olarak çözülebilir.

Parçacıkların spinleri de hesaba katılmaya başlanınca iki-cisim probleminin karmaşıklığı giderek artar. Tek elektron için yazılan Dirac denklemine benzer olarak, iki tane spin-1/2 parçacık için relativistik bir dalga denklemi girişimleri Eddington (1929) ve Gaunt (1929) ile başlar. Onlar etkileşme enerjisinde yer alan parçacık hızlarının yerine Dirac matrisleri koymuşlardır. Fakat daha sonra bu denklemin verdiği sonuçların kabul edilemez olduğu Breit (1929) tarafından gösterilmiştir.

Birbirleriyle etkileşen spinli parçacık çiftlerinin geleneksel olarak incelenişi, spine bağlı kuvvetler için daha uygun bir ifadenin önerildiği Gregory Breit'in 1929 yılındaki makalesi ile başlar diyebiliriz. Spinsiz iki parçacık için daha önce yazılmış olan Darwin Lagranjiyenindeki (Darwin 1920) etkileşmenin bir benzerine, serbest iki Dirac Hamiltonyenini ekleyerek Breit etkin bir Hamiltonyen elde etti. Onun denklemi de kesin değildi. Parçacıkların hızları çok büyük iken ya da aralarındaki uzaklık çok fazla olduğunda Breit'in denklemi doğru değildi, zira potansiyellerde gecikme etkisi hesaba katılmamıştı. Bununla birlikte Breit'in yaklaşımı kesin teoriye $0(v^2/c^2)$ basamağında bir zayıf-çiftlenim yaklaşıklığını ifade ediyordu.

1951 yılında Bethe ve Salpeter, kuantumlu alanlar teorisinden hareket ederek ulaştıkları integro-diferansiyel bir denklem ile relativistik problemin tam bir formülasyonunu verdiler. Yazdıkları denklem $0(v^2/c^2)$ basamağındaki pertübasyon açılımında Breit etkileşmesini zayıf-çiftlenim limitinde doğruluyordu.

Bethe-Salpeter formalizmi, bağlı hal problemlerine alan teorisinin temel ilkelerine dayanarak elde edilen bir yaklaşımı ifade etmesine ve kuantum elektrodinamiğindeki deneyler ile çok iyi uyuşan sonuçlar vermesine karşın, bu denklemin relativistik bağlı-durum denklemi olarak yorumlanabilmesinin güçlüğü hemen anlaşıldı. Esasında relativistik bir serbestlik derecesi olan relatif zamanın neden olduğu negatif-boylu çözümler bu yorumu olanaksız kılıyordu.

Böylece bizzat Salpeter (1953) ve daha sonra pek çok yazar tarafından (Nakanishi 1969) gösterildiği gibi, başlangıçta 3-boyutta tam çözülebilir olan yaklaşık bir denkleme ihtiyaç vardı. Bu denklem, genellikle, relativistik kinematiği içeren Schrödinger-Coulomb türü bir tek-cisim denklemidir ya da son zamanlarda kullanılmaya başlanan ve ikinci parçacığın davranışını hesaba katan (Barut 1986) Dirac-Coulamb türü bir denklemdir. Bu amaçla Bethe-Salpeter (BS) denklemi için bazı yaklaşıklıklar önerilmiştir. Bunlar arasında önemli olan ikisini ayırdedebiliriz: (i) ilk olarak Salpeter (1952) tarafından önerilen ve pozitronyumun anlatılmasında geniş ölçüde kullanılan (Feldman et.al. 1974) ani etkileşme yaklaşıklığı ve (ii) momentum uzayında Schrödinger veya Klein-Gordon benzeri denklemler veren quasipotansiyel yaklaşıklığı (Logunov ve Tavkhelidze 1963, Todorov 1971).

Relativistik bağlı-durum denklemleri konusuna diğer bir yaklaşım da Dirac'ın kısıtlanmış mekaniği ile relativistik kuantum mekaniğinin birlikte kullanılmasıdır (Todorov 1976, Kalb ve Van Alstine 1976). Dirac parçacıklarının iki-cisim bağlı hal probleminin çözümü için yapılmış olan çalışmalar arasında, eşit-zamanlı relativistik bir dalga denklemi olan Kemmer-Fermi- Yang denklemini özellikle belirtmeliyiz (Kemmer 1937, Fermi ve Yang 1949). Bu denklemin tarihi oldukça eskilere gider ve etkileşme potansiyeli için çoğunlukla fenomenolojik bir ifade kullanılır. Fakat son yıllarda Barut ve arkadaşlarınca (1982 ve 1985), bu denklemin kuantum elektrodinamiğinden eksiksiz olarak türetilebileceği ve iki parçacık arasındaki en genel elektrik ve manyetik potansiyelleri içerdiği gösterilmiştir.

Bethe-Salpeter denklemi yalnızca kuantum elektrodinamiğinde değil, son yıllarda kuantum renk dinamiğinde de (QCD) sık sık kullanılmaktadır. QCD çerçevesi içerisinde bağlı-durum hesaplarının yapılması son derece güç olduğundan, pekçok yazar hadron yapısını incelemek üzere BS formalizmini kullanmış (Geffen ve Suura 1977, Lichtenberg et.al. 1977, Jacobs et.al. 1986, Mitra 1986) ve deneysel verilerle oldukça iyi uyuşan sonuçlar elde etmişlerdir.

Bunlardan başka bazı simetrilerden yararlanarak problemi basitleştirmek için grup teorik teknikler de kullanılmıştır (Ladanyi 1973, Bauhoff 1975 ve 1976, Bakri ve Mansour 1980, Yılmazer 1986). Relativistik iki-fermiyon probleminin tek-zamanlı formülasyonu için değişik yöntemler de önerilmiştir (Suura 1977, Childers 1982, Krolikowski ve Rzewuski 1975, Partovi 1975).

Tezin ilk kısmında yukarıda özetle sözünü ettiğimiz gelişmeleri inceleyeceğiz. Grup teorik tekniklere ait bazı hesaplar M.Sc. tezimde de yer almıştı ve bütünlüğü korumak amacıyla burada kısaca tekrar edilmektedir. Relativistik bağlı-durumların, hareket sabitlerine bakarak seçilen uygun bir gözlemlenirler cümlesine göre sınıflandırılması daha da geliştirildi. Toplam dalga fonksiyonunun bileşenleri için en genel onaltı radyal denklem ve bunların simetrileri ve yapıları ayrıntılı olarak incelendi. Bu denklemlerin, Barut ve Ünal (1985 ve 1986) tarafından elde edilenlere eşdeğer olduğu gözlendi. Onlar da, relativistik iki-cisim Hamiltonyeni için aynı ifadeden hareket etmektedirler, fakat açısal değişkenlerin ayrılması için tümüyle farklı yöntemler kullanmaktadırlar. Daha sonra pozitronyumun enerji spektrumu pertübatif olmayan yolla çıkartıldı ve sonuçların literatürle uyuştuğu gösterildi.

Nötrino-antinötrino sisteminin olası bağlı-durumlarını irdelemek için yine aynı genel grup teorik teknikler kullanıldı ve kütlesiz nötrinoların bağlı-durumlar yaratmıyacakları anlaşıldı. Nötrinolara küçük birer kütle kazandırılırsa $\nu - \bar{\nu}$ sisteminin sıfır bağlı enerjili çözümler verebileceği gösterildi.

Manyetik etkileşmelerin daha baskın olduğu süperpozitronyum ile kütleleri eşit olmayan parçacıklardan kurulu olan elektron-nötrino sistemi gibi daha zorca sistemler de incelendi ve ilgili radyal denklemler yazıldı; fakat pozitronyum örneğinde izlenen hesaplama yolu ile tatmin edici çözemler elde etmek mümkün olmadı. Bunların, belki de r'nin negatif kuvveterini de içeren seri çözümler gerektirdiğini sanmaktayız; bu ileride ayrı bir çalışmanın konusunu oluşturabilir. Son olarak, Kaelberman (1986) tarafından yakın bir süre önce Kemmer-Duffin-Petiau (KDP) formalizminden hareket edilerek varılan çiftlenimli relativistik iki-cisim denklemleriyle bir karşılaştırmaya gidildi. Böylece toplam dalga fonksiyonunun bileşenlerinin gruplandırılması daha açık olarak anlaşılmış oldu: birli (singlet) ve üçlü (triplet) durumları KDP cebirinin sırasıyla beş ve on boyutlu indirgenemez gösterimlerine karşılık gelmektedir ve elde ettiğimiz onaltı denklemin sınıflandırılması tamamıyla buna benzemektedir.

Tezin ikinci kısmında ise süpersimetrik teorileri ele alacağız ve relativistik iki-cisim problemine süpersimetri düşüncesinin nasıl sokulduğunu göreceğiz.

Süpersimetri, bozon ve fermiyonları eşdeğer gören ve doğa için önerilmiş olan bir simetridir. Dört-boyutlu relativistik parçacık teorisinde S-matrisinin iç simetrileri ile uzay-zaman simetrilerini basit olmayan bir şekilde birleştirebilen yegâne simetridir.

1960'lı yıllarda, SU(2) veya daha büyük gruplar örneğinde olduğu gibi iç simetrilerin önemi giderek artıyordu ve fizikçiler, bunları uzay-zaman simetrileri ile basit olmayan bir şekilde birleştirecek bir simetri bulmak için büyük çabalar sarfediyorlardı. Pekçok girişimden sonra böyle bir çabanın Lie grubu çerçevesi içinde mümkün olamıyacağı anlaşıldı - bunlara "no-go" teoremleri adı verildi (Coleman ve Mandula, 1967). Golfand ve Likhtman'ın önemli fakat nispeten az okunmuş olan makalelerinde (1971), Lie grubu kavramının Derecelenmiş Lie Cebirine yükseltilmesi halinde önceki "no-go" teoremlerinin yol açtığı kısıtlamalardan kurtulunabileceği gösterildi. Bu Derecelenmiş Lie Grupları, gerek komütatörleri gerekse antikomülatörleri içeren Derecelenmiş Lie Cebirleri ile karakterize edilirler. Daha sonra, süpersimetrinin lineer olmayan bir realizasyonu ile dört-boyutlu bir alan teorisi Volkov ve Akulov (1973) tarafından inşa edildi. Günümüzde kullanılan biçimiyle süpersimetrinin lineer olarak realize edildiği ilk dört-boyutlu alan teorisi, düal rezonans modellerindeki süperayar dönüşümlerini genelleştiren Wess ve Zumino (1974) tarafından verildi.

Fermiyon ve bozon halkalarından gelen terimlerin karşılıklı olarak birbirlerini götürmeleri nedeniyle süpersimetrik alan teorileri, süpersimetrik olmayanlara oranla, daha yumuşak bir morötesi ıraksaklık davranışına sahiptirler. Süpersimetrinin yerel ayar teorisi konumuna getirildiği daha sonraki süpergravite teorileri (Freedman, Ferrara ve van Nieuwenhuizen 1976, Deser ve Zumino 1976) kütle çekimini diğer temel kuvvetlerle birleştirme yolunu açması nedeniyle süpersimetrik teorilere duyulan ilgiyi bir kat daha artırdı.

Parçacık fiziğinde süpersimetriyi kullanmak için daha başka kuvvetli gerekçeler de vardır. Her şeyden önce bir teoriye süpersimetrinin katılması, fermiyon ve bozon kütleleri ile çiftlenim sabitlerini birbirine bağlaması nedeniyle teoriyi bir anlamda kısıtlamaktadır. Dolayısıyla süpersimetrisiz kurulan karşılık teoriye göre serbest parametrelerin sayısı daha azdır. İkinci olarak ise ayar teorilerinin Higgs sektörünün daha iyi anlaşılmasını sağlamaktadır. Gravitasyonel olmayan normal ayar etkileşmelerinde görülen ve "ayar hiyerarşisi" (ya da doğallık) problemi adıyla bilinen, büyük çapta farklı enerji düzeylerinin fizikte neden bulunduğu sorusuna da bir yanıt verebilmektedir.

Bu problem, elektrozayıf enerji düzeyi ile kütle çekimi veya büyük birleşme enerji düzeyleri arasındaki uçurumdan kaynaklanmaktadır: $M_W/M_{Planck} \sim 10^{-17}$ ve $M_W/M_{GUT} \sim 10^{-13}$. M_W ve diğer "düşük enerji" düzeylerinin skaler Higgs alanların boşluk beklenti değerlerinden (VEV), $<\phi>^{Weinberg-Salam}$, geldiği bilindiğine göre problem aslında neden $<\phi> \ll M_{GUT}$ olduğu, ya da Higgs alanlarının kütleleri kendi VEV'leri ile orantılı olduğundan problem neden $m_\phi \ll M_{GUT}$ olduğuna indirgenebilir. Süpersimetri, SU(2) x U(1)'nin kütlesiz bıraktığı fermiyonlara ϕ alanını bağlamak suretiyle ϕ alanının büyük kütleler kazanmasını engelleyen yegâne simetridir. Süpersimetri ve SU(2) x U(1) kırılmadığı sürece ϕ alanı kütlesizdir. Eğer SUSY kırılırsa süpersimetriyi bozan parametre mertebesinde ancak kütle kazanabilir.

Süpersimetri cebirinin getirdiği bir sonuç da belli bir gösterimde yer alan parçacıkların aynı kütlelere sahip olmalarıdır, yani kırılmamış tam süpersimetri fermiyon ve bozonların eşit kütleli olduğunu söyler, ki bu duruma deneysel olarak doğada rastlanmamaktadır. Dolayısıyla süpersimetrinin ya açıkça ya da kendiliğinden kırılması gerekir.

SU(3) x SU(2) x U(1) ayar grubuna dayalı olan Weinber-Salam-Glashow'un standart modeli zayıf, elektromanyetik ve kuvvetli etkileşmelerin tasvirinde oldukça başarılı olmuştur. Bununla birlikte eksiksiz ve tam bir teori olduğunu söylemek güçtür. Pekçok serbest parametresi vardır, pekçok temel parçacığı kapsar ve nihayet kütle çekiminin diğer kuvvetlerle olan ilişkisini açıklayamaz. Ayar grubuna daha büyük ve basit bir gruba, örneğin SO(5), gömmek ve tek bir çiftlenim sabiti kullanmak suretiyle Büyük Birleşme Teorileri (GUT) bu durumu iyileştirmek amacıyla inşa edildi. Parçacıkların mültiplet yapıları GUT'larda daha da geliştirildi, ama farklı spinleri birbirine bağlayan hiçbir simetri yoktu, ayar hiyerarşisi önemli bir problem yaratıyordu ve üstelik kütle çekimi bütünüyle ihmal edilmişti. Farklı spinleri birbirine bağlayabilecek tek simetri süpersimetridir ve dolayısıyla nihaî bir teori için duyulan eksiklikleri giderebileceği ümidini de beraberinde taşımaktadır.

Bu nedenler ve yukarıda sözünü ettiğimiz diğer kuvvetli gerekçeler, son yıllarda süpersimetrik alan teorilerinde yoğun bir gelişmenin meydana gelmesine yol açtı. Düşük enerji bölgesinde parçacık fiziğini anlatabilmek üzere $N=1$ SUSY ayar teorileri geniş çapta incelendi. Bununla birlikte en yüksek ($N=8$) genişletilmiş süpergravite teorileri dahi maalesef standart modeli değil yanlızca

SU(3) x U(1) x U(1) ayar grubunu kapsamaktadır (Ross 1984). Bu yüzden SUSY modelleri inşa ederken, genişletilmiş süpersimetri teorilerinde tek bir indirgenemez gösterimin gözlediğimiz parçacık spektrumunu içereceği umudundan vazgeçip, G x [genişletilmiş N-SUSY] direkt çarpım yapısına dayalı çeşitli modeller kurmakla yetinmek durumundayız. SUSY'nin öngördüğü parçacıklardan hiçbiri henüz gözlenememiş olmasına karşın, her yıl artan sayıda makale SUSY teorilerine ayrılmakta ve deneysel olarak SUSY'yi sınama araştırmaları hızla devam etmektedir.

Diğer taraftan bambaşka bir içerikle gelişen sicim ve süpersicim teorileri günümüz parçacık fiziğinin en aktif alanlarından birisini oluşturmaktadır. Süpersicim teorilerin yapısının, bütün etkileşmelerin gerçek anlamda bir birleşmiş teorisini verebilecek ölçüde zengin olduğuna inanılmaktadır. Bununla birlikte süpersicim teorilerinin pekçok ince ayrıntısını açıklayabilmek ve sonunda tümüyle başarılı bir fenomenoloji bulabilmek için hâlâ büyük çapta çabanın sarfedilmesi gerekmektedir (Scherk 1975, Schwarz 1982, Green et.al. 1987).

Süpersimetri geçtiğimiz yıllarda nükleer fizik alanında (Iachello 1980, Balantekin et.al. 1981, Bardeen, W.A. et.al. 1983), katıhal ve istatistik fizikte (Parisi ve Sourlas 1979 ve 1982, B.Mc.Clain et.al.1983, Efetov 1983, Brezin et.al. 1984, Gozzi 1984) yoğun olarak kullanıldı.

Süpersimetri düşüncesi, Witten'in 1981 yılındaki makalesi ile birlikte, süpersimetrik alan teorisinin en basit bir örneğini oluşturmak üzere kuantum mekaniğine de geniş ölçüde uygulanmaya başlandı. İlk önceleri, süpersimetrik kuantum mekaniğini incelemenin ardında yatan motivasyon değişik modellerde kendiliğinden SUSY kırılmasına yol açan mekanizmaların anlaşılması idi. Fakat daha sonraları bu konu artan bir ilgi gördü ve yeni ve daha gerçekçi modellerin inşa edildiği pekçok makale yayınlandı (Solomonson ve van Holten 1982, Cooper ve Friedman 1983, Rittenberg 1983, Kostelecky ve Nieto 1984, Khare ve Maharana 1984, Ui 1984, Gozzi 1983, Nieto 1984, Gambao ve Zanelli 1985, Comtet et.al. 1985, D'Hoker ve Vinet 1984, Khare 1985, Cecotti ve Girardello 1983, Bernstein ve Brown 1984, Gozzi 1985, Andrianov et.al. 1984, Gendenshtein 1984, Bohm 1986, Ravndal 1980, Sukumar 1985).

Son yıllarda, üç-boyuttaki iki-parçacık sistemlerine süpersimetrinin katılması düşüncesi bazı yazarlarca tartışılmıştır. Tezin son kısmında ise, böylelikle, önce süpersimetrik alan teorilerini inceledikten sonra, SUSY formalizminin relativistik iki-cisim problemine nasıl uygulanabileceği araştırılacaktır. Üç-boyuttaki Öklidyen grubun süpergenişletilmesi yoluyla, kuantum mekaniğindeki Schrödinger dalga denklemini süpersimetrik biçimde yazacağız. Süper-dalga fonksiyonunun skaler ve fermiyonik bileşenlerinin Klein-Gordon ve Dirac denklemlerini sağladığını göstereceğiz. Bu modelin iki-cisim etkileşmelerine uygulanabileceğini görmek için elektromanyetik alanla minimal çiftlenim hali ele alınacaktır. Nihayet iki-parçacık için bir süper-Schrödinger denklemi önerip, skaler-skaler, skaler-fermiyon ve fermiyon-fermiyon sistemleri için Bethe-Salpeter tipi relativistik denklemler elde edeceğiz.

Tensör ve spinör cebirlerine ait seçtiğimiz konvansiyon ve kullandığımız metrik tezin sonunda yer alan Ekler'de verilmiştir.

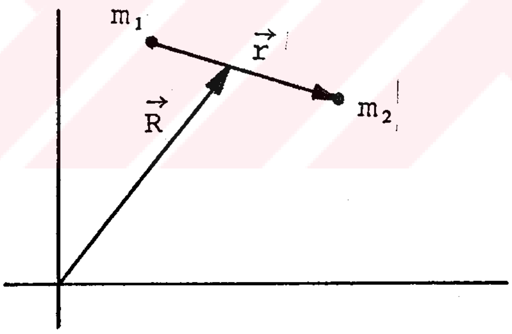
2. KLÂSİK ve KUANTUM MEKANİĞİNDE İKİ-CİSİM SİSTEMLERİ

2.1. Klâsik Mekanikte İki-Cismin Merkezcil Kuvvet Problemi

İki-cisim probleminin relativistik ve relativistik olmayan ele alınışları arasındaki farkları sergilemek amacıyla bu kesimde problemi klâsik mekanik çerçevesinde incelemeye başlayacağız.

Kütleleri m_1 ve m_2 olan ve yalnızca bir etkileşme potansiyeli U'dan türetilebilen kuvvetlerin söz konusu olduğu monogenik bir iki-parçacık sistemini gözönüne alalım, U, iki parçacık arasındaki $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ vektörünün ve $\vec{r}$ 'nin türevlerinin herhangi bir fonksiyonu olsun. Böyle bir sistem için Lagranjiyen aşağıdaki biçimi alır:

$$L = T(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ldots) \qquad (2.1)$$



Şekil 2.1. İki-cisim problemi için koordinatlar.

Burada $\vec{R}$ kütle merkezinin konum vektörüdür. Kinetik enerji T'yi, kütle merkezinin hareketine ilişkin kinetik enerji ile kütle merkezi etrafındaki hareketle ilgili T' kinetik enerjisinin toplamları biçiminde yazmak mümkündür:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + T' \qquad (2.2)$$

$$T' = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_2'^2 \qquad (2.3)$$

Yukarıda $\vec{r}_1'$ ve $\vec{r}_2'$ parçacıkların kütle merkezine göre konum vektörleridir ve aşağıdaki gibi verilirler:

$$\vec{r}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{r}$$
$$\vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{r} \qquad (2.4)$$

T' ' yü $\vec{r}$ cinsinden ifade etmek istersek

$$T' = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\dot{\vec{r}}^{\,2} \qquad (2.5)$$

olur ve toplam Lagrarjiyen (2.1) şu biçimi alır:

$$L = \frac{1}{2}\,(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{1}{2}\,\frac{m_1\ m_2}{m_1 + m_2}\,\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r,r,\ldots) \qquad (2.6)$$

Görüldüğü gibi üç koordinat, $\vec{R}$, devirseldir ve dolayısıyla kütle merkezi ya duruyordur ya da düzgün hareket yapar. Böylece Lagranjiyendeki ilk terimi atabiliriz. L'nin geri kalan kısmı ise, $\mu = m_1 m_2 / m_1\ m_2$ indirgenmiş kütleli tek bir parçacığın merkezcil kuvvet içindeki hareketini tasvir eder. Sonuç olarak, iki-cismin kendi kütle merkezleri üzerindeki merkezcil kuvvet hareketi eşdeğer bir tek-cisim problemine daima indirgenebilir (Goldstein 1980).

Sistemin Hamiltonyeni ise şu şekildedir:

$$H = \frac{\vec{P}_{cm}^{\,2}}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\vec{P}^{\,2}(m_1+m_2)}{2m_1 m_2} + U(\vec{r},\dot{\vec{r}},\ldots) \qquad (2.7)$$

$$= H_{cm} + H_r .$$

Burada

$$\vec{P}_{cm} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \quad , \quad \vec{P} = \vec{P}_1\,\frac{m_2}{m_1+m_2} - \vec{P}_2\,\frac{m_1}{m_1 + m_2} \qquad (2.8)$$

dir. Özel bir hal olarak, Kepler problemi için $U = \frac{\kappa}{r}$ alınır ve aşağıdaki eşitlikleri göstermek zor değildir:

$$\{H_r, \vec{L}\} = \{H_r, \vec{M}\} = 0 \qquad (2.9)$$

Burada $\vec{L}$ açısal momentumdur, yani $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dir ; $\vec{M}$ ise Runge-Lenz vektörüdür: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{L} - \mu\kappa \frac{\vec{r}}{r}$. Dolayısıyla $\vec{L}$ ve $\vec{M}$ hareket sabitidirler.

Sistemin invaryans grubu hareket sabitlerinin Poisson parantezlerine bakarak belirlenir ve $SO(3) \times SO(3) \sim SO(4)$'e izomorfik olduğu gösterilebilir (Thirring 1978).

2.2. Göresiz Kuantum Mekaniğinde İki-parçacık Problemi

Birbirleriyle 1/r potansiyeli aracılığıyla etkileşen iki-parçacık probleminin kuantum mekaniksel olarak incelenmesi klâsik teorideki yolun ana hatlarını izler (Shiff 1980). Kütleleri m_1 ve m_2 olan iki-parçacık için Schrödinger denklemi

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)=[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\vec{\nabla}_1^{\,2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\vec{\nabla}_2^{2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)]\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) \qquad (2.10)$$

şeklindedir. Şimdi eğer potansiyel enerji yalnızca relatif koordinatlara, $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$, bağlı ise yukarıdaki denklem şu biçimi alır:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=[-\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_R^{2}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_r+V(\vec{r})]\Psi \qquad (2.11)$$

Burada $M=m_1+m_2$ sistemin toplam kütlesini, $\vec{R}$ kütle merkezinin koordinatını, $\vec{\nabla}_R^2$ ve $\vec{\nabla}_r^2$ ise sırasıyla kütle merkezi ve relatif koordinatlara göre türevleri göstermektedir. (2.11) denkleminin değişkenlere ayrılması kolayca gerçekleştirebilir. Ψ için

$$\Psi(\vec{r},\vec{R},t) = U(\vec{r})\;U\;(\vec{R})\quad e^{-i(E+E')t/\hbar}$$

alışılmış ifadesini varsayarsak (2.11)'e eşdeğer şu iki denklemi elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar}{2\mu}\vec{\nabla}_r^2\,U+V_U=E_U\;, \\ &-\frac{\hbar}{2M}\vec{\nabla}^2\,U=E'U. \end{aligned} \qquad (2.13)$$

(2.13) denklemlerinden birincisi iki parçacığın relatif hareketini tasvir eder ve indirgenmiş kütleli tek bir parçacığın V dış potansiyel enerjisi içindeki hareketini veren denkleme özdeştir. İkinci denklem ise iki parçacıktan oluşan sistemin kütle merkezinin M kütleli serbest bir parçacık gibi hareket ettiğini söyler. Dolayısıyla relatif harekete ilişkin E enerji düzeyleri esas ilgi noktasıdır.

Yine açısal momentum ve Runge-Lenz vektörü hareket sabitidirler:

$$[\vec{H},\vec{L}] = 0 \quad , \quad [\vec{H},\vec{M}] = 0 \tag{2.14}$$

Fakat bu sefer $\vec{M}$ şu şekildedir:

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}) - \frac{\mu\kappa}{r}\,\vec{r} \tag{2.15}$$

$\vec{L}$ ve $\vec{M}$ 'nin özel karışımları bağımsız iki açısal momentum işlemcisinin komütasyon bağıntılarını sağlarlar; bu nedenle invaryans grubu 0(3) x (0(3) $\sim$ 0(4) tür; ki bu da hidrojen atomunun dinamik simetrisini tasvir eder. Bu dinamik simetri grubu, $(2\ell+1)$-katlı m dejenereliğini veren Hamiltonyendeki küresel simetri nedeniyle geometrik 0(3) simetrisini bir alt grup olarak kapsar. Ayrıca zaman zaman rastlantısal simetri olarak da adlandırılan ℓ-dejenereliği ise sistemin esas simetri grubunun dört boyutlu uzayın dönme grubu 0(4) olmasından kaynaklanır ve yalnızca Coulomb tipi alanlarda görülür. Dolayısıyla temel kuantum sayısı n olan bir enerji düzeyi $\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1) = n^2$ kere dejeneredir. Potansiyelin $1/r$ davranışından herhangi bir sapma bu "rastlantısal" dejenereliği ortadan kaldırır.

Enerji düzeylerini belirlemek için ya cebirsel (bu Pauli ve Fock'un yöntemidir, Scadron 1979) ya da polinomsal yöntemi izleyebiliriz. İkincisi relativistik iki-cisim problemi için çok daha elverişlidir.

Küresel simetrik tek veya iki-parçacık sistemine ait dalga denklemini çözmek için öncelikle açısal koordinatları ayırmak gerekir. Şimdiki problemimizde olduğu gibi spinsiz halde, $\vec{L}^2$ ve L_z işlemcilerinin aynı anda özfonksiyonları olan çözümleri araştırarak bu işlem kolayca yerine getirilir; zira $[\vec{L}^2,H] = [L_z,H] = 0$ dır. Bu özfonksiyonların açısal kısımları küresel harmoniklerce belirlendiğinden, (2.13) denklemlerinin ilkinde

$$U_{\ell m_l}(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{\ell m_l}(\theta,\phi) \qquad (2.16)$$

yazabilir ve ℓ açısal momentum kuantum sayısına karşı gelen radyal denklemi bulabiliriz. İyi bilindiği gibi enerji düzeyleri bu denklemin asimtotik davranışından çıkartılır ve nihayit göresiz enerji spektrumu (Balmer formülü) elde edilir.

Daha ileri kesimlerde göreceğimiz gibi, spinli parçacıklar için durum daha karmaşıktır; zira şimdi artık $\vec{J}^2$ ve J_z işlemcilerinin özfonksiyonu olan çözümleri aramak zorundayız ve üstelik, iki-fermiyon probleminde, örneğin dalga fonksiyonu bir yerine onaltı serbestlik derecesine sahiptir.

2.3. Göreli Kuantum Mekaniğinde İki-parçacık Problemi

Relativistik kuantum teorilerinde Dirac denkleminin oldukça önemli bir yeri vardır. Zira yalnızca relativistik Schrödinger denkleminin (Klein-Gordon denklemi) fiziksel olmayan yorumundan kaynaklanan problemleri çözmekle kalmaz, aynı zamanda maddenin atom ve çekirdek düzeyindeki temel yapıtaşları olan 1/2-spinli parçacıkları-elektronları ve nükleonları- da doğal olarak tasvir eder. Dirac denkleminin önemli bir uygulama alanı atomik spektrum ince yapısının tartışılmasıdır ki bu problem Dirac denkleminin statik Coulob alanı içerisinde kesin çözümünü gerektirir. İnce yapının hesabı kuantum mekaniğinin ve onun relativistik genelleştirilmesinin sağladığı başarılara bilindiği gibi en iyi örneği oluşturur.

Merkezcil ve küresel simetrik bir $V=V(r)=eA_o$ alanı içerisinde ($\vec{A}=0$) Dirac Hamiltonyeni aşağıdaki gibidir:

$$H=\vec{\alpha}.\vec{p}+\beta m+V(r) \qquad (2.17)$$

Göresiz haldekinin tersine, $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ açısal momentumu H ile yer değiştirmez. Bununla birlikte toplam açısal momentom $\vec{J}=\vec{L}+\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ ve helisite işlemcisi $\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{p}$ hareket sabitidirler. Dolayısıyla alışılmış spektroskopik gösterim relativistik halde geçerli değildir (kuantum durumlarını belirtmek için "$n\ell$" gösteriminin yerine "nj" yazmalıyız).

Enerji özdeğer denkleminin çözümünü ileri kuantum mekaniği ders kitaplarından herhangi birisinde bulmak mümkündür (örneğin bkz. Schiff 1980); bu nedenle burada tekrarlamıyoruz.

$$E_{nj}=m-\frac{mZ^2\alpha^2}{2n^2}-\frac{mZ^4\alpha^4}{n^3(2j+1)}+\frac{3}{8}\,\frac{mZ^4\alpha^4}{n^4}+0(\alpha^6) \qquad (2.18)$$

Bu da ℓ-dejenereliğini koruyan fakat $j=\ell\pm\frac{1}{2}$ dejenereliğini bozan ince-yapı yarılmasının doğru ifadesidir. Göresiz

Schrödinger teorisi çerçevesinde, (2.18)'in nasıl ortaya çıktığını anlamak için önce $H_{NR}= H_o+ H'$ yazalım; burada H_o en düşük-mertebeden Schrödinger Hamiltonyenidir ($V= -\alpha/r$) ve Bohr enerji düzeylerini verir:

$$E_n^o = - \frac{mZ^2\alpha^2}{2n^2} \tag{2.19}$$

(2.19) ile verilen enerji düzeyinde $O(\alpha^2)$ mertebesindeki küçük yarılmalar üç terimden oluşan H' Hamiltonyeninin neden olduğu ince-yapı düzeltmeleridir:

$$H' = H'_{rel.} + H'_{S.D.} + H'_{Dar.} \tag{2.20}$$

Burada

$$H'_{rel.} = - \frac{(E_{NR} - V)^2}{2m} \approx \frac{P^4}{8m^3}$$

$$H'_{S.O.} = \frac{1}{4m^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{dr} \right) \vec{\sigma}.\vec{L} \tag{2.21}$$

$$H'_{Dar.} = \frac{1}{8m^2} (\vec{\nabla}^2 V)$$

Bunlar sırasıyla, hız ile birlikte parçacığın kütlesinde meydana gelen değişimden kaynaklanan kinetik enerji düzeltmesi, spin-yörünge etkileşmesi ve Zitterbewegung'un neden olduğu relativistik etkiyi veren Darwin terimidir. Bu üç etkileşme teriminin toplamı birinci mertebeden pertübasyon enerji kaymalarını, $\Delta^{f.s}_{njl}$, yaratır ki sonuç (2.18) ile tam olarak uyuşur (Scadron 1979).

İnce-yapı enerji yarılmalarından başka, ayrıca proton ve elektron manyetik momentleri arasındaki etkileşmenin neden olduğu çok ince yapı kaymalarını da hesaba katmak gerekir:

$$H'' = -\vec{\mu}_e . \vec{B} = \frac{1}{4\pi} \vec{\mu}_e . \vec{\nabla} \times (\vec{\mu}_p \times \vec{\nabla} \frac{1}{r}) \tag{2.22}$$

Bu Hamiltonyen ince-yapıdan 10^3 kat daha küçük yarılmalar verir (Scadron 1979). Relativistik incelemeyi hâlâ tamamlamış değiliz; zira bazı ışınımsal (radiative) düzeltmeler ile (Itzykson ve Zuber 1980, Lamb ve Retherford 1947) iki-cisim relativistik etkileri sözkonusudur. Bu ikinci düzeltme çekirdeğin geri tepmesinden kaynaklanır ve relativistik iki-cisim denkleminin kullanılmasını gerektiren zorca bir problemi oluşturur.

Bu kesimdeki tartışmadan da görülebileceği gibi iki parçacıktan yalnızca elektronun, çekirdeğe ait küresel statik alan içerisindeki hareketi relativistik olarak incelenmiştir ve enerji spektrumuna bazı düzeltmeler daha sonra pertürbasyon olarak hesaplanmıştır. Böylece iki-cisim problemi aslında yine sanki tek-cisim problemi gibi ele alınmıştır. Yoksa her iki parçacığın (fermiyon) da tam relativistik olarak ele alınışı 16-bileşenli bir dalga fonksiyonu gerektirir ve ayrıca herbir parçacık için farklı öz zaman parametresinin yazılması zorunludur.

3. KUANTUMLU ALANLAR TEORİSİNDE İKİ-CİSİM PROBLEMİ

3.1. Bethe-Salpeter Denklemi

Göresiz kuantum mekaniğinde iki parçacığın bağlı-durumu, iki-cisim Schrödinger denklemini sağlayan normalize bir dalga fonksiyonu ile tasvir edilir. Kuantum elekrodinamiğinde ise bağlı-durum problemlerini incelemek için Schrödinger genliğinin kovaryant bir genelleştirilmesini araştırmak en doğal olan yoldur. İşte bu genlik Bethe ve Salpeter'-in önerdikleri (1951) relativistik dalga fonksiyonudur.

Bu kesimde BS denkleminin çıkartılışını ayrıntılarıyla vermeyeceğiz (örneğin bkz. Schweber1961); fakat temel düşünceyi ve bileşik sistemlerin BS genlikleriyle incelenişi sırasında başvurulan çeşitli yaklaşıklıkları gözden geçireceğiz.

Elverişli bir örnek oluşturması nedeniyle, çeşitli uygulamalarda geniş çapta kullanılmış olan skaler-skaler modeli (Cutkosky 1954) inceleyelim önce. Bu model, kütleleri m_1 ve m_2 olan ve μ kütleli reel skaler $\Psi(x)$ alanı aracılığıyla etkileşen $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ gibi kompleks iki alanı tasvir eder. Etkileşme Lagaranjiyeni

$$L(x) = [\, g_1 : \phi_1^\dagger(x)\phi_1(x) : + g_2 : \phi_2^\dagger(x)\phi_2(x) :]\, \Psi(x) \qquad (3.1)$$

dir; burada g_i, ϕ_i ile Ψ alanları arasındaki çiftlenim sabitidir.

Eğer $|\chi\rangle$, 1 ve 2 numaralı parçacıkların bağlı-durum vektörü ise, BS genliği şu şekilde tanımlanır:

$$\chi(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2) = \langle o |\, T\, \phi_1(\vec{x}_1, t_1)\, \phi_2(\vec{x}_2, t_2) | \chi \rangle \qquad (3.2)$$

Yukarıda $|o\rangle$ boşluk durumudur ve T zaman-sıralayıcı işlemcidir. $\chi(x_1, x_2)$'nin Fourier dönüşümü $\chi(p_1, p_2)$ olsun. Bethe-Salpeter denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(p_1^2 - m_1^2)(p_2^2 - m_2^2)\chi(p_1,p_2) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1' d^4p_2' \; V\;(p_1,p_2;p_1',p_2')\;\chi\;(p_1',p_1'{}^2 \qquad (3.3)$$

Burada $V(p_1,p_2 \; ; \; p_1',p_2')$. $1+2 \longrightarrow 1'+2'$ sürecine ait bütün indirgenemez Feynman diagramlarının toplamını temsil etmektedir.

BS denkleminin Feynman diagramlarıyla bir açılımını verebilmek için konfigürasyon uzayına geçmemiz gerekir. Amaç BS genliğini iki-cisim dört nokta Green fonksiyonuna bağlamaktır:

$$G(x_1,x_2,x_3,x_4) = \langle o|\,T\;\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\;\bar{\phi}_1(x_3)\;\bar{\phi}_2(x_4)|\,o\rangle \qquad (3.4)$$

Yukarıdaki Green fonksiyonu için, pertübasyon teorisinden yararlanarak

$$G = G_o + G_o V G \qquad (3.4a)$$

sembolik biçiminde yazılabilen bir integral denklem elde etmek mümkündür (Schwinger 1951 ve Dyson 1949). χ genliği için integral denklem ise, tek-parçacık haline benzer olarak, aşağıdaki gibi yazılır;

$$\chi(x_3,x_4) = \int\int G(x_1,x_2;x_3,x_4)\chi(x_1,x_2)d^4x_1 \; d^4x_2 \qquad (3.4b)$$

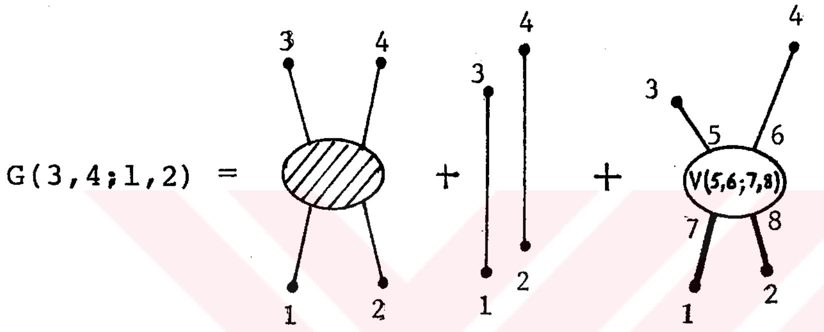
Bu durumda BS denklemi

$$\chi(x_3,x_4) = \int\int G_{01}(x_3,x_1)G_{02}(x_4,x_2)\chi(x_1,x_2)d^4x_1 \; d^4x_2$$
$$+ \int\int\int\int G_{01}(x_3,x_5)G_{02}(x_4,x_6)V(x_5,x_6;x_7,8)$$
$$\chi \;\; (x_7,x_8)d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 \qquad (3.5)$$

olur. Yukarıda $G_{oi}(x,y)$'ler skaler ϕ_i alanları için gecikmiş serbest propagatörlerdir:

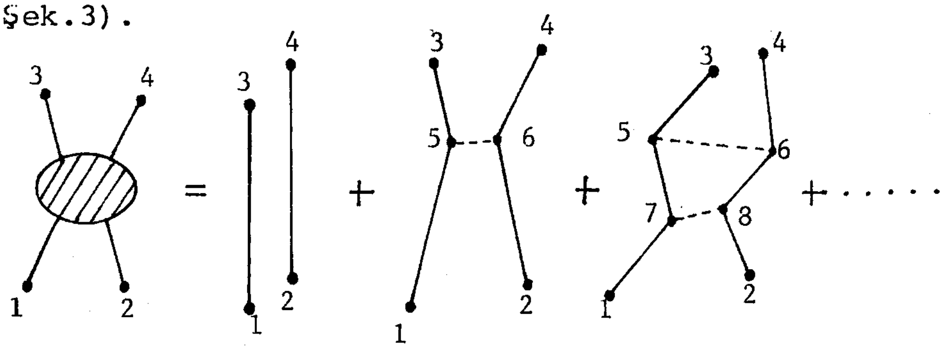
$$G_{oi}(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left[-ik.(x-y)\right]}{k^2-m_i^2+i\eta} \tag{3.6}$$

Gerçek iki-cisim propagatörünün grafikle gösterimi Şek.2'deki gibidir:



Şekil 2. İki cisim propagatörünün Feynman diagramlarına açılışı

Belli bir anda, bir veya daha fazla kuantanın değiş tokuş edilmesine göre etkileşme çekirdeği V de seriye açılabilir. Bununla birlikte sonsuz sayıdaki indirgenemez Feynman diagramlarının tümünün toplamı bilenemediği için çoğunlukla, 1 ve 2 numaralı parçacıklar arasında tek bir kuantanın alışverişine karşı gelen basamak yaklaşıklığına başvurulur (Şek.3).



Şekil 3. İki-cisim propagatörü için basamak yaklaşıklığı

Şimdi (3.3) denkleminin çözümlerini inceleyelim. Zaman ve uzay ötelemeleri altındaki invaryansdan yararlanarak, ve toplam ve relatif değişkenleri tanımlayarak aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz:

$$X = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \quad , \quad x = x_1 - x_2$$
$$P = p_1 + p_2 \quad , \quad p = (1-\alpha)p_1 - \alpha p_2) \quad , \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \tag{3.7}$$

$$V(p,P;\ p',P') = \delta(P-P')\ V\ (p,p',p)$$
$$\chi(p,P) = \delta(P-K)\ \chi_K\ (p) \tag{3.8}$$

BS denklemi ise şu biçime girer.

$$[\ (\alpha K + p)^2 - m_1^2]\ \ \{[\ (1-\alpha)K - p]^2 - m_2^2\}\ \chi_K(p)$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p_1'\ V\ (p,p',K)\ \chi_K(p') \tag{3.9}$$

Kütle merkezi sisteminde ($\vec{K} = 0$ ve $K_o = m_1 + m_2 - b$) (3.9) denklemini çözmek suretiyle B bağlanma enerjisi bulunabilir. Basamak yaklaşıklığında V(p,p',K) aşağıdaki biçimdedir:

$$V(p,p',K) = -i\ \frac{g_1 g_2}{(p,-p')^2 - \mu^2 + i\eta} \tag{3.10}$$

Oldukça basit, fakat tam çözülebilir hal olan $\mu = 0$ için (Cutkosky 1954) (3.9)'u, bağlanma enerjilerini belirlemede kullanabileceğimiz bir diferansiyel denkleme dönüştürmek mümkündür (ayrıntılar için bkz.Itzykson ve Zuber 1980).Daha yüksek-mertebeden diğer indirgenemez diagramların tümü ihmal edilmiş olmasına karşın, $g_1g_2 \to 0$ zayıf çiftlenim limitinde BS bağlanma enerjisi, göresiz Schrödinger limitindeki ifade, $(g_1g_2)^2/2m_{red}n^2$, ile uyuşur. Böylece skaler parçacıkların BS denklemi, basamak yaklaşıklığında yoğun olarak analiz edilmiştir ve çeşitli sayısal algoritmalar geliştirilmiştir (Schwartz 1965, Silvestre-Brac et.al. 1984).

Şimdi de spinör-spinör Bethe-Salpeter denklemini konfigürasyon uzayında yazalım (Hzykson ve Zuber 1980):

$$(i\partial_{x_2} - m_2 - \Sigma)(i\partial_{x_1} - m_1 - \Sigma)\; G(x_1,x_2,y_1,y_2)$$

$$=\delta^4(x_1-y_1)\delta^4(x_2-y_2)-\delta^4(x_1-y_2)\delta^4(x_2-y_1)$$

$$+\int d^4z_1\, d^4z_2\; V\,(x_1,x_2,z_1,z_2)\; G\,(z_1,z_2;y_1,y_2) \qquad (3.11)$$

Spinör parçacıkların bağlı-durum problemi için BS formalizminde yazılan bu denklem daha önceden incelediğimiz basit modele oranla daha karmaşıktır, ve basamak yaklaşıklığında dahi kesin olarak çözülemez. Spinör-spinör BS denklemleri için çeşitli açılım yöntemleri geliştirilmiştir. Bunlar içerisinde birisi (Ladanyi 1973) özellikle önemlidir. Bu yöntemde Bethe-Salpeter denkleminin simetri özellikleri dikkate alınarak genlikler vektör küresel harmonikler cinsinden yazılmıştır. Bu konuya ileride yine değineceğiz ve Kesim 3.3'te kullanacağız.

