ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÖZDE-ANALİTİK FONKSİYONLAR

Kerim KOCA

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

1987
ANKARA

ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÖZDE-ANALİTİK FONKSİYONLAR

Kerim KOCA

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 15.10.1987 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından 95. (Doksanbeş..) Not Takdir Edilerek Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Okay ÇELEBİ (Danışman)	Prof.Dr.Türkân BAŞGÖZE	Doç.Dr.Albert ERKİP

ÖZET

Doktora Tezi

SÖZDE-ANALİTİK FONKSİYONLAR

Kerim KOCA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof.Dr.Okay ÇELEBİ

1987, Sayfa: 44

Jüri : Prof.Dr. Okay ÇELEBİ
Prof.Dr. Türkân BAŞGÖZE
Doç.Dr. Albert ERKİP

Bu çalışmada, sözde-analitik fonksiyonlar uzayı $P_D(E)$'nin bir altuzayı olan $P_D(F,fF)$ uzayı incelenmiştir. İnceleme sırasında, $P_D(E)$ de geçerli olmayan ancak bu alt sınıf için geçerli olan bazı teoremler ve bu teoremlere ilişkin sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, tamamen bilinen ve $P_D(F,fF)$ uzayının incelenmesinde ihtiyaç duyulan temel tanım, kavram ve bazı teoremlerin yanında kısa bir açıklamayı kapsamaktadır. İkinci bölümde $P_D(F,fF)$ uzayı incelenmiş ve buna ilişkin bazı sonuçlar elde edilmiştir. n bir tamsayı olmak üzere $P_D(F^n,iF^n)$, $P_D(F^n,fF^n)$ uzayları üçüncü bölümde ele alınmış ve bu uzayların $P_D(F,fF)$ uzayı ile ilişkisi ortaya konmuştur. Dördüncü bölümde doğurucu çift denilen fonksiyon çifti kullanılmadan bir kompleks denklem sistemi incelenmiş ve bu sistemin çözümleri fonksiyonel denklemlerden yararlanılarak elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Doğurucu çift, Sözde-analitiklik, Doğurucu dizi

ABSTRACT

PhD Thesis

PSEUDO-ANALYTIC FUNCTIONS

Kerim KOCA

Ankara University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof.Dr.A. Okay ÇELEBİ
1987, Page 44

Jury : Prof.Dr. Okay ÇELEBİ
Prof.Dr. Türkân BAŞGÖZE
Assoc.Prof.Dr. Albert ERKİP

In this article the subspace $P_D(F,fF)$ of the space $P_D(E)$ of pseudo-analytic functions have been investigated. Some theorems and corrolaries related with these theorems have been constructed for this particular subspace which does not hold in $P_D(E)$, in general.

The thesis is composed of four chapters. In the first chapter some fundamental definitions and theorems for the space $P_D(F,fF)$ are summaried which can also be obtained from the existing literature. In the second chapter some new properties for $P_D(F,fF)$ have been stated. The spaces $P_D(F^n,iF^n)$ and $P_D(F^n,fF^n)$ with $n \in Z$ have been constructed in the third chapter. Also, the interrelationships between $P_D(F,fF)$ and the above mentioned spaces have been obtained. In the last chapter the solutions of a system of complex differential equations have been discussed by use of the functional equations.

KEY WORDS : Generating pair, pseudo-analytic functions, generating sequence.

Bu doktora tezinin konusunu bana seçerek tezin hazırlanışı sırasında çalışmalarımı yönlendiren ve büyük yardımlarını gördüğüm Sayın Hocam,

Prof.Dr. Okay ÇELEBİ'ye

en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Kerim KOCA

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$P_D(A)$	Analitik fonksiyonlar uzayı
Π	Çarpım sembolü
$\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	Kompleks diferensiyel operatörler
(F,G)	Doğurucu çift
$\{(F_\nu, G_\nu)\}_{\nu \in Z}$	Doğurucu dizi
E_{D_0}	D_0 da tanımlı doğurucu çiftlerin uzayı
$\frac{d_E \cdot}{dz}$	E-Türev operatörü
a_E, b_E, A_E, B_E	Karakteristik katsayılar
X	Kartezyen çarpım
$P_D(E)$	Modulo E-ye göre sözde-analitik fonksiyonlar uzayı
Ω_D	Reel değerli, kompleks değişkenli fonksiyonlar çifti uzayı
$\subset\subset$	Relatif kompakt kapsama bağıntısı
Σ	Toplam

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Giriş

Sözde-analitik fonksiyonlar, 1942 yılından beri üzerinde ünlü matematikçilerin çalıştığı ve özel hallerinin Elastisite Teorisi ile Gazlar Dinamiğinde kullanıldığı aktüel bir konudur. Özellikle 1953'te L. Bers'in yazdığı "Theory of pseudo-analytic functions" adlı kitap Bauer, Gilbert, Habetha, Koohara, Protter, Tutschke ve Vekua gibi ünlü matematikçilerin dikkatini çekmiştir. Çeşitli matematikçiler tarafından ortaya atılan açık problemler, konuyu daha da ilginç hale getirmiştir. Bir kaç örnek vermek gerekirse, Bers'in 1953 yılında ortaya koyduğu doğurucu diziler için periyodiklik problemi, 1955 yılında Protter tarafından "The Periodicity Problem for Pseudo-analytic Functions" adlı çalışmada çözüldü. Bu ilginç problemin çözümünden sonra Japon Matematikçi Koohara'nın 1976 yılında yaptığı bir inceleme sırasında karşılaştığı ve açık problem olarak bıraktığı

$$G_{\bar{t}} = \frac{\bar{K}\,K_{\bar{t}}}{1-K\bar{K}}\,G - \frac{\overline{K_t}}{1-K\bar{K}}\,\bar{G} \qquad (1.1.1)$$

diferensiyel denkleminin çözümleri, daha sonra 1978 yılında, diferensiyel operatör yardımıyla Bauer tarafından elde edildi. Zamanımızda ise Bauer, Tutschke, Withalm gibi matematikçilerin yaptığı konuya ilişkin inceleme ve araştırmalar devam etmektedir.

$P_D(E)$ sembolü ile gösterdiğimiz sözde-analitik fonksiyonlar uzayının $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektöruzay yapısına sahip olduğu bilinmektedir. Genel halde bu uzay, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzay oluşturmaz. Bundan başka $P_D(E)$, $\mathbb{R}$ üzerinde cebir yapısına da sahip değildir. Withalm, 1974 yılında yaptığı "Über algebraische Strukturen pseudoanalytischer Funktionen" adlı bir çalışmada $P_D(E)$'nin iki elemanının çarpımını tanımlayarak bu uzayın cebirsel yapısını inceledi. Ancak iki elemanın çarpımı, $P_D(E)$ uzayına ait olmayıp "$P_D(E)$'nin dalları" adını verdiği bir başka uzaya ait olmaktadır.

Bundan başka genelde $P_D(E)$'nin bir w elemanı için tanımlanan E-Türevi hesaplandığında elde edilen fonksiyon yine $P_D(E)$ uzayının elemanı değildir.

İncelemeyi, aksi belirtilmedikçe basit bağlantılı bir $D_o \subset \mathbb{C}$ bölgesinde yapacağız. D ise D_o'da relatif kompakt bir bölge olarak gözönüne alınacaktır.

Sözde-analitik fonksiyonların ortaya çıkışı Cauchy-Riemann denklemleri olarak bilinen

$$\begin{aligned} u^{\star}_x - v^{\star}_y &= 0 \\ u^{\star}_y + v^{\star}_x &= 0 \end{aligned} \qquad (1.1.2)$$

reel denklem sisteminin genelleştirilmesi düşüncesine dayanır. Burada u^* ve v^* reel değerli fonksiyonları, bir w^* analitik fonksiyonunun sırasıyla reel ve sanal kısımlarıdır. Bu durumda $w^*_{\bar{z}} = 0$ olacağı açıktır. Şimdi (1.1.2)'den daha geniş bir reel sistem olan

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= au + bv \\ u_y + v_x &= cu + dv \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

denklem sistemini gözönüne alalım. Burada a,b,c,d katsayıları D_o'da Hölder-sürekli, reel değerli fonksiyonlardır. (1.1.3)'deki ikinci denklem "i" ile çarpılıp taraf tarafa toplanarak düzenlenirse $w = u + v$, $\bar{w} = u - iv$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}} = A_o w + B_o \bar{w} \tag{1.1.4}$$

kompleks diferensiyel denklemine ulaşılır. Burada

$$A_o = \frac{1}{4}[a + d + i(c - b)]$$

$$B_o = \frac{1}{4}[a - d + i(b + c)]$$

dır. $A_o \equiv 0$, $B_o \equiv 0$ alınırsa w'nin D'de analitik bir fonksiyon olacağı açıktır. L. Bers (1953) (1.1.4)'ün çözümlerini "Sözde-analitik fonksiyonlar" olarak isimlendirdi.

Bers (1953), (1.1.4) diferensiyel denklemini, "doğurucu çift" denilen ve belli özellikleri sağlayan (F,G) fonksiyon çifti yardımıyla inceledi. Rus matematikçi Vekua

(1963) ise aynı formdaki denklemi, A_o, $B_o \in L_{p,2}$[1]; $p > 2$ koşulu altında inceledi ve çözümlerin integral gösterilimini elde etti. Bers ise belli koşullar altında bu denkleminin çözümlerini direkt olarak ortaya koymuştu.

1.2. Temel Kavramlar

Şimdi $P_D(F,fF)$ uzayının incelenmesinde ihtiyaç duyacağımız sözde-analitik fonksiyonlarla ilgili bazı tanım ve kavramları açıklayacağız.

TANIM 1.2.1. $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde basit bağlantılı bir D_o bölgesini gözönüne alalım. D_o bölgesinde tanımlı F,G fonksiyonları

i) $\forall z \in D_o$ için $\text{Im}[\overline{F(z)}G(z)] > 0$

ii) $\forall z \in D_o$ için $F,G \in H^1_{D_o}$

koşullarını gerçekliyorsa $E := (F,G)$ fonksiyon çiftine <u>doğurucu çift</u> (generating pair) denir. $H^1_{D_o}$, D_o'da tanımlı Hölder-sürekli 1. basamaktan diferensiyellenebilir fonksiyonların uzayını göstermektedir. D_o'da tanımlı doğurucu

---

1) $L_{p,2}$ uzayının tanımı ve özelliği için Vekua'nın "Verallgemeinerte analytische Funktionen" adlı kitabının 6-12 sayfaları arasına bakılabilir.

çiftlerin uzayını bundan sonra E_{D_o} ile göstereceğiz.

D, D_o'da relatif kompakt yani $D \subset\subset D_o$, $\bar{D} \subset D_o$ olacak şekilde bir altbölge olsun. Şimdi

$$\Omega_D := \{\omega = \binom{\varphi}{\psi} \mid \varphi, \psi : D \to \mathbb{R}\}$$

cümlesini gözönüne alalım.

