6684

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIEMANN YÜZEYLERİ ÜZERİNDE HOLOMORFİK VE MEROMORFİK FONKSİYONLARIN HALKALARI

Nurhayat İSPİR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 21/6/1989 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından 90 (Doksan.....) Not Takdir Edilerek Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile Kabul Edilmiştir.

(İmza)	(İmza)	(İmza)
Doç.Dr.İ.Kaya ÖZKIN Danışman	Prof.Dr.Türkan Başgöze	Doç.Dr.Mustafa Bayraktar

Bu çalışma konusunu bana veren, çalışmalarımı büyük bir dikkat ve titizlikle izleyen, bilgi, tecrübe ve yapmış olduğu çalışmaları ile bana ışık tutan sayın hocam Doç. Dr. İ. Kaya ÖZKIN'a sonsuz saygılarımla teşekkürlerimi arz ederim.

ÖZET

Doktora Tezi

RIEMANN YÜZEYLERİ ÜZERİNDE HOLOMORFİK VE MEROMORFİK FONKSİYONLARIN HALKALARI

Nurhayat İSPİR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç.Dr. İ.Kaya ÖZKIN

1989, Sayfa: 50

Jüri : Prof. Dr. Türkân BAŞGÖZE
Doç. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Doç. Dr. İ. Kaya ÖZKIN

R bir açık Riemann yüzeyi ve H(R), R üzerindeki tüm holomorfik fonksiyonlar cümlesi olsun. Bu durumda H(R) noktasal toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır. X, R nin boş olmayan bir altcümlesi olmak üzere, H(X) in hem $\mathbb{C}$ kompleks sayılar hem de $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir cebir olduğu bilinmektedir. Bu tezde esas olarak S açık Riemann yüzeyinin boş olmayan Y altcümlesi üzerinde holomorfik fonksiyonların cebiri H(Y) olmak üzere, H(Y) nin izomorf görüntüleri olan H(X) in R_ϕ öz althalkaları incelenmiştir. Burada söz konusu izomorfizm $\mathbb{C}$- izomorfizmi olup, H(X) in R_ϕ öz althalkası için R_ϕ nin spektrumunun Gelfand topolojisi ile birlikte Y ye homeomorf bir Riemann yüzeyi olduğu gösterilmiştir.

Bu tezde aynı zamanda çeşitli tipten $\Phi: H(Y) \to H(X)$ homomorfizmleri incelenmiştir. Örneğin, Φ bir cebir izomorfizmi ise, bu durumda $\phi \in A(X,Y)$ için $\Phi(f) = f \circ \phi$ ve her $\mathbb{C}$-konjüge homomorfizminin $f \mapsto f \circ \phi$ biçiminde olduğu gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Holomorfik ve meromorfik fonksiyonların halkaları, $\mathbb{C}$-izomorfizmi, konform eşdeğerlik, bir öz althalkanın spektrumu, bir açık Riemann yüzeyin boş olmayan altcümlesi, bir açık Riemann yüzeyinin bir altcümlesi üzerinde tanımlı analitik fonksiyonlar.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

RINGS OF HOLOMORPHIC AND MEROMORPHIC FUNCTIONS ON RIEMANN SURFACES

Nurhayat İSPİR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc.Prof.Dr. İ.Kaya ÖZKIN

1989, Page : 50

Jury : Prof. Dr. Türkân BAŞGÖZE
Assoc. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Assoc. Prof. Dr. İ. Kaya ÖZKIN

If R is an open Riemann surface and H(R) is the set of all holomorphic functions on R, then H(R) is a ring under pointwise addition and multiplication. Let X be a non-empty subset of R. It is well known that H(X) is an algebra over both the complex numbers $\mathbb{C}$ and the real numbers $\mathbb{R}$. This thesis is mainly concerned with the proper subrings R_ϕ of H(X) which are isomorphic images of H(Y), the algebra of all holomorphic functions on a non-empty subset Y of the open Riemann surface S, under a $\mathbb{C}$-isomorphism. For R_ϕ a proper subring of H(X), it has been shown that the spectrum of R_ϕ with the Gelfand topology is homeomorphic to Y.

Also various kinds of ring homomorphisms $\Phi: H(X) \to H(Y)$ has been investigated in the thesis. For example it has been shown that if Φ is a $\mathbb{C}$-isomorphism, then $\Phi(f) = f \circ \phi$; every $\mathbb{C}$-conjugate homomorphism is of the from $f \mapsto \overline{f \circ \phi}$, etc.

KEY WORDS : Rings of holomorphic and meromorphic functions, $\mathbb{C}$-Isomorphism, conformal equivalence, spectrum of a proper subring, non-empty subset of an open Riemann surface, analytic functions defined on a subset of an open Riemann surface.

SİMGELER

İÇİNDEKİLER

G İ R İ Ş

Üç bölümden oluşan bu çalışmada başlıca üç temel problem üzerinde durulmuş ve her bir problem ayrı bölümde ele alınarak incelenmiştir.

I. Bölüm, aynı zamanda diğer iki bölüm için hazırlık anlamında olup, burada konform eşdeğerliğin bir cebirsel karakterizasyonu verilmiştir.

I. Bölümde esas amaç; X ve Y, sırası ile, R ve S açık Riemann yüzeylerinin altcümleleri olmak üzere, X ve Y üzerindeki holomorfik fonksiyonların H(X) ve H(Y) halkalarının cebirsel yapısı ile X ve Y nin konform yapısı arasındaki bağıntıyı kurmaktır. Benzer problem açık Riemann yüzeyleri için [19] Royden, düzlemsel bölgeler için [4] Bers, Riemann küresinin maksimal sınırlı bölgeleri için [21] Rudin ve kompleks düzlemin herhangi altcümleleri için [24] Su tarafından ele alınmıştır. Burada yukarıda sözü edilen sonuçların bir genelleştirmesi yapılmıştır.

II. Bölüm, H(Y) halkasının izomorf görüntüleri olan H(X) in $\mathcal{R}$ öz althalkalarının incelendiği bölümdür. Burada söz konusu izomorfizm sabitleri sabitlere dönüştüren bir izomorfizmdir.

Burada, Φ, H(Y) den H(X) içine sabitleri sabitlere dönüştüren bir izomorfizm, ϕ, X ten Y ye bir analitik dönüşüm olmak üzere, H(X) in bir R_ϕ öz althalkası ile Φ,ϕ arasındaki bağıntılar incelenerek, ilk defa [18] Royden'in belirttiği (α),(β),(γ) özelliklerine R_ϕ halkasının hangi koşullar altında sahip olduğu araştırılarak bir dizi sonuçlar elde edilmiştir.

