JURİ ÜYELERİ

Prof.Dr.Veli KURT ....

Prof.Dr.Rahim OCAK ....

Doç.Dr.Ahmet IŞIK ....

Doç.Dr.Muhammed KAMALI ....

Doç.Dr.Ekrem KADIOĞLU ....

08.02.2001 tarihinde **05/29** kararla kurulan jürimiz iş bu **Doktora** tezini 15.03.2001 tarihinde kabul etmiştir.

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTA ÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK
ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MODÜLER FORMLAR VE EİGEN DEĞERLERİ

Mehmet BEKDEMİR

Yönetici: Doç. Dr. Ahmet IŞIK

Doktora Tezi

ÖZET

C kompleks düzlem, **H** üst yarı düzlem ve $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, $ad - bc = 1$ olmak üzere ‘ 1 ’ çarpanlı tam ağırlıklı modüler eigen formlar üzerindeki Hecke operatörü baz alınarak, q tam sayısı için

$$\Phi(\tau) = \frac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)}$$

modüler eigen fonksiyonu elde edildi. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ matrisine ve $[\lambda, \mu]$ karakteristiklerine göre $f: \mathbf{H} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorf olan

$$(f|_m [\lambda, \mu])(\tau, z) = e^{2\pi i m\left(\lambda_1^2 \tau + 2\lambda_1 z + 2\lambda_1 \mu_1\right)} f(\tau; z)$$

Jacobi modüler fonksiyonları üzerinde Hecke operatörlerinin $[\lambda,\mu] \in \mathbf{Z}^2$ karakteristiklerine ve $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (mod 2) matrisi ile $s\pi$, $t\pi$, (s, $t \in \mathbf{Z}$) periyotlarına (yani Ω_π latisine) göre değişimi incelendi.

Ayrıca, Weierstrass’ ın eliptik fonksiyon kurma metodu kullanılarak, Hecke operatörlerinin $\Phi(\tau, z)$ eigen fonksiyonları ile eliptik fonksiyon teşkil edildi.

SUMMARY

For a fixed integer q, the modular eigen function

$$\Phi(\tau)=\frac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)}$$

obtained by using the Hecke operators on modular eigen forms of integer weight with multiplier "1" so that **C** is complex plane, **H** is upper half plane and $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\in$ SL(2, **Z**), $ad-bc=1$.

The value changes of Hecke operators defined on the set of Jacobi modular functions were investigated according to characteristics $[\lambda,\ \mu]$, matrix $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (mod 2) with periods $s\pi$, $t\pi$, (s, $t\in\mathbf{Z}$), where f : $\mathbf{H}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ is holomorphic and

$$(f\,|_m\,[\lambda,\mu])(\tau,z)=e^{2\pi i m\left(\lambda_1^2\tau+2\lambda_1 z+2\lambda_1\mu_1\right)}f(\tau;z).$$

Furthermore, by using Weierstrass' methods to construct elliptic function was established with $\Phi(\tau,z)$-modular eigen function obtained Hecke operators like Jacobi modular functions.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında değerli görüşleri ve büyük katkıları bulunan sayın hocam Doç. Dr. Ahmet IŞIK' a içten şükran ve saygılarımı arz ederim.

Doktora eğitiminde kendilerinden ders aldığım hocam Prof. Dr. Rahim OCAK ve diğer tüm hocalarıma, yardım ve ilgilerini esirgemeyen mesai arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmam sırasında moral desteklerini ve sabrını esirgemeyen eşime teşekkür ederim.

Mehmet BEKDEMİR

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SİMGELER

B_k: Bernoilli katsayıları.
C : Kompleks sayılar kümesi,
C^2: Riemann küresi
dim M_k : M_k uzayının boyutu,
$f|_{k,m}(\tau, z)$: SL(2, Z) üzerinde k ağırlıklı ve m indeksli Jacobi formu,
G_k : k ağırlıklı Eisenstein Serisi, (k >3),
H : Üst yarı-düzlem, (Im(τ) > 0),
M_k : k ağırlıklı tam modüler formların lineer uzayı,
$M_{k,0}$: k ağırlıklı cusp formların alt uzayı,
R : Γ Modüler grubunun temel bölgesi,
R_G : Γ Modüler grubunun G alt grubunun temel bölgesi,
S, T : Γ Modüler grubunun gerenleri,
SL(2, Z)= Γ(1) : Elemanları tam sayı ve determinantı bir olan 2×2 tipindeki matrislerin modüler grubu,
T_n : Hecke operatörü,
X= [λ, μ]: Jacobi formların karakteristikleri,
Z : Tam sayılar kümesi,
z: **C** de herhangi bir değişken,
Ω : Latis kümesi,
Γ : Modüler grup,
(w_1, w_2) : Ω Latis kümesinin gerenleri,
Ω_π : $\{(s + t\tau)\pi : s, t \in \mathbf{Z}, \tau \in \mathbf{H}\}$,
Γ(n) : n. mertebeden dönüşümlerin kümesi,
Φ(τ) : $\dfrac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)}$,
Δ(τ) : Diskriminant fonksiyonu,
$\sigma_\alpha(n)$: Bölüm fonksiyonu,
$\tau(n)$: Ramanujan fonksiyonunu,
τ: **H** -Üst yarı düzlemin herhangi bir elamanı,
$\Gamma_0(q)$: Modüler grubunun denk alt grupları,

1. GİRİŞ

Dört bölümden oluşan bu çalışmada iki temel konu üzerinde duruldu. Birincisi, Hecke operatörlerinin özellikleri ve belli koşullar altında oranlanması ile elde edilen fonksiyonun $R_\Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} TST^k(R_\Gamma)$ bölgesinde modülerliğinin ve eigen fonksiyon olup olmadığının incelenmesidir. İkincisi, elde edilen eigen fonksiyonun yarı periyodikliği yani yarı-eliptikliği ve bu yarı-eliptik fonksiyondan eliptik fonksiyon elde edilmesidir.

Hecke operatörleri teorisinin orijini, Mordell'in 1920 yılında yayınlanan bir makalesine dayanmaktadır (Rankin, 1976). Mordell bu makalesinde, modüler diskriminant fonksiyonunun katsayıları için Ramanujan tarafından tahmin edilen çarpımsal özelliğin sağlandığını göstermiştir. Mordell'in bu tanımlamasına göre operatörler n. mertebeden dönüşümleri içermektedir ve bu operatörler modüler grubun alt grubuna aittir. Mordell'in bu çalışmaları, Hecke operatörleri ile ilgili şu anda mevcut ve geçerli olan teorilerin, önce Hecke (1937) ve daha sonra Petersson(1939-1940) tarafından geliştirilmesine büyük katkıda bulunmuştur (Rankin, 1976).

1937 yılında Hecke, n =1, 2,..., için T_n ile gösterdiği ve kendi adını verdiği, M_k lineer uzayını kendi üzerine dönüştüren T_n lineer operatörlerin bir dizisi ile Fourier katsayıları çarpımsal özelliği sağlayan modüler formları tanımlamıştır. Ayrıca Hecke operatörlerini bu modüler formlara uygulamış ve Hecke operatörleri biri birine göre değişme özelliğine sahip olduğunu göstermiştir (Apostol,1976).

1957 yılında ki Van Lint ve Wohlfart'ın makalelerinde, Hecke operatörleri keyfi ağırlıklı formlara uygulanmıştır (Rankin, 1976). Hecke operatörlerinin tam modüler grubuna ait cusp formlara uygulanmasıyla Hecke operatörleri teorisi daha anlaşılır olmuştur (Gunning, 1962).

Daha sonraları, çarpımsal özelliği sağlayan Fourier katsayılarına sahip ve Hecke operatörleri için eigen form olan cusp formlardan cusp form uzayı için baz kümesi elde edilmiştir. 1970 yılında Atkin-Lehner yeni formları tanıtmışlar ve Hecke operatörlerini keyfi karakterli ve çarpanlı formlara uygulamışlardır (Atkin-Lehner, 1970).1975 yılında Li Hecke operatörlerini keyfi karakterli ama sabit çarpanı düşünmeksizin $\Gamma_0(M, N)$ uzayı üzerindeki yeni formlara uygulamıştır (Rankin, 1976).

Shimura modüler formların Hecke operatörleri teorisinde ve Jacobi formların teorisindeki fonksiyonları uygun bir elemanter çarpanı ile çarparak, bu fonksiyonların τ ya göre modüler fonksiyon ve z ye göre eliptik fonksiyon olduğunu göstermiştir (Eichler and Zagier, 1985).

Çalışmanın birinci bölümü olan giriş kısmında, çalışmayla ilgili genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, bu tezde kullanacağımız tanımlar, teoremler ve özellikler temel kavramlar başlığı altında toplandı.

Üçüncü bölümde, $(T_n f)(\tau) = n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n\tau + bd}{d^2}\right)$ modüler formuna (veya cusp form) yine T_n Hecke operatörü uygulandı ve $\delta_n(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1}\gamma_n\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ için $(T_n\ (T_n f))(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty}\delta_n(m)\, e^{2\pi i m\tau}$ biçiminde Fourier açılımı ile $T_n\ (T_n f)$ nin de M_k uzayın da modüler form ve de $M_{k,0}$ cusp form uzayın da cusp form olduğu gösterildi. $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ olmak üzere $(T_n(T_n f))(V\tau) = (\gamma\tau + \delta)^k (T_n(T_n f))(\tau)$ bağıntısı yazıldı. Ayrıca $G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)}{2k!}\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(m)x^m$ Eisenstein serisi ile normalleştirilmiş $T_n f$ modüler fonksiyonu arasında $(T_n f)(\tau) = \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k}(T_n G_k)(\tau)$ biçiminde bir eşitlik elde edildi. $\lambda = \dim(M_k)$ için M_k uzayında $T_n f_0$, $T_n f_1$, ..., $T_n f_{\lambda-1}$ biçiminde λ tane normalleştirilmiş eigen form bulunduğu gösterildi.

Üçüncü bölümün üçüncü kısmında ise yukarıda elde ettiğimiz tanım, teorem ve özelliklerden, q bir tam sayı ve $T_n f$, M_k uzayında normalleştirilmiş uygun eigen form olmak üzere

$$\Phi(\tau)=\frac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)}$$

biçiminde bir fonksiyon tanımlandı. Bu fonksiyonunun, b_m ler tam sayılar ve $x=e^{2\pi i\tau}$ olmak üzere $\Phi(\tau) = x^{q-1}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m\right)$ biçiminde Fourier açılımına sahip ve Γ grubunun $\Gamma_0\ (n)$ alt grubuna göre M_k uzayında modüler fonksiyon olduğu ispatlandı. Buna ilaveten $R_\Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} TST^k(R_\Gamma)$ bölgesinin $\Gamma_0\ (n)$ grubunun temel bölgesi olduğu ve grubun gerenleri olan TS, TST elamanlarına göre bu fonksiyonunun modüler özelliğini koruduğu ve aynı zamanda bu elde edilen fonksiyonunun Hecke operatörüne göre bir eigen fonksiyon olduğu gösterildi.

Tezin dördüncü bölümünde; λ, $\mu \in \mathbf{Z}$ için Jacobi modüler formlarının,

$$f\left(\gamma(\tau),\frac{z}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^k e^{2\pi i m\tau\left(\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)} f(\tau;z)$$

$$f(\tau;z+\lambda\tau+\mu)=e^{-2\pi i m\tau\left(\lambda^2\tau+2\lambda z\right)} f(\tau;z)$$

özelliklerinden ve Hecke operatörünün tanımından ,

$$\left(T_n f\,|_{k,m}\right)(\tau;z)=n^{k-1}\sum_{\substack{ad-bc=n \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} (c\tau+d)^{-k} e^{2\pi i m n\left(\frac{-cz^2}{c\tau+d}\right)} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d};\frac{nz}{c\tau+d}\right)$$

olan yeni bir form kuruldu. Daha sonra $[\lambda,\ \mu]\in\ \mathbf{Z}^2$ karakteristikli ve $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$(mod 2) matrisli $\left(T_n f\,|_{k,m}\right)(\tau;z)$ Hecke operatörü, $\tau\ \in\ \mathbf{H}$ değişkenine göre modüler ve $s\pi$, $t\pi\tau$,(s, t $\in\mathbf{Z}$) periyotları ile z değişkenine göre yarı periyodik fonksiyon olduğu gösterildi. Son kısımda ise daha önce elde ettiğimiz,

$$\Phi(\tau,z)=\frac{T_n f(q\tau,qz)}{T_n f(\tau,z)}$$

fonksiyonunun yarı-eliptik olduğu ispatlandı. Weierstrass yarı-eliptik σ-Sigma fonksiyonun logaritmik türevinden eliptik fonksiyon elde etmişti (Dutta, 1965; Ocak, 1985) . Bu metot kullanılarak, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$(mod 2) matrisine göre $[\lambda, \mu] \in \mathbf{Z}^2$ karakteristikli $\left(T_n f\,|_{k,m}\right)(\tau; z)$ Hecke operatörlerinin oranlanmasıyla elde edilen $\Phi(\tau, z)$ yarı-eliptik modüler fonksiyonundan bir eliptik fonksiyon teşkil edildi .

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1: Bir f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 2.1.2: Tek değerli bir f kompleks fonksiyonu bir D bölgesinin bütün noktalarında analitikse, f fonksiyonuna bu D bölgesinde analitiktir denir.

Tanım 2.1.3: Tüm açık kompleks düzlemde analitik olan bir f fonksiyonuna tam fonksiyon denir (Dutta,1965).

Tanım 2.1.4: Kutuptan başka singüler noktası olmayan fonksiyona meromorf fonksiyon denir.
Meromorf fonksiyonlar bir cisim oluşturur. Bir meromorf fonksiyonunun tanım bölgesindeki kutupları ve sıfırları sonlu sayıdadır. Meromorf fonksiyonların türevleri ve tersleri de meromorf fonksiyondur (Dutta,1965; Işık,1991).

Tanım 2.1.5: Ω kümesi **C** kompleks sayılar kümesinin toplama işlemine göre alt grubu olsun. Eğer Ω kümesinin sıfırdan farklı her elamanı mutlak değerce alttan sınırlı ise Ω kümesine latis denir.
Latisler ;

1. Sıfır Boyutlu (Sıfır Latisi)
2. Bir Boyutlu (Basit Latisi)
3. İki Boyutlu (Çift Latis)

olmak üzere üç sınıfa ayrılır. Örneğin,

$$\Omega = \{ m2w_1 + n2\, w_2 : w_1, w_2 \in \mathbf{C},\ m,\ n \in \mathbf{Z},\ m,n \neq 0,\ \frac{w_1}{w_2} \neq \text{reel}\}$$

kümesi iki boyutlu bir latistir. Burada w_1, w_2 iki lineer bağımsız kompleks sayı ve Ω latisinin her bir elamanı w_1, w_2 kompleks sayılar cinsinden ifade edilir. Böylece (w_1, w_2) çifti Ω latisinin bir bazıdır.

Bir Ω latisinin tüm $w\in\Omega$ elamanları sıfırdan farklı bir $\lambda\in\mathbf{C}$ ile çarpılarak elde edilen

$$\Omega' = \{ \lambda w : w\in\Omega\}$$

kümesi de bir latistir. (w_1, w_2) çifti Ω için bir baz ise (λw_1, λw_2) çifti de Ω latisi için bir bazdır ve bu iki baz çiftine eşdeğer baz çifti denir. $a, b, c, d\in\mathbf{Z}$ ve $ad-bc = 1$ olmak üzere $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z})$ için

$$\begin{pmatrix} 2w \\ 2w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2w_1 \\ 2w_2 \end{pmatrix}$$

yazılabileceği açıktır.