TANIM 1.2.2. $\omega = \binom{\varphi}{\psi} \in \Omega_D$, $E \in E_{D_o}$ olsunlar.
$w := E.\omega$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada ., alışılmış iç-çarpım operatörüdür. $\forall z$, $z_o \in D$, $z \neq z_o$ için

$$\dot{w}(z_o) := \frac{d_E w}{dz}(z_o) := \lim_{z \to z_o} [E(z) \cdot \frac{\omega(z)-\omega(z_o)}{z - z_o}] \quad (1.2.1)$$

limiti varsa D'de tanımlı w fonksiyonuna z_o noktasında <u>1. türden regüler (F,G)-sözde-analitik fonksiyon</u> ve (1.2.1.) limitine de w'nın <u>E-Türevi</u> denir. Eğer (1.2.1) limiti D bölgesinin tümünde varsa w'ya D'de 1.türden (F,G)-sözde-analitik fonksiyonu denir ve $P_D(E)$ sembolüyle gösterilir.

$w = E.\omega \in P_D(E)$ ise o zaman $F\varphi_{\bar{z}} + G\psi_{\bar{z}} = 0$ koşulu altında w fonksiyonu $w = F\varphi + G\psi$ formunda yazılabilir. Buna göre

$$_{\star}w := \frac{\bar{G} - i\bar{F}}{F\bar{G} - \bar{F}G} w - \frac{G - iF}{F\bar{G} - \bar{F}G} \bar{w} \equiv \varphi + i\psi \quad (1.2.2)$$

fonksiyonu, modulo E'ye göre <u>2. türden E-sözde-analitik fonksiyon</u> olarak isimlendirilir (Bers 1953).

Şimdi 2.türden E-sözde-analitik fonksiyon için önemli bir teorem verelim :

TEOREM : 1.2.1. Bir ${}_{\star}w = \varphi + i\psi$ fonksiyonunun 2. türden (F,G)-sözde-analitik olması için gerek ve yeter koşul, φ ve ψ reel değerli fonksiyonlarının sürekli kısmî türevlere sahip olması ve

$$F\varphi_{\bar{z}} + G\psi_{\bar{z}} = 0 \qquad (1.2.3)$$

bağıntısının gerçeklenmesidir. Eğer (1.2.3) gerçeklenirse

$$\dot{w} = F\varphi_z + G\psi_z \qquad (1.2.4)$$

bağıntısı da gerçeklenir.

Bers (1953), bu teoremin ispatını "Theory of Pseudo-analytic Functions" adlı kitabının 26. sayfasında verdi.

$\Delta^{\star} := F\bar{G} - \bar{F}G$ olmak üzere

$$a_E := -(\bar{F}G_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\bar{G})/\Delta^{\star}, \quad b_E := (FG_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}G)/\Delta^{\star}$$
$$A_E := -(\bar{F}G_z - F_z\bar{G})/\Delta^{\star}, \quad B_E := (FG_z - F_zG)/\Delta^{\star} \qquad (1.2.5)$$

fonksiyonlarına bundan sonra karakteristik katsayılar diyeceğiz. Buna göre $w \in P_D(E)$ ise

$$w_{\bar{z}} = a_E w + b_E \bar{w} \qquad (1.2.6)$$

$$\dot{w} = w_z - A_E w - B_E \bar{w} = F\varphi_z + G\psi_z \qquad (1.2.7)$$

bağıntılarının gerçekleneceği basit bir hesapla görülebilir.

TANIM : 1.2.3. $E = (F,G)$, $E_1 := (F_1, G_1)$ iki doğurucu çift olsun. Eğer

$$a_{E_1} = a_E \quad , \quad b_{E_1} = -B_E \tag{1.2.8}$$

bağıntıları gerçeklenirse E doğurucu çiftine E'nin <u>bir izleyeni</u> (successor), E'ye de E_1 'in <u>izleneni</u> (predecessor) denir.

Şimdi burada sözde-analitik fonksiyonlar teorisinde çok önemli bir yeri olan bir teoremi daha verelim:

TEOREM : 1.2.2. w, 1. türden E-sözde-analitik ve E_1 , E'nin bir izleyeni olsun. Bu takdirde

$$\dot{w} = \frac{d_E w}{dz}$$

fonksiyonu 1. türden E_1 -sözde-analitiktir.

Bu teoremin ispatı, Bers'in yukarıda belirtilen kitabının 44. sayfasında bulunabilir.

TANIM : 1.2.4. $a_{ij}(i,j = 1,2)$'ler $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} > 0$ koşulunu sağlayan reel sabitler ve $E \in E_{D_0}$ olmak üzere

$$\tilde{F} = a_{11} F + a_{12}G, \; \tilde{G} = a_{21} F + a_{22}G \tag{1.2.9}$$

bağıntısı gerçeklenecek şekilde $\tilde{E} := (\tilde{F},\tilde{G}) \in E_{D_0}$ varsa $(\tilde{F},\tilde{G})$ ve (F,G) doğurucu çiftlerine <u>denktir</u> (equivalent) denir.

Bu araştırmada ihtiyaç duyulan kavramlardan bir tanesi de "doğurucu dizi" dir.

TANIM 1.2.5. a) $\forall \nu \in Z$ için $(F_{\nu+1}, G_{\nu+1})$ doğurucu çifti, (F_ν, G_ν) doğurucu çiftinin bir izleyeni ise $\{(F_\nu, G_\nu)\}_{\nu \in Z}$ doğurucu çiftlerin dizisine bir doğurucu dizi (generating sequence) denir.

b) $(F_0, G_0) = (F,G)$ ise (F,G) doğurucu çifti, $\{(F_\nu, G_\nu)\}_{\nu \in Z}$ doğurucu dizisine daldırılmıştır (embedded) denir.

c) $(F_{\nu+\mu}, G_{\nu+\mu})$ doğurucu çifti, (F_ν, G_ν)'ye denk olacak şekilde bir $\mu > 0$ doğal sayısı varsa $\{(F_\nu, G_\nu)\}_{\nu \in Z}$ doğurucu dizisine μ periyodludur diyeceğiz. Tersine böyle bir μ sayısı yoksa bu dizi sonsuz periyotludur veya bir periyoda sahip değildir denir.

d) D_0 bölgesinde (F,G) doğurucu çiftinin daldırıldığı en küçük periyotlu doğurucu dizinin periyoduna minimal periyot denir Bers (1953).

TANIM : 1.2.6. Her 1. türden E-sözde-analitik fonksiyon aynı zamanda 1. türden $\tilde{E}$-sözde-analitikse E ve $\tilde{E}$ doğurucu çiftlerine Bers anlamında eş etkilidir (equipotent) denir.

Şimdi eş etkililiği karakterize eden önemli bir teoremi verelim :

TEOREM : 1.2.3. $E = (F,G)$, $\tilde{E} = (\tilde{F},\tilde{G})$ aynı bölgede tanımlı iki doğurucu çift olsun. Bu takdirde aşağıdaki üç hal birbirine denktir:

i) E ve $\tilde{E}$ eş etkilidir.

ii) $a_{\tilde{E}} = a_E$, $b_{\tilde{E}} = b_E$

iii) $\tilde{F}$ ve $\tilde{G}$, 1. türden E-sözde-analitiktirler (Bers 1953).

Doğurucu çiftlerde eş etkililikle ilgili olan bu teoremin ispatı Yüksek Lisans Tezi (Koca 1982)'nin 49. sayfasında bulunabilir.

$w \in P_D(E)$ ve D bölgesinde $w \neq 0$ olsun. O zaman w

$$w_{\bar{z}} = a_E w + b_E \bar{w}$$

diferensiyel denklemini sağlar. Bu diferensiyel denklemin her iki yanı w ile bölünüp $\bar{z}$'ye göre integrallenir ve Ostrogradski formülü [1] kullanılırsa o zaman bu diferensiyel denklemin bir

$$w(z) = f(z)\, e^{s(z)} \qquad (1.2.10)$$

çözüm gösterilimi elde edilebilir. Burada f,D bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere

$$s(z) := -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{a_E(\zeta) + [b_E(\zeta)\, \overline{w(\zeta)}/w(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\xi \wedge d\eta \qquad (1.2.11)$$

dir. Bu durumda s fonksiyonu D'de düzgün sürekli ve k yalnızca D ile (F,G) doğurucu çiftine bağlı bir sabit olmak

---

1) Düzlemde "Green Formülü" olarak da bilinen Ostrogradski formülü için Vekua'nın "Verallgemeinerte analytische Funktionen" adlı kitabının 45-48. sayfaları arasına bakılabilir.

üzere $|s(z)| \leq k$ dir. (1.2.10) gösterilimi, sözde-analitik fonksiyonlar uzayında "<u>Benzerlik Prensibi</u>"(similarity principle) olarak bilinir. $w \in P_D(E)$ ve f, D bölgesinde analitik bir fonksiyon olarak verildiğinde $w = fe^s$ şeklinde D'nin $\bar{D}$-kapanışında sıfırdan farklı, sürekli bir s fonksiyonu bulunabilirse f ve w'ya <u>benzerdir</u> denir (Bers 1953).

Şimdi benzerlik prensibini karakterize eden bir teoremin ifadesini ispatsız olarak veriyoruz.

TEOREM : 1.2.4. (Benzerlik Prensibi). D, sınırlı bir bölge olsun. D'de tanımlı ve E-sözde-analitik her w fonksiyonu, bir f benzer analitik fonksiyonuna sahiptir. Tersine, her f analitik fonksiyonu, bir benzer E-sözde-analitik fonksiyonuna sahiptir. Eğer fonksiyonlardan biri verilmişse

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{w(z)} = \alpha \qquad (1.2.12)$$

olacak şekilde diğerini seçebeliriz. Burada z_o, $\bar{D}$'nin verilmiş bir noktası ve $\alpha \neq 0$ sonlu bir değerdir.

Bundan sonra $P_D(A)$ sembolü ile D'de tanımlı analitik fonksiyonların cümlesini göstereceğiz.

Son olarak sözde-analitik fonksiyonlarda "genelleştirilmiş sabit" ve "E_{D_o}'da benzerlik" kavramlarını verelim.

TANIM : 1.2.7. $w \in P_D(E)$ ve $\omega = \binom{\varphi}{\psi} \in \Omega_D$ olsun. $w = E.\omega$ yazılışında ω'nın bileşenleri reel sabitlerse w'ya, modülo E'ye göre <u>genelleştirilmiş sabit</u> denir ve genelleştirilmiş sabitlerin uzayı $P_D^O(E)$ sembolüyle gösterilir (Withalm 1974). $P_D^O(E)$, $P_D(E)$'nin bir alt vektör uzayıdır. w'nin modülo E'ye göre genelleştirilmiş sabit olması için gerek ve yeter koşul $\dot{w} \equiv 0$ olmasıdır (Bers 1953).

TANIM 1.2.8. $E = (F,G)$, $\tilde{E} = (\tilde{F},\tilde{G}) \in E_{D_O}$ olsun. $F\tilde{G} \equiv \tilde{F}G$ bağıntısı gerçekleniyorsa E ve $\tilde{E}$ doğurucu çiftlerine benzerdir denir.

2. $P_D(F,fF)$ UZAYI VE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde, $P_D(F,fF)$ uzayının özellikleri incelenecektir. Elde edilen sonuçların bir kısmı, "Über die Eigenschaften des Raumes $P_D(F,fF)$" (Koca-Withalm (1987)) adlı çalışmada yer almaktadır.