Öte yandan BS formalizminin en önemli sakıncalarından birisi fiziksel yorumu hiç de açık olmayan relatif zaman ve ona karşı gelen relatif enerji problemidir. Bu güçlükten kurtulmak amacıyla Salpeter (1982) anî etkileşme yaklaşıklığını (IA) önerdi. Sistemi oluşturan parçacıklar arasındaki etkileşmenin sıfır relatif zamanda ($t=o$) meydana geldiğini varsayan bu yöntemde BS genliği ve V çekirdeği de yalnızca $t=o$ anında hesaplanır. IA denklemi, relativistik etkileri alışılmış Schrödinger dalga denklemine $0(v^2/c^2)$

mertebesinde düzeltmeler biçiminde inceleyebilmek için doğrudan bir yöntem oluşturur (Mitra 1985). Ayrıca IA ile birlikte basamak yaklaşıklığı ise Schrödinger denklemini verir (Silvestre-Brac et.al. 1984). Bethe-Salpeter denkleminin göresiz limiti de Schrödinger denklemine indirgenir (Menotti, P 1970, Wanders 1957). Bilindiği gibi Schrödinger dalga denklemini alan teorisi bakış açısıyla yeniden ele almak mümkündür ve göresiz kuantum mekaniğinin bu formalizminde BS tipi bağlı-durum denklemi inşa edilebilir (Schweber 1961, Roman 1965, Lurié 1968). Ötelemeler altındaki invaryansdan yararlanılarak sonuçta varılan denklem relatif hareketi momentum uzayında belirleyen bir Schrödinger denklemidir.

Relatif zamanı yoketmenin bir başka yolu da quasipotansiyel yaklaşıklığıdır (QP). Bu yöntemde BS denkleminin etkileşme çekirdeği V değil de (3.6) serbest propagatörü bir miktar değiştirilir. Tüm enerjiler için elastik üniterlik "on-shell" koşulunu sağlayan fakat relatif enerjiyi ortadan kaldıran iki-parçacık serbest propagatörü araştırılır. Bu koşulları sağlayan propagatörün seçiminde belli bir serbestlik sözkonusudur ve geçmişte birden fazla sayıda quasipotansiyel denklemin önerilmesinin nedenini oluşturur (Logunov ve Tavkhelidze 1963, Blankenbecler ve Sugar 1966).

Todorov'un (1971) tartıştığı QP denklem relativistik iki-parçacık sistemlerinin incelenmesinde oldukça başarılı olmuştur. Skaler-skaler modeli halinde QP denklemi momentum uzayındaki Schrödinger denklemine çok benzer:

$$\left(\frac{b^2}{2\mu} - \frac{\vec{P}^2}{2\mu} \right) \Psi_M (\vec{P}) = \int V(\vec{p},\vec{q},M)\, \Psi_M(\vec{q})\, \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \qquad (3.12)$$

Burada V, "off-shell" saçılma genlikleriyle hesaplanan quasipotansiyel, M bağlı durumun kütlesi ve $\vec{p}$ ise relatif momentumdur:

$$\vec{P} = \frac{E_2}{M}\vec{p}_1 - \frac{E_1}{M}\vec{p}^{\,2} \quad , \quad E_1 + E_2 = M \tag{3.13}$$

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M} \quad , \quad E_2 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} \tag{3.14}$$

E_1 ve E_2 kütle-merkezi çerçevesinde parçacıkların kütle-kabuğu enerjileridir ve b^2 ise relatif momentumun karesidir:

$$b^2(M) = \frac{[M^2-(m_1+m_2)^2]\,[M^2-(m_1-m_2)^2]}{4M^2} \tag{3.15}$$

Fermiyon-antifermiyon ve fermiyon-skaler bağlı-durum sistemleri için çeşitli QP denklemleri önerilmiştir. Sonuç olarak diyebiliriz ki, QP yaklaşımının esas amacı, etkileşme dinamiğini tasvir eden quasipotansiyelin bulunması ve denklemlerin ya analitik ya da nümerik tekniklerle çözülmesinden ibarettir (Martynenko ve Faustov 1985, Siladze et.al.1984, Dei et.al. 1986, Rizov et.al.1975).

3.2. Kuantum Elektrodinamiğinden Türetilen En Genel Relativistik İki-cisim Hamiltonyeni

İki fermiyon sistemlerine ait durağan bağlı hallerin ve saçılma problemlerinin relativistik dinamiği aşağıdaki Hamiltonyen yardımıyla da formüle edilebilir:

$$H = H_1^D + H_2^D + V(r) \tag{3.16}$$

burada H_i^D 'ler herbir parçacık için serbest Dirac Hamiltonyenleri V de spine bağlı relativistik potansiyeldir. Bu denklem ilk kez Kemmer (1937) ile Fermi ve Yang (1949) tarafından yazılmıştır. V için çoğunlukla fenomenolojik ifadeler kabul edilmiştir (Suura 1977, Geffen ve Suura 1977, Childers 1982, Koide 1982, Barut ve Raczka 1980). Bununla birlikte son zamanlarda Barut (1982) tarafından gösterildiği üzere (3.16) denklemini kuantum elektrodinamiğinden tam olarak elde etmek mümkündür. Bu kesimde sözünü ettiğimiz Hamiltonyenin çıkartılışını kısaca sunduktan sonra bazı önemli özelliklerini tartışacağız.

Relativistik statik potansiyellerin alan teorisinden çıkartılışı, kuantum elektrodinamiğindeki bağlı hal problemlerinin önemli bir yanını oluşturur ve iyi bilindiği gibi minimal çiftlenim Breit potansiyelini doğurur (Akhiezer ve Berestetskii 1965). Barut'un makalesinde ise relativistik Pauli çiftlenimi için benzer problem çözülmüştür. Bu tür potansiyele, yük-dipol ve dipol-dipol etkileşmelerini kullanan pekçok bileşik modelde gereksinim duyulur.

Elektromanyetik alan ili etkileşen bir dizi fermiyonu temsil eden aşağıdaki Lagrange yoğunluğunu gözönüne alalım;

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_j \bar{\Psi}_j (\gamma^\mu \partial_\mu - m_j)\Psi_j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \sum e_j \bar{\Psi}_j \gamma^\mu \Psi_j A_\mu \\ - \sum_j a_j \bar{\Psi}_j \sigma^{\mu\nu} \Psi_j F_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Burada $\sigma_{\mu\nu}$, γ matrislerinin aşağıdaki karışımıdır: (3.17)

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu , \gamma_\nu]$$

Yukarıdaki ifadede e_j ve a_j sırasıyla fermiyonların yükü ve içsel anomal manyetik momentleridir. Hareket denklemleri, $A^\mu{}_{,\mu} = 0$ Lorentz ayarında

$$[\gamma^\mu (i\,\partial_\mu - e_j A_\mu) - e_j \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m_j]\Psi_j = 0 \qquad (3.18)$$

$$\Box A_\nu = \sum_j e_j \bar{\Psi}_j \gamma_\nu \Psi_j - 2\sum_j a_j \partial^\mu (\bar{\Psi}_j \sigma_{\mu\nu} \Psi_j) \qquad (3.19)$$

şeklindedir. Gecikmiş Green fonksiyonundan yararlanarak

$$D(x-y) = \frac{\theta(x^o - y^o)}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}\,\delta(x^o - y^o - |\vec{x}-\vec{y}|) \qquad (3.20)$$

Denk.(3.19)'i A_ν için çözmek mümkündür ve dolayısıyla $F_{\mu\nu}$ bulunabilir. A_ν ve $F_{\mu\nu}$ için elde edilen bu ifadeler Denk. (3.17)'ye yerleştirilirse Lagrange yoğunluğunun etkileşme terimleri bulunur. Etkin Hamiltonyen her zaman olduğu gibi

$$\mathcal{H}_{eff} = \sum_j \Psi_j^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta_j m_j)\Psi_j - L_{int} \qquad (3.21)$$

biçiminde verilir ve parçacık etkileşmeleri için aşağıdaki iki-cisim enerji işlemcisi $\hat{H}$ 'yi tanımlayabiliriz:

$$\int \mathcal{H}_{eff}\, d\vec{x} = \int d\vec{x}\, d\vec{y}\, \Psi_j^{\dagger}(x)\Psi_k^{\dagger}(y)\ \hat{H}\Psi_j(x)\Psi_k(y) \tag{3.22}$$

ve sonuçta enerji işlemcisi için şu ifade elde edilir (Barut et.al.1982):

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{2} (-i\vec{\alpha}_j.\vec{\nabla} + \beta_j m_j) + \sum_{j\neq k} \frac{e_j e_k}{2} \frac{1 - \vec{\alpha}_j.\vec{\alpha}_k}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

$$+ \sum_{j\neq k} e_j a_k\ \vec{\alpha}_j.(\vec{\beta}.\vec{\sigma})_k \Lambda \frac{(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} + \sum_{j\neq k} e_j a_k \mathbb{I}_j (\beta\vec{\alpha})_k . \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}$$

$$-\sum_{j\neq k} a_j a_k \left[\frac{3(\beta\vec{\sigma})_j.(\vec{x}-\vec{y})(\beta\vec{\sigma})_k.(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^5} - \frac{(\beta\vec{\sigma})_j.(\beta\vec{\sigma})_k}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \right.$$

$$\left. + \frac{8\pi}{3}(\beta\vec{\sigma})_j.(\beta\vec{\sigma})_k\ \delta(\vec{x}-\vec{y}) \right]$$

$$+ \sum_{j\neq k} a_j a_k \left[\frac{3(\beta\vec{\alpha})_j.(\vec{x}-\vec{y})\ (\beta\vec{\alpha})_k.(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^5} - \frac{(\beta\vec{\alpha})_j.(\beta\vec{\alpha})_k}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \right.$$

$$\left. - \frac{4\pi}{3} (\beta\vec{\alpha})_j.(\beta\vec{\alpha})_k\ \delta(\vec{x}-\vec{y}) \right] \tag{3.23}$$

Lamb kayması gibi, alanın kendisiyle etkileşme (j=k) terimleri alışıldığı üzere hesaba katılmamıştır. Yukarıdaki ifadenin ikinci teriminde Breit potansiyelini, üçüncü terimde manyetik momentin dipol potansiyelini ve son iki terimde ise, iki manyetik moment arasındaki tensör kuvvetini görmekteyiz. $\vec{\sigma}$ -matrislerinden başka $\vec{\alpha}$-matrislerini içeren alışılmamış bazı yeni terimler vardır. Göresiz limitte $\vec{\alpha} \to \vec{P}/m \to 0$ yazıldığından, bu terimlerin manyetik potansiyellerde şimdiye kadar neden görülmediğini açıklayabiliriz.

Daha önce olduğu gibi (3.23)'deki toplam Hamiltonyen serbest Dirac Hamiltonyenleri ile etkileşme potansiyelinin toplamından ibarettir. Kütlesiz foton propagatörü sayesinde, bu Hamiltonyene ait enerji özdeğer problemi, Bethe-Salpeter denkleminin aksine, tümüyle relativistik olmasına karşın tek-zamlı bir denklemdir (Barut ve Ünal 1985). Relativistik yük-monopol ve monopol-monopol potansiyellerinin benzer argümanlar kullanılarak alan teorisinden çıkartılışı daha sonra yine Barut ve Xu (1983) tarafından verilmiştir.

Öte yandan son yıllarda manyetik etkileşmeler yeni bir bakış açısı ile ele alınmış ve bunların kuvvetli etkileşmelerin kaynağını oluşturabilecekleri ileri sürülmüştür (Barut 1983). Gerçekten de yük-manyetik moment ve manyetik moment-manyetik moment etkileşmeleri çok kısa uzaklıklarda son derece şiddetli olabilmektedirler ve dolayısıyla bazı dar ve kütleli rezonans durumları yaratmaları sözkonusudur. Örneğin bir elektron veya protonun yakınındaki manyetik alan şiddeti son derece yüksektir; elektrondan $r_{mag} = e^2/m_e \approx 2.8$ Fermi kadar uzaklıkta manyetik alan şiddeti 10^{17} Gauss büyüklüğündedir ki bu değer nötron yıldızlarındaki manyetik alan şiddetinden yaklaşık 10^4 kat daha fazladır (Barut ibid).

İyi bilindiği gibi atom ve molekül fiziğinde manyetik moment etkileşmeleri bu denli şiddetli değildir ve dolayısıyla bu terimler Coulomb probleminin kesin çözümüne pertürbasyon olarak işlem görür. Fakat çekirdek ve parçacık fiziğinin ilgilendiği enerji düzeylerinde ve uzaklıklarda durum tamamıyla farklıdır. Çok kısa uzaklıklarda ortaya çıkan bu etkileri incelemek için doğal olarak pertürbatif olmayan yöntemlerin kullanılması zorunludur. Barut'un bir makalesinde (1981) sabit manyetik dipol alanında hareket eden anormal manyetik momentli bir Dirac parçacığı incelenmiştir. Bu manyetik etkileri relativistik iki-fermiyon sistemlerinde de araştırmak mümkündür. Özel olarak nötrinoların küçük birer anormal manyetik moment taşıdıkları varsayılarak elektron-nötrino ve nötrino-antinötrino gibi olası bağlı halleri bu açıdan ele almak incelemeye açık problemlerdir.

Böylece (3.23) de görülen tek-zamanlı relativistik iki-cisim Hamiltonyeni $\hat{H}$, daha önce ele alınmamış bazı yeni manyetik terimleri içermesi nedeniyle yukarıda sözünü ettiğimiz manyetik etkileri pertürbatif olmayan yollardan inceleyebilmek için bir kalkış noktası oluşturur.

3.3. Grup Teorik Tekniklerin Kullanılması

Bu kesimde iki spin-1/2 parçacık arasındaki en genel yük-yük, yük-dipol ve dipol-dipol potansiyelleri için (3.16) ile yazılan özdeğer denkleminin tam bir analizini vereceğiz. Bu denklemin açısal ve radyal kısımlarını ayırmak üzere çok genel bir grup teorik yöntem sunmadan önce, kütle merkezine geçişte daha elverişli olan yeni değişkenlerimizi aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$R_\mu = ax_\mu + (1-a)y_\mu \ , \qquad a = \frac{m_1}{m_1+m_2} \qquad 1-a = \frac{m_2}{m_1+m_2} \tag{3.24a}$$

$$r_\mu = x_\mu - y_\mu \tag{3.24b}$$

ve

$$P_\mu = p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)} \tag{3.24a}$$

$$p_\mu = (1-a)p_\mu^{(1)} - ap_\mu^{(2)} \tag{3.24b}$$

ya da

$$p_\mu^{(1)} = p_\mu + \frac{m_1}{m_1+m_2} P_\mu$$

$$p_\mu^{(2)} = -p_\mu + \frac{m_2}{m_1+m_2} P_\mu$$

Bazı ara işlemden sonra iki-fermiyon sistemi için en genel Hamiltonyen şu biçimi alır:

$$
\begin{aligned}
\hat{H} = {} & (\vec{\alpha}^{(1)} - \vec{\alpha}^{(2)}).\vec{p} + \frac{1}{m_1+m_2}\,[\,m_1\vec{\alpha}^{(1)} + m_2\vec{\alpha}^{(2)}\ .\vec{P} + m_1\beta^{(1)} + m_2\beta^{(2)} \\
& + \frac{e_1e_2}{r}\,(1-\vec{\alpha}^{(1)}.\vec{\alpha}^{(2)}) + \frac{e_1a_2}{r^3}\,\vec{\alpha}^{(1)}.(\beta^{(2)}\vec{\sigma}^{(2)})\wedge\vec{r} \\
& + \frac{e_2a_1}{r^3}\,\vec{\alpha}^{(2)}.(\beta^{(1)}\vec{\sigma}^{(1)})\wedge\vec{r} + i\,\frac{e_1a_2}{r^3}\,I^{(1)}(\beta^{(2)}\vec{\alpha}^{(2)}).\vec{r} \\
& + i\,\frac{e_2a_1}{r^3}\,I^{(2)}.(\beta^{(1)}\vec{\alpha}^{(1)}).\,\vec{r} - 2a_1a_2\,\Big[\frac{3(\beta^{(1)}\vec{\sigma}^{(1)}.\vec{r})(\beta^{(2)}\vec{\sigma}^{(2)}.\vec{r})}{r^5}\Big] \\
& - \frac{(\beta^{(1)}\vec{\sigma}^{(1)}).(\beta^{(2)}\vec{\sigma}^{(2)})}{r^3} + \frac{8\pi}{3}\,(\beta^{(1)}\vec{\sigma}^{(1)}).(\beta^{(2)}\vec{\sigma}^{(2)})\,\delta(\vec{r})] \\
& + 2a_1a_2\,\Big[\frac{3(\beta^{(1)}\vec{\alpha}^{(1)}.r)(\beta^{(2)}\vec{\alpha}^{(2)}.\vec{r})}{r^5} - \frac{(\beta^{(1)}\vec{\alpha}^{(1)}).(\beta^{(2)}\vec{\alpha}^{(2)})}{r^3} \\
& - \frac{4\pi}{3}\,(\beta^{(1)}\vec{\alpha}^{(1)}).(\beta^{(2)}\vec{\alpha}^{(2)})\,\delta(\vec{r})\Big]
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Şimdi de

$$
\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{3.27}
$$

denklemini gözönüne alalım. Burada Ψ ve E sırasıyla iki-cisim dalga fonksiyonu ve toplam enerjidir.

Hesapları daha basitleştirmek amacıyla kütle merkezi sistemine, $\vec{P}=0$, geçecek olursak (3.26)'daki ikinci terim düşer. Şimdi Ψ 'nin onaltı bağımsız bileşenini, homojen olmayan de Sitter grubu ISO(4,1)'in onbeş bileşeni ile bir skaler cinsinden yazmaya çalışalım.

İki-cisim problemine benzer bir yaklaşım Bakri ve Mansour (1980) tarafından kullanılmıştır; fakat onlar bizzat Bakri'nin elde etmiş olduğu alan denklemlerinden hareket etmişlerdir (Bakri 1967). Bu denklemler, homojen olmayan de Sitter grubunun sonlu boyutlu indirgenemez gösterimlerinden yola çıkılarak m-kütleli ve S-spinli parçacıkları tasvir etmek üzere türetilmiştir. Yalnızca minimal etkileşmeyi ele almış oldukları için relativistik potansiyellerde yük-moment ve moment-moment terimleri bulunmamaktadır. Çalışmamızda en genel Hamiltonyeni kullandığımız için manyetik etkileşmelerin baskın olduğu, örneğin süperpozitronyumu ve ayrıca elektron-nötrino ve nötrino-antinötrino sistemlerini incelememiz ve dolayısıyla bunların bağlı haller oluşturup oluşturmadıklarını saptamamız mümkün olacaktır.

de Sitter grubu SO(4,1) beş boyutlu lineer orthogonal dönüşümler grubudur. Homojen olmayan de Sitter grubunun jeneratörleri, homojen de Sitter grubunun jeneratörleri $S_{ab}(=-S_{ba})$'ler ile P_a ötelemelerinden ibarettir. Momentum-enerji-kütle beşli-vektörünün bileşenleri, momentumun kartezyen bileşenleri p_K, enerji $p_4=ip_o$ ve $p_5=m$ şeklindedir. de Sitter grubunun jeneratörleri S_{ab}'ler ise $S_{\mu\nu}=\gamma_\mu\gamma_\nu+\delta_{\mu\nu}$, $S_{\mu 5}=\gamma_\mu$, $a=1,2,3,4,5$ dir. Bunlara γ_5 ve $\gamma_5\gamma_\mu$'i eklersek $S_{AB}=-S_{BA}$ $A,B=1,2,3,4,5,6$ cümlesini elde ederiz.

Şimdi direkt çarpım gösterimini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$S_{AB}^{(1)}=S_{AB}\otimes I \quad , \quad S_{AB}^{(2)}=I\otimes S_{AB} \tag{3.28}$$

Yukarıdaki S'_{AB} ler Dirac cebirini sağlarlar. Herbir parçacığa ait alt uzayda işlem gören $S_{AB}^{(i)}$ 'leri $(i=1,2)$ şu şekilde yazabiliriz:

$$S_{kl}^{(i)} = -i\,\epsilon_{kln}\,\sigma_{(i)}^{n} \;,\; S_{4k}^{(i)}= -i\alpha_{(i)}^{k}= -i\gamma_{(i)}^{o}\;\gamma_{(i)}^{k} \tag{3.29a}$$

$$S_{k5}^{(i)} = -\gamma^{k}_{(i)} \quad , \quad S_{45}^{(i)} = \gamma_4^{(i)} = i\gamma_o^{(i)} \tag{3.29b}$$

$$S_{k6}^{(i)} = \beta^{k}_{(i)} = (i\gamma^5\gamma^k)_{(i)} , \quad S_{46} = \beta_4 = i\beta_o = \gamma^5\gamma_o \tag{3.30a}$$

$$S_{56} = \beta_5 = -i\gamma_5 \quad , \quad \gamma_5^{(i)} = i\gamma_o^{(i)}\ \gamma_1^{(i)}\ \gamma_2^{(i)}\ \gamma_3^{(i)} \tag{3.30b}$$

ve S_{AB}'lerin komütasyon bağıntısı aşağıdaki gibidir:

$$S_{AB}S_{CD} = \delta_{AC}S_{BD} + \delta_{BD}S_{AC} - \delta_{AD}S_{BC} - \delta_{BC}S_{AD} - \delta_{AC}\delta_{BD}$$
$$+ \delta_{AD}\delta_{BC} - \frac{i}{2}\,\epsilon_{ABCDEF}\ S_{EF} \tag{3.31}$$

Burada ϵ_{ABCDEF} tam antisimetrik Levi-Civita pseudotensörüdür ve $\epsilon_{123456} = -1$ alınmıştır.

O zaman Ψ'nin matris elemanları

$$(S_{AB}^{(1)}\ \Psi)_{\alpha\beta} = (S_{AB})_{\alpha\alpha'}\ \ \Psi_{\alpha'\beta} \tag{3.32a}$$

$$(S_{AB}^{(2)}\ \Psi)_{\alpha\beta} = (S_{AB})_{\beta\beta'}\ \ \Psi_{\alpha\beta'} \tag{3.32b}$$

biçimindedir ve Ψ dalga fonksiyonu için şu açılımı yazabiliriz:

$$\Psi = a\,C + \frac{1}{2}\ S_{AB}\ C\ \Psi_{AB} \tag{3.33}$$

Burada C kompleks eşlenik alma matrisidir. Böylece Ψ'nin onaltı bağımsız bileşeni bir sabit a ve altı boyutlu 15-bileşenli antisimetrik $\Psi_{AB} = -\Psi_{BA}$ tensörü ile verilir. Ψ_{AB}'nin üç boyuttaki bileşenlerini aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$\Psi_{kl} = \epsilon_{kln} H^n \ , \quad \Psi_{4k} = -iE^k \ , \ \Psi_{k5} = -\chi^k , \quad \Psi_{45} = i\chi_o$$

$$\Psi_{k6} = \varphi^k \qquad , \quad \Psi_{46} = i\varphi_o \quad \Psi_{56} = \eta \tag{3.34}$$

Başka bir deyişle bileşenler dört vektör, $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{\chi}$, $\vec{\varphi}$ ve üç skalerden χ_o, φ_o, η ibarettir ve bunların tümü de r,θ ve φ'nin fonksiyonudurlar. Dolayısıyla Ψ'nin açık ifadesi

$$\Psi = (a - i\vec{\sigma}.\vec{H} - \vec{\alpha}.\vec{E} + \vec{\gamma}.\vec{\chi} - \gamma_o\chi_o + \vec{\beta}.\vec{\phi} - \beta_o\phi_o + \beta_5\eta)C \tag{3.35}$$

olur. $S^{(i)}_{AB}$ jeneratörlerinin Ψ üzerine etkilerini (3.32a-b) ve (3.33) bağıntılarından elde edebiliriz:

$$S^{(1)}_{AB}\Psi = S_{AB}C\,a + \frac{1}{2} S_{AB}S_{CD}C\ \Psi_{CD} \tag{3.36a}$$

$$S^{(2)}_{AB}\Psi = C\,S^T_{AB}\,a + \frac{1}{2} S_{CD}\,C\,S^T_{AB}\Psi_{CD} \tag{3.36b}$$

Burada A ve B indisleri 1'den 6'ya kadardır. Benzer şekilde

$$S^{(2)}_{ab}\Psi = -S_{ab}\,C\,a - \frac{1}{2} S_{CD}S_{ab}\,C\ \ \Psi_{CD} \tag{3.37a}$$

$$S^{(2)}_{a6}\Psi = S_{a6}\,C\,a + \frac{1}{2} S_{CD}S_{a6}\,C\ \ \Psi_{CD} \tag{3.37b}$$

dir. Şimdi amacımız Ψ dalga fonksiyonunu (3.35)'deki gibi seriye açıp enerji denklemini S_{AB} ve Ψ_{AB}'ler cinsinden yazdıktan sonra (3.36) ve (3.37) bağıntılarından yararlanarak $\hat{H}$ 'nin herbir teriminin Ψ üzerine etkisini hesaplamaktır. Bu hesaplar Ek B'de verilmiştir. S_{AB} jeneratörlerinin lineer bağımsızlığını kullanarak (3.27) enerji denklemine tamamıyla eşdeğer olan çiftlenimli sekiz denklem elde edilebilir. Bazı sadeleştirmelerden sonra bu sekiz denklem aşağıdakilerdir:

$$[E + \frac{4e_1e_2}{r} - \frac{8a_1a_2}{r^3} + \frac{40a_1a_2}{3}\delta(\vec{r})]\chi_o + (m_1-m_2)a = \frac{i\kappa}{r^3}(\vec{r}.\vec{E})$$

$$[E + \frac{4e_1e_2}{r} + \frac{12a_1a_2}{r^3} - 24a_1a_2\delta(\vec{r})]\varphi_o = (m_1+m_2)\eta - \frac{i\lambda}{r^3}(\vec{r}.\vec{H})$$

$$[E + \frac{16a_1a_2}{r^3} - \frac{56a_1a_2}{3}\delta(\vec{r})]\vec{H} - (m_1-m_2)\vec{\varphi} = -2i\vec{\nabla}\eta - \frac{i\lambda}{r^3}\varphi_o\vec{r}$$

$$+ \frac{24a_1a_2}{r^5}\vec{r}(\vec{r}.\vec{H}) - \frac{\kappa}{r^3}(\vec{r}\wedge\vec{\chi})$$

$$[E - \frac{8e_1e_2}{r} + \frac{14a_1a_2}{r^3} - \frac{64a_1a_2}{3}\delta(\vec{r})]\eta = -2i\vec{\nabla}.\vec{H} \quad (m_1+m_2)\varphi_o$$

$$- \frac{3i\kappa}{r^3}(\vec{r}.\vec{\varphi})$$

$$[E + 8a_1a_2\delta(r)]E - (m_1+m_2)\vec{\chi} = 2i\vec{\nabla}a + \frac{i\lambda}{r^3}(\vec{\varphi}\wedge\vec{r}) + \frac{i\kappa}{r^3}\vec{r}\chi_o$$

$$[E - \frac{8e_1e_2}{r} - \frac{4a_1a_2}{r^3} + \frac{56a_1a_2}{3}\delta(\vec{r})] \; a = 2i\vec{\nabla}.\vec{E} - (m_1-m_2)\chi_o$$

$$+ \frac{i\lambda}{r^3}\vec{\chi}\;.\vec{r}$$

$$[E - \frac{2e_1e_2}{r} + \frac{16a_1a_2}{r^3} - \frac{8a_1a_2}{3}\delta(\vec{r})]\vec{\varphi} - (m_1-m_2)\vec{H} + 2i\vec{\nabla}\wedge\vec{\chi} = \frac{i\lambda}{r^3}\vec{E}\wedge\vec{r}$$

$$+ \frac{3i\kappa}{r^3}\eta\vec{r} - \frac{24a_1a_2}{r^5}\vec{r}(\vec{r}.\vec{\varphi})$$

$$[E - \frac{4e_1e_2}{r} + \frac{10a_1a_2}{r^3} - \frac{16a_1a_2}{3}\delta(\vec{r})]\vec{\chi} + (m_1+m_2)\vec{E} = -2i\vec{\nabla}\Lambda\vec{\varphi}$$

$$+ \frac{3i\lambda}{r^3}a\vec{r} - \frac{i\kappa}{r^3}\vec{r}\Lambda\vec{H} + \frac{24a_1a_2}{r^5}\vec{r}(\vec{r}.\vec{\chi}) \qquad (3.38)$$

e_1, e_2, m_1, m_2, a_1 ve a_2 parametreleri için uygun değerleri alarak pozitronyum, süperpozitronyum, elektron-nötrino ve nötrino-antinötrino sistemleri için çiftlenimli denklemleri bulabiliriz ($\lambda = e_1a_2 + e_2a_1$, $\kappa = e_1a_2 - e_2a_1$):

1) Pozitronyum hali: $m_1 = m_2 = m_e, e_1e_2 = -e^2$, $a_1 = a_2 = 0, \lambda = \kappa = 0$

2) Süperpozitronyum hali: $m_1 = m_2 = m_e$, $e_1e_2 = -e^2$,
$a_1 = -a_2 = \mu$, $\lambda = -2e\mu$, $\kappa = 0$

3) Elektron-nötrino sistemi: $e_1 = -e$, $e_2 = 0$, $m_1 = m_e$,
$m_2 = 0$ $\lambda = \kappa = -e\mu$

4) Nötrino-antinötrino sistemi: $m_1 = m_2 = 0$, $e_1 = e_2 = 0$,
$a_1 = -a_2 = \mu, \lambda = \kappa = 0$

(3.38)'de bu yerleştirmeler yapıldığında ilgili denklem sistemleri kolayca bulanabileceğinden burada tekrar yazmıyoruz.

3.4. Çözümlerin Sınıflandırılması ve Literatürle Karşılaştırma

Önceki kesimde elde ettiğimiz (3.38) çiftlenimli denklemlerini başka ek bilgiler olmaksızın çözmek mümkün değildir. Bu nedenle Hamiltonyendeki simetrileri araştırmamız ve böylece toplam dalga fonksiyonunun bağımsız bileşen sayısını azaltmamız gerekir.

Önce fermiyon-antifermiyon bağlı halini, özel olarak da pozitronyumu ele alalım. İyi bilindiği üzere göresiz halde yörüngesel, spin ve toplam açısal momentum işlemcileri olan $\vec{L}^2$, L_z, $\vec{S}^2$, S_z, $\vec{J}^2$ ve J_z hareket sabitidirler ve sistemin enerji momentum işlemcisi P_μ ile yer değiştirirler. Dolayısıyla alışılmış spektroskopik notasyon ilgili enerji düzeylerini sembolik olarak göstermekte kullanılabilir.

Oysa göreli (relativistik) halde $\vec{L}^2$, L_z, $\vec{S}^2$ ve S_z serbest Dirac Hamiltonyeni için bile artık hareket sabiti değildir. Fakat $\vec{J}^2$ ve J_z hâlâ hareket sabitidir. Yer değiştiren gözlemlenir sayısın tamamlamak üzere uzay paritesi ve yük eşleniği işlemcileri P ve C'yi yukarıdakilere eklemek uygundur. Bunlar P_μ ile yer değiştirirler ve böylelikle P_μ, $\vec{J}^2$, J_z, P ve C örneğin pozitronyum için gözlemlenebilirlerin bir tam kümesini oluşturur (Jauch ve Rohrlich 1980). Diğer önemli bir nokta da yine göresiz halde, parçacık-antiparçacık sisteminde CP-dönüşümü ile spin değiş tokuşunun birbirine eşdeğer olmasıdır. CP-tek durumlar singlet, CP-çiftler ise triplet durumlarıdır. Toplam uzaysal parite, göresiz halde, $-(-1)^L$ dir. Öndeki fazladan eksi işaret parçacık ve antiparçacıkların içsel paritelerinin zıt olmasından kaynaklanır (Jauch ve Rohrlich 1980, Bauhoff 1975 ve 1976).

Şimdi, $\vec{J}^2$ ve J_z 'nin özdeğerleri sırasıyla $j(j+1)$ ve m olsun. Toplam açısal momentum $\vec{J}$ ve parite işlemcisi P'yi şu şekilde yazıyoruz:

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge \vec{p} + \frac{1}{2} (\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)})$$

$$P = \gamma_o^{(1)} \gamma_o^{(2)} \pi \quad , \qquad \pi \Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r})$$

ve bunların her ikisi de $\hat{H}$ ile yer değiştirir.

Belirli bir ϵ paritesi için $\gamma_o^{(1)} \gamma_o^{(2)} \Psi(-\vec{r}) = \epsilon \Psi(\vec{r})$ yazar ve Ψ'nin (3.35)'deki açılımını kullanırsak aşağıdaki eşitlikleri kolayca elde ederiz:

$$\begin{aligned} a(-\vec{r}) &= \epsilon a(\vec{r}) \quad , & \chi_o(-\vec{r}) &= \epsilon \chi_o(\vec{r}) \\ \phi_o(-\vec{r}) &= -\epsilon \phi_o(\vec{r}) \quad , & \eta(-\vec{r}) &= -\epsilon \eta(\vec{r}) \\ \vec{H}(-\vec{r}) &= \epsilon \vec{H}(\vec{r}) \quad , & (-\vec{r}) &= \epsilon \vec{\phi}(\vec{r}) \\ \vec{E}(-\vec{r}) &= -\epsilon \vec{E}(\vec{r}) \quad , & \vec{\chi}(-\vec{r}) &= -\epsilon \vec{\chi}(\vec{r}) . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Öte yandan gösterilebilir ki $\bar{\Psi}(-\vec{r}) = C \tilde{\Psi}^T(-\vec{r}) C^{-1}$, $\tilde{\Psi}$ için yazılan denklemi sağlar ($\Psi = \tilde{\Psi} C$). Böylece

$$C \tilde{\Psi}^T(-\vec{r}) C^{-1} = \epsilon_c \Psi(-\vec{r}) \quad ; \tag{3.41}$$

yani

$$a(-\vec{r}) + \frac{1}{2} C \, S_{AB}^T \, C^{-1} \Psi_{AB}(-\vec{r}) = \epsilon_c (a + \frac{1}{2} S_{AB} \, \Psi_{AB}) \tag{3.42}$$

yazılabilir ve Denk.(3.35), (3.36) ve (3.37)'yi kullanarak aşağıdaki parite bağıntılarını elde edebiliriz:

$$a(-\vec{r}) = \epsilon_c a(\vec{r}) \qquad \Psi_{ab}(-\vec{r}) = -\epsilon_c \Psi_{ab}(\vec{r})$$

$$\Psi_{a6}(-\vec{r}) = \epsilon_c \Psi_{a6}(\vec{r}) \tag{3.43}$$

Uzay ve yük eşleniği paritelerini $\epsilon = \epsilon_c \epsilon_p$ tanımını yaparak birleştirir ve yukarıda sözünü ettiğimiz işlemcileri dikkate alırsak aşağıdaki sınıflandırmayı yapabiliriz:

a) $\epsilon = 1$ (yani $\epsilon_c = \epsilon_p$), $\epsilon_p = (-1)^j$; $j = \ell \pm 1$ triplet durumları $\varphi_o = \eta = \chi_o = \vec{H} = 0$, $a \neq 0$

b) $\epsilon = 1$ (yani $\epsilon_c = \epsilon_p$), $\epsilon_p = (-)^{j+1}$; $j = \ell$ triplet durumu $\chi_o = \varphi_o = \eta = \vec{H} = 0$, $a = 0$

c) $\epsilon = -1$ (yani $\epsilon_c = -\epsilon_p$), $\epsilon_p = (-)^{j+1}$; $j = \ell$ singlet durumu $\vec{E} = \vec{\chi} = \vec{\varphi} = a = 0$

Öte yandan Ψ'nin skaler ve vektör bileşenlerini kullanarak $\vec{J}^2$ ve J_z için yazılan özdeğer denklemlerinin incelenmesi sonunda küresel vektör harmonikler cinsinden aşağıdaki genel ifadeleri elde etmemiz mümkündür (Yılmazer 1986):

$$a = f(r)\, Y_{jm}(\theta,\varphi) \qquad , \quad \eta = g(r) Y_{jm}(\theta,\varphi)$$

$$\chi_o = h(r) Y_{jm}(\theta,\varphi) \qquad , \quad \varphi_o = k(r) Y_{jm}(\theta,\varphi)$$

$$\vec{\varphi} = u_1(r)\vec{L}\, Y_{jm} + r v_1(r)\vec{p}\, Y_{jm} + \frac{\omega_1}{r}\,\vec{r}\, Y_{jm}$$

$$\vec{\chi} = u_2(r)\vec{L}\, Y_{jm} + r v_2(p)\vec{p}\, Y_{jm} + \frac{\omega_2}{r}\,\vec{r}\, Y_{jm}$$

$$\vec{E} = u_3(r)\vec{L}\, Y_{jm} + r v_3(r)\vec{p}\, Y_{jm} + \frac{\omega_3}{r}\,\vec{r}\, Y_{jm}$$

$$\vec{H} = u_4(r)\vec{L}\, Y_{jm} + r v_4(r)\vec{p}\, Y_{jm} + \frac{\omega_4}{r}\,\vec{r}\, Y_{jm}$$

Bununla birlikte, küresel harmoniklerin pariteleri ve ikiparçacık durumlarının yukarıda verdiğimiz sınıflandırılması dikkate alınırsa bazı bileşenlerin zorunlu olarak ortadan kalktığını görebiliriz. Örneğin pozitronyum halinde, $(-1)^{j+1}$ pariteli çözümler $\vec{E} = \vec{\chi} = \vec{\varphi} = a = \chi_o = 0$ gerektirir ve dolayısıyla radyal denklemler yalnızca şunlardır:

$$\left(E - \frac{4e^2}{r}\right) k(r) = 2mg(r)$$

$$2g(r) = -Er\nu_4(r) \qquad (3.45)$$

$$2ig'(r) = E\omega_4(r)$$

$$2\left[\frac{-j(j+1)}{r} v_4(r) + \frac{i}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\omega_4)\right] = \left(E + \frac{8e^2}{r}\right) g(r) - 2mk(r)$$

Yukarıdaki denklemler arasında çiftlenim kaldırılırsa g(r) için şu diferansiyel denklemi buluruz:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}\left[\frac{r^2 g'(r)}{E}\right] + \left[\frac{1}{4}\left(E + \frac{8e^2}{r} - \frac{4m^2}{E - 4e^2/r}\right) - \frac{j(j+1)}{Er^2}\right] g(r) = 0$$

(3.46)

Asimtotik diferansiyel denkleme seri çözüm uygularsak r^{N+1}' in katsayısından aşağıdaki enerji spektrumunu elde edebiliriz:

$$E_N = 2m - \frac{m\alpha^2}{4(N+1)^2} - \frac{5m\alpha^4}{64(N+1)^4} - \frac{5m\alpha^6}{18(N+1)^6} \quad (N = 0,1,2,.) \qquad (3.47)$$

Bu ifade, α^2 -mertebesine kadar, Hidrojen atomununki ile aynıdır; aradaki fark sadece yukarıda kütle yerine m/2 indirgenmiş kütlesinin gelmesi ve N yerine N+1 kullanıyor olmamızdır. (3.46)'da görülen diferansiyel denklem Barut ve Ünal'ınki ile (1986) tam olarak uyuşmaktadır. Onlar aynı

Hamiltonyenden yola çıkarak ulaştıkları spinör denklemlerinde önce kütle merkezi ve relatif koordinatları kov ryant tarzda ayırmışlar ve daha sonra da tümüyle farklı bir yöntem izleyerek açısal ve radyal kısımları elde etmişlerdir (Barut ve Ünal 1985). Açılar üzerinden eylemin integralini aldıktan sonra 16 Euler-Legrenge denklemi yazmışlardır. Bizim elde etmiş olduğumuz radyal denklemler ile onlarınki yapısal olarak uyuşmaktadır: denklemlerin sekizi diferansiyel, geriye kalan diğer sekizi ise cebirseldir. Ayrıca $\epsilon = (-1)^{j+1}$ paritesi için ($\ell = j$) denklemler tekrar dörde dört iki kısıma ayrılmaktadır ki bu iki denklem gurubu "singlet" ($j = \ell$, $s = o$) ve "triplet" ($j = \ell$, $s = 1$) durumlarına karşı gelir. Her iki yöntemde de ortak olan bir özellik, onaltı denklemin, parite işlemcisinin özdeğerinin $\epsilon = (-1)^{j+1}$ $\epsilon = (-1)^{j}$ olmasına göre sekize sekiz iki farklı guruba ayrılmasıdır. Yine her iki sistemde radyal denklemler tam olarak uyuşmaktadır; yalnızca $\epsilon = (-1)^{j}$, $j = \ell = 1$ triplet durumlarında denklemlerin katsayılarında bazı küçük farklılıklar sözkonusudur.

Daha önce vurguladığımız gibi göresiz halde (P-tek durumlar "singlet" durumlarıdır; fakat relativistik halde bu doğru değildir. Ψ üzerine $\vec{S}^2$ 'yi uygulayarak bunu kolayca görmek mümkündür. Örneğin $\eta_p = (-1)^{j+1}$ pariteli pozitronyum için toplam dalga fonksiyonunun skaler ve vektör bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\phi_o = k(r)\, Y_{jm}(\theta,\varphi) \quad , \quad \eta = g(r)\, Y_{jm}(\theta,\varphi)$$
$$\vec{H} = [r v_4(r)\vec{p} \quad \frac{\omega_4(r)}{r} \vec{r}\;]\quad Y_{jm}(\theta,\varphi) \tag{3.48}$$

ve SO(4,1) jeneratörleri cinsinden

$$\vec{S}^2 = -\frac{1}{8}\,(S^{(1)}_{ml} S^{(1)}_{ml} + S^{(2)}_{ml}\; S^{(2)}_{ml} + 2S^{(1)}_{ml} S^{(2)}_{ml}) \tag{3.49}$$

olduğundan sonuç beklenildiği gibi

$$\vec{S}^2\, \Psi = -2i\vec{\sigma}.\vec{H}\, C \neq 0$$

dır. Bu nedenle durumları "singlet" ya da "triplet" biçiminde adlandırırken bu belirlemenin aslında göresiz limit düşünülerek yapıldığını unutmamak gerekir.

Pozitronyumu incelerken kullandığımız genel yaklaşımı izleyerek tartışmak istediğimiz bir diğer bağlı hal problemi de nötrino-antinötrino sistemidir. Yine $(-1)^{j+1}$ pariteli çözümleri ele alacak olursak $a = \chi_o = \vec{\varphi} = \vec{E} = \vec{\chi} = 0$ dır ve şu üç radyal denklemi elde ederiz:

$$\omega_4(r) = [E + \frac{8\mu^2}{r^3}]^{-1} [-2ig'(r)]$$

$$v_4(r) = [E - \frac{16\mu^2}{r^3}] \frac{2g(r)}{r} \qquad (3.50)$$

$$[E - \frac{14\mu^2}{r^3}] g(r) = -\frac{2i}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\omega_4) + \frac{2j(j+1)}{r} v_4$$

Bu denklemlerdeki çiftlenimi kaldırırsak g(r) için

$$[E - \frac{14\mu^2}{r^3}] g(r) = -\frac{2i}{r^2}\frac{d}{dr}\{r^2 [E + \frac{8\mu^2}{r^3}]^{-1} (-2ig'(r)\}$$

$$+ \frac{2j(j+1)}{r} (E - \frac{16\mu^2}{r^3})^{-1} \frac{2g(r)}{r} \qquad (3.51)$$

elde edilir. $r \to \infty$ için $g''_\infty(r) + E^2/4\ g_\infty(r) = 0$ olur ve dolayısıyla kütlesiz nötrinolar ile $\nu - \bar{\nu}$ sistemi için bağlı durum çözümleri bulamayız. Aynı problemi bir kez de kütleli nötrinolarla tekrar gözden geçirelim. Radyal denklemlerimiz bu kez aşağıdaki gibidir:

$$(E - \frac{12\mu^2}{r^3}) k(r) = 2mg(r)$$

$$(E + \frac{8\mu^2}{r^3}) \omega_4(r) = -2ig'(r) \qquad (3.52)$$

$$(E - \frac{16\mu^2}{r^3})\, r v_4(r) = 2g(r)$$

$$(E - \frac{14\mu^2}{r^3})\, g(r) = -\frac{2i}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2 \omega_4)$$

$$+ \frac{2j(j+1)}{r} v_4 + 2mk(r)$$

g(r) için diferansiyel denklem:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 g''(r)}{E + 8\mu^2/r^3} \right] + \left[\frac{1}{4} \left(E - \frac{14\mu^2}{r^3} - \frac{4m^2}{E - 12\mu^2/r^3}\right) - \frac{j(j+1)}{r^2(E - 16\mu^2/r^3)} \right] g(r) = 0$$

(3.53)

bu ise pozitronyum halinde incelemiş olduğumuz denklemin benzeridir.

$r \to \infty$ için $g_\infty + \frac{1}{4}(E^2 - 4m^2) g = 0$ olur. $K^2 = (4m^2 - E)/4$ ve

$g_\infty \sim e^{-Kr}$ yazarsak $K^2 < 0$ yani $E < 2m$ için bağlı-durum bulunma olasılığı vardır. Genel yöntemi izleyerek en sonunda $r^{N+\sigma-1}$'in katsayısını sıfıra eşitlemek suretiyle farklı iki durum elde ederiz:

a) $E = 0$ b) $E = 2m$

$(-1)^j$ paritesi için $\nu - \bar{\nu}$ sisteminin radyal denklemleri daha karmaşıktır ve çözülmemiştir. Sıfır bağlı-durum enerjili ($E = 2m$) çözümleri, e-ν sistemleri için Barut (1980) tarafından elde edilen sıfır-enerjili çözümlerle kıyaslamak mümkündür. Öte yandan elektron-nötrino ve süperpozitronyum halleri maalesef çok daha karmaşık denklemler verirler.