Tanım 2.1.6: ***A***, **C** kompleks sayılar üzerinde tersi olan 2×2 tipindeki matrislerinin bir grubu, $a, b, c, d\in\mathbf{C}$ ve $ad-bc \neq 0$ olmak üzere

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olsun. **L,** $\mathbf{C}^2$ den $\mathbf{C}^2$ üzerine tersi olan lineer dönüşümlerin bir grubu ise A∈ ***A*** için

$$\mathbf{L_A} : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2, z \to w = \mathrm{A}z$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona homojen lineer dönüşüm denir (Schonenberg,1974; Işık,1991).

Tanım 2.1.7: $a, b, c, d\in\mathbf{C}$ ve $ad- bc \neq 0$ olmak üzere $w = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ biçimindeki dönüşümlere Mobius dönüşümleri denir (Knopp,1978; Kurt,1982).

Tanım 2.1.8: a, b, c, d tam sayılar ve $ad- bc = 1$ olmak üzere

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

şeklindeki tüm Mobius dönüşümlerinin oluşturduğu gruba modüler grup denir ve Γ ile gösterilir. Bu grup, 2×2 tipindeki

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisler göz önüne alınarak kısaca

$$\Gamma = \{A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{Z} \text{ ve } ad- bc = 1\}$$

biçiminde de tanımlanır (Ford,1951; Ogg, 1969,1972; Knopp,1978).

Teorem 2.1.1: $\tau \in \mathbf{H}$ ($\mathbf{H} = \{\tau : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ üst yarı düzlemi) için $T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z})$ olmak üzere Γ grubu S ve T tarafından gerilir (Atkin ve Lehner, 1970; Ogg, 1972; Schonenberg, 1974).

Tanım 2.1.9: Γ modüler grup, G, Γ nun alt grubu olsun. Eğer τ, $\tau' \in \mathbf{H}$ için $\tau' = A\tau$ olacak şekilde $A \in G$ varsa τ ve τ' noktaları denktir denir.
G grup olduğundan bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı, **H** üst yarı düzlemini orbit olarak adlandırılan denklik veya kalan sınıflarına ayırır. G τ orbiti, $A\tau$ yu sağlayan tüm kompleks sayıların kümesidir.

Her bir orbitten bir nokta alınarak(birleşimi) oluşturulan R_G kümesine G nin bir temel bölgesi denir (Apostol,1976).

Temel bölge aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

Tanım 2.1.10: Her kalan sınıfın bir tek elamanını içeren basit bağlantılı bölgeye ilgili latisin temel bölgesi denir.
Ω latisinin kendiside bir kalan sınıfıdır. Buna göre sıfır latisinin temel bölgesi tüm düzlem, basit latisin temel bölgesi iki paralel doğru ile sınırlandırılmış sonsuz şerit ve çift latisin temel bölgesi değişik geometrik şekiller olabilir.

Başka bir ifadeyle, eğer R_G nin farklı noktaları G altında denk değil ve $\tau \in \mathbf{H}$ için G altında τ', τ ya denk olacak şekilde R_G nin kapanışında bir τ' noktası varsa **H** nın açık bir R_G alt kümesine G nin bir temel bölgesi denir (Ford, 1951; Apostol,1976).

Tanım 2.1.11: k bir tam sayı ve Γ modüler grup olsun. Eğer bir f fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu f fonksiyonuna k ağırlıklı[1] modüler form denir:

i. f, **H** üst yarı düzlemde meromorftur,

ii. $f\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^k f(\tau)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$

iii. f nin Fourier açılımı,

$$f(\tau)=\sum_{n=-m}^{\infty} c(n)e^{2\pi i n\tau} \tag{2.1}$$

şeklindedir (Apostol,1976; Rankin,1977; Kurt,1986).

Aslında, f (z) fonksiyonunun sıfır civarındaki Laurent açılımında $z = e^{2\pi i\tau}$ konularak (2.1) Fourier açılımı yazılır.

Tanım 2.1.12: Eğer Tanım 2.1.11 (iii) de $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a(n)z^n$ olursa, yani f (z) nin Laurent açılımı z nin negatif kuvvetini içermezse bu forma tam modüler form denir. Başka bir ifadeyle bir tam modüler form, $i\infty$ da ve **H** nın bütün noktalarında analitiktir (Apostol,1976).

Tanım 2.1.13: f fonksiyonun Fourier açılımın da $c(0)$ sabit terimine f nin $i\infty$ daki değeri denir. Eğer $c(0) = 0$ ise f fonksiyonuna bir cusp form, $c(r) \neq 0$ olacak şekilde bir

[1] Bazı kaynaklarda k ağırlığı "-k boyut" veya "-k derece" olarak ve bazı kaynaklarda da k yerine $2k$ alınmıştır.

en küçük r sayısı varsa, bu r sayısına $i\infty$ da f nin sıfırının mertebesi denir (Atkin,1970; Apostol,1976; Kurt,1986).

Tanım 2.1.14: Eğer bir f fonksiyonu aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa, bu f fonksiyonuna modüler fonksiyon denir:

i. f, **H** üst yarı düzlemde meromorftur,

ii. Γ modüler grubunda her A dönüşümü için $f(A\tau)=f(\tau)$ dır,

iii. f nin Fourier açılımı,

$$f(\tau)=\sum_{n=-m}^{\infty}c(n).e^{2\pi in\tau}$$

şeklindedir.

Başka bir ifadeyle $k=0$ ağırlıklı modüler formlara, kısaca modüler fonksiyonlar denir (Gunning,1962; Ogg, 1969, 1972; Apostol,1976).

Tanım 2.1.15: Kompleks düzlemin bir D bölgesinde sabitten farklı analitik $f(\tau)$ fonksiyonu için

$$f(\tau+2w)=f(\tau)$$

eşitliği her zaman sağlanıyorsa, $f(\tau)$ fonksiyonuna periyodik fonksiyon, $2w$ ya da $f(\tau)$ fonksiyonunun periyodu denir. $f(\tau)$ fonksiyonu,

$$f(\tau+2w)=f(\tau)$$

$$f(\tau-2w)=f(\tau)$$

ve herhangi bir n tam sayı için

$$f(\tau+n\,2w)=f(\tau)$$

yazılabileceğinden $2w$ periyotlarının kümesi bir latistir. Bu latis bir boyutlu ise $f(\tau)$ fonksiyonuna basit periyodik, iki boyutlu ise çifte periyodik fonksiyon denir.

Tanım 2.1.16 : Çifte periyodik meromorf fonksiyonlara eliptik fonksiyon denir.

Tanım 2.1.17: k tam sayısı, $k > 2$ ve $k \equiv 0 \pmod 2$ şartlarını sağlayacak şekilde verilsin. Ayrıca $\tau \in \mathbf{H}$ elamanı $w_1, w_2 \in \mathbf{C}$ için $\tau = \dfrac{w_1}{w_2}$, $\operatorname{im}\tau > 0$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{G}_k(\tau) = w_2^{\,k}\,\mathrm{G}_k(w_1, w_2) = \sideset{}{'}\sum_{m,n\in Z}(m\tau + n)^{-k} \qquad (2.2)$$

ile tanımlanan seriye homojen Eisenstein serisi denir (Schoeneberg,1974; Işık,1991).

Teorem 2.1.2: $k \geq 4$, $k \equiv 0 \pmod 2$ olmak üzere $\mathrm{G}_k(\tau)$ Eisenstein serisi $-k$ ağırlıklı bir tam modüler formdur (Knoop,1978; Işık,1991).

Teorem 2.1.3: $k \geq 4$, $k \equiv 0 \pmod 2$, $\zeta(k) = (-1)^{k+1}\dfrac{(2\pi)^k}{2k!}B_k$ ve $\sigma_{k-1}(m) = \sum_{d|m} d^{k-1}$

olmak üzere $\mathrm{G}_k(\tau)$ Eisenstein serisi,

$$\mathrm{G}_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)}{2k!}\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(m)e^{2m\pi i\tau} \qquad (2.3)$$

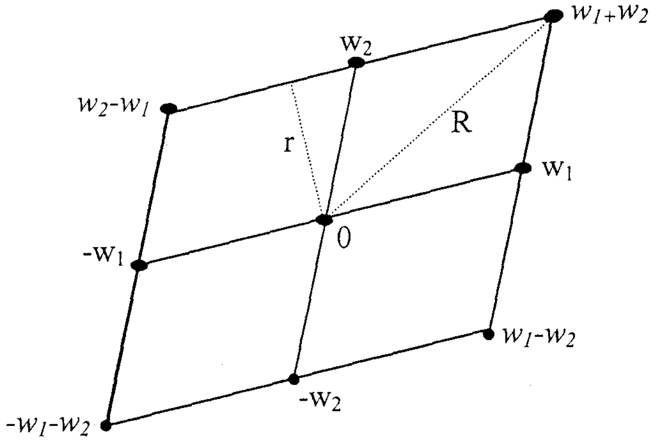
biçiminde Fourier açılımına sahiptir (Knoop,1978; Işık,1991; Lee ve Hung,1995). Burada B_k , k.yıncı Bernoulli sayısıdır. Bazı Bernoulli sayıları $B_0 = 1$, $B_1 = \dfrac{-1}{2}$, $B_2 = \dfrac{1}{6}$, $B_4 = \dfrac{-1}{30}$, $B_6 = \dfrac{1}{42}$,... olarak yazılır. Buradan da görüleceği gibi $n \in \mathbf{N}$ olmak üzere $B_{2n+1} = 0$ dır.

Teorem 2.1.4: Eğer α reel ise

$$\sum_{\substack{w\in\Omega \\ w\neq 0}} \frac{1}{w^{\alpha}}$$

sonsuz serisinin mutlak yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şart $\alpha > 2$ olmasıdır.

İspat:



Şekil.2.1

Şekil.2.1 de r, 0 noktasından paralel kenarın bir kenarına çizilen en kısa uzaklık ve R, 0 noktasından paralel kenarın bir kenarına çizilen en büyük uzaklık olsunlar. Eğer w, Şekil.2.1 de gösterilen sıfırdan farklı 8 periyottan herhangi biri ise,

$$r \le |w| \le R, \quad (\text{ 8 tane } w \text{ periyodu için})$$

elde ederiz. Bu 8 periyodu saran periyotların aynı merkezli ikinci yörüngede,

$$2r \le |w| \le 2R, \quad (\text{ 16 tane } w \text{ periyodu için})$$

eşitsizliğini sağlayan 2.8 = 16 tane periyot vardır. Bundan sonraki yörüngede

$$3r \le |w| \le 3R, \quad (\text{ 24 tane } w \text{ periyodu için})$$

eşitsizliğini sağlayan 3.8 = 24 tane periyot vardır. Aynı şekilde n. yörüngeye kadar devam edilirse

$$n.r \le |w| \le n.R, \quad (\; n.8 \text{ tane } w \text{ periyodu için})$$

eşitsizliğini sağlayan n.8 tane periyod vardır. Buradan orijine yakın sıfırdan farklı $8(1+2+\ldots+n)$ periyotların üzerinden alınan $S(n)=\sum |w|^{-\alpha}$ toplamı

$$\frac{8}{R^{\alpha}}+\frac{2.8}{(2R)^{\alpha}}+\ldots+\frac{n.8}{(n.R)^{\alpha}} \le S(n) \le \frac{8}{r^{\alpha}}+\frac{2.8}{(2r)^{\alpha}}+\ldots+\frac{n.8}{(n.r)^{\alpha}}$$

veya

$$\frac{8}{R^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}} \le S(n) \le \frac{8}{r^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

eşitsizliğini sağlar. Buradan $\zeta(\alpha-1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}}$ olmak üzere eğer $\alpha > 2$ ise S(n) kısmi toplamı, $8\zeta(\alpha-1)/r^{\alpha}$ ile üsten sınırlıdır. Dolayısıyla herhangi S(n) toplamı böyle iki kısmi toplam arasındadır, böylece $\sum|w|^{-\alpha}$ serilerinin kısmi toplamlarının tümü üsten sınırlıdır. Yani $\alpha > 2$ ise seri yakınsak, $\alpha \leq 2$ ise S(n) kısmi toplamı ıraksaktır.

Tanım 2.1.18: Eğer q pozitif tam sayı ise $c \equiv 0$ (mod q) olmak üzere Γ daki tüm $V=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrislerinin oluşturduğu gruba Γ nun $\Gamma_0(q)$ alt grubu denir ve

$$\Gamma_0(q) = \{V : V \in \Gamma \text{ ve } c \equiv 0 \ (\text{mod } q),\ ad\text{-}\ bc = 1\} \qquad (2.4)$$

ile gösterilir (Ford,1951; Atkin,1970; Apostol,1976).

Tanım 2.1.19: Eğer modüler fonksiyon tanımındaki "Γ modüler grubunda her A dönüşümü için $f(A\tau)=f(\tau)$" şartı yerine "Γ_0(p) de her V dönüşümü için $f(V\tau)=f(\tau)$" şartı konursa, f fonksiyonuna Γ_0(p) alt grubuna göre otomorfik fonksiyon denir. f fonksiyonunun Γ_0(p) alt grubuna ait olduğu da söylenebilir (Lehner,1965; Atkin,1970; Apostol,1976).

Başka bir ifadeyle, k bir tam sayı olmak üzere Γ ya göre -k ağırlıklı bir otomorfik form, **H** da tüm $M=\begin{bmatrix} * & * \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ için $f(M\tau)=(c\tau+d)^{-k} f(\tau)$ fonksiyonel eşitliğini sağlayan bir meromorf fonksiyondur (Knoop,1978).

2.2. M_k Lineer Uzayı ve $M_{k,0}$ Lineer Alt Uzayı

k ağırlıklı bütün tam modüler formların uzayı M_k ve k ağırlıklı cusp formların uzayı $M_{k,0}$ ile gösterilsin. M_k uzayı toplama ve skalerle çarpma işlemine göre **C** kompleks cismi üzerinde bir lineer uzaydır.

Teorem 2.2.1: f, $k \geq 0$, $k \equiv 0 \pmod 2$, çift ağırlıklı tam modüler form olmak üzere her $\tau \in \mathbf{H}$ için $G_0(\tau) = 1$ olsun. Bu durumda a_r ler kompleks sayılar olmak üzere f fonksiyonu

$$f = \sum_{\substack{r=0 \\ k-12r \neq 2}}^{\lfloor k/12 \rfloor} a_r G_{k-12r} \Delta^r$$

şeklinde bir ve yalnız bir tek olarak ifade edilebilir. Çift ağırlık cusp formlar, $a_0 = 0$ olmak üzere böyle bir toplama sahiptir (Apostol, 1978).

M_k uzayının boyutu,

$$\dim M_k = \begin{cases} \left[\dfrac{k}{12}\right], & k \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 12)\ ise \\ \left[\dfrac{k}{12}\right] + 1, & k \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 12)\ ise \end{cases} \tag{2.5}$$

formülü ile tanımlanır (Apostol, 1976; Lee ve Hung, 1995).

Tanım 2.2.1: M_k uzayındaki bütün $M_{k,0}$ cusp formların kümesi, M_k uzayının bir lineer alt uzayıdır.