2.1. İki Gösterilim Teoremi ve Sonuçları

TEOREM 2.1.1. $w \in P_D(E)$ ve $f \in P_D(A)$ olsun. w'nın

$$w_{\bar{z}} = a_E w \tag{2.1.1}$$

diferensiyel denkleminin bir çözümü olması için, gerek ve yeter koşul E doğurucu çiftinin, $\operatorname{Im} f > 0$ olmak üzere $E = (F,fF)$ formunda olmasıdır.

İspat. $w \in P_D(E)$ olsun. O zaman w, (1.2.6) diferensiyel denklemini sağlar. Çünkü Bers (1953), daha önce sözü edilen kitabında bu diferensiyel denklemin sözde-analitikliği tek başına karakterize ettiğini gösterdi. Şimdi (2.1.1) denkleminin gerçeklendiğini varsayalım. Bu takdirde $b_E \equiv 0$ olmalıdır. Buradan (1.2.5) yardımıyla $G = fF$ bulunur. O halde E doğurucu çifti $E = (F,fF)$ formundadır.

Şimdi f, İmf > 0 olacak şekilde bir analitik fonksiyon olmak üzere $E = (F, fF)$ olsun. O zaman $b_E \equiv 0$ bulunur. $w \in P_D(E)$ olduğundan bu fonksiyon (2.1.1) diferensiyel denklemini sağlar. Bu ise ispatı tamamlar.

TEOREM 2.1.2. (2.1.1) diferensiyel denkleminin bütün çözümleri $\phi \in P_D(A)$ olmak üzere

$$w = \phi F \tag{2.1.2}$$

formundadır ve bu çözümler $\mathbb{C}$ kompleks sayı cismi üzerinde bir vektör uzay oluşturur.

İspat. $w \in P_D(E)$ ve bu fonksiyon (2.1.1) denklemini sağlarsa $b_E \equiv 0$ dır. O halde Teorem 2.1.1'den $E = (F, fF)$ bulunur. Buna göre (1.2.5)'ten $a_E = F_{\bar{z}}/F$ elde edilir. (2.1.2)'den

$$w_{\bar{z}} = \phi F_{\bar{z}} = a_{(F,fF)} w$$

yazılabileceğinden (2.1.2), (2.1.1) denkleminin bir çözümüdür. Şimdi w_1, (2.1.1)'in w'dan başka bir çözümü olsun. O zaman

$$(w_1)_{\bar{z}} = a_{(F,fF)} w_1$$

$$w_{\bar{z}} = a_{(F,fF)} w$$

denklemleri gerçeklenir. Buradan

$$\left(\frac{w_1}{w}\right)_{\bar{z}} = \frac{1}{w^2}[a_{(F,fF)} w_1 w - w_1 a_{(F,fF)} w] \equiv 0$$

yazılabileceğinden $(w_1/w) = \phi^{\star} \in P_D(A)$ dır. O halde

$w_1 = \phi^* w = \phi^{**} F$'dir. Burada $\phi^{**} := \phi^* \phi \in P_D(A)$'dır. O halde w_1, (2.1.2) formundadır.

Diğer taraftan (2.1.1) denkleminin çözümlerinin $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzay oluşturduğu açıktır.

SONUÇ 2.1.1. $\binom{\varphi}{\psi} \in \Omega_D$, $f \in P_D(A)$ ve $\operatorname{Im} f > 0$ olsun. $w \in P_D(F, fF)$ ise (2.1.2)'deki ϕ analitik fonksiyonu

$$\phi(z) = \varphi(z) + f(z)\psi(z) \tag{2.1.3}$$

formundadır.

İspat. $w \in P_D(F, fF)$ olsun. O halde w, $F\varphi_{\bar z} + fF\varphi_{\bar z} = 0$ koşulu altında

$$w = F\varphi + fF\psi = F(\varphi + f\psi)$$

şeklinde yazılabilir. D_o'da $F \neq 0$ olduğundan $(\varphi + f\psi)_{\bar z} = 0$ dır. Bu ise $f \in P_D(A)$ için $(\varphi + f\psi) \in P_D(A)$ olduğunu gösterir. Teorem 2.1.2'ye göre ϕ fonksiyonu, (2.1.3) formunda olmak zorundadır.

2.2. $w_{\bar z} = a_{(F,fF)} w$ Denklemine İlişkin Eliptik Sistem ve Bir Çözüm Gösterilimi

$w \in P_D(F, fF)$ ise $\binom{\varphi}{\psi} \in \Omega_D$, $f \in P_D(A)$, $\operatorname{Im} f > 0$ olmak üzere

$$\varphi_{\bar z} + f\psi_{\bar z} = 0 \tag{2.2.1}$$

bağıntısı gerçeklenir. $f = u + iv$ olmak üzere (2.2.1) denklemi reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_x + u\psi_x - v\psi_y &= 0 \\ \varphi_y + u\psi_y + v\psi_x &= 0 \end{aligned} \qquad (2.2.2)$$

reel sistemine ulaşılır. (2.2.2)'den x ve y'ye göre türetme yardımıyla

$$\begin{aligned} v\Delta\psi + 2\nabla v.\nabla\psi &= 0 \\ \Delta\varphi + u\Delta\psi + 2\nabla u.\nabla\psi &= 0 \end{aligned} \qquad (2.2.3)$$

2.basamaktan reel sistemi elde edilir. Burada Δ ve ∇ sırasıyla alışılmış Laplace ve Nabla operatörleri olup (.) alışılmış iç-çarpım anlamındadır. Eğer $f = a + ib$; $a,b \in \mathbb{R}$; $b > 0$ alınırsa $\Delta\varphi = 0$, $\Delta\psi = 0$ olduğu açıktır. (2.2.3)'teki birinci denklemden

$$\Delta\psi + \frac{v_x - u_y}{v}\psi_x + \frac{v_y + u_x}{v}\psi_y = 0 \qquad (2.2.4)$$

yazılabilir. $f \in P_D(A)$ olduğundan (2.2.3) veya (2.2.4)'ten

$$\Delta\psi + \frac{2v_x}{v}\psi_x + \frac{2v_y}{v}\psi_y = 0 \qquad (2.2.5)$$

bulunur. ψ, (2.2.5)'in bir çözümüyse ve bu çözüm bilinirse

$w = F\varphi + fF\psi \in P_D(F,fF)$ olacak şekilde φ fonksiyonu

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} (v\psi_y - u\psi_x)\,dx - (u\psi_y + v\psi_x)\,dy$$

eğrisel integrali yardımıyla tek anlamlı olarak belirlenebilir.

Şimdi w fonksiyonu,(2.1.1) denkleminin bir çözümü olmak üzere

$$w(z) = \alpha(z)\psi(z) + \beta(z)\psi_z \qquad (2.2.6)$$

formunu gözönüne alalım. Burada $\alpha,\beta \in H^1_{D_0}$ ve D'de $\alpha \neq 0$,

$\beta \neq 0$ dır. Şimdi, $w \in P_D(F,fF)$ olduğunda hangi koşullar altında ψ'nin (2.2.5)'in bir çözümü olduğunu araştıracağız.

(2.2.6)'yı (2.1.1)'de yerine yazarsak

$$\beta\psi_{z\bar{z}} + \alpha\psi_{\bar{z}} + [\beta_{\bar{z}} - a_{(F,fF)}\beta]\psi_z + [\alpha_{\bar{z}} - a_{(F,fF)}\alpha]\psi = 0 \tag{2.2.7}$$

ya da buradan

$$\Delta\psi + \frac{2}{\beta}[\alpha + \beta_{\bar{z}} - a_{(F,fF)}\beta]\psi_x + \frac{2i}{\beta}[\alpha - \beta_{\bar{z}} + a_{(F,fF)}\beta]\psi_y$$
$$+ [\alpha_{\bar{z}} - a_{(F,fF)}\alpha]\psi = 0 \tag{2.2.8}$$

elde edilir. Eğer ψ,(2.2.5)'in bir çözümüyse (2.2.8)'den

$$\alpha_{\bar{z}} = a_{(F,fF)}\alpha \tag{2.2.9}$$

$$\alpha + \beta_{\bar{z}} - a_{(F,fF)}\beta = \beta(\log v)_x \tag{2.2.10}$$

$$\alpha - \beta_{\bar{z}} + a_{(F,fF)}\beta = -i\beta(\log v)_y \tag{2.2.11}$$

koşulları ortaya çıkar. (2.2.9)'dan $\alpha \in P_D(F,fF)$ olduğu anlaşılır. (2.2.10) ve (2.2.11) birlikte değerlendirilirse D'de $(\log v)_z \neq 0$ olmak üzere

$$\alpha(z) = \beta(z)[\log v(z)]_z \tag{2.2.12}$$

veya

$$(\log\beta)_{\bar{z}} = (\log F)_{\bar{z}} + (\log v)_{\bar{z}} = [\log(vF)]_{\bar{z}} \tag{2.2.13}$$

bulunur. (2.2.13)'ün her iki yanı $\bar{z}$'ye göre integrallenirse $\tilde{\phi} \in P_D(A)$ olmak üzere $\beta = \tilde{\phi}vF$ olur. Buradan $\alpha = \tilde{\phi}v_zF$ ve $w = \tilde{\phi}(v\psi)_zF$ elde edilir.

Böylece şu teoremi ispatlamış olduk:

TEOREM 2.2.1. $\tilde{\phi} \in P_D(A)$ ve $v = \text{İm}f > 0$ olsun. $w = \tilde{\phi}(v\psi)_z F$ fonksiyonunun (2.1.1) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul ψ'nin (2.2.5)'in bir çözümü olmasıdır.

2.3. $P_D(F,fF)$ Uzayının Elemanları İçin Benzerlik Prensibi

$F^f := (F,fF) \in E_{D_o}$ olsun. Bu takdirde $F \in P_D(F,fF)$ olduğu bilinmektedir. O halde (1.2.10)'dan $F \in H^1_{D_o}$ fonksiyonu

$$F(z) = \phi_1(z)\, e^{\tilde{s}(z)} \qquad (2.3.1)$$

gösterilimine sahiptir. Burada $\phi_1 \in P_D^-(A)$ ve $\zeta = \xi + i\eta$ için

$$\tilde{s}(z) := \frac{-1}{\pi} \iint_D \frac{F_{\bar{\zeta}}(\zeta)/F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi \wedge d\eta$$

dir. Diğer taraftan (2.3.1)'i (2.1.2)'de yerine yazarsak

$$w(z) = \phi(z)\phi_1(z)e^{\tilde{s}(z)} := \phi_2(z)\, e^{\tilde{s}(z)} \qquad (2.3.2)$$

elde edilir. Burada $\phi_2(z) = \phi(z)\phi_1(z) \in P_D(A)$'dır.

Şimdi $\text{İm}(\bar{g}h) > 0$ ve $(g,h) \in H^1_{D_o} x H^1_{D_o}$ olmak üzere $g,h \in P_D(A)$ olduğunu kabul edelim. $\text{İm}(\overline{ge^{\tilde{s}}}he^{\tilde{s}}) > 0$ ve $(ge^{\tilde{s}},he^{\tilde{s}}) \in H^1_{D_o} x H^1_{D_o}$ olduklarından $(ge^{\tilde{s}},he^{\tilde{s}}) \in E_{D_o}$'dır. Buna göre E_{D_o}'da b_E karakteristik katsayısının özdeş olarak sıfır olduğu en genel doğurucu çift $(ge^{\tilde{s}},he^{\tilde{s}})$ formundadır.