III. Bölümde amaç; bir Y Riemann yüzeyinin varlığı için gerek ve yeter koşulları H(X) in R_ϕ öz althalkasının H(Y) ye izomorf olması durumunda araştırmak ve R_ϕ spektrumunun bir Riemann yüzeyi olarak Y ye homeomorf olduğunu göstermektir. Bunun için R_ϕ nin spektrumundaki nokta-değerlendirme dönüşümü olan homeomorfizmlerin $\phi(X) \subseteq Y$ nin noktaları ile bire-bir eşlemede olduğu, nokta-değerlendirme dönüşümü olmayanların da $Y - \phi(X)$ in noktaları ile bire-bir eşlemede olduğu gösterildikten sonra, Gelfand topolojisi ile birlikte, R_ϕ nin spektrumunun bir Riemann yüzeyi olarak Y ye homeomorf olduğu gösterilmiştir.

Çalışmanın sonunda holomorfik ve meromorfik fonksiyon halkaları ile ilgili açık problemler verilmiştir.

BÖLÜM I

İki kesimden oluşan bu bölümün ilk kesiminde kompleks düzlemin herhangi bir altcümlesi üzerinde tanımlı tüm tek-değerli analitik fonksiyonların halkaları [24] Su yaklaşımı ile gözönüne alınarak konform eşdeğerliğin bir cebirsel karakterizasyonu verilecektir.

İkinci kesimde ise, X ve Y nin, sırası ile, R ve S açık Riemann yüzeylerinin boş olmayan altcümleleri olması durumunda, X ve Y üzerinde tek-değerli* analitik fonksiyonların halkalarından yararlanılarak konform eşdeğerliğin bir cebirsel karakterizasyonu verilecektir. Bu kesim, birinci kesimin Riemann yüzeylerine genişletilmesi probleminin çözümüdür.

1.1. Kompleks Düzlemin Herhangi bir Altcümlesi Üzerinde Analitik Fonksiyonların Halkaları

Bu kesimde, X daima $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin boş olmayan herhangi bir altcümlesini gösterecektir. Önce gerekli tanımları verelim.

Tanım 1. f, X üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f, X i kapsayan bir bölgede (açık-irtibatlı cümle) analatik ise, bu durumda f ye X de analitiktir denir [1] Ahlfors.

* : *Bundan böyle gözönüne alınan tüm fonksiyonların tek-değerli olduğu düşünülecektir. Dolayısıyla bir fonksiyondan söz edildiği zaman, bunun bu anlamda bir fonksiyon olduğu kabul edilecektir.*

Bu tanıma eşdeğer olarak şu tanımı da verebiliriz: X üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu ve bir $p \in X$ noktası seçelim. Eğer $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-p| < R,\ R > 0\}$ de yakınsak bir $\sum_0^\infty a_n (z-p)^n$ kuvvet serisi varsa ve $z \in X \cap D$ için $f(z) = \sum_0^\infty a_n (z-p)^n$ oluyorsa bu durumda f, $p \in X$ noktasında analitiktir denir. Burada $n = 0,1,\ldots$ için $a_n \in \mathbb{C}$ dir. Eğer f, X in her noktasında analitik ise, bu durumda f'ye X üzerinde analitiktir denir [24] Su.

Tanım 2. X ve Y, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan herhangi iki altcümlesi ve ϕ, X ten Y ye bir dönüşüm olsun. Eğer ϕ, X üzerinde analitik bir dönüşüm ise, bu durumda ϕ ye X ten Y ye bir analitik dönüşüm adı verilir. X de ϕ analitik ve $\phi' \neq 0$ ise ϕ ye X de konformdur denir. Eğer X ten Y üzerine konform, bire-bir bir ϕ dönüşümü varsa, bu durumda X ve Y ye konform eşdeğerdir denir.

Tanım 3. X, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan bir altcümlesi ve X üzerinde analitik tüm kompleks değerli fonksiyonların cümlesi H(X) olsun. H(X), X üzerinde tanımlanan noktasal toplama ve çarpma ikili-işlemlerine göre bir tamlık bölgesi (sıfır bölensiz halka) hatta bir cebirdir. Yani; H(X)

i) Noktasal toplama ikili-işlemine göre bir değişmeli grup,

ii) Noktasal toplama ve çarpma işlemlerine göre bir tamlık bölgesi,

iii) Her $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $f \in H(X)$ için $\alpha f \in H(X)$ olarak tanımlanan skalerle çarpma işlemine göre; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in H(X)$ için

$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$, $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$, $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$,

$\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g)$ ve $1f = f$

özelliklerine sahiptir.

Bundan böyle $H(X)$ den analitik fonksiyonlar halkası veya analitik fonksiyonlar cebri diye söz edilecektir.

$0 \neq f \in H(X)$ olsun. $S(f) = \{z \in X : f(z) = 0\}$ cümlesine f nin sıfır cümlesi denir. Sıfır cümlesinin bir cebirsel cümle olduğu açıktır.

Eğer $H(X)$ in bir I ideali için $\bigcap_{f \in I} S(f) \neq \phi$ ise, I ye sabit ideal, aksi halde serbest ideal denir.

Eğer $f \in H(X)$ ve $x, y \in X$, $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ ise $H(X)$, X in noktalarını ayırır denir.

Aşağıdaki sonuçlardan metin içinde sık, sık yararlanılacaktır:

(A) Her $p \in X$ için $M_p = \{f \in H(X) : f(p) = 0\}$ cümlesi $H(X)$ in $f_0(z) = z-p$ fonksiyonu tarafından üretilen bir maksimal idealdir [4] Bers.

(B) Eğer herhangi bir $p \in X$ noktası için $S(f) = \{p\}$ olacak biçimde bir $f \in M_p$ fonksiyonu varsa, bu durumda f, M_p den başka hiç bir maksimal ideale ait değildir [24] Su.

(C) X ve Y, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan altcümleleri ve $H(X)$ $H(Y)$, sırası ile X,Y üzerinde analitik fonksiyonların halkaları olsun. Eğer $\Phi : H(Y) \to H(X)$ bir izomorfizm ise, bu durumda $\Phi^{-1}(M_p)$ maksimal sabit idealdir [24] Su.

Burada Φ, her sabit fonksiyonu kendisine dönüştüren $H(Y)$ den $H(X)$ e bir homomorfizm olarak gözönüne alınacak ve bu tip homomorfizmlere metin içinde <u>$\mathbb{C}$-homomorfizmi</u> denilecektir.

Herhangi bir a sabit fonksiyonu $\underline{a}$ ile gösterilecektir.

Bundan böyle X ve Y, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan altcümleleri olarak kabul edileceklerdir. H(X) ve H(Y), sırası ile, X ve Y üzerindeki analitik fonksiyonların halkalarını gösterecektir.

TEOREM 1. Φ, H(Y) den H(X) e bir $\mathbb{C}$-izomorfizmi olsun. Bu durumda Φ, $g \in H(Y)$ için $\Phi(g) = g \circ \phi$ ile tanımlı bir $\phi : X \to Y$ dönüşümü belirtir ve ϕ, X ten Y ye bir konform dönüşümdür.