Eğer $k \geq 12$ ise $f \in M_{k,0}$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $h \in M_{k-12}$ olmak üzere $f = \Delta h$ olmasıdır. T: $M_{k-12} \to M_{k,0}$, $T(h) = \Delta h$ ile tanımlanan lineer dönüşüm $M_{k,0}$ ve M_{k-12} arasında bir izomorfizdir. Dolayısıyla $k \geq 12$ için

$$\dim M_{k,0} = \dim M_{k-12} \tag{2.6}$$

yazılır. Böylece $k \geq 12$ iken

$$\dim M_k = 1 + \dim M_{k-12} \tag{2.7}$$

elde edilir (Apostol,1976).

Lineer operatörler üzerinde uzun ve yorucu çalışmalar yapan Hecke, $n = 1, 2, ...,$ için T_n ile gösterdiği ve kendi adını verdiği M_k lineer uzayını kendi üzerine dönüştüren T_n lineer operatörlerin bir dizisi ile çarpımsal katsayılı tam modüler formları tanımladı. Bu tanımlamaya göre M_k uzayında Hecke operatörü aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür.

Tanım 2.2.2: k bir tam sayı ve $n = 1, 2, ...,$ için k ağırlıklı tam formların M_k uzayı üzerinde,

$$(T_n f)(\tau) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n\tau + bd}{d^2}\right) \tag{2.8}$$

ile tanımlanan T_n operatörüne[2], Hecke operatörü denir (Apostol,1976; Knoop,1978; Gethner,1995).

Özel olarak $n = p$ gibi bir asal sayı ise (2.8) ifadesi

$$(T_p f)(\tau) = p^{k-1} f(p\tau) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau + b}{p}\right) \tag{2.9}$$

olarak yazılır (Apostol,1976; Knoop,1978).

Eğer (2.8) deki $T_n f$ nin tanımında $A\tau = \dfrac{a\tau + b}{d}$, $ad = n$ alınırsa $T_n f$,

$$(T_n f)(\tau) = n^{k-1} \sum_{\substack{a \geq 1, ad=n \\ 0 \leq b < d}} d^{-k} f(A\tau) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{a \geq 1, ad=n \\ 0 \leq b < d}} a^k f(A\tau) \tag{2.10}$$

biçiminde bir forma dönüşür.

[2] Bazı kaynaklarda $T_n f$ yerine $f|T_n$ şeklinde alınmaktadır.

Teorem 2.2.2: k ağırlıklı tam modüler formların M_k uzayındaki bir f fonksiyonu

$$f(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty} c(m).e^{2\pi i m\tau} \tag{2.11}$$

biçiminde Fourier açılımına sahip ise $T_n f$,

$$(T_n f)(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m).e^{2\pi i m\tau} \tag{2.12}$$

şeklinde Fourier açılımına sahiptir. Burada $\gamma_n(m)=\sum_{d/(n,m)} d^{k-1}c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ dır (Apostol,1976; Kurt,1982, Lee,1995).

Tanım 2.2.3: n sabit bir tam sayı ve $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, $ad- bc = n$ olmak üzere

$$A\tau=\frac{a\tau+b}{c\tau+d} \tag{2.13}$$

formundaki bir dönüşüme n. mertebeden bir dönüşüm denir ve bu dönüşümlerin oluşturduğu grup, $\Gamma(n)$ ile gösterilir. Γ modüler grubu, Γ (1) dir. n. mertebeden bir modüler dönüşümü 2×2 tipin de

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A = n$$

matrisi ile temsil edilebilir (Atkin, 1970; Apostol,1976; Rankin,1977).

A matrisi ile $-A$ matrisi aynı dönüşümü tanımlar.
Eğer $A_1 = VA_2$ olacak şekilde Γ nin bir V dönüşümü varsa $\Gamma(n)$ deki iki A_1 ve A_2 dönüşümleri denktir denir ve $A_1 \sim A_2$ biçiminde gösterilir. Bu $\sim$ bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır. $\Gamma(n)$ kümesi, ancak ve ancak $\Gamma(n)$ nin iki elmanı denk ise aynı denklik sınıfında olacak şekilde denklik sınıflarına ayrılabilir. Eğer A_1 ve A_2 denk değil iseler aynı denklik sınıfında bulunamazlar (Apostol,1976).

Teorem 2.2.3: $f \in M_k$, $\tau \in \mathbf{H}$ ve $V=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ise

$$(T_n f)(V\tau) = (c\tau+d)^k\,(T_n f)(\tau) \tag{2.14}$$

dır (Apostol,1976).

Teorem 2.2.4: $f \in M_k$ ve $\tau \in \mathbf{H}$ olmak üzere $T(\tau) = \tau + 1$, $S(\tau) = -\dfrac{1}{\tau} \in \Gamma$ için

$$T_n f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k T_n f(\tau) \text{ ve } T_n f(\tau+1) = T_n f(\tau)$$

dur.

İspat: Teorem 2.2.3 den $f \in M_k$, $\tau \in \mathbf{H}$ ve $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ için

$$(T_n f)(V\tau) = (c\tau + d)^k (T_n f)(\tau)$$

olduğu biliniyor. Buradan $T(\tau) = \tau + 1$, $S(\tau) = -\dfrac{1}{\tau} \in \Gamma$ için

$$T_n f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k T_n f(\tau) \text{ ve } T_n f(\tau+1) = T_n f(\tau)$$

olduğu kolayca görülür.

T_n Hecke operatörü, k ağırlıklı tam modüler formların M_k uzayındaki her bir f fonksiyonunu M_k daki başka bir fonksiyona dönüştürür. Yani her bir T_n Hecke operatörü k ağırlıklı M_k tam formlar uzayını, k ağırlıklı M_k tam formlar uzayına hem de k ağırlıklı $M_{k,0}$ cusp formlar uzayını, k ağırlıklı $M_{k,0}$ cusp formlar uzayına dönüştürür (Gunning,1962; Ogg, 1969, 1972; Knoop,1978).

Bu aşağıdaki teoremle ifade edilebilir.

Teorem 2.2.5: Eğer f, k ağırlıklı bir tam modüler form ise $T_n f$ de, tam modüler formdur. Üstelik f, bir cusp form ise $T_n f$ de bir cusp formdur.

İspat: Eğer $f \in M_k$ ise T_n nin tanımından $T_n f$, $\mathbf{H}$ nın her yerinde analitiktir.

Teorem 2.2.2 den, $T_n f$ nin bir Fourier açılımına sahip olduğu ve $i\infty$ da da analitik olduğu görülür. Teorem 2.2.3 den $T_n f$ nin Γ nun dönüşümlerine göre $(T_n f)(V\tau) = (c\tau + d)^k (T_n f)(\tau)$ özelliğini sağlar. Son olarak, eğer f cusp form ise Teorem 2.2.2 deki Fourier açılımı $T_n f$ nin de cusp form olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.6: $(m, n) = 1$ ise T_n ve T_m operatörleri[3],

$$T_m T_n = T_{mn} \tag{2.15}$$

bileşke özelliğine sahiptir.

İspat: Eğer $f \in M_k$ ise $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$(T_n f)(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{a \geq 1,\, ad = n \\ 0 \leq b \langle d}} a^k f(A\tau)$$

yazılır. T_m operatörü $T_n f$ nin her bir elamanına uygulanırsa $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ için

$$(T_m(T_n f))(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{\alpha \geq 1,\, \alpha\delta = m \\ 0 \leq \beta \langle \delta}} \alpha^k \frac{1}{n} \sum_{\substack{a \geq 1,\, ad = n \\ 0 \leq b \langle d}} a^k f(BA\tau)$$

elde edilir. $C = BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b + \beta d \\ 0 & d\delta \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$((T_m T_n)(f))(\tau) = \frac{1}{mn} \sum_{\substack{\alpha \geq 1,\, \alpha\delta = m \\ 0 \leq \beta \langle \delta}} \sum_{\substack{a \geq 1,\, ad = n \\ 0 \leq b \langle d}} (\alpha a)^k f(C\tau) = T_{mn} f(\tau) \tag{2.16}$$

dır.

d ve δ, sırasıyla n ve m nin pozitif bölenlerinin kümesinden değerler alırken, $(n, m) = 1$ olduğundan $d\delta$ çarpımı da nm nin pozitif bölenlerinin kümesinden değerler alır. b ve β sırasıyla mod d ve mod δ ya göre kalan sınıfından değerler alırken, $\alpha b + \beta d$ lineer kombinasyonu mod $d\delta$ ye göre kalan sınıfından değer alır. Bundan dolayı, C matrisi, $\Gamma(mn)$ nin denk olmayan elamanlarının kümesinden değerler aldığından (2.16) den (2.15) elde edilir.

Teorem 2.2.7 : Herhangi iki $T(m)$ ve $T(n)$ Hecke operatörleri bileşke işlemine göre değişme özelliğini sağlar ve

$$T(m)T(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T(mn/d^2) = T(n)\, T(m) \tag{2.17}$$

dir (Gunning,1962; Ogg,1972; Apostol,1976).

[3] Bazı kaynaklarda T_m ve T_n nin yerine $T(m)$ ve $T(n)$ alınmaktadır.

2.3. Hecke Operatörleri ve Eigen Fonksiyonları

Teorem 2.2.2 de, $f \in M_k$ ve $x = e^{2\pi i\tau}$ olmak üzere $f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m).x^m$ Fourier açılımına sahip iken $T_n f$ nin

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m).x^m$$

biçiminde Fourier açılımına sahip ve $\gamma_n(m) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ olduğu belirtilmiştir.

$m = 0$ için $(n\ ,\ o) = n$ olur. Böylece, tüm $n \geq 1$ için f ve $T_n f$ nin sabit terimleri,

$$\gamma_n(0) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c(o) = \sigma_{k-1}(n)c(0)$$

ifadesi ile bağlantılıdır. Benzer olarak , $m = 1$ olduğunda tüm $n \geq 1$ için

$$\gamma_n(1) = c(n)$$

elde edilir.

$\gamma_n(m) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ eşitliğinin sağ tarafındaki toplam,

$$c(n)c(m) = \sum_{d/(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

çarpımsal özelliğine sahiptir. $c(n)c(m) = \sum_{d/(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ çarpımsal özelliğine sahip olduğundan $T_n f$ fonksiyonunun Fourier açılımının bulunabilmesi için,

$$\gamma_n(m) = c(n)c(m)$$

Fourier katsayılı f modüler formları bulunmalıdır. $\gamma_n(m) = c(n)c(m)$ ifadesinde bütün $n \geq 1$ için,

$$T_n f = c(n) f$$

özdeşliği yazılır (Apostol,1976).

Tanım 2.3.1: $\lambda(\ n\ )$ kompleks skaleri için,

$$T_n f = \lambda(\ n\ ) f$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir f fonksiyonuna T_n operatörünün bir eigen fonksiyonu (veya eigen formu) ve $\lambda(n)$ skalerine T_n operatörünün eigen değeri denir. Eğer f bir eigen form ise her $c \neq 0$ skaleri için cf de eigen formdur (Ogg, 1969, 1972; Apostol, 1976).

Bir T lineer operatörü, 1-boyutlu V fonksiyon uzayını kendi üzerine dönüştürüyorsa V de sıfırdan farklı her fonksiyon T nin bir eigen fonksiyonudur.

Tanım 2.3.2: Eğer f, $n \geq 1$ olmak üzere her T_n Hecke operatörü için bir eigen form ise f ye bir uygun eigen form denir (Apostol, 1976; Lee ve Hung, 1995).

Teorem 2.3.1: $k \geq 4$, $k \equiv 0$ (mod2) için $\zeta(k) = (-1)^{k+1} \dfrac{(2\pi)^k}{2k!} B_k$ ve $\sigma_{k-1}(m) = \sum_{d|m} d^{k-1}$ olmak üzere -k ağırlıklı tam modüler form olan

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)}{2k!} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) x^m$$

$G_k(\tau)$ Eisenstein serisi tüm T_n Hecke operatörlerine göre $\sigma_{k-1}(m) = \sum_{d|m} d^{k-1}$ eigen değerleri ile bir eigen fonksiyon (eigen form) dur. Yani $T_n\, G_k(\tau) = \sigma_{k-1}(m) G_k(\tau)$ dır.

İspat: $T_n f \in M_k$ olmak üzere (2.10) bağıntısı $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ için

$$(T_n f)(\tau) = n^{k-1} \sum_{\substack{a \geq 1, ad=n \\ 0 \leq b < d}} d^{-k} f(A\tau) = n^{k-1} \sum_{\substack{a \geq 1, ad=n \\ 0 \leq b < d}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right)$$

biçimine dönüşür. $k \geq 4$ olmak üzere T_n Hecke operatörünü $G_k(\tau)$ Eisenstein serilerine, Gunning,1962; 5. Bölüm, Teoerem.3 deki metot uygulanır ve $n = ad$ olduğu da dikkate alınırsa,

$$(T_n G_k)(\tau) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} G_k\left(\frac{a\tau + b}{d}\right)$$

$$= n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sigma_{k-1}(m) e^{2\pi i \left(\frac{a\tau+b}{d}\right) m} \right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1}\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sigma_{k-1}(m)e^{2\pi i m\frac{n}{d^2}\tau}\,\frac{1}{d}\sum_{b=0}^{d-1}e^{2\pi i m\frac{b}{d}}$$

yazılır. Buradan

$$\sum_{b=0}^{d-1}e^{2\pi i m\frac{b}{d}}=\begin{cases} d, & eğer \quad d\mid m \\ 0, & eğer \quad d\nmid m \end{cases} \quad ise$$

dır. $m=\lambda d$ alınırsa,

$$T_n G_k(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1}\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sigma_{k-1}(\lambda d)e^{2\pi i\lambda\frac{n}{d}\tau}\,\frac{1}{d}d$$

elde edilir. d üzerinden toplamda $\frac{n}{d}$ ile d yer değiştirilirse,

$$T_n G_k(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n}d^{k-1}\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sigma_{k-1}\left(\lambda\frac{n}{d}\right)e^{2\pi i\lambda d\tau}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\lambda=\frac{m}{d}$ olduğundan, (2.17) ifadesine göre

$$T_n G_k(\tau)=\sum_{d|m}d^{k-1}\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{k-1}\left(\frac{mn}{d^2}\right)e^{2\pi i m\tau}$$

ve

$$T_n\, G_k(\tau)=\sigma_{k-1}(m)G_k(\tau)$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.2: $k\equiv 0\ (\text{mod}2)$, $k\geq 4$ için M_k uzayı uygun bir f eigen form içeriyorsa, $c(1)\neq 0$ dir. Burada $c(n)$ ler $f\in M_k$ fonksiyonunun katsayılarıdır (Apostol,1976).

Tanım 2.3.3: Bir eigen formda $c(1)=1$ ise buna normalleştirilmiş eigen form denir.

Eğer $f\in M_k$, T_n nin bir eigen form ise, f yi sıfırdan farklı uygun bir sabit ile çarparak her zaman $c(1)=1$ yapılabileceğinden, $f\in M_k$ normalleştirilmiş bir eigen formdur (Ogg,1972; Apostol,1976; Lee ve Hung,1995).

Teorem 2.3.3: $k \equiv 0$ (mod2), $k \geq 12$ için $f \in M_{k,0}$ cusp formunun normalleştirilmiş uygun bir eigen form olması için gerek ve yeter şart f nin Fourier açılımındaki katsayıların tüm $m \geq 1$, $n \geq 1$ için,

$$c(n)c(m) = \sum_{d/(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

çarpımsal özelliği sağlamasıdır. Bu durumda $c(n)$ katsayısı T_n nin bir eigen değeridir (Gunning,1962; Apostol,1976).