Bu kesimde tartışacağımız son nokta relativistik iki-parçacık problemine Kemmer-Duffin-Petiau (KDP) yaklaşımıdır. Son zamanlarda, iki-cisim Dirac denkleminin tek cisim KDP denklemine indirgenebileceği eşit kütle halinde gösterildi (Kälberman 1986). Barut tarafından alan teorisinden elde edilebileceği gösterilen aşağıdaki

$$[(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2).\vec{p} + m(\gamma_1^o + \gamma_2^o) + 2U] \quad \Psi = E\Psi \tag{3.54}$$

iki-cisim denklemini gözönüne alalım. Burada $\vec{\alpha}_1$ ve $\vec{\alpha}_2$ sırasıyla 1 ve 2 numaralı parçacık uzaylarındaki Dirac matrisleri, $\vec{p}$ relatif momentum ve U da iki parçacık arasındaki skaler, pseudoskaler, vektör ve tensör etkileşmeleri içeren en genel potansiyeldir. Aşağıdaki tanımlar yapılırsa

$$\vec{\beta} = \frac{1}{2}\,(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2) \qquad , \; \beta_o = \frac{1}{2}\,(\gamma_1^o + \gamma_2^o) \tag{3.55}$$

bu matrislerin KDP cebrini sağladıklarını göstermek zor değildir:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = \delta_{\mu\nu}\, \beta^\lambda + \delta_{\nu\lambda}\, \beta^\mu \tag{3.56}$$

Yukarıdaki matrisler indirgenemez gösterimleri beş ve on boyutlu olan 126 bağımsız matris cebrini verir ve gösterimler sırasıyla spin-0 ve spin-1 parçacıklara karşılık gelir (Krajcik,R.A. ve Nieto M.M.1977). Bundan sonraki adım ise Denk.(3.54)'ü bu matrislerle yeniden ifade edip tek cisim Kemmer-Duffin-Petiau denklemini yazmaktır. Beş ve on boyutlu gösterimler için $\Psi = (\phi, \Psi_o, \vec{\Psi})^T$ ve $\Psi = (A_o, \vec{A}, \vec{E}, \vec{B})^T$ alarak Kalberman, Ψ'nin bileşenleri için, aşağıda matris formunda yazdığımız onbeş denklemi elde etmiştir (eşit kütle halinde):

$$
\left(\begin{array}{c:c}
\begin{matrix}
U_1 & m & -i\partial_1 & -i\partial_2 & -i\partial_3 \\
m & U_2 & 0 & 0 & 0 \\
-i\partial_1 & 0 & U_3 & 0 & 0 \\
-i\partial_2 & 0 & 0 & U_3 & 0 \\
-i\partial_3 & 0 & 0 & 0 & U_3
\end{matrix} & 0 \\
\hdashline
0 &
\begin{matrix}
U_4 & 0 & 0 & 0 & -i\partial_1 & -i\partial_2 & -i\partial_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & U_1 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & i\partial_3 & -i\partial_2 \\
0 & 0 & U_1 & 0 & 0 & m & 0 & -i\partial_3 & 0 & i\partial_1 \\
0 & 0 & 0 & U_1 & 0 & 0 & m & i\partial_2 & -i\partial_1 & 0 \\
-i\partial_1 & m & 0 & 0 & U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-i\partial_2 & 0 & m & 0 & 0 & U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-i\partial_3 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & U_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i\partial_3 & i\partial_2 & 0 & 0 & 0 & U_3 & 0 & 0 \\
0 & i\partial_3 & 0 & -i\partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_3 & 0 \\
0 & -i\partial_2 & -i\partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_3
\end{matrix}
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} \phi \\ \Psi_o \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \vdots \\ A_o \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}
= E
\begin{pmatrix} \phi \\ \Psi_o \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \vdots \\ A_o \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}
$$

Böylece KDP denkleminin iki cisim Dirac denkleminden çıkartılabileceği ilk kez gösterilmiş olmaktadır. Şimdi de daha önce elde ettiğimiz (3.38)'deki sekiz denklemi karşılaştırmada kolaylık sağlaması için matris formunda yazalım:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccccccccc}
V_1(r) & m_1+m_2 & -2i\partial_1 & -2i\partial_2 & -2i\partial_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3i\kappa x}{r^3} & \frac{-3i\kappa y}{r^3} & \frac{-3i\kappa z}{r^3} & 0 \\
m_1+m_2 & V_2(r) & i\lambda x/r^3 & i\lambda y/r^3 & i\lambda z/r^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2i\partial_1 & i\lambda x/r^3 & V_3(r) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-i\kappa z}{r^3} & \frac{i\kappa y}{r^3} & 0 & 0 & 0 & m_1-m_2 & 0 & 0 & 0 \\
-2i\partial_2 & i\lambda y/r^3 & 0 & V_3(r) & 0 & 0 & \frac{i\kappa z}{r^3} & 0 & \frac{i\kappa x}{r^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1-m_2 & 0 & 0 \\
-2i\partial_3 & i\lambda z/r^3 & 0 & 0 & V_3(r) & 0 & \frac{i\kappa y}{r^3} & \frac{-i\kappa y}{r^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1-m_2 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_4(r) & \frac{i\lambda x}{r^3} & \frac{i\lambda y}{r^3} & \frac{i\lambda z}{r^3} & 2i\partial_1 & 2i\partial_2 & 2i\partial_3 & 0 & 0 & 0 & (m_1-m_2) \\
0 & 0 & 0 & -\frac{i\kappa z}{r^3} & \frac{i\kappa y}{r^3} & \frac{3i\lambda x}{r^3} & V_5(r) & 0 & 0 & -(m_1+m_2) & 0 & 0 & 0 & 2i\partial_3 & -2i\partial_2 & 0 \\
0 & 0 & \frac{i\kappa z}{r^3} & 0 & \frac{i\kappa x}{r^3} & \frac{3i\lambda y}{r^3} & 0 & V_5(r) & 0 & 0 & -(m_1+m_2) & 0 & -2i\partial_3 & 0 & -2i\partial_1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-i\kappa y}{r^3} & \frac{i\lambda x}{r^3} & 0 & \frac{3i\lambda z}{r^3} & 0 & 0 & V_5(r) & 0 & 0 & -(m_1+m_2) & 2i\partial_2 & 2i\partial_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2i\partial_1 & m_1+m_2 & 0 & 0 & V_6(r) & 0 & 0 & 0 & \frac{i\lambda z}{r^3} & \frac{i\lambda y}{r^3} & \frac{i\kappa x}{r^3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2i\partial_2 & 0 & m_1+m_2 & 0 & 0 & V_6(r) & 0 & \frac{i\lambda z}{r^3} & 0 & \frac{-i\lambda x}{r^3} & \frac{i\kappa y}{r^3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2i\partial_3 & 0 & 0 & m_1+m_2 & 0 & 0 & V_6(r) & \frac{-i\lambda y}{r^3} & \frac{i\lambda x}{r^3} & 0 & \frac{i\kappa z}{r^3} \\
\frac{-3i\kappa x}{r^3} & 0 & m_1-m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i\partial_3 & 2i\partial_2 & 0 & \frac{-i\lambda z}{r^3} & \frac{i\lambda y}{r^3} & V_7(r) & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-3i\kappa y}{r^3} & 0 & 0 & m_1-m_2 & 0 & 0 & 2i\partial_3 & 0 & -2i\partial_1 & \frac{i\lambda z}{r^3} & 0 & \frac{-i\lambda x}{r^3} & 0 & V_7(r) & 0 & 0 \\
\frac{-3i\kappa z}{r^3} & 0 & 0 & 0 & m_1-m_2 & 0 & -2i\partial_2 & 2i\partial_1 & 0 & -\frac{i\lambda y}{r^3} & \frac{i\lambda x}{r^3} & 0 & 0 & 0 & V_7(r) & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1-m_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{i\kappa x}{r^3} & \frac{i\kappa y}{r^3} & \frac{i\kappa z}{r^3} & 0 & 0 & 0 & V_8
\end{array}\right]
\begin{pmatrix} \eta \\ \varphi_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ a \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ x_0 \end{pmatrix}
= E
\begin{pmatrix} \eta \\ \varphi_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ a \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ x_0 \end{pmatrix}
$$

Eşit kütle ($m_1 = m_2$) ve hiçbir manyetik etkileşmenin olmadığı ($\lambda = \kappa = 0$) özel halde, denklem sistemleri arasındaki uyuşum hemen görülmektedir (Aydın ve Yılmazer 1987). $m_1 \neq m_2$ durumunda ise matrisin $5 + 10$ biçiminde köşegenleştirilmesi oldukça güçtür ve dolayısıyla eşit olmayan kütleli parçacıkların bağlı halinin incelenmesi, örneğin elektron-nötrino sistemi, nispeten zorlaşmaktadır.

4. SÜPERSİMETRİK TEORİLER

4.1. Giriş

Fiziğin nihai amacı, mümkün olduğu kadar az sayıda temel kavramı kullanarak maddenin doğasını tasvir edebilmektir. Elemanter parçacık fiziğinde son yirmi yılın umudu o ki, bütün parçacıkları ve bunların etkileşmelerini tek ve tutarlı bir teoride birleştirme çabaları en sonunda başarıya ulaşacaktır. Gerçekten de bu yolda ilk adım günümüzden yaklaşık yüzyıl kadar önce elektrik ve manyetizmayı birleştiren James Clerk Maxwell tarafından atıldı ve daha sonra elektrozayıf kuvvetlerin taşıyıcıları olan $W^{\pm}$ ve Z^{o} bozonlarının, Glashow-Weinberg-Salam teorisinin öngörülerine uygun olarak 1983 yılında başarılı bir şekilde gözlenmeleriyle devam etti (Rubbia et.al. 1983)

Elektrozayıf kuvvetlerle, kuantum renk dinamiğinin (QCD) ele aldığı kuvvetli etkileşmelerin, daha geniş grupları örneğin SU (5)'i, temel almak suretiyle kurulan büyük birleşme ayar teorileri (GUT) içerisinde birleştirilebilecekleri önerilmiştir (Georgi ve Glashow 1974). Fakat bu teoriler doğrulanmak için proton bozunumunun gözlenmesini beklemektedirler ve üstelik daha önce açıkladığımız "ayar hiyerarşisi" problemi ile yüz yüzedirler.

Geriye kalan diğer doğa kuvveti olan kütle çekiminin ise teorik düzeyde bile yukarıdaki kuvvetlerle tatmin edici bir şekilde birleştirilmesi henüz mümkün olmamıştır. Bu amaca yönelik olarak pekçok model önerilmiş olmasına karşın (Kaluza 1921, Klein 1926, Duff 1982) tam bir birleşme için çözülmesi gereken birtakım önemli güçlükler muvcuttur. Bu sorunların kaynağını iki kısıma ayırabiliriz: birincisi kütle çekiminin kuantum mekaniğiyle nasıl uyuşturulacağı ikincisi ise uzay-zamanın eğriliği gibi düşünülen kütle çekiminin, bu şekilde yorumlanmaları olanaksız olan diğer doğa kuvvetleriyle nasıl birleştirilebileceğidir.

Bu soruları yanıtlıyabilmek üzere daha yüksek boyutların kullanılması, kütle çekiminin diğer kuvvetlerle en geniş çapta birleştirilmesine oldukça zarif bir çözümdür fakat bu kez mor ötesi ıraksaklıklar ve yüksek boyut problemi ile karşı karşıya gelmekteyiz.

Tezin giriş kısmında süpersimetri kavramını vermiş ve gerisinde yatan temel motivasyonları sıralamıştık. Orada sözünü ettiğimiz gibi süpersimetri, bozon ve fermiyon ilmekleri arasında toptan bir eksi işaret bulunduğunu söyleyen spin-istatistik teoremi sayesinde alışılmış kuantum alan teorilerine daha yumuşak mor-ötesi ıraksaklıklar kazandırmaktadır. Böylece eğer bir yandan fermiyon ve bozon kütleleri diğer yandan da çiftlenim sabitleri arasında uygun bağıntılar mevcutsa değişik 1-ilmek diyagramlarının birbirlerini yok etmesi sağlanabilir. Süpersimetrinin dikkate değer bir özelliği de eğer 1-ilmek düzeyinde böyle bir sadeleşme varsa, bunun pertürbasyon teorisinin her mertebesinde otomatik olarak ortaya çıkmasıdır. Örnek olarak dört boyuttaki $N=4$ sonlu süpersimetrik Yang-Mills teorilerini verebiliriz. Bununla birlikte bu sonuçların süpergravite aracılığıyla kütle çekimine genelleştirilmesi o denli başarılı olmamıştır ve pertürbasyon teorisinin tüm mertebelerinde, herhangi bir genişletilmiş süpergravitenin tam olarak sonlu kalıp kalmadığı hâlâ kuşkuludur (Taylor 1982).

Ayar hiyerarjisi problemine tekrar geri dönecek olursak kuantum ıraksaklıklarındaki bu yumuşamanın, GUT'lerdeki hafif ve ağır Higgs parçacıkları arasındaki haberleşmeyi şu şekilde azaltabileceğini görürüz. İyi bilindiği gibi fizikteki iki enerji düzeyinin, yani elektrozayıf düzey M_W (~ 100 GeV) ile GUT düzeyi M_G ($\sim 10^{15}$ GeV) nin bu denli birbirlerinden farklı olması Büyük Birleşme Teorileri

$$\frac{M_W}{M_G} \ll 10^{-13} \qquad (4.1)$$

için temel bir problem yaratmaktadır. O halde bu iki düzeyi birbirinden ayrı tutmak nasıl mümkün olabilir? Bilinen kuantum teorilerinde parametreleri, (4.1)'i sağlayacak tarzda belirlesek bile kuantum düzeltmeleri bu durumu bozacak ve dolayısıyla pertürbasyon teorisinin her mertebesinde yeniden ayarlama yapmak zorunda kalacağız ki doğal bir teori için bu hiç de akla uygun gelmemektedir. Aslında problem teoride skaler parçacıkların bulunmasından kaynaklanır. Zira renormalizibiliteyi koruyarak herhangi bir ayar teorisini kurmak, ancak kendiliğinden simetri bozulması yoluyla olmaktadır. Bu da bazı skaler alanların boşluk beklenti değerleri kazanmasını gerektirir. GUT modellerinde iki takım skaler alana gerek duyular; bunlardan biri büyük birleşme grubu G'nin SU(3)xSU(2)xU(1)'e M_G enerji düzeylerinde kırılması içindir. Dolayısıyla bu alanların boşluk beklenti değerleri (VEV) M_G mertebesindedir. Diğer takım ise SU(3)xSU(2)xU(1) in SU(3)xU$(1)_{EM}$'e düşürülmesinde kullanılır, böylece bu alanların VEV'leri $\sim M_W$ mertebesinde olmalıdır.

Bu Higgs alanlarının kütleleri kendi boşluk beklenti değerleri ile orantılı olduğundan sonuç olarak elimizde O (M_W) kütlesinde hafif Higgs ile kütlesi O (M_G) mertebesinde olan ağır Higgs parçacıkları kalır. Klâsik olarak bunu düzenlememiz mümkündür fakat hafif ve ağır Higgs bozonları, daha 1-ilmek mertebesinden itibaren ara bozonları, fermiyonlar ve skaler alanlar ile çiftlenimli olduğundan bu alanlar aracılığıyla Higgs'ler arasında haberleşme söz konusudur. Bu durumun derhal yol açtığı sonuçlardan birisi O (M_G) mertebesindeki hafif Higgs alanın kütlesine O (M_W) mertebesinde düzeltmelerin yaratılmasıdır. Fakat açıktır ki ancak O(M_W) mertebesindeki düzelmelere izin verilebilir. Bu güçlüğün ortaya çıkmasının nedeni teoride skaler alanları kütlesiz bırakacak hiçbir simetrinin bulunmayışıdır. Oysa ayar simetrisi ve SU$(2)_L$xSU$(2)_R$ chiral simetri ayar bozonları ile fermiyonlara çıplak kütle terimlerinin yazılmasına izin vermez (sol ve sağ elli elektronlar ayar dönüşümleri altında farklı davranırlar).

Öte yandan her ϕ skaler alanı kütleye sahip olabilir zira ayar simetrisi altında ϕ nasıl dönüşüyorsa dönüşsün $\phi^* \phi$ her zaman ayar invaryanttır; ve böylece Lagranjiyenin, $M^2 \sim M_G^2$ olacak şekilde $M^2 \phi^* \phi$ terimini içermesini bekleyebiliriz. Bu durumun önüne geçmek için ϕ kütle terimince bozulan bir simetriye gerek duyulur ve süpersimetri bunu başarabilecek yegâne bilinen simetridir. Ayrıca hafif skaler alan kütlelerine bütün 1-ilmek düzeltmelerini ekleyecek olursak, yukarıda sözünü ettiğimiz kısalmalar sayesinde, toplamları hemen hemen sıfır olur.

Böylece süpersimetri skalerleri, SU(2)xU(1) tarafından kütlesiz bırakılan fermiyonlara bağlar ve SUSY ile SU(2)xU(1) kırılmadığı sürece skaler alanlar kütlesiz kalır. Bu nedenle hafif skaler kütleleri elde edebilmek için SU(2)xU(1) ve süpersimetriyi zayıfca kıracak bir mekanizmaya gereksinim duyarız; zaten bilindiği gibi süpersimetrinin kırılması zorunludur zira tam (bozulmamış) SUSY fermiyon ve bozon kütlelerinin eşit olduğunu söyler ki deneysel olarak bu durum gözlenmemektedir. Süpersimetrinin kendiliğinden kırılmasını (SSB) kesim 4.4'de inceleyeceğiz.

Süpersimetri ve süpergravite konusu günümüzde çok geniş bir literatüre sahiptir; pekçok derleme makale, kitap ve okul ders notu yayınlanmıştır (Logovini 1977, Fayet ve Ferrara 1977, Salam ve Strathdee 1978, P. van Nieuwanhuizen 1981, Wess ve Bagger 1983, Sohnius 1985, Taylor 1984, Nilles 1984, Haber ve Kane 1985, Stelle 1984, Kostelecky ve Campbell 1985, Gates et.al. 1983, Lahanas ve Nonopoulos 1987, West 1987). Biz burada yalnızca derleme makalelerin çoğunu sıraladık makalelere ise ileriki kesimlerde referans verilecektir.

Tezin ikinci kısmında önce SUSY cebirini, süperuzay tekniklerini ve kendiliğinden SUSY kırılmasını kısaca inceleyeceğiz. SUSY ayar teorileriyle standard modelin tartışılmasının ardından süpresimetrik kuantum mekaniğini ve pseudomekaniği ele alacağız. Nihayet relativistik iki parçacık probleminde SUSY düşüncesinin nasıl kullanılabileceğini son bölümde araştıracağız.

4.2. Süpersimetri cebiri

Süpersimetri bozonları ve fermiyonları birbirlerine dönüştüren bir simetridir. Bu dönüşümelrin jeneratörü Q'nun, dolayısıyla fermiyonik karakterde olması gerekir. Gerçekten de, Lorentz dönüşümleri altında Q_A $(A=1,2)$'yı sol elli bir Weyl spinörünün yani Lorentz grubunun $(\frac{1}{2}, 0)$ gösteriminin özelliklerine sahip bir spinör olarak seçebiliriz (tensör ve spinör cebirine ait notasyon ve kabuller Ek A'da verilmiştir). Q_A'nın hermitik eşleniği $\bar{Q}_{\dot{A}}$ ile gösterilebilir, bu ise sağ elli bir (0,1/2) Weyl spinörüdür.

Öte yandan tüm fizik teorileri, jeneratörleri P_μ (ötelemeler) ve $M_{\mu\nu}$ (dönmeler + "bost") olan Poincaré grubu altında kovarynas özelliği göstermek zorundadır. Bunlar ise aşağıdaki Lie cebirini sağlarlar:

$$(\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1))$$
$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$
$$[M_{\mu\nu}, P_\varphi] = -i(\eta_{\mu\nu} P_\nu - \eta_{\nu\varphi} P_\mu) \tag{4.2}$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\varphi\sigma}] = -i(\eta_{\mu\varphi} M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\varphi} - \eta_{\nu\varphi} M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\varphi})$$

Bunlar on-parametreli Poincaré Lie grubunu üretir. Coleman ve Mandula (1967) tarafından verilen önemli bir teoreme göre iç simetrileri, basit olmayan bir biçimde Poincaré simetrisi ile birleştirmek mümkün değildir. Gerçekten de S-matrisinin maksimal simetrisi, Poincaré simetrisiyle iç simetrinin direkt çarpımı olarak yazılabilir. Başka bir deyişle iç simetrinin jeneratörleri T_i ise bunlar P_μ ve $M_{\mu\nu}$ jeneratörleri ile yer değiştirir:

$$[P_\mu, T_i] = [M_{\mu\nu}, T] = 0 \tag{4.3}$$

Bununla birlikte yukarıdaki teorem komütasyon bağıntılarına dayalı olan Lie cebiri varsayımını kullanmaktadır. Oysa matematikte, komütatörler ve antikomütatörler altında kapanan ve "Derecelenmiş Lie Cebirleri" (GLA) adıyla bilinen daha zengin cebirsel yapılar vardır. (Scheunert et.al. 1976 ve 1977, Ramond 1985). Böyle bir cebirin "çift" elemanları kendi aralarında alışılmış komütasyon bağıntılarını sağlarlarken, "tek" elemanlar ise kendi aralarında antikomütasyon bağıntılarını, "çift" elemanlarla ise komütasyon bağıntılarını sağlarlar. Bu cebirsel yapılardan yararlanıldığında Coleman-Mandula teoreminin kısıtlamaları aşılabilir ve sonuçta Poincaré grubu süper-Poincaré grubuna (SP_4) genişletilir. Bu ifade ise Haag-Lopuszanski-Sohnius (1975) teoreminin içeriğini oluşturur.

Sonlu ve yarı basit Lie cebirlerinin Cartan tarafından verilen sınıflandırılışına benzer olarak Kac (1977), sonlu boyutlu basit derecelenmiş Lie cebirlerini sınıflandırmıştır. Kac notasyonuna göre süper-Poincaré cebiri orthosimplektik derecelenmiş Lie cebiri osp (4/1)'in bir Wigner-İnönü kontraksiyonuna karşı gelir. Böylece Poincaré cebirinin en basit süpersimetrik genişletilmesi $N=1$ süpersimetri cebiridir: bu ise, P_μ ve $M_{\mu\nu}$ (çift elemanlar) jeneratörlerinin yanısıra tek elemanlar olarak Q_A ve $\bar{Q}_{\dot{A}}$ gibi spinörel yükleri de içerir. (4.2) bağıntılarına ek olarak aşağıdakileri yazabiliriz.

$$[P_\mu, Q_A] = [P_\mu, \bar{Q}_{\dot{A}}] = 0$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_A] = \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu})_A{}^B Q_B$$

$$[M_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{A}}] = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} \bar{Q}_{\dot{B}}$$

$$\{Q_A, Q_B\} = 0$$

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = -2i\sigma^\mu_{A\dot{B}} P_\mu$$

N-genişletilmiş süpersimetri, farklı N adet spinörel yükü, Q_A^i $(i=1,\ldots,N)$, içerir ve (4.4) cebirinin son bağıntısına δ_{ij} katmak suretiyle bu genişletilmeyi elde etmemiz mümkündür. Ayrıca

$$\{Q_A^i, Q_B^j\} = \epsilon_{AB}\, Z^{ij} \qquad (4.5)$$

bağıntısı ile Z^{ij} merkezi yükleri cebire eklenebilir. Bununla birlikte biz, merkezi yüklerin bulunmadığı süper-cebirleri gözönüne alacağız.

Global süpersimetride Q_A süperyükleri ayar simetrileriyle daima yer değiştirir; bunun bir sonucu olarak süpermültipletin bütün üyeleri aynı iç kuantum sayılarına sahiptir. Dolayısıyla yalnızca $N=1$ (global) SUSY teorileri fenomenolojik anlam ifade eder (Nanopoulos 1985). Bu nedenle $N \geqslant 2$ global SUSY teorileri çoğunlukla fazla önem taşımaz.

4.3. Süperuzay Formalizmi ve İvaryant Lagranjiyenlerin Kurulması

Süpersimetrik modelleri inşa edebilmek için, gösterimlerin kolayca toplanıp çarpıldığı ve hesapların her basamağında süpersimetrinin açıkça görüldüğü bir formalizme gereksinim duyulur. Böyle bir formalizm mevcuttur: Salam ve Strathdee (1875) tarafından geliştirilen süperalan formalizmi.

Süperuzay 8-boyutlu bir manifolddur ve $x^{\mu}, \theta_A, \bar{\theta}_{\dot{A}}$ parametreleri aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$[x^{\mu}, x^{\nu}] = [x^{\mu}, \theta^{A}] = [x^{\mu}, \bar{\theta}^{\dot{A}}] = 0$$
$$\{\theta_A, \theta_B\} = \{\theta_{\dot{A}}, \theta_{\dot{B}}\} = \{\theta_A, \theta_{\dot{B}}\} = 0 \qquad (4.6)$$

Burada $A = 1,2$, $\dot{A} = \dot{1},\dot{2}$, $\mu = 0,1,2,3$ dür ve antikomütatif θ_A ve $\bar{\theta}_{\dot{A}}$ parametreleri Grassmann cebirinin elemanlarıdır. x^{μ}'ler ise alışılmış uzay zaman koordinatlarıdır.

Sonlu bir süpersimetri dönüşümü, böylece, x_{μ}, θ ve $\bar{\theta}$ parametrelerine bağlı olarak şu şekilde tanımlanır:

$$G(x,\theta,\theta) = \exp i\ (\theta Q + \bar{Q}\ \bar{\theta} - x_{\mu} P^{\mu}) \qquad (4.7)$$

Şimdi, $\phi(x,\theta,\bar{\theta})$ süperalanını x_{μ} koordinatlarının yanısıra θ ve $\bar{\theta}$ parametrelerinin bir fonksiyonu olarak tanımlayalım öyle ki süpersimetri dönüşümleri altında aşağıdaki gibi dönüşsün:

$$G(y,\xi,\bar{\xi})[\phi(x,\theta,\bar{\theta})] = \phi(x+y - i\xi\sigma_{\mu}\bar{\theta} + i\theta\sigma_{\mu}\bar{\xi}, \theta+\xi + \bar{\theta} + \bar{\xi}) \qquad (4.8)$$

Süperyüklerin bir gösterimini bulmak için ϕ süperalanı üzerindeki sonsuz küçük dönüşümeleri gözönüne almak yeterlidir:

$$\delta\phi = \phi(x_\mu + i\theta\sigma_\mu\bar{\xi} - i\xi\sigma_\mu\bar{\theta} + a_\mu \;,\; \theta + \xi \;,\; \bar{\theta} + \bar{\xi}) - \phi(x_\mu, \theta, \bar{\theta}) \tag{4.9a}$$

$$= [\xi \frac{\partial}{\partial\theta} + \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\,(\xi\sigma_\mu\bar{\theta} = \theta\sigma_\mu\bar{\xi} - a_\mu)\partial^\mu]\,\phi \tag{4.9b}$$

Öte yandan şu tanımı yapacak olursak

$$\delta\phi = [\, i\xi Q + i\bar{\xi}\,\bar{Q} + iaP \,,\, \phi] \tag{4.9c}$$

buradan kolayca

$$P_\mu = i\partial_\mu$$

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial\theta^A} - i\sigma^\mu_{A\dot{B}}\;\bar{\theta}^{\dot{B}}\,\partial_\mu \tag{4.10}$$

$$\bar{Q}_{\dot{A}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{A}}} + i\theta^B\,\sigma_{B\dot{A}}\,\partial_\mu$$

diferansiyel işlemcileri ile süpercebirin bir gösterimini elde edebiliriz. Varyasyon ile antikomütatif olan kovaryant türevler de tanımlanabilir ($\{D_A, Q_B\} = 0$) :

$$D_A\,(\delta\phi) = -\,\delta(D_A\phi) \tag{4.11}$$

Buradan

$$D_A = \partial_A + i\sigma^\mu{}_{A\dot{B}}\,\bar{\theta}^{\dot{B}}\,\partial_\mu$$

$$\bar{D}_{\dot{A}} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} - i\,\theta^B\sigma^\mu{}_{B\dot{A}}\,\partial_\mu \tag{4.12}$$

bulunur. Yukarıda $\frac{\partial}{\partial\theta^A}$ ve $\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{A}}}$ sırasıyla ∂_A ve $\partial_{\dot{A}}$ biçiminde kısaltılmıştır.

Şimdi özel süperalan örneklerini tartışabiliriz. $\dot{\bar{D}}\phi = 0$ ve $D\phi = 0$ koşullarını sağlayan süperalanlar sırasıyla sol ve sağ elli chiral (skaler) süperalanlar olarak adlandırılırlar ve θ'ya göre aşağıdaki seri açılımlarını yazabiliriz:

$$\phi(x,\theta) = A(x) + \sqrt{2}\,\theta\Psi(x) + \theta\theta\,F(x)$$

$$\phi^{+}(x,\theta) = A^{*}(x) + \sqrt{2}\,\bar{\theta}\,\bar{\Psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\,F^{*}(x) \qquad (4.13)$$

Bu ifadeler süper cebirin sırasıyla sol ve sağ gösterimlernde verilmiştir.

θ parametresi antikomütatif olduğundan ve yalnızca bağımsız iki değişkenin ($\theta^{A}, A = 1,2$) bulunması nedeniyle seri açılım üçüncü terimde son bulur.

Yukarıdaki ifadede A ve F kompleks skaler alanlardır ve Ψ ise sol elli bir Weyl spinörüdür.

Süpersimetri dönüşümünün bu "bileşen" alanlar üzerine etkisi (4.9) bağıntılarını kullanarak hesaplanabilir;

$$\delta\phi(x,\theta) = \delta A + \theta\delta\Psi + \theta\theta\delta F \qquad (4.14)$$

Buradan da aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz:

$$\delta A = \sqrt{2}\,\xi\Psi$$

$$\delta\Psi = \sqrt{2}\,\xi\,F + i\sqrt{2}\sigma_{\mu}\bar{\xi}\,\partial^{\mu}A \qquad (4.15)$$

$$\delta F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\,\bar{\sigma}^{\mu}\,\partial_{\mu}\,\Psi$$

Yukarıdaki ifadelerden sonuncusu incelenirse süperalanın en yüksek bileşeni F'in süpersimetri varyasyonunun bir toplam türev olduğu görülür. İleride Lagranjiyenler inşa edilirken bu önemli saptama sık olarak kullanılacaktır.

Ayrıca kolaylıkla gösterilebilir ki $D^3 = \bar{D}^3 = 0$ dır.

Skaler bir süperalan spin 0 bozonları ve spin 1/2 fermiyonları içerir. Spin-1 bozonları kapsayan süperalanları da tanımlamak ve teoriye katmamız gerekir. Böylece $V = V^{+}$ gerçellik koşulunu sağlayan $V(x,\theta,\bar{\theta})$ vektör süperalanı için aşağıdaki açılımı yazabiliriz:

$$V(x,\theta,\bar{\theta}) = C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x)]$$

$$- \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x) - iN(x)] - \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}V_{\mu}(x)$$

$$+ i\theta\theta\bar{\theta}[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi(x)]$$

$$-i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}(x)]$$

$$+ \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)] \qquad (4.16)$$

Burada $\Box = \partial_{\mu}\partial^{\mu}$ dır. C,M,N,D gerçel spin-0 alanlardır, χ,λ Weyl spinörleridir ve V_{μ} ise bir spin-1 alanıdır. Yine

$$\delta V = [\xi\partial_{\theta} + \bar{\xi}\partial_{\bar{\theta}} - i(\xi\sigma_{\mu}\bar{\theta} - \theta\sigma_{\mu}\bar{\xi})\partial^{\mu}]V \qquad (4.17)$$

bağıntısını kullanarak aşağıdaki dönüşümleri elde edebiliriz:

$$\delta C = i\xi\chi - i\bar{\xi}\bar{\chi}, \quad \delta\chi = \xi(M + iN) + \sigma^{\mu}\bar{\xi}(\partial_{\mu}C + iV_{\mu})$$

$$\delta\bar{\chi} = \bar{\xi}(M - iN) + \xi\sigma^{\mu}(\partial_{\mu}C - iV_{\mu}),$$

$$\delta N = \xi(i\lambda - \sigma_{\mu}\partial^{\mu}\bar{\chi}) + \bar{\xi}(-i\bar{\lambda} + \bar{\sigma}_{\mu}\partial^{\mu}\chi)$$

$$\delta M = \xi(\lambda + i\sigma_{\mu}\partial^{\mu}\bar{\chi}) + \bar{\xi}(\bar{\lambda} + i\bar{\sigma}_{\mu}\partial^{\mu}\chi)$$

$$\delta V_{\mu} = \xi\partial_{\mu}\chi + \bar{\xi}\partial_{\mu}\bar{\chi} + i\xi\sigma_{\mu}\bar{\lambda} + i\bar{\xi}\bar{\sigma}_{\mu}\lambda,$$

$$\delta\lambda = \xi\sigma^{\mu\nu}V_{\mu\nu} + \xi D, \quad \delta\bar{\lambda} = \bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}V_{\mu\nu} + \bar{\xi}D, \quad \delta D = \xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda}\ \bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda$$

Burada $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ kullandık. Yukarıdaki ifadelerden görüleceği gibi vektör süperalanın en yüksek bileşeni olan D, bir toplam türeve dönüşür. Ayrıca Denk.4.16'da verilen genel vektör süperalanını indirgeyebiliriz; özel bir süper simetrik ayar dönüşümüyle C,χ,M bileşenleri yok edilebilir. Bu Wess-Zumino ayarında vektör süperalanı şu biçimi alır:

$$V = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\, V_\mu + \theta\theta\bar{\theta}\,\bar{\lambda} + \bar{\theta}\,\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\,\theta\theta\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\, D$$

$$V^2 = -\frac{1}{2}\,\theta\theta\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\, V^\mu V_\mu \tag{4.19}$$

$$V^3 = 0$$

Bunun bir sonucu olarak

$$e^V = 1 + V + \frac{1}{2} V^2 \tag{4.20}$$

yazabiliriz, ki SUSY ayar teorilerinde bunu kullanacağız.

Süpersimetri dönüşümleri altında invaryant kalan Lagranjiyenlerin inşasının tartışılmasına geçmeden önce süperuzayda Berezin integrasyonuna (Berezin 1966) ait kuralları vermeliyiz. Grassmann koordinatı θ için bu integral aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\int d\theta = 0 \quad , \quad \int d\theta\, \theta = 1 \tag{4.21}$$

Öte yandan tek bir antikomütatif θ parametresinin her fonksiyonu daima şu biçimde yazılabilir :

$$f(\theta) = C_o + \theta C_1 \tag{4.22}$$

Yukarıdaki ifadeler genel bir integrali hesaplamaya yeterlidir;

$$\int d\theta\, f(\theta + \eta) \quad \int d\theta\, (C_o + \theta C_1 + \eta C_1) = C_1 = \int d\theta\, f(\theta)$$

Bu ise bize Berezin integralinin ötelemeler altındaki invrayansını söyler. İntegrasyon ile türevinin birbirine özdeş olduğunu görmekteyiz ;

$$\int d\theta\, f(\theta) = C_1 = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) \qquad (4.24)$$

Aşağıdaki tanımları yapalım:

$$\int d^2\theta = \frac{1}{2}\int d\theta^1\, d\theta^2 \quad , \int d^2\,\bar{\theta} = \frac{1}{2}\int d\bar{\theta}^1\, d\bar{\theta}^{\dot{2}} \qquad (4.25)$$

Böylece,

$$\int d^2\theta\ \theta^2 = \int d^2\bar{\theta}\ \bar{\theta}^2 = 1 \qquad (4.26)$$

olur. x-uyayındakine benzer olarak θ-uzayında Dirac δ-fonksiyonunu

$$\int d\,\theta\, f(\theta)\ \delta(\theta-\theta') = f(\theta') \qquad (4.27)$$

bağıntısından yararlanarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\delta(\theta-\theta') = \theta-\theta' \quad \text{ve} \quad \delta^2(\theta-\theta') = (\theta-\theta')^2$$

Skaler ve vektör süperalanlarının en yüksek bileşenlerinin (yani sırasıyla F ve D terimlerinin) süpersimetri dönüşümleri altında toplam türevlere dönüştüklerini daha önce (4.15) ve (4.18) denklemlerinde belirtmiştik. Dolayısıyla bu niceliklerin $\int d^4x$ uzay-zaman integrali SUSY dönüşümleri altında invaryant kalır. Böylece Lagrange yoğunluğunu şu şekilde yazabiliriz:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F = \mathcal{L}_D \qquad (4.29)$$

Yukarıda $\mathcal{L}_F$ ve $\mathcal{L}_D$ sırasıyla skaler ve vektör süperalanların birer toplamıdır. İnvaryant lagranjiyen ise θ ve $\bar{\theta}$ üzerinden integrasyon ile elde edilir ;

$$L = \int d^4x\, [\int d^2\theta\ d^2\bar{\theta}\mathcal{L}_D + \int d^2\theta\ \mathcal{L}_F + h.e. \qquad (4.30)$$

Sol ve sağ elli süperalanların çarpımlarından elde edilen D-terimi, kompleks skaler bir A alanı ile Ψ Weyl spinörüne ait kinetik terimlerin tasviririne elverişlidir. Öte yandan kütle terimleri ve etkileşmeler ise aynı elli skaler alanların çarpımından bulunan F-terimleri (süperpotansiyel) aracılığıyla teoriye eklenebilir. Şimdi etkileşen Wess-Zumino (WZ) modelinin "chiral" süperalanlarla yazılan süpersimetrik eylemini verelim :

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta \, d^2\bar{\theta} \, \phi_i \phi_i^{+} + \int d^2\theta \left(\frac{1}{2} m_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k\right) + \text{h.e.} \tag{4.31}$$

Yukarıda ϕ_i ve ϕ_i^{+} süperalanlarının her ikisinin de süpercebirin aynı gösteriminde ifade edilmesi gerekir. (4.8)'deki tanımı ve (4.12) gösterimini kullanarak "chiral" alanlar ($\bar{D}\phi = 0$) için aşağıdaki en genel ifadeyi bulabiliriz :

$$\phi = A(x) + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\,\Box A(x) + \sqrt{2}\theta\Psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_{\mu}\Psi(x)\sigma^{\mu}\bar{\theta} + \theta\theta F(x) \tag{4.32}$$

Böylece (4.31)'i bileşenler cinsinden açık olarak yazabiliriz;

$$\mathcal{L} = (\partial_{\mu}A_i)(\partial^{\mu}A_i^{\star}) + i\Psi_i\sigma_{\mu}\partial^{\mu}\bar{\Psi}_i + F_i F_i^{\star} \tag{4.33}$$

$$+ m_{ij}\left(A_i F_j - \frac{1}{2}\Psi_i\Psi_j + \text{h.e.}\right) - g_{ijk}\left(A_i A_j F_k - \Psi_i \Psi_j A_k + \text{h.e}\right)$$

Euler hareket denklemlerinden yararlanarak F_i alanlarını yok etmemiz mümkündür :

$$\frac{\partial L}{\partial F_k^{\star}} = F_k + m_{ik}^{\star}A_i^{\star} + g_{ijk}A_i^{\star}A_j^{\star} = 0 \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_k} = F_k^{\star} + m_{ik}A_i + g_{ijk}A_iA_j = 0$$

Yukarıdakileri (4.32)'e yerleştirirsek $\mathcal{L}$'nin yalnızca A_i ve Ψ_i dinamik alanları cinsinden ifadesini elde edebiliriz :

$$\mathcal{L} = i\partial_\mu \bar{\Psi}_i \bar{\sigma}^\mu \Psi_i + A_i \Box A_i - \frac{1}{2} m_{ik} \Psi_i \Psi_k - \frac{1}{2} m^\star_{ik} \Psi_i \Psi_K$$

$$-g_{ijk} \Psi_i \Psi_j A_k - g^\star_{ijk} \bar{\Psi}_i \bar{\Psi}_i A_k - V(A_i, A^\star_i) \qquad (4.35)$$

Yukarıda V $(A_i, A^\star_i)$ potansiyeli

$$V = F_K F^\star_K \qquad (4.36)$$

şeklindedir. Böylece (4.35) Lagranjiyeni, aynı kütleli ve karşılıklı etkileşen kompleks skaler bir alan ile Weyl spinörü tasvir eder. Modelde eşit sayıda bozonik ve fermiyonik serbestlik derecesinin bulunduğunu (yani iki) görmekteyiz.

Şimdiye kadar sadece spin-0 ve spin-1/2 parçacıkları tasvir eden Lagranjiyenleri ele aldık. Spin-1 parçacıkları vektör süperalanları aracılığıyla teoriye katabiliriz. Tüm spin-1 parçacıklar, abelyen ya da abelyen olmayan ayar teorilerinin "ayar parçacıkları" oldúğundan Kesim 4.5'de süpersimetrik (global) ayar teorilerini kısaca inceleyeceğiz. Fakat daha önce kendiliğinden süpersimetri kırılmasına değinmemiz gerekir.

4.4. Kendiliğinden Süpersimetri Kırılması

Süpersimetrik alan teorilerinin, yüksek enerji fiziğinde gerçeğe yakın bir uygulama alanı bulabilmesi için süpersimetrinin kendiliğinden kırılması gerekir, zira doğada farklı spinli parçacıklar arasında dejenerelik gözlenmemektedir. Normal ayar teorilerinde kendiliğinden simetri kırılması iyi anlaşılmış olmasına karşın süpersimetri bazı ek koşulları zorunlu kılar; dolayısıyla bunların tartışılması gerekir.

(4.4)'de verilen süpersimetri cebirinin derhal yolaçtığı bir sonuç vardır; $H = P_o$ Hamiltonyeni

$$H = \frac{1}{4}(\bar{Q}_1 Q_1 + Q_1\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 Q_2 + Q_2\bar{Q}_2) \qquad (4.37)$$

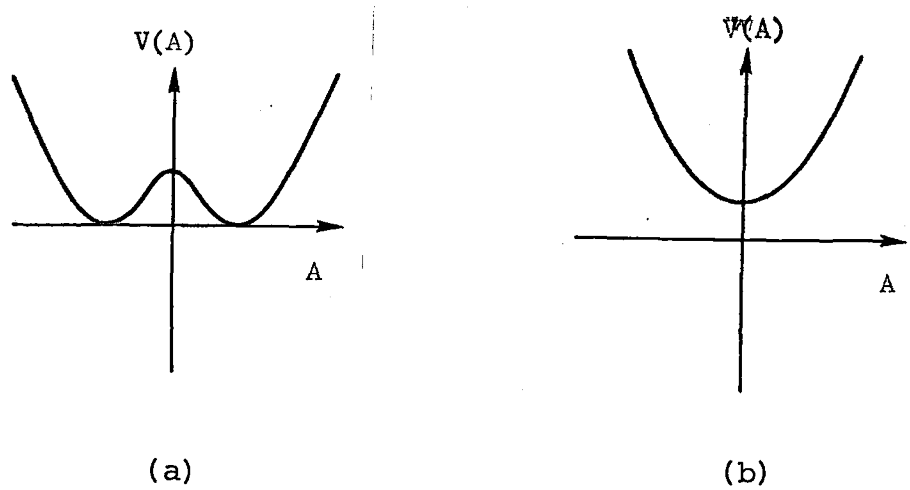
şeklinde yazılabildiğinden H'nin spektrumu mutlaka yarı pozitiftir; yani her $|\Psi\rangle$ durumu için $\langle\Psi|H|\Psi\rangle \geqslant 0$ dır. Bu ise çok kuvvetli bir sonuçtur. Sıfır enerjili durumların, teorideki süpersimetrik taban durumları olduğunu ima eder, çünkü herşeyden önce H hiç bir zaman negatif olamaz ve $\langle 0|H|0\rangle = 0$ eşitliği $Q|0\rangle = \bar{Q}|0\rangle = 0$ olmasını gerektirir. Diğer bir deyişle süperyükler $|0\rangle$ boşluk durumunu yokederler. Böylece süpersimetrik bir teoride (yani eğer Q ve $\bar{Q}$ jeneratörleri boşluğu yokediyorlarsa) boşluk enerjisi yalnız berirlenmekle kalmaz aynı zamanda bu enerjinin sıfır olması gerekir ; dolayısıyla bu durumda SUSY kendiliğinden kırılmamıştır deriz. Tersine olarak eğer $Q|\ \rangle \neq 0$ ise süpersimetri kendiliğinden kırılır, o zaman,

$$\langle 0|H|\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{2} \{|Q_\alpha|0\rangle|^2 + |\bar{Q}_{\dot\alpha}|0\rangle|^2\} \qquad (4.38)$$

dır; yani boşluk enerjisi pozitiftir. Sonuç olarak SUSY'nin kendiliğinden kırılması için gerek ve yeter koşul

$$\langle 0|H|0\rangle > 0 \qquad (4.39)$$

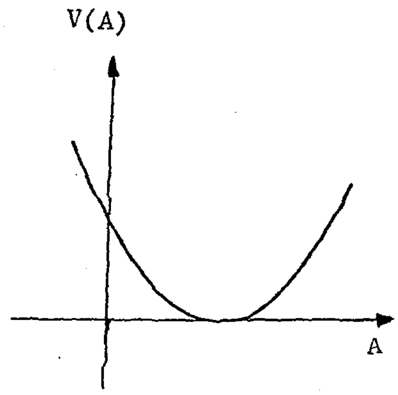
olmasıdır. Bu durum Şekil 4.1'de görülmektedir.



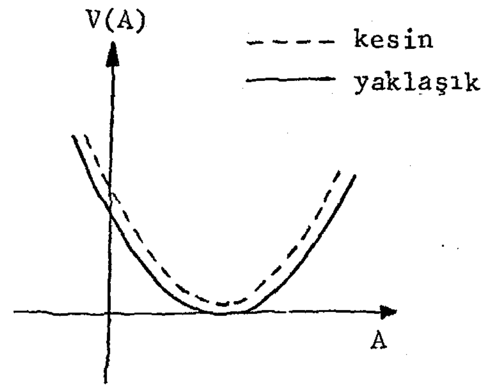
ŞEKİL 4.1. a) Bu potansiyele ait taban durumu, süpersimetriyi korur zira $V(A_o)=0$ dır. Fakat $\langle A\rangle \neq 0$ olduğundan $A\leftrightarrow -A$ simetrisi kendiliğinden kırılır.

b) Bu kez $V(A=0)>0$ olduğundan taban durumu SUSY'yi kendiliğinden kırar, fakat $A\leftrightarrow -A$ simetrisi kırılmaz zira $\langle A\rangle = 0$ dır.

Şimdi belli bir yaklaşık hesaba göre etkin potansiyelin Şekil 4.2'deki gibi olduğunu varsayalım. Bu yaklaşıklık sınırları içerisinde süpersimetri kırılmamıştır, fakat çiftlenim sabiti ne kadar zayıf olursa olsun hesaplarda yapılabilecek yanılgılar potansiyeli $V=0$ konumundan uzaklaştırabilir ; Şekil 4.3'de bu durum gösterilmiştir. Dolayısıyla süpersimetrinin kendilğinden kırılıp kırılmadığından gerçekten emin olamayız (Witten 1981a). Bununla birlikte şunu söyleyebiliriz: eğer yaklaşık bir hesap SUSY'nin kendiliğinden kırıldığını gösteriyorsa, bulunan E boşluk enerjisi hesaplamadaki ΔE kesinsizliğinden çok daha büyük ise bu sonuca güven duyabiliriz ancak.