İSPAT . $\phi : X \to Y$ dönüşümünü herhangi bir $p \in X$ için $\phi(p) = \cap S[\Phi^{-1}(M_p)]$ olarak tanımlayalım. Hipotezden dolayı Φ^{-1}, H(X) den H(Y) ye bir izomorfizm olup, (C) den dolayı $\Phi^{-1}(M_p)$, H(Y) de sabit maksimal idealdir. O halde ϕ tek-değerli bir dönüşümdür ve açık olarak $M_{\phi(p)} = \Phi^{-1}(M_p)$ dir. ϕ nin bire-bir olduğunu gösterelim. Bunun için $p_1, p_2 \in X$ ve $\phi(p_1) = \phi(p_2)$ olsun. Bu durumda $M_{\phi(p_1)} = M_{\phi(p_2)}$ dir. Buradan $\Phi(M_{\phi(p_1)}) = \Phi(M_{\phi(p_2)})$ olup, böylece $M_{p_1} = M_{p_2}$ ve $p_1 = p_2$ bulunur. Dolayısıyla ϕ bire-bir dönüşümdür.

ϕ nin üzerine olduğunu göstermek için $q \in Y$ alalım. Bu durumda M_q, H(Y) de bir maksimal idealdir. (C) den dolayı $\Phi(M_q)$, H(X) de bir maksimal idealdir ve $\Phi(M_q) = M_p$ olacak biçimde bir $p \in X$ vardır. O halde ϕ nin tanımından $\phi(p) = q$ olur, dolayısıyla ϕ üzerinedir.

Şimdi her bir $g \in H(Y)$ ve $p \in X$ için $\Phi(g)(p) = a (a \in \mathbb{C})$ olsun. O zaman $\Phi(g) - \underline{a} \in M_p$ ve $g - \Phi^{-1}(\underline{a}) \in M_{\phi(p)} = \Phi^{-1}(M_p)$ dir. Böylece $g(\phi(p)) = \Phi^{-1}(\underline{a})(\phi(p)) = a = \Phi(g)(p)$ olup, $\Phi(g) = g \circ \phi$ bulunur.

Benzer şekilde $\phi^{-1}: Y \to X, \phi^{-1}(q) = \cap S[\Phi(M_q)]$ olmak üzere $\Phi^{-1}(f) = \overline{\overline{f \circ \phi}^{-1}}$ olduğu görülür.

Eğer Y üzerinde $g(w) = w$ ve X üzerinde $f(z) = z$ seçersek, bu durumda $\phi(p) = g \circ \phi(p)$ ve $\phi^{-1}(q) = f \circ \phi^{-1}(q)$ analitikdir. Böylece ϕ,X ten Y'ye bir konform dönüşümdür.

Aynı sonuç, X ve Y nin $\mathbb{C}$ nin irtibatsız altcümleleri olması durumunda da geçerlidir. Burada $\mathbb{R}$-homomorfizmi, Φ nin reel sabit fonksiyonları yine kendilerine dönüştürmesi anlamında kullanılmıştır.

TEOREM 2. Φ, H(Y) den H(X) üzerine bir $\mathbb{R}$-homomorfizmi olsun. X_1 ve X_2, X te açık ayrık, Y_1 ve Y_2 , Y de açık ayrık olmak üzere $\{X_1, X_2\}$ ve $\{Y_1, Y_2\}$ nin sırası ile, X ve Y nin bir parçalanışı biçiminde olduğunu varsayalım. Bu durumda X_1, Y_1 ile konform, X_2, Y_2 ile indirekt konformdur. Burada X_1, X_2, Y_1, Y_2 cümlelerinden biri boş olabilir.

İSPAT. Teorem 1 de olduğu gibi $\phi(p) = \cap S[\Phi^{-1}(M_p)]$ olarak tanımlanan ϕ dönüşümü bire-bir ve üzerindedir. $[\Phi(\underline{i})]^2 = \Phi(-\underline{1}) = -\Phi(\underline{1}) = -\underline{1}$ olduğundan $\Phi(\underline{i}) = \underline{i}, -\underline{i}$ veya X in hem açık hem kapalı bir altcümlesi üzerinde, örneğin X_1 üzerinde $\underline{i}$ ve $X_2 = X - X_1$ üzerinde $-\underline{i}$ dır. Dolayısıyla herhangi bir $\underline{a}$ sabit fonksiyonu için X_1 üzerinde $\Phi(\underline{a}) = \underline{a}$ ve X_2 üzerinde $\Phi(\underline{a}) = \bar{\underline{a}}$ dir. Böylece Teorem 1 den dolayı her bir $g \in H(Y)$ için X_1 üzerinde $\Phi(g) = g \circ \phi$, X_2 üzerinde $\Phi(g) = \overline{g \circ \phi}$ ve herbir $f \in H(X)$ için, X_1 üzerinde $\Phi^{-1}(f) = f \circ \phi^{-1}$, X_2 üzerinde $\Phi^{-1}(f) = \overline{f \circ \phi}^{-1}$ olduğu görülür.

TEOREM 3. ϕ, X ten Y ye bir konform dönüşüm olsun. Budurumda ϕ, H(Y) den H(X) üzerine, her bir $g \in H(Y)$ için $\Phi(g) = g \circ \phi$ olarak tanımlı, bir Φ, $\mathbb{C}$-izomorfizmi belirtir.

İSPAT. Bir $g \in H(Y)$ için $g \circ \phi$ nin X üzerinde analitik olduğu bilinen bir gerçektir. Yani $g \circ \phi \in H(X)$ dir. O halde $\Phi(g) = g \circ \phi$ ile tanımlı Φ fonksiyonu H(Y) den H(X) e bir homomorfizimdir. Ayrıca Φ nin tanımı gereği bire-bir ve üzerine olduğu açıkca görülür. Eğer $\underline{a}$, Y üzerinde bir sabit fonksiyon ise, $\Phi(\underline{a}) = \underline{a} \circ \phi = a$ olduğu için Φ sabitleri korur. O halde Φ bir $\mathbb{C}$-izomorfizmidir.

Sonuç olarak, X ve Y nin $\mathbb{C}$ nin boş olmayan herhangi altcümleleri olması durumunda, X ve Y nin konform eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul, H(Y) ve H(X) analitik fonksiyon halkalarının izomorf olmasıdır.

UYARI. Dikkat edecek olursak, Φ nin sabitleri koruma koşulu kaldırılamaz. Çünkü $X = \{p\}$, $Y = \{q\}$ alırsak, bu durumda $H(X) = \mathbb{C} = H(Y)$ olup, $\mathbb{C}$ nin $\mathbb{C}$ üzerine $z \mapsto z$ ve $z \mapsto \bar{z}$ den başka izomorfizmlerde vardır. $\Phi: H(Y) \to H(X)$, $z \mapsto z$ ve $z \mapsto \bar{z}$ den farklı olarak tanımlanırsa, bir $\underline{a} \in H(Y)$ için $\Phi(\underline{a}) \neq a$ ve $\underline{a} \circ \phi\ (p) = a$ olduğundan $\Phi(\underline{a}) \neq \underline{a} \circ \phi$ bulunur.