SONUÇ 2.3.1. $w \in P_D(E)$ fonsiyonunun D'de sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim. Benzerlik prensibindeki s fonksiyonunun w'dan bağımsız olması için gerek ve yeter koşul E doğurucu çiftinin $E:=(ge^{\tilde{s}},he^{\tilde{s}})$ formunda olmasıdır. Burada $g,h\in P_D(A)$'dır.

İspat. s fonksiyonunun w'dan bağımsız olduğunu varsayalım. O zaman $b_E\equiv 0$ dır. O halde $E=(F,G)$ doğurucu çifti, genel olarak $(ge^{\tilde{s}},he^{\tilde{s}})$ formundadır. Tersine E, $(ge^{\tilde{s}},he^{\tilde{s}})$ formunda ise (1.2.11)'den s'nin w'dan bağımsız olduğu görülür.

2.4. F^f-Türevi ve (F,fF)'nin İzleyeni

$w\in P_D(E)$ ise genel olarak (1.2.1) yardımıyla tanımlanan w'nin E-Türevi yine $P_D(E)$ uzayına ait değildir. f yalnızca x'e bağlı bir analitik fonksiyon değilse bu durum $P_D(F,fF)$ uzayı için de geçerlidir. Yani

$$\dot{w}=\frac{d_{(F,fF)}w}{dz}\notin P_D(F,fF)$$

dir. Fakat $w\in P_D(E)$ ise $\dot{w}=\frac{d_E w}{dz}\in P_D(E_1)$ olduğu bilinmektedir. Burada E_1, E'nin bir izleyenidir. $f\equiv i$ seçersek w'nun (F,iF)-Türevi yine $P_D(F,iF)$ uzayına ait olur. Bu her basamaktan (F,iF)-Türevi için de geçerlidir.

$w\in P_D(F,fF)$ ise w fonksiyonunun $F\varphi+fF\psi$ formunda yazılabileceğini daha önce gördük. Ayrıca D bölgesinde

$$\dot{w}=\frac{d_{(F,fF)}w}{dz}=F\varphi_z+Ff\psi_z=w_z-A_{(F,fF)}w-B_{(F,fF)}\bar{w}$$

$$=w_z-\left(\frac{F_z}{F}-\frac{f_z}{\bar{f}-f}\right)w-\frac{Ff_z}{\bar{F}(\bar{f}-f)}\bar{w}$$

bağıntısının geçerliliği de kolayca görülebilir. $\dot{w}$'nin $\bar{z}$'-ye göre türevini hesaplarsak

$$(\dot{w})_{\bar{z}} = (\log F)_{\bar{z}}\, \dot{w} - \frac{Ff_z}{\bar{F}(\bar{f}-f)}\, \bar{\dot{w}} \tag{2.4.1}$$

elde edilir.

TEOREM 2.4.1. h Fonksiyonu $h \in H^1_{D_0}$ olacak şekilde

$$h_{\bar{z}} = \frac{f_z h}{f-\bar{f}} \tag{2.4.2}$$

diferensiyel denkleminin sıfırdan farklı, reel değerli bir çözümü olsun. O zaman $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\dot{w} = \frac{d_{(F,fF)}w}{dz} \in P_D(hF,\ ich^{-1}F)$$

dir.

İspat. $E_1 := (hF, ich^{-1}F)$ doğurucu çiftini tanımlayalım. $F, h \in H^1_{D_0}$ olduğundan $E_1 \in H^1_{D_0} x H^1_{D_0}$ dir. Öte yandan $\forall z \in D_0$ için $\operatorname{Im}(\bar{F}_1 G_1) > 0$. Burada $F_1 := hF$, $G_1 := ich^{-1}F$ dir. a_{E_1} ve b_{E_1} karakteristik katsayılarını hesaplarsak

$$a_{(F_1,G_1)} = -\frac{\bar{F}_1 (G_1)_{\bar{z}} - (F_1)_{\bar{z}} \bar{G}_1}{F_1\bar{G}_1 - \bar{F}_1 G_1} = \frac{F_{\bar{z}}}{F} = a_{(F,fF)}$$

$$b_{(F_1,G_1)} = \frac{F_1 (G_1)_{\bar{z}} - (F_1)_{\bar{z}} G_1}{F_1\bar{G}_1 - \bar{F}_1 G_1} = \frac{Fh_{\bar{z}}}{\bar{F}h} = -\frac{Ff_z}{\bar{F}(\bar{f}-f)} = -B_{(F,fF)}$$

elde edilir. O halde $\dot{w}$

$$(\dot{w})_{\bar{z}} = a_{E_1}\dot{w} + b_{E_1}\bar{\dot{w}}$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür. Yani $\dot{w} \in P_D(E_1)$'dir.

TEOREM 2.4.2. $w \in P_D(F, fF)$ olsun. w'ya ilişkin

2.türden (F,fF)-sözde-analitik fonksiyonu $_{\star}w$ analitikse ya $w \in P_D^o(F,fF)$'dir ya da (F,fF) doğurucu çifti (F,iF) doğurucu çiftine indirgenebilir.

İspat. $w \in P_D(F,fF)$ olduğunu kabul edelim. O zaman (1.2.2)'den w'ya ilişkin 2.türden (F,fF)-sözde-analitik fonksiyonu

$$_{\star}w = \frac{\bar{f} - i}{F(\bar{f} - f)} w - \frac{f - i}{\bar{F}(\bar{f} - f)} \bar{w} \tag{2.4.3}$$

olarak yazılabilir. (2.4.3)'ün her iki yanının $\bar{z}$'ye göre türetilip düzenlenmesiyle

$$(_{\star}w)_{\bar{z}} = \frac{f-i}{\bar{f}-f}\left[\frac{-\bar{f}_{\bar{z}}w}{F(\bar{f}-f)} - \left(\frac{\bar{w}}{\bar{F}}\right)_{\bar{z}} + \frac{\bar{f}_{\bar{z}}\bar{w}}{\bar{F}(\bar{f}-f)}\right] \tag{2.4.4}$$

bulunur. Bu taktirde $_{\star}w \in P_D(A)$ ise ya $f \equiv i$ ya da

$$\left(\frac{w}{F}\right)_z = \frac{f_z}{f - \bar{f}}\left(\frac{w}{F} - \frac{\bar{w}}{\bar{F}}\right) \tag{2.4.5}$$

dir. (2.4.5)'ten $\varphi_z + f\psi_z = 0 = \frac{d_{(F,fF)}w}{dz}$ elde edilir.Yani $w \in P_D^o(F,fF)$'dir.

SONUÇ 2.4.1. $(hF, ich^{-1}F)$ doğurucu çifti, (F,fF) doğurucu çiftinin izleyenidir.

SONUÇ 2.4.2. $F^i := (F,iF)$ ve (F,fF) doğurucu çiftleri eş etkili doğurucu çiftlerdir.

TEOREM 2.4.3. Eğer $f \in P_D(A)$ ise $P_D(F,fF)$, $P_D(F,iF)$'nin bir alt uzayıdır.

İspat. $f \in P_D(A)$ ve $w \in P_D(F,fF)$ olsun. O zaman w, $F\varphi_{\bar{z}} + fF\psi_{\bar{z}} = 0$ koşulu altında $w = F\varphi + fF\psi$ formunda yazılabilir. Bu yazılışta $f = u + iv$ olmak üzere

$$\phi := \varphi + f\psi = \varphi + (u + iv)\psi = \varphi + u\psi + iv\psi$$

fonksiyonu, D bölgesinde analitik bir fonksiyondur. Öte yandan $\begin{pmatrix} \varphi + u\psi \\ v\psi \end{pmatrix} \in \Omega_D$ olduğu açıktır. w fonksiyonunu

$$w = F\varphi + fF\psi = F(\varphi + u\psi) + iF(v\psi)$$

formunda yazdığımızda

$$F(\varphi + u\psi)_{\bar{z}} + iF(v\psi)_{\bar{z}} = F[\varphi + u\psi + i(v\psi)]_{\bar{z}}$$

$$= F(\varphi + f\psi)_{\bar{z}} = 0$$

özelliği gerçeklenir. O halde $w \in P_D(F, iF)$'dir.

TEOREM 2.4.4. $E = (F,G)$ herhangi bir doğurucu çift ve $w \in P_D(E)$ olsun. $G \equiv iF$ ise w'ye ilişkin 2.türden E-sözde-analitik $_{\star}w$ fonksiyonu analitikdir (Koca 1982).

İspat. $w \in P_D(E)$ ve $G \equiv iF$ olduğunu kabul edelim. Bu halde $a_E = F_{\bar{z}}/F$, $b_E \equiv 0$ olur. Buna göre w

$$w_{\bar{z}} = (F_{\bar{z}}/F)w \tag{2.4.6}$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür. Öte yandan $G \equiv iF$ için (1.2.2) formülünü kullanırsak

$$_{\star}w = \frac{1}{F}\,w \tag{2.4.7}$$

elde ederiz. (2.4.7)'nin her iki yanının $\bar{z}$'ye göre türetilmesi ve (2.4.6)'nın kullanılmasıyla

$$(_{\star}w)_{\bar{z}} = \frac{F_{\bar{z}}}{F}\,w + \frac{1}{F}\,w_{\bar{z}} = -\frac{F_{\bar{z}}}{F^2}\,w + \frac{1}{F}\,\frac{F_{\bar{z}}}{F}\,w \equiv 0$$

bulunur. O halde $_{\star}w$, D'de analitiktir.

3. $P_D(F^n,fF^n)$ VE $P_D(F^n,iF^n)$ UZAYLARI

Genel halde $P_D(E)$, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ üzerinde bir cebir yapısına sahip olmadığından sözde-analitik fonksiyonların kuvveti ve iki elemanın çarpımından elde edilen yeni eleman $P_D(E)$ uzayına ait değildir. Aşağıdaki bölümde (F^n,fF^n) doğurucu çifti ile $P_D(F,fF)$ uzayının elemanlarının kuvvetleri arasında bağıntı kurulmuş ve sonuçlar formülleştirilmiştir. Bu bölümdeki sonuçlardan bir kısmı yine "Über die Eigenschaften der Räume $P_D(F^n,fF^n)$, $P_D(F^n,iF^n)$" (Koca 1987) adlı çalışmada yer almaktadır.

3.1. $h_{\bar{z}} = [f_z/(f-\bar{f})]h$ Denkleminin Reel Çözümleri

Bu paragrafta, önce ileride reel çözümlerine ihtiyaç duyacağımız

$$h_{\bar{z}} = \frac{f_z}{f-\bar{f}}h \qquad (3.1.1)$$

denklemini inceleyeceğiz. Burada $f \in P_D(A)$ ve $\operatorname{Im} f > 0$'dır.