ŞEKİL 4.2. Kırılmamış SUSY



ŞEKİL 4.3. Kendiliğinden kırılmış SUSY

Herhangi bir modelde SUSY'nin kendiliğinden kırılıp kırılmadığına karar verebilmek için Witten bir index teoremi ortaya attı (1981b). Daha sonraları, SUSY kırılmasının ardında yatan mekanizmaları araştırma isteği 0 +1 boyutlu alan teorilerine, yani süpersimetrik kuantum mekaniğine büyük bir ilginin doğmasına neden oldu. Bu konu 5. Bölümde ele alınacaktır.

Şimdi sadece skaler süperalanlardan inşa edilen Wess-Zumino modelinde kendiliğniden SUSY kırılmasını inceleyelim. Denk. (4.35)'den biliyoruz ki bu modelde potansiyel enerji $V = F_K^* F_K$ biçimindedir. Burada F yardımcı alanı aşağıdaki gibi verilir:

$$F_K = -m_i^* A_i^* - g_{ijK}^* A_i^* A_j^*$$

Dolayısıyla F_k yardımcı alanı için sıfırdan farklı bir boşluk beklenti değeri, $E_{boşluk} \neq 0$, doğurur. Sadece skaler alanlar dikkate alındığından vektör süperalanın yardımcı alanı süperpotansiyelde gözükmez. Bununla birlikte ileride göreceğimiz gibi, ayar teorilerinde potansiyel

$$V = FF^{\star} + \frac{1}{2} D^2 \tag{4.40}$$

biçimindedir. Böylece süpersimetri, ancak ve ancak yardımcı alanlar sıfırdan farklı boşluk beklenti değerlerine sahip olduklarında kendiliğinden kırılır sonucuna ulaşırız (bu ise F- ve D- kırılması olarak adlandırılır)

Süpersimetrinin kendiliğinden kırılmasına ilk örnek O'Raifeartaigh (1975) tarafından verilmiştir. "Chiral" süpermültipletlerdeki yardımcı alanların sıfırdan farklı "VEV" kazandıkları bu modelde,onun varmış olduğu sonuca göre süpersimetriyi kırmak için en az üç skaler süperalana gerek vardır (Nilles 1984). Simetri kırılmasına ilişkin diğer mekanizmaları, ayar teorileri ile standart modelin süpersimetrik genişletilmesini incelerken tekrar ele alacağız.

4.5. N = 1 Süpersimetrik Ayar Teorileri

Bu kesimde skaler ve vektör süpermültipletlerin ayar invaryant etkileşmelerini kısaca inceleyeceğiz. Konuyu tüm ayrıntılarıyla ele almayacağız fakat süpersimetrik elektrodinamiğin ve Yang-Mills teorilerinin inşası için gerekli adımları vereceğiz. Daha ayrıntılı bir inceleme için mevcut derleme makalelere bakılabilir (Fayet ve Ferrara 1977, Wess ve Bagger 1983, Stelle 1984).

Önce U(1) hali ile başlayalım ve sonuçları daha sonra abelyen olmayan ayar gruplarına genelleştirelim. Normal bir abelyen ayar teorisinde (örneğin QED) A_μ ayar alanı (foton) ayar dönüşümleri altında şu şekilde dönüşür :

$$A_\mu{}' = A_\mu + \partial_\mu \varphi \qquad (4.41)$$

Burada φ gerçel bir skaler alandır.

V_μ spin-1 alanı $V(x,\theta,\bar{\theta})$ süpermültipletinin bir üyesidir ve (4.41) ayar dönüşümü, süpersimetri ile tutarlı olacak bir şekilde genişletilmelidir. Bu herşeyden önce φ'nin bir süpermültiplete genişletilmesini gerektirir. Wess ve Zumino'ya göre (1974) vektör süperalanın aşağıdaki dönüşümü

$$V' = V + i(\Lambda-\Lambda^+) \qquad (4.42)$$

doğru bir genelleştirmedir. Burada Λ bir "chiral" süperalandır $(\bar{D}\Lambda = 0)$.

Elektromanyetik alan şiddetinin süpersimetrik genişletilmesini elde edebilmek için bir W_α spinör "chiral" alanı tanımlıyoruz :

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\,\bar{D}\,D_\alpha V \qquad (4.43)$$

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}D\,D\,\bar{D}_{\dot{\alpha}} V$$

Yukarıda D_α ve $\bar{D}_{\dot\alpha}$, (4.12)'deki kovaryant türevlerdir ($\bar{D}^3 = D^3 = 0$ olduğundan "chiralite" hemen gözükür). Bileşenler cinsinden W_α şu şekilde ifade edilebilir.

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha + \theta_\alpha D - \frac{i}{2}\,(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_\alpha^{\ \beta}\ \theta_\beta\ (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)$$

$$+\ \theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\ \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot\alpha} \qquad (4.44)$$

$W^\alpha W_\alpha$ "chiral" süperalanın F-bileşeni , süpersimetri ve ayar dönüşümleri altında invaryant kaldığından saf süpersimetrik Abelyen ayar teorisinin Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = \frac{1}{4}\int d^2\theta\ W^\alpha W_\alpha + \text{h.e.}$$

$$= \frac{1}{2}\,D^2 - \frac{1}{4}\,V^{\mu\nu}\ V_{\mu\nu}\ -i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\ \ \text{h.e} \qquad (4.45)$$

şeklinde yazılabilir. D alanı yardımcı alandır ve hareket denklemlerinden yararlanarak yok edilebilir. Bilindiği gibi süpersimetri, V_μ ayar bozonuna "gavgino" adı verilen fermiyonik bir eş öngörür. Yükü g olan madde alanlarının, süpersimetrik saf ayar sektörüne minimal çiftlenimini elde etmek için Φ "chiral" süperalanının $(\Phi^+\Phi)_D$ biçimindeki alışılmış kütle terimi yerine

$$\mathcal{L}_{Madde} = \int d^4\theta\ \Phi^+\ e^{gV}\Phi \qquad (4.46)$$

alınır. Toplam Lagranjiyen iki terimin toplamından ibarettir :

$$\mathcal{L}_{Toplam} = \mathcal{L}_{Madde} + \mathcal{L}_{Maxwell} \qquad (4.47)$$

Bu ise aşağıdaki yerel U(1) ayar dönüşümleri altında invaryanttır;

$$\Phi' = e^{-ig\ \Lambda(x,\theta,\bar\theta)}\,\Phi \qquad (4.48)$$

Şimdi özel bir hal alarak kuantum elektrodinamiğinin süpersimetrik genişletilmesine ilişkin Lagranjiyeni kuralım. Teorideki

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

Dirac spinörünü üretebilmek için Ψ_+ ve Ψ_- gibi zıt yüklü iki Weyl spinörüne gerek vardır. O zaman Lagranjiyen aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathcal{L}_{SQED} = \frac{1}{4}\int d^2\theta\, W^A W_A + \frac{1}{4}\int d^2\bar{\theta}\, W^{\dot{A}} W_{\dot{A}}$$

$$+ d^4\theta\,(\Phi_+^+ e^{eV}\Phi_+ + \Phi_-^+ e^{-eV}\Phi_-)$$

$$+ m(\int d^2\theta\, \Phi + \phi + \int d^2\bar{\theta}\, \Phi_+^+ \Phi^+)$$

Burada Φ_+ ve Φ_- iki farklı skaler süperalandır. Bileşenler cinsinden açık olarak şu biçimi alır :

$$\mathcal{L}_{SQED} = \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu\sigma_\mu\bar{\lambda}$$

$$+ F_+F_+^* + F_-F_-^* + A_+^*\Box A_+ + A_-^*\Box A_-$$

$$+ i(\partial_\mu\bar{\Psi}_+\bar{\sigma}^\mu\Psi_+ + \partial_\mu\bar{\Psi}\,\bar{\sigma}^\mu\Psi_-)$$

$$+ eV_\mu\Big[\frac{1}{2}\Psi_+\bar{\sigma}^\mu\Psi_+ - \frac{1}{2}\bar{\Psi}_-\bar{\sigma}^\mu\Psi_- + \frac{i}{2}A_+^*\partial^\mu A_+$$

$$- \frac{i}{2}\partial^\mu A_+^* A_+ - \frac{i}{2}A_-^*\partial^\mu A_- + \frac{i}{2}\partial^\mu A_-^* A_-\Big]$$

$$- \frac{ie}{\sqrt{2}}(A_+\bar{\Psi}_+\bar{\lambda} - A_+^*\Psi_+\lambda - A_-\bar{\Psi}_-\bar{\lambda} + A_-^*\Psi_-\lambda)$$

$$+ \frac{e}{2}D(A_+^*A_+ - A_-^*A_-) - \frac{1}{4}e^2V_\mu V^\mu(A_+^*A_+ \quad A_-^*A_-)$$

$$+ m(A_+F_- + A_-F_+ - \Psi_+\Psi_- - \bar{\Psi}_+\bar{\Psi}_- + A_+^*F_-^* + A_-^*F_+^*)$$

(4.51)

Yukarıdaki ifadeden görüleceği gibi iki tane Weyl spinörü Ψ_+ve Ψ_-,kütleli bir Dirac spinörünü oluşturur.

Abelyen-olmayan hallere genelleştirme ilk önce Ferrara ve Zumino (1977) ve Salam ve Strathdee (1974) tarafından verilmiştir. İlgili ayar grubunun jeneratörleri T^α olsun, o zaman vektör süperalanını (Wess-Zumino ayarında) aşağıdaki gibi yazabiliriz :

$$V = (\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}V^{\alpha}_{\mu} \; + \; \theta\theta\bar{\theta}\;\bar{\lambda}^{\alpha} + \bar{\theta}\;\bar{\theta}\;\lambda^{\alpha} + \frac{1}{2}\;\theta\theta\bar{\theta}\;\bar{\theta}D\;)\;T^{\alpha} \quad (4.52)$$

Burada V^α_μ ve λ^α sırasıyla ayar bozonları ile onların fermiyenik eşleri olan "gaugino"lardır. α indisi yerel ayar grubuna aittir; V^α_μ ve λ^α alanları grubun "adjoint" gösteriminde verilir. T^α matrisleri ise ayar grubunun "adjoint" gösterimidir ve madde alanları üzerine grubun etkisi (4.48)'de $\Lambda = \Lambda^\alpha\; T^\alpha$ yazılarak bulunur. O zaman süpersimetrik alan şiddetini Abelyen olmayan hal için aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz :

$$W_A = -\frac{1}{4}\,\bar{D}\;\bar{D}\;\bar{e}^{V}\;D_A\;e^{V} \qquad (4.53)$$

Daha önce SQED için kullanılan argümanları izleyerek süpersimetrik Yang-Mills teorisi için Lagrange yoğunluğunu

$$\mathcal{L}_{SYM} = \frac{1}{4}\,T_r\,[\int d^2\theta\;W^A W_A + \int d^2\,\bar{\theta}\;\bar{W}^{\dot{A}}\;\bar{W}_{\dot{A}}]$$

$$+\int d^4\theta\;Tr\;[\,\Phi^+\;e^{2gV}\;\Phi] \qquad (4.54)$$

şeklinde ifade etmemiz mümkündür. Bileşenler cinsinden

$$\mathcal{L}_{SYM} = -\frac{1}{4}\;G^a_{\mu\nu}\;G^a_{\mu\nu}\;-\;i\bar{\lambda}\;\;\bar{\sigma}^{\mu}\;D_\mu\;\lambda + \frac{1}{2}\;D^aD^a$$

$$-D_\mu\;A^+\;\;D^\mu\;A - i\;\bar{\Psi}\;\bar{\sigma}\;{}^{\mu}D_\mu\;\Psi\;+\;F^+F$$

$$+\;i\sqrt{2}g(A^+\;\;T^a\;\Psi\lambda^a - \bar{\lambda}^a\;T^aA\;\bar{\Psi})\;+\;gD^aA^+\;\;T^aA$$

$$(4.55)$$

Burada aşağıdaki kısaltmalar kullanılmıştır :

$$D_\mu A = \partial_\mu A + igV^a_\mu T^a A$$

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + igV^a_\mu T^a \Psi$$

$$D_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda^a + g t^{abc} V^b_\mu \lambda^c$$

$$G^u_{\mu\nu} = \partial_\mu V^a_\nu - \partial_\nu V^a_\mu + t^{abc} V^b_\mu V^c_\nu \qquad (4.56)$$

(4.55) ifadesinde "chiral" süpermültipletlerin bileşenleri arasındaki ayardışı etkileşmeler henüz belirlenmemiştir. Bu etkileşmelerin açık biçimi aşağıdaki süpersimetrik etkileşme teriminden elde edilir :

$$\mathcal{L}_{etk.} = \int d^2\theta \; P(\phi) + h.e. \qquad (4.57)$$

Burada P süperpotansiyeli, ϕ_i "chiral" süperalanlarının-hermitik eşleniklerinin değil-herhangi bir fonksiyonudur. Dört boyutta renormalize bir teori inşa edebilmek için $P(\phi)$, ϕ'ya göre en fazla kübik olabilir.

4.6. Standart Modelin Süpersimetrik Genişletilmesi

Elemanter parçacık fiziğindeki gerçekçi SUSY(N=1) teorilerini incelemek için şimdi artık tüm hazırlıklarımızı tamamlamış durumdayız. Önce süpersimetrik olmayan Glashow-Weinberg-Salam modelini kısaca gözden geçirelim.

Standart model, $SU(3)xSU(2)w \times U(1)_Y$ simetri grubu temelinde kuvvetli bir zayıf ayar etkileşmelerine dayanır. Oniki adet spin-1 ayar bozonunu içerir: SU(3)'ün sekiz gluonu, üç tane SU(2) zayıf ara bozonu ve $U(1)_Y$'nin hiperyük bozonu. İyi bilindiği gibi foton, SU(2) ayar bozonlarından birisi ile hiperyük bozonun özel bir karışımıdır. Teorideki fermiyonlar ise kuarkların ve leptonların üç kuşağıdır.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{I.} & U=\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, & \bar{u},\bar{d}, & L=\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, & \bar{e} & \\
\text{II.} & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, & \bar{c},\bar{s}, & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, & \bar{\mu} & (4.58) \\
\text{III.} & \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, & \bar{t},\bar{b} & \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}, & \bar{\tau} &
\end{array}
$$

Yukarıda, deneysel olarak henüz gözlenememiş olan "top" kuarkı da listeye dahil ettik. SU(3) x SU(2) x U(1) grubuna göre bunların dönüşüm özellikleri Tablo I'de verilmiştir. (4.58)'deki fermiyonlar sol-elli ve iki bileşenli Weyl spinörleridir. Sağ-elli parçacıklar ise "antiparçacıklar" biçiminde ele alınmaktadır (yani $e_R=\bar{e}_L$); bu tür bir formülasyon süpersimetri için daha uygundur. Ayar dönüşümleri kütle terimleri yasaklar. Ancak ayar simetrilerinden birisi kırıldığında parçacıklar kütle kazanabilir.

TABLO I. Standart modelde madde mültipletlerinin kuantum sayıları.

Parçacıklar	t	t_3	Y	Q	SU(3) boyut	SU(2)w boyut
Leptonlar						
L_α $\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L$	1/2	1/2	-1/2	0	1	2
	1/2	-1/2	-1/2	-1	1	2
R_α e_R , μ_R , τ_R	0	0	-1	-1	1	1
Kuarklar						
$Q_{L\alpha}$: $\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L \begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}_L \begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix}_L$	1/2	1/2	1/6	2/3	3	2
	1/2	-1/2	1/6	-1/3	3	2
$Q_{R\alpha}$: u_R c_R t_R	0	0	2/3	2/3	$\bar{3}$	1
$Q_{R\alpha}$: d_R s_R b_R	0	0	-1/3	-1/3	$\bar{3}$	1
Higgs $\begin{pmatrix}H_1^+\\ H_1^0\end{pmatrix}$	1/2	1/2	1/2	1	1	2
	1/2	-1/2	1/2	0	1	2
$\begin{pmatrix}H_2^0\\ H_2^-\end{pmatrix}$	1/2	1/2	-1/2	0	1	2
	1/2	-1/2	-1/2	-1	1	2

U(1) ve SU(2) gruplarının ayar alanları sırasıyla B_μ ve A_μ^a $(a=1,2,3)$ ve çiftlenim sabitleri de g_1 ve g_2 olsun. O zaman alan şiddetleri

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad , \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_z \, \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \qquad (4.59)$$

şeklindedir. Bu durumda, örneğin leptonların ayar etkileşmeleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathcal{L}_{lepton} = i\bar{e}^{+} \sigma^{\mu}(\partial_{\mu} - ig_1B_{\mu})\bar{e} + iL^{+}(\partial_{\mu} - \frac{1}{2} ig_1B_{\mu} - \frac{1}{2} ig_2\sigma^{a}A^{a}_{\mu})L \qquad (4.50)$$

$SU(3) \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ ayar simetrisinin kendiliğinden $SU(3) \times U(1)_{em.}$ 'e kırılabilmesi için skaler alanlar kaçınılmazdır. Bu ise teoriye Higgs sektörünün katılması ile gerçekleştirilir. Minimal seçim, hiperyükleri $Y = -\frac{1}{2}$ olan bir $H = \begin{pmatrix} H^{o} \\ H^{-} \end{pmatrix}$ SU(2) skaler ikilisidir (doublet); ve potansiyel

$$V = \mu^2 H^{+} H + \lambda(H^{+} H)^2 \qquad (4.51)$$

dir. Ayrıca skaler parçacıklarla fermiyonlar arasındaki etkileşme için Yukawa çiftlenimleri de modele katılır:

$$\mathcal{L}_Y = g_d U^{a} H^{b} \epsilon_{ab} \bar{d} + g_u U^{a} H^{*b} \delta_{ab} \bar{u} \qquad (4.52)$$

Şimdi μ^2'yi negatif alarak H'nin bileşenlerinden birisinin sıfırdan farklı bir boşluk beklenti değeri kazanması sağlayabiliriz:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = -(\mu^2/\lambda)^{1/2} \qquad (4.53)$$

Bu ise gerek $SU(2)_W$ ve gerekse $U(1)_Y$' yi kırar fakat $U(1)_{em}$ bozulmamış olarak kalır. Higgs mekanizması sayesinde $W^{\mp}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_{\mu} \mp A^2_{\mu})$ yüklü bozonları $\frac{1}{2} g_2 v$ kütlesi kazanır. Yüksüz ayar bozonlarından biri

$$Z^{o}_{\mu} = (-g_2A^3_{\mu} + g_1B_{\mu})/(g_1^2 + g_2^2)^{1/2} \qquad (4.54)$$

$\frac{1}{2}v(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}$ kütlesi elde ederken aşağıdaki orthogonal

karışım (foton)

$$A_\mu = (g_2 B_\mu + g_1 A_\mu^3)/(g_1^2 + g_2^2)^{1/2} \tag{4.54}$$

kütlesiz kalır. Teoride sadece bir tane $\sqrt{-2\mu^2}$ kütleli gerçel skaler alan, yani Higgs parçacığı mevcuttur.

$SU(2)_W \times U(1)_Y$ grubunun $U(1)_{em}$'e kırılmasından sonra $SU(3) \times U(1)_{em}$ simetrisi kuark ve leptonlara kütle terimi yazılmasını artık engellemez. Örneğin "down" kuarkın kütlesi $g_d v/\sqrt{2}$ dir.

Şimdi yukarıda kısaca tartıştığımız minimal standart model in $N=1$ süpersimetrik genişletilmesini inceleyelim.

Her şeyden önce süpersimetrik bir modelde, daha önce vurguladığımız gibi eşit sayıda bozonik ve fermiyonik serbestlik derecesi bulunmalıdır. Üç aileli standart modelde 28 bozonik serbestlik derecesi (12 tane kütlesiz ayar bozonu ile 2 kompleks skaler) ve 90 fermiyonik serbestlik derecesi (bütün kuarklar ve leptonlar için 45 Weyl fermiyonu) mevcuttur. Dolayısıyla modeli süpersimetrik hale getirmek için yeni serbestlik derecelerini eklememiz gerekir. Standart modeldeki hiçbir parçacık ne yazık ki bir diğerinin süpersimetrik eşi olamamaktadır. $N=1$(global) SUSY teorilerinde tüm parçacıklar ve onların süpereşleri aynı $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y \times$ global baryon ve lepton kuantum sayılarına sahiptir. Bilinen parçacıklardan hiçbirisi uygun ikililer oluşturmamaktadır. Örnek olarak spin-1 bozonları ele alalım. Bunların, aynı kuantum sayılarına sahip fermiyonik eşlerinin (gaugino) bulunması gerekir: bir $SU(3)$ sekizlisi, bir $SU(2)$ tripleti ile $Y=0$ singleti. Standart modeldeki fermiyonların hiçbirisinin kuantum sayıları bunları tutmamaktadır; dolayısıyla "gaugino"lar yeni alanlar olarak teoriye katılmalıdır. Böylece standart modeldeki 12 ayar bozonunun yerine şimdi 12 kütlesiz vektör süperalanımız vardır. Benzer argümanlar sonucunda standart modelin parçacık spektrumunu ikiye katlamak zorunda olduğumuz anlaşılır. Böylece leptonlar, kuarklar ve bunların süper eşleri için "chiral" süperalanlar teoriye dahil edilir. Nihayet, SU(2) x U(1) simetrisinin kırılması yoluyla bütün yüklü fermiyonlara kütle kazandırmak için yazılan Yukawa çiftlenim terimlerinde kullanılmak üzere iki adet $Y = \mp \frac{1}{2}$ Higgs chiral süpermültipletine daha gereksinim duyulur. İki tane farklı Higgs "doubletinin" kullanılmasındaki neden şudur: "up" kuarklara kütle vermek için süperpotansiyelde, H_1'in kompleks eşleniği $H_1^{\star}$ 'ın bulunmasını sümersimetri yasaklar. Oysa normal ayar teorilerinde izlenen yol bilindiği gibi bu idi.

Böylece standart modelin süpersimetrik genişletilmesi şu süperalanları içerir:

1. SU(3) x SU(2) x U(1) ayar simetrisine karşı gelen vektör süperalanlar.

$$V_G = (-\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}G_{\mu}^{\alpha} + i\theta\theta\bar{\theta}\,\tilde{\bar{\lambda}}_W^{\alpha} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\,\tilde{\lambda}_W^{\alpha} + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\,\tilde{D}_G^{\alpha})\,F^{\alpha}$$

$$V_W = (-\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}W^{a} + i\theta\theta\bar{\theta}\,\tilde{\bar{\lambda}}_W^{a} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\,\tilde{\lambda}_W^{a} + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\,\tilde{D}_W^{a})\,T^{a} \qquad (4.45)$$

$$V_B = (-\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}B_{\mu} + i\theta\theta\bar{\theta}\,\tilde{\bar{\lambda}}_B - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\,\tilde{\lambda}_B + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\,\tilde{D}_B)$$

Burada $\alpha = 1,\ldots,8$, $a = 1,2,3$ dür ve $T^{a} = \frac{1}{2}\tau^{a}$ ve F^{α} sırasıyla SU(2) ve SU(3) matrisleridir.

2. "Chiral" süperalanlar

$$Q_i = \begin{pmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{d}\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}U\\ d\end{pmatrix}\theta + \begin{pmatrix}\tilde{F}_u\\ \tilde{F}_d\end{pmatrix}\theta\theta + i\theta\sigma^{\mu}\theta\partial_{\mu}\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{d}\end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\begin{pmatrix}U\\ d\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{d}\end{pmatrix}$$

$$U^C = \tilde{U}^C + \sqrt{2}\,U^C\theta + \tilde{F}_{U^C}\theta\theta + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\tilde{U}^C + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}U^C + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\tilde{U}^C$$

$$D^C = \tilde{d}^C + \sqrt{2}\,d^C\theta + \tilde{F}_{d^C}\theta\theta + i\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,\partial_{\mu}\tilde{U}^C + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}d^C + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\,\Box\,\tilde{d}^C$$

$$L_i = \begin{pmatrix}\tilde{\nu}_{\ell}\\ \tilde{\ell}\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}\nu_{\ell}\\ \ell\end{pmatrix}\theta + \begin{pmatrix}F_{\nu_{\ell}}\\ F_{\ell}\end{pmatrix}\theta\theta + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\begin{pmatrix}\tilde{\nu}_{\ell}\\ \tilde{\ell}\end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\begin{pmatrix}\tilde{\nu}_{\ell}\\ \tilde{\ell}\end{pmatrix}\ \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\begin{pmatrix}\nu_{\ell}\\ \ell\end{pmatrix}$$

$$E = \tilde{\ell}^C + \sqrt{2}\,\ell^C\theta + F_{\ell^C}\theta\theta + i\theta\sigma^{\mu}\theta\partial_{\mu}\tilde{\ell}^C + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\ell^C + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\tilde{\ell}^C$$

$$H_1 = \begin{pmatrix}H_1^{+}\\ H_1^{O}\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}\tilde{H}_1^{+}\\ \tilde{H}_1^{O}\end{pmatrix}\theta + \begin{pmatrix}F_{H_1^{+}}\\ F_{H_1^{O}}\end{pmatrix}\theta\theta + i\bar{\theta}\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\begin{pmatrix}H_1^{+}\\ H_1^{O}\end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\begin{pmatrix}\tilde{H}_1^{+}\\ \tilde{H}_1^{O}\end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\,\Box\begin{pmatrix}H_1^{+}\\ H_1^{O}\end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix}H_2^{O}\\ H_2^{-}\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}\tilde{H}_2^{O}\\ \tilde{H}_2^{-}\end{pmatrix}\theta + \begin{pmatrix}F_{H_2^{O}}\\ F_{H_2^{-}}\end{pmatrix}\theta\theta + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\begin{pmatrix}H_2^{O}\\ H_2^{-}\end{pmatrix}\ \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\begin{pmatrix}\tilde{H}_2^{O}\\ \tilde{H}_2^{-}\end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\,\Box\begin{pmatrix}H_2^{O}\\ H_2^{-}\end{pmatrix} \tag{4.56}$$

Kullandığımız notasyon şu şekildedir: bütün süpereşler, normal parçacıklar için kullanılan harflerle gösterilmiş, fakat üzerlerine tilda konmuştur. $i=1,2$ dir ve $i=1(2)$ "chiral" süperalanın üst (alt) sırasını gösterir. Lepton ve kuarkların üç ailesi için bu süpermültipletler aynen tekrarlanır. Bileşen alanlar ve onların kuantum sayıları Tablo II'de sunulmuştur.

TABLO II

Normal parçacıklar		Süpersimetrik eşler		Spin
Kuarklar:				
$q=u,\ d,\ s$		$q=\tilde{u},\ \tilde{d},\ \tilde{s}$	skaler	0
$c,\ b,\ t$		$\tilde{c},\ \tilde{b},\ \tilde{t}$	kuarklar	0
Leptonlar				
$\ell=e,\ \mu,\ \tau$		$\tilde{\ell}=\tilde{e},\ \tilde{\mu},\ \tilde{\tau}$	skaler leptonlar	0
$\nu=\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$		$\nu=\tilde{\nu}_e,\ \tilde{\nu}_\mu,\ \tilde{\nu}_\tau$	skaler nötrinolar	0
G_μ^α	gluonlar	$\tilde{\lambda}_G^\alpha$	gluinolar	1/2
$W^\pm$	ara bozonlar	$\tilde{W}^\pm$	wino	1/2
Z^o		$\tilde{Z}^o$	zino	1/2
γ	foton	$\tilde{\gamma}$	fotino	1/2
H_1^+	Higgs	$\tilde{H}_1$	Higgsinolar	1/2
H_1^o		$\tilde{H}_1^o$		1/2
H_2^-		$\tilde{H}_2^-$		1/2
H_2^o		$\tilde{H}_2^o$		1/2

Kesim 4.5'deki incelemenin ışığında süpersimetrik eylemi artık yazabiliriz. Lagranjiyen aşağıdaki biçimde olacaktır:

$$\mathcal{L}_{SSSM} = \text{ayar invaryant madde kinetik terimleri}$$
$$+ \text{ ayar invaryant ayar alanı kinetik terimleri}$$
$$+ \int d^2\theta \; P(\phi) + \text{h.e.} \qquad (4.57)$$

Burada $P(\phi)$ süperpotansiyeli, modeldeki yüklü fermiyonlara kütle kazandıran Yukawa çiftlenim terimlerini verir ve genel olarak aşağıdaki biçimde yazılabilir (bir aile için):

$$P(\phi) = g_e \epsilon_{ij} L_e^i H_2^j E^c + g_d \epsilon_{ij} U^i H_2^j D^c$$
$$+ g_\mu \epsilon_{ij} Q H U^c + \mu \epsilon_{ij} H_1^i H_2^j \qquad (4.58)$$

Yukarıda g_e, g_d ve g_μ alışılmış Yukawa çiftlenim sabitleridir. μ kütlesi Higgs potansiyeline girer. Lepton ve baryen sayısı korunumunu bozacak terimler (4.58) ifadesinde dışlanmıştır.

(4.57)'de görülen Lagranjiyen henüz gerekçi bir modeli tasvir edemez; zira bu ifade kırılmamış süpersimetriye yol açar. SU(2) x U(1) simetrisini kırmak için Higgs sektörüne duyulan gereksinime benzer olarak süpersimetriyi kıracak bir sektör zorunludur. Bu noktadan itibaren artık modele bağımlılık başlar çünkü SUSY kırılmasının kaynağı iyi anlaşılamamıştır ve değişik mekanizmalar öngörülmektedir.

Öte yandan her simetri kırma yönteminden beklenen şey doğal olarak şudur: süpersimetrinin temel üstünlüğü, yani bozon ve fermiyon ilmekleri arasında kuadratik ıraksamaların karşılıklı birbirlerini yoketmesi, simetri kırıldıktan sonra da devam etmelidir. Elemanter parçacık fiziğindeki mevcut SUSY modellerinde süpersimetriyi kırmak için üç yol izlenmektedir: açık fakat yumuşak kırılma, global SUSY'nin kendiliğinden kırılması ve yerel SUSY'nin (süpergravite) kendiliğinden kırılması. İncelememizi ilerletebilmemiz için bu üç değişik yöntemi bir miktar tartışmamız gerekir.

Simetrinin açıkça kırılması SUSY'nin yaklaşık bir simetri olduğu anlamına gelir:

$$[Q,H] = \text{tam sıfır değil} \qquad (4.59)$$

(4.59)'un sağ tarafı bir yandan süpersimetrinin iyi yönlerini bozmayacak ölçüde küçük olmalıdır, diğer yandan ise süpereşlerin bulunmayışını açıklayacak kadar büyükçe seçilmelidir. Böylece,bu yöntemde (Sakai 1981, Dimopoulos ve Georgi 1981) normal parçacıklara oranla daha ağır süpereşler verebilecek şekilde bazı yeni terimler (4.57) Lagranjiyenine eklenir. Daha sonra yapılacak iş bu yeni terimlerin, kuadratik ıraksaklıklardaki sadeleşmeyi bozup bozmadığını kontrol etmekten ibarettir (SUSY'nin açıkça bu tür kırılması yumuşak olarak kırılma biçiminde adlandırılır). SUSY invaryant Lagranjiyenlere açık olarak eklendiklerinde kuadratik ıraksaklıklar doğurmayan terimler, Girardello ve Grisaru (1982)'nun bir makalesinde sıralanmıştır. Bu referansta rapor edilen sonuçlara göre vektör mültipletlerindeki spinörel parçacıkların kütle terimleri yumuşaktır (Soft). Öte yandan "chiral" mültipletlerdeki spinörel parçacıkların kütle terimleri ise kuadratik ıraksaklıklar yaratmaktadır.

Simetrinin açık olarak yumuşakça kırıldığı modellere karşı bazı argümanlar sözkonusudur. Bunlardan birincisi, estetik açıdan, SUSY invaryant Lagranjiyenlere süpersimetrik olmayan terimlerin eklenmesinin hiç de çekici gözükmemesidir. İkinci olarak bu tür modellerin öngörme kapasitesi düşüktür; zira simetrinin açıkça kırıldığı SUSY modellerine katılan yeni parçacıklar (leptino, "quarkino", "gaugino") serbest parametrelerdir.

Üçüncü olarak, kütle çekimini gözönüne alırsak süpersimetriyi de ayarlamamız gerekir ve eğer simetri açıkça kırılmışsa bunu yapmamız mümkün değildir. Bununla birlikte ileride göreceğimiz gibi (Barbieri et.al. 1982 a,b., Farrar ve Weinberg 1983) global SUSY'nin kendiliğinden kırıldığı gerçekçi SUSY modellerinin inşası hemen hemen olanaksızdır. Oysa belli bir yumuşak SUSY kırma yolunu izlemek suretiyle tüm fenomenolojik kısıtlamaları sağlayabilen gerçekçi SUSY modelleri (Ellis 1984, Nilles 1984, Ross 1984, Polchinski 1985, Jones 1986) ortaya atılmıştır.

Kesim 4.4'de F-terimi aracılığıyla kendiliğinden SUSY kırılmasını incelemiş bulunuyoruz. Şimdi SUSY standart modelindeki durumu gözden geçirelim. Herhangi bir "chiral" süperalana, diyelim ϕ, ait F-teriminin, taban durumunda sıfırdan farklı olduğunu varsayalım;

$< F_{\phi} > \neq 0$. Süperpotansiyel de $\Delta P = \phi\lambda^2$ terimini içersin. O zaman A_λ alanı, $\Delta\mathcal{L} = <F_{\phi}> [(ReA_\lambda)^2 - (I_m A_\lambda)^2]$ şeklinde süpersimetrik olmayan bir kütle terimi kazanır. Böylece A_λ kompleks skaler alanı iki gerçel bileşene ayrılır. Bunlardan birisinin kütlesi süpersimetrik değerden daha fazla, diğerininki ise aynı miktarda daha azdır. Ψ_λ spinörel alanının kütlesi ise süpersimetrik değere eşit olarak kalır. Böyle bir mekanizmanın gerçekçi bir model kurmaya elverişli olamıyacağı açıktır. Dolayısıyla şu sonuca ulaşırız: O'Raifeartaigh-Fayet mekanizması aracılığıyla SUSY'nin kendiliğinden kırılması bize başarılı modeller kurma olanağı vermememektedir.

Başvurulabilecek diğer bir SUSY kırma mekanizması da D-terimi aracılığıyla olandır; yani Iliopoulos-Fayet yöntemi. Bununla birlikte bu yöntem, standart modelde mevcut olan U(1) hiperyük grubundan başka fazladan bir yerel U(1) ayar simetrisinin teoriye katılmasını gerektirir. Bu tür $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times \tilde{U}(1)$ modellerinin düşük enerji özellikleri çeşitli yazarlarca incelenmiştir (Fayet 1977, Weinberg 1983) fakat sonuçlar pek çekici değildir.

Yerel süpersimetrinin kendiliğinden kırılmasını ise burada ayrıntılı olarak tartışamayacağız, çünkü süpergravite modellerini incelemeyip, kendimizi yalnızca global SUSY modelleriyle sınırladık. Bununla birlikte bu konuda son zamanlarda varılan önemli bir saptamaya değinmeliyiz: düşük enerji sektörü gözönüne alındığında yumuşak SUSY kırıcı terimler süpergravitenin kendiliğinden kırılmasının doğal bir sonucudur (Nanapoulos 1986, Vyotskiî 1986). Dolayısıyla daha önceleri pek revaçta olmayan simetriyi yumuşak kırma yöntemi, gerçekçi global SUSY modelleri inşa ederken izleyebileceğimiz yegâne yol olmaktadır.

Süpersimetri kırılmasını bu şekilde tartıştıktan sonra SUSY standart modeli üzerindeki incelememizi ilgili toplam Lagranjiyeni aşağıdaki gibi yazarak sürdürelim:

$$\mathcal{L}_{\text{toplam}} = \mathcal{L}_{SSSM} + \mathcal{L}_{SSB} \tag{4.60}$$

Burada $\mathcal{L}_{SSSM}$ süpersimetrik Lagranjiyeni Denk.(4.57)'de verilmiştir. $\mathcal{L}_{SSB}$ ise etkin olarak süpersimetriyi yumuşak kıran terimleri kapsar ve açık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SSB} &= -\Sigma M_i^2 A_i^{\star} A_i - \frac{1}{2} \sum_a \tilde{m}_a \bar{\lambda}^a \lambda^a + \text{h.c.} \\ &+ (A_e g_e H_2^o \tilde{\ell} \tilde{\ell}^c + A_d g_d H_2^o \tilde{q}_\ell \tilde{d}_\ell^c + A_u g_u H_1^o \tilde{q}_\ell \tilde{U}_\ell^c) + \text{h.c} \\ &+ g_h H_1 H_2 + \text{h.c}\end{aligned} \tag{4.61}$$

(4.61)'deki ilk terim bütün skalerlere, yani skuarklara, sleptonlara ve Higgs parçacıklarına kütle verir. İkinci terim tüm "gaugino"'ların kütle terimidir. Parantez içerisindeki üçüncü terim skuark, slepton kütle matrislerine katkıda bulunur. Son terim ise Higgs potansiyeline girer.

Denk.4.61, ayar simetrisi ve $\Delta B = \Delta L = 0$ korunum yasalarıyla tutarlı olan en genel Lagranjiyenin biçimidir. Böylelikle kuarkların, leptonların, foton ve gluonların süpereşleri daha ağır kılınmıştır. Diğer önemli bir nokta da kuarkların leptonların ve ayar bozonlarının kütle terimleri ayar invaryansı nedeniyle yasaklanmıştır. Higgs alanlarının boşluk beklenti değerlerinin yol açtığı,ayar simetrisinin kendiliğinden kırılması mekanizması sonucunda bu parçacıklar kütle kazanabilir:

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Higgs parçacıkları kütlelerini (4.61)'den alırken Higgsino'ların kütlesi (4.60)'daki μ terimi ile SU(2) x U(1) kırılmasından gelir.

Daha önce altını çizmiş olduğumuz gibi (4.57), (4.58) ve (4.61) süpersimetrik Lagranjiyenleri baryon ve lepton sayılarını korur. B ve L'yi bozacak terimlerin dışarlanmasıyla bu sağlanmıştır. Örneğin

$$(LH)_F \quad , \quad (QQU)_F \tag{4.62}$$

terimleri hem SU(3) x SU(2) x U(1) simetrik hem de süpersimetriktir. Dolayısıyla bu terimler başlangıçtaki Lagranjiyene eklenebilirlerdi. Fakat sırasıyla lepton ve baryon sayılarını bozdukları için (4.57), (4.58) ve (4.61) ifadelerine alınmamışlardır.

Bu simetrilerin yanısıra, pekçok SUSY modelinde R-paritesi olarak adlandırılan ve çarpımsal olarak korunan bir kuantum sayısı daha bulunur (Fayet 1977). Normal parçacıklar için $R=+1$ iken, bunların süpersimetrik eşleri

$R = -1$ paritesine sahiptir. Bu kuantum sayısını aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür:

$$R = (-1)^{2J + 3B + L} \tag{4.63}$$

Burada J = spin, B = baryon sayısı, L = lepton sayısıdır. Çoğunlukla SUSY modelleri R-paritesini korur, fakat süpersimetrik teoriler için bu hiç de bir zorunluluk değildir (Dawson 1986). (4.62) deki terimlerin R-paritesini bozduğunu gözlemekteyiz; bu nedenle Lağranjiyene dahil edilmemişlerdir.

R-paritesinin yol açtığı bazı önemli sonuçlar vardır. Bunlardan birincisi, en hafif süpersimetrik parçacığın kararlı olmasıdır; zira pozitif R-pariteli ürünlerin hiçbir karışımı negatif R-pariteli orijine sahip olamaz. İkincisi süpersimetrik parçacıkların ancak çiftler halinde yaratılabilecekleridir çünkü ilk durum için $R = +1$ dir. Üçüncü olarak ise en hafif süpersimetrik parçacık fotino ise bütün bozunmalar bu parçacıkla son bulmalıdır.

Şimdi (4.55) ve (4.56)'da verilmiş olan vektör ve ve "chiral" süperalanlar içerisinden uygunlarını seçerek, saf leptonik etkileşmeler, hadronik zayıf etkileşmeler ya da süpersimetrik QCD özel halleri için toplam Lagranjiyenlerin açık ifadelerini yazabiliriz. Bu kesiminin geri kalan kısmında saf leptonik etkileşmeleri tasvir eden toplam Lagranjiyendeki bütün terimleri elde edeceğiz. Bu hal için L_i, E_i^c, H_1 ve H_2 "chiral" süpermültipleri ile V_B ve V_W vektör süpermültiplerini kullanmamız gerekir.

Önce elektron ailesi için ayar invaryant madde kinetik terimlerini yazalım. Sol-elli ikililer için,

$$\int d^4\theta L_e^{+} e^{2g_1 t_o V_B + 2g_2 V_W} L_e = -(D_\mu \tilde{A}_i)^{+}(D^\mu \tilde{A}_i)$$

$$-i\bar{\Psi}\,\bar{\sigma}^\mu D_\mu \Psi + \tilde{F}_i^\star \tilde{F}_i + i\sqrt{2}\, g_2 (\tilde{A}_i^\star T^a_{ij} \Psi_j \bar{\tilde{\lambda}}{}^a_W - \bar{\tilde{\lambda}}{}^a_W T^a_{ij} \tilde{A}_j \bar{\Psi}_i$$

$$+ i\sqrt{2}\, g_1 t_o (\tilde{A}_i^\star \tilde{\lambda}_B \Psi_i - \bar{\tilde{\lambda}}{}^a_W T^a_{ij} \bar{\tilde{A}}_j \bar{\Psi}_i) + g_2 \tilde{D}^a \tilde{A}_i^\star T^a_{ij} \tilde{A}_j + g_1 t_o \tilde{D}_B \tilde{A}_i^\star A_i$$

(4.64)

yazabiliriz. Burada D_μ kovaryant türevi

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 t_o B_\mu + ig_2 W^a_\mu T^a \qquad (4.65)$$

ile verilir. Sol-elli leptonlar için hiperyük $t_o = -\frac{1}{2}$ ve $i = 1,2$, $a = 1,2,3$ dür. Daha önce olduğu gibi $i = 1(2)$ elektronu (nötrinoyu) göstermektedir.

Sağ elli elektron mültipleti Olan E_c için benzer şekilde.

$$\int d^4\theta\, E^c\, e^{2g_1 t_o V_B} E^c = e^{c\star} \Box e^c + \tilde{F}^\star_{ec} \tilde{F}_{ec} - ie^c \sigma^\mu \partial_\mu \bar{e}^c$$

$$+ ig_1 t_o (e^{c\star} B^\mu \partial_\mu e^c - \partial_\mu \tilde{e}^{c\star} B^\mu \tilde{e}^c)$$

$$+ g_1 t_o \bar{e}^c \bar{\sigma}^\mu B_\mu e^c + i\sqrt{2} g_1 (\tilde{e}^{c\star} \tilde{\lambda}_B e^c - \tilde{e}^c \bar{\tilde{\lambda}}_B \bar{e}^c)$$

$$+ g_1 t_o \tilde{D}_B \tilde{e}^{c\star} \tilde{e}^c - g_1 t_o^2 \tilde{e}^{c\star} \tilde{e}^c B_\mu B^\mu \qquad (4.66)$$

yazılır. Yukarıdaki sağ-elli leptonlar için $t_o = -1$ dir. Ayar invaryant ayar kinetik terimleri alışıldığı gibi (bkz. 4.45 ve 4.55) şu biçimdedir:

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - i\tilde{\lambda}_B \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\tilde{\lambda}}_B + \frac{1}{2} D_B^2 \qquad (4.67a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} = -\frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^a_{\mu\nu} - i\tilde{\lambda}^a_W \sigma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda}^a_W - ig_2 \epsilon^{abc} \bar{\tilde{\lambda}}{}^a_W \bar{\sigma}^\mu W^b \tilde{\lambda}^c_W$$

$$+ \frac{1}{2} D^a_W D^a_W \qquad (4.67b)$$

Burada

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{4.68a}$$

$$W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g_2 \, \epsilon^{abc} \, W^b_\mu \, W^c_\nu \tag{4.68b}$$

dir.