1.2. Açık Riemann Yüzeylerinin Altcümleleri Üzerinde Holomorfik ve Meromorfik Fonksiyonların Halkaları

Bu kesimde X ve Y, sırası ile, R ve S açık Riemann yüzeylerinin boş olmayan altcümlelerini belirtecektir. Bu kesimde amaç; X ve Y üzerinde tanımlı tüm kompleks değerli analitik fonksiyonların H(X) ve H(Y) halkalarının (cebirlerinin) izomorf olması durumunda, X ve Y nin konform eşdeğer olduğunu ispat etmektir. Eşdeğer bir ifadeyle, H(X) ve H(Y) nin cebirsel yapısı ile, X ve Y nin konform yapısı arasında bir bağıntı kurmaktır. Dolayısıyla bu kesim, birinci kesimin, Riemann yüzeylerine genişletilmesi probleminin bir çözümüdür.

Tanım 4. Bir $\phi: X \to S$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer her $p \in X$ için p nin bir U_p açık komşuluğu ve $U_p \cap X$ üzerinde ϕ ile çakışık olan bir $\psi_p: U_p \to S$ analitik fonksiyonu varsa, bu durumda ϕ fonksiyonuna <u>analitiktir</u> denir.

Bu tanım şu kabule eşdeğerdir : Bir, birtek $U \supset X$ açık cümlesi ve $\psi|X = \phi$ olacak biçimde bir $\psi: U \to S$ analitik fonksiyonu vardır [12] Minda; bu referansta $R = S = \mathbb{C}$ olduğu kabul edilmekle beraber metot şimdi ki duruma rahatlıkla genişletilebilir. Söz konusu referansta verilen lokal ve global analitik olma kavramları ve bu iki kavramın birbirlerine eşdeğer olduğunu gösteren bir lemma verelim.

Tanım 5. A, $\mathbb{C}$ nin herhangi bir altcümlesi ve $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda,

(i) Eğer bir $U \supset A$ açık cümlesi ve U üzerinde analitik olan bir F fonksiyonu varsa ve $F|A = f$ ise, bu durumda <u>f'ye A üzerinde analitiktir veya global analitiktir</u> denir.

(ii) Eğer her $a \in A$ için a'nın bir N_a komşuluğu ve a da analitik bir $F_a : N_a \to \mathbb{C}$ fonksiyonu varsa ve $N_a \cap A$ üzerinde F_a ve f eşit oluyorsa, bu durumda <u>f'ye A üzerinde lokal analitiktir</u> denir.

Eğer f, A üzerinde global analitik ise, bu durumda açık olarak f, A üzerinde lokal analitiktir. Gerçekten; f nin A üzerinde global analitik olduğunu varsayalım. Bu durumda bir $U \supset A$ açık cümlesi ve U da analitik olan öyle bir F fonksiyonu vardır ki, $F|A = f$ dir. U açık olduğundan her $a \in A$ için $V_a \subset U$ olacak biçimde a'nın bir V_a açık komşuluğu vardır. F, U üzerinde analitik olduğundan V_a üzerinde de analitiktir. Yani, V_a üzerinde bir $F_a : V_a \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır ve $F|V_a = F_a$ dır. Buradan

$$F|(V_a \cap A) = F_a|(V_a \cap A) = f|(V_a \cap A)$$

dır. Bu ise f nin $a \in A$ da analitik olduğunu göstermektedir. A nın her noktası için bu yazılabileceğinden f,A üzerinde lokal analitiktir.

Bunun karşıtının da doğru olduğu aşağıda ki lemma da verilmektedir.

LEMMA 1. $A \subset \mathbb{C}$ ve $f:A \to \mathbb{C}$ olsun. Eğer f, A üzerinde lokal analitik ise bu durumda f, A üzerinde global analitiktir [12] Minda.

Sonuç olarak; $A \subset \mathbb{C}$ ve $f: A \to \mathbb{C}$ olması durumunda f'nin A üzerinde lokal analitik olması için gerek ve yeter koşul, f'nin A üzerinde global analitik olmasıdır.

Burada, eğer S açık Riemann yüzeyi üzerindeki herhangi bir ψ_i lokal koordinatı için $\overline{\psi_i \circ \phi} : X \to \mathbb{C}$ analitik ise bu durumda $\phi : X \to S$ fonksiyonuna anti-analitik denilecek ve dolayısıyla $\phi(X) \subset Y$ olmak üzere $\phi : X \to S$ analitik fonksiyonlarının cümlesi $A(X,Y)$ ile gösterilecektir. Yani

$$A(X,Y) = \{\phi \mid \phi : X \to S \text{ analitik ve } \phi(X) \subset Y\}$$

dır. $\phi(X) \subset Y$ olmak üzere $\phi : X \to S$ anti-analitik fonksiyonlarının cümlesi ise $A^{\star}(X,Y)$ ile gösterilecektir. Yani,

$$A^{\star}(X,Y) = \{\phi \mid \phi : X \to S \text{ anti-analitik ve } \phi(X) \subset Y\}$$

dir.

$Y = S = \mathbb{C}$ olması durumunda $A(X,\mathbb{C})$ ye ait bir fonksiyona holomorfik fonksiyon denilecek ve $A(X,\mathbb{C}) = H(X)$ olarak yazılacaktır.

Bundan böyle $A(X,Y)$'ye ait bir fonksiyona analitik fonksiyon, $A(X,\mathbb{C}) = H(X)$'e ait bir fonksiyona holomorfik fonksiyon denilecektir.

Eğer $\mathbb{P}$ genişletilmiş kompleks düzlem veya Riemann küresi ise, $Y = S = \mathbb{P}$ olması durumunda $A(X,\mathbb{P})$ ye ait her fonksiyona meromorfik fonksiyon denilecek ve $M(X) = A(X,\mathbb{P})$ olarak yazılacaktır.

Bu kesimde, çeşitli tipten $\Phi : H(X) \to H(Y)$ halka homomorfizmlerini inceleyeceğiz. Dikkat edilecek olursa, eğer $\phi \in A(Y,X)$ ise, bu durumda $\phi^{\star}(f) = f \circ \phi$, $H(X)$ ten $H(Y)$ içine bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi tanımlar. Elde edeceğimiz ilk sonuç; eğer Φ bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi ise, bu durumda bir $\phi \in A(Y,X)$ için $\Phi = \phi^{*}$ olduğudur. Bu elde edilen sonuç, düzlemsel bölgeler için [4] Bers, açık Riemann yüzeyleri için [19] Royden, Riemann küresinin maksimal bölgeleri ve sınırlı analitik fonksiyonlar için [21] Rudin tarafından ele alınmıştır. Burada amaç, bu çalışmaların ve Teorem 1'in bir genişletmesini vermektir.

Problemin geriye kalan kısmının stratejisi, gözönüne alınan diğer tipten homomorfizmlerin, yukarıda sözü geçen iki çeşit homomorfizme indirgenebileceğini göstermekten ibarettir. Örneğin, eğer Φ bir $\mathbb{R}$-cebir homomorfizmi ise, bu durumda göstereceğiz ki Φ, bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi ve bir $\mathbb{C}$-cebir konjüge homomorfizminin (Tanım 6) toplamı olarak birtek şekilde yazılabilir. Başka bir örnek olarak, Y nin her bileşeninin birden fazla nokta içermesi durumunda, belirli uygun koşulları sağlayan bir Φ halka homomorfizmi ya bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmidir veya $\mathbb{C}$-cebir konjüge homomorfizmidir. Bu ise [4] Bers, [11] Kra ve [13] Nakai'nin sonuçlarının bir genelleştirmesidir.