$\tau(1)=1$ olmak üzere $x = e^{2\pi i \tau}$ için diskriminant fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) x^m$$

olarak tanımlanan fonksiyona Δ diskriminant fonksiyonu denir. Bu fonksiyon bir cusp formdur. Ayrıca $\tau(n)$, T_n eigen değeri olmak üzere $(2\pi)^{-12}\Delta(\tau)$, her bir T_n için normalleştirilmiş bir eigen formdur. Bu da $\tau(n)$ Ramanujan fonksiyonunun, $\tau(n)\tau(m) = \sum_{d/(n,m)} d^{11} \tau\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ çarpımsal özellikleri sağladığını gösterir (Apostol,1976).

3. HECKE OPERATÖRLERİ

3.1. Hecke Operatörlerinin Özellikleri

Tanım 2.2.2 den, $f \in M_k$ ve k bir tam sayı olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için M_k üzerinde $T_n f$,

$$(T_n f)(\tau) = n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n\tau + bd}{d^2}\right)$$

ve aynı zamanda Teorem 2.2.5 den $f \in M_k$ için $T_n f \in M_k$ olduğu biliniyor. Yani T_n Hecke operatörü M_k yı kendi üzerine dönüştürür. Burada $T_n f \in M_k$ ya Gunning, 1962; p:64 deki metot uygulanırsa,

$$(T_n(T_n f))(\tau) = n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1} T_n f\left(\frac{n\tau + bd}{d^2}\right) \tag{3.1}$$

$$= n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1}\left(n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n\dfrac{n\tau + bd}{d^2} + bd}{d^2}\right)\right)$$

$$= n^{2k-2}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{d|n} d^{-k}\left(\sum_{b=0}^{d-1}\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n^2\tau + nbd + bd^3}{d^4}\right)\right)$$

$$= n^{2k-2}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{d|n} d^{-k}\, d\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n^2\tau + bd\left(n + d^2\right)}{d^4}\right) \tag{3.2}$$

elde edilir. Burada $\sum_{t|n} t^{-k} = \sum_{d|n} d^{-k}\sum_{d|n} d^{-k}$ alınırsa,

$$(T_n(T_n f))(\tau) = n^{2k-2}\sum_{t|n} t^{-k}\, d\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n^2\tau + bd\left(n + d^2\right)}{d^4}\right) \tag{3.3}$$

yazılır.

Özel olarak $n = p$ asal sayısı alınırsa

$$(T_p(T_p f))(\tau) = p^{2k-2} f(p^2\tau) + p^{k-2}\sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{p\tau + b}{p}\right) + p^{k-2}\sum_{b=0}^{p-1} f(\tau + b) + \frac{1}{p}\sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau + b + bp}{p^2}\right)$$

yazılabilir. Son toplamda $b+bp$ lineer kombinasyonu mod p^2 ye göre, b ye eşit olacağından

$$(T_p(T_pf))(\tau)=p^{2k-2}f(p^2\tau)+p^{k-2}\sum_{b=0}^{p-1}f\left(\frac{p\tau+b}{p}\right)+p^{k-2}\sum_{b=0}^{p-1}f(\tau+b)+\frac{1}{p}\sum_{b=0}^{p-1}f\left(\frac{\tau+b}{p^2}\right) \quad (3.4)$$

yazılır. Bu yapılanlardan T_n Hecke operatörünün $T_n\,f$ nin Fourier açılımı üzerindeki etkisi incelenebilir.

Teorem 3.1.1: $T_nf \in M_k$ ve $T_nf(\tau)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\gamma_n(m)\,e^{2\pi i m\tau}$ olmak üzere $T_n\,(T_nf)$,

$$(T_n\,(T_nf))(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta_n(m)\,e^{2\pi i m\tau} \quad (3.5)$$

biçiminde Fourier açılımına sahiptir. Burada $\delta_n(m)=\sum\limits_{d|(m,n)}d^{k-1}\gamma_n\left(\dfrac{mn}{d^2}\right)$ dır.

İspat: (3.1) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}(T_n\,(T_nf))\,(\tau) &= n^{k-1}\sum_{d|n}d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1}T_nf\left(\frac{n\tau+bd}{d^2}\right)\\ &= n^{k-1}\sum_{d|n}d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1}\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_n(m)e^{2\pi i m\left(\frac{n\tau+bd}{d^2}\right)}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1}\gamma_n(m)e^{2\pi i m\frac{n\tau}{d^2}}\frac{1}{d}\sum_{b=0}^{d-1}e^{2\pi i m\frac{bd}{d^2}}\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\sum_{b=0}^{d-1}e^{2\pi i m\frac{bd}{d^2}}=\begin{cases}d, & eğer\ d\mid m\\ 0, & eğer\ d\nmid m\end{cases}$$

olduğundan

$$(T_n\,(T_nf))\,(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1}\gamma_n(m)e^{2\pi i m\frac{n\tau}{d^2}}$$

elde edilir. $\lambda\in\mathbf{Z}$ için $m=\lambda d$ alınırsa,

$$(T_n\,(T_nf))\,(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1}\gamma_n(\lambda d)e^{2\pi i\lambda\frac{n\tau}{d}}\ .$$

bulunur. d üzerinden toplamda $\frac{n}{d}$ ile d yer değiştirilse

$$(T_n\,(T_n f))\,(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{d|n} d^{k-1} \gamma_n\left(\lambda \frac{n}{d}\right) e^{2\pi i \lambda d \tau}$$

yazılır. $x = e^{2\pi i \tau}$ alındığında sağ taraftaki son toplam $x^{\lambda d}$ nin kuvvetlerini içerir. $m = \lambda d$ için $\lambda = \frac{m}{d}$ ve $d|m$ olacağından,

$$(T_n\,(T_n f))\,(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{d|n} d^{k-1} \gamma_n\left(\frac{mn}{d^2}\right) e^{2\pi i m \tau}$$

yazılabilir. Burada $\delta_n(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \gamma_n\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ alınırsa

$$(T_n\,(T_n f))\,(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_n(m) x^m$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

Tanım 3.1.1: (3.2) bağıntısında $n = ad$ ve $A\tau = \frac{a\tau + b}{d}$ alınırsa,

$$(T_n\,(T_n f))(\tau) = \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^k \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^k d \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{a^2\tau + ab + bd}{d^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} a^k \sum_{d|n} a^k d \sum_{b=0}^{d-1} f\left(A^2 \tau\right)$$

yazılır. Burada $\frac{n}{d} \to a$ olarak alınmıştır. Buradan $\sum_{d|n} a^k \sum_{d|n} a^k = \sum_{d|n} a^{2k}$ ile gösterilirse

$$(T_n\,(T_n f))(\tau) = \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} a^{2k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(A^2 \tau\right) \tag{3.6}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2: $\Gamma(n^2)$ nin her denklik sınıfında

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab + bd \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

biçiminde bir temsil vardır.

İspat: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\Gamma(n)$ de ve $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+c^2 & bc+d^2 \end{pmatrix}$, $\Gamma(n^2)$ de keyfi birer elaman olsunlar. Eğer $c = 0$ ise böyle bir temsil olduğu hemen görülür. Eğer $c \neq 0$ ise $-\dfrac{a^2+bc}{ac+c^2}$ oranı en küçük terime indirgenir. Yani $(r, s) = 1$ olmak üzere $\dfrac{s}{r} = -\dfrac{a^2+bc}{ac+c^2}$ olacak şekilde r ve s alınır. Şimdi det V = ps-qr = 1 olacak şekilde p ve q tam sayısı seçilsin ve $V = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \Gamma$ olsun. Buradan,

$$VA^2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+c^2 & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa^2+pbc+qac+qc^2 & pab+pbd+qbc+qd^2 \\ ra^2+rbc+sac+sc^2 & rab+rbd+sbc+sd^2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece $ra^2 + rbc + sac + sc^2 = 0$ ve $\det(VA^2) = \det(V)\det(A^2) = n^2$ olduğundan $VA^2 \in \Gamma(n^2)$ yazılır. Sonuç olarak, $VA^2 \sim A^2$ olur.

Teorem 3.1.3: Eğer $A_1^2 \in \Gamma(n^2)$ ve $V_1 \in \Gamma$ ise

$$A_1^2 V_1 = V_2 A_2^2$$

olacak şekilde $A_2^2 \in \Gamma(n^2)$ ve $V_2 \in \Gamma$ matrisleri vardır. Üstelik

$$a_1^2\left(\gamma_2 A_2^2 \tau + \delta_2\right) = a_2^2\left(\gamma_1 \tau + \delta_1\right)$$

eşitliği de sağlanır. Burada $i = 1, 2$ için $a_i \in \mathbf{Z}$ ve γ_i, $\delta_i \in \mathbf{Z}$ dir.

İspat: $\det(A_1^2 V_1) = \det(A_1^2)\det(V_1) = n^2$ olduğundan $A_1^2 V_1 \in \Gamma(n^2)$ yazılır ve Teorem 3.1.2 den $A_1^2 V_1 = V_2 A_2^2$ olacak şekilde $A_2^2 \in \Gamma(n^2)$ ve $V_2 \in \Gamma$ olduğu görülür.

$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ o & d_i \end{pmatrix}$ ve $V_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1b_1 + b_1d_1 \\ 0 & d_1^2 \end{pmatrix} \text{ ve } V_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

olup

$$A_1^2 V_1 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1b_1 + b_1d_1 \\ 0 & d_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ d_1^2\gamma_1 & d_1^2\delta_1 \end{pmatrix}$$

ve

$$(A_2^2)^{-1} = \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} d_2^2 & -(a_2b_2+b_2d_2) \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Böylece

$$V_2 = A_1^2\, V_1 (A_2^2)^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ d_1^2\gamma_1 & d_1^2\delta_1 \end{pmatrix} \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} d_2^2 & -(a_2b_2+b_2d_2) \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} * & * \\ d_1^2 d_2^2\gamma_1 & d_1^2\gamma_1(-a_2b_2-b_2d_2)+a_2^2d_1^2\delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Matrislerin eşitliğinden ve $a_1^2 d_1^2 = n^2$ olduğundan

$$\gamma_2 = \frac{d_1^2 d_2^2\gamma_1}{n^2} = \frac{d_2^2}{a_1^2}\gamma_1$$

ve

$$\delta_2 = \frac{-d_1^2(a_2b_2\gamma_1+b_2d_2\gamma_1)+a_2^2d_1^2\delta_1}{n^2} = -\frac{a_2b_2\gamma_1+b_2d_2\gamma_1}{a_1^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2}\delta_1$$

bulunur. Buradan

$$a_1^2\gamma_2 = d_2^2\gamma_1$$

ve

$$a_1^2\delta_2 = -a_2b_2\gamma_1 - b_2d_2\gamma_1 + a_2^2\delta_1$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned} a_1^2(\gamma_2 A_2^2\tau+\delta_2) &= a_1^2\gamma_2 A_2^2\tau + a_1^2\delta_2 \\ &= d_2^2\gamma_1\frac{a_2^2\tau+(a_2b_2-b_2d_2)}{d_2^2} - a_2b_2\gamma_1 - b_2d_2\gamma_1 + a_2^2\delta_1 \\ &= a_2^2(\gamma_1\tau+\delta_1) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4: $T_n f$, M_k uzayında modüler form ise T_n $(T_n f)$ de M_k uzayında bir modüler formdur. Hem de $T_n f$, $M_{k,0}$ uzayında cusp form ise T_n $(T_n f)$ de $M_{k,0}$ uzayında bir cusp formdur.

Bu teoremin ispatını yapmadan önce bir Lemma verelim.

Teorem 3.1.4 ün İspatı: Teorem 3.1.4 ün ifadesinde $f \in M_k$ için $T_n f \in M_k$ olduğundan (Apostol,1976, Teorem 6.11), $(T_n(T_n f))$ nin tanımından $(T_n(T_n f))$, **H** üst yarı düzleminin her yerinde analitiktir. Teorem 3.1.1 den, M_k uzayında $T_n f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) e^{2\pi i m\tau}$ gibi bir Fourier açılımı varken, $\delta_n(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1}\gamma_n\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ olmak üzere,

$$(T_n(T_n f))(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_n(m) e^{2\pi i m\tau}$$

şeklinde Fourier açılımının var olduğu ve ayrıca $(T_n(T_n f))$ nin $i\infty$ da da analitik olduğu görülür. Ayrıca Lemma 3.1.1 de $T_n f \in M_k$ ve $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ ise $(T_n(T_n f))$ dönüşümü için

$$(T_n(T_n f))(V\tau) = (\gamma\tau + \delta)^k (T_n(T_n f))(\tau)$$

olduğu gösterildi. Bu da ispatın birinci kısmını tamamlar. Son olarak, eğer $T_n f$ bir cusp form ise Teorem 3.1.1 deki (3.5) bağıntısındaki Fourier açılımı, $(T_n(T_n f))$ nin de bir cusp form olduğunu gösterir.

3.2. $T_n(T_n f)$ Hecke Operatörünün Eigen Fonksiyonu

$T_n f \in M_k$ için $T_n f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) x^m$ ve $T_n(T_n f) \in M_k$ için

$$\delta_n(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1}\gamma_n\left(\frac{mn}{d^2}\right) \tag{3.7}$$

olmak üzere $(T_n(T_n f))(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_n(m) x^m$ olduğu önceki kesimlerde belirtildi. Apostol, (1976, p: 129) belirttiği deki metotla, yani Fourier açılımlarındaki katsayılar eşitlenir ve gerekli düzenleneler yapılırsa,
$m = 0$ olduğunda $n \geq 1$ için $T_n f$ ve $T_n(T_n f)$ lerin Fourier açılımlarının sabit terimleri arasında,

$$\delta_n(0) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1}\gamma_n(0) = \sigma_{k-1}(n)\gamma_n(0) \tag{3.8}$$

biçiminde bağıntının olduğu görülür. Aynı şekilde, $n \geq 1$ için $m = 1$ alındığında $(n, 1)= 1$ olduğundan

$$\delta_n(1) = \gamma_n(n) \tag{3.9}$$

yazılır.

(3.7) bağıntısının sağ tarafındaki toplam $\tau(n)$ Ramanujan fonksiyonunun ve $\sigma_\alpha(n)$ bölüm fonksiyonunun çarpımsal özelliklerine benzer (Apostol, 1976). T_n $(T_n f)$ fonksiyonunun katsayılarının, $\gamma_n(m)\gamma_n(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1}\gamma_n\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ biçiminde çarpımsal özelliğe sahip olması gerektiğinden, bu örnekler

$$\delta_n(m) = \gamma_n(m)\gamma_n(n) \tag{3.10}$$

şeklinde Fourier katsayılarına sahip olan T_n $(T_n f)$ için $T_n f$ formları aranması gerektiğini gösterir.

$n \geq 1$ için (3.10) bağıntısından,

$$T_n\,(T_n f) = \gamma_n(n)\, T_n f$$

yazılır.

Tanım 3.2.1: $\lambda(n)$ kompleks sabiti için

$$T_n\,(T_n f) = \lambda(n)\, T_n f$$

bağıntısını sağlayan sabiten farklı $T_n f$ fonksiyonuna T_n $(T_n f)$ nin eigen fonksiyonu ve $\lambda(n)$ kompleks sabitine de T_n $(T_n f)$ nin eigen değeri denir.

Eğer $k = 4, 6, 8, 10$ ve 14 ise dim $M_k = 1$ dir. k nın bu değerlerinin herbiri için T_n , M_k da eigen formlara sahiptir,(Apostol,1976). Örneğin G_4, G_6, G_8, G_{10} ve G_{14} Eisenstein serileri olmak üzere T_n için sırasıyla T_nG_4, T_nG_6, T_nG_8, T_nG_{10} ve T_nG_{14} formları birer eigen formlardır.