Yukawa türü etkileşmeler için (4.58) potansiyelindeki birinci ve dördüncü terimleri alabiliriz. Yumuşak süpersimetri kırıcı terimler (4.61)'de $g_u = g_d = 0$ konarak bulunur. F_i, D_B, D^a_W yardımcı alanlarını hareket denklemleri yardımıyla yoketmemiz mümkündür. Bu işlem sonucunda skaler potansiyel

$$V_{skaler} = F^\star_i F_i + \frac{1}{2} D^2_B + \frac{1}{2} D^a_W D^a_W \tag{4.69}$$

olur. Şimdi tüm bu hazırlık adımlarından sonra saf leptonik etkileşmeleri tasvir eden toplam süpersimetrik Lagranjiyeni yumuşak SUSY kırıcı terimlerle birlikte açık olarak yazalım:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{toplam} = {} & \tilde{A}^\star_i \Box A_i - i\bar{\Psi}_i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi_i + ig_2 (\tilde{A}^\star_i \, W^a_\mu T^a_{ij} \partial_\mu \tilde{A}_j - \partial_\mu \tilde{A}^\star_i \, W^a_\mu T^a_{ij} \tilde{A}_j) \\
& - g_2^2 \tilde{A}^\star_i \, A_j W^a_\mu W^{\mu b} (T^a T^b)_{ij} + i\sqrt{2} g_2 (\tilde{A}^\star_i \, T^a_{ij} \Psi_j \bar{\tilde{\lambda}}^a_W - \tilde{\lambda}^a_W \, T^a_{ij} \, \tilde{A}_j \bar{\Psi}_i) \\
& + g_2 \bar{\Psi}_i \bar{\sigma}^\mu W^a_\mu \, T^a_{ij} \Psi_j - 2 g_1 g_2 t_o \tilde{A}^\star_i \tilde{A}_j B_\mu W^{\mu a} T^a_{ij} + i g_1 t_o (\tilde{A}^\star_i \, B^\mu \partial_\mu \, \tilde{A}_i - \partial_\mu \tilde{A}^\star_i B^\mu \tilde{A}_i) \\
& + g_1 t_o \bar{\Psi}_i \bar{\sigma}^\mu B_\mu \Psi_i + i\sqrt{2} g_1 t_o (\tilde{A}^\star_i \, \tilde{\lambda}_B \Psi_i - \tilde{A}_i \tilde{\lambda}_B \bar{\Psi}_i) - g_1^2 \, t_o^2 \, \tilde{A}^\star_i \tilde{A}_i B_\mu B^\mu
\end{aligned}$$

$$+e^{c\star}\Box e^{c} - ie^{c}\,\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{e}^{c} + ig_1 t_o(e^{\star c}\, B^{\mu}\, \partial_{\mu}\, e^{c} - \partial_{\mu} e^{\star c}\, B^{\mu}\, e^{c})$$

$$+g_1 t_a \bar{e}^{c}\, \bar{\sigma}^{\mu}\, B_{\mu}\, e^{c} + i\sqrt{2}\, g_1 (e^{\star c}\, \lambda_B\, e^{c} - e^{c}\lambda_B e^{c}) + g_1 t_o e^{\star c}\, e^{c}$$

$$-g_1^2 t_o^2\, e^{c}\, e^{c} B_{\mu} B^{\mu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - i\,\lambda_B \sigma^{\mu}\,\partial_{\mu}\lambda_B - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^{a}\, W^{\mu\nu a}$$

$$-i\lambda_w^a\, \bar{\sigma}^{\mu}\, \partial_{\mu}\, \lambda_w^a - ig_2\, \epsilon^{abc}\, \lambda_w^a\, \sigma^{\mu}\, W_{\mu}^{b}\, \lambda_w^c - g_e\, (\nu_e H_2^- e^{c}$$

$$+\nu_e H_2^- e^{c} + \nu_e H_2^- e^{c} + eH_2^o\, e^{c} + e\, H_2^o\, e^{c} + e\, H_2^o\, e^{c})\ \text{th.e}$$

$$+\mu\ (-H_1^+\, H_2^- + H_1^{\star}\, H_2^o)\ \text{th.e.} - (M_e^2\, e\, e^{\star} + M_e^2 c\ \ e^{c\star} e^{c}$$

$$+ M_{\nu e}^2\, \nu_{\star e}\, \nu_e + M^2_{H_1^+}\, H_1^{\star +}\, H_1^+ + M^2_{H_1^o}\, H_1^{\star o}\, H_1^o + M^2_{H_2^o}\, H_2^{\star o}\, H_2^o + M^{\star}_{H_2^-}\, H_2^{\star -}\, H_2^-\ )$$

$$-\frac{1}{2}\, (m_w\, \lambda_w^a\ \ \lambda_w^a + m_B\, \lambda_B\, \lambda_B) + \text{h.c.} + A_e g_e\, H_2^o\, e\, e^{c} + \text{h.e}$$

$$+ g_h\, H_1 H_2 + \text{h.e.}\ \ -V_{skaler}\, (A_i^{\star},\, A_i,\, H_1,\, H_2) \qquad (4.70)$$

Yukarıdaki skaler potansiyelin açık ifadesi aşağıda verilmiştir:

$$V_{skaler} = |\, g_e H_2^-\, e^{c}|^2 + |\, g_e H_2^o\, e^{c}|^{\,2} + |g_e(\nu_e H_2^- + e\, H_2^o\,)|^{\,2}$$

$$+|\,\mu H_2^-\,|^{\,2} + \ |H_2^o|^2 + |\,\mu H_1^o + g_e\, \tilde{e}\, \tilde{e}^{c}|^2\ +\ |\,\mu H_1^+ + g_e \tilde{\nu}_e\, \tilde{e}^{c}|^{\,2}$$

$$+\frac{1}{8}\, g_1^2\, (-\tilde{\nu}_e^{\star}\tilde{\nu}_e - \tilde{e}^{\star}\tilde{e} - 2\tilde{e}^{\star}_{c}\, \tilde{e}^{c} + H_1^{\star +}\, H_1^{+} + H_1^{\star o}\ \ H_1^o - H_2^{\star o}\, H_2^o - H_2^{\star -}\, H_2^-)^2$$

$$+\frac{1}{8}\, g_2^2\, [\, (\tilde{A}_i^{\star}\, \tilde{A}_2)^2 + 4\ \ H_2^i\, H_2^i\,|^{\,2}\ - 2(H_1^{\star i}\, H_1^i\,)\ \ (H_2^{\star j}\, H_2^j\,) + (H_1^{\star i}\, H_1^i)^2$$

$$+ (H_2^{i\star} H_2^i)^2 - 2(H^{i\star} H^i)(\tilde{A}_j^\star \tilde{A}_j) - 2(H_2^{i\star} H_2^i)(\tilde{A}_j^\star \tilde{A}_j)$$

$$+ 4\,|H_1^i A_i|^2 + 4\,|H_2^i A_i|^2 \qquad (4.71)$$

(4.70) ve (4.71) ifadeleri yalnızca elektron ailesi için yazılmıştır.Daha önce olduğu gibi i üzerinden toplam vardır ve bu, lepton ile Higgs süpermültipletlerinin birinci ve ikinci sırasının hesaba katılmasını sağlamak içindir. Örneğin $A_i^\star \Box A_i$ skaler kinetik terimi, sol ve sağ elli selektronlar ile Higgs parçacıklarının kinetik terimlerinin tümünü gösterir. Diğer iki aile için (4.70) ve (4.71)'in benzer şekilde yazılması gerekir.

$SU(2)_W \times U(1)_Y$ ayar simetrisinin $U(1)_{em}$'e kendiliğinden kırılması, Higgs alanlarının sıfırdan farklı boşluk beklenti değerleri aracılığıyla gerçekleşir. Foton, fotino ve ara bozonları gibi çeşitli kütle özfonksiyonları, Lagranjiyendeki ilgili terimleri dikkate alınarak kurulabilir. Bu hesaplar ve değişik etkileşme terimlerine karşı gelen Feynmann kuralları Haber ve Kane (1985)'in derleme makalesinin sonunda yer alan eklerde bulunabilir.

5. KUANTUM MEKANİĞİNDE SÜPERSİMETRİ

5.1. Süpersimetrik Kuantum Mekaniği için Lagranjiyenin Türetilmesi ve SUSY Kırılmasının Tekrar Gözden Geçirilişi

Önceki bölümde gördüğümüz gibi süpersimetri, elemanter parçacık fiziğinin çeşitli modellerinde teorik bir araç olarak yoğun bir biçimde kullanılmıştır. Süpersimetrik spin sistemleri üzerine Nicolai (1976)'nın ve dinamik SUSY kırılmasına ilişkin olarak da Witten (1981)'in başlattıkları çalışmalarla birlikte süpersimetri düşüncesi kuantum mekaniğine de geniş ölçüde uygulandı. Süpersimetrik kuantum mekaniğini incelemenin ardında yatan iki temel motivasyon sözkonusu idi. Bunlardan birincisi kuantum mekaniksel modellerin, $0+1$ uzay-zaman boyutundaki en basit alan teorileri olarak düşünülmesidir. Dolayısıyla hem daha gerçekçi modelleri kavramamıza yardımcı olur hem de kendiliğinden SUSY kırılmasını doğuran mekanizmaların anlaşılmasını sağlayabilir. İkincisi ise SUSY kuantum mekaniğinin, matematiksel olarak ilginç özellikler taşımasıdır (Witten 1982 b).

Bu kesimde önce süpersimetrik kuantum mekaniğine ait Lagranjiyen elde edilecek (Cooper ve Freedman 1983 ve 1985) ve daha sonra değişik modellerde enerji spektrumları ile süpersimetrinin kırılması incelemek üzere, daha elverişli gözüken Hamiltonyen yaklaşımına geçilecektir.

Alışılmış süperalanlar, $(x\ ,\theta,\bar{\theta})$ süperuzayında tanımlanır. Burada x_μ uzay-zaman koordinatları, θ ve $\bar{\theta}$ ise antikomütatif parametrelerdir. Tek boyutta, $x_\mu \rightarrow t$ yazıp süpersimetri dönüşümlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{aligned} t' &= t - i\,(\bar{\theta}\epsilon - \bar{\epsilon}\theta) \\ \theta' &= \theta + \epsilon \\ \bar{\theta}' &= \bar{\theta} + \bar{\epsilon} \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Ayrıca sonsuz küçük süpersimetri dönüşümlerini

$$\delta A = i[\bar{\epsilon}\bar{Q} + \epsilon Q,\ A] \qquad (5.2)$$

şeklinde ifade edebiliriz (5.1)'e bakarak aşağıdakiler kolayca yazılabilir:

$$\delta t = -i(\bar{\theta}\epsilon - \bar{\epsilon}\theta),\ \delta\theta = \epsilon \quad , \qquad \delta\bar{\theta} = \bar{\epsilon} \qquad (5.3)$$

Bunlardan yararlanarak süperyükler için şu diferansiyel gösterimleri elde ederiz:

$$Q = i\partial_{\theta} - \bar{\theta}\,\partial_t$$
$$\bar{Q} = -i\partial_{\bar{\theta}} + \theta\,\partial_t \qquad (5.4)$$

Şimdi bu yüklerin

$$\{Q,\bar{Q}\} = 2i\partial_t = 2H \qquad (5.5)$$

bağıntısını sağladıkları derhal gösterilebilir. Ayrıca

$$[Q,H] = 0 \qquad (5.6)$$

olduğu da açıktır.

$\phi(t,\theta,\bar{\theta})$ gerçek skaler alanını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\phi(t,\theta,\theta) = \overset{\star}{\phi}(t,\theta,\bar{\theta})$$
$$\phi'(t',\theta',\theta') = \phi(t,\theta,\theta) \qquad (5.7)$$

θ ve $\bar{\theta}$ 'ın herhangi bir yerel fonksiyonu polinom biçiminde olmak zorundadır;

$$\phi = x(t) + i\theta\Psi(t) + i\bar{\theta}\bar{\Psi}(t) + \bar{\theta}\theta D(t) \qquad (5.8)$$

(bu ifadeyi 4.13 ile karşılaştırmak için yukarıdaki θ parametresinin hiçbir spinör indisi taşımadığını ve $\bar{\theta} = \theta^*$ olduğunu belirtmeliyiz. θ ve $\bar{\theta}$ sadece iki Grassman değişkenidir). (5.8)'i kullanarak bileşenler için şu bağıntıları bulabiliriz:

$$x = i(\Psi\epsilon + \bar{\Psi}\bar{\epsilon})$$

$$\delta\Psi \quad -i\bar{\epsilon}D + \bar{\epsilon}\dot{x} \qquad (5.9)$$

$$\delta D = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon\Psi + \bar{\Psi}\bar{\epsilon})$$

Öte yandan SUSY dönüşümleri altında invaryant kalan kovaryant türevler için aşağıdaki gösterimler yazılabilir:

$$D_\theta = \partial_\theta - i\bar{\theta}\partial_t$$
$$D_{\bar{\theta}} = \partial_{\bar{\theta}} - i\theta\partial_t \qquad (5.10)$$

ϕ'nin keyfi bir fonksiyonu

$$f(\phi) = \sum_n a_n \phi^n \qquad (5.11)$$

şeklinde seriye açılabilir. O zaman en genel invaryant eylem aşağıdaki gibi yazılır:

$$S = \int dt\, d\theta\, d\bar{\theta}\, \left(\frac{1}{2} |D_\theta \phi|^2 - f(\phi)\right) \qquad (5.12)$$

Antikomütatif değişkenler üzerinden alınan Berezin integrasyonu sayesinde $|D_\theta\phi|^2$ ve $f(\phi)$ terimlerine ait seri açılımlarda yalnızca $\theta\bar{\theta}$ 'ın katsayısını bilmemiz yeterlidir. Böylece;

$$(D_\theta \phi)^\star (D_\theta \phi) = \theta\bar{\theta} \ [\dot{x}^2 + i(\bar{\Psi}\dot{\Psi} - \dot{\bar{\Psi}}\Psi) + D^2] + \ldots\ldots.$$

$$f(\phi) = \theta\bar{\theta}\{\Sigma n\ a_n x^{n-1}(-D) + \Sigma n(n-1) a_n x^{n-2} \ [\frac{\Psi\bar{\Psi} - \bar{\Psi}\Psi}{2}]\} + \ldots.$$

$$= \theta\bar{\theta}\{ -Df'(x) - \frac{[\bar{\Psi},\Psi]}{2} f''(x)\} + \ldots.. \qquad (5.13)$$

olur. θ ve $\bar{\theta}$ integralleri alındıktan sonra eylem,

$$S = \int dt\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2}(\bar{\Psi}\dot{\Psi} - \dot{\bar{\Psi}}\Psi) + \frac{1}{2} D^2 + Df'(x) + \frac{[\bar{\Psi},\Psi]}{2} f''(x)\}$$

$$(5.14)$$

biçimini alır. Yardımcı alanları, $D = -f'(x) = W(x)$ hareket denklemi ile yok edersek süpersimetrik mekaniği tasvir eden klâsik Lagranjiyen için nihayet şu ifadeyi buluruz:

$$S = \int dt\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (\bar{\Psi}\dot{\Psi} - \Psi\dot{\bar{\Psi}}) - \frac{1}{2} W^2(x) - \frac{[\bar{\Psi},\Psi]}{2} W'(x)\}$$

$$(5.14)$$

Bununla birlikte SUSY kuantum mekaniğine ilişkin problemlerin çoğu, Hamiltonyen formalizminde incelenmeye daha elverişlidir.(5.15)'deki Lagranjiyen ifadesine bakarak

$$H = \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} W^2(x) - \frac{[\bar{\Psi},\Psi]}{2} W'(x) \qquad (5.16)$$

yazılabilir. Burada

$$[p,x] = -i \qquad \text{ve} \qquad \{\bar{\Psi},\Psi\} = 1 \qquad (5.17)$$

dir. Süpersimetri işlemcileri için şu gösterimi verebiliriz:

$$Q = (p-iW)\Psi$$
$$\bar{Q} = (p+iW)\bar{\Psi} \qquad (518)$$

(5.17) bağıntıları kullanılarak süperyüklerin aşağıdaki eşitliği sağladığı gösterilebilir:

$$\{Q,\bar{Q}\} = 2H \qquad (5.19)$$

Ayrıca bir fermiyon sayı işlemcisi de tanımlanabilir;

$$F = 1 - 2\Psi\bar{\Psi} \qquad (5.20)$$

F, Hamiltonyenle yer değiştirir:

$$[H,F] = 0 \qquad (5.21)$$

Ψ ve $\bar{\Psi}$ için aşağıdaki matris gösterimi kabul edilerek (5.17)'de verilen cebiri realize etmek mümkündür:

$$\bar{\Psi} = \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \sigma^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.22)$$

Bu gösterimde

$$F = -\sigma_3 \quad , \quad [\bar{\Psi}, \Psi] = -\sigma_3 \qquad (5.23)$$

olur ve Hamiltonyen köşegen hale gelir:

$$H = \frac{1}{2}[P^2 + W^2(x)] + \frac{\sigma_3}{2} W'(x) \qquad (5.24)$$

ya da

$$H = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P^2 + W^2(x) + W'(x) & 0 \\ 0 & P^2 + W^2(x) - W'(x) \end{pmatrix} \qquad (5.25)$$

dır. Süperyükler cinsinden ise

$$H_- = \frac{1}{2} Q\bar{Q} \quad , \quad H_+ = \frac{1}{2} \bar{Q}Q \tag{5.26}$$

yazılabilir. Öte yandan H 'nin fazladan bir $O(2) \times O(2)$ simetrisine sahip olduğunu görmekteyiz; $O(2)$ 'lerden biri $[H,\sigma_3] = 0$ olmasından kaynaklanırken diğeri, (5.24) Hamiltonyenin P - W düzlemindeki dönmeler altında invaryant kalmasındandır.

H'nin özdurumlarını

$$\begin{pmatrix} \Psi_n^{(-)} \\ \\ \Psi_n^{(+)} \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

vektörü ile gösterelim. Burada ± işaretleri $(-1)^F$ 'nin ±1 olmasına karşı gelir: +, bozonik durumları ve - ise fermiyonik durumları göstermektedir.

(5.25) ifadesini ve

$$\Psi H = E\Psi \tag{5.28}$$

denklemini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} Q\Psi_n^{(+)} &= -i\sqrt{2E}\ \Psi_n^{(-)} \\ \bar{Q}\Psi_n^{(-)} &= i\sqrt{2E}\ \Psi_n^{(+)} \end{aligned} \tag{5.29}$$

Yukarıdaki bağıntılar, pozitif enerjili çözümler için spektrumun iki kat dejenere olduğunu, diğer bir deyişle H^- ve H^+ nın spektrumlarının özdeş olduğunu gösterir. Bununla birlikte $E = 0$ enerjili durumların bu şekilde bir çift oluşturması gerekmez. H^- ve H^+ 'nın spektrumları ile kuantum mekaniğindeki ters saçılma yöntemi arasındaki ilişki çeşitli yazarlarca tartışılmıştır (Nieto 1984, Gozzi 1983, Andrianov et.al. 1985, Kwong et.al. 1986).

Bu konuya ileriki kesimlerde geri döneceğiz.

Şimdi de bu modelde, süpersimetrinin kırılması problemini tartışalım. SUSY'nin kırılmaması için aşağıdaki eşitliğin sağlanması gerekir:

$$Q\,|0> = \bar{Q}\,|0> = 0\,|0> \qquad (5.30)$$

Burada $0|>$, taban durumudur:

$$|0> = \Psi_o = \begin{pmatrix} \Psi_o^{(-)} \\ \\ \Psi_o^{(+)} \end{pmatrix} \begin{matrix} (x) \\ \\ (x) \end{matrix} \qquad (5.31)$$

Böylece şunları yazabiliriz:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - W(x)\right) \Psi_o^{(-)} = 0$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + W(x)\right) \Psi_o^{(+)} = 0 \qquad (5.32)$$

Yukarıdaki denklemleri çözersek ;

$$\Psi_o^{(-)} = A_1\, e^{\int W(x)\,dx} \quad , \quad \Psi_o^{(+)} = A_2\, e^{-\int W(x)\,dx} \qquad (5.33)$$

bulunur. Eğer $W(x)$, x'in çift bir fonksiyonu ise $\int W(x)\,dx$ tektir ve bunun bir sonucu olarak $\Psi_o^{(-)}$ ve $\Psi_o^{(+)}$ normalize edilemez. Dolayısıyla bu modelde, sıfır enerjili normalize taban durumu yoktur; bu da bize SUSY'nin kırıldığını söyler. Öte yandan $W(x)$ eğer x'in tek bir fonksiyonu ise o zaman kırılmamış SUSY'ye karşı gelen sıfır enerjili bir durum vardır.

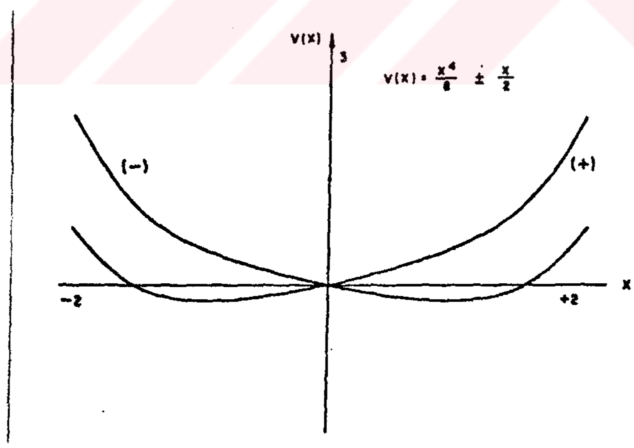
Böylece SUSY'nin kırılma koşulları, esas olarak $W(x)$'in büyük x değerlerindeki davranışı tarafından belirlenir. Bu koşullar $W(x)$ süperpotansiyeli hakkında global ifadeler olduğundan, süperpotansiyeldeki küçük deformasyonlar altında, sıfır enerjili durumun homotopik invaryans özelliği taşıdığını ileri sürebiliriz. Süperpotansiyele bu şekildeki bir global bağımlılık SUSY kırılmasıyla ilgili olarak bir indeks teoremi ortaya atılmasında, biraz ileride göreceğimiz gibi, temel gözlemi oluşturur.

Şimdi $W(x)$ için bazı özel ifadeler seçelim ve bu hallerde SUSY kırılmasını inceleyelim. Örneğin $W(x)=gx^2/2$ alınırsa

$$H=\frac{1}{2}p^2+\frac{g^2x^4}{8}+\frac{gx}{2}\sigma_3 \qquad (5.34)$$

olur.

$\Psi_o^{(+)}$ ve $\Psi_o^{(-)}$ için birbirinden farklı iki potansiyel elde ederiz, Şekil 5.1



ŞEKİL 5.1 $g=1$ için $V^{\pm}=\frac{g^2x^4}{8}\mp\frac{gx}{2}$ potansiyellerinin grafikleri.

Yukarıdaki potansiyeller sıfırdan farklı dejenere bir taban durumu verir, dolayısıyla SUSY kendiliğinden kırılır.

Öte yandan eğer $W(x) = \omega x$ seçilirse Hamiltonyen aşağıdaki biçimi alır:

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + \frac{\omega}{2} \sigma_3 \tag{5.35}$$

Görüldüğü gibi bu model, harmonik osilatörün süpersimetrik genelleştirilmesidir. $\omega\sigma_3/2$ ek terimi aslında bir sabit olduğundan (5.35) Hamiltonyeni,

$$E = \omega(n_B + \frac{1}{2}) \qquad n_B = 0,1,2,.... \tag{5.36}$$

şeklindeki alışılmış harmonik asilatör spektrumunu

$$E = \omega(n_B + n_F) \qquad \begin{array}{l} n_B = 0,1,2,... \\ n_F = 0,1 \end{array} \tag{5.37}$$

spektrumuna çevirir. Taban durumu dışında enerji düzeylerinin tümü iki kat dejeneredir. $n_B = n_F = 0$ taban durumunun enerjisi sıfırdır.

Böylece, beklenildiği gibi, taban durumu tekdir ve sıfır enerjilidir; bu nedenle SUSY'nin kırılmadığı sonucuna ulaşırız. Öte yandan $W(x) = \omega x^2$ seçiminin yol açtığı anharmonik SUSY osilatörün ise kırılmış simetri verdiği benzer şekilde gösterilebilir.

Süpersimetri kırılmasının diğer bir ölçütü de Witten indisi (Witten 1982) Δ'dır. Dahaönce Kesim 4.4'de görmüş olduğumuz gibi süpersimetrinin kırılıp kırılmadığını saptamak için E_o taban durumu enerjisinin hesaplanması gerekir. Fakat pekçok teoride bu enerjinin tam olarak hesabı zordur. Bilindiği gibi yaklaşık bir hesap $E_o = 0$ olduğunu gerçekten söyleyemez zira son derece küçük düzeltmeler bile bu görünümü değiştirebilir. Böylece Witten, sıfır enerjili bozonik durumların sayısı olan $n_B^{E=0}$ ile yine sıfır enerjili fermiyonik durumların sayısını gösteren $n_B^{F=0}$ arasındaki farkı ölçen bir Δ indisini ortaya attı; yani

$$\Delta = n_B^{E=0} - n_F^{E=0} \tag{5.38}$$

Açıktır ki $\Delta \neq 0$ durumunda SUSY kırılmazken $\Delta = 0$ kırılmış SUSY için gerek koşulu ifade eder. Süpersimetrik bir teorinin spektrumu daima pozitif ya da sıfır değerlerini alabildiği için ve sıfırdan farklı enerjili durumların tümü Fermi-Bose çifti oluşturduklarından

$$\Delta = \text{İz}\ (-1)^F \tag{5.39}$$

yazabiliriz. Burada F, (5.20)'de verilen fermiyon sayı işlemcisidir. Şimdi (5.18) süperyüklerini

$$Q = A\Psi \quad , \quad \bar{Q} = \bar{A}\bar{\Psi} \tag{5.40}$$

biçiminde yazalım. Burada $A = p - iW$ dır.

$H_\pm$ 'nin sıfır enerjili özfonksiyon uzaylarının boyutları $n_B^{F=0}$ ve $n_F^{E=0}$ olduğundan (5.26) 'i de kullanarak Δ için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\Delta = \text{Ind}\, A = \dim(\ker A) - \dim(\ker \bar{A}) \tag{5.41}$$

Bu da bize Δ'nın matematiksel anlamda bir indeks olduğunu gösterir. İyi bilindiği gibi bir işlemciye ait indeks, teorinin tümü için topolojik bir invaryanttır (yalnızca özel bir alan şekillenimi için değil). Bir işlemcinin indeksi, küçük deformasyonlar altında invaryanttır ve dolayısıyla Δ, kütle ya da çiftlenim sabitleri gibi teoride mevcut olan parametrelerden bağımsızdır.

Şimdi, Kesim 4.3 de tartışılan Wess-Zumino modeli için Δ 'nın nasıl hesaplandığını açıklayalım. Bu model kompleks A alanı ile onun Fermi eşi olan Ψ spinörünü kapsar ve süper potansiyel

$$V(A) = g^2(A^2 - m^2/g^2) \tag{5.42}$$

şeklindedir. Üçlü köşe düzeyinde A ve Ψ kütlelidir ve $m_A = m_\Psi$ dir. $A = \pm m/g$ de $V=0$ olduğundan süpersimetri kırılmaz. Şimdi Δ'nın sıfırdan farklı olduğunu göstererek bunu doğrulayalım. Gerçekten de V potansiyelinin $A = \pm m/g$ için iki minimumu bulunur ve bunlar iki tane taban durumuna karşı gelir. Diğer durumların hepsi de $E > 0$ enerjilidir ve Δ 'ya katkıda bulunmaz. Böylece $\Delta = 2$ olur, dolayısıyla süpersimetri kırılmamıştır.

Kütlesiz Wess-Zumino modeli halinde (yani $m=0$) Δ'nın hesabı güçtür. Fakat Δ'nun, kütle gibi teoride mevcut olan parametrelerden bağımsız olduğunu hatırlarsak yine $\Delta = 2$ sonucuna ulaşırız (Witten 1981). Bu da bize indeksin yararını açıkça gösterir.

Son yıllar içerisinde değişik süperpotansiyeller için Witten indeksinin hesabı ve sonuçların daha yüksek boyutlara genelleştirilmesi üzerine pekçok yayın çıkmasınakarşın konu hâlâ tamamlanmış değildir (Akhoury ve Comtet 1984, Windey 1984, Lancaster 1984, Alvarez-Gaumé 1983).

Witten indeksine ait tartışmamızı bitirmeden önce Gozzi (1986) tarafından öne sürülen bir başka indeksten sözetmek istiyoruz. Bu indeks, Hamiltonyenin uyarılmış durumlarını gözönüne almakta ve topolojik değil de daha çok analitik bir karakter taşımaktadır. Bir anlamda Witten'in analizini tamamladığını söyleyebiliriz.

Şimdiye kadar belli bir modelde süpersimetrinin kırılıp kırılmadığına karar verebilmek için gerekli olan ölçütleri tartıştık. Dinamik SUSY kırılması yaratabilecek olası bir mekanizmayı ele alalım şimdi de.

Bir süre önce Witten (1981), $W^2(x)$ potansiyelini kullanan kâsik teorideki instanton çözümünün, ilgili modelde dinamik SUSY kırılmasına yol açabileceğini öne sürdü. Bilindiği gibi bu tür çözümler modelde mevcut olan klâsik boşluk durumları arasındaki tünelleme geçişlerinin verir. Örneğin

$$W(x) = gx^2 + x$$

alırsak $x=0$ ve $x = {}^{-1}/g$ ile karakterize edilen klâsik dejenere boşluk durumları arasında tünel geçişleri yapan bir instanton çözümü vardır. Ayrıca asimtotik olarak $W(x) \sim x^2$ çift bir fonksiyon olduğundan bu modelde SUSY gerçekten kırılır. Khare ve Maharana (1984)'ın bir makalesinde tek instanton çözümünün, taban durumu enerjisine yaptığı E_o katkısı

$$E_o^{\text{instanton}} = \frac{1}{2\pi} \exp\left(- {}^{1}/3g^2\right) \tag{5.44}$$

olarak bulunmuştur. Bu örnekten çıkartabileceğimiz sonuç şudur: en azından zayıf çiftlenim limitinde instantonlar dinamik SUSY kırılması yaratabilmektedirler.

Bununla birlikte süpersimetri kırılması için instantonların gerekli olup olmadığı sorulabilir. Bu sorunun yanıtı olumsuz gibi gözükmektedir. Şöyle ki;

$$W(x) = gx^2 \tag{5.45}$$

alırsak sadece $x=0$'da bir minimum vardır ve dolayısıyla hiçbir instanton çözümü bulunamaz. Oysa $W(x)$, x'in çift bir fonksiyonu olduğundan SUSY kırılır. Gerçekten genel olarak instantonlar dinamik SUSY kırılması için yeterli değildir (Abbott ve Zakrzewski 1984). Bu konu geniş ölçüde ele alınmış olmasına karşın (von Holten 1981, Smilga 1984, Karsch et.al 1984 Novikov et.al. 1983)

instantonlar ve dinamik SUSY kırılması arasındaki ilişki hâlâ aydınlığa kavuşturulması gereken bir problemdir.

5.2. Süpersimetri ve Kuantum Mekaniğinde Ters Saçılma Yöntemi

Tam olarak çözülebilir problemlerin incelenmesi, kuantum mekaniğinde önemli bir yer tutar ve özellikle yaklaşıklık yöntemlerinin geliştirilmesine bir temel oluşturur. Bu konuyla ilişkili olarak kuantum mekaniğinde çok eskiden beri bilinen zarif biryöntem vardır: çarpanlarına ayırma yöntemi (Schröndinger 1940, Infeld ve Hull 1951). Bağlıdurum çözümlerini bildiğimiz herhangi bir potansiyelden başlayarak bu yöntem sayesinde enerji ve dalga fonksiyonlarını kolaylıkla hesaplayabileceğimiz yeni Hamiltonyonlar kurabiliriz. Şimdiye kadar bu yöntem, tek-boyutlu kuantum mekaniğinde tam olarak çözülebilir potansiyellerin inşasında ve bazı lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin bulunmasında kullanıldı (Matveev 1979). Son zamanlarda çarpanlara ayırma yönteminin, herhangi bir uzay boyutuna genelleştirilebileceği ve sonuçta elde edilen eşdeğer kuantum sistemlerinin bazı süpersimetri özellikleri taşıdıklarına dikkat çekildi. (Andrianov et.al. 1984 a,b,c, ve 1985, Nieto 1984, Gozzi 1983, Suk mar a,b, Schmutz 1985, Gendenshtein 1984)

Bu kesimde önce tek-boyuttaki çarpanlara ayırma yönteminin başlıca özelliklerini çok-boyutlu genişletmelere uygun olacak biçimde formüle edeceğiz. Daha sonra süpersimetrik kuantum mekaniği ile olan yakın ilişkisini ele alacağız.

Şimdi $V^o(x)$ gibi tek-boyutlu bir potansiyel için, $\Psi_N^{(0)}$ bağlı-durum dalga fonksiyonları ile $E_N^{(0)}$ (N 0,1,2..) enerjileri biliniyor olsun; yani

$$H^{(0)}\ \Psi_N(0) \equiv [-\frac{1}{2}\,\partial^2 + V^{(0)}(x)]\ \Psi_N(0)$$

$$= E_N^{(0)}\ \Psi_N^{(0)}\ ,\ E_o^{(0)} = 0\ ,\qquad \partial = \partial/\partial x \qquad (5.46)$$

dır. $H^{(0)}$ Hamiltonyenini bir çarpım şeklinde yazmak her zaman mümkündür :

$$H^{(0)} = Q^{+} Q^{-} \tag{5.47}$$

Burada

$$Q^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm \partial + \partial\chi), \quad \chi \equiv -\ln\Psi_o^{(0)}(x) \tag{5.48}$$

dir. En düşük enerjili durum olan $\Psi_o^{(0)}$'ın, sonlu x değerleri için düğümleri (node) bulunmadığından (5.48) deki ikinci bağıntı doğrudur. Şimdi aşağıdaki şekilde, yeni bir $H^{(1)}$ Hamiltonyeni kuralım:

$$H^{(1)} = Q^{-}Q^{+} = H^{(0)} + [Q^{-}, Q^{+}] = -\frac{1}{2}\partial^{2} + V^{(1)}(x)$$

$$V^{(1)}(x) = V^{(0)}(x) + \partial^{2}\chi \tag{5.49}$$

O zaman aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı hemen gösterilebilir :

$$H^{(1)} Q^{-} = Q^{-} H^{(0)}, \quad Q^{+} H^{(1)} = H^{(0)} Q^{+} \tag{5.50}$$

Bu bağıntılar sayesinde $H^{(1)}$ Hamiltonyenine ait tüm $\Psi_N^{(1)}$ dalga fonksiyonları, başlangıçtaki sistemin $\Psi_N^{(0)}$ dalga fonksiyonlarına (aynı enerjili) şu şekilde bağlanır :

$$\Psi_N^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{N+1}^{(0)}}} Q^{-} \Psi_{N+1}^{(0)}(x),$$

$$\Psi_N^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_N^{(0)}}} Q^{+} \Psi_{N-1}(x) \tag{5.51}$$

$N = 1, 2, ..$

$H^{(1)}$'in enerji spektrumu $H^{(0)}$'ınki ile tam olarak çakışır, fakat sadece $E_o^{(0)}$ taban durum enerjisi bulunmaz; yani

$$E_N(1) = E_{N+1}^{(0)} \quad N = 0,1,2,... ; \quad Q^{-} \Psi_o^{(0)} = 0$$

dir.

Tam olarak çözülebilir yeni potansiyellerin kurulmasını mümkün kılan bu yöntem, bu kez $H^{(1)}$ ve $\Psi_o^{(1)}$ ile başlayarak tekrarlanabilir. Böylece bir $V^{(n)}(x)$ potansiyeller dizisi elde edilir. Örneğin en basit kuyu potansiyelinden — $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 'de sonsuz yükseklikte duvarları olsun - başlayarak $V^n(x) = n(n+1)/2 \cos^2 x$ biçimindeki potansiyellere ait bağlı-durumların enerji spektrumu derhal bulunabilir.

Eşdeğer enerji spektrumuna sahip tek-boyutlu kuantum Hamiltonyenlerinin varlığı kuantum mekaniğindeki süpersimetri ile ilgilidir. Bunu göstermek için aşağıdaki matris Hamiltonyenini ele alalım ;

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H^{(0)} & 0 \\ 0 & H^{(1)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\partial^2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\partial\chi)^2 - \partial^2\chi & 0 \\ 0 & (\partial\chi)^2 + \partial^2\chi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q^+Q^- & 0 \\ 0 & Q^-Q^+ \end{pmatrix} \tag{5.52}$$

Ayrıca $\hat{Q}^+$ ve $\hat{Q}^-$ işlemlerini de şu şekilde tanımlayalım :

$$\hat{Q}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q^- & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{Q}^- = \begin{pmatrix} 0 & Q^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.53}$$

O zaman aşağıdaki eşitlikleri göstermek zor değildir :

$$\begin{gathered} \{\hat{Q}^+ , \hat{Q}^+\} = 0 = \{\hat{Q}^-, \hat{Q}^-\} \\ \{\hat{Q}^+ , \hat{Q}^-\} = \hat{H} \quad , \quad \{\hat{Q}^+ , \hat{H}\} = \{\hat{Q}^- \hat{H}\} = 0 \end{gathered} \tag{5.54}$$

Böylece yukarıdaki bağıntılardan görüldüğü gibi tümüyle bozonik olan H^+ ve H^- Hamiltonyenleri aslında, süperpotansiyeli 2χ ve süperyükleri ise $\hat{Q}^{\pm}$ olan $\hat{H}$ süpersimetrik Hamiltonyenleri bileşenleridir.

Çarpanlarına ayırma yönteminin daha yüksek uzay boyutlarına genelleştirilmesi ve süpersimetri ile olan ilişkisi çeşitli yazarlarca tartışılmıştır (Andrianov et.al. 1985, Gamboa ve Zanelli 1985). Burada bir noktaya dikkat çekmek isteriz. Herhangi bir d-uzay boyutunda verilmiş olan her Hamiltonyene karşılık bir eş Hamiltonyen kurulabilir öyle ki toplam sistem süpersimetriktir. Fakat bu durum, birleşik sistemin doğada mutlaka mevcut olduğu anlamına gelmez. Çarpanlarına ayırma yaklaşımı aslında, kuantum mekaniğinde bir ters saçılma yöntemi olarak kullanılır: bağlı-durum enerji düzeyleri hakkındaki bilgiden yararlanarak bir V(x) potansiyelinin bulunması. Örnek olarak kuarkonyum potansiyeli için yaklaşık bir ifadenin elde edildiği Kwong ve Rosner'in (1986) makalesini verebiliriz ; bağlı hallere ait verilerden tek bir şekilde belirlenebilen simetrik ve yansımasız potansiyeller bu yöntemle inşa edilmiştir (ayrıca bkz. Chaturvedi ve Raghunathan 1986).

Bu kesimde son olarak atom fiziğinde karşılaşılan fenomenolojik süpersimetriden sözedeceğiz (Kostelecky ve Nieto 1984, Fuchs 1985, Haymaker ve Rau 1986). Daha önce görmüş olduğumuz gibi SUSY kuantum mekaniğinin Hamiltonyeni $H_{ss} = H_+ \oplus H_-$ biçiminde yazılabilir. Burada H_+ ve H_- bozonik ve fermiyonik bileşenler olup bunlara karşı gelen V ve V_- potansiyelleri birbirinin süpersimetrik eşleridir. Öte yandan hidrojen atomuna ait radyal denklemi aşağıdaki gibi yazmak mümkündür (Kostecky ve Nieto, İbid) :

$$\left[- \frac{d^2}{dy^2} - E_n - \frac{1}{y} + \frac{\ell(\ell+1)}{y^2} \right] \chi_{n\ell}(y) = 0 \qquad (5.55)$$

Burada $E_n = 1/4n^2$, $y = (2me^2/\hbar^2)r$, $n \geqslant \ell + 1$ ve

$\chi_{n\ell} = R_{n\ell}\, y$ dir. $R_{n\ell}$ ise, alışılmış radyal denklemin çözümüdür (Schiff 1980). O zaman (5.55)'e karşı gelen V_ℓ bozonik potansiyeli

$$
\begin{aligned}
V_{+} &= \frac{1}{2} W^{2} - \frac{1}{2} W' \\
&= [\,2(\ell+1)]^{-2} - \frac{1}{y} + \frac{\ell(\ell+1)}{y^{2}}
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

olur. Şimdi hidrojen atomunun süpersimetrik eşini elde etmek istiyoruz (5.56)'nın çözümü aşağıdaki gibidir :

$$
W(y) = \frac{c}{\ell+1} - \frac{\ell+1}{y} \tag{5.57}
$$

Dolayısıyla $V_{+\ell}$'nin süpersimetrik eşi olan $V_{-\ell}$ için

$$
V_{-\ell} = [\,2(\ell+1)]^{-2} - \frac{1}{y} + \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{y^{2}} \tag{5.58}
$$

ifadesi elde edilir. Belli bir ℓ değeri için bu modelin fiziksel bir uygulamasının bulunup bulunmadığı sorulabilir. Bunun gerçekten mümkün olduğu Kostelecky ve Nieto tarafından gösterildi. Şöyle ki daha önce bu kesimin başlarında, taban durumunu hesaba katmazsak, $H_{-\ell}$ ve $H_{+\ell}$ 'nin spektrumlarının özdeş olduğunu belirtmiştik. Dolayısıyla önreğin $\ell = 0$ için H_{+} Hamiltonyeni, hidrojen atomunun s düzeylerini tasvir ederken onun süpersimetrik eşi olan H_{-0} ise 1s yörüngeleri olmayan bir sistemi, yani H_{+0} 'ın taban durumunun kaldırılmasıyla elde edilen sistemi tasvir eder. Fiziksel olarak bu dunum, elektronlarından ikisi 1s yörüngesinde olan lityum atomuna ait valans elektronunun s yörüngelerine karşı gelir. Öte yandan gerek elektron-elektron etkileşmeleri ve gerekse, valans elektronu ancak çekirdek elektronlarından uzaktayken üzerindeki etkin kuvvetin Coulomb tipinde olması nedeniyle süpersimetri gerçek dünyada kırılır. Daha yüksek ℓ -değerleri için problem aynı yazarlarca tartışılmıştır.

Son olarak bir noktaya değineceğiz. Verilen herhangi bir $H_{o} = H_{+}$ Hamiltonyeninin süpersimetrik eşi olan H_{-} her zaman kurulabilir; bununla birlikte H_{-} çoğunlukla H_{+}'dan oldukça farklıdır ve fiziksel bir uygulama alanına sahip değildir. Süpersimetrik hidrojen atomunu fiziksel olarak ilgi çekici kılan şey, bu sisteme ait w(q) süperpotansiyelinin (5.57) de görülen biçimidir. W(q)'nun bu özel ifadesi nedeniyle H_+ ve H_- arasındaki tek fark $1/y^2$ teriminin katsayısındadır. Dolayısıyla Denk.(5.55)'in süpersimetrik eşi olan radyal denklem, bir üst ℓ değeri yani $\ell \to \ell + 1$ için yazılan radyal denklemle çakışır. Bu nedenle V_+ , hidrojen atomunun ns durumlarını ($n \geqslant 1$) tasvir ederken V_-'nin özdeğerleri ise, öte yandan, np durumlarının ($n \geqslant 2$) enerjileri ile çakışır. Hidrojen atomunun ns ve np durumları ($n \geqslant 2$) arasındaki iyi bilinen dejenerelik nedeniyle sonunda Denk. 5.51'in altındaki paragrafta anlatılan süpersimetrik spektrum elde edilir (Rau 1986, Kostelecky ve Nieto 1986).

5.3. İki Boyutta Manyetik Alan İçerisindeki Elektron Probleminde Süpersimetri

Schrödinger'in çarpanlarına ayırma yöntemi ile süpersimetri arasındaki ilişki, koordinatlardan biri (diyelim z-ekseni) doğrultusundaki herhangi bir manyetik alan (düzgün ya da değil) içerisinde hareket eden elektron probleminde var olan fiziksel bir süpersimetrinin keşfine yol açtı (Crombrugghe ve Rittenberg 1983, Gendenshtein 1984 ve 1985, Khare ve Maharana 1984). Süpersimetri aynı zamanda göresiz Pauli denkleminde elektron için neden $g = 2$ alındığına ilişkin soruyu da yanıtlamaktadır. İyi bilindiği gibi elektronun jiromanyetik oranının bu değeri ancak relativistik Dirac denkleminden elde edilebilmektedir. Bununla birlikte bu kesimde göreceğimiz gibi Pauli Hamiltonyeninin süpersimetrik olmaya zorlanması, manyetik momentin değerinin Bohr magnetonuna eşit olmasını gerektirmektedir.

Şimdi z-ekseni doğrultusunda "iki-boyutlu" bir B_z manyetik alanını gözönüne alalım. B_z'nin diğer iki koordinata bağlılığı keyfi olsun; $B_z = B_z(x,y)$, $B_x = B_y = 0$. O zaman vektör potansiyel şu şekilde yazılabilir : $A_x = A_x(x,y)$, $A_y = A_y(x,y)$, $A_z = 0$. Böyle bir manyetik alan içerisinde hareket eden bir elektron için Pauli Hamiltonyeni

$$H = \frac{1}{2} \left(P_x^2 + P_y^2 + i\mu\sigma_3 [P_x , P_y] \right) \qquad (5.59)$$

biçimini alır. (Landau ve Lifshitz 1980). Burada $P_x = p_x - eA_x$, $P_y = p_y - eA_y$, σ_i'ler Pauli matrisleridir. μ, Bohr magnetonu cinsinden manyetik momenttir ve $\hbar = c = m = 1$ alınmıştır. Yukarıda z-yönündeki serbest hareketle ilgili $p_z^2/2m$ terimini ihmal ettik. Eğer parçacığın anormal manyetik momenti yoksa, yani $\mu = 1$ ise, o zaman (5.59) Hamiltonyeni aşağıdaki süpersimetri özelliğine sahiptir :

$$\{Q_i, Q_k\} = \delta_{ik} H \; ; \; [Q_i, H] = 0 \; ; \; i,k = 1,2 \qquad (5.60)$$

Burada süpersimetri jeneratörleri

$$Q_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 P_x + \sigma_2 P_y) \ , \quad Q_2 = \frac{1}{2}(\sigma_2 P_x - \sigma_1 P_y) \qquad (5.61)$$

dir.

Görüldüğü gibi süpersimetri, elektromanyetik alanla minimal etkileşme ilkesiyle yakından ilişkilidir ve yalnızca $\mu = 1$ halinde (yani $\mu = \mu_B$) (5.59)'da verilen Pauli Hamiltonyeni süpersimetrik bir yapıya sahiptir.

Antikomütatif iki hareket sabitinin - Q_1 ve Q_2 süperyükleri-bulunması, bütün enerji düzeylerinin ($E > 0$) iki kat dejenere olmasına yol açar. Bu durum, düzgün manyetik alandaki Landau enerji düzeylerinin iyi bilinen iki katdejenereliğinin bir genelleştirilmesidir (Landau ve Lifshitz, ibid). Dejenere durumlar - süpereşler - $Q_\pm = Q_1 \pm iQ_2$ süpersimetri jeneratörleri aracılığıyla birbirlerine dönüşür. Bu işlemciler spin yönü ile dalga biçiminin x ve y bağlılığını aynı anda değiştirir.

Öte yandan manyetik alan içerisindeki bir elektron için yazılan Dirac denkleminin de, negatif enerjili durumlar doldurulduktan sonra, $g = 2$ ile ilgili benzer bir süpersimetriye sahip olduğu Gendenshtein (1985) tarafından gösterildi.