Son olarak, eğer X ve Y irtibatlı ve birden çok nokta içeriyorlarsa, bu durumda $\mathbb{C}$ nin bir otomorfizmini ortaya çıkaran her $\Phi: M(X) \to M(Y)$ cisim homomorfizmi, $A(Y,X)$ veya $A^{*}(Y,X)$ in bir elemanı olarak tanımlanır. Bu teorem [8] Iss'sa ve [11] Kra'nın çalışmalarına aittir. Burada bu teorem, Iss'sa'nın teoremini genelleştirerek, M(X) üzerinde ki her diskre valuasyonun* esas olarak bir nokta valuasyonu olduğunu gös-

* : *Valuasyon, diskre valuasyon, nokta valuasyonu kavramları bu çalışmada kullanılmamakta olup, bunlar için [8] Iss'sa ve [10] Kelleher referans olarak verilebilir. Açık probleme ışık tutması açısından burada söz edilmektedir.*

tererek elde edilmiştir. Bu çalışmada [4] Bers, [8] Iss'sa, [11] Kra, [13] Nakai ve [19] Royden'in yöntemleri kullanılmıştır.

İlk olarak, H(X) ten $\mathbb{C}$ üzerine $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmlerini ele alalım.

Bilindiği gibi, $\pi : H(X) \to \mathbb{C}$ homomorfizminin çekirdeği çek $(\pi) = \{f \in H(X) : \pi(f) = 0\}$ olarak tanımlanır. Herhangi bir $p \in X$ noktası için, $I_p(X) = \{f \in H(X) : f(p) = 0\}$ diyelim ve $\pi_p(f) = f(p)$ olacak biçimde $\pi_p : H(X) \to \mathbb{C}$ yi tanımlayalım. Açık olarak π_p, H(X) ten $\mathbb{C}$ üzerine bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi olup, bunun çekirdeği $I_p(X)$ dir ve $I_p(X)$, H(X) de bir ideal olmak zorundadır. Dolayısıyla $\mathbb{C}$ bir cisim ve $H(X)/I_p(X)$, $\mathbb{C}$ ye izomorf olduğundan $I_p(X)$, H(X) de bir maksimal idealdir. H(X) ten $\mathbb{C}$ üzerine bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizminin bu tipten olduğu elde edilecek bir diğer sonuçtur. Bu gerçek X = R olması halinde ilk defa [19] Royden tarafından ele alınmıştır.

TEOREM 4. R herhangi bir açık Riemann yüzeyi ve X, R nin boş olmayan bir altcümlesi olsun. Eğer $\pi : H(X) \to \mathbb{C}$ üzerine bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi ise, bu durumda $\pi = \pi_p$ olacak biçimde birtek $p \in X$ noktası vardır.

İSPAT. $I = $ çek(π) olsun. $\mathbb{C}$ bir cisim ve $H(X)/I$, $\mathbb{C}$ ye izomorf olduğundan I nin H(X) te bir maksimal ideal olduğu açıktır. Önce $I = I_p(X)$ olacak biçimde bir $p \in X$ noktasının varlığını göstereceğiz. $\tilde{\pi}(f) = \pi(f|X)$ olmak üzere, $\tilde{\pi} : H(R) \to \mathbb{C}$ yi tanımlayalım. Bu durumda $\tilde{\pi}$, H(R) den $\mathbb{C}$ üzerine bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi olup, her $f \in H(R)$ için $\tilde{\pi}(f) = f(p)$

olacak şekilde bir tek $p \in R$ noktasının varlığını [19] Royden'in sonucu garantiler. $\tilde{\pi}$ nın tanımı gereği, p noktası X'e ait olmak zorundadır. $f_p \in H(R)$, p de bir basit sıfırı olan ve R de başka hiç bir sıfırı bulunmayan bir fonksiyon olsun. Bu f_p nin varlığı, [5] Florack'ın bir teoreminden dolayı garanti edilmiştir. Bu durumda $\pi(f_p|X)(p) = 0$ olup, dolayısıyla, $f_p|X \in I$ dir. Eğer $p \notin X$ ise, bu durumda f_p, $H(X)$ halkasında birim olur ki, bu da $I = H(X)$ çelişkisini verir.

Sonuç olarak, $p \in X$ ise $I_p(X) \subset I$ dir. Çünkü $f \in I_p(X)$ ise $(f/f_p) \in H(X)$ dir. Buradan $I = I_p(X)$ elde edilir. Çünkü bu ideallerin her ikisi de maksimal ideallerdir. Böylece $\pi = \pi_p$ dir.

Eğer $f \in H(X)$ ise, bu durumda $(f-\pi(f)).\underline{1} \in I = I_p(X)$ olup, $f(p) = \pi(f)$ dir. H(X), X in noktalarını ayırdığından $p \in X$ noktası birtektir.

Şimdi, <u>H(X) den H(Y) içine $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmleri</u> ile ilgili önemli sonuçlar elde edeceğiz.

Eğer $\phi \in A(Y,X)$ ise, bu durumda $\phi^*(f) = f \circ \phi$ şeklinde tanımlanan $\phi^*: H(X) \to H(Y)$ dönüşümünün bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi olduğu açıkça görülür.

$X = R$ ve $Y = S$ olması durumunda, bunun gibi her $\mathbb{C}$-cebir homomorfizminin bu biçimde elde edilebileceği [19] Royden tarafından gösterilmiştir.

X ve Y nin $\mathbb{C}$ nin altcümleleri olması durumunda ise, benzer sonuç Teorem 3'te elde edilmiştir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 1'i açık Riemann yüzeylerinin herhangi altcümlelerine genişletmekle beraber [19] Royden'in sonucunu da bir özel durum olarak içermektedir.

TEOREM 5. Eğer $\Phi:H(X) \to H(Y)$ bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi ise, bu durumda $\Phi = \phi^{*}$ olacak biçimde bir birtek $\phi \in A(Y,X)$ fonksiyonu vardır.

İSPAT. İlk olarak, bir $\phi: Y \to X$ fonksiyonunu inşa edelim. Her $q \in Y$ için $\tau_q(f) = \Phi(f)(q)$ şeklinde tanımlanan $\tau_q: H(X) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi olup, Teorem 4'ten dolayı $\tau_q = \pi_p$ olacak biçimde birtek $p \in X$ noktası vardır. $\phi(q) = p$ diyelim, bu durumda herhangi $f \in H(X)$ için $f \circ \phi(q) = \pi_p(f) = (\Phi f)(q)$ veya $f \circ \phi = \Phi f$ bulunur. Geriye $\phi \in A(Y,X)$ ve ϕ nin birtek olduğunu göstermek kalıyor.