Tanım 3.2.2: Eğer $T_n f$, her T_n $(T_n f)$ Hecke operatörü için eigen form ise $T_n f$ ye bir uygun (simulteneous) eigen form denir.

Teorem 3.2.1: $k \geq 4$, $k \equiv 0$ (mod2) olmak üzere eğer $T_n f \in M_k$ eigen formunun, M_k uzayında bir Fourier açılımı varsa $\gamma_n(1) \neq 0$ dır.

İspat: $k \equiv 0$ (mod2), $k \geq 4$ olsun. Eğer M_k uzayı, $f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m)\, e^{2\pi i m\tau}$ şeklinde Fourier açılımına sahip uygun bir eigen form içerirse, $c(1) \neq 0$ dır (Apostol,1976; Teorem 6.14).

Tanım 3.2.3: $T_n f$ eigen formunun Fourier açılımındaki ilk terimi 1 yani $\gamma_n(1) = 1$ ise $T_n f$ eigen formuna, normalleştirilmiş eigen form denir.

$T_n f \in M_k$ ise $T_n f$ eigen formu uygun bir katsayı ile çarpılarak $\gamma_n(1) = 1$ yapılabileceğinden normalleştirilmiş $T_n f$ operatörleri de M_k uzayının elamanlarıdır.

Teorem 3.2.2: $k \geq 4$, $k \equiv 0$ (mod 2) için $\zeta(k) = (-1)^{k+1} \dfrac{(2\pi)^k}{2k!} B_k$ ve $\sigma_{k-1}(m) = \sum_{d|m} d^{k-1}$ olmak üzere $-k$ ağırlıklı tam modüler form olan

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)}{2k!} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) x^m$$

$G_k(\tau)$ Eisenstein serisi olsun. Eğer $T_n f \in M_k$, $k \geq 4$ ve $T_n f$ cusp form değilse, $T_n f$ nin normalleştirilmiş bir uygun eigen form olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$(T_n f)(\tau) = \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k} (T_n G_k)(\tau)$$

olmasıdır.

İspat: $T_n f$ cusp form olmadığından $T_n f$ nin Fourier açılımında $\gamma_n(0) \neq 0$ dır.

$$T_n(T_n f) = \lambda(n)\, T_n f \qquad (3.11)$$

ifadesinde veya Fourier açılımlarının aynı dereceli terimlerinin katsayıları karşılaştırılarak,

$$\delta_n(m) = \lambda(n)\gamma_n(m) \qquad (3.12)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $m = 0$ alındığında

$$\delta_n(0) = \lambda(n)\gamma_n(0)$$

yazılır. Diğer taraftan $T_n f \in M_k$ olduğundan, (3.8) bağıntısından

$$\delta_n(0)=\sigma_{k-1}(n)\gamma_n(0)$$

olur. Fakat $\gamma_n(0)\neq 0$ olduğundan (3.11) bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\lambda(n)=\sigma_{k-1}(n)$$

olmasıdır. Bu, (3.12) bağıntısında kullanılırsa

$$\delta_n(m)=\sigma_{k-1}(n)\gamma_n(m)$$

bulunur. m = 1 ve (3.9) bağıntısı alındığında,

$$\gamma_n(n)=\sigma_{k-1}(n)\gamma_n(1)$$

olur. Böylece $T_n f$ nin normalleştirilmiş olması için gerek ve yeter şart $n\geq 1$ için

$$\gamma_n(n)=\sigma_{k-1}(n)$$

olmasıdır. Burada $\sum_{d|(m,n)} d^{k-1}=\sigma_{k-1}(n)$ dır. $\delta_n(m)=\sigma_{k-1}\left(\frac{nm}{d^2}\right)$ olmak üzere T_nG_k formu,

$$(T_nG_k)\,(\tau)=2\sigma_{k-1}(0)\zeta(k)+\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\delta_n(m)x^m$$

Fourier açılımına sahip olduğundan $(T_n\ f)(\tau)=\frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k}(T_nG_k)(\tau)$ fonksiyonu normalleştirilmiştir ve Fourier açılımı

$$(T_nG_k)\,(\tau)=\frac{(k-1)!}{(2\pi i)^k}\sigma_{k-1}(0)\zeta(k)+\sum_{m=1}^{\infty}\delta_n(m)x^m$$

biçiminde olur.

Lemma 3.2.1: $k\geq 4$ ve $\lambda=\dim(M_k)$ ise M_k uzayında normalleştirilmiş uygun eigen form olan S = $\{f_0, f_1, ..., f_{\lambda-1}\}$ kümesi M_k uzayı için bir baz ise (Apostol,1976; Lee and Hung,1995) normalleştirilmiş uygun eigen form olan S'=$\{T_n f_0, T_n f_1, ..., T_n f_{\lambda-1}\}$ kümesi de M_k uzayında bir baz oluşturur.

İspat: M_k uzayında normalleştirilmiş uygun eigen form olan S = $\{f_0, f_1, ..., f_{\lambda-1}\}$ kümesi M_k uzayı için bir baz ise;

i. $\sum_{i=0}^{\lambda-1} a_i f_i = 0$ iken $i = 0, 1, ..., \lambda-1$ için tüm $a_i = 0$,

ii. Her $f\in M_k$ ve $c_i\in$ **F** ,**F** bir cisim ve $f_i\in$ S olmak üzere $i = 0, 1, ..., \lambda-1$ için

$$f=\sum_{i=0}^{\lambda-1} c_i f_i$$

şeklindedir.

Şimdi T_n Hecke operatörünü sırasıyla **i.** ve **ii.** şıklarına uygularsak,

$$T_n\left(\sum_{i=0}^{\lambda-1} a_i f_i\right)(\tau)=n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1}\left(\sum_{i=0}^{\lambda-1} a_i f_i\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{\lambda-1} a_i\left(n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1} f_i\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right)=\sum_{i=0}^{\lambda-1} a_i T_n f_i$$

bulunur. **i.** den dolayı her $f_i \neq 0$ olduğundan $T_n f_i \neq 0$ olur. Bu yüzden her $a_i = 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $T_n f_i$ ler lineer bağımsız olduğundan S'={ $T_n f_0$, $T_n f_1$, ..., $T_n f_{\lambda-1}$ } kümesi de M_k uzayında lineer bağımsızdır.

Şimdi T_n Hecke operatörünü **ii.** şıkka uygularsak, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$$(T_n f)(\tau)=T_n\left(\sum_{i=0}^{\lambda-1} c_i f_i\right)(\tau)$$

$$=n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1}\left(\sum_{i=0}^{\lambda-1} c_i f_i\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{\lambda-1} c_i\left(n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1} f_i\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{\lambda-1} c_i T_n f_i \tag{3.13}$$

elde edilir. Yani her $T_n\, f \in M_k$ dönüşümü, S' = { $T_n f_0$, $T_n f_1$, ..., $T_n f_{\lambda-1}$ }kümesinin elamanları cinsinden yazılabilir. Bu da normalleştirilmiş uygun eigen formların kümesi olan S' = { $T_n f_0$, $T_n f_1$, ..., $T_n f_{\lambda-1}$ } kümesinin de M_k uzayının bir bazı olması demektir.

Teorem 3.2.3: $k \geq 2$ ve $\lambda = \dim(M_k)$ ise M_k uzayında sadece λ kadar $T_n f_0$, $T_n f_1$, ..., $T_n f_{\lambda-1}$ normalleştirilmiş uygun eigen form vardır.

İspat: S' = { $T_n f_0$, $T_n f_1$, ..., $T_n f_{\lambda-1}$ } kümesi M_k uzayı için bir bazdır. Eğer $T_n f$ cusp form değil fakat M_k uzayında normalleştirilmiş uygun eigen form ise $T_n f = T_n f_0$ dır (Lee and Hung, 1995). $T_n f$ bir cusp form ve M_k uzayında normalleştirilmiş uygun eigen form ise Lemma 3.2.1 den $T_n f$, **F** bir cisim olmak üzere,

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{i=0}^{\lambda-1} c_i T_n f_i, \; c_i \in \mathbf{F},$$

biçiminde yazılabilir. $q = e^{2\pi i\tau}$ ve $i = 1,2, .., \lambda$-1 için

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n \text{ ve } (T_n f_i)(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(i) q^n$$

alınabilir. Tanım 3.2.1 den $T_n(T_n f)(\tau) = b_n(T_n f)(\tau)$ ve $T_n(T_n f_i)(\tau) = a_n(i)(T_n f_i)(\tau)$ olur (Hsiao ve Lee,1978). Ayrıca, (3.13) bağıntısından,

$$\begin{aligned} T_n(T_n f)(\tau) &= T_n\left(\sum_{i=0}^{\lambda-1} c_i T_n f_i\right)(\tau) \\ &= \sum_{i=0}^{\lambda-1} c_i a_n(i) T_n f_i \end{aligned}$$

ve

$$b_n(T_n f)(\tau) = \sum_{i=0}^{\lambda-1} c_i a_n(i) T_n f_i$$

yazılır. Buradan da $n \geq 1$, $1 \leq i \leq \lambda$-1 için

$$c_i b_n = c_i \; a_n(i)$$

elde edilir. $c_1, c_2, ..., c_{\lambda-1}$ katsayıların tümü sıfırdan farklı olduğundan $c_j \neq 0$ için $b_n = a_n(i)$ olur. Buradan $T_n f = T_n f_j$ yazılır.

3.3. $\Phi(\tau)$ Dönüşümünün Modüler Özellikleri

Teorem 3.3.1: q bir tam sayı ve $T_n f$, M_k uzayında normalleştirilmiş uygun eigen form olmak üzere

$$\Phi(\tau) = \frac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)}$$

olsun. $x = e^{2\pi i\tau}$ için $T_n f$ nin $T_n f$ (τ) $= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) x^m$ Fourier açılımı varsa $\Phi(\tau)$ dönüşümünün de b_m ler tam sayılar olmak üzere,

$$\Phi(\tau) = \frac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)} = x^{q-1}\left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m\right)$$

şeklinde Fourier açılımı vardır.

İspat: $T_n f \in M_k$ ve $x = e^{2\pi i\tau}$ için $T_n f$ (τ) $= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) x^m$ Fourier açılımı varsa $m \to m+1$ için

$$T_n f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) x^m = x\left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m+1) x^m\right), \gamma_n(0)=1$$

yazılabilir. Buradan aynı yolla, $m = m + 1$ için

$$T_n f(q\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) x^{mq} = x^q\left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m+1) x^{mq}\right)$$

da yazılabilir. Burada $T_n f(\tau)$ ve $T_n f(q\tau)$ formlarını oranlarsak,

$$\Phi(\tau) = \frac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)} = \frac{x^q\left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m+1) x^{qm}\right)}{x\left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m+1) x^m\right)} = x^{q-1}\left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m\right)$$

elde ederiz.

Teorem 3.3.2: Her modüler fonksiyon aynı boyutlu tam modüler formların oranıdır. Tersine olarak, eğer f ve g aynı ağırlıklı modüler form iseler $\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}$ oranı da bir modüler fonksiyondur (Ogg,1972; Schoeneberg,1974).

Teorem 3.3.3: Eğer $T_n f \in M_k$ ise $\Phi(\tau) = \dfrac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)} \in M_k$ dır.

İspat: Φ, **H** üst yarı düzlemde meromorf olduğundan $\Phi(\tau)$, Γ grubuna göre invaryanttır. Gerçektende eğer $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $f \in \mathrm{M}_k$ ise, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\gamma \equiv 0 \pmod{q}$ için

$$(T_n f)(V\tau) = (\gamma\tau + \delta)^k T_n f(\tau)$$

yazılır. Eğer $V \in \Gamma_0(q)$ ise $\gamma \equiv 0$ (mod q), $\gamma = \gamma_1 q$ olacak şekilde γ_1 sayısı vardır (Apostol, 1976; Teorem 4.1). Dolayısıyla $T_n f$, $\Gamma_0(q)$ grubuna göre

$$(T_n f)(V\tau) = (\gamma_1 q\tau + \delta)^k T_n f(\tau)$$

olur. $V_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta q \\ \gamma_1 & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ olmak üzere

$$qV\tau = q\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} = \frac{\alpha q\tau + \beta q}{\gamma_1 q\tau + \delta} = V_1(q\tau)$$

dır. Çünkü det $V_1 = \alpha\delta - \gamma_1 q\beta = \alpha\delta - \gamma\beta = 1$ dır. Buradan

$$(T_n f)(qV\tau) = (T_n f)(V_1(q\tau)) = (\gamma_1 q\tau + \delta)^k T_n f(q\tau)$$

elde edilir. Böylece

$$\Phi(V\tau) = \frac{T_n f(qV\tau)}{T_n f(V\tau)} = \frac{(\gamma_1 q\tau + \delta)^k T_n f(q\tau)}{(\gamma_1 q\tau + \delta)^k T_n f(\tau)} = \Phi(\tau)$$

olup $\Phi(\tau)$, Γ grubuna göre invaryanttır. Ayrıca Teorem 3.3.1 dan,

$$\Phi(\tau) = x^{q-1}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m\right)$$

biçiminde Fourier açılımına sahip olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.
Φ modüler fonksiyonu ∞ da q-1 mertebeden bir sıfıra sahiptir. **H** üst yarı düzlemin de başka sıfırı yoktur.

Teorem 3.3.4: $f \in M_k$ ve $\tau \in \mathbf{H}$ olmak üzere $T(\tau) = \tau + 1$ ve $S(\tau) = -\frac{1}{\tau}$ için

$$\Phi(S\tau) = \Phi(\tau + 1) = \frac{T_n f(q(\tau+1))}{T_n f(\tau+1)} = \Phi(\tau)$$

ve

$$\Phi(T\tau) = \Phi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{T_n f\left(q - \frac{1}{\tau}\right)}{T_n f\left(-\frac{1}{\tau}\right)} = \Phi(\tau)$$

olup, $\Phi(\tau) \in M_k$ dır.

İspat: $f \in M_k$ ve $\tau \in H$ olmak üzere $T(\tau) = \tau + 1$ ve $S(\tau) = -\frac{1}{\tau}$ için $T_n f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k T_n f(\tau)$ ve $T_n f(\tau+1) = T_n f(\tau)$ olduğu Teorem 2.2.4 den biliniyor. $T_n f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k T_n f(\tau)$ olduğundan $T_n f\left(q\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right) = \tau^k T_n f(q\tau)$ olur. Buradan

$$\Phi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{T_n f\left(-\frac{1}{\tau}.p\right)}{T_n f\left(-\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{\tau^k T_n f(q\tau)}{\tau^k T_n f(\tau)} = \Phi(\tau)$$

elde edilir. Teorem 2.2.4 den yaralanılarak, $\Phi(\tau+1) = \Phi(\tau)$ olduğu aynı yolla gösterilebilir. Bu takdirde $\Phi(\tau)$ fonksiyonu, Γ modüler grubuna göre $\Phi(\tau) \in M_k$ dır (San, 1974).

Teorem 3.3.5: $\tau \in H$ ise

$$\Phi\left(-\frac{1}{q\tau}\right) = q^{-k} \frac{1}{\Phi(\tau)}$$

olur.

İspat: $T_n f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k T_n f(\tau)$ olduğundan,

$$T_n f\left(-\frac{1}{q\tau}\right) = (q\tau)^k T_n f(q\tau)$$

yazılır. Buradan

$$\Phi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{T_n f\left(q.-\frac{1}{q\tau}\right)}{T_n f\left(-\frac{1}{q\tau}\right)} = \frac{\tau^k T_n f(\tau)}{(q\tau)^k T_n f(q\tau)} = q^{-k} \frac{1}{\Phi(\tau)}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.6: Eğer Φ fonksiyonu, M_k da modüler fonksiyon ve **H** üst yarı düzlemde sınırlı ise Φ fonksiyonu sabittir.