Yine iki-boyutlu manyetik alanlar için Pauli ve Dirac Hamiltonyenlerinin çarpanlara ayrılabileceği, süpersimetri ile olan ilişkisine değinilmeden, ilk olarak Aharanov ve Casher (1979) tarafından gösterilmiştir. Ayrıca üç boyutta yukarıdakine benzer bir süpersimetri elde edebilmek için manyetik alanın belli bir pariteye, A(-r) $\vec{A}(-\vec{r}) = -\vec{A}(\vec{r})$, sahip olması gerekir (Gendenshtein 1985).

5.4. Süpersimetrik Kuantum Mekaniğindeki Diğer Gelişmeler

Son beş yıl içerisinde süpresimetrik kuantum mekaniği, diferansiyel geometriden denge-dışı (non-equilibrium) istatistik mekaniğe, nükleer fizikten diferansiyel denklemler teorisine kadar uzanan oldukça geniş bir alana umulanında da ötesinde yoğun bir biçimde uygulandı. Ayrıca normal kuantum mekaniğinde bazı süpersimetrik yapıların farkedilmesine ve yaklaşıklık yöntemlerinin iyileştirilmesine de yardımcı oldu. Bütün bu gelişmeleri burada ele almamız olanaksız olduğundan yalnızca bir kısmına kısaca değineceğiz : (i) nükleon-nükleon potansiyelinin uzun-menzil davranışını veren üç boyutlu kuantum mekaniksel süpersimetrik bir model Urrutia ve Hernandez (1983) tarafından önerildi. Bu modelin kuantum mekaniği ve ilgili saçılma rejimi daha sonra Olivio ve arkadaşlarınca incelendi (1985 a,b) (ii) iki-durumlu Fokker-Planck denkleminde denge durumuna yaklaşma hızını denetleyen ilk uyarılmış durum enerji özdeğeri SUSY kullanılarak hesaplandı (Bernstein ve Brown 1984) (iii) çift-çift ve çift tek çekirdeklerin uyarılmış enerji spektrumları SUSY kullanılarak birbirine bağlandı (Balantekin et.al. 1981 et.al.) (iv) Dirac monopol alanı ile yazılan Pauli Hamiltonyeninin OSP (1,1) dinamik konformal süpersimetrisine sahip olduğu gösterildi (D'Hoker ve Vinet 1984) (v) Atiyah-Singer indeks teoremi ve diğer bazı matematiksel sonuçlar SUSY kuantum mekaniğinden yararlanarak daha kolayca ispatlandı (Gaumé 1983, Windey 1985) (vi) Coulomb potansiyelindeki parçacıklar için spektrum üretici süpersimetriler inşa edildi (D'Hoker ve Vinet 1985) (vii) süperyükleri $Q_1 = d + d^{\star}$ ve $Q_2 = i(d - d^{\star})$ olan bir süpersimetrik kuantum mekaniği gözönüne alınarak Morse eşitsizliklerinin çıkartılabileceği gösterildi. Burada d ve $d^{\star}$ diferansiyellenebilir bir manifold üzerindeki dış türev ile onun düalidir (Witten 1982) (viii) bazı rastlantısal dejenerelik örneklerinin süpersimetri ile olan ilişkisi gösterildi. (Balantekin 1985) (ix) süpersimetri düşüncesinden

5.5. Süperuzayda Klâsik Mekanik

İyi bilindiği gibi dinamik teorilerin genel yapısı aşağdaki basit diyagramda görülen biçimdedir.

$$\begin{tikzcd}
& \text{Klâsik mekanik} \arrow[dl, "\hbar \neq 0"'] \arrow[dr, "N \to \infty"] & \\
\text{Kuantum mekaniği (Heisenberg resimi)} \arrow[dr, "N \to \infty"'] & \text{Schrödinger resimi} \arrow[r] & \text{Klâsik alan teorisi} \arrow[dl, "\hbar \neq 0"] \\
& \text{Kuantumlu alanlar teorisi} &
\end{tikzcd}$$

Şekil 5.2

Burada N, serbestlik derecesi sayısını, $\hbar$ da Planck sabitini göstermektedir. Klâsik mekanik, parçacıkların yörüngelerini ya $(q_1,q_2,\ldots, q_N)$ koordinat uzayında ya da (Lagrange formülasyonu) ya da $(q_1,\ldots, q_N,p_1, \ldots, p_N)$ faz uzayında (Hamilton formülasyon) tasvir eder. Temel Poisson parantezlerinin kanonik kuantizasyonu ile kuantum mekaniğine geçebiliriz:

$$\{q_i,p_j\} = \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad [q_i,p_j] = i\ \delta_{ij} \qquad (5.62)$$

Sonsuz sayıda serbestlik derecesine sahip klâsik bir sistem klâsik alan teorisi tarafından incelenir ve $\varphi(q_1,\ldots,q_N)$ klâsik alanı sonsuz boyutlu fonksiyon uzayında koordinat rolünü oynar. Kuantumlu alanlar teorisi, yine klâsik alanların kanonik kuantizasyonu ile elde edilebilir.

Klâsik fizikteki dinamik değişkenlerin tümü alıştığımız komütatif sayılar ile gösterilebildiğinden esasında bozoniktirler. Dolayısıyla relativistik olmayan bozonik teori halinde Şekil 5.2 daha fazla bir yorum gerektirmez. Bununla birlikte fiziksel açıdan önemli olan şu iki genelleştirmeyi düşünebiliriz :

- relativistik dinamik sistemlere genişletme
- fermiyonik serbestlik derecelerinin katılması.

Birinci halde $(x_i, p_i) \rightarrow (x_\mu, p_\mu)$ $(\mu = 0,1,2,3)$ değişimi yapılır, fakat bilindiği gibi relativistik faz uzayı değişkenleri olan (x ,p) kısıtlanmıştır. Bununla birlikte kısıtlı Hamilton sistemlerinin kuantizasyonu üzerine Dirac'ın (1964) çalışmasıyla birlikte bu kısıtlamaları da kapsayacak tarzda relativistik sistemleri tasvir edebilecek bir klâsik mekaniğin ya da kuantum mekaniğinin açıkça kovaryant bir formalizminin oluşturulması yolunda önemli adımlar atıldı (Sudarshand ve Mukunda 1974, Hanson et.al. 1976, Llosa 1981, Sundermeyer 1982, Longhi ve Lusanna 1987).

Öte yandan fermiyonik serbestlik derecelerini de içerecek şekilde bir mekanik formüle etme girişimleri oldukça eskilere gider ve Dirac elektronunun klasik modelinin inşasıyla ya da relativistik klâsik topaç problemi ile yakından ilgilidir. Spin-0 parçacıklar için yazılan Klein-Gordon denkleminin tersine Dirac denklemi yalnız kuantum teorisinde mevcuttur. Klâsik bir teorinin kuantumlanması yoluyla şimdiyedek elde edilememiştir. Bu güçlüğün temelinde yatan esas sorun şudur: alışılmış bozonik değişkenleri kullanarak klâsik bir noktasal parçacığın spin serbestlik derecelerini tasvir edebilecek tutarlı bir teori nasıl inşa edilebilir ?

Bu çıkmazdan bir çıkış yolu, antikomütatif Grassman değişkenlerinin bu amaçla kullanılabileceğini gösteren Martin (1959) tarafından önerildi. Bu yaklaşım daha sonraları pseudoklâsik mekaniğinin gelişimine önayak oldu. Pseudoklâsik mekanik Casolbuoni ve arkadaşlarınca geniş ölçüde incelenmiştir (Casalbuoni 1976).

Bunun relativistik klâsik mekaniğine genelleştiribileceği ise Berezin ve Marinov (1977) tarafından gösterildi.

Bu teoriler kuantumlandığında Grassmann spin değişkenleri, alışılmış spin matrisleriyle temsil edilebilen işlemcilere dönüşmektedir. Önemli bir diğer gözlem de şudur : süpersimetrinin belli bir realizasyonu ile spinli parçacıklar için böyle bir pseudoklâsik mekaniğin inşa edilebileceği Brink ve arkadaşlarınca gösterildi (Brink et.al. 1977). Kütleli parçacıklar için bu tür bir formülasyon ne yazık ki çok karmaşık bir hal almakta ve tam bir tasvir için beşinci bir boyuta gerek duyulmaktadır. Daha sonraları kütleli ve spinli relativistik bir parçacık için basit fakat global süpersimetrik bir Lagranjiyen Di Vecchia ve Ravndal tarafından önerildi (1979). Bu formülasyonu ileride ayrıntılı olarak tartışacağız. Fakat daha önce antikomütatif değişkenleri içeren sistemler için kanonik formalizmi sunmakistiyoruz. Böylece kuantumlama sonucunda SUSY kuantum mekaniğini verecek olan, süpersimetrik klâsik mekaniği formüle etmemiz mümkün olacaktır (Galvao ve Teitelboim 1980, Biswas ve Koni 1986, Katz 1986, Barcelos-Neto et.al. 1987, Volkov et.al. 1987).

Şimdi yalnızca q_i bozonik (çift) koordinatları ve $\dot{q}_i$ hızlarına değil aynı zamanda $\theta\alpha$ fermiyonik (tek) koordinatlarıyla $\dot{\theta}\alpha$ hızlarına da bağlı olan $L\,(q_i,\dot{q}_i,\theta\alpha,\dot{\theta}\alpha)$ gibi klâsik bir Lagranjiyeni gözönüne alalım. Hareket denklemlerini, her zaman olduğu gibi bir eylem fonksiyonelinin varyasyonundan çıkartabileceğimizi varsayalım :

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(q\ ,\dot{q}\ ,\theta^{\alpha},\dot{\theta}^{\alpha})\ d\tau \qquad (5.63)$$

Bir değişkenin çift ya da tek olma özelliğinin dinamik evrim boyunca korunmasını sağlamak için Lagranjiyenin çift olarak alınması gerekir. Antikomütatif değişkenlere göre sol türevleri benimseyelim, böylece;

$$\delta f(\theta) = \delta\theta^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial\theta^{\alpha}} \tag{5.64}$$

olur ve $\delta\theta^{\alpha}$ solda yer alır.

Kanonik momentum her zaman olduğu gibi şu şekilde tanımlanır :

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad \pi^{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{\alpha}} \tag{5.65}$$

Dolayısıyla Euler-Lagrange denklemlerini

$$\frac{dp^i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{d\pi^{\alpha}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \theta_{\alpha}} \tag{5.66}$$

biçiminde yazabiliriz. Böyle bir sistem için kanonik Hamiltonyen şu şekilde verilir :

$$H = \dot{q}_i p_i + \dot{\theta}_{\alpha} \pi^{\alpha} - L \tag{5.67}$$

Buradan

$$\delta H = \dot{q}_i \delta p_i + \dot{\theta}_{\alpha} \delta\pi^{\alpha} - \delta q_i \frac{\partial L}{\partial qi} - \delta\theta^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \pi^{\alpha}} \tag{5.68a}$$

$$= \dot{q}\, \delta p_i + \dot{\theta}_{\alpha} \delta\pi^{\alpha} - \delta q_i \dot{p}_i - \delta\theta^{\alpha} \dot{\pi}_{\alpha} \tag{5.68b}$$

yazarak aşağıdaki Hamilton hareket denklemlerini elde edebiliriz :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial pi} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial qi} \tag{5.69a}$$

$$\dot{\theta}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \pi^{\alpha}} \quad , \quad \dot{\pi}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial \theta^{\alpha}} \tag{5.69b}$$

Şimdi, hem bozonik hem de fermiyonik değişkenlere bağlı olan bozonik karakterde herhangi bir $B(q_i, p_i, \theta\alpha, \pi\alpha)$ fiziksel niceliği verilmiş olsun. Zamana göre B'nin değişimini şu şekilde yazabiliriz :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial q_i} \dot{q} + \frac{\partial B}{\partial p_i} \dot{p}_i + \dot{\theta}_\alpha \frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha} + \dot{\pi}_\alpha \frac{\partial B}{\partial \pi_\alpha} \tag{5.70}$$

$$= \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \pi_\alpha} \frac{\partial H}{\partial \theta^\alpha}$$

Şimdi

$$\dot{B} = \{B\ ,\ H\}$$

olmasını isteyerek F ve G gibi iki nicelik için genelleştirilmiş Poisson parantezini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz :

$$\{F,G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}\right) + \epsilon_F \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial G}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha} \frac{\partial G}{\partial \theta^\alpha}\right)$$

Burada ϵ_F, F'nin çift ya da tek olmasına göre +1 veya -1 değerlerini alır. Genelleştirilmiş bu parantez, alışılmış Poisson parantezinin sahip olduğu cebirsel özellikleri dereceli bir tarzda sağlar :

$$\{F,G\} = -(-1)^{fg} \{G,F\} \tag{5.73a}$$

$$\{F,GH\} = \{F,G\}H + (-1)^{fg} G \{F,H\} \tag{5.73b}$$

$$\{F,G+H\} = \{F,G\} + \{F,H\} \tag{5.73c}$$

$$\{F, \{G,H\}\} + (-1)^{f(g+h)} \{G, \{H,F\}\} + (-1)^{h(f+g)} \{H, \{F,G\}\} = 0 \tag{5.73d}$$

Yukarıda F,G ve H'nin bozonik ya da fermiyonik olmasına göre f,g ve h sırasıyla 0 veya 1 değerleri alır.

Kısıtlanmış Hamilton sistemleri için Dirac parantezi ise, normal halde olduğu gibi verilir :

$$\{F,G\}^\star = \{F,G\} - \{F, \chi_m\} C^{-1}_{mn} \{\chi_n, G\} \tag{5.74}$$

Burada χ'ler ikinci sınıf kısıtlamalardır ve C_{mn} de kısıtlamalar arasındaki Poisson parantezlerini temsil eden matristir.

Şimdi özel bir hal olan temel Poisson parantezlerini yazalım :

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= 0 = \{p_i, p_j\} \quad , \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \\ \{\theta_\alpha, \theta_\beta\} &= 0 = \{\pi_\alpha, \pi_\beta\} \quad , \quad \{\theta_\alpha, \pi_\beta\} = -\delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{5.75}$$

Daha önce Kesim 5.1.'de $0+1$ boyutta süperalan tekniklerini kullanarak süpersimetrik kuantum mekaniği için Lagranjiyeni elde etmiştik. Şimdi de Poisson parantezlerini kullanarak süpersimetrik klâsik lagranjiyenin çıkartılışını verelim. SUSY kuantum mekaniğine, her zaman olduğu gibi kanonik kuantizasyon ile geçilebilir.

Süpersimetrik klâsik mekaniğin Hamiltonyeni için şu ifadeyi varsayalım :

$$H = \frac{1}{2} \{Q , \bar{Q}\}_p \tag{5.76}$$

Burada

$$\{Q , Q\}_p = \{\bar{Q} , \bar{Q}\}_p = 0 \tag{5.77}$$

olsun.

Yukarıda Q'yu, SUSY kuantum mekaniğindeki süperyük işlemcisinin klâsik limiti olarak düşünebiliriz. Denk. (5.76)'nın Denk. (5.5)'e tam olarak özdeş olduğunu görmekteyiz fakat bu kez antikomütatörlerin yerini Poisson parantezi almıştır. Şimdi Poisson parantezi ile ifade edilen

$$\dot{Q} = \{Q, H\}_p = \frac{1}{2} \{Q, \{Q, \bar{Q}\}\} \tag{5.78}$$

hareket denklemini hesaplayalım. (5.73d) Jacobi özdeşliği ile (5.77) bağıntısını kullanarak yukarıdaki denklemin sağ tarafı

$$\dot{Q} = -\frac{1}{2}\{Q, \{Q,\bar{Q}\}\} = -\dot{Q} \qquad (5.79)$$

şeklinde indirgenir. Bu ise $\dot{Q} = 0$ olduğunu söyler. Böylece süperyüklerin korunumu elde edilmiş olmaktadır :

$$\{Q,H\}_p = \{\bar{Q},H\}_p = 0 \qquad (5.80)$$

Faz uzayı değişkenleri olan q, θ, p ve π cinsinden Q ve $\bar{Q}$ için aşağıdaki ifadeleri alalım :

$$Q = [p-iW(q)]\,\theta \qquad (5.81a)$$

$$\bar{Q} = [p+iW(q)]\,\pi \qquad (5.81b)$$

O zaman genelliştirilmiş Poisson parantezinin cebirsel özelliklerinden yararlanarak (5.77)'nin sağlandığını kolaylıkla gösterebiliriz. Nihayet (5.73b) ve (5.75)'i kullanarak H için açık bir ifade elde edilebilir ;

$$H = \frac{1}{2}\{Q,\bar{Q}\}_p$$

$$= \frac{1}{2}\{A^\star, A\,\pi\}_p = \frac{1}{2}A^\star A\{\theta,\pi\}_p + \frac{1}{2}\theta\pi\{A,A^\star\}_p$$

$$= \frac{1}{2}\left(p^2 + W^2 - 2i\theta\pi\,\frac{dW}{dq}\right) \qquad (5.82)$$

Bunun ise (5.16) daki ifade ile tamamen uyuştuğu görülmektedir.

5.6. Dış Alanla Etkileşen Süpersimetrik Dirac Parçacıkları

Bu kesimde spinli klâsik parçacıkların dinamiğini süpersimetri açısından inceleyeceğiz. Önceki kesimde belirttiğimiz gibi spinli parçacıklar için klâsik modeller kurma girişimleri oldukça eskilere dayanır. Çeşitli klâsik Lagranjiyenler önerilmiştir, fakat Di Vecchia ve Ravndal'ınki (1979) içlerinde en başarılı olanıdır. Herşeyden önce hem basit hem de öngörücü kapasiteye sahiptir. Global süpersimetrik olan bu Lagranjiyen, dış eletromanyetik ya da gravitasyonel alanla minimal çiftlenim ilkesinin geçerliliğini koruduğu yegâne modeldir. (Ravndal 1980, Rumpf 1982). Daha da önemlisi, bu çiftlenimlerin süpersimetri tarafından tek bir şekilde belirleniyor olmasıdır. Şimdi bu modeli tartışalım.

Spinli serbest bir parçacık için önerilen Lagranjiyen aşağıdaki gibidir:

$$L = \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}(\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} - i\xi^{\mu}\xi^{\nu}) \qquad (5.83)$$

Burada $x^{\mu}(s)$ parçacığın alışılmış konum koordinatları ve $\eta_{\mu\nu}$ de pozitif imzalı Minkowski metriğidir. Parçacığın ayrıca dört tane ξ (s) spin koordinatı vardır. ξ^{μ}'ler antikomütatif Grassmann değişkenleridir :

$$\{\xi_{\mu}, \xi_{\nu}\} = 0 \qquad (5.84)$$

Dolayısıyla herbirinin karesi sıfırdır. Kanonik momentumlar ise

$$P_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{1}{2}\dot{x}^{\mu}, \qquad \xi_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^{\mu}} = \frac{1}{4}i\xi_{\mu} \qquad (5.85)$$

dır. Hamiltonyen için böylece aşağıdaki ifade elde edilir :

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}^{\mu} P_{\mu} + \dot{\xi}^{\mu}\xi_{\mu} \\ &= P^2 \end{aligned} \qquad (5.86)$$

Hareket denklemleri de

$$\ddot{x}_{\mu} = 0 \qquad (5.87a)$$

$$\dot{\xi}_{\mu} = 0$$

olur. (5.83) Lagranjiyeni için korunan özel bir büyüklük vardır. Hareket denklemlerini kullanarak

$$Q = \xi^{\mu}\, p_{\mu} \qquad (5.88)$$

niceliğinin parçacık yörüngesi boyunca sabit kaldığı kolayca gösterilebilir. Ayrıca $Q^2 = 0$ dır. Korunan bu yeni büyüklük Lagranjiyendeki özel bir simetriden kaynaklanır. Aşağıdaki dönüşümler altında L bir diverjans kadar değişir:

$$\delta x_{\mu} = i\epsilon\xi_{\mu} \qquad (5.89a)$$

$$\delta\xi_{\mu} = \epsilon\dot{x}_{\mu} \qquad (5.89b)$$

Burada ϵ antikomütatif bir sayı olup $\epsilon^2 = 0$ dır. Spin ve konum değişkenlerini karıştıran bu dönüşüm bir süpersimetri dönüşümüdür. Dolayısıyla süpersimetriyi açıkça gösteren daha kompakt bir ifade ile Lagranjiyeni yeniden yazabiliriz. Bu amaçla $X_{\mu}(s,\theta)$ süperkonum değişkenini aşağıdaki gibi tanımlayalım :

$$X_{\mu}(s,\theta) = x_{\mu}(s) + i\theta\xi_{\mu}(s) \qquad (5.90)$$

Burada θ bir Grassmann parametresidir. Q süpersimetri jeneratörü ve D kovaryant türevi için kesim 5.1.'deki argümanları izleyerek şu ifadeleri yazabiliriz :

$$Q = \theta\frac{\partial}{\partial s} + i\frac{\partial}{\partial\theta} \quad , \quad D = \theta\frac{\partial}{\partial s} - i\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (5.91)$$

O zaman (5.83) Lagranjiyeni aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir :

$$L = \frac{1}{4}\int d\theta\, \eta_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu} DX^{\nu} \qquad (5.92)$$

Lagranjiyende, süperdeğişkenlerin sadece bir çarpımının bulunması ve en yüksek bileşen olan ξ_μ'nün bir türeve dönüşmesi nedeniyle eylem süpersimetri dönüşümleri altında invaryanttır.

Spinli bir parçacığın $A_\mu(x)$ elektromanyetik potansiyeli içerisindeki hareketini tasvir edebilmek için minimal yerleştirme ilkesinden yararlanmak istiyoruz. Fakat $x_\mu \to x_\mu + eA_\mu$ biçimindeki alışılmış reçete süpersimetriyi bozar. Dolayısıyla dış alanla etkileşmeyi doğru bir şekilde verebilmek için (5.92) Lagranjiyeninde

$$X_\mu \to X_\mu + 4e\, A_\mu\,(X) \tag{5.93}$$

yerleştirmesini yapacağız. Sonuçta ele geçecek teorinin süpersimetrik kaldığını biraz ileride göstereceğiz. Yukarıda

$$A_\mu(X) = A_\mu(x) + i\theta\xi^\nu\, A_{\mu,\nu} \tag{5.94}$$

dir. Böylece süpersimetri, elektromanyetik alanla çiftlenimi tek bir şekilde belirlemektedir.

Lagranjiyenin etkileşme kısmı aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned} L_{em} &= e\int d\theta\, A_\mu(X)\,D\,X^\mu \\ &= e(A_\mu\,\dot{x}^\mu + i\xi^\mu\xi^\nu\, A_{\nu,\mu}) \\ &= e(A_\mu\,\dot{x}^\mu + S^{\mu\nu}\, F_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{5.95}$$

Burada

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, i\, \xi_\mu\xi_\nu = \frac{1}{4} i\, [\xi_\mu\, ,\xi_\nu] \tag{5.96}$$

spin açısal momentumdur. Hareket denklemleri şu biçimi alır :

$$\dot{\xi}_\mu = 2e\, F_{\mu\nu}\xi^\nu \tag{5.97a}$$

$$\ddot{x}_\mu = 2eF_{\mu\nu}\,\dot{x}^\nu + 2eS^{\lambda\nu}\, F_{\lambda\nu,\mu} \tag{5.97b}$$

Şimdi (5.93) deki minimal yerleştirme yapıldıktan sonra (5.92) Lagranjiyeninin süpersimetrik kaldığını açık olarak gösterelim. (5.89 a-b) dönüşümleri altında L şu şekilde değişir ;

$$\delta L = \frac{1}{4}\, i\epsilon\, \frac{\partial}{\partial s}\, [(\dot{x}_\mu + 4eA_\mu)\xi^\mu] + \frac{1}{2}\, i\epsilon\, e\, \xi^\mu \xi^\nu \xi^\lambda F_{\mu\nu,\lambda} \qquad (5.98)$$

Yukarıdaki son terimin sıfır olduğu, ξ 'lerin antikomütatifliği ile aşağıdaki Maxwell denkleminden yararlanarak derhal gösterilebilir;

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} = 0 \qquad (5.99)$$

Dolayısayla L'deki değişim bir toplam diverjanstır. Buna karşı gelen Q korunan büyüklüğü Noether teoreminden bulunabilir :

$$i\epsilon Q = \delta x^\mu p_\mu + \delta\xi^\mu \xi_\mu - \frac{1}{4}\, i\epsilon\, (\dot{x}_\mu + 4eA_\mu)\xi^\mu \qquad (5.100)$$

$$= \frac{1}{2}\, i\epsilon\, \dot{x}_\mu \xi^\mu$$

(5.97a-b) hareket denklemlerini kullanarak $\dot{Q} = 0$ olduğu kolayca görülür.

Spinli parçacıkların bu süpersimetrik teorisi kanonik yöntemlerel kuantize edilebilir (Ravndal 1980) :

$$[x_\mu, x_\nu] = i\eta_{\mu\nu} \qquad , \{\xi_\mu \xi_\nu\} = -2\eta_{\mu\nu} \qquad (5.101)$$

Böylece kuantumlu spin değişkenleri alışılmış Dirac matrisleriyle gösterilebilir :

$$\xi_\mu = \gamma_\mu \qquad (5.102)$$

Parçacığın spini de

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\, i[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{1}{2}\, \sigma_{\mu\nu} \qquad (5.103)$$

biçimini alır. Bu ise onun bir 1/2-spinli parçacık olduğunu söyler.

Gravitasyonel bir alanda hareket eden spinli parçacık problemi de aynı referansda incelenmiştir. Etkileşmeyi elde edebilmek üzere Lagranjiyende bu kez şu şekilde bir minimal yerleştirmeye gidilmiştir :

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \quad (X) \tag{5.104}$$

$g_{\mu\nu}$ için aşağıdaki Taylor açılımı yapılırsa

$$g_{\mu\nu} \quad (X) = g_{\mu\nu} \quad (x) + i\theta\xi^{\lambda} \; g_{\mu\nu,\lambda} \tag{5.105}$$

o zaman Lagranjiyenin yeni ifadesi

$$L = \frac{1}{4} \int d\theta g_{\mu\nu} \quad (X) \; \dot{X} \; D \; X^{\nu} \tag{5.106}$$

şeklini alır. Hareket denklemi ise aşağıdaki gibidir (bkz Ravndal ibid) :

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \; \dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = -R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}\dot{x}^{\mu} S^{\alpha\beta} \tag{5.107}$$

Burada $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ ve $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ sırasıyla Christoffel sembolü ve Riemann eğrilik tensörüdür. Denk. (5.107) ise iyi bilinen Papapetrou denklemidir. Kütle çekimi ile çiftlenim süpersimetrik kılınmasaydı sonuçta Papapetrou denkleminine ulaşılamıyacağına dikkat çekmek isteriz.

Bu kesimde değinmek istediğimiz son nokta koordinat kavramının (5.50)'da verilen genelleştirilmesi üzerinedir. Grassmann spin değişkenlerinin, kuantum mekaniksel "zitterbewegung"un klâsik koordinatları olarak yorumlanabileceği Ravndal tarafından gösterilmiştir. Zitterbewegung etkisini hesaba katarak elektronun klâsik bir teorisi Barut ve arkadaşlarınca daha önce de geliştirilmişti; onlar süpersimetri özelliğine değinmeksizin spin serbestlik dereceleri için spinörleri kullanmışlardır. İnşa ettikleri model, kanonik ve yol integrali kuantizasyonu anlamında Dirac denklemine bire bir karşı gelir (Barut ve Zanghi 1984, Barut ve Duru 1984). Genel eğri bir uzaya bu modelin genelleştirilmesi daha sonra Barut ve Pavsic (1987) tarafından verilmiştir.

6. SÜPERSİMETRİK ve RELATİVİSTİK İKİ-CİSİM SİSTEMLERİ

6.1. Nükleon-Nükleon Tipi Etkileşmeler ve İlgili Süpersimetri

Son yıllarda üç boyutlu iki-parçacık sistemlerine süpersimetrinin uygulanabileceği düşüncesi bazı yazarlar tarafından tartışıldı. Bunların içerisinde, Urrutia ve Hernandez'in (1983) önerdikleri modele daha önce Kesim 5.4.'de değinmiştik. Bu aslında üç boyutta bir süpersimetrik kuantum mekaniği modelidir ve nükleon-nükleon potansiyelinin uzak-menzil davranışını başarıyla verir. Böylece bir bakıma bu modeli relativistik olmayan iki-cisim problemin süpersimetrik genelleştirilmesi gibi görebiliriz. Bu örnekte tartışılan süpersimetri, kuantum mekaniğindeki alışılmış komütasyon bağıntısını sağlayan $\vec{x}$ ve $\vec{p}$ işlemcilerini, spin ve iç değişkenler cinsinden ifade edilen bir antikomütasyon bağıntısı ile tanımlanan $\vec{\xi}$ ve $\vec{\xi}^{+}$ işlemcilerine bağlar. Bir başka deyişle, Schwinger'in (1970) kuantum mekaniksel anlatımını kullanırsak, bu modeldeki süpersimetri, birinci tür tamamlayıcı değişkenleri ikinci tür değişkenlerle karıştırır. Şimdi Kesim 5.1. de incelemiş olduğumuz SUSY kuantum mekaniğinin ışığında bu modeli kısaca tartışalım.

Üç boyutta iki-parçacık sistemleri halinde Q ve Q^+ jeneratörleri şu şekilde kurulabilir (Urrutia ve Hernandez, ibid) :

$$Q = (p - iV\vec{x}).\vec{\xi} \quad , \quad Q^+ = (\vec{p} + iV\vec{x})\,\vec{\xi}^{+} \qquad (6.1)$$

Burada $\vec{x}$ ve $\vec{p}$ alışılmış hermitik konum ve momentum işlemcileridir. Öte yandan hermitik olmayan ξ_k (k = 1,2,3) işlemcileri x_i ve p_i ile yer değiştirir ve aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar :

$$\xi_k^2 = 0 \quad , \quad \{\xi_k \, , \, \xi_\ell^+\} = \delta_{k\ell} \qquad (6.2)$$

Sonuçta ulaşacağımız Hamiltonyenin fiziksel bir yorumunun bulunması için ξ_k işlemcileri şu şekilde realize edilebilir :

$$\xi = \frac{1}{2} (A \otimes \vec{\sigma}^{(1)} + iB \otimes \vec{\sigma}^{(2)}) \qquad (6.3)$$

Burada $\vec{\sigma}^{(1)}$ ve $\vec{\sigma}^{(2)}$ birbirinden bağımsız iki takım Pauli matrisidir A ve B ise sistemin iç uzayında işlem görürler ve

$$A^2 = B^2 = 1 \quad , \quad A,B = 0 \qquad (6.4)$$

dir. Böylece (6.2) eşitlikleri sağlanır. A ve B için en basit gösterim olarak

$$A = \rho_1^{(1)} \times \rho_3^{(2)} \quad , \quad B = \rho_2^{(1)} \times I^{(2)} \qquad (6.5)$$

alınabilir. Yukarıda $\rho^{(1)}$ ve $\rho^{(2)}$, farklı iç uzaylarda işlem gören ve (6.3)'dekilerden ayrı iki takım bağımsız Pauli matrisleridir. İşlemciler için yukarıda verilen bu özel gösterimi kullanarak $H = \frac{1}{2} \{Q,Q^+\}$ Hamiltonyeni için aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz ;

$$H = \frac{1}{2} \vec{p}^2 + r^2V^2 + C[\, V\vec{\sigma}^{(1)} . \vec{\sigma}^{(2)} + r \frac{dV}{dr} (\vec{\sigma}^{(1)} . \vec{r}) (\vec{\sigma}^{(2)} . \vec{r})] \qquad (6.6.)$$

Burada $C = C^{(1)} C^{(2)}$, $C^{(1)} = \rho_3^{(1)} \otimes I^{(2)}$ ve

$C^{(2)} = I^{(1)} \otimes \rho_3^{(2)}$ dır. (6.6) Hamiltonyeni ile tasvir edilen sistemin yorumu açıktır ki şu şekildedir : Relatif koordinatları ve momentumları sırasıyla x ve p işlemcileri olan iki tane spin-spin ve tensör potansiyelleri aracılığıyla karşılıklı olarak bu iki parçacık etkileşmektedir. Bundan başka herbir parçacık, $C^{(i)}$ $(i = 1,2)$ işlemcilerinin özdeğerleriyle verilen ± 1 şeklindeki iç kuantum sayılarına sahiptir. Bu kuantum sayıları etkileşme terimine yalnızca $C^{(1)} C^{(2)}$ çarpımı ile girer. (6.6) Hamiltonyeni ile ilgili süpersimetri merkezcil, spin-spin ve tensör etkileşmelerinde uzaya-bağlı katsayıların V (r) süperpotansiyelince belirlenmesinden ve ayrıca herbir $C^{(i)}$ için bir iç uzay bulunmasından kaynaklanır.

Süperpotansiyel için

$$V = -2m_{\pi}\tau \left(\frac{g^2}{4\pi}\right) \frac{e^{-x}}{x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \qquad (6.7)$$

seçimi yapılır ve böylece ele geçen etkin potansiyelin uzak-menzil davranışı gözönüne alınırsa (yani r^2V^2 terimi ihmal edildiğinde) $\tau = \tau^{(1)} \cdot \tau^{(2)} = -3$, 1 izospin kanallarından herbiri için nükleon-nükleon potansiyelinin uzak-menzil kısmının tam olarak elde edildiği Urrutia ve Hernandez tarafından gösterildi (İbid). Denk. (6.7)'de m_{π}, pion kütlesini g de pion-nükleon çiftlenim sabitini göstermektedir ve $x = m_{\pi} r$ dir. Bununla birlikte nükleon-nükleon potansiyelinin tamamı süpersimetriyi kırmalıdır. Zira bu potansiyel döteron bağlı halini verir ki pozitif "semi-definite" süpersimetrik Hamiltonyen ile bu mümkün değildir. Bu modelde süpersimetrinin kendiliğinden kırılması daha sonra D'Olivio ve arkadaşlarınca tartışıldı (1985). Böyle olmakla birlikte döteron bağlanma enerjisi anormal bir şekilde düşüktür dolayısıyla çekirdek kuvvetlerinin uzak-menzil kısmını doğadaki süpersimetrinin bir göstergesi olarak yorumlayabiliriz.

6.2. Süperalan Teorilerinde Bethe-Salpeter Denklemi

İyi bilindiği gibi kuantumlu alanlar teorisi çerçevesinde relativistik iki-cisim problemini incelemek için genellikle Bethe-Salpeter denklemi kullanılır. Kesim 3.1'de bu denklemi tartışmıştık. Şimdi, elemanter alanların skaler olduğu ve yine kütlesiz bir skaler alanın değiş tokuşuna karşı gelen bir çekirdek ile yazılan en basit BS denkleminin süpersimetrik bir genelleştirmesini vermek istiyoruz.

Aşağıdaki Lagranjiyeni gözönüne alalım ;

$$L = \frac{L}{4}\,(\bar{D}\,D)\left(\frac{1}{2}\,\phi^{+}\bar{D}\,D\,\phi^{-} + \frac{1}{2}\,\phi^{-}\,\bar{D}\,D\,\phi^{+} - m\,\phi^{+2} - m\,\phi^{-2}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\,(\bar{D}\,D)\left(\frac{1}{2}\,\chi^{+}\,\bar{D}\,D\chi^{-} + \frac{1}{2}\,\chi^{-}\bar{D}\,D\chi^{+} - \mu\chi^{+2} - \mu\chi^{-2}\right)$$

$$- \frac{1}{4}\,(\bar{D}\,D)(\phi^{+2}\,\chi^{+} + \phi^{-2}\,\chi^{-}) \qquad (6.8)$$

Bu Lagranjiyen kütleleri m ve μ olan ve üçlü olarak etkileşen ϕ ve χ gibi farklı iki chiral süperalanı tasvir eder. $\mu = 0$ için (6.8) ifadesi Wick-Cutkosky modelinin süpersimetrik genelliştirilmesini verir. χ alanının değiş tokuşu nedeniyle ϕ^2 kanalında ortaya çıkan $|\Psi\rangle$ bağlı-durumları ile ilgileniyoruz. Dolayısayla ϕ'nin "chiralite" sine bağlı olarak analiz edilmesi gereken dört çeşit BS genliği sözkonusudur.

$$\Psi\ (x_1 x_2 ; \theta_1, \theta_2) = \langle 0 |\ \phi^{\alpha}(x_1, \theta_1)\ \phi^{\beta}\ (x_2, \theta_2) | \Psi\rangle \qquad (6.9)$$

Burada $\alpha, \beta = +, -$ dir.

Bethe-Salpeter çekirdeğinde (kernel) karşımıza çıkan serbest χ propagatörleri aşağıdakilerdir (Wess ve Bagger 1982)

$$< 0 \,|T\{\chi^{\pm} (x_1,\theta_1)\, \chi^{\pm} (x_2,\theta_2)\}\, |0 > \equiv i\, \Delta_{\pm\pm} (x_1,\theta_1;x_2,\theta_2)$$

$$= -i_{\mu}\delta\, (\theta_1-\theta_2)\exp\, [\, i(\theta_1\sigma_m\theta_1-\theta_2\sigma^m\theta_2)\, \partial_m^{x_1}]\, \Delta_F\, (x_1-x_2)$$

ve

$$< 0 \,|T\, \{\chi^{\pm} (x_1,\theta_1)\, \chi^{\mp} (x_2,\theta_2)\}\, |0 > \equiv i\, \Delta_{\pm\mp} (x_1,\theta_1;x_2,\theta_2)$$

$$= i_{\mu}\, \delta\, (\theta_1-\theta_2)\exp\, [\, -i(\theta_1\sigma^m\theta_1 - \theta_2\sigma^m\theta_2)\partial_m^{x_1}]\, \Delta_F(x_1-x_2) \qquad (6.10)$$

Burada Δ_F, Feynman propagatörütür ;

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{\Box - \mu^2} \qquad (6.11)$$

(6.8) Lagranjiyeninden elde edilen hareket denklemleri ise

$$\bar{D}\, D\, \emptyset^{\pm} = 2m\, \emptyset^{\mp} \quad 2g\, \emptyset^{\mp}\, \chi^{\mp} \qquad (6.12)$$

dir Şimdi (6.9)'daki $\Psi^{\alpha\beta}$ (1,2)'nin üzerine $(\bar{D}\,D)_1$ $(\bar{D}\,D)_2$'yi etki ettirir ve kütleli "chiral" süperalanların yukarıdaki hareket denklemlerini kullanırsak BS dalga biçimleri için şu denklemleri buluruz :

$$(\bar{D}\,D)_1\, (\bar{D}\,D)_2\Psi^{\pm\pm}\, (1,2) = 4[\, m^2 + g^2\, \Delta_{\pm\mp}\, (1,2)]\, \Psi^{\mp\mp}\, (1,2)$$

$$(\bar{D}\,D)_1\, (\bar{D}\,D)_2\Psi^{\pm\mp}\, (1,2) = 4[\, m^2 + g^2\, \Delta_{\pm\mp}\, (1,2)]\, \Psi^{\mp\pm}\, (1,2) \qquad (6.13)$$

Bunlar ise homojen Bethe-Salpeter denklemlerinin süpersimetrik genelleştirilmeleridir. Bağlı hal problemlerinde kullanılabilmeleri için kütle merkezi değişkenlerine ait gereksiz tüm kinematik öğeleri BS dalga fonksiyonundan ayırmak gerekir. Delbourgo ve Jarvis'in bir makalesinde

(1975) bu işlem yapılmış ve fermiyon-antifermiyon bağlı-durum problemine ilişkin denklem, (6.13)'den elde edilmiştir. Burada tartışmış olduğumuz model çok özel bir haldir zira çekirdek, kütlesiz chiral süperalanla sınırlıdır. Fakat buradaki yöntemi ayar vektör süperalanlarını da kapsayan çekirdeklere genellemek mümkündür. Diğer önemli bir nokta da süpersimetri kırılmasına gerek duyulmasıdır. Dolayısıyla Bethe-Salpeter denkleminde açıkca kütle kırıcı bir mekanizmanın hesaba katılması zorunludur.

6.3. Süpersimetrik Quasipotansiyel Denklemler

Kesim 3.1.'de Bethe-Salpeter denklemini incelerken, fiziksel olmayan relatif zaman parametresinin neden olduğu güçlükleri tartışmıştık. Bu sorunu çözmenin bir yolu bilindiği gibi Logunov ve Tavkhelidze'nin önerdikleri quasipotansiyel yaklaşıklığıdır. Quasipotansiyel tipinde relativistik iki-parçacık denklemlerinin süpersimetrik hale genişletilmesi Zaikov (1982 ve 1986) tarafından tartışılmıştır. Süper kütle merkezi sisteminde relatif zamanı sıfıra eşitlemek suretiyle yazar üç boyutlu bir denkleme geçmiştir. Bunu yapabilmek için referans sistemini belirlemek gerekir zira

$$x_o^{(1)} - x_o^{(2)} = 0 \tag{6.14}$$

koşulu yalnızca Lorentz dönüşümleri altında değil süperdönüşümler altında da invaryant kalmaz. Relatif zamanın sıfırlanması gereğini sağlamanın diğer bir yolu da iki parçacık dalga fonksiyonu üzerine relativistik invaryant $pq = 0$ Markov-Yukawa koşulunun uygulanmasıdır (Todorov 1971). Burada p ve q toplam ve relatif dörtlü momentumlardır. Bu koşulun süpersimetri dönüşümleri altında invaryant kaldığı açıktır. Şimdi bu tür bir quasipotansiyel denklemin süpersimetrik genelliştirilmesini inceleyelim.

Relativistik iki-parçacık probleminde karşımıza çıkan ve fiziksel olmayan relatif enerji güçlüğü Markow-Yukawa koşulu ile şu şekilde yok edilir. İki-parçacık BS genliğinin Fourier dönüşümü $\Psi(p_1,p_2)$ olmak üzere aşağıdaki eşitliği gözönüne alalım:

$$p^\mu q_\mu \Psi(p,q) = \frac{1}{2}\,(p_1^2-p_2^2-m_1^2+m_2^2)\quad \Psi(p_1,\, p_2) = 0 \tag{6.15}$$

Burada

$$p = p_1 + p_2 \;,\; q = \mu_2 p_1 - \mu_1 p_2 \;\; (\mu_1 = \frac{p^2 + m_1^2-m_2^2}{2p^2} \quad \mu = \frac{p^2-m_1^2 + m_2^2}{2p^2}$$

sistemin toplam ve relatif momentumlarıdır. Kütle merkezi sisteminde ($\vec{p}=0$) (6.15) koşulu relatif enerjinin sıfırlanmasına indirgenir, $q_o=0$. (6.15) denkleminin genel çözümü,

$$\Psi(pq) = \delta(pq)\,\Psi_p(q) \tag{6.17}$$

biçimindedir. O zaman relativistik iki skalar parçacık için üç-boyutlu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$\left(\frac{1}{4}p^2 + q^2 - m^2\right)\Psi_p(q) = \frac{1}{2}\int d^4k\ \ \delta(pk)\,V(p,q,k)\ \ \Psi_p(k) \tag{6.18}$$

Burada V quasipotansiyeldir.

"Chiral" süperalanların bulunduğu süpersimetrik halde, BS genliğini şu şekilde ifade edebiliriz :

$$\Psi(x_1,x_2;\ _1,\ _2) = \begin{bmatrix} \Psi^{++}(x_1,x_2;\theta_1,\theta_2) \\ \Psi^{-+}(x\ ,x\ ;\bar{\theta}_1,\theta_2) \\ \Psi^{+-}(x_1,x_2;\theta_1,\bar{\theta}_2) \\ \Psi^{--}(x_1,x_2;\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2) \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

Yukarıda $\Psi^{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=+,-)$ Denk. (6.9) daki gibidir. Ayrıca $\Psi(x_1,x_2;\theta_1,\theta_2)$ BS genliği için aşağıdaki açılımı yazabiliriz :

$$\Psi(x_1,x_2;\theta_1,\theta_2) = \Psi(x_1,x_2;0,0) + \theta_1\,\Psi(x_1,x_2;1,0) + \ldots\ldots$$
$$+ (\bar{\theta}_1\theta_1)(\bar{\theta}_2\theta_2)\ \Psi(x_1,x_2;2,2) \tag{6.20}$$

(6.15) koşulunun aşağıdaki süpersimetrik ifadeden çıkartılabileceği Zaikov (1986 ibid) tarafından gösterilmiştir :

$$\int K_1(\theta,\theta_3)\ [d^2\theta_3)]\ \Psi(x_1,x_2;\theta_3,\theta_2)$$

$$-\int K_2(\theta_2,\theta_4)\ [d^2\theta_4]\ \Psi(x_1,x_2;\theta_1,\theta_4) = 0 \qquad (6.21)$$

Burada $[d^2\theta]$ aşağıdaki matrisdir.

$$[d^2\theta] = \begin{pmatrix} d^2\theta & 0 \\ 0 & d^2\bar{\theta} \end{pmatrix} \qquad (6.22)$$

K_i (i = 1,2) ise i'inci parçacığın serbest hareketini tasvir eden işlemcidir ve süpersimetrik iki-nokta Green fonksiyonunun tersi cinsinden ifade edilebilir. K_i'nin açık ifadesi

$$K_i = \begin{bmatrix} m_i\delta^\Gamma(\theta_1-\theta_2) & \frac{1}{2}\exp(2\theta_1\check{p}_i\theta_2) \\ \frac{1}{2}\exp(2\bar{\theta}_1\check{p}_i\theta_2) & -m_i\delta^\Gamma(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$\check{p}_1 = (\gamma^\mu_{(1)} \otimes I)p^{(1)}_\mu \quad , \quad \check{p}_2 = (I \otimes \gamma^\mu_{(2)})p^{(2)}_\mu \qquad (6.24)$$

dır. $\Psi(x_1,x_2;\theta_1,\theta_2)$'nin her bileşeninin, (6.15) de verilen Markov-Yukawa koşulunu sağladığı aynı makalede gösterilmiştir :

$$(p_1^2-p_2^2)\ \Psi(p_1,p_2\ ;\ a,b) = 0 \qquad (a,b = 0,1,2) \qquad (6.25)$$

Bileşenlerden bazıları fiziksel değildir, dolayısıyla hareket denklemleri kullanılarak yokedilebilir.