Eğer h reel değerli bir fonksiyonsa (3.1.1) denklemi $f = u + iv$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{v_x}{v}h \\ h_y &= -\frac{v_y}{v}h \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

reel sistemine denktir. Diğer taraftan (3.1.2) sisteminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul İmf = v fonksiyonunun

$$vv_{xy} - v_x v_y = 0 \tag{3.1.3}$$

diferensiyel denklemini gerçeklemesidir (Tutschke 1971). Bu diferensiyel denklem çözülürse

$$v(x,y) = \exp[p(x) + q(y)] \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Burada $p,q \in H^1_{D_0}$ reel değerli fonksiyonlardır. v fonksiyonu analitik bir fonksiyonun sanal kısmı olduğundan

$$p_{xx} + q_{yy} + p_x^2 + q_y^2 = 0 \tag{3.1.5}$$

koşulu gerçeklenmelidir. Eğer (3.1.4), (3.1.2)'de yerine yazılıp sistem çözülürse $c_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$h(x,y) = c_1 \exp[p(x) - q(y)] \tag{3.1.6}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi elde etmiş olduk :

TEOREM 3.1.1. (3.1.3) bağıntısı gerçeklenirse (3.1.6) yardımıyla tanımlanan h fonksiyonu (3.1.2) reel sisteminin bir çözümüdür.

ÖRNEK . $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,4$; $(x + k_1) > 0$, $(y + k_3) > 0$ olmak üzere p ve q fonksiyonlarını

$$p(x) = \log(x + k_1) + k_2 , \quad q(x) = \log(y + k_3) + k_4 \tag{3.1.7}$$

olarak seçelim. Bu takdirde p ve q fonksiyonları (3.1.5) bağıntısını gerçekler. Buradan v ve h reel değerli fonksiyonları

$$h(x,y) = c_2 [(x + k_1)/(y + k_3)] , \quad v(x,y) = c_3 (x + k_1)(y + k_3) \tag{3.1.8}$$

olarak bulunur. Burada $c_2 = \exp(k_2 - k_4)$, $c_3 = \exp(k_2 + k_4)$, $v = \text{İm} f > 0$ dır. v fonksiyonu belli olduğundan f analitik fonksiyonu

$$f(x,y) = c_3[\tfrac{1}{2}(x^2-y^2) + k_1 x - k_4 y + k_5 + i(x+k_1)(y+k_3)]$$

olur. Burada k_5 herhangi bir reel sabittir. Bu takdirde p,q,h,v,f fonksiyonları (3.1.1), (3.1.2),(3.1.3),(3.1.4), (3.1.5) bağıntılarını gerçeklerler.

3.2. $P_D(F^n,fF^n)$, $P_D(F^n,iF^n)$ Uzayları

f, İmf > 0 olacak şekilde analitik bir fonksiyon olmak üzere $F^f = (F,fF) \in E_{D_o}$ doğurucu çiftini gözönüne alalım. D_o bölgesinde $F \neq 0$ ve Hölder-sürekli olduğundan $\forall n \in Z$ için F^n de D_o'da Hölder-süreklidir. O halde $F_n^f := (F^n,fF^n) \in E_{D_o}$'dır. $f \equiv i$ seçersek $F_n^i := (F^n,iF^n) \in E_{D_o}$ olacağı açıktır. F_n^f, F_n^i doğurucu çiftlerine karşı gelen karakteristik katsayıları hesaplarsak

$$a_{(F^n,fF^n)} = na_{(F,fF)},\quad b_{(F^n,fF^n)} \equiv 0,$$

$$A_{(F^n,fF^n)} = \frac{nF_z}{F} - \frac{f_z}{\bar{f}-f},\quad B_{(F^n,fF^n)} = \frac{F^n f_z}{\overline{F^n}(\bar{f}-f)} \tag{3.2.1}$$

ve

$$a_{(F^n,iF^n)} = na_{(F,iF)},\quad b_{(F^n,iF^n)} \equiv 0,\quad A_{(F^n,iF^n)} = nA_{(F,iF)},$$

$$B_{(F^n,iF^n)} \equiv 0 \tag{3.2.2}$$

elde edilir.

SONUÇ 3.2.1. F_n^f ve F_n^i doğurucu çiftleri Bers anlamında eş etkili doğurucu çiftlerdir.

TEOREM 3.2.1. $w \in P_D(F,fF)$ ve D'de $w \neq 0$ olsun. Bu takdirde $\forall n \in Z$ için $w^n \in P_D(F^n, fF^n)$'dir.

İspat. $w \in P_D(F^f)$ olsun. O halde $w_z, w_{\bar{z}}$ türevleri vardır ve w

$$w_{\bar{z}} = a_{(F,fF)} w \qquad (3.2.3)$$

diferensiyel denklemini sağlar. Buna göre w^n'nin de z ve $\bar{z}$'ye göre türevleri vardır ve Hölder-süreklidir. (3.2.3)'ün her iki yanını nw^{n-1} ile çarpıp düzenlersek

$$(w^n)_{\bar{z}} = a_{(F^n fF^n)} w^n \qquad (3.2.4)$$

bulunur. O halde $w^n \in P_D(F^n, fF^n)$'dir.

SONUÇ 3.2.2. $w \in P_D(F,fF)$ ise $\forall n \in Z$ için $w^n \in P_D(F^n, iF^n)$ dir ve aşağıdakiler geçerlidir:

i) $(w^n)_{\bar{z}} = a_{(F^n, iF^n)} w^n$

ii) $\dot{\widehat{(w^n)}} = \dfrac{d_{(F^n, iF^n)} w^n}{dz} = nw^{n-1} \dfrac{d_{(F,iF)} w}{dz}$

3.3. (F^n, fF^n)'nin Bir İzleyeni

$w \in P_D(F,fF)$ ise $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\dot{w} = \frac{d_{(F,fF)} w}{dz} \in P_D(hF, ich^{-1}F)$$

olduğu 2.bölümde gösterilmiştir. Burada h fonksiyonu (3.1.1) denkleminin bir reel çözümüdür. Ayrıca $w \in P_D(F,fF)$

için $w^n \in P_D(F^n, fF^n)$ olduğu bir önceki alt bölümde ispatlandı.

TEOREM 3.3.1. $n \in Z$; $c \in \mathbb{R}^+$; h, (3.1.1) denkleminin sıfırdan farklı reel değerli, Hölder-sürekli bir çözümü ve $w_n \in P_D(F^n, fF^n)$ olsun. Bu takdirde

$$\dot{w}_n = \frac{d_{(F^n, fF^n)} w_n}{dz} \in P_D(hF^n, ich^{-1}F^n) \qquad (3.3.1)$$

dir.

İspat. $w_n \in P_D(F^n, fF^n)$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$(\dot{w}_n)_{\bar{z}} = \left[\frac{d_{(F^n, fF^n)} w_n}{dz}\right]_{\bar{z}} = a_{(F^n, fF^n)} \dot{w}_n - B_{(F^n, fF^n)} \bar{\dot{w}}_n \qquad (3.3.2)$$

olduğu bilinmektedir (Bers 1953). Şimdi $E_n := (hF^n, ich^{-1}F^n)$ fonksiyon çiftini tanımlayalım. $\forall n \in Z$ için $E_n \in E_{D_0}$ olduğu kolayca görülebilir. a_{E_n}, b_{E_n} karakteristik katsayılarını hesaplarsak

$$a_{E_n} \equiv a_{(hF^n, ich^{-1}F^n)} = n\frac{F_{\bar{z}}}{F} = (\log F^n)_{\bar{z}} = a_{(F^n, fF^n)} \qquad (3.3.3)$$

$$b_{E_n} \equiv b_{(hF^n, ich^{-1}F^n)} = \frac{F^n h_{\bar{z}}}{\overline{F^n} h} = \frac{F^n f_z}{\overline{F^n}(f-\bar{f})}$$

$$= -\frac{F^n f_z}{\overline{F^n}(\bar{f}-f)} = -B_{(F^n, fF^n)} \qquad (3.3.4)$$

bulunur. O halde $\dot{w}_n$ fonksiyonu

$$(\dot{w}_n)_{\bar{z}} = a_{(hF^n, ich^{-1}F^n)} \dot{w}_n + b_{(hF^n, ich^{-1}F^n)} \bar{\dot{w}}_n$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür. Yani $\dot{w}_n \in P_D(E_n)$'dir.

SONUÇ 3.3.1. $\forall n \in Z$ için $E_n = (hF^n, ich^{-1}F^n)$, $F_n^f = (F^n, fF^n)$'nın bir izleyenidir.

3.4. $P_D(F^n, fF^n)$ Uzayının Elemanları İçin Benzerlik Prensibi

$w_n \in P_D(F^n, fF^n)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde w_n fonksiyonu benzerlik prensibine göre her $n \in Z$ için

$$w_n = \phi_n \exp(s_n) \qquad (3.4.1)$$

gösterilimine sahiptir. Burada $\phi_n \in P_D(A)$, $w_n \neq 0$ ve $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere

$$s_n(z) := \frac{-n}{\pi} \iint_D \frac{F_{\bar{\zeta}}(\zeta)/F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\xi \wedge d\eta$$

dır. Öte yandan $w \in P_D(F, fF)$ ise bu fonksiyon da

$$s(z) := \frac{-1}{\pi} \iint_D \frac{F_{\bar{\zeta}}(\zeta)/F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\xi \wedge d\eta$$

olmak üzere $w(z) = \phi(z)\exp[s(z)]$ gösterilimine sahiptir. Burada yine $\phi \in P_D(A)$ dir. Eğer (3.4.1)'deki ϕ_n analitik fonksiyonları D'de sıfırdan farklıysa $w \in P_D(F, fF)$ için

$$w^n = \phi^n \exp(ns) = \phi^n \exp(s_n) = \phi^n w_n/\phi_n = \phi_n^{\star} w_n \in P_D(F^n, fF^n)$$

yazılabilir. Burada $\phi_n^{\star} = (\phi^n/\phi_n) \in P_D(A)$'dır. Böylece şu sonucu elde ettik:

SONUÇ 3.4.1. $P_D(F, fF)$ uzayının elemanlarının n. kuvveti, $P_D(F^n, fF^n)$'nin elemanlarının bir analtik fonksiyonla çarpımı şeklinde yazılabilir.

$\dot{w}_n \in P_D(hF^n, ich^{-1}F^n)$ olduğundan $\dot{w}_n$ fonksiyonu

$$hF^n(\varphi_n)_{\bar{z}} + ich^{-1}F^n(\psi_n)_{\bar{z}} = 0 \qquad (3.4.2)$$

koşulu altında

$$\dot{w}_n = hF^n\varphi_n + ich^{-1}F^n\psi_n \tag{3.4.3}$$

formunda yazılabilir. Burada $\forall n \in Z$ için $\binom{\varphi_n}{\psi_n} \in \Omega_D$'dir. Ayrıca benzerlik prensibinden $\phi_n^{**} \in P_D(A)$ olmak üzere $\dot{w}_n$

$$\dot{w}_n = \phi_n^{**}\exp(s_n^{*}) \tag{3.4.4}$$

formunda da yazılabilir. Burada $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere

$$s_n^{*}(z) := s_n(z) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{h_{\bar{\zeta}}(\zeta)[h(\zeta)\varphi_n(\zeta) - ich^{-1}(\zeta)\psi_n(\zeta)]}{h(\zeta)[h(\zeta)\varphi_n(\zeta) + ich^{-1}(\zeta)\psi_n(\zeta)](\zeta - z)}\, d\xi \wedge d\eta$$

dir. h fonksiyonu reel sabitse $s_n^{*} = s_n$ dir ve $P_D(F^n, iF^n)$ ile $P_D(hF^n, ich^{-1}F^n)$ uzaylarının denk olacakları açıktır.