ϕ nin sürekliliğini göstermek için eğer $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi noktaları Y de olan bir dizi ve $q_n \to q$ ise, bu durumda $\phi(q_n) \to \phi(q)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böyle olmadığını kabul edelim. Bu durumda ya $\phi(q_n) \to p' \neq p = \phi(q)$ olacak biçimde, yine $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilen bir altdizi seçebiliriz veya $(\phi(q_n))_{n=1}^{\infty}$ un R de hiçbir limit noktası olmayacak şekilde bir altdizisini alabiliriz.

Birinci halde, $f \in H(R)$, p de O ve p' de 1 olsun [5] Florack. Bu durumda,

$$1 = f(p') = \lim_{n \to \infty} f(\phi(q_n)) = \lim_{n \to \infty} \Phi(f|X)(q_n) = \Phi(f|X)(q)$$

$$= f(\phi(q)) = f(p) = 0$$

dır. Bu ise çelişkidir.

İkinci halde, $f \in H(R)$, $\phi(q_n)$ in her noktasında 1 ve p de O olsun [5] Florack. Bu durumda da aynı çelişki ortaya çıkar.

O halde ϕ sürekli olmak zorundadır.

Bu noktada $\phi \in A(Y,X)$ olduğunu gösterebiliriz. $q \in Y$ olsun. $p = \phi(q)$ nun bir komşuluğunda ünivalent olarak biçimde bir $f \in H(R)$ vardır; örneğin herhangi bir $f \in H(R)$ yi p de bir basit sıfırı olacak şekilde alabiliriz. p nin bir U açık komşuluğunda f nin ünivalent olduğunu kabul edelim. ϕ, q da sürekli olduğundan q nun bir V açık komşuluğu için $\phi(V \cap Y) \subset U$ dur. $\Phi(f|X) = (f|X) \circ \phi$ olması gerçeği,

$$\phi|(V \cap Y) = (f|(U \cap X))^{-1} \circ \Phi(f|X)|(V \cap Y)$$

olmasını gerektirir.

$\Phi(f|X) \in H(Y)$ olduğu için q nun bir açık komşuluğunda holomorfik olan öyle bir g fonksiyonu vardır ki, q nun komşuluğunda ki Y nin tüm noktalarında g ve $\Phi(f|X)$ çakışıktır. Bu durumda $\psi = (f|U)^{-1} \circ g$ dersek, ψ, q nun bir komşuluğundan p nin bir komşuluğu içine bir analitik dönüşüm olup, q nun yeteri kadar küçük bir komşuluğunda ki, Y nin tüm noktaları için ψ ve ϕ aynıdır. Yani $\phi \in A(Y,X)$ dir.

ϕ bir tektir. Her $f \in H(X)$ için $\psi \in A(Y,X)$ ve $f \circ \psi = \Phi(f) = f \circ \phi$ olduğunu varsayalım. Eğer $\psi \neq \phi$ ise, bir $q \in Y$ için $\psi(q) \neq \phi(q)$ olup, $H(X)$, X in noktalarını ayırdığından $f(\psi(q)) \neq f(\phi(q))$ olacak biçimde bir $f \in H(X)$ vardır. Fakat $f(\psi(q)) = (\Phi f)(q) = f(\phi(q))$ olduğu için bu olamaz. O halde ϕ birtektir.

Tanım 6. Eğer $\phi \in A^*(Y,X)$ ise, bu durumda $\phi^*(f) = \overline{f \circ \phi}$, $H(X)$ ten $H(Y)$ içine bir halka homomorfizmi herhangi bir z kompleks sayısı için $\phi^*(z) = \bar{z}$ özelliğine sahiptir. Böyle bir homomorfizme <u>$\mathbb{C}$-cebir konjüge homomorfizmi</u> denir.

TEOREM 6. X ve Y, sırası ile, R ve S açık Riemann düzeylerinin boş olmayan altcümleleri ve $\Phi : H(X) \to H(Y)$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda, ya

(i) Φ bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmidir, $\Phi(f) = f \circ \phi$ olacak biçimde birtek $\phi \in A(Y,X)$ vardır.

veya

(ii) Φ bir $\mathbb{C}$-cebir konjüge homomorfizmidir, $\Phi(f) = \overline{f \circ \phi}$ olacak biçimde birtek $\phi \in A^{\star}(Y,X)$ vardır.

İSPAT . Esas olarak ispat, Teorem 5'in aynıdır, tek fark, (ii) için burada τ_q, $\tau_q(f) = \overline{\Phi(f)(q)}$ olarak tanımlanır ve bu durumda anti-analitik olan bir $\phi : Y \to X$ fonksiyonu elde edilir. Bundan dolayı ispatın tüm detayları verilmemiştir.

Şimdi <u>H(X) den H(Y) içine $\mathbb{R}$-cebir hormomofirmlerini</u> inceleyeceğiz. Burada ki inceleme Teorem 2'in açık Riemann yüzeylerinin altcümlelerine bir genişletmesi olup, $\Phi : H(X) \to H(Y)$ nin bir $\mathbb{R}$-cebir homomofizm olduğu kabul edilecektir. Bu durumda $\Phi(\underline{i})^2 = \Phi(\underline{i})\Phi(\underline{i}) = \Phi(\underline{i}^2) = \Phi(-\underline{1}) = -\underline{1}$ olduğundan bir $q \in Y$ noktası için ya $\Phi(i)(q) = i$ veya $\Phi(i)(q) = -i$ dir.
$Y_1 = \{q \in Y : \Phi(i)(q) = i\}$, $Y_2 = \{q \in Y : \Phi(i)(q) = -i\}$ diyelim. Bu durumda $Y = Y_1 \cup Y_2$, Y nin iki ayrık cümleye parçalanması olup, Y_1 ve Y_2 nin her ikisi de açık ve kapalı cümleledir. Şimdi, $H_0(Y_1) = \{g \in H(Y) : g|Y_2 \equiv 0\}$ ve $H_0(Y_2) = \{g \in H(Y) : g|Y_1 \equiv 0\}$ olsun. Açık olarak, $H_0(Y_j)$ yi $H(Y_j)$ ile belirleyebiliriz, $(j = 1,2)$ ve $H(Y) = H_0(Y_1) \oplus H_0(Y_2)$ dir.

π_j, H(Y) den $H(Y_j)$ üzerine bir tabii projeksiyon ve Σ_j,

$H(Y_j)$ den $H_0(Y_j) \subset H(Y)$ üzerine bir kanonik injeksiyon olsun. $\Phi_j = \pi_j \circ \Phi$ dersek, bu durumda $\Phi_1 : H(X) \to H(Y_1)$ bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi ve $\Phi_2 : H(X) \to H(Y_2)$ bir $\mathbb{C}$-cebir konjüge homomorfizmi olup, üstelik,

$$\Phi = \Sigma_1 \circ \Phi_1 + \Sigma_2 \circ \Phi_2 \quad \text{dir.}$$

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz :

TEOREM 7. X ve Y, sırası ile, R ve S açık Riemann yüzeylerinin boş olmayan altcümleleri olsun. $\Phi : H(X) \to H(Y)$ nin bir $\mathbb{R}$-cebir homomorfizmi olduğunu kabul edelim. Bu durumda Y nin kapaçık (aynı zamanda kapalı ve açık) cümlelere öyle birtek $Y = Y_1 \cup Y_2$ parçalanması vardır ki, eğer; $\pi_j : H(Y) \to H(Y_j)$ tabii projeksiyon ve $\Sigma_j : H(Y_j) \to H_0(Y_j)$ kanonik injeksiyon ise, bu durumda $\Phi_1 = \pi_1 \circ \Phi : H(X) \to H(Y_1)$ bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi, $\Phi_2 = \pi_2 \circ \Phi : H(X) \to H(Y_2)$ bir $\mathbb{C}$-cebir konjüge homomorfizmidir ve $\Phi = \Sigma_1 \circ \Phi_1 + \Sigma_2 \circ \Phi_2$ dir.