Zaikov'un önerdiği süpersimetrik iki-cisim denklemi aşağıda verilmiştir :

$$\int K_1(\theta_1,\theta_3)\ [d^2\theta_3]\ \Psi_p(q,\theta_3,\theta_2) + \int K_2(\theta_2,\theta_4)\ [d^2\theta_4]\ \Psi_p(q,\theta_1,\theta_4)$$

$$= \int V(p,q,k,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)\ d\Omega_k\ \Psi_p\ (k,\theta_3,\theta_4) \qquad (6.26)$$

Görüldüğü gibi bu denklem, skaler iki parçacık için yazılan quasipotansiyel denklemin süpersimetrik genelleştirilmesidir. Yukarıda

$$d\Omega_k = \delta(pk)\ d^4k \quad [d^2\theta_3] \otimes [d^2\theta_4] \qquad (6.27)$$

dir. V ise quasipotansiyeldir. Değişik etkileşme Lagranjiyenleri alıp herbiri için quasipotansiyelin açık ifadesi elde edilebilir. Denk. (6.26)'dan hareket ederek iki skaler parçacık için Zaikov'un elde ettiği relativistik denklem (6.18) de görülen quasipotansiyel denklem ile benzerlik içindedir. Fakat diğer bağlı-durum denklemleri oldukça karmaşıktır.

6.4. Karşılıklı Etkileşen Spinli Parçacıkların Relativistik Kısıtlı Mekaniği ve İlgili Süpersimetri

Tezin birinci kısımında görmüş olduğumuz gibi, etkileşen spinli parçacıkların relativistik olarak ele alınışı sırasında izlenen değişik birkaç yöntem vardır. Relativistik bağlı-durum sistemlerini incelemenin bir diğer yolu da relativistik quantum mekaniği çerçevesindeki yaklaşımdır. O zaman karşı gelme ilkesi, kanonik kuantizasyon sonucunda kuantumlu hale geçebileceğimiz bir relativistik klâsik mekaniğinin bulunduğunu söyler. Bununla birlikte Curie-Jordan-Sudarshand (1963)'ın iyi bilinen "Etkileşme-Yok" (No-Interaction) teoremi böyle bir yaklaşımı olanaksız kılar. Bu teoreme göre eğer özel görelilik ilkesi geçerliyse o zaman klâsik iki parçacığın Hamiltonyen teorisi etkileşmeyi tasvir edemez. Diğer bir deyişle eğer a) homojen olmayan Lorentz grubunun on tane jeneratörü varsa, ve b) teorideki gözlemlenebilirler (yani parçacığın koordinatları) homojen olmayan Lorentz grubu altında doğru bir biçimde dönüşüyorsa, Hamilton formalizminde etkileşmeli iki-parçacık sistemlerini tasvir edemeyiz. Daha sonraları, üç parçacık (Cannon ve Jordan 1964) ve N-parçacık (Leutwyler 1965) sistemleri için de yukarıdakine benzer "No-interaction" teoremleri doğrulandı.

Bununla birlikte modern kısıtlı Hamiltonyen dinamiğin Dirac tarafından (Dirac 1964) kurulan yeni formalizmi, relativistik N-parçacık problemine açıkça kovaryant bir yaklaşımı mümkün kıldı. Böylece Ph. Droz-Vincent (1970), Todorov (1978), Kalb ve van Alstine (1976)'ın çalışmalarıyla başlayan ve pekçok kişi tarafından geliştirilen (Komar 1978, Rohrlich 1979, Crater et.al.1981, Sazdjian 1986) bu yeni yöntemle, etkileşen spinli parçacıklar için kanonik mekanik inşa edildi ve relativistik bağlı-durum problemlerine uygulandı.

Bu formalizm oldukça başarılı olmasına karşın parçacıkların spinleri daha başlangıçta ihmal ediliyordu.

Spini teoriye katmanın bir yolu, kuantizasyona geçmeden önce onun klâsik bir modelini kanonik formalizme sokmaktır. Kesim 5.5 ve 5.6 da tek bir klâsik spinli parçacığın dinamiğini süpersimetri açısından incelemiştik. Orada görmüş olduğumuz gibi bu yolla varılan "pseudoklâsik" mekanik, kuantumlama sonucunda Dirac denklemini verebilecek kadar spin bilgisi taşıyordu. Böylece "pseudoklâsik" mekaniğin kavramlarından yararlanarak, kısıtlı Hamilton mekaniğini spinli relativistik parçacıklara genişletmek mümkün gözükmektedir. Biraz ileride göreceğimiz gibi, iki-parçacık arasındaki potansiyelin spine bağlılığını belirlerken, süpersimetri önemli bir rol oynar. İki-fermiyon problemi için relativistik bir dalga denklemi yazmak üzere Dirac'ın kısıtlı mekaniğinin süpersimetrik versiyonu Alstine ve Crater tarafından bir dizi makalede ede alınmıştır (1982,1983, 1984,1986). Şimdi bu yöntemin anahatlarını inceleyelim.

Önce spinsiz parçacıkların bu yöntemle nasıl ele alındığını görelim. Serbest bir parçacık, yay uzunluğu ile orantılı olan şu eylem ile tasvir edilebilir :

$$S = \int L d\tau = \int -m(-\dot{x}^2)^{1/2}\, d\tau \qquad (6.28)$$

P_μ kanonik momentumları bağımsız değildir ve kütle-kabuğu koşulunu sağlar;

$$\mathcal{H} = p^2 + m^2 \approx 0 \qquad (6.29)$$

Bu ise Lagranjiyenin singüler olduğunu söyler, yani;

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu}\right) = \det\left((-\dot{x}^2)^{1/2}\left(\delta^\mu{}_\nu - \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{\dot{x}^2}\right)\right) = 0 \qquad (6.30)$$

Ayrıca kanonik Hamiltonyen sıfır olur

$$H_{\text{kanonik}} = p_\mu \dot{x}^\mu - L = 0 \qquad (6.31)$$

Böylece Dirac teorisine göre toplam Hamiltonyen (6.29)' daki kısıtlama ile orantılıdır.

$$H_{\text{top.}} = H_{\text{kanonik}} + \lambda\mathcal{H} = \lambda\mathcal{H} \approx 0 \qquad (6.32)$$

Skaler dış bir alanla etkileşmeyi elde edebilmek için (6.28) ve (6.29) eşitliklerinde $m \to M = m + S(x)$ yazabiliriz.

Spinsiz iki parçacık için benzer bir Lagranjiyen iki tane kütle-kabuğu kısıtlaması verir :

$$\mathcal{H}_1 = p_1^2 + M_1^2 \approx 0 \quad , \quad \mathcal{H}_2 = p_2^2 + M_2^2 \approx 0 \qquad (6.33)$$

$\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$'nin zaman içerisinde korunması için yeter koşul bu kısıtlamaların birinci sınıf olmasıdır, yani;

$$\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} \approx 0 \qquad (6.34)$$

(6.29)-(6.34) denklemlerinde görülen zayıf eşitlik işaretleri kısıtlamaların ancak Poisson parantezleri hesaplandıktan sonra kullanılabileceği anlamındadır.

(6.34) eşitliğinin var olması için potansiyellerin sağlaması gereken bağıntıyı Todorov (1980) aşağıdaki şekilde bulmuştur :

$$M_1^2\,(x) - M_2^2\,(x) = m_1^2 - m_2^2 \qquad (6.35)$$

Burada $x = x_1 - x_2$ dir ve M_i'ler sadece x'in dörtlü momentuma dik olan bileşenlerine bağlıdır :

$$M_i = M_i\,(x_\perp) \quad , \quad x_\perp^\mu = (g^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu/P^2)\,x_\nu \qquad (6.36)$$

Yukarıda $P = p_1 + p_2$ toplam momentumdur. Şimdi relativistik kinematiği doğru bir şekilde verebilmek için aşağıdaki tanımları yapıyoruz (bkz. 3,13 ve 3.14) :

$$x = x_1 - x_2 \quad , \quad p = \frac{1}{M}\,(E_2 p_1 - E_1 p_2) \quad , \quad P^2 = -M^2$$

(6.37a)

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \; ; \quad E_2 = \frac{w^2 + m_2^2 - m_1^2}{2w} \; , \; E_1 + E_2 = M$$

(6.37b)

dır.

Bu tanımların ve (6.33)'deki kısıtlamaların bir sonucu olarak

$$P \cdot p \approx 0 \tag{6.38}$$

dır. Bu bize, $P \cdot x_{\perp} = 0$ bağıntısı ile birlikte, relatif zaman ve relatif enerjinin kütle merkezi sisteminde sıfır olduğunu söyler.

Kısıtlamaların uygun bir karışımından toplam Hamiltonyeni şu şekilde kurabiliriz :

$$H_{top.} = \frac{E_2}{M} \mathcal{H}_1 + \frac{E_1}{M} \mathcal{H}_2 = p^2 - b^2 + \Phi \tag{6.39}$$

Burada b^2, relatif momentumun kütle-kabuğu değeridir (bkz. 3.15):

$$b^2 = \frac{1}{4M^2} [M^4 - 2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2)^2] \tag{6.40}$$

Φ ise aşağıdaki gibi verilir ;

$$\Phi = 2m_1 S_1 + S_1^2 = 2m_2 S_2 + S_2^2 \tag{6.41}$$

Şimdi toplam Hamiltonyen ifadesini Klein-Gordon biçimine getirebilmek için aşağıdaki değişkenleri tanımlayalım :

$$m_w = {}^{m_1 m_2}/_M \quad , \quad E_w = (M^2 - m_1^2 - m_2^2)/_{2M} \tag{6.42}$$

ve

$$\tilde{p}^{\mu} = p^{\mu} + \frac{Ew}{M} P^{\mu} \tag{6.43}$$

O zaman $H_{top} = \tilde{p}^2 + (m_w + S)^2$ (6.44)

şeklini alır. Kuantumlu halde (6.38) ve (6.44) denklemleri

$$P \cdot p \, \Psi = 0 \tag{6.45}$$

$$(\tilde{p}^2 + (m_w + S)^2) \Psi = 0 \tag{6.46}$$

olur. İkincisini relativistik Schrödinger denklemi gibi düşünebiliriz. Kütle merkezi sisteminde (6.46) aşağıdak özdeğer denklemi halini alır :

$$(\vec{p}^2 + 2m_w S + S^2)\Psi = b^2(M)\Psi \qquad (6.47)$$

(6.47) denklemi relativistik olmasına karşın, göresiz Schrödinger denkleminin sahip olduğu hesaplama kolaylığını taşır. (6.47) denklemi ile büyük ölçüde yakınlığı olan quasipotansiyel denklem, Kesim 3.1'de görmüş olduğumuz gibi bağlı hal hesaplarında geniş ölçüde kullanılmıştır.

Şimdi pseudoklâsik düzeyde spini bu formalizme katalım. Spinli serbset bir parçacığı tasvir etmek üzere aşağıdaki Lagranjiyen Alstine ve Crater (1982) tarafından önerilmiştir :

$$S = \int L\, d\tau = \int -m(-\dot{x}^2)^{1/2} [\, 1 + iv(\hat{u}.\ \theta + \theta_5)\,] + \frac{i}{2}\dot{\theta}\theta + \frac{i}{2}\dot{\theta}_5\theta_5 \quad d\tau \qquad (6.48)$$

Burada $\hat{u} = \dot{x}/(-\dot{x}^2)^{1/2}$ olup, θ, θ_5 ve v ise τ'nun Grassmann (tek) fonksiyonlarıdır. Eylem sırasıyla bozonik bir yay uzunluğu, Dirac denklemin veren bir "tek" kısıtlama ve spin serbestlik derecelerine ait kinetik terimlerin toplamından ibarettir.

Şimdi serbest bir parçacığın Dirac denklemini gözönüne alalım :

$$(p_\mu \gamma^\mu + m \quad)\Psi = 0 \qquad (6.49)$$

Yeni "tek" dinamik değişkenlerimiz olan θ ve θ_5'i kullanarak Dirac denklemini aşağıdaki gibi değişik bir biçimde yazabiliriz :

$$(p_\mu \theta^\mu + m\theta_5)\Psi = 0 \qquad (6.50)$$

Burada

$$\theta^\mu = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\ \gamma_5 \gamma^\mu,\ \mu = 0,1,2,3 \quad \text{ve} \quad \theta_5 = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\ \gamma_5 \qquad (6.51)$$

dir ve

$$[\theta^{\mu},\theta^{\nu}]_{+} = \hbar g^{\mu\nu}$$

$$[\theta_5,\theta^{\mu}]_{+} = 0$$

$$[\theta_5,\theta_5]_{+} = -\hbar \qquad (6.52)$$

bağıntılarını sağlar. Aşağıdaki eşitliklerle birlikte bunlar, dinamik değişkenlerimizin cebirsel özelliklerini tanımlar :

$$[x^{\mu},p^{\nu}]_{-} = ih g^{\mu\nu} \ , \ [x^{\mu},\theta^{\alpha}]_{-} = 0 = [p^{\mu},\theta^{\alpha}]_{-} \quad \alpha = 0,1,..,5$$

$$(6.53)$$

Böylece sıfırdan farklı elemanter parantezler şunlardır :

$$\{\theta^{\mu}\theta^{\nu}\} = ig^{\mu\nu}, \quad \{\theta_5,\theta_5\} = i \ , \ \{x^{\mu},p^{\nu}\} = g^{\mu\nu} \qquad (6.54)$$

(6.50) Dirac denkleminin bu yeni dinamik değişkenler üzerinde bir kısıtlama olduğunu görmekteyiz ;

$$\zeta = p.\theta + m\theta_5 \approx 0 \qquad (6.55)$$

(6.55) ve (6.54)'ü kullanarak kütle-kabuğu kısıtlamasını elde edebiliriz :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{i} \quad \{\zeta,\zeta\} = p^2 + m^2 \approx 0 \qquad (6.56)$$

Ayrıca ζ ve $\mathcal{H}$ kısıtlamalarının birinci sınıf oldukları da gösterilebilir, yani;

$$\{\zeta,\mathcal{H}\} = \frac{1}{i} \{\zeta, \{\zeta \ \zeta\}\} = 0 \qquad (6.57)$$

Yukarıdaki eşitliği elde edebilmek için (5.73 d)'de verilen genelleşitrilmiş Jacobi özdeşliğini kullandık.

Şimdi bu iki kısıtlamanın (6.48) Lagranjiyeninden türetilebileceğini görmekteyiz. Öte yandan aşağıdaki süpersimetri dönüşümü altında eylem invaryant kalır ("on-shell");

$$\delta x = (\theta - p\theta_5)\ ,\ \delta\theta = -i\epsilon p$$
$$\delta\theta_5 = -i\in(-p^2)^{1/2}\ ,\ \delta v = -i\dot{\in}/(-\dot{x}^2)^{1/2} \tag{6.58}$$

Burada

$$p^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = m\hat{u}^\mu(1 + iv\theta_5) - imv\theta^\mu\ ,\ \hat{p} = p/(-p^2)^{1/2} \tag{6.59}$$

dir. (6.58) dönüşümünün jeneratörü ise

$$G = p.\theta + \sqrt{-p^2}\,\theta_5$$

olur. Başka bir deyişle her A değişkeni için $\delta A^\alpha = \{A^\alpha, G\}$ yazabiliriz. $\mathcal{H} \approx 0$ kütle-kabuğu kısıtlaması kullanılarak $\{G,\zeta\} \approx 0$ olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla Dirac denklemi (6.58) de verilen SUSY dönüşümü altında invaryanttır.

Bu formalizme etkileşmeyi kattığımızda serbest parçacık halindeki (6.58) süpersimetri dönüşümü çok daha önemli bir nitelik kazanır. Yukarıda sunduğumuz tasvire eklenilecek olan etkelişme terimlerinin süpersimetriyi bozmamasını isteyerek kuvvetlerin spine bağlılığını belirleyebiliriz. SUSY dönüşümü altında invaryant kalan özel bir $\tilde{x}^\mu$ konum değişkeni kullanarak bu koşul yerine getirilebilir :

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{i\theta^\mu\theta_5}{\tilde{M}(\tilde{x})} \tag{6.61}$$

ve

$$\left\{G, \tilde{x}^\mu\right\} \approx 0 \tag{6.62}$$

Burada eşitlik zayıftır zira sonuç ancak $\mathcal{H} \approx 0$ ile birlikte sıfıra gitmektedir.

Böylece eğer herbir parçacık için (6.48)'deki süpersimetrik Lagranjeyen ile başlar ve herbirinin x'e olan bağlılığını $\tilde{x}$ ile verirsek etkileşmeyi tasvir eden süpersimetrik bir Lagranjiyen elde edebiliriz. Daha önce yaptığımız gibi, skaler etkileşmeleri formalizme sokmak üzere m_i kütlelerinin yerine $M_i(\tilde{x}\perp)$ yazmalıyız. Skaler bir potansiyel aracılığıyla karşılıklı olarak etkileşen süpersimetrik spinli iki parçacık sistemi için bu şekilde elde edilen Lagranjiyen aşağıdaki kısıtlamaları verir :

$$\zeta_1 = p_1 . \theta + \tilde{M}_1 \theta_{51} \approx 0 \quad , \quad \zeta_2 = p_2 \theta_2 + \tilde{M}_2 \theta_{52} \approx 0 \tag{6.63}$$

Her parçacık için,

$$\tilde{x}_1^\mu = x_1^\mu = \frac{i\theta_1^\mu \theta_{51}}{\tilde{M}_1} \quad , \quad \tilde{x}_2^\mu = x_2^\mu + \frac{i\theta_2^\mu \theta_{52}}{\tilde{M}_2} \tag{6.64}$$

yazabiliriz. P'ye dik relatif uzaklık ise

$$\tilde{x}_\perp^\mu = \left(g_{\mu\nu} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2}\right)\left(\tilde{x}_{1\nu} - \tilde{x}_{2\nu}\right) \tag{6.65}$$

dır. Dolayısıyla $\tilde{x}_i$'nin açık ifadesi aşağıdaki gibidir ;

$$\tilde{x}_1^\mu = x_1^\mu + \frac{i\theta_1^\mu \theta_{51}}{M_1} - \theta_1^\mu \frac{\theta_{51} M_1' \theta_2 \theta_{52}}{M_1^2 M_2} \tag{6.66}$$

$$\tilde{x}_2^\mu = x_2^\mu + \frac{i\theta_2^\mu \theta_{52}}{M_2} + \theta_2^\mu \frac{\theta_{52} M_2' \theta_2 \theta_{52}}{M_2^2 M_1}$$

Burada M_i' , M_i'nin argümanına göre türevini göstermektedir. Öte yandan $\tilde{M}_1$ için Grassmann-Taylor açılımını şu şekilde yazabiliriz :

$$\begin{aligned}\tilde{M}_1 = {} & M_1 + i\, x_\perp \theta_1 \theta_{51} M_1'/M_1 - i x_\perp \theta_2 \theta_{52} M_1'/M_2 \\ & + \theta_{1_\perp} (\theta_{2_\perp} \theta_{51} \theta_{52} / M_1 M_2) M_1' \\ & + x_\perp \theta_1 \theta_{51} x_\perp \cdot \theta_2 \theta_{52} M_1'/M_1 M_2\end{aligned} \tag{6.67}$$

Benzer bir ifade $\widetilde{M}_2$ için verilebilir. Böylece birinci mertebeden kısıtlamalar

$$\zeta_1 = p_1 \cdot \theta_1 + \widetilde{M}_1 \theta_{51} = p_1 \cdot \theta_1 + M_1 \theta_{51} - i\theta_2 \theta_{52} \theta_{51} \; M_1'/M_2 \approx 0$$

$$\zeta_2 = p_2 \theta_2 + \widetilde{M}_2 \theta_{52} = p_2 \cdot \theta_2 + M_2 \theta_{52} + i \, \theta_1 \theta_{51} \theta_{52} \; M_2'/M_1 \approx 0$$

(6.68)

şeklini alır. İkinci mertebeden kısıtlamalar ise

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{i} \{\zeta_1 , \zeta_1\} = p_1^2 + \widetilde{M}_1^2 \approx 0$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{i} \{\zeta_2 , \zeta_2\} = p_2^2 + \widetilde{M}_2^2 \approx 0 \qquad (6.69)$$

dır. $M_1^2 - M_2^2 =$ sbt sağlandığı sürece bütün kısıtlamaların birinci sınıf olduğu gösterilebilir. Öte yandan süpersimetri jeneratörleri aşağıdaki gibidir :

$$G_i = p_i \cdot \theta_i + \sqrt{-p_i^2} \, \theta_{5i} \qquad i = 1,2 \qquad (6.70)$$

(6.66) eşitlikleri ile $\mathcal{H}_i \approx 0$ kısıtlamalarını kullanarak

$$\{G_i , \widetilde{x}_j\} \approx 0 \qquad i,j = 1,2 \qquad (6.71)$$

olduğu gösterilebilir. Bundan başka kısıtlamalar da SUSY invaryanttır :

$$\{G_i , \zeta_j\} \approx 0 \approx \{G_i , \mathcal{H}_j\} \qquad i,j = 1,2 \qquad (6.72)$$

Poisson parantezlerini kanonik komütatörlere (veya antikomütatörlere) çevirmek suretiyle sistemin kuantumlanması mümkündür. O zaman ζ_i ve $\mathcal{H}_i$ kısıtlamaları, çiftlenimli Dirac ve Klein-Gordon denklemleri halini alır.

Spinli serbest parçacık durumunda olduğu gibi toplam Hamiltonyen, $\mathcal{H}_i$ kısıtlamalarının uygun bir karışımıyla kurulabilir H_{toplam} ile yazılan 16-bileşenli özdeğer denkleminin dört adet çiftlenimsiz 4-bileşenli Pauli-formlarına ayrıldığı Crater ve Alstine (1983) tarafından gösterilmiştir. Skaler etkileşmeli hal için yazılan benzer quasi-potansiyel denklemle bir karşılaştırma da yapmışlardır. Bu formalizmi daha da ileriye götürmüşler ve mezonlardaki spinli kuarklar için relativistik bir model geliştirmişlerdir (Crater ve Alstine 1984 ve 1986). Dış alanda hareket eden spinli bir parçacığın süpersimetrik tasviri ile Wheeler-Feynman dinamiğini birleştirerek, yukarıda adı geçen yazarlar, karşılıklı olarak bir skaler ya da vektör potansiyeli aracılığıyla etkileşmekte olan spin-1/2 ve spin-0 parçacıklar için çok-zamanlı bir relativistik dinamiği inşa etmişlerdir (Alstine ve Crater 1986).

6.5. ÖKLİDYEN SÜPERSİMETRİ ve RELATİVİSTİK İKİ-CİSİM SİSTEMLERİ

Üç boyutlu Öklidyen simetri grubunun süpersimetrik genişletilmesinden yararlanarak kuantum mekaniksel modellerin süpersimetrik olarak genelleştirilmeleri için alternatif bir yol Sokatchev ve Stoyanov (1980) tarafından önerildi. Burada hareket nokatıs Schrödinger denkleminin süpersimetrikleştirilmesidir. Bu denklem göresiz olmasına karşın, yardımcı alanlar yok edildikten sonra fiziksel bileşenler için elde edilen hareket denklemleri Lorentz invaryanttır; yani serbest Klein-Gordon ve Dirac denklemleridir.

Bu kesimde süpersimetrik Schrödinger denkleminde $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$ minimal çiftlenim ilkesini kullanarak dış alanla etkileşen parçacıklar için relativistik dalga denklemleri elde edeceğiz ve daha sonra bu modeli iki-cisim sistemlerine genişleteceğiz.

Yukarıda belirttiğimiz gibi bu alternatif yaklaşımın süpersimetri cebiri, dört uzay-zaman boyutundaki süper-Poincaré cebirinde d = 1 alarak elde edilmemektedir. Yeni cebirimiz üç-boyutlu Öklidyen grubun süpersimetrik genişletilmesidir. Dolayısıyla önce bu genişletmeyi tartışalım. Rembielinski ve Tybor (1984)'un bir makalesinde olası süperkinematik grupların bir listesi çıkartılmıştır. Bacry ve Levy-Leblond (1968) tarafından daha önce kinematik gruplar üzerine yapılan bir sınıflandırmayı bu yazarlar süpersimetrik hale genişletmişlerdir. Şimdi bu süper-Galile grubunun jeneratörlerince sağlanan cebiri yazalım :

$$
\begin{aligned}
[J_k, J_l] &= i\epsilon_{klm} J_m \qquad (\epsilon_{123} = 1) \\
[J_k, P_l] &= i\epsilon_{klm} P_m \\
[P_k, P_l] &= 0 \\
[J_k, Q_\alpha] &= -\frac{1}{2}\sigma^k_{\alpha\beta} Q_\beta \\
[P_k, Q_\alpha] &= 0 \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= N(\sigma^l \epsilon)_{\alpha\beta} P_l
\end{aligned}
\tag{6.73}
$$

Burada P_k'ler üç adet öteleme jeneratörü, J_k'ler O(3) jeneratörleri (k = 1,2,3) ve Q_α (α = 1,2)'lar ise süpersimetri jeneratörleridir. $\epsilon = i\sigma^2$ dir. Son eşitlikte görülen N normalizasyon sabiti süpersimetriyi "açıp" "kapamak" amacıyla konmuştur.

P_k ve Q_α jeneratörleri için aşağıdaki diferansiyel ifadeleri yazabiliriz :

$$
\begin{aligned}
P_k &= -i\partial_k \\
Q_\alpha &= i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \frac{iN}{2}(\sigma^k\theta)_\alpha P_k
\end{aligned}
\tag{6.74}
$$

her zaman olduğu gibi

$$
D_\alpha = i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \frac{iN}{2}(\sigma^k\theta)_\alpha P_k \tag{6.75}
$$

kovaryant türevi Q_α ile antikomütatiftir; $\{D_\alpha, Q_\beta\} = 0$

D_α kovaryant türevi ayrıca

$$
\{D_\alpha, D_\beta\} = N(\sigma^k\epsilon)_{\alpha\beta} P_k \tag{6.76}
$$

bağıntısını sağlar.

Şimdi ϕ (t,x; θ) süperalanı θ'ya göre bir polinom olmalıdır :

$$
\phi(t,x;\theta) = A(t,x) + \theta^\alpha \Psi_\alpha(t,x) + \theta^\alpha\theta_\alpha B(t,x) \tag{6.77}
$$

ϕ (t,x;θ) modelimizde dalga fonksiyonu rolünü oynayacaktır.

Şimdi Sokatchev ve Stoyanov (ibid) tarafından yazılan denklemde minimal yerleştirme yaparak, dış elektromanyetik alanla etkileşen parçacıklar için süpersimetrik Schrödinger denklemini aşağıdaki gibi yazıyoruz :

$$(i \frac{\partial}{\partial t} + e\,\Phi)\,\phi(t,x;\theta) = \frac{4}{N^2} D^\alpha D_\alpha\,(t,x;\theta) - m\phi^+(t,x,\theta) \tag{6.78}$$

Burada yer alan D_α kovaryant türev işlemcilerindeki p_k momentumları yerine $\mathcal{P}_k = p_k + e\,A_k$ almaktayız. m ise kütleyi göstermektedir. Öte yandan (6.77)'den

$$\phi^+(t,x;\theta) = \bar{A} + \theta^\alpha \Psi_\alpha + \theta^\alpha \theta_\alpha\,\bar{B} \tag{6.79}$$

yazabiliriz. Süperalan bileşenleri için hareket denklemlerini elde edebilmek için aşağıdaki eşitlikleri kullanacağız;

$$\phi(t,x;\theta)\Big|_{\theta=0} = A(t,x)$$

$$D^\alpha \phi(t,x;\theta)\Big|_{\theta=0} = i\,\Psi_\alpha(t,x) \tag{6.80}$$

$$D^\alpha D_\alpha\,\phi(t,x,\theta)\Big|_{\theta=0} = 4B(t,x)$$

Böylece Denk. (6.78) şu eşitliği verir :

$$(i \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi)\; A = \frac{16}{N^2} B - m\,\bar{A} \tag{6.81}$$

D_α işlemcisini (6.78) eşitliğinin her iki yanına uygulayıp (6.76) bağıntısını kullanırsak, (6.80)'deki izdüşümlerin yardımıyla

$$(i \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi)\Psi_\alpha = \frac{4}{N^2}\,[\sigma^k(P_k + eA_k)\Psi]_\alpha - m\,\bar{\Psi}_\alpha \tag{6.82}$$

bulunur. Benzer şekilde (6.78)'e $D^\alpha D_\alpha$'yı etki ettirip

$$D^{\alpha}D_{\alpha}D^{\beta}D_{\beta} = N^2 \mathcal{P}_k \mathcal{P}^k \qquad (6.83)$$

özdeşliğini kullanırsak aşağıdaki hareket denklemini elde ederiz ;

$$(i \frac{\partial}{\partial t} + e\,\Phi)B = (p^k + eA^k)(P_k + eA_k)A - m\,\bar{B} \qquad (6.84)$$

Şimdi (6.81) ve (6.84) denklemlerinden B yardımcı alanını ($\bar{A}$'ı da) kolayca yok edebiliriz. Sonuç (basitlik amacıyla N = 4 alınmıştır) ;

$$[(i \frac{\partial}{\partial t} + e\,\Phi)^2 + (p^k + eA^k)(p_k + eA_k) - m^2]\; A = 0 \qquad (6.85)$$

olur. Bu ise dış elektromanyetik alanla etkileşen skaler bir parçacık için Klein-Gordan denkleminden başka birşey değildir.

ϕ süperalanının spinör bileşeni için elde edilen (6.82) hareket denklemini relativistik biçime getirebiliriz :

$$(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})\sigma_{\mu}\Psi + m\bar{\Psi} = 0 \qquad (6.86)$$

Bu bir Weyl denklemidir. (6.86)'yı ayrıca Dirac denklemi gibi yazabiliriz :

$$[(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})\gamma^{\mu} + m]\chi = 0 \qquad (6.87)$$

Burada

$$\chi_{\alpha} = \begin{pmatrix} \Psi_{\alpha} \\ \bar{\Psi}_{\alpha} \end{pmatrix}$$

dır. Böylece yardımcı alanları hareket denklemleri yardımıyla yokettikten sonra bu göresiz kuantum mekaniksel modelde Lorentz invaryans bir dinamik simetri olarak karşımıza çıkmaktadır.

Şimdi (6.78)'deki süpersimetrik Schrödinger denklemini iki-cisim haline genişletelim. Önce $\Psi(x_1, x_2, t_1, t_2; \theta_1, \theta_2)$ şeklindeki Bethe-Salpeter genliği için aşağıdaki açılımını yapalım :

$$\Psi(x_1 x_2, t_1, t_2; \theta_1, \theta_2) = \Psi(x_1, x_2, t_1, t_2; 0,0) + \theta_1 \Psi(x_1, x_2, t_1, t_2; 1,0)$$

$$+ \theta_2 \Psi(x_1, x_2, t_1, t_2; 0,1) + \theta_1^2 \Psi(x_1, x_2, t_1, t_2; 2,0) + \theta_2^2 \Psi(x_1, x_2, t_1, t_2; 0,2)$$

$$+ \theta_1 \theta_2 \Psi(x_1, x_2, t_1, t_2; 1,1) + \theta_1^2 \theta_2 \Psi(x_1, x_2, t_1, t_2; 2,1)$$

$$+ \theta_1 \theta_2^2 \Psi(x_1, x_2, t_1, t_2; 1,2) + \theta_1^2 \theta_2^2 \Psi(x_1, x_2, t_1, t_2; 2,2) \qquad (6.88)$$

Burada $\Psi(a,b)$ $(a,b = 0,1,2)$ dalga fonksiyonunun bileşenleridir ve spinör indisleri üzerinden toplam vardır.

Süpersimetrik iki-parçacık dalga fonksiyonu için aşağıdaki denklemi öneriyoruz (Aydın ve Yılmazer 1987) :

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t_2} + e_2 \Phi_1\right)\left(i \frac{\partial}{\partial t_1} + e_1 \Phi_2\right)\Psi = \frac{16i}{N^4} D_1^\alpha D_{1\alpha} D_2^\beta D_{2\beta} \Psi - m_1 m_2 \Psi^+ \qquad (6.89)$$

Burada t_1 ve t_2 herbir parçacığın zaman parametreleridir ve ani etkileşme yaklaşıklığında $t_1 = t_2$ alınabilir. e_1, m_1 (e_2, m_2) birinci (ikinci) parçacığın sırasıyla yükü ve kütlesidir. Φ_1 ise birinci parçacık tarafından ikinci parçacığın yerinde oluşturulan skaler potansiyeldir; $\Phi_1 = \Phi_1(x_2)$ (benzer şekilde $\Phi_2 = \Phi_2(x_1)$). D_1 ve D_2 kovaryant türevleri birinci ve ikinci parçacık alt uzaylarında işlem görürler. Daha önce yaptığımız gibi, kovaryant türev ifadelerindeki P_{1k} ve P_{2k} terimlerinin yerine $\mathcal{P}_{1k} = P_{1k} + e_1 A_k(x_1)$ ve $\mathcal{P}_{2k} = P_{2k} + e_2 A_k(x_2)$ alınmıştır.

(6.88)'de verilen iki-parçacık genliği dokuz tane süperalan bileşeni içerdiğinden dokuz denklem yazmamız gerekir. Bununla birlikte $\Psi(a,b)$'lerin tümü fiziksel değildir. Aralarından bazısı dinamik değildir ve dolayısıyla hareket denklemleri yardımıyla yokedilebilir.

Tek parçacık halinde olduğu gibi kovaryant türevi kullanarak aşağıdaki izdüşüm eşitliklerini kolayca yazabiliriz :

$$\Psi\big|_{\theta_1=\theta_2=0} = \Psi(0,0) \quad , \quad D_{1\alpha}\Psi\big|_{\theta_1=\theta_2=0} = i\Psi_\alpha\,(1,0), \quad D_1^\alpha D_{1\alpha}\Psi\big|_{\theta_1=\theta_2=0} = 4\Psi(2,0)$$

$$D_2^\alpha\Psi\big|_{\theta_1=\theta_2=0} = i\Psi_\alpha(0,1), \quad D_2^\alpha D_{2\alpha}\Psi\big|_{\theta_1=\theta_2=0} = 4\Psi(0,2) \quad , \quad D_{1\alpha}D_{2\beta}\Psi\big|_{\theta_1=\theta_2=0} = -\Psi_{\alpha\beta}\,(1,1)$$

$$D_1^\alpha D_{1\alpha}D_{2\beta}\Psi\big|_{\theta_1=\theta_2=0} = 4i\,\Psi_\beta(2,1) \quad , \quad D_{1\alpha}D_2^\beta D_{2\beta}\Psi\big|_{\theta_1=\theta_2=0} = 4i\Psi_\beta(1,2)$$

$$D_1^\alpha D_{1\alpha}D_2^\beta D_{2\beta}\Psi\big|_{\theta_1=\theta_2=0} = 16\,\Psi(2,2) \tag{6.90}$$

Yukarıda, kolaylık sağlaması nedeniyle uzay ve zaman değişkenlerini yazmadık. (6.89) denkleminin her iki yanına D_i^α $(i = 1,2)$ kovaryant türevini ya da onların çarpamlarını etki ettirip (6.90) eşitliklerini kullanırsak nihayet aşağıdaki denklemleri bulabiliriz :

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_2}+e_2\Phi_1\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}+e_1\Phi_2\right)\Psi(0,0) = \frac{(16)^2 i}{N^4}\,\Psi(2,2) - m_1m_2\,\bar{\Psi}\,(0,0) \tag{6.91a}$$

$$(\quad "\quad)(\quad "\quad)\Psi_\alpha(1,0) = -\frac{64i}{N^3}\left[\sigma_1^k\mathcal{P}_{1k}\Psi(1,2)\right]_\alpha - m_1m_2\,\bar{\Psi}(1,0) \tag{6.91b}$$

$$(\quad "\quad)(\quad "\quad)\Psi(2,0) = \frac{16i}{N^2}\mathcal{P}_1^k\mathcal{P}_{1k}\,\Psi(0,2) - m_1m_2\,\bar{\Psi}\,(2,0) \tag{6.91c}$$

$$(\quad "\quad)(\quad "\quad)\Psi_\alpha\,(0,1) = -\frac{64i}{N^3}\left[\sigma_1^k\mathcal{P}_{2k}\Psi(2,1)\right]_\alpha - m_1m_2\,\bar{\Psi}_\alpha\,(0,1) \tag{6.91d}$$

$$(\quad "\quad)(\quad "\quad)\Psi(0,2) = \frac{16i}{N^2}\mathcal{P}_2^k\mathcal{P}_{2k}\,\Psi(2,0) - m_1m_2\,\bar{\Psi}\,(0,2) \tag{6.91e}$$

$$(\quad "\quad)(\quad "\quad)\Psi_{\alpha\beta}(1,1) = \frac{16i}{N^2}\left[\sigma_1^k\sigma_2^l\mathcal{P}_{1k}\mathcal{P}_{2\ell}\,\Psi\,(1,1)\right]_{\alpha\beta} - m_1m_2\,\bar{\Psi}_{\alpha\beta}(1,1) \tag{6.91f}$$

$$(\quad "\quad)(\quad "\quad)\Psi_\alpha\,(1,2) = \frac{4i}{N}\left[\sigma_1^k\mathcal{P}_{1k}\mathcal{P}_2^\ell\mathcal{P}_{2\ell}\Psi\,(1,0)\right]_\alpha - m_1m_2\,\bar{\Psi}_\alpha(1,2) \tag{6.91g}$$

$$(\quad "\quad)(\quad "\quad)\Psi_\alpha(2,1) = \frac{4i}{N}\left[\mathcal{P}_1^k\mathcal{P}_{1k}\,\sigma_2^\ell\mathcal{P}_{2\ell}\Psi\,(0,1)\right]_\alpha - m_1m_2\,\bar{\Psi}_\alpha(2,1) \quad (6.91$$

$$(\quad "\quad)(\quad "\quad)\Psi\,(2,2) = i\mathcal{P}_1^k\mathcal{P}_{1k}\mathcal{P}_2^\ell\mathcal{P}_{2\ell}\quad\Psi(0,0) - m_1m_2\,\bar{\Psi}\quad(2,2)\ (6.91$$

Denk. (6.91) ile Denk. (6.91i) kullanılarak $\Psi(2.2)$'yi (aynı zamanda $\bar{\Psi}(0,0)$'ı da) yok edebiliriz. Sonuç

$$[(i\frac{\partial}{\partial t_2}+e_2\Phi_1)^2(i\frac{\partial}{\partial t_1}+e_1\Phi_2)^2$$

$$+(\vec{p}_1+e_1\vec{A})^2(\vec{p}_2+e_2\vec{A})^2-m_1^2m_2^2]\,\Psi(x_1,x_2,t_1,t_2;0,0)=0 \qquad (6.92)$$

olur. Bu ise birbirleriyle minimal bir şekilde etkileşen skaler parçacıklar için iki-cisim denklemidir ve Bethe-Salpeter denklemine oldukça benzemektedir.

Benzer şekilde diğer denklemler arasındaki çiftlenim kaldırılabilir. Örneğin (6.91b) ve (6.91g)'den

$$[(i\frac{\partial}{\partial t_2}+e_2\Phi_1)(i\frac{\partial}{\partial t_1}+e_1\Phi_2)^2-\sigma_1^k\mathcal{P}_{1k}\sigma_1^\ell\mathcal{P}_{1\ell}\mathcal{P}_2^m\mathcal{P}_{2m}-m_1^2m_2^2]\,\Psi_\alpha(1,0)=0 \qquad (6.93)$$

bulunur. (6.91c-e) ve (6.91d-h) denklemilerinden sırasıyla,

$$\{(i\frac{\partial}{\partial t_2}+e_1\Phi_1)^2(i\frac{\partial}{\partial t_1}+e_1\Phi_2)^2+[\vec{p}_1+e_1\vec{A}(x_1)]^2\,[\vec{p}_2+e_2\vec{A}(x_2)]^2-m_1^2m_2^2\}\Psi(2,0)=0 \qquad (6.94)$$

$$\{(i\frac{\partial}{\partial t_2}+e_2\Phi_1)^2(i\frac{\partial}{\partial t_1}+e_1\Phi_2)^2\mathcal{P}_1^k\mathcal{P}_{1k}\,(\sigma_2^\ell\mathcal{P}_{2\ell})^2-m_1^2m_2^2\}\,\Psi_\alpha(0,1)=0$$

elde edilir. Bu sonuncuların ise (6.92) ve (6.93) denklemlerine özdeş olduğu görülmektedir.

$\Psi_{\alpha\beta}(1,1)$ tensörel bileşeni için (6.91f) denklemini aşağıdaki şekilde tekrar yazabiliriz :

$$[(i\partial_{1\mu}+e_1A_{2\mu})(i\partial_{2\nu}+e_2A_{1\nu})(\gamma_1^\mu\otimes\gamma_2^\mu)+m_1m_2]\Psi(1,1)=0 \qquad (6.95)$$

Özetlersek önermiş olduğumuz göresiz süpersimetrik iki-cisim denklemi yapı olarak, herbir parçacığın Schröndinger işlemcilerinin çarpımı şeklindedir. Fermiyon-fermiyon, skaler-fermiyon ve skaler-skaler sistemleri için

(6.88) ile verilen iki-cisim dalga fonksiyonunun dokuz süperalan bileşeninden yalnızca üçü fizikseldir : spin 0 - spin 0 sistemi için $\Psi(0,0)$ skaler bileşeni, spin 1/2-spin 0 sistemi için $\Psi(1,0)$ spinörel bileşeni ve son olarak spin 1/2-spin 1/2 sistemi için $\Psi(1,1)$ tensörel bileşen. Diğer bileşenlerden $\Psi(2,0)$ ve $\Psi(0,1)$ yeni bir şey söylemezler. Son dört bileşen ise, yani $\Psi(2,2)$, $\Psi 0,2)$, $\Psi(1,2)$ ve $\Psi(2,1)$ fiziksel değildir. Bu yardımcı alanların yokedilmesi ile iki-cisim süperalanının fiziksel bileşenleri için relativistik denklemler elde etmekteyiz. Böylece fiziksel bileşen alanların relativistik invaryansını, göresiz ve süpersimetrik kuantum mekaniksel modelimizin bir dinamik simetrisi olarak yorumlamamız mümkündür.

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tezin ilk kısmında önce relativistik iki-cisim probleminin sistematik bir analizi sunulmuştur. Klâsik ve kuantum mekaniğinde iki-cisim sistemleri verildikten sonra problemin relativistik olarak ele alınışına geçilmiştir. Bethe-Salpeter denklemi ve relatif zamanın neden olduğu güçlükleri gidermek için başvurulan ani etkileşme ve quasipotansiyel yaklaşıklıkları incelenmiştir. Daha sonra tamamıyla kovaryant iki-cisim dalga denkleminin alan teorisinden nasıl türetildiği tartışıldıktan sonra grup teorik tekniklerle bu denklemin çözümleri araştırılmaştır. Radyal denklemleri elde edebilmek için açısal değişkenlerin ayrılmasına ilişkin yaklaşımımız oldukça geneldir ve dolayısıyla her relativistik iki-cisim sistemine uygulanabilir. Kesim 3.4'te pozitronyumun enerji spektrumu bu yöntemle çıkartılmış ve ayrıca iki-parçacık durumlarının sınıflandırılışı önemli ölçüde aydınlığa kavuşturulmuştur. Nötrino-antinötrino, elektron-nötrino ve süperpozitronyum gibi diğer olası bağlı haller tartışıldıktan sonra Kemmer-Duffin-Petiau formalizmi ile olan uyuşuma değinilmiştir.

Tezin son kısmında iki-cisim probleminin süpersimetrik genelleştirilmesi araştırılmıştır. Bu amaçla önce, süpersimetrik teoriler anahatlarıyla kısaca incelenmiştir. Bu arada yüksek enerji fiziğindeki global SUSY modelleri, başka bir deyişle standart modelin süpersimetrik genişletilmesi kısaca tartışılmıştır. Simetri kırıcı çeşitli mekanizmalar gözden geçirildikten sonra elemanter parçacık fiziğinde gerçekçi modeller kurabilmek için tek yolun yumuşak SUSY kırma yöntemi olduğu sonucuna varılmıştır.

Beşinci bölümde süpersimetrik kuantum mekaniği ayrıntılı olarak incelenmiştir. Süperuzayda inşa edilen klâsik mekanik (yani pseudoklâsik mekanik) ele alınmış ve dış elektromanyetik veya gravitasyonel alan içerisinde hareket eden spinli parçacıkların süpersimetrik tasviri irdelenmiştir. Altıncа bölümde süpersimetrik iki-parçacık sistemleri tartışılmıştır. Bethe-Salpeter denklemi ile quasi-potansiyel denklemlerin süpersimetrik genelleştirilmeleri gözden geçirildikten sonra etkileşen spinli parçacıkların kısıtlı Hamiltonyen mekaniği çerçevesinde relativistik olarak ele alınışı süpersimetri açısından incelenmiştir. Nihayet Öklidyen süpersimetriden yararlanarak iki-parçacık problemi için süpersimetrik bir Schröndinger denklemi önerilmiştir. Böylece, skaler-skaler, skaler-fermiyon ve fermiyon-fermiyon sistemleri için relativistik bağlı hal denklemleri tek bir denklemden elde edilmiştir. Modeldeki Lorentz invaryans dinamik bir simetri olarak yorumlanmıştır zira ancak yardımcı alanlar hareket denklemleri yardımıyla yokedildikten sonra Lorentz simetrisi ortaya çıkmaktadır.

KAYNAKLAR

ABBOTT, R.B., 1983. Estimating ground-state energies in supersymmetric quantum mechanics: broken case. Z.Phys.C.20: 213-235.

ABBOTT, R.B., 1983. Estimating ground-state energies in supersymmetric quantum mechanics: unbroken case. Z.Phys.C.20: 227-236.

AHARANOV, V.Y. ve CASHER, A., 1979. Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional megnetic field. Phys. Rev. A. 19 (6): 2461.

AKHOURY, R. ve COMTET, A., 1984. Anomalous behaviour of the Witten index-exactly soluble models. Nucl. Phys. B.246: 253-278.