(F^n, fF^n) ve (F^n, iF^n) doğurucu çiftleri Bers anlamında eş etkili olduklarından F^n, $iF^n \in P_D(F^n, fF^n)$'dir. Daha önce $P_D(F, fF)$ uzayının $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı yapısına sahip olduğunu görmüştük. Böylece $P_D(F^n, fF^n)$ uzayı da $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzaydır. Şimdi aşağıdaki teorimi verebiliriz:

TEOREM 3.4.1. $f, g \in P_D(A) \cap H^1_{D_0}$ ve $\mathrm{Im}(\bar{g}f) > 0$ olsun. Herhangi bir $P_D(E) = P_D(F, G)$ sözde-analitik fonksiyon uzayında; $\mathbb{C}$ üzerinde vektör uzay oluşturan en geniş alt sınıf $P_D(gF, fF)$ formundadır.

İspat. $P_D(E_1) = P_D(F_1, G_1)$, $P_D(gF, fF)$'den başka $P_D(E)$ uzayında $P_D(gF, fF) \subset\subset P_D(F_1, G_1)$ koşulunu sağlayan ve $\mathbb{C}$ üzerinde vektör uzay oluşturan bir altuzay olsun. O zaman $w_1 \notin P_D(gF, fF)$ fakat $w_1 \in P_D(E_1)$ olacak şekilde en az bir w_1 elemanı vardır. $w_1 \in P_D(E_1)$ ise w_1 fonksiyonu

$$(w_1)_{\bar{z}} = a_{E_1} w_1 + b_{E_1} \bar{w}_1 \tag{3.4.5}$$

diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. $\gamma \in \mathbb{C}$ ve İm$\gamma \neq 0$ olmak üzere $W := \gamma w_1$ fonksiyonunu, tanımlayalım ve $W \in P_D(E_1)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$W_{\bar{z}} = (\gamma w_1)_{\bar{z}} = a_{E_1}(\gamma w_1) + b_{E_1}(\gamma \bar{w}_1) + b_{E_1}(\overline{\gamma w_1}) - b_{E_1}(\overline{\gamma w_1})$$

$$= a_{E_1}(\gamma w_1) + b_{E_1}(\overline{\gamma w_1}) + b_{E_1}(\gamma \bar{w}_1 - \overline{\gamma w_1})$$

yazılabileceğinden $b_{E_1} \equiv 0$ olmak zorundadır. Çünkü $\gamma \bar{w}_1 - \overline{\gamma w_1} \neq 0$ dır. Bu durumda E_1 doğurucu çifti $E_1 := (g_1F_1, f_1F_1)$ formunda yazılabilir. Eğer $F_1 = F$, $g_1 = g$, $f_1 = f$ alınırsa $w_1 \in P_D(gF, fF)$ olur. Halbuki bu $w_1 \notin P_D(gF, fF)$ varsayımına aykırıdır. Bu ise teoremi ispatlar.

SONUÇ 3.4.1. 1. türden E-sözde-analitik fonksiyonlar uzayı $P_D(E)$'nin $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzay oluşturması için gerek ve yeterli koşul $b_E \equiv 0$ olmasıdır.

SONUÇ 3.4.2. f fonksiyonu, İm$f > 0$ ve $f \in H^1_{D_0}$ olacak şekilde D'de analitik bir fonksiyonsa $\forall n \in Z$ için $P_D(F^n, fF^n)$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı oluşturur.

SONUÇ 3.4.3. (F^n, fF^n) ve (gF^n, fF^n) doğurucu çiftleri $\forall n \in Z$ için eş etkilidir.

TEOREM 3.4.2. $\nu_k \in Z$, $m \in \mathbb{N}$ ve $\sum_{k=1}^{m} \nu_k = n$ olmak üzere $w_{\nu_k} \in P_D(F^{\nu_k}, fF^{\nu_k})$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $w_n := \prod_{k=1}^{m} w_{\nu_k}$ şeklinde tanımlanan w_n fonksiyonu

$$(w_n)_{\bar{z}} = a_{(F^n, fF^n)} w_n \tag{3.4.6}$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür.

İspat. Varsayım dolayısıyla w_n fonksiyonunun tanımındaki w_{ν_k} , $k = 1,2,\dots,m$ fonksiyonları

$$(w_{\nu_k})_{\bar z} = a_{(F^{\nu_k}, fF^{\nu_k})} w_{\nu_k} \qquad (3.4.7)$$

diferensiyel denkleminin çözümleridir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}(w_n)_{\bar z} &= \sum_{i=1}^{m} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{m} w_{\nu_k} (w_{\nu_i})_{\bar z} \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{(F^{\nu_i}, fF^{\nu_i})} \prod_{k=1}^{m} w_{\nu_k} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \nu_i \, a_{(F,fF)} \prod_{k=1}^{m} w_{\nu_k} \\ &= n a_{(F,fF)} \prod_{k=1}^{m} w_{\nu_k} \\ &= a_{(F^n, fF^n)} w_n\end{aligned}$$

yazılabildiğinden w_n fonksiyonu (3.4.6) diferensiyel denkleminin bir çözümüdür.

SONUÇ 3.4.3. $\sum_{j=1}^{n} w_j = m$ ve $w_{\nu_j} \in P_D(F^{\nu_j}, fF^{\nu_j})$ olmak üzere

$$\Theta: \prod_{k=1}^{n} P_D(F^{\nu_k}, fF^{\nu_k}) \longrightarrow P_D(F^m, iF^m)$$

$$(w_{\nu_1},\dots,w_{\nu_n}) \longrightarrow \Theta(w_{\nu_1},\dots,w_{\nu_n}) = \prod_{j=1}^{n} w_{\nu_j}$$

şeklinde tanımlanan bir Θ dönüşümü vardır.

SONUÇ 3.4.4. $\forall k \in Z$ için $P_D(F^k, fF^k) \subset P_D(F^k, iF^k)$ dır.

3.5. $P_D(\beta F, ic\beta^{-1}F)$ Uzayı

β, $\beta_{z\bar{z}} = 0$, $\beta \in H^1_{D_0}$, $\beta \neq 0$ koşullarını sağlayan reel değerli bir fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}^+$ olsun. $\alpha \in P_D(A)$ olmak üzere β'nın $\beta = \alpha + \bar{\alpha}$ formunda olduğu açıktır. Diğer taraftan bu koşullar altında $(\beta F, ic\beta^{-1}F) \in E_{D_0}$ olduğunu gösterebiliriz. Burada F,(3.2.3) diferensiyel denkleminin bir özel çözümüdür. $w \in P_D(\beta F, ic\beta^{-1}F)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde w

$$w_{\bar{z}} = (F_{\bar{z}}/F)w + (F\beta_{\bar{z}}/\bar{F}\beta)\bar{w} \tag{3.5.1}$$

diferensiyel denklemini gerçekler.

Şimdi (3.5.1) diferensiyel denklemine $w = WF$ dönüşümünü uygulayalım. Doğrudan $\bar{z}$'ye göre türetmeyle elde edilen

$$w_{\bar{z}} = W_{\bar{z}}F + WF_{\bar{z}} = (F_{\bar{z}}/F)w + (F\beta_{\bar{z}}/\bar{F}\beta)\,\bar{w}$$

eşitliğinden

$$W_{\bar{z}} = (\beta_{\bar{z}}/\beta)\bar{W} \tag{3.5.2}$$

diferensiyel denklemi bulunabilir. (3.5.2)'nin her iki yanının z'ye göre türetilip düzenlenmesiyle ortaya çıkan

$$W_{z\bar{z}} + (\beta_z/\beta)W_{\bar{z}} - (\beta_z\beta_{\bar{z}}/\beta^2)W = 0 \tag{3.5.3}$$

diferensiyel denkleminin çözümlerine "Potansiyel fonksiyon" veya "Kompleks potansiyel" denir (Vekua 1963). (3.5.3) diferensiyel denkleminin çözümleri yine Vekua tarafından "Verallgemeinerte analytische Funktionen" adlı kitabının 140. sayfasında

$$W_1 = \frac{1}{2}(W - \frac{\beta}{\beta_z}\bar{W}_z), \quad W_2 = \frac{1}{2i}(W + \frac{\beta}{\beta_z}\bar{W}_z)$$

olmak üzere $W = W_1 + iW_2$ gösterilimi ile verilmiştir.

TEOREM 3.5.1. $W \in P_D(E)$ olsun. W fonksiyonunun (3.5.2) denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul E doğurucu çiftinin $E: = (\beta, ic\beta^{-1})$ formunda olmasıdır.

İspat. $W \in P_D(E)$ olsun. O zaman W fonksiyonu (1.2.6) denklemini sağlar. W aynı zamanda (3.5.2)'nin bir çözümüyse $a_E \equiv 0$ olmak zorundadır. Buradan $\bar{F}G_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\bar{G} = 0$ veya $G_{\bar{z}} = (F_{\bar{z}}/\bar{F})\bar{G}$ bulunur. G fonksiyonunun (3.5.2)'nin bir özel çözümü olması gerektiğinden $(F_{\bar{z}}/\bar{F}) = (\beta_{\bar{z}}/\beta) = (\beta_{\bar{z}}/\bar{\beta})$ olur. Bu ise F'nin de D'de reel değerli bir fonksiyon olması gerektiği sonucunu verir.

Şimdi G fonksiyonunun $G = \varphi F^n$ formunda olduğunu düşünelim. Burada $\varphi \in C^1(D_o)$ ve $n \in Z$ dir. G'nin bu değeri

$$FG_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\bar{G} = 0$$

ifadesinde yerine yazılıp F^{n+1}ve F^n'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse D_o'da $F_{\bar{z}} \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &1) \quad \varphi_{\bar{z}} = 0 \\ &2) \quad n\varphi = \bar{\varphi} \end{aligned} \qquad (3.5.4)$$

bulunur. (3.5.4)'deki ilk denklem $\varphi \in P_D(A)$ verir. İkinci denklemden $n(\varphi - \bar{\varphi}) = \bar{\varphi} - \varphi$ yazılabileceğinden $n = -1$ elde edilir. Bu halde $Re\varphi \equiv 0$ dır. Buna göre φ_1, D_o bölgesinde reel değerli bir fonksiyon olmak üzere φ fonksiyonu $\varphi = i\varphi_1$ formundadır. φ, D'de analitik ve φ_1 reel değerli fonksiyonlar olduklarından $\varphi_1 = c \in \mathbb{R}$ bulunur. O halde $E: = (\beta, ic\beta^{-1})$ dir. Ayrıca $(\beta, ic\beta^{-1}) \in E_{D_o}$ olduğundan $c \in \mathbb{R}^+$ olmak zorundadır.

Karşıt olarak E doğurucu çiftinin $E = (\beta, ic\beta^{-1})$ formunda olduğunu kabul edelim.

$$a_E \equiv a_{(\beta,ic\beta^{-1})} \equiv 0, \; b_E \equiv b_{(\beta,ic\beta^{-1})} = \frac{\beta_{\bar{z}}}{\beta} \qquad (3.5.5)$$

olduğundan W fonksiyonu (3.5.2) diferensiyel denklemini sağlar.