Parçalanmanın birtek olması dışında teoremin tüm kısımlarını ispat ettik. Şimdi birtek olduğunu gösterelim: $Y = Y_1' \cup Y_2'$, Y nin kapaçık cümlelere bir başka parçalanması ve π_j', Σ_j', Φ_j' dönüşümlerinin de yardımcı dönüşümler olduğunu kabul edelim. Eğer $\Phi(i)$'nin Y_1' üzerinde i, Y_2' üzerinde $-i$ olduğunu gösterirsek Y_1 ve Y_2 cümlelerinin tanımı gereği $Y_1 = Y_1'$, $Y_2 = Y_2'$ olur. Buna göre,

$$\Phi(i) = \Sigma_1'(\Phi_1'(i)) + \Sigma_2'(\Phi_2'(i)) = \Sigma_1'(i|Y_1') + \Sigma_2'(-i|Y_2')$$

olup, bu ise $\Phi(i)|Y_1' = i$, $\Phi(i)|Y_2' = -i$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $Y_1 = Y_1'$ ve $Y_2 = Y_2'$ dır.

Son olarak, <u>H(X) ten H(Y) içine halka homomorfizmleri</u> ile ilgili sonuçları elde edeceğiz.

Birinci kesimde verilen uyarıda, Teorem 6'da verilen $\Phi:H(X) \to H(Y)$ dönüşümünün bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi veya $\mathbb{C}$-cebir konjüge homomorfizmi olması hipotezinin Φ nin sadece bir halka homomorfizmi olması varsayım ile değiştirilemeyeceği bir örnekle gösterilmiştir. Söz konusu örnek, özdeş ve kompleks konjügasyondan farklı $\mathbb{C}$ nin bir çok otomorfizmi bulunması gerçeğine bağlıdır. Fakat [4] Bers ve [13] Nakai göstermişlerdir ki, H(R) den H(S) üzerine her halka izomorfizmi sabit fonksiyonların $\mathbb{C}$-cismine kısıtlandığında ya bir özdeş fonksiyondur veya kompleks konjügasyondur. Bu gerçeğin H(R) den H(S) içine halka homomorfizmlerinin geniş bir sınıfı için doğruluğu [11] Kra tarafından gösterilmiştir.

Burada, Kra'nın teoreminin bir genelleştirmesi yapılacaktır. Bers-Nakai teoremi basit bir sonuç olarak elde edilebilir.

TEOREM 8. X ve Y, sırası ile R ve S açık Riemann yüzeylerinin boş olmayan altcümleleri olsun. Y nin her bileşeninin birden fazla nokta içerdiğini kabul edelim. $\Phi:H(X) \to H(Y)$ dönüşümü; Φ, $\mathbb{C}$-sabitler cismine kısıtlandığında $\mathbb{C}$ nin bir otomorfizmi olacak biçimde bir halka homomorfizmi olsun ve Φ nin resmi, Y nin bir bileşeni üzerinde sabit olmayan en az bir fonksiyon içersin. Bu durumda Φ ya bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmidir veya bir $\mathbb{C}$-cebir konjüge homomorfizmidir.

İSPAT. θ, Φ yardımı ile elde edilen, $\mathbb{C}$ nin otomorfizmi olsun. Amacımız için θ nın $\mathbb{C}$ üzerinde ya özdeş fonksiyon veya kompleks konjügasyon olduğunu göstermek yeterlidir.

Her $q \in Y$ noktası için $\tau_q(f) = \theta^{-1}((\Phi f)(q))$ dönüşümü $H(X)$ ten $\mathbb{C}$ üzerine bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmidir. O halde Teorem 4'den dolayı $\tau_q = \tau_p$ olacak biçimde birtek $p \in X$ noktası vardır. $\phi : Y \to X$ fonksiyonunun $\phi(q) = p$ olarak tanımlayalım. Bu durumda her $f \in H(X)$ için, τ_q ve θ nın seçimi gereği, $\tau_q(f) = \theta^{-1}(\Phi(f))(q) = (f \circ \phi)(q)$ bulunur. Bu eşitlik her $q \in Y$ için doğru olduğundan $\theta^{-1}(\Phi(f)) = f \circ \phi$ olup, $\Phi(f) = \theta \circ f \circ \phi$ elde edilir.

Burada ϕ nin sürekliliğini gösterelim. Bunun için, önce eğer $(q_n)_{n=1}^{\infty}$, Y de bulunan bir noktaya yakınsak olan, Y nin farklı noktalarının herhangi bir dizisi ise, bu durumda $p_n = \phi(q_n)$ noktalarının tümünün R nin bir kompakt altcümlesi içinde ve bu cümlenin $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisine bağlı olduğu gösterilecektir. Eğer bu doğru olmasaydı, bu durumda $(q_n)_{n=1}^{\infty}$, $q_n \to q \in Y$ olacak biçimde Y nin farklı noktalarından oluşan bir dizi olacaktı ve $(p_n) = \phi(q_n)$, R nin bir ideal sınırına yakınsayacaktı. Burada, $m \neq n$ olması halinde $p_m \neq p_n$ kabul edebeliriz. $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin R de hiçbir limit noktası olmadığı için, $f(p_n) = n$ olacak biçimde bir $f \in H(R)$ fonksiyonu vardır [5] Florack. θ tüm rasyonel sayıları sabit bıraktığından, $n = f(p_n) = \theta \circ f \circ \phi(q_n) = \Phi(f|X)(q_n)$ elde edilir. $n \to \infty$ için $\Phi(f|X)(q_n) \to \Phi(f|X)(q)$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Şimdi ϕ nin sürekliliğini gösterebiliriz. θ, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismini sabit bırakacağından ya $\theta(i) = i$ veya $\theta(i) = -i$ dir. Bu durumda θ nın ya $\mathbb{Q}[i]$ üzerinde özdeş fonksiyon veya $\mathbb{Q}[i]$ üzerinde kompleks konjügasyon olduğu açıktır. Burada $\mathbb{Q}[i]$ rasyonel sayılar cismine i eklenmesiyle elde edilen cümleyi ifade etmektedir. Burada θ nın $\mathbb{Q}[i]$ üzerinde özdeş fonksiyon olduğunu kabul edelim. θ nın $\mathbb{Q}[i]$ üzerinde kompleks konjügasyon olma durumu benzer şekilde yorumlanabilir.