ALSTINE, P.V. ve CRATER, H., 1982. Scalar interactions of supersysmmetric relativistic spinning perticles. J.Math.Phys. 23 (9): 1697-1699.

ALSTINE, P.V. ve CRATER, H., 1986. Exact parapositroniomlike solution to two-body Dirac equations. Phys. Rev. D 34 (6): 1932-1935.

ALSTINE, P.V. ve CRATER, H., 1986. Wheeler-Feynman dynamics of spin-1/2 particles. Phys. Rev. D 33 (4): 1037-1047.

ALVAREZ-GAUME, L., 1983. Supersymmetry and Atiyah-Singer Index Theorem.Commun. Math. Phys. 90, 161-173.

ANDRIANOV, A.A., BORISOV, N.V. ve IOFFE, M.V., 1984. Quantum systems with identical energy spectra. JETP Lett. 39 (2): 93.

ANDRIANOV, A.A., BORISOV, N.V., IOFFE, M.V. ve EIDES, M.I., 1984. Supersymmetric mechanics.; a new look at the equivalence of quantum systems. Theor. Math. Phys. 61: 965.

ANDRIANOV, A.A., BORISOV, N.V. ve IOFFE, M.V., 1984. Factorisation method and Darboux transformation for multidimensional Hamiltonians. Theor. Math.Phys. 61 (2): 1078.

AYDIN, Z.Z. ve YILMAZER, A.U., 1987. Euclidean supersymmetry and relativistic two-body systems. ICTP preprint IC/87/212 (Nuovo Cim.A'da yayımlanacak).

AYDIN, Z.Z. ve YILMAZER, A.U., 1987. On the relativistic two-body problem. J.Phys. G'ye sunuldu.

BALACHANDRAN, A.P., MAMO, G., SKAGERSTAM, B.S. ve STERN,A., 1983. Gauge Symmetries and Fibre Bundles : Applications to Particle Dynamics. Lecture Notes in Physics. vol.188 : 1-140. Springer-Verlag, Berlin.

BACRY, H. ve LEVY-LEBLOND, J., 1967. Possible kinematics. Jour.Math.Phys. 9(10) 1605.

BALANTEKİN, A.B., BARS, I. ve IACHELLO, F., 1981. U (6/4) dynamical supersymmetries in nuclear physics Phys. Rev.Lett. 47: 19.

BALANTEKİN, A.B., 1985. Accidental degeneracies and supersymmetric quantum mechanics. Ann. Phys. 164 : 277-287.

BARDUCCI, A., CASALBUONI, R., DOMINICI, D. ve LUSANNA, L., 1981. Pseudoclassical description of Weyl particles. Phys. Lett. B 100 (2): 126-130.

BAKRI, M.M. ve MANSOUR, H.M.M., 1980. The relativistic two-fermion equation I. Acta. Physica. Polon. B 11 (6): 413-423.

BAKRI, M.M. ve MANSOUR, H.M.M. , 1980. The relativistic two-fermion equations II. Acta Physica Polon. B 11(7): 543-558.

BARBIERI, R., FERRARA, S. ve NANOPOULOS, D., 1982. Supergravity, R-invariance and spontaneous supersymmetry breaking. Phys. Lett. B 113: 219.

BARBIERI, R., FERRARA, S. ve NANOPOULOS, D., 1982. From high energy SSB to low energy physics through decoupling. Phys. Lett. B 116: 16.

BARCELOS-NETO, J. ve DAS, A., 1985. Dirac quantization in superspace. Univ.of. Rochester preprint. UR 926.

BARCELOS-NETO, J. ve DAS, A., 1987. Canonical quantization of constrained systems. Acta Physica Polon. B 18 (4): 269-288.

BARNETT, R.M., 1985. Properties of SUSY particles and processes. Proc. of Third SLAC Summer School on Perticle Physics.

BARUT, A.O. ve XU-BO, Wei, 1982. Derivation of static Pauli spin-orbit and spin-spin patentials from field theory. Phys. Scripta 26: 129-131.

BARUT, A.O. ve XU-BO, Wei, 1983. Derivation of relativistic charge-monopole and monopole-monopole patentials form field theory. Ann.Phys. 148: 135-143.

BARUT, A.O., 1983. Non perturbative treatment of magnetic interactions at short distances end a simple magnetic model of matter. In the book "Quantum electrodynomics in strong fields", Ed. W. Greiner: 755-781. Plenum Press, New-York.

BARUT, A.O., 1983. Relativistic electron theory and foundations of quantum theory. Proc. Int. Symp. Foundations of Quantum Mechenics: 321-326.Tokyo.

BARUT, A.O. ve ÜNAL, N., 1985. Radial equations for the most general electric and magnetic potentials Fortschr. Phys. 33 (6): 319-322.

BARUT, A.O. ve ZANGHI, B., 1984. Classical model of the Dirac electron Phys. Rev. Lett. 52: 2009.

BARUT, A.O., DURU, İ.H., 1984. Path integral derivation of the Dirac propagator. Phys. Rev. Lett. 53: 2355.

BARUT, A.O. ve ÜNAL, N., 1986. A new approach to bound-state quantum electrodynamics. ICTP preprint. IC/86/119.

BARUT, A.O. ve ÜNAL, N., 1986. An exactly soluble relativistic quantum 2-fermion problem. ICTP preprint. IC/86/120.

BARUT, A.O., 1987. On the treatment of Möller and Breit Potentials and the covariant two-body equation for positronium and muonium. Physica Scripta. 36 : 493-496.

BARUT, A.O. ve PAVSIC, M., 1987: Classical model of the Dirac electron in curved space. ICTP preprint, IC/87/1.

BAUHOFF, W., 1975. Angular momentum and discrete symmetries in the spinor Bethe-Salpeter equation I. Z. Naturforsch. 30a: 395-401.

BAUHOFF, W., 1976. Angular momentum and discrete symmetries in the spinor Bethe-Salpeter equation II. Z. Naturforsch. 31a: 690.

BARDEEN, W.A., ELITZUR, S., FRISHMAN, Y. ve RABINDVICI, E., 1983. Fractional charges: global and local aspect. Nucl. Phys. B218: 445.

BEREZIN , F.A., 1966. The Method of Second Quantization. Academic Press, New York.

BEREZIN,F.A. ve MARINOV, M.S., 1977. Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics. Ann. Phys. 104: 336-362.

BETHE, H.A. ve SALPETER, E.E., 1951. A relativistic equation for bound-state problem. Phys. Rev. 82: 309.

BETHE, H.A. ve SALPETER, E.E., 1957. Quantum Mechanics of One-and Two-Electron Systems. Handbuch der Physik. Vol.35. Springer-Verlag Berlin.

BERNSTEIN, M. ve BROWN, S.L., 1984. Supersymmetry and the bistable Fokker-Planck equation. Phys. Rev.Lett. 52, 1933.

BERNSTEIN, M. ve BROWN, S.L., 1985. Topological invariance of the Witten index and related quantities. Phys. Rev. D. 31 (6): 1515.

BJORKEN, J.D. ve DRELL, S.D., 1964. Relativistic Quantum Mechanics. Mc Graw-Hill. New-York.

BISWAS, S.N. ve SONI, S.K., 1986. Supersymmetric classical mechanics Pramana. 27 (1): 117-127.

BOHM, A., 1986. Possible evidence for dynamical supersymmetry in hadron spectrum. Phys. Rev. D. 35 (4) 3358.

BOHR, H., 1984. On supersymmetry breaking by instanton effects. B 238 : 407-435.

BOUYANOVSKY, D. ve BLANKENBECLER, R. 1984. Fractional indices in supersymmetric theories. Phys. Rev. D. 30 (8): 1821.

BOYA, L.J., KMIECIK, M. ve BOHM., A. 1985. Calculations with spursymmetric potentials. Phys. Rev. D. 35 (4): 1255.

BREZIN, E., GROSS, D. ve ITZYKSON, C., 1984. Density of states in the presence of a strong megnetic field and random impurities. Nucl. Phys. B235 : 24-44.

BREIT, G., 1929. The effect of retardation on the interaction of two electrons. Phys. Rev: 34, 553.

BRINK , L., DiVECCHIA, P. ve HOWE, P., 1977. A Lagrangian formulation of the classical and quantum dynamics of spinning particles. Nucl. Phys. B118: 76-94.

CANNON, A. ve JORDAN, T.F., 1964. Canonical formulation of relativistic mechanics J.Math. Phys. 5: 299.

CARLITZ, R., 1985. Classical paths in supersymmetric quantum mechanics. Z. Phys. C-Particles and Fields. 26: 581-589.

CASALBUONI, R., 1976. The classical mechanics for Bose-Fermi systems. Nuovo Cim. 33A (3): 389-431.

CHATURVEDI, S. ve RAGHUNATHAN, K., 1986. Relation between Gelfand Levitan procedure and method of supersymmetric partners. J.Phys. A. 19: L775-L778.

CHIU, T.W., 1986. Non-relativistic bound-state problems in momentum space J.Phys. A. 19: 2537-2547.

CHILDERS, R.W., 1982. Two-body Dirac equation for semirelativistic quarks. Phys. Rev. D26: 2902-2915.

COLEMAN, S. ve MANDULA, J., 1967. All possible symmetries of the S-matrix. Phys. Rev. 159 (5): 1251-1256.

COMTET, A., BANDRAUK, A. ve CAMPBELL, D., 1985. Exectness of semiclassical bound state energies for supersymmetric quantum mechanics. Phys.Lett. B150 (1,2,3): 159.

CRATER, H.W., ve ALSTINE, V.P., 1983. Two-body Dirac equations. Ann. Phys (NY). 148: 57-94.

CRATER, H.W. ve ALSTINE, V.P., 1981. Relativistic quark potential for the vector mesons. Phys. Lett. 100B (2): 166-172.

CRATER, H.W. ve ALSTINE, V.P., 1984. Relativistic naive quark model for spinning quarks in mesons.Phys. Rev.Lett. 53 (16): 1527-1530.

CRATER, H.W. ve ALSTINE, V.P., 1984. Quantum constraint dynamics for two spinless particles under vector interaction. Phys. Rev. D30 (10):2585-2594.

CROMBRUGGHE, M. de ve RITTENBERG, V., 1982. Supersymmetric quantum mechanics. Ann.Phys. (NY). 151: 99-126.

CURIE, D.G., JORDAN, T.F. ve SUDARSHAN, C.E.G., 1963. Relativistic invariance and Hamiltonian theories of interacting particles. Rev. Mod.Phys. 35:350.

CUTKOSKY, R.E., 1954. Solutions of a Bethe-Salpeter equation. Phys. Rev. 96 (4): 1135-1141.

DARWIN, C.G. 1920. From "Classical Electrodynamics" J.D. Jakson. Wiley 1975. Original article: Phil.Mag. 39: 537.

DAVYDOV, A.S., 1976. Quantum Mechanics. Second Ed. Pergamon Press Oxford.

DAWSON, S., EICHTEN, E., QUIGG, G. Search for SUSY particles in hadron-hadron interactions. Phys. Rev. D.31: 1581.

DEI, E.A., KAPSHAI, V.N. ve SKACHKOV, N.B., 1987. Exact solution of quasipotential equations of general form with chromodynamic interaction Theor. Math. Phys. 69 (1): 997-1006.

DELBOURGO, R. ve JARVIS, P., 1975. The Bethe-Salpeter equation in superfield theory. J.Phys. G. 1 (8): 791-799.

DESER, A. ve ZUMINO, B., 1976. Consistent supergravity. Phys. Lett. B62 : 335.

D'HOKER, E. ve VINET, L., 1984. Supersymmetry of the Pauli equation in the presence of a magnetic monople. Phys. Lett. 137B (1,2): 72.

D'HOKER, E. ve VINET, L., 1985. Spectrum supersymmetries of particles in a Coulomb field. Nucl. Phys. B260: 79-102.

DIMOPOULOS, S. ve GEORGI, H., 1981. Softly broken supersymmetry and SU (5). Nucl. Phys. B193: 150.

Di VECCHIA, P. ve RAVNDAL, F., 1979. Supersymmetric Dirac particles Phys. Lett. 73A (5): 371-373.

DIRAC, P.A.M., 1964. Lectures on Quantum Mechanics. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University. New-York.

D'OLIVIO, J.C., URRUTIA, L.F. ve ZERTUCHE, F., 1985. Study of three dimensional quantum mechanical model with nucleon-nucleon type interaction. Phys. Rev. D32 (8): 2174-2189.

D'OLIVIO,J.C., URRUTIA, L.F. ve ZERTUCHE, F., 1985. Scattering regime in supersymmetric quantum mechanics. Phys. Lett. 159B (4,5,6): 791-799.

DROZ-VINCENT, Ph., 1970. Relativistic systems of interacting particles. Physica Scripta 2: 129.

DUFF, J.M. ve STELLE, K.S., 1982. In "Supergravity 81". Ed. R.Ferrara and J.Taylor. Cambridge Univ. Press.

DYSON, F.J., 1949 Radiation theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman. Phys. Rev. 75 : 481-

EDDINGTON, A.S., 1929. From the book "Wave mechanics and its applications by N.F.Mott and N.Sneddon. Original article: Proc.Roy. Soc. A 122: 358.

EFETOV, K.B., 1982. Supersymmetry method in localization theory. Sov. Phys. JETP 55: 514.

FARRAR, G.R. ve WEINBERG, S., 1983. SUSY at ordinary energies. Phys. Rev. D27, 2732.

FAYET, P. ve FERRARA, S., 1977. Supersymmetry. Phys. Rep. C.32 (5): 249-334.

FAYET, P., 1977. Spontaneously broken SUSY theories of weak, electromagnetic and strong interactions. Phys. Lett. B69, 489.

FAYET, P., 1987. Supersymmetric theories of particles and interactions Physica Scripta. T15: 46-60

FELDMAN, G., FULTON, T. ve TOWNSEND, J., 1974. Simplified BS equation for positronium. Ann. Phys. (NY) 82 :501.

FERMI, E. ve YANG, C.N., 1949. Relativistic bound-state equation for two-fermions Phys.Rev. 16: 1739.

FERRARA, S. ve ZUMINO, B., 1974. Supergauge invariant Yang-Mills theories Nucl. Phys. B79 : 413.

FREEDMAN, B. ve COOPER, F., 1983. Aspects of SUSY quantum mechanics. Ann. Phys. 146 : 262-288.

FREEDMAN, B. ve COOPER, F., 1985. A review of supersymmetric quantum mechanics. Physica D15: 138-146.

FUCHS, J., 1985. Remarks on supersy mmetric quantum mechanics at finite temperature. Ann. Phys. 165: 285-314.

GALVAO, A.P. ve TEITELBOIM, C., 1980. Classical supersymmetric particles. J.Math. Phys. 21 (7): 1863-1882.

GAMBOA, J. ve ZANELLI, J., 1985. Supersymmetric non relativistic mechanics. Phys. Lett. B165 (1,2,3):91

GAMBOA, J. ve ZANELLI, J., 1985. Supersymmetric quantum mechanics of the relativistic particle. ICTP preprint IC/86/243.

GAMONAL, R., 1986. Semiclassical approach to Dirac operators in external gauge field corresponding to SUSY quantum mechanics. Phys. Rev. D32 (10):2846

GAUNT, J.A., 1929. From the book "Wave Mechanics and Its Applications" N.F.Mott ve I.N. Sneddon Dover pub. 1948. Original article: Proc.Roy.Soc.A 122: 513.

GATES, S.J. GRISARU, M.T., ROCEK, M.ve SIEGEL, W.D., 1983. Superspace.Benjamin/Cummings Pub. Massachussetts.

GEFFEN, D.A. ve SUURA, H., 1977. Solutions to a two-body wave equation. Phys. Rev.D16: 3305-3319.

GENDENSHTEIN, L.E., 1983. Derivation of the exact spectra of the Schrödinger equation by means of supersymmetry. JETP Lett. 83 (6): 357.

GENDENSHTEIN, L.E., 1984. Supersymmetry in the problem of an elecron in a non-uniform magnetic field. JETP Lett. 39 (5): 281.

GENDENSHTEIN, L.E., 1986. Supersymmetry in quantum mechanics. Usp. Fiz. Nauk. 146: 553-590.

GENDENSHTEIN, L.E., 1986. Supersymmetric quantum mechanics, the electron in a magnetic field and vacuum degeneracy. Sov. J.Nucl. Phys. 41: 166.

GEORGI, H. ve GLASHOW.S., 1974. Unity of elemantary-particle forces. Phys. Rev.Lett. 32: 488.

GIRARDELLO, L. ve GRISARU, M.T., 1982. Soft breakings of supersymmetry. Nucl.Phys. B194 : 65.

GOLDSTEIN, H., 1980. Classical Mechanics. Second Ed. Addison-Vesley Pub. Massachussett.

GOL'FAND, Yu.A. ve LIKTHMAN, E.P., 1971. Extension of the algebra of Poincaré group generators and vialotion of P invariance.JETP Lett. 13 : 323.

GOURDIN, M., 1982. From GLA to SUSY and supergravity. Topical. Symp. on High. Energy Phys. 1982. World-Scientific Singapore.

GOZZI, E., 1983. Ground-state wave function representation. Phys. Lett. 129B: 432.

GOZZI, E., 1984. Onsager principle of microscopic reversibility and supersymmetry. Phys. Rev.D 30(6): 1218.

GOZZI, E., 1986. Nodal structure of supersymmetric wave function. Phys. Rev. D33 (12): 3665-3669.

GOZZI, E., 1986. Fermionic zero modes and violation of the fluctuation dissipation theorem. Phys. Rev. D33 (2): 584.

GREEN, M.B., SCHWARTZ, J.H. ve WITTEN, E., 1987. Superstring Theory. Vols: 1 and 2 Cambridge Univ. Press.

HAAG, R., LOPUZSANSKI, J.T. ve SOHNIUS, M., 1975. All possible generators of supersymmetries of the S-matrix. Nucl. Phys. B88-257.

HABER, H.E. ve KANE, G.L., 1985. Search for supersymmetry: probing physics beyond the standard model. Phys. Rep. 117 (2-4): 75-263.

HANSON, A., REGGE, T. ve TEITELBOIM, C. 1976. Constrained Hamiltonian Systems. Academia Nazionale Dei Lincei. Roma.

HAYMAKER, C. ve RAU, A., 1986. Supersymmetry in quantum mechanics. Am. J. Phys. 54 (10): 928-936.

HUGHES, R.J., KOSTELECKY, V.A., NIETO, M.M., 1986. SUSY quantum mechanics in a first order Dirac equation. Phys. Rev. D34: 110-1107.

IACHELLO, F., 1980. Dynamical supersymmetries in nuclei. Phys. Rev. Lett. 44: 772.

ILIOPOULOS, J., 1984. Unification and supersymmetry. Proc. of CERN Summer School. 1984.

INFELD. L., ve HULL. 1951. The Factorization Method.Rev. Mod. Phys. 23: 21.

IVANOV, G.G., 1985. Kinetic equation for a system of supersymmetric Dirac particles in electromagnetic or gravitational fields. Sov.Phys.22:16

ITZYKSON, C. ve ZUBER, J.B., 1980. Quantum Field Theory. Mc Graw Hill New-York.

JACOBS, S., OLSSON, M.G., ve SUCHYTA, C., 1986. Comparing the Schrödinger and spinless Salpeter equation for heavy quark bound states. Phys. Rev.D33 : 3338-3348.

JAUCH, J.M. ve ROHRLICH, F., 1980. The Theory of Photons and Electrons. Second Expanded Ed. Springer-Verlag. New-York.

JONES, D.R.T., 1985. Supersymmetric gauge thearies. TASI lectures in elementary particle physics. Ed.D. Williams. Michigan.

KAC, V.G., 1978. Lecture Notes in Mathematics. v.676. Springer-Verlag. Berlin.

KALB, M. ve ALSTINE, P., 1976. "Constraint Hamiltonian mechanics." Yale prepint. 3075.

KALUZA, Th., 1921. From the book "Workshop on Kaluza Klein Theories", 1983. Chalk River World Scientific. Original article: Berlin Math. Phys. K1: 966.

KATZ, A.R., 1986. Superspace mechanics as the classical limit of superfield theory. Lett. Math. Phys. 12: 329.342.

KALBERMANN, G., 1986. Kemmer-Duffin-Petiau equations from two-body Dirac equation. Racah Institute preprint. R1/86/40.

KALBERMANN, G., 1986. Kemmer-Duffin-Petiau equation approach to pionic atoms. Phys. Rev C34 (6): 2240

KAUL, K.R. ve MIZRACHI, L., 1984. On non-pertubative contributions to vacuum energy in supersymmetric quantum mechanical models. CERN TH.3944/84.

KEMMER, N., 1937. From the Barut's article in Fortschr. Phys. 33: 319 Original article: Helv. Phys. Acta. 10: 48.

KHARE, A. ve MAHARANA, J., 1984. Supersymmetry breaking in quantum mechanics Z.Phys.C.23: 191.

KHARE, A. ve MAHARANA, J., 1984. Supersymmetric quantum mechanics in one, two and three dimensions. Nucl. Phys. B244: 409.

KHARE, A., 1985. How good is the supersymmetry inspired WKB quantization condition. CERN TH. 4164/85.

KIHLBERG, A. ve SOLOMONSON, P., 1985. Witten index and supersymmetric quantum mechanics. Z.Phys. C.28: 203-209.

KLEIN, D., 1926. From the book "Workshop on Kaluza Klein Theories" Chalk River, 1983. World-Scientific. Original article: Z.Phys. 37: 895.

KOIDE, Y., 1968. On the two-body bound-states problem of Dirac particles. Prog.Theor. Phys. 39(3): 817.

KOIDE, Y., 1982. Exactly solvable model of relativistic wave equations and meson spectra. Nuova Cim. 70A: 411.

KOMAR, A., 1978. Constraint formalism of classicol mechanics. Phys. Rev. D18: 1881.

KOSTELECKY, V.A. ve NIETO, M.M., 1984. Evidence for a phenomenological supersymmetry in atomic physics. Phys. Rev. Lett.53: 2285.

KOSTELECKY,V.A. ve NIETO,M.M.,1985. Supersymmetry and the relationship between Coulomb and harmonic oscillator problems in arbitrary dimensions. Phys.Rev.D32 (10):2627.

KRAJCIK,R.A. ve NIETO,M.M.,1977. Historical development of the Bhabba first order relativistic wave equations for arbitrary spin. Am.J.Phys. 45 (9):818.

KROLIKOWSKI,W. ve RZEWUSKI,J.,1975. Coquarks.Nuovo Cim. 26A:126.

KWONG,W. ve ROSNER,J.,1986. Supersymmetric quantum mechanics and inverse scattering. Prog.Theor.Phys.Suppl. 86:366.

LADANYI,K.,1973.Expansion methods for the spinor-spinor BS equation. Ann.Phys.77: 471-516.

LAHANAS,A.B.ve NANOPOULDS,D.V.,1987.The road to no-scale supergavity. Phys.Rep.145:1-139.

LAMB,W.E. ve RETHERFORD,R.C.,1947. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. Phys.Rev. 72:241.

LANCASTER,D.,1984. Supersymmetry breakdown in SUSY quantum mechanics. Nuovo Cim.79A:28.

LANDAU,L.D. ve LIFSCHITZ,E.M.,1980. Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory) Pergamon Press. Oxford.

LEGOVINI,F.,1983. Supersymmetry. ICTP preprint.24/83/E.P.

LEUTWYLER,H.,1965. A no-interaction theorem in classical relativistic Hamiltonian particle mechanics. Nuovo Cim.37:556.

LLOSA,J.,1982.(Ed.): Relativistic Action at a Distance: Classical and Quantum Aspects. Lecture Notes in Physics vol.162. Springer-Verlag, Berlin.

LOGUNOV,A.A. ve TAVKHELIDZE,A.N.,1963. Quasi optical approach in quantum field theory. Nuovo Cim.29: 380-399.

LONGHI,G.ve LUSANNA,L.(Ed.), 1986. Constraint Theory and Relativistic Dynamics. World-Scientific.Singapore.

LURIE,D.,1968. Particles and Fields. Interscience Pub. New York.

MARTIN,J.L.,1959. From the book by A.P.Balachandran: Lect. Notes in Phys.V.188. Original article Proc.Roy. Soc. London A251: 536.

MARTYNENKO,A.P. ve FAUSTOV,R.N.,1986. Relativistic reduced mass and quasipotential equation. Theor. Math. Phys.64: 765.

MATVEEV,V.B.,1979. Darboux transformation. Lett. Math. Phys. 3 : 213.

Mc CLAIN,B., NIEMI,A., TAYLOR,C. ve WIJEWARDHANA,C.R.,1983. Superspace, dimensional reduction and stochastic quantization. Nucl.Phys. B 217 : 430.

MENOTTI,P.,1970. Normalization of the wave function and the non-relativistic limit in the BS equation. In Subnuclear Phenomena Ed.A.Zichichi Erice.

MILEWSKI,B.(Ed.), 1983. Supersymmetry and Supergravity. Proc.of XX'th Winter School, Karpacz. World-Scientific Singapore.

MINH,V.,ZHIDKOV,E.P. ve KADYSHVSKII,V.G.,1986. Nonrelativistic limit for the solutions of quasipotential equations. Theor.Mat.Phys.67 : 418-423.

MISRA,S.P. ve PATTNAIK,T.,1983. The action principle in superpace Phys.Lett. 129 B : 401-404.

MITRA,A.N.,1986. The Bethe-Salpeter equation from QED to QCD. Proc. Second. Asia Pacific Phys. Conf. World-Scientific.

NAKANISHI,N.,1969. A general survey of the theory of BS equation. Suppl. Prog.Theor.Phys. 43 : 1.

NANOPOULOS,D.V. ve SAVOY-NAVARRO,A.,1984 (Ed.), Supersymmetry Confronting Experiment. Phys. Rep. C 105: 1-140.

NANOPOULOS,D.V., 1986. Applied supersymmetry and supergravity. Rep. Prog. Phys. 49 : 61-105.

NICOLAI,H.,1976. Supersymmetry spin systems. J.Phys. A9 : 1497.

NIETO,M.M.,1984. Relationship between supersymmetry and inverse method in quantum mechanics. Phys. Lett. 145 B: 208.

NILLES,H.P., 1984. Supersymmetry, supergravity and particle physics. Phys. Rep. C 110: 1-162.

NIEUWENHUIZEN,P.van.1981. Supergravity. Phys. Rep. 68(4): 189-398.

O'RAIFEARTAIGH,L.,1975. Spontaneous supersymmetry breaking in chiral superfields. Nucl. Phys. B 96: 331.

O'RAIFEARTAIGH,L.,1985. Spontaneous breaking in supersymmetry. In "Spontaneous symmetry breakdown and related subjects". Ed.L.Michel. et.al.1985. p.269-302. World-Scientific.

PALUMBO,F.,1984. The Witten index in supersymmetric gauge theories. CERN-TH-3874/1984.

PARISI,G. ve SOURLAS,N., 1979. Random magnetic fields, supersymmetry and negative dimensions. Phys.Rev. Lett. 43 : 744.

PARISI, G. ve SOURLAS,N., 1982. SUSY field theories and stochastic differential equa tions. Nucl. Phys. B 206 : 321.

PARTOVI,M.H., 1976. New treatment of the bound state problems in quantum field theory. Phys.Rev.D 12 : 3887.

POLCHINSKI,J.,1985. Introduction to supersymmetric standard model. Proc. Third SLAC Summer Inst. 1985.

RAMOND,P.,1985. Supersymmetry in physics: an algebraic overview. Physica D 15 : 25-41.

RAVNDAL,F.,1980. Supersymmetric Dirac particles in external fields. Phys. Rev. D 21 : 2823-2832.

REMBIELINSKI,J. ve TYBOR,W.,1984. Possible superkinematics. Acta Phys. Polon. B 15 : 611.

ROHRLICH,F.,1979. Relativistic Hamiltonian Dynamics. Ann.Phys. 117 : 292-322.

ROMAN,P.,1965. Advanced Quantum Theory. Addison-Wesley Massachussets.

ROSS,G.G.,1984. Supersymmetric gauge theories. Proc. GIFT Inter, Sem. on Theor. Phys. Spain. World-Scientific.

RUBBIA, C.,1983. UAI Collaboration. Arnowitt et.al. Phys. Lett. B 122: 103.

RUMPF,H.,1986. A simple Grassmannian path integral representation of the Dirac propagator. J.Math. Phys. 27 : 1649-1654.

SALAM,A. ve STARTHDEE,J.,1974. Unitary representation of super gauge symmetries. Nucl. Phys. B 80 : 499.

SALAM,A, ve STRATHDEE,J.,1975. Superfields and Fermi-Bose symmetry. Phys. Rev. D 11 : 1521.

SALAM,A. ve STRATHDEE,J.,1978. Supersymmetry and superfields. Fortschr.Phys. 26 : 57-142.

SAKAI,N.,1981. Naturalness in SUSY GUT's. Z.Phys.C.11,153.

SALPETER,E.E. ve BETHE,H.A.,1951. A relativistic equation for bound state problems. Phys. Rev. 15 : 1232.

SALPETER,E.E.,1952. Mass corrections to the fine structure of Hydrogen like atoms. Phys.Rev.87: 328.

SATHIAPALAN,B.,1985. Generalized supersymmetric quantum mechanics. Phys. Lett. 55 : 669.

SAZDJIAN,H.,1985. The quantum mechanical transform of the Bethe-Salpeter equation. Phys.Lett. B 156 : 381.

SAZDJIAN,H.,1986. Light fermion bound states in two-particle relativistic mechanics. Phys. Lett. B 156 :381.

SAZDJIAN,H.,1986. Relativistic wave exuations for the dynamics of two interacting particles. Phys.Rev. D 33 : 3401.

SCADRON,M. D., 1979. Advanced Quantum Theory. Springer-Verlag, New York.

SCHWEBER ,S.S.,1961. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. Harper-Row, New-York.

SCHWEBER ,S.S., 1962. The BS equation in nonrelativistic quantum mechanics. Ann. Phys. 20 : 61.

SCHEUNERT,M., NAHM,W.,RITTENBERG,V.,1976. Classification of all semi simple GLA whose lie algebra is reductive J.Math.Phys. 17 : 1626.

SCHEUNERT,M.,NAHM,W.,RITTENBERG,V., 1977. Irreducible respresentation of the osp (2/1) and spl (2/1) GLA's. J.Math.Phys. 18 : 155.

SCHERK,J., 1975. An introduction to the theory of strings. Rev. Mod.Phys. 47 : 123.

SCHIFF,L.,1980. Quantum Mechanics. Third Ed. Mc.Graw Hill. New York.

SCHRÖDINGER,E.,1940. From the review article by Infeld and Hull: Rev.Mod.Phys. v.23.
Original article Proc.Roy. Irish. Acad. 46 A; 183 (1940).

SCHMUTZ,M.,1985. The factorization method and ground state energy bounds. Phys. Lett. 108A : 195.

SCHWINGER,J.,1948. QED: A covariant approach. Phys.Rev. 74: 1439.

SCHWINGER,J., 1970. Quantum Kinematics and Dynamics. Berjamin Pub. New York.

SCHWARZ,J.H., 1982. Superstring theory. Phys. Rep. 89 : 223.

SCHWARTZ,C., 1965. Solvable model of the BS equation. Phys. Rev. B 13 : 717.

SILAGADZE,Z.K.,1985. Solvable model of the relativistic two-fermion bound state problem with infinitely rising potentials. Theor. Math.Phys. 61: 431.

SILVESTRE-BRAC,B., BILAL,A. ve SCHUCK,P.,1984. On the validity of various approximations for the BS exuation. Phys. Rev. D 29 : 2275.

SMILGA,A.V.,1985. Instanton effects in N = 2 SUSY quantum mechanics. Nucl. Phys. B 249 : 413.

SOHNIUS,M.F.,1985. Introducing Supersymmetry.Phys.Rep. 128 : 39-204.

SOKATCHEV,E. ve STOYANOV,D.T.,1986. Nonrelativistic supersymmetry and Lorentz invariance. Mod.Phys. Lett. 1 : 577-583.

SOLOMONSON,P. ve van HOLTEN,J.,1982. Fermionic coordinates and supersymmetry. Nucl. Phys. B 196 : 509.

SUKUMAR,C.V.,1985. Supersymmetric quantum mechanics and inverse scattering methods. J.Phys. A 18 :2937.

SUKUMAR,C.V.,1985. SUSY and Dirac equation for a central Coulomb field. J. Phys. A 18 : L 697- L 701.

SUNDERMEYER,K.,1982. Constrained Dynamics. Lecture Notes in Physics vol. 169 Springer-Verlag, Berlin.

STELLE,K.S.,1984. Elements of supersymmetry.Proc. GIFT Inter. XV'th Sem. Spain. World-Scientific Singapore.

TAYLOR, J.G.,1982. A review of supersymmetry and supergravity. In Progress in Particle and Nucl. Phys. vol.12. Ed. D.Wilkinson.

THIRRING,W.,1981. A Course in Mathematical Physics. vol.3 Quantum Mechanics Springer-Verlag, Berlin.

TODOROV,I.T.,1969. On the three-dimensional formulation of the relativistic two-body problem. Lectures in Theor. Phys. vol. XII. Ed. W. Brittin and K.Mahanthappa. Gordon and Breach, New York.

TODOROV,I.T.,1971. Quasipotential equation corresponding to the relativistic eikonal approqimation. Phys. Rev D 3 (10) : 2351-2356.

TODOROV,I.T.,1978. Constrained Hamiltonian theory of interacting particles. Ann.Inst. H.Poincaré. 28 : 207.

TODOROV,I.T.,1980. Constraint Hamiltonian dynamics of directly interacting relativistic point particles. Proc. of 17'th School of Physics. Karpacz.

UI,H.,1984. SUSY quantum mechanics in three dimensional space. Prog. Theor. Phys. 72 : 813.

URRUTIA,L.F., ve HERNANDEZ,E.,1983. Long-range behaviour of nuclear forces as a manifestation of supersymmetry in nature. Phys.Rev.Lett. 51 :753.

VAN HOLTEN,J.W.,1981. Instantons in SUSY quantum mechanics. TH-3191-CERN.

VOLKOV,D.V. ve AKULOV,V.P.,1972. Possible universal neutrino interaction. JETP Lett. 16 : 438.

VOLKOV,D.V., SOROKA,V.A. ve TKACH, V.I., 1987. Classical and quantum Hamiltonian Systems with odd Poisson brackets. Sov. J. Nucl. Phys. 44 : 522.

VYOTSKII,M.I.,1986. Supersymmetric models of elementary particle physics. Sov.Phys. Usp. 28 : 667-693.

WEGNER,F.,1984. Disorder, dimensional reduction and supersymmetry in statistical mechanics. Proc. NATO ASI series. vol.35. Bonn.

WEINBERG,S.,1982. SUSY at ordinary energies.Phys.Rev.D 25 : 287.

WESS,J. ve ZUMINO,B.,1974. A Lagrangian model invariant under supergauge transformation. Phys.Lett. 49B : 52.

WESS.J. ve ZUMINO,J.,1974. Supergauge transformations in four dimensions. Nucl. Phys. B 70 : 39.

WESS.J., ve BAGGER,J.,1983. Supersymmetry and Supergravity. Princeton series in physics.

WEST,P.,1987. Introduction to Supersymmetry and Supergravity. World-Scientific. Singapore.

WICK,G.C.,1954. Properties of BS wave equation. Phys. Rev. 96 : 1124-1134.

WINDEY,P.,1984. SUSY quantum mechanics and Atiyah-Singer index theorem. Acta Phys.Polon. B 15 : 435.

WITTEN,E.,1981. Introduction to Supersymmetry. Lectures at ICTP. Trieste.

WITTEN,E.,1981. Dynamical breaking of supersymmetry.Nucl. Phys. B 188 : 513.

WITTEN,E.,1982. Constraints in SUSY breaking. Nucl.Phys. B 202, 253.

WITTEN,E.,1982. Supersymmetry and Morse theory. J.of. Differantial Geo. 17 : 661-692.

YILMAZER,A.U.,1986. Relativistic two-fermion problem with the most general electric and magnetic potentials. Fortschr. Phys. 34 : 345-359.

ZAIKOV,R.P.,1983. Supersymmetric quasipotential equations. Theor. Math. Phys. 55(1): 350.

ZAIKOV,R.P.,1985. Supersymmetric generalization of Todorov's equation. Theor. Math. Phys. 64:687

EK A: TENSÖR ve SPİNÖR CEBİRİNE İLİŞKİN NOTASYON ve KABULLER

A.1. Koordinatlar ve momentum

Uzay zaman koordinatları ve momentum kontravaryant dörtlü-vektörü ile gösterilmektedir(Bjorken ve Drell 1965) :

$$x^{\mu} = (x^{o},\vec{x}) \quad , \quad p^{\mu} = (E,\vec{p})$$

Düz uzay metriği aşağıdaki gibidir ;

$$g_{\mu\nu} = \text{diag.}\ (+, -, -, -)$$

İç çarpım ise

$$p_1 \cdot p_2 = p_1^{\mu}\ p_{2\mu} = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

biçimindedir. Kovaryant dörtlü-vektörler $A_{\mu} = g_{\mu\nu}\ A^{\nu}$ şeklinde elde edilir, ve koordinat uzayındaki momentum işlemcisi

$$p^{\mu} = i \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (i \frac{\partial}{\partial t} , \frac{1}{i} \vec{\nabla}) = i\nabla^{\mu}$$

ile gösterilir.

A.2. Spinörler.

θ_A (A = 1,2) iki-bileşenli Weyl spinörü SL(2,C) grubunun bir M matrisi ile dönüşür. Benzer şekilde $\bar{\theta}_{\dot{A}}$, θ^{A} ve $\bar{\theta}^{\dot{A}}$ spinörleri sırasıyla $M^{\star}$, M^{-1} ve $(M^{-1})^{\star}$ matrisleriyle dönüşürler. $\bar{\theta}_{\dot{A}} = \theta^{\star}_{A}$ yazabiliriz. Spinör indislerini indirip kaldırmak için aşağıdaki iki-boyutlu antisimetrik ϵ tensörü kullanılır :

$$\epsilon_{AB} = \epsilon^{AB} = -\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = -\epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \quad , \quad \epsilon_{12} = 1 \ , \ A,B = 1,2$$

Böylece

$$\theta_A = \epsilon_{AB}\,\theta^B \qquad \theta^A = \epsilon^{AB}\theta_B$$

$$\bar{\theta}_{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\,\bar{\theta}^{\dot{B}} \qquad \bar{\theta}^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\bar{\theta}_{\dot{B}}$$

yazabiliriz.

θ ve $\bar{\theta}$'ın kareleri aşağıdaki gibi tanımlanır ;

$$\theta^2 = \theta^A\theta_A = \epsilon_{AB}\theta^A\theta^B \quad , \quad \bar{\theta}^2 = \bar{\theta}_{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}} = -\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\,\bar{\theta}^{\dot{A}}\,\bar{\theta}^{\dot{B}}$$

Dolayısıyla

$$\theta^A\theta_A = -\theta_A\theta^A$$

olduğunu görmekteyiz. ϵ sembolü için

$$\epsilon^{CB}\,\epsilon_{BA} = -\,\epsilon_{AB}\epsilon^{CB} = \delta^C_A$$

eşitliği verilebilir.

Pauli matrisleri, μ uzay-zaman indisinin yanısıra noktalı ve noktasız spinör indisleri de taşır :

$$\sigma_\mu^{A\dot{B}} = \sigma^\mu_{\dot{B}A} = (1,\vec{\sigma})_{\mu\,;AB}$$

Burada

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\bar{\sigma}$ matrisleri ise şu şekilde tanımlanır :

$$\bar{\sigma}_\mu^{A\dot{B}} = (1,-\vec{\sigma})_{\mu\,;AB}$$

İki Weyl spinöründen dört bileşenli bir Dirac spinörü kurulabilir ;

$$\Psi_D = \begin{bmatrix} \chi_A \\ \bar{\xi}_{\dot{B}} \end{bmatrix} \qquad A,B = 1,2$$

Dirac matrisleri için benimsenen gösterim;

$$\gamma^{\mu} = \begin{matrix} 0 & \sigma^{\mu}{}_{A\dot{B}} \\ \sigma^{\mu B\dot{A}} & 0 \end{matrix} \qquad \mu = 0,1,2,3$$

dır. Bir spinörün Dirac eşleniği

$$\bar{\Psi} = \Psi^{+}\gamma^{o}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Bir Weyl spinöründen aşağıdaki gibi Majorana spinörü oluşturabiliriz :

$$\chi^{\alpha} = \begin{bmatrix} \chi^{A} \\ \bar{\chi}_{\dot{A}} \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki eşitlikler sık sık kullanılmıştır :

$$\sigma^{\mu}{}_{A\dot{B}}\sigma_{\nu}{}^{A\dot{B}} = 2g^{\mu}{}_{\nu} \quad , \bar{\sigma}^{\mu}{}_{C\dot{D}}\sigma_{\mu}{}^{A\dot{B}} = 2\delta^{A}_{C}\delta^{\dot{B}}_{\dot{D}}$$

$$\theta\theta = 2\theta^{1}\theta^{2} \quad , \quad \Psi\chi = \chi\Psi \quad (\Psi\chi)^{+} = \bar{\chi}\bar{\Psi} = \bar{\Psi}\bar{\chi}$$

$$(\theta\phi)(\theta\Psi) = -\frac{1}{2}(\phi\Psi)\theta\theta$$

$$\phi\sigma^{\mu}\bar{\chi} = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\phi \quad , \quad (\phi\sigma^{\mu}\bar{\chi})^{+} = \chi\sigma^{\mu}\bar{\phi}$$

$$(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})(\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta}) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$$

EK B : (3.38) DENKLEMLERİNİN ÇIKARTILIŞI

Burada (3.38) denklemlerinin çıkartılışı için sistematik bir yaklaşım verilecektir. Önce (3.26) da yer alan terimleri S_{AB}'ler cinsinden ifade etmeye çalışalım ve herbirinin Ψ üzerine etkilerini bulalım :

1. $(\vec{\alpha}^{(1)}-\vec{\alpha}^{(2)}).\vec{p}\Psi = -i(\alpha^k_{(1)} - \alpha^k_{(2)})\partial_k\Psi$

$$= (S^{(1)}_{4k} - S^{(2)}_{4k})\,\partial_k\,(aC + \frac{1}{2}\,S_{CD}\,C\Psi_{CD})$$

$$= (S_{4k}\partial_k a + S_{4k}\partial_k a)C + \frac{1}{2}\,(S^{(1)}_{4k} - S^{(2)}_{4k})\partial_k\,S_{CD}\Psi_{CD}C$$

$$= 2S_{4k}\partial_k a\;C + \frac{1}{2}\,[-4\partial_k\Psi_{4k}C - i\,\epsilon_{4kCDEF}S_{EF}\partial_k\Psi_{CD}C]$$

$$= (2S_{4k}\partial_k a)C - 2\partial_k\Psi_{4k}C + \frac{i}{2}\,\epsilon_{klm}\,[2S_{56}\,\partial_k\Psi_{lm}$$

$$+ 2S_{lm}\partial_k\Psi_{56} - 2\,S_{m6}\partial_k\Psi_{\ell 5} - 2\,S_{m5}\,\partial_k\Psi_{\ell 6}\;C]$$

$$= [-2i\vec{\alpha}.\vec{\nabla}a + 2i\vec{\nabla}.\vec{E} - 2i\beta_5\vec{\nabla}.\vec{H} - 2i\vec{\beta}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{\chi})$$

$$- 2i\gamma.(\vec{\nabla}\wedge\vec{\varphi}) - 2\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\eta)]\;C$$

2. $[m_1\beta^{(1)} + m_2\beta^{(2)}]\Psi = -i(m_1 S^{(1)}_{45} + m_2\,S^{(2)}_{45})(aC + \frac{1}{2}\,S_{CD}C\Psi_{CD})$

$$= (m_1-m_2)\gamma_o aC - \frac{i}{2}\,(m_1 S_{45}S_{CD}\,\Psi_{CD} - m_2\,S_{CD}S_{45}\Psi_{CD})C$$

$$= (m_1-m_2)\gamma_o aC -2i\ (m_1 + m_2)(S_{5D}\,\Psi_{4D} + S_{4D}\,\Psi_{5D})C$$

$$- \frac{1}{4}\,\epsilon_{CD45EF}\ S_{EF}\ \Psi_{CD}\ (m_1 - m_2)C$$

$$= [\,(m_1 + m_2)(-\beta_o\eta + \beta_5\varphi_o + \vec{\alpha}.\vec{\chi} - \vec{\gamma}.\ \vec{E})$$

$$+ (m_1-m_2)(\gamma_o a - i\vec{\sigma}.\vec{\varphi} - \chi_o + \vec{\beta}.\vec{H}]\ C$$

3. $$(\vec{\alpha}^{(1)}.\vec{\alpha}^{(2)})\Psi = [\,i\ S^{(i)}_{4k}\,i\ S^{(2)}_{4k}]\ \Psi$$

$$= -S^{(1)}_{4k}\ S^{(2)}_{4k}\ (aC + \frac{1}{2}\ S_{CD}C\Psi_{CD})$$

$$= [\,S_{4k}\ S_{4k}a + \frac{1}{2}\ S_{4k}\ S_{CD}\ S_{4k}\ \Psi_{CD}]\ C$$

$$= -3aC + [\,3\ S_{4D}\ \Psi_{4D} - 3S_{4k}\,\Psi_{4k} + S_{KD}\ \Psi_{kD}$$

$$- \frac{1}{8}\,\epsilon_{4k\ CDEF}\ \epsilon_{4k\ EFGH}\ S_{GH}\Psi_{CD}\ ]C$$

$$= [\,-3a - i\vec{\sigma}.\vec{H} - \vec{\alpha}.\vec{E} - \vec{\gamma}.\vec{\chi} - \vec{\beta}.\vec{\phi} - 3\gamma_o\gamma_o$$

$$-3\beta_o\varphi_o - 3\beta_5\eta\ ]\ C$$

Benzer şekilde (3.26) daki diğer terimler de hesaplanabilir. Bu sonuçları dalga denklemine yerleştirir ve jeneratörlerin çizgisel bağımsızlığını kullanırsak (3.38)'de verilen çiftlenimli sekiz denklemi elde edebiliriz.