İspat: Eğer $\Phi(\tau)$ fonksiyonu k ağırlıklı modüler formların M_k uzayının bir elamanı olduğundan Teorem 3.3.3 e göre **H** üst yarı düzlemde tam fonksiyondur. Yani $\Phi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tau^n$ Taylor serisi yakınsaktır. Bu serinin yakınsaklık yarı çapı R olsun. Ayrıca $|\Phi(\tau)| \leq M$ olduğundan Cauchy Eşitsizliği Teoremi gereğince $n > 0$ için $|b_n| \leq MR^{-n}$ olur. $R \to \infty$ giderse, $|b_n| \leq 0$ olur. Böylece $\Phi(\tau) = b_0$ olduğundan Liouvilli Teoremine göre $\Phi(\tau)$ sabittir.

Teorem 3.3.7: $\tau \in \mathbf{H}$ için $T(\tau) = \tau + 1$ ve $S(\tau) = -\dfrac{1}{\tau}$, Γ modüler grubun gerenleri ve herhangi bir p asal sayı olmak üzere Γ modüler grubundaki V ve $V \notin \Gamma_0(p)$ için,

$$V = R\,T\,S\,T^k$$

olacak şekilde $0 \leq k \leq p$, bir k elamanı ile $\Gamma_0(p)$ de R elamanı mevcuttur.

İspat: $C \not\equiv 0 \pmod p$ için $V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ alınırsa,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T\,S\,T^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradaki matrisler singüler değildir ve böylece

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -k+1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kA-B & -kA+A+B \\ kC-D & -kC+C+D \end{pmatrix}$$

bulunur. $C \not\equiv 0 \pmod p$ olduğundan

$$kC \equiv D \pmod p,\ 0 \leq k < p$$

kongürans çözüm olarak k seçilebilir. Buradan

$$a = kA - B,\ b = -kA + A + B,\ c = kC - D,\ d = -kC + C + D$$

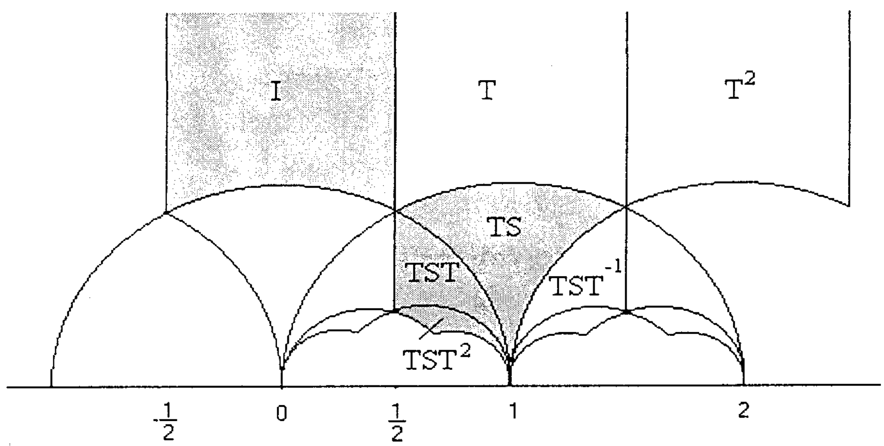
yazılabilir. Böylece $c \equiv 0 \pmod p$ olduğundan $R \in \Gamma_0(p)$ olur.

Teorem 3.3.8: p herhangi bir asal sayı olmak üzere,

$$R_\Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} TST^k(R_\Gamma)$$

kümesi, $\Gamma_0(p)$ alt grubu için bir temel bölgedir.

İspat:



Şekil.3.1

R,

$$R = R_\Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} TST^k(R_\Gamma)$$

kümesini göstersin. Bu R bölgesinin temel bölge olduğunu göstermek için,

i. $\tau \in \mathbf{H}$ ise $V\tau$, R nin kapanışında olacak şekilde $\Gamma_0(p)$ de V mevcuttur.

ii. R nin farklı iki noktası $\Gamma_0(p)$ ye göre denk değildir (R nin kapanışında denk olabilirler).

şartları gösterilmelidir.

i. şıkkını ispatlamak için, $\tau \in \mathbf{H}$, τ' R_Γ nun kapanışında $\tau' = A\tau$ olacak şekilde $A \in \Gamma$ da olsun. $0 \leq k \leq p$ için $W = TST^k$ veya $W = \mathrm{I}$ ve $P \in \Gamma_0(p)$ olmak üzere Teorem 3.3.7 den,

$$A^{-1} = PW$$

olur. Buradan

$$P^{-1} = WA \text{ ve } P = A^{-1}W^{-1}$$

yazılır. $P^{-1} = V$ olsun. Buradan da $V \in \Gamma_0(p)$ ve $V\tau = WA(\tau) = W\tau'$ olur. $W = TST^k$ veya $W = \mathrm{I}$ olduğundan bu, **i.** şıkkı ispatlamış olur.

ii. şıkkı ispatlamak için $\tau_1 \in R$, $\tau_2 \in R$ ve $V \in \Gamma_0(p)$ için $V\tau_1 = \tau_2$ olduğu kabul edilirse, $\tau_1 = \tau_2$ olduğu ispat etmeliyiz. Bunun için aşağıdaki üç durumu dikkate alalım.

a. $\tau_1 \in R_\Gamma$, $\tau_2 \in R_\Gamma$ olur. Bu durumda $V \in \Gamma$ olduğundan $\tau_1 = \tau_2$ dir.

b. $\tau_1 \in R_\Gamma,\ \tau_2 \in T\,S\,T^{k}\,(R_\Gamma\,)$ dır.

c. $\tau_1 \in T\,S\,T^{k_1}(R_\Gamma\,),\ \tau_2 \in T\,S\,T^{k_2}(R_\Gamma\,)$dır.

b. şıkkında $\tau_3 \in R_\Gamma$ olmak üzere $\tau_2 = T\,S\,T^{k}\,\tau_3$ olur. $V\,\tau_1 = \tau_2$ eşitliğinden

$$V\,\tau_1 = T\,S\,T^{k}\,\tau_3 \Rightarrow \tau_1 = V^{-1}\,T\,S\,T^{k}\,\tau_3$$

yazılır. Fakat $\tau_1 \in R_\Gamma,\ \tau_3 \in R_\Gamma$ ise

$$V^{-1}\,T\,S\,T^{k} = \mathrm{I}$$

olması gerekir. Buradan $V = T\,S\,T^{k} = \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ dır. Bu da $V\in \Gamma_0(p)$ olması gerçeği ile ters düşer.

Son olarak, **c.** şıkkı için, $\tau_1 \in R_\Gamma,\ \tau_2 \in R_\Gamma$ olmak üzere,

$$\tau_1 = T\,S\,T^{k_1}\,\tau'_1,\ \tau_2 = T\,S\,T^{k_2}\,\tau'_2$$

alınabilir. $V\,\tau_1 = \tau_2$ olduğundan

$$V\,T\,S\,T^{k_1}\,\tau'_1 = T\,S\,T^{k_2}\,\tau'_2$$

yazılır. Böylece

$$V\,T\,S\,T^{k_1} = T\,S\,T^{k_2},$$

$$V = T\,S\,T^{k_1-k_2}\,S\,T^{-1} = \begin{pmatrix} k_1-k_2+1 & -k_1+k_2 \\ k_1-k_2 & -k_1+k_2+1 \end{pmatrix}$$

$V\in \Gamma_0(p)$ olduğundan $k_1 \equiv k_2 \pmod{p}$ olur. Ama k_1 ve k_2 ikisi de $[0, p\text{-}1]$ aralığında olmak zorundadır. Böylece $k_1 = k_2$ olur. Buradan da

$$V = T\,S\,T^{k_1-k_2}\,S\,T^{-1} = \mathrm{I}$$

ve böylece $\tau_1 = \tau_2$ olur.

Teorem 3.3.10: p herhangi bir asal sayı olmak üzere $\Gamma_0(p)$ alt grubu $2\left[\frac{p}{12}\right]+3$ gerene sahiptir (Apostol, 1976). Bunlar, $0 \le k \le p$-1,

$$I,\ T\,S,\ T\,S\,T,\ T\,S\,T^{2}, \ldots, T\,S\,T^{k}$$

elamanlarından seçilebilir.

Teorem 3.3.11: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma\,(n)$, $T\,S\,T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ ise

$$A\,T\,S\,T = T\,S\,B$$

olacak şekilde $B=\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix} \in \Gamma\,(n)$, $T\,S=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ matrisleri mevcuttur. Üstelik,

$$a\,(\,B\tau\,) = e(\tau+1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: det $(A\ T\ S\ T\,)$ = det (A) det $(T\ S\ T\,) = n$ olduğundan $A\ T\ S\ T$ matrisi $\Gamma\,(n)$ grubundadır. O halde $\Gamma\,(n)$ nin her denklik sınıfında $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $d>0$ şeklinde bir temsil olduğundan (Apostol, 1976; Teorem 6.7),

$$A\,T\,S\,T = T\,S\,B$$

olacak şekilde $B \in \Gamma\,(n)$, $T\,S \in \Gamma$ matrisleri vardır.

Şimdi $a\,(\,B\tau\,) = e(\tau+1)$ olduğunu ispatlayalım.

$$A\,T\,S\,T=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & * \\ d & d \end{pmatrix}$$

ve

$$B^{-1}=\frac{1}{n}\begin{pmatrix} g & -f \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

olur. $A\,T\,S\,T = T\,S\,B$ eşitliğinden,

$$T\,S = A\,T\,S\,T\,B^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} * & * \\ d & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & -f \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

$$T\,S = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} * & * \\ dg & de-df \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ikinci satırdaki elamanlar eşitlenirse,

$$\frac{dg}{n}=1 \text{ ve } \frac{de}{n}-\frac{df}{n}=0$$

yazılır. $a\,d=n$ olduğundan,

$$\frac{g}{a}=1 \Rightarrow g=a \text{ ve } \frac{e}{a}-\frac{f}{a}=0 \Rightarrow af=ae$$

bulunur. Buradan,

$$a\,(B\tau) = a\left(\frac{e\tau + f}{g}\right) = \frac{ae\tau + af}{g}$$

$$= \frac{ae\tau + ae}{a}$$

$$= e(\tau + 1)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.12: Eğer $f \in M_k$ ve $T\,S\,T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ ise

$$T_n f\,(T\,S\,T\,\tau) = (\tau + 1)^k\, T_n f\,(\tau)$$

olur.

İspat: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ve A matrisi $\Gamma\,(n)$ de denk olmayan elamanların kümesinden değerler almak üzere,

$$T_n f\,(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{A} a^k f(A\,\tau)$$

yazılabilir. Burada τ yerine $T\,S\,T\,(\tau)$ yazılırsa,

$$T_n f\,(T\,S\,T\,(\tau)) = \frac{1}{n}\sum_{A} a^k f(ATST(\tau))$$

olur. Teorem 3.3.11 den,

$$A\,T\,S\,T = T\,S\,B \text{ ve } a\,(B\tau) = e(\tau + 1)$$

olacak şekilde,

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix} \in \Gamma,\; T\,S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

matrisleri vardır. Böylece $f \in M_k$ olduğundan,

$$a^k f\,(AT\,S\,T\,(\tau)) = a^k f\,(T\,S\,B\,(\tau)) = a^k\,(B\,\tau)^k f\,(B\,(\tau))$$
$$= e^k\,(\tau + 1)^k f\,(B\,(\tau))$$

yazılır. A matrisi, $\Gamma\,(n)$ de denk olmayan elamanların kümesinden değerler alırken B matrisi de, $\Gamma\,(n)$ de denk olmayan elamanların kümesinden değerler alır. O halde

$$T_n f\,(T\,S\,T\,(\tau)) = \frac{1}{n}\,(\tau + 1)^k \sum_{B} e^k f(B(\tau)) = (\tau + 1)^k\, T_n f\,(\tau)$$

bulunur.

Teorem 3.3.13: Eğer $f \in M_k$ ve $T\,S\,T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ ise $\Phi(\tau) = \dfrac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)} \in M_k$ için,

$$\Phi\,(T\,S\,T\,\tau) = \Phi\,(\tau)$$

olur.

İspat: Teorem 3.3.12 den $T_n f(T\,S\,T\,(\tau)) = (\tau + 1)^k\, T_n\, f(\tau)$ yazılır. Buradan $T_n f(T\,S\,T\,(q\tau)) = (\tau+1)^k T_n f(q\tau)$ elde edilir. Böylece,

$$\Phi(TST\tau) = \frac{T_n f(qTST\tau)}{T_n f(TST\tau)} = \frac{(\tau+1)^k T_n f(q\tau)}{(\tau+1)^k T_n f(\tau)} = \Phi\,(\tau)$$

bulunur.

Teorem 3.3.14: $T_n\, f \in M_k$ ve $(T_n\, f)(\tau) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\dfrac{n\tau + bd}{d^2}\right)$ olmak üzere k ağırlıklı modüler form olan $\Phi(\tau) = \dfrac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)} = x^{q-1}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m\right)$, ($q \in \mathbf{Z}$, $b_m \in \mathbf{Z}$), fonksiyonu T_n Hecke operatörlerinin $\sigma_{k-1}(m) = \sum_{d|m} d^{k-1}$ eigen değeri ile eigen fonksiyonudur. Yani $T_n\, \Phi(\tau) = \sum_{d|m} d^{k-1}\, \Phi(\tau)$ şeklinde yazılabilir.