TEOREM 3.5.2. $W \in P_D(\beta, ic\beta^{-1})$ ise $W_1 = \beta W$ olacak şekilde $W_1 \in P_D(\beta^2, ic)$ vardır ve aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) $(W_1)_{\bar{z}} = \beta(W + \bar{W})$

2) $\dot{W}_1 = \dfrac{d_{(\beta^2,ic)}W_1}{dz} = \beta \dfrac{d_{(\beta,ic\beta^{-1})}W}{dz}$

İspat. $W \in P_D(\beta, ic\beta^{-1})$ ise $\binom{\varphi}{\psi} \in \Omega_D$ ve $\beta\varphi_{\bar{z}} + ic\beta^{-1}\psi_{\bar{z}} = 0$ olmak üzere $W = \beta\varphi + ic\beta^{-1}\psi$ dir. Buradan $\beta W = \beta^2\varphi + ic\psi$ yazılabilir. $(\beta, ic\beta^{-1}) \in E_{D_0}$ olduğundan ayrıca $(\beta^2, ic) \in E_{D_0}$ 'dır. $E_1 := (\beta, ic\beta^{-1})$ ve $E_2 := (\beta^2, ic)$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu basit bir hesapla görebiliriz.

$$a_{E_1} \equiv 0, \; b_{E_1} = \beta_{\bar{z}}/\beta, \; A_{E_1} \equiv 0, \; B_{E_1} = \beta_z/\beta$$

$$a_{E_2} = (\beta_{\bar{z}}/\beta) = b_{E_2}, \; A_{E_2} = (\beta_z/\beta) = B_{E_2}.$$

Diğer taraftan D bölgesinde $W_1 = \beta^2\varphi + ic\psi$ için

$$\beta^2\varphi_{\bar{z}} + ic\psi_{\bar{z}} = \beta[\beta\varphi_{\bar{z}} + ic\beta^{-1}\psi_{\bar{z}}] = \beta.0 = 0$$

yazılabildiğinden W_1, E_2-Türevine sahiptir. O halde $W_1 \in P_D(E_2)$ dir. Ayrıca

$$(\dot{W}_1) = \frac{d_{E_2}W_1}{dz} = (W_1)_z - A_{E_2}W_1 - B_{E_2}\overline{W_1}$$

$$= \beta_z W + \beta W_z - \frac{\beta_z}{\beta}(\beta W) - \frac{\beta_z}{\beta}(\overline{\beta W})$$

$$= \beta W_z - \beta_z \overline{W}$$

$$= \beta[W_z - B_{E_1}\overline{W}] = \beta\frac{d_{E_1}W}{dz}$$

bulunur. Bundan başka

$$(W_1)_{\bar{z}} = \beta_{\bar{z}} W + \beta W_{\bar{z}}$$

$$= \beta[\frac{\beta_{\bar{z}}}{\beta} W + W_{\bar{z}}]$$

$$= \beta[\frac{\beta_{\bar{z}}}{\beta} W + \frac{\beta_{\bar{z}}}{\beta} \overline{W}]$$

$$= \beta_{\bar{z}} (W + \overline{W})$$

elde edilir. Bu ise teoremi ispatlar.

SONUÇ 3.5.1. E_1 ve E_2 benzer doğurucu çiftlerdir.

SONUÇ 3.5.2. (3.5.1) denkleminin bütün çözümleri, (3.5.2) denkleminin bütün çözümlerinin F fonksiyonuyla çarpımına eşittir.

3.6. Bir Doğurucu Dizi

Bauer ve Ruscheweyh (1973),

$$w_{\bar{z}} = c^{*}\overline{w}$$

diferensiyel denklemini incelerken

$$\{(F_\nu, G_\nu)\}_{\nu \in Z} \equiv \{[(i\alpha_z)^\nu (\alpha + \bar{\alpha})^m,\ i(i\alpha_z)^\nu (\alpha + \bar{\alpha})^{-m}]\}_{\nu \in Z} \quad (3.6.1)$$

şeklinde doğurucu dizi elde ettiler. Burada

$$c^{*} := \frac{m\overline{\alpha_z}}{\alpha+\bar{\alpha}}, \quad \alpha \in P_D(A),\ m \in \mathbb{N},$$

dir. $\alpha \in P_D(A)$ koşulu altında (3.6.1) dizisinin bütün elemanları için $a_{(F_\nu, G_\nu)} \equiv 0$ elde edilir.

Şimdi D_o bölgesinde

$$\{E_\nu\}_{\nu\in Z} :\equiv \{[(i\beta_z)^\nu \beta F,\ ic(i\beta_z)^\nu \beta^{-1} F]\}_{\nu\in Z} \qquad (3.6.2)$$

doğurucu çiftlerin bir dizisini tanımlayalım. Burada β, $\beta\beta_z \neq 0$, $\beta_{z\bar{z}} = 0$ koşullarını sağlayan reel değerli D_o da hölder-sürekli bir fonksiyondur.

TEOREM 3.6.1. β fonksiyonu yukarda açıklanan özelliklerine sahip olsun. Bu takdirde

a) (3.6.2), Bers anlamında bir doğurucu dizidir.

b) $\forall k \in Z$ için θ_k, $r,d \in \mathbb{R}$, $r > 0$ ve $z = x + iy \in D$ için

$$\beta(x,y) = d + r(x\cos\theta_k - y\sin\theta_k) \qquad (3.6.3)$$

ise (3.6.2) doğurucu dizisinin $\mu > 0$ periyoduna sahip olması için gerek ve yeter koşul ya

$$\theta_k = \frac{k\pi}{2\lambda}, \quad k = 0,\ \mp 1, \ldots, \mp 4\lambda;\ \mu = 2\lambda,\ \lambda \in \mathbb{N}$$

veya

$$\theta_k = \frac{\pi}{2(2\lambda-1)} + \frac{k\pi}{2\lambda-1},\ k = 0,\ \mp 1,\ \mp 2, \ldots, \mp 2(2\lambda-1);$$

$\mu = 2\lambda-1$, $\lambda \in \mathbb{N}$

olmasıdır.

İspat. a) $\forall\nu \in Z$ için a_{E_ν}, b_{E_ν} karakteristik katsayılarını hesaplarsak

$$a_{E_\nu} = \frac{F_{\bar{z}}}{F}, \quad b_{E_\nu} = \frac{(i\beta_z)^\nu F\beta_{\bar{z}}}{\overline{(i\beta_z)^\nu}\,\bar{F}\beta} \qquad (3.6.4)$$

elde edilir. Şimdi $F_\nu := (i\beta_z)^\nu \beta F$, $G_\nu := ic(i\beta_z)^\nu \beta^{-1} F$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

$$(F_\nu)_{\bar z} = [(i\beta_z)^\nu \beta F]_{\bar z}$$
$$= (i\beta_z)^\nu (\beta_{\bar z} F + \beta F_{\bar z}$$
$$= a_{E_\nu} F_\nu + b_{E_\nu} \overline{F_\nu}$$

ve

$$(G_\nu)_{\bar z} = [ic(i\beta_z)^\nu \beta^{-1} F]_{\bar z}$$
$$= ic(i\beta_z)^\nu [(-\beta_{\bar z}/\beta^2)F + \beta^{-1} F_{\bar z}]$$
$$= a_{E_\nu} G_\nu + b_{E_\nu} \overline{G_\nu}$$

yazılabildiğinden bu fonksiyonlar

$$w_{\bar z} = a_{E_\nu} w + b_{E_\nu} \bar w$$

diferensiyel denkleminin iki özel çözümüdür. Diğer taraftan $\beta, F \in H^1_{D_0}$; $\beta\beta_z \neq 0$, $c \in \mathbb{R}^+$ olduklarından $\forall \nu \in Z$ için $E_\nu \in E_{D_0}$'dır. $a_{E_{\nu-1}}$, $B_{E_{\nu-1}}$ karakteristik katsayılarını hesaplarsak

$$a_{E_{\nu-1}} = \frac{F_{\bar z}}{F}, \quad B_{E_{\nu-1}} = -\frac{(i\beta_z)^\nu F \beta_{\bar z}}{\overline{(i\beta_z)^\nu}\, \bar F \beta} \tag{3.6.5}$$

bulunur. (3.6.4) ile (3.6.5)'i karşılaştırırsak (3.6.2) dizisi için

$$a_{E_\nu} = a_{E_{\nu-1}}, \quad b_{E_\nu} = -B_{E_{\nu-1}} \tag{3.6.6}$$

bağıntıları elde edilir. Dolayısıyla (3.6.6)'ya göre $\forall \nu \in Z$ için E_ν , $E_{\nu-1}$'in izleyenidir. O halde (3.6.2), bir doğurucu dizidir.

b) $\mu \in \mathbb{N}$ için $a_{E_{\nu+\mu}} = a_{E_\nu}$, $b_{E_{\nu+\mu}} = b_{E_\nu}$ eşitlikleri gerçeklenirse (3.6.2) dizisi $\mu > 0$ periyoduna sahip olacaktır. $\forall \nu \in \mathbb{Z}$ için a_{E_ν} karakteristik katsayıları ν'den bağımsız olduğundan periyodiklik için yalnızca $b_{E_{\nu+\mu}} = b_{E_\nu}$ eşitliğini ele almak yeterlidir. (3.6.4)'deki ikinci eşitliği kullanırsak $b_{E_{\nu+\mu}} = b_{E_\nu}$ koşulundan

$$\frac{(i\beta_z)^{\nu+\mu} F \beta_{\bar{z}}}{\overline{(i\beta_z)}^{\nu+\mu} F\beta} = \frac{(i\beta)^{\nu} F\beta_{\bar{z}}}{\overline{(i\beta_z)}^{\nu} \bar{F}\beta} \qquad (3.6.7)$$

yazılabilir. (3.6.7)'den

$$\frac{(i\beta_z)^{\mu}}{\overline{(i\beta_z)}^{\mu}} = 1 \qquad (3.6.8)$$

elde edilir. $\beta_z = \frac{r}{2} e^{i\theta_k}$ olduğu için (3.6.8)'den

$$(-1)^{\mu} e^{2\mu i\theta_k} = 1$$

bulunur. Şimdi $\mu = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\cos(4\lambda\theta_k) + i\sin(4\lambda\theta_k) = 1$ olmalıdır. Bu ise $k = 0, \mp 1, \ldots, \mp 4\lambda$ olmak üzere $\theta_k = \frac{k\pi}{2\lambda}$ olmasını gerektirir. Diğer taraftan $\mu = 2\lambda - 1$ ise $\lambda \in \mathbb{N}$ için

$$e^{2\mu i\theta_k} = -1$$

olmalıdır. Buradan ise $k = 0, \mp 1, \ldots, \mp 2(2\lambda-1)$ olmak üzere $\theta_k = \frac{k\pi}{2\lambda-1} + \frac{\pi}{2(2\lambda-1)}$ elde edilir.

Karşıt olarak θ_k'ların teoremde verildiği şekilde ve β'nın da (3.6.3) formunda seçilmesi halinde (3.6.2) doğurucu dizisinin $\mu > 0$, $\mu \in \mathbb{N}$ periyoduna sahip olacağı açıktır.

4. LOGARİTMİK SÖZDE-ANALİTİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, doğurucu çift kullanmadan klasik fonksiyonlar teorisindeki bir logaritmik fonksiyonun sağladığı denklem sisteminden daha genel bir kompleks denklem sistemini inceleyeceğiz ve bu sistemin çözümlerine de "Logaritmik sözde-analitik fonksiyonlar" diyeceğiz.