Eğer ϕ sürekli olmasaydı, bu durumda bir $q \in Y$ noktası için $q_n \to q$ olacak biçimde Y nin farklı noktalarından oluşan bir $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi bulunacaktı, öyle ki $p_n = \phi(q_n)$, $p = \phi(q)$ ya yakınsamayacaktı. p_n noktalarının tamamı R nin sabit bir kompakt altcümlesine ait olduklarından $p' \neq p$ olmak üzere $p_n \to p' \in R$ varsayabiliriz. Burada gözönüne alınması gereken iki durum vardır; önce her n için $p_n = p'$ olduğunu kabul edelim. $f(p) = 0$ ve $f(p') = 1$ olacak biçimde $f \in H(R)$ yi seçelim [5] Florack. Bu durumda,

$$1 = f(p') = \lim_{n\to\infty} f(p_n) = \lim_{n\to\infty} \theta \circ f \circ \phi(q_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f|X)(q_n)$$

$$= \Phi(f|X)(q) = \theta \circ f \circ \phi\ (q) = f(p) = 0$$

çelişkisi elde edilir. Ele alınması gereken ikinci durum ise, her n için $p_n \neq p'$ ve eğer $m \neq n$ ise, $p_m \neq p_n$ olması halidir. $0 = f(p)$, $1 = f(p')$ ve her n için $f(p_n) \in \mathbb{Q}[i]$ olacak biçimde bir $f \in H(R)$ fonksiyonu vardır [7] Heins (sf:202-203). Burada da bir önceki durumda olduğu gibi aynı çelişkiyi elde ederiz. Sonuç olarak, $\phi : Y \to X$ süreklidir.

Son olarak, θ nın özdeş fonksiyon veya kompleks konjügasyon olduğunu göstereceğiz. $\phi : Y \to X$ sürekli ise, $\Phi f = \theta \circ f \circ \phi$ olduğu gösterilmiş bulunmaktadır. Φf, Y nin bir Y_0 bileşeni üzerinde sabit olmayacak biçimde bir $f \in H(X)$ in varlığını kabul edelim. ϕ sürekli olduğundan $X_0 = \phi(Y_0)$, X in bir irtibatlı altcümlesidir. $\phi|Y_0$ fonksiyonu sabit değildir. Aksi halde $(\Phi f)|Y_0 = \theta \circ f \circ (\phi|Y_0)$ sabit olur. O halde X_0, X de irtibatlı bir cümle olup, birden fazla nokta içerir. $p_n \to p \in X_0$

olacak şekilde, X_0 in farklı noktalarından oluşan bir dizi $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ olsun. Hatta kabul edebiliriz ki, $q_n \to q \in Y_0$ ve $p_n = \phi(q_n)$ olacak biçimde Y_0ın farklı noktalarından oluşan bir $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır.

Herhangi bir z kompleks sayısı verilmiş olsun. $f(p) = z$ ve her n için $f(p_n) \in \mathbb{Q}[i]$ olacak şekilde bir $f \in H(R)$ fonksiyonu vardır [7] Heins (sf : 202-203). $\theta(i) = i$ ise, bu durumda,

$$\theta(z) = \theta(f(p)) = \Phi(f|X)(q) = \lim_{n \to \infty} \Phi(f|X)(q_n) = \lim_{n \to \infty} \theta(f(p_n))$$

$$= \lim_{n \to \infty} f(p_n) = f(p) = z$$

elde edilir. Burada eğer $\theta(i) = i$ ise θ özdeş fonksiyondur. $\theta(i) = -i$ ise, θ nın kompleks konjügasyon olduğu görülür.

BÖLÜM II

Bu bölümde, $H(Y)$ nin izomorf görüntüleri olan $H(X)$ in $\mathcal{R}$ öz althalkaları üzerinde durulacaktır. Burada Y, S açık Riemann yüzeyinin boş olmayan herhangi bir altcümlesi ve $H(Y)$, Y üzerinde tanımlı tüm holomorfik fonksiyonların halkası olup, söz konusu izomorfizm ise, $\mathbb{C}$-cebir izomorfizmidir.

Bu bölümde, X ve Y sırası ile, R ve S açık Riemann yüzeylerinin boş olmayan herhangi altcümleleri olup, bu durum tekrar edilmeyecektir.

$\phi \in A(X,Y)$ olması durumunda, bir $g \in H(Y)$ için $\Phi(g) = g \circ \phi$ olarak tanımlanan $H(Y)$ den $H(X)$ e bir Φ $\mathbb{C}$-homomorfizminin varlığı bölüm I'den bilinmektedir. O halde Φ altında $H(Y)$ nin görüntüsü olan $R_\phi = \Phi(H(Y))$, $H(X)$ in bir althalkasıdır.

Eğer Φ, $H(Y)$ den $H(X)$'e bir $\mathbb{C}$-homomorfizmi ise, $g \in H(Y)$ için $\Phi(g) = g \circ \phi$ olacak biçimde birtek $\phi \in A(X,Y)$ vardır [Teorem 5]. Ayrıca eğer Φ, $H(Y)$ den $H(X)$ üzerine bir $\mathbb{C}$-izomorfizmi ise, bu durumda ϕ nin X ten Y üzerine bir bire-bir analitik dönüşüm olduğu bölüm I'den bilinmektedir. Dolayısıyla $H(X)$ in bir $\mathcal{R}$ althalkasının $\mathbb{C}$-homomorfizmi altında bir $H(Y)$ halkasının homomorf görüntüsü olması için gerek ve yeter koşul,

$$\mathcal{R} = R_\phi = \{g \circ \phi \;:\; \phi \in A(X,Y),\; g \in H(Y)\}$$

olmasıdır. Φ bir $\mathbb{C}$-homomorfizmi ve $\mathbb{C} \subseteq H(Y)$ olduğundan R_ϕ, C ile gösterilen tüm sabit fonksiyonlar cümlesini kapsar.

Aşağıda Φ, ϕ ve R_ϕ arasındaki bağıntıları veren bir teorem verelim.

TEOREM 9. $\phi \in A(X,Y)$ olsun. Eğer $\Phi(g) = g \circ \phi$ olarak tanımlanan $\Phi : H(Y) \to H(X)$ dönüşümü için $\Phi(H(Y)) = R_\phi$ ise, bu durumda aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir:

(i) R_ϕ, sabit fonksiyonların C cümlesini öz olarak kapsar.

(ii) ϕ sabit fonksiyon değildir.

(iii) $H(Y)$, R_ϕ ye izomorftur.

İSPAT. Önce (i) $\Rightarrow$ (ii) olduğunu gösterelim. Yani $C \subsetneq R_\phi$ ise, bu durumda ϕ nin sabit olmadığını göstereceğiz. Aksine $\phi(X) = \{c\}$ ise, $g \in H(Y)$ için $\Phi(g) = g \circ \phi = g(c)$ olup, dolayısıyla $R_\phi = \Phi(H(Y)) = C$ bulunur