İspat: $T_n f \in M_k$ ve $(T_n f)(\tau) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\dfrac{n\tau + bd}{d^2}\right)$ tanımından,

$$(T_n\,\Phi)(\tau) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} \Phi\left(\frac{n\tau + bd}{d^2}\right)$$

yazılır. Buradan

$$(T_n\,\Phi)(\tau) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i(q-1)\left(\frac{n\tau+bd}{d^2}\right)} \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{2\pi i m\left(\frac{n\tau+bd}{d^2}\right)}\right)$$

$$= \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} e^{2\pi i(q-1)\frac{n\tau}{d^2}} \frac{1}{d} \sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i(q-1)\frac{bd}{d^2}} + \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i(q-1)\left(\frac{n\tau+bd}{d^2}\right)} \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{2\pi i m\left(\frac{n\tau+bd}{d^2}\right)}$$

yazılır. Yukarıdaki toplamın birinci kısmında,

$$\sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i(q-1)\frac{b}{d}} = \begin{cases} d, & d \mid (q-1) \quad ise \\ 0, & d \nmid (q-1) \quad ise \end{cases}$$

olur. Şimdi toplamın ikinci kısmını düzenleyelim. $\lambda = \dfrac{q-1}{d}$ alınırsa,

$$(T_n\Phi)(\tau) = \sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} e^{2\pi i\lambda\frac{n\tau}{d}} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} b_m e^{2\pi i(m+q-1)\frac{n\tau}{d^2}} \frac{1}{d}\sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i(m+q-1)\frac{bd}{d^2}}$$

bulunur. Burada toplamın ikinci kısmında,

$$\sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i(m+q-1)\frac{b}{d}} = \begin{cases} d, & d \mid (m+q-1) \quad ise \\ 0, & d \nmid (m+q-1) \quad ise \end{cases}$$

elde edilir. Burada eğer $\mu = \dfrac{m+q-1}{d}$ ise,

$$(T_n\Phi)(\tau) = \sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} e^{2\pi i\lambda\frac{n\tau}{d}} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} b_m e^{2\pi i\mu\frac{n\tau}{d}}$$

olur. Eğer $d \mid (q\text{-}1)$ ve $d \mid (m+ q\text{-}1)$ ise $d \mid m$ olmak zorundadır. O halde $l = \dfrac{m}{d}$ alınırsa,

$$(T_n\Phi)(\tau) = \sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} e^{2\pi i\lambda\frac{n\tau}{d}} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} b_{dl} e^{2\pi i\mu\frac{n\tau}{d}}$$

yazılır. $\dfrac{n}{d}$ ile d yer değiştirilirse,

$$(T_n\Phi)(\tau) = \sum_{d|n} d^{k-1} e^{2\pi i\lambda d\tau} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n} d^{k-1} b_{\frac{nl}{d}} e^{2\pi i\mu d\tau}$$

bulunur. Buradan

$$(T_n\Phi)(\tau) = \sum_{d|n} d^{k-1} e^{2\pi i(q-1)\tau} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{d|n} d^{k-1} b_{\frac{mn}{d^2}} e^{2\pi i(m+q-1)\tau}$$

dır. $x = e^{2\pi i\tau}$ olmak üzere

$$(T_n\Phi)(\tau) = \sum_{d|n} d^{k-1}\left[x^{q-1}\left(1+\sum_{m=0}^{\infty} b_{\frac{mn}{d^2}} x^m\right)\right]$$

ve sonuç olarak,

$$T_n\,\Phi(\tau) = \sum_{d|m} d^{k-1}\,\Phi(\tau)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4. JACOBİ MODÜLER FORMLARI ve HECKE OPERATÖRLERİ

4.1. Jacobi Modüler Formları

Tanım 4.1.1 : $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z})$; $a, b, c, d \in Z$; $ad - bc = 1$ olmak üzere,

$f: \mathbf{H} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ Jacobi modüler formu,

$$(f\,|_k\, \gamma)(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(\gamma(\tau))$$

eşitliği ile tanımlanır.

Aynı zamanda bir Jacobi modüler formu $\lambda, \mu \in Z$ için,

i. $f\left(\gamma(\tau), \dfrac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k e^{2\pi i m\tau\left(\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)} f(\tau; z)$

ii. $f(\tau; z + \lambda\tau + \mu) = e^{-2\pi i m\tau\left(\lambda^2\tau + 2\lambda z\right)} f(\tau; z)$

özelliklerini sağlar ve

iii. $f(\tau; z)$ modüler formu,

$$f(\tau; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r \in Z} c(n, r) e^{2\pi i (n\tau + rz)}$$

şeklinde Fourier açılımına sahiptir (Eichler ve Zaiger,1985; Young,1997; Işık, 1997).

Bu ifadelere göre, k ve m birer tam sayı olmak üzere $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z})$ için,

$$(f\,|_{k,m}\, \gamma)(\tau; z) = (c\tau + d)^{-k} e^{2\pi i m\left(\frac{-cz^2}{c\tau+d}\right)} f\left(\gamma(\tau); \frac{z}{c\tau + d}\right)$$

ve $(\lambda, \mu) \in \mathbf{Z}^2$ ise

$$(f\,|_m\, [\lambda, \mu])(\tau; z) = e^{2\pi i m\left(\lambda^2\tau + 2\lambda z\right)} f(\tau; z + \lambda\tau + \mu)$$

eşitlikleri yazılır.

Tanım 4.1.2 : Sonlu boyutlu $\Gamma \subset \Gamma(1)$ alt grubunda k ağırlıklı ve m boyutlu $f: \mathbf{H} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ Jacobi modüler formu,

$$f|_{k,m}\gamma = f\ ,\gamma\in\Gamma(1)$$

$$f|_{m}\ X = f\ , X\in\mathbf{Z}^2$$

bağıntılarını sağlayan holomorf bir fonksiyondur (Eichler ve Zaiger,1985).
Bu şekilde tanımlanan fonksiyonların lineer uzayını $J_{k,m}(\Gamma)$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.1.1 : $J_{k,m}(\Gamma)$ uzayı sonlu boyutludur (Eichler ve Zaiger,1985; Işık,1991).

Teorem 4.1.2 : *f*, *m* boyutlu bir Jacobi formu olsun. $\tau\in\mathbf{H}$ için sıfırdan farklı $z\to f(\tau, z)$ fonksiyonu $\Omega_\tau = \mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z}$ latisindeki herhangi bir esas bölgede 2m tane sıfıra sahiptir.

İspat : Tanım 4.1.2 deki $f|_m\ X = f\ , X\in\mathbf{Z}^2$ ifadesine göre,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{f_z(\tau,z)}{f(\tau,z)}dz = 2m$$

olduğu kolayca anlaşılır. Burada F, $\mathbf{C}/\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z}$ için bir esas bölge ve f_z, f nin z ye göre türevidir. ($\frac{1}{2\pi i}\frac{f_z}{f}$ oranı $z\to z+1$ yi sabit bırakır ve $z\to z+\tau$ dönüşümünü de 2m ye göre değiştirir). O halde negatif indisli bir Jacobi formunun olamayacağını ve sıfır indisli bir Jacobi formunun z den bağımsız olduğunu söyleriz.

Teorem 4.1.3 : *f*, *m* indeksli ve *k* ağırlıklı bir Jacobi formu ve λ, $\mu\in\mathbf{H}$ olsun.

$$\left(f|_{k,m}(\lambda,\mu)\right)(\tau,z) = e^{2\pi i m\left(\lambda^2\tau+2\lambda z\right)}f(\tau; z+\lambda\tau+\mu)$$

fonksiyonu, λ ve μ ye bağlı Γ grubunun sonlu indeksli Γ' alt grubunda *m* indeksli ve *k* ağırlıklı bir Jacobi modüler formudur (Eichler ve Zaiger,1985).

Lemma 4.1.1: λ, μ, λ_1, $\mu_1\in\mathbf{Z}$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ ve $[\lambda_1, \mu_1] = [\lambda\ \ \mu]\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ olmak üzere, f fonksiyonu,

$$\left(\left(f|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau;z) = \left(f|_m[\lambda_1,\mu_1]\right)(\tau;z)$$

bağıntısını sağlar (Işık, 1997).

İspat: $f|_{k,m}$ fonksiyonunun tanımından,

$$f\left(\gamma(\tau), \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{2\pi i m\left(\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)} f(\tau;z)$$

$$f(\tau; z+\lambda\tau+\mu) = e^{2\pi i m\left(\lambda^2\tau+2\lambda z\right)} f(\tau;z)$$

bağıntıları sağlandığından,

$$\left(\left(f|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau;z) = e^{2\pi i m\left(\lambda^2\tau+2\lambda z\right)}\left(f|_{k,m}\gamma\right)(\tau; z+\lambda\tau+\mu)$$

$$= e^{2\pi i m\left(\lambda_1^2\tau+2\lambda_1 z+\lambda_1\mu_1\right)}(c\tau+d)^{-k} e^{2\pi m i\left(-\frac{c(z+\lambda_1\tau+\mu_1)^2}{c\tau+d}\right)} f\left(\gamma(\tau); \frac{z+\lambda_1\tau+\mu_1}{c\tau+d}\right)$$

$$= e^{2\pi i m\left(\lambda_1^2\tau+2\lambda_1 z+\lambda_1\mu_1\right)}(c\tau+d)^{-k} e^{2\pi i m\left(-\frac{c(z+\lambda_1\tau+\mu_1)^2}{c\tau+d}\right)}(c\tau+d)^k e^{2\pi i m\left(\frac{c(z+\lambda_1\tau+\mu_1)^2}{c\tau+d}\right)} f(\tau;z)$$

$$= e^{2\pi i m\left(\lambda_1^2\tau+2\lambda_1 z+\lambda_1\mu_1\right)} f(\tau;z) = \left(f|_m[\lambda_1,\mu_1]\right)(\tau;z)$$

bulunur.

Tanım 4.1.3: $n > 0$ için f: $\mathbf{H} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ Jacobi modüler formu olmak üzere $\left(f|_{k,m}(\lambda,\mu)\right)(\tau,z) = e^{2\pi i m\left(\lambda^2\tau+2\lambda z\right)} f(\tau; z+\lambda\tau+\mu)$ fonksiyonu üzerinde T_n operatörü

$$\left(T_n f|_{k,m}\right)(\tau;z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad-bc=n \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_1/M_2(Z)}} (c\tau+d)^{-k} e^{2\pi i m n\left(\frac{-cz^2}{c\tau+d}\right)} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \frac{nz}{c\tau+d}\right)$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 4.1.4: f: $\mathbf{H} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ Jacobi modüler formu için

$$\left(f|_{k,m}(\lambda,\mu)\right)(\tau,z) = e^{2\pi i m\left(\lambda^2\tau+2\lambda z\right)} f(\tau; z+\lambda\tau+\mu)$$

ve

$$\left(T_n f|_{k,m}\right)(\tau;z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad-bc=n \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} \in \Gamma_1/M_2(Z)}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{d}; \frac{nz}{d}\right)$$

olmak üzere $(\lambda_1, \mu_1) = [\lambda \quad \mu]\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}$ ise,

$$\left(\left(T_n f\,|_{k,m}\right)_m[\lambda\quad\mu]\right)(\tau;z)=n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} e^{2\pi i m\left(\lambda_1^2\tau+2\lambda_1 z\right)} f\left(\tau;nz+\lambda_1\tau+\mu_1\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\left(T_n f\,|_{k,m}\right)(\tau;z)=n^{k-1}\sum_{\substack{ad-bc=n\\ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{d};\frac{nz}{d}\right)$$

Hecke operatörünün tanımından,

$$\left(\left(T_n f\,|_{k,m}\right)_m[\lambda\quad\mu]\right)(\tau;z)=n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} d^{-k}\left(f\,|_m[\lambda\quad\mu]\right)\left(\frac{a\tau+b}{d};\frac{nz}{d}\right)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left(\left(T_n f\,|_{k,m}\right)_m[\lambda\quad\mu]\right)(\tau;z)$$

$$=n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} d^{-k} e^{2\pi i m\left(\lambda^2\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)+\lambda\left(\frac{nz}{d}\right)\right)} f\left(\frac{a\tau+b}{d};\frac{nz}{d}+\lambda\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)+\mu\right)$$

$$=n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} d^{-k} e^{2\pi i m\left(\lambda_1^2\tau+2\lambda_1 z\right)} f\left(\frac{a\tau+b}{d};\frac{nz+\lambda_1\tau+\mu_1}{d}\right)$$

$$=n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} d^{-k} d^{k} e^{2\pi i m\left(\lambda_1^2\tau+2\lambda_1 z\right)} f\left(\tau;nz+\lambda_1\tau+\mu_1\right)$$

$$=n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} e^{2\pi i m\left(\lambda_1^2\tau+2\lambda_1 z\right)} f\left(\tau;nz+\lambda_1\tau+\mu_1\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5: f: **H** $\times$ **C** $\to$ **C** Jacobi modüler formunun

$$f(\tau;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r\in Z} c(n,r)e^{2\pi i(n\tau+rz)}$$

Fourier açılımı ve

$$\left(T_n f|_{k,m}\right)(\tau;z)=n^{k-1}\sum_{\substack{ad-bc=n\\ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{d};\frac{nz}{d}\right)$$

Hecke operatörü için, $b_m(n,r)=\sum_{ad=n} d^{-k} c\left(\frac{mn}{d^2},r\right)$ olmak üzere

$$\left(T_n f|_{k,m}\right)(\tau,z)=\sum_{m,r} b_m(n,r)e^{2\pi i m\tau}e^{2\pi i r d z}$$

biçiminde Fourier açılımı mevcuttur.

İspat: $\left(T_n f|_{k,m}\right)(\tau;z)=n^{k-1}\sum_{\substack{ad-bc=n\\ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{d};\frac{nz}{d}\right)$, Hecke operatöründe

$f(\tau;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r\in Z} c(n,r)e^{2\pi i(n\tau+rz)}$ modüler formun Fourier açılımını yerine yazarsak,

$$\left(T_n f|_{k,m}\right)(\tau;z)=n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} d^{-k}\sum_{m,r} c(m,r)e^{2\pi i m\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)}e^{2\pi i r\left(\frac{n}{d}z\right)}$$

$$=\sum_{m,r}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1}\sum_{ad=n} c(m,r)e^{2\pi i m\frac{a\tau}{d}}e^{2\pi i r\left(\frac{n}{d}z\right)}\frac{1}{d}\sum_{b \bmod d} e^{2\pi i m\frac{b}{d}}$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{b \bmod d} e^{2\pi i m\frac{b}{d}}=\begin{cases} d, & d\mid m \text{ ise}\\ 0, & d\nmid m \text{ ise}\end{cases}$$

olduğundan,

$$\left(T_n f|_{k,m}\right)(\tau,z)=\sum_{m,r}\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1}\sum_{ad=n} c(m,r)e^{2\pi i m\frac{a\tau}{d}}e^{2\pi i r\frac{n}{d}z}$$

yazılır. Böylece $m=\lambda d$ alınır ve $\frac{n}{d}$ ile d yer değiştirilirse

$$\left(T_n f|_{k,m}\right)(\tau,z)=\sum_{m,r} d^{k-1}\sum_{ad=n} c\left(\frac{\lambda n}{d},r\right)e^{2\pi i\lambda d\tau}e^{2\pi i r d z}$$

$$=\sum_{ad=n} d^{k-1}\sum_{m,r} c\left(\frac{mn}{d^2},r\right)e^{2\pi i m\tau}e^{2\pi i r d z}.$$

bulunur. Buradan $b_m(n,r)=\sum_{ad=n} d^{-k} c\left(\frac{mn}{d^2},r\right)$ olmak üzere

$$\left(T_n f\mid_{k,m}\right)(\tau,z)=\sum_{m,r} b_m(n,r)e^{2\pi i m\tau}e^{2\pi i r d z}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.2: f: **H** $\times$ **C** $\rightarrow$ **C** Jacobi modüler formu

$$f\left(\gamma(\tau),\frac{z}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^k e^{2\pi i m\tau\left(\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)}f(\tau;z)$$

$$f(\tau;z+\lambda\tau+\mu)=e^{-2\pi i m\tau\left(\lambda^2\tau+2\lambda z\right)}f(\tau;z)$$

bağıntılarını sağlamak üzere,

$$\left(\left(f\mid_m[\lambda,\mu]\right)\mid_{k,m}\gamma\right)(\tau;z+\pi)=e^{2\pi i(2m\lambda\pi+r\pi)}\left(\left(f\mid_m[\lambda,\mu]\right)\mid_{k,m}\gamma\right)(\tau;z)$$

ve

$$\left(\left(f\mid_m[\lambda,\mu]\right)\mid_{k,m}\gamma\right)(\tau;z+\tau\pi)=e^{2\pi i m(2m\lambda\pi+r\pi)\tau}\left(\left(f\mid_m[\lambda,\mu]\right)\mid_{k,m}\gamma\right)(\tau;z)$$

bağıntılarını sağlar (Işık,1991; Zaiger, 1991).