4.1. Bir Kompleks Denklem Sisteminin Bir Gösterilimi ve İlgili Sonuçlar

D, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde sıfır noktasını kapsamayan basit bağlantılı bir bölge olsun. $-\pi < \arg z < \pi$ olmak üzere D'de tanımlanan $w = \mathrm{Log}z = \log|z| + i\arg z$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 1.e^{-w}, \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{4.1.1}$$

denklem sistemini gerçeklediği bilinmektedir. Burada $z = x + iy$, $\bar{z} = x-iy$'dir.

Şimdi A ve B, D bölgesinde sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = A\, e^{-w}, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = B\, e^{-w} \tag{4.1.2}$$

şeklindeki kompleks denklem sistemini gözönüne alalım. Önce hangi koşullar altında (4.1.2) sisteminin $\forall z_1, z_2 \in D$ için

$$w(z_1 z_2) = w(z_1) + w(z_2) \qquad (4.1.3)$$

fonksiyonel denklemini ve $w(1) = 0$ özelliğini sağlayan bir çözümünün bulunduğunu araştıracağız ve bir çözüm gösterilimi elde edeceğiz.

(4.1.2) formundaki bir kompleks denklem sisteminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşulun $A_z = B_{\bar{z}}$ eşitliğinin gerçeklenmesi olduğu bilinmektedir (Tutschke 1971).

$D(w)$ ile w fonksiyonunun tanım bölgesini gösterelim ve D'de aşağıdaki koşulları sağlayan bir T fonksiyonu gözönüne alalım :

$$\begin{aligned}
&1)\quad T(z_1 z_2) = T(z_1)T(z_2) \\
&2)\quad T(1) = 1,\ 1 \in D(w),\ D\text{'de } T \neq 0 \\
&3)\quad -\pi < \arg(T(z)) < \pi \\
&4)\quad T \in H^1_{D_0} .
\end{aligned} \qquad (4.1.4)$$

Bu koşullardan 3)'ün gerçeklenmesi, $\mathrm{Log}(T(z)) =: w(z)$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyonun tek değerli olmasını garanti eder.

(4.1.4) koşullarını gerçekleyen bir kaç fonksiyon örneğini $-\pi < \arg z < \pi$ koşulu altında $T(z) = z$, $T(z) = 1$, $T(z) = z\bar{z}$, $T(z) = \exp[g(\log z)]$ olarak seçebiliriz. Son örnekte g, D'de tanımlanmış ve $g(z_1 + z_2) = g(z_1) + g(z_2)$ fonksiyonel denklemini gerçekleyen bir fonksiyondur.

Şimdi $w(z) = Log(T(z))$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada T (4.1.4), koşullarını gerçekleyen bir fonksiyondur. Bu takdirde w fonksiyonu, $T_{\bar{z}} = A$, $T_z = B$ olmak üzere $\forall z_1, z_2 \in D$ için $w(z_1 z_2) = w(z_1) + w(z_2)$ ve $w(1) = 0$ koşullarını sağlayan (4.1.2) sisteminin bir çözümüdür.

z_o, D bölgesinde sabit bir nokta olmak üzere

$$h(z) = w(z_o z) - w(z) \tag{4.1.5}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bunun yanında

$$\begin{aligned} A(z) &= \overline{z_o}\, A(z_o z)\exp(-h(z)) \\ B(z) &= z_o B(z_o z)\exp(-h(z)) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

bağıntılarının gerçeklendiğini varsayalım. Öte yandan $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ kompleks operatörleri için zincir kuralından

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

bağıntılarını yazabiliriz. $\zeta = z_o z$, $\bar{\zeta} = \bar{z}_o \bar{z}$ dönüşümü için

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = z_o, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{z}} = \bar{z}_o \tag{4.1.8}$$

bulunur. (4.1.7) ile tanımlanan $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ operatörleri, (4.1.8)'in de gözönüne alınmasıyla (4.1.5)'de tanımlanan h fonksiyonuna uygulanırsa (4.1.6) koşulları altında $h_z = 0$, $h_{\bar{z}} = 0$ bulunur. Bu ise h fonksiyonunun D bölgesinde sabit olduğunu gösterir. O halde

$$h(z) = w(z_o z) - w(z) = c \in \mathbb{C} \ \text{dir.}$$

SONUÇ 4.1.1. $1 \in D$ olsun. Bu takdirde $w(z_o) = c = h(z)$ olması için gerek ve yeter koşul $w(1) = 0$ olmasıdır.

SONUÇ 4.1.2. w fonksiyonu, (4.1.2) sisteminin $w(1) = 0$ koşulunu sağlayan bir çözümü ise $\forall z_1, z_2 \in D$ için (4.1.3) fonksiyonel denklemi gerçeklenir.

w fonksiyonunun (4.1.2) sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. O zaman w'nin kompleks diferensiyeli

$$dw = w_z dz + w_{\bar{z}}\, d\bar{z} \qquad (4.1.9)$$

şeklindedir. $\gamma = \gamma_1$ ile $\gamma = \gamma_2$, D bölgesine teğet iki doğru ve $\gamma_1 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_2$ olmak üzere $x = t\cos\gamma$, $y = t\sin\gamma$; $t, \gamma \in \mathbb{R}$ ile verilen kutupsal koordinatları kullanırsak (4.1.2) sistemini sağlayan w fonksiyonu için yazılan (4.1.9) diferensiyeli

$$dw = [(Be^{i\gamma} + Ae^{-i\gamma})dt + it(Be^{i\gamma} - Ae^{-i\gamma})d\gamma]e^{-w} \qquad (4.1.10)$$

şeklini alır. Diğer taraftan w fonksiyonunun $w(z) = \mathrm{Log}[\chi(z)]$ ya da kutupsal koordinatlarda $w(t,\gamma) = \mathrm{Log}[\chi(t,\gamma)]$ formunda olduğunu kabul edelim. Burada χ fonksiyonu D bölgesinde sıfırdan farklı değerler alan ve daha ileride üzerine bazı koşullar koyacağımız sürekli, türetilebilir bir fonksiyondur. Böylece

$$\begin{aligned} dw(t,\gamma) &= \frac{1}{\chi(t,\gamma)}\, d\chi(t,\gamma) \\ &= d\chi(t,\gamma)\exp\{-\mathrm{Log}[\chi(t,\gamma)]\} \qquad (4.1.11) \\ &= d\chi(t,\gamma)e^{-w(t,\gamma)} \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. (4.1.10) ile (4.1.11)'i karşılaştırırsak χ'nin tam diferensiyeli olan

$$d\chi(t,\gamma) = (Be^{i\gamma} + Ae^{-i\gamma})dt + it(Be^{i\gamma} - Ae^{-i\gamma})d\gamma \qquad (4.1.12)$$

bağıntısı elde edilir.

(4.1.12) tam diferensiyel olduğundan $\chi(t,\gamma)$ fonksiyonu

$$\chi = \int_\Gamma (Be^{i\gamma}+Ae^{-i\gamma})dt + it(Be^{i\gamma}-Ae^{-i\gamma})d\gamma \qquad (4.1.13)$$

eğrisel integrali yardımıyla hesaplanabilir. Burada $\Gamma = \Gamma(z_o,z) \subset D$, başlangıç noktası z_o(sabit), bitim noktası z olan basit, düzgün bir eğri ve $z \neq z_o$ olduğu varsayılmaktadır.

$$w(z) = \mathrm{Log}\{\int_\Gamma (Be^{i\gamma}+Ae^{-i\gamma})dt + it(Be^{i\gamma}-Ae^{-i\gamma})d\gamma\} \qquad (4.1.14)$$

olarak bulunur. $-\pi < \arg\chi(z) < \pi$ olarak seçilirse (4.1.14), (4.1.2) sisteminin tek değerli çözümü olur.

SONUÇ 4.1.3. (4.1.13) ile belirlenen χ yardımcı fonksiyonu, T için verilen (4.1.4) koşullarını sağlarsa (4.1.14), (4.1.2) sisteminin $\forall z_1, z_2 \in D$, $1 \in D$ için

$$w(z_1z_2) = w(z_1) + w(z_2), \quad w(1) = 0$$

koşuluna uyan bir çözümüdür.

SONUÇ 4.1.4. (4.1.5) ile tanımlanan h fonksiyonunun sabit olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (4.1.2) sisteminin katsayıları arasında

$$B(z)\overline{z_o}\, A(z_oz) = z_oA(z)B(z_oz) \qquad (4.1.15)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Karşıt olarak (4.1.15)'in yanında $A(z) = \overline{z_o}\, A(z_oz)e^{-h}$ veya $B(z) = z_oB(z_oz)e^{-h}$ bağıntılarından biri geçerliyse (4.1.2) sisteminin her w çözümü, $w(1) = 0$ koşulu altında $\forall z_1, z_2 \in D$ için (4.1.3) fonksiyonel denklemini sağlar.

KAYNAKLAR

BAUER, K.W., 1978. On a differential equation in the theory of pseudo-holomorphic functions. J.Math.Soc.Japan. vol.30, 3, 457-461.

BAUER, K.W. ve RUSCHEWEYH, S., 1973. Ein Darstellungssatz für eine Klasse Pseudoanalytischer Funktionen. Ber. d. Geselsch. für Math. und Datenv. Bonn. 75, 3-15.

BERS, L., 1953. Theory of Pseudo-Analytic Functions. New York University.

KOCA, K. ve WITHALM C., 1987. Über die Eigenschaften des Raumes $P_D(F,fF)$. Technische Universität Graz und Universität Graz, Institute für Math. Preprint Nr. 93 - 1987. (Bu çalışma, Romanya'daki "IAŞI" adlı periyodik dergide baskıdadır).

KOCA, K., 1987. Über die Eigenschaften der Räume $P_D(F^n,fF^n)$, $P_D(F^n,iF^n)$. Technische Universität Graz und Universität Graz, Institute für Math. Preprint Nr. 95-1987.

KOCA, K., 1982. Sözde-Analitik Fonksiyonlar. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yüksek Lisans Tezi.

KOOHARA, A., 1976. Representation of pseudo-holomorphic functions of several complex variables. J. Math. Soc. Japan, 27, 257-277.

PROTTER, N.H., 1956. The periodicity problem for pseudo-analytic functions. Ann. of Math (2), 64, 154-174.

TUTSCHKE, W., 1975. Konstruktion von Lösungen gewisser spezieller elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung (in der Ebene) durch Zurückführung auf die inhomogene Cauchy-Riemannische Differentialgleichung. Math. Nachr., 82, 69-75.

TUTSCHKE, W., 1971. Pseudoholomorphe Exponentialfunktionen. Beiträge Zur Analysis, 1, 115-121.

VEKUA, I.N., 1963. Verallgemeinerte analytische Funktionen. Akademie Verlag-Berlin.

WITHALM, C. 1981. Main generating systems of pseudo-holomorphic functions. Mathematica Balkanica 11.

WITHALM, C. 1975. Über gewissse Vektorräume pseudoholomorpher Funktionen. Publications de I'. Institut Mathematique Nouvelle Seri 19, 181-187.

WITHALM, C., 1974. Über algebraische Strukturen pseudoanalytischer Funktionen. Glasnik Matematički 2, 233-240.