Teorem 4.1.6: f: **H** $\times$ **C** $\rightarrow$ **C** Jacobi modüler formu için

$$f(\tau;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r\in Z}c(n,r)e^{2\pi i(n\tau+rz)}$$

ve

$$\left(T_n f\mid_{k,m}\right)(\tau,z)=\sum_{ad=n}d^{k-1}\sum_{m,r}c\left(\frac{mn}{d^2},r\right)e^{2\pi i m\tau}e^{2\pi i r d z}$$

biçiminde Fourier açılımı mevcut olmak üzere $(\lambda,\mu)\in$ **Z** ^{2} karakteristiği, $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ $\equiv\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (mod 2) matrisi ve $n\pi$, $m\pi\tau$,($n,m\in$ **Z**) periyotlarıyla Hecke operatörü,

$$\left(\left(T_n f\mid_m[\lambda,\mu]\right)\mid_{k,m}\gamma\right)(\tau;z+\pi)=e^{2\pi i(m\lambda\pi+r\pi)}\left(\left(T_n f\mid_m[\lambda,\mu]\right)\mid_{k,m}\gamma\right)(\tau;z)$$

ve

$$\left(\left(T_n f\,|_m\,[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\,\gamma\right)(\tau; z+\tau\pi)=e^{2\pi i(m\lambda\pi+r\pi)\tau}\left(\left(T_n f\,|_m\,[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\,\gamma\right)(\tau;z)$$

bağıntılarını sağlar.

İspat: $T_n f$ nin tanımından,

$$\left(\left(T_n f\,|_m\,[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\,\gamma\right)(\tau;z)=n^{k-1}\sum_{\substack{ad-bc=n \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} d^{-k}\left(\left(f\,|_m\,[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\,\gamma\left(\frac{a\tau+b}{d};\frac{nz}{d}\right)\right)$$

yazılır. Yine Teorem 4.1.4 den,

$$\left(\left(T_n f\,|_{k,m}\right)_m[\lambda\quad\mu]\right)(\tau;z)=n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1/M_2(Z)}} e^{2\pi i m\left(\lambda_1^2\tau+2\lambda_1 z\right)} f(\tau; nz+\lambda_1\tau+\mu_1)$$

olur. Bu özellikten , Lemma.4.1.2 ve $T_n f$ nin Fourier açılımından,

$$\left(\left(T_n f\,|_m\,[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\,\gamma\right)(\tau; z+\pi)=e^{2\pi i(m\lambda\pi+r\pi)}\left(\left(T_n f\,|_m\,[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\,\gamma\right)(\tau;z)$$

elde edilir. Benzer yolla,

$$\left(\left(T_n f\,|_m\,[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\,\gamma\right)(\tau; z+\tau\pi)=e^{2\pi i(m\lambda\pi+r\pi)\tau}\left(\left(T_n f\,|_m\,[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\,\gamma\right)(\tau;z)$$

olduğu gösterilebilir.

4.2. Eliptik Fonksiyon Teşkili

Teorem 4.1.6 ya göre $(T_n\, f\,)(\tau,\ z)$ modüler formu $(\lambda,\ \mu)\in$ $\mathbf{Z}^2$ karakteristiği ve $\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ matrisi ve $n\pi,\ m\pi\tau$,$(n,m\in\mathbf{Z})$ periyotlara ile yarı periyodiktir.

Yarı-eliptik fonksiyonlardan eliptik fonksiyon kurulabileceği bir gerçektir, fakat eliptik fonksiyonların teşkilleri çeşitli metotlarla yapılmaktadır. Bu sahada temel çalışma yapmış olan Weierstrass ve Jacobi, sırasıyla kendilerine ait olan σ- sigma ve θ-teta fonksiyonlarını kullanmışlardır,(Dutta, 1965; Ocak, 1985). $\left(\left(T_n f\,|_m\,[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\,\gamma\right)(\tau,z)$ meromorf fonksiyonu eliptiklik özelliğini yani çifte periyodikliği sağlamadığı halde eliptiklik tanımına yakın özelliklere sahiptir. Böyle fonksiyonlara yarı-eliptik ya da 2. veya 3. çeşit eliptik fonksiyon denir, (Işık, 1997). Şimdi

$$\left(\left(\Phi|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z)=\frac{\left(\left(T_nf|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(q\tau,qz)}{\left(\left(T_nf|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z)}$$

fonksiyonunu alalım. $s,\ t\in\mathbf{Z}$ için

$$\left(\left(\Phi|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z+(s+t\tau)\pi)=\frac{\left(\left(T_nf|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(q\tau,qz+(s+t\tau)q\pi)}{\left(\left(T_nf|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z+(s+t\tau)\pi)}$$

olur. Teorem 4.1.6 dan

$$\left(\left(\Phi|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z+(s+t\tau)\pi)=\frac{e^{2\pi iq(2m+r)(s+t\tau)\pi}\left(\left(T_nf|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(q\tau,qz)}{e^{2\pi i(2m+r)(s+t\tau)\pi}\left(\left(T_nf|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z)}$$

$$=e^{2\pi i(q-1)(2m+r)(s+t\tau)\pi}\left(\left(\Phi|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z)$$

elde edilir. Bu son ifadenin her iki tarafının logaritması alınırsa,

$$\log\left(\left(\Phi|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z+(s+t\tau)\pi)=2\pi i(q-1)(2m+r)(s+t\tau)\pi+\log\left(\left(\Phi|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z)$$

yazılır. Elde edilen bu fonksiyonun her iki yanının z değişkenine göre türevi alınarak

$$\frac{d}{dz}\left(\left(\Phi|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z+\Omega_\pi)=\frac{d}{dz}\left(\left(\Phi|_m[\lambda,\mu]\right)|_{k,m}\gamma\right)(\tau,z)$$

$$\Psi(\tau,z+\Omega_\pi)=\Psi(\tau,z)$$

olduğu görülür. Bu fonksiyon $s\pi,\ t\pi\tau$,($s,\ t\in\mathbf{Z}$) periyotlarına göre çifte periyodik ve meromorf bir fonksiyondur. $\Psi(\tau,z+\Omega_\pi)$ fonksiyonu bir eliptik fonksiyondur.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmanın giriş bölümünde anlatılmaya çalışılan modüler formlar, Hecke operatörleri, Hecke operatörlerinin eigen fonksiyon ve eigen değerleri ve Jacobi ile Weierstrass' ın eliptik fonksiyonları arasındaki bağıntılar detaylıca incelenerek aşağıdaki sonuçlar elde edildi;

1.

$$(T_n f)(\tau) = n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n\tau+bd}{d^2}\right)$$

modüler formuna, T_n Hecke operatörü uygulanarak

$$(T_n\,(T_n f))(\tau) = n^{2k-2}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{d|n} d^{-k} d\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n^2\tau+bd\left(n+d^2\right)}{d^4}\right)$$

ve $n=p$ asal olmak üzere

$$(T_p\,(T_p f))(\tau) = p^{2k-2} f(p^2\tau) + p^{k-2}\sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{p\tau+b}{p}\right) + p^{k-2}\sum_{b=0}^{p-1} f(\tau+b) + \frac{1}{p}\sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+b}{p^2}\right)$$

elde edildi.

2. $\gamma_n(m) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ olmak üzere $T_n f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty}\gamma_n(m)\, e^{2\pi i m\tau}$ ifadesine T_n Hecke operatörü uygulanarak,

$$(T_n\,(T_n f))(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty}\delta_n(m)\, e^{2\pi i m\tau}$$

şeklinde bir Fourier açılımı elde edildi. Burada $\delta_n(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1}\gamma_n\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ dir.

Ayrıca, $n = ad$ ve $A\tau = \frac{a\tau+b}{d}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $c \equiv 0$ (mod d) olmak üzere,

$$(T_n\,(T_n f))(\tau) = \frac{1}{n^2}\sum_{d|n} a^k \sum_{d|n} a^k d\sum_{b=0}^{d-1} f\left(A^2\tau\right)$$

olduğu gösterildi.

3. $T_n f$, M_k uzayında modüler form ise $T_n\,(T_n f)$ nin de M_k uzayında bir modüler form ve de $T_n f$, $M_{k,0}$ uzayında cusp form ise $T_n\,(T_n f)$ nin de $M_{k,0}$ uzayında bir cusp form olduğu gösterildi.

Ayrıca $T_n f$ fonksiyonunun T_n Hecke operatörlerine göre $\gamma_n(n)$ eigen değeri ile eigen fonksiyon olduğu gösterildi.

4. $k \geq 4$, $k \equiv 0$ (mod2) için $\zeta(k) = (-1)^{k+1}\dfrac{(2\pi)^k}{2k!}B_k$ ve $\sigma_{k-1}(m) = \sum_{d|m} d^{k-1}$ olmak üzere -k ağırlıklı tam modüler form olan

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)}{2k!}\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(m)x^m$$

Eisenstein serisi ile normalleştirilmiş uygun eigen form olan $T_n\, f \in M_k$ fonksiyonu arasında

$$(T_n f)(\tau) = \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k}\,(T_n\, G_k)(\tau)$$

bağıntısı kuruldu. Burada B_k ile Bernoulli sayısı gösterilmektedir.

5. $k \geq 4$ ve $\lambda = \dim(M_k)$ ise normalleştirilmiş uygun eigen modüler form kümesi olan S'=$\{T_n f_0, T_n f_1, \ldots, T_n f_{\lambda-1}\}$ kümesinin M_k uzayında bir baz oluşturduğu ve bu uzayda sadece λ kadar $T_n f_0$, $T_n f_1$, ..., $T_n f_{\lambda-1}$ normalleştirilmiş uygun eigen form olduğu gösterildi.

6. q bir tam sayı ve $T_n f \in M_k$ normalleştirilmiş uygun eigen modüler form olmak üzere

$$\Phi(\tau) = \frac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)}$$

fonksiyonu elde edildi ve $x = e^{2\pi i\tau}$ olmak üzere

$$\Phi(\tau) = \frac{T_n f(q\tau)}{T_n f(\tau)} = x^{q-1}\left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m\right)$$

şeklinde bir Fourier açılımı ile M_k uzayında bir modüler fonksiyon olduğu gösterildi.

Elde edilen bu $\Phi(\tau)$ fonksiyonu modüler grubun $T(\tau) = \tau + 1$ ve $S(\tau) = -\frac{1}{\tau}$ geren elamanlarına göre modüler yapıyı koruduğu gösterildi.

7. $\Phi(\tau)$ fonksiyonu, M_k da modüler fonksiyon ve **H** üst yarı düzlemde sınırlı olduğunda sabit olduğu gösterildi.

8. p asal sayı olmak üzere $\Gamma_0(p)$ alt grubu için

$$R_\Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} TST^k(R_\Gamma)$$

temel bölgesi tanımlandı ve $\Gamma_0(p)$ alt grubunun, $I, TS, TST, TST^2, ..., TST^k, 0 \leq k \leq p\text{-}1$, elamanlarından seçilen $2\left[{}^{p}\!/_{12}\right]+3$ tane geren elemana sahip olduğu gösterildi. Ayrıca $\Gamma_0(p)$ alt grubunun TS, TST geren elamanlarına göre modüler yapıyı da koruduğu gösterildi.

9. $\Phi(\tau)$ fonksiyonun T_n Hecke operatörüne göre $\sigma_{k-1}(m) = \sum_{d|m} d^{k-1}$ eigen değerli eigen fonksiyon olduğu gösterildi.

10. $\Phi(\tau)$ bir değişkenli fonksiyon iki değişkenli olarak tanımlandı ve bu fonksiyon ile $f(\tau, z)$ Jacobi modüler formu olmak üzere $(T_n f)(\tau, z)$ fonksiyonu arasında $[\lambda, \mu]$ karakteristiğine ve $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\bmod 2)$ matrisine göre

$$((\Phi|_m [\lambda,\mu])|_{k,m}\gamma)(\tau,z) = \frac{((T_n f|_m [\lambda,\mu])|_{k,m}\gamma)(q\tau,qz)}{((T_n f|_m [\lambda,\mu])|_{k,m}\gamma)(\tau,z)}$$

bağıntısı kuruldu ve bu fonksiyonunun z değişkenine için $s\pi$, $t\pi\tau$,(s, $t \in \mathbf{Z}$) periyotlarına göre yarı periyodik yani yarı-eliptik olduğu gösterildi.

11. Weierstrass' ın eliptik fonksiyon kurma metodu izlenerek bu yarı-eliptik $((\Phi|_m [\lambda,\mu])|_{k,m}\gamma)(\tau,z)$ fonksiyonunun logaritmik türevi alınarak yeni fonksiyon teşkil edildi.

KAYNAKLAR

Apostol, M., T., 1976, Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Springer-Verlag.

Atkin L., A.,and Lehner, J., 1970, Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, Math. Ann,vol:185, p:134-160.

Dutta, M., and Debnanth, L., 1965, Elements of The Theory of Elliptic Functions and Associated Functions With Applications., World Press, Calcutta.

Eichler, M., and Zaieger.D., 1985, The Theory of Jacobi Forms, Birkhauser, Stuttgart.

Ford, R., L., 1951, Automorphic Functions, Chelsea Publishing Comp., New York.

Gethner, E., 1995, Rational Period Functions on G($\sqrt{2}$) and G($\sqrt{3}$) with Hyperbolic poles are not Hecke Eigenfunctions, Illinois Journal of Math., Vol: 39, Num: 4, p:695-721.

Gunning, C., R., 1962, Lectures on Modular Forms Princeton University, Princeton.

Hsiao, H., j., and Lee, H., C., 1978, Hecke operators on Modular Forms, Arc. Math., Vol: 32, p:158- 165.

Işık, A., 1991, Eisenstein Serileri ve Çifte Periyodik Fonksiyonlara Tatbiki, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Erzurum.

Işık, A., 1997, Construction of Elliptic Functions With Jacobi Forms, Jour. of Inst. of Math. & Comp. Sci., Vol: 10, No: 3, P:161-165.

Işık, A., 1998, Automorphic Functions on Hecke Gruop $\Gamma(\sqrt{m})$, Jour. of Inst. of Math. & Comp. Sci., Vol: 11, No: 1, P:67-71.

Knopp, M., I., 1978, Rational Period Functions Of The Modular Group, Duke math., vol:45, no:1, p:47-61.

Kurt, V., 1982, On Modular Forms of Half Integral Weight, Karadeniz Üniversitesi Matematik Yayınları, s:318-324.

Kurt,V., 1986, Uç formlar üzerinde Hecke Operatörü, C. Ü. Fen-Edebiyat Fak. Fen Bilimleri Derg.4.

Lee, C. H., and Hung, W. H., 1995, Galois Groups of Hecke Eigenforms, Chinese Journal of Mathematics, vol:23, no:4, p: 329-342.

Lehner, J., 1966, A Short Course in Automorphic Functions, University of Maryland, U S A.

Ocak, R., 1982, Genelleştirilmiş θ-Teta Fonksiyonu Vasıtasıyla Eliptik Fonksiyon Teşkili ve Bazı Bağıntılar, Doçentlik Tezi, Erzurum.

Ocak, R., 1985, Eliptik Fonksiyonlar Üzerine bir Çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, Özel Sayı:2, s:192-197.

Ogg, A., 1969, Modular Forms and Dirichlet Series, Univ. of California, Benjamin.

Ogg, A., 1972, Survey of Modular Functions of One Variable, International Summer School on Modular Functions, Antwerp, p:1-35.

Rankin, A., R., 1977, Modular Forms and Functions, Cambridge University, Cambridge.

Schoeneberg, B., 1974, Elliptic Modular Functions, New York Heidelberg, Berlin.

Young, J. C., 1997, Jacobi Forms and Heat Operator, Math. Z., Vol:225, p:95-101 .

Zagier, D., 1991, Periods of Modular Forms and Jacobi Theta Functions, Invent. Math.Vol: 104, p:449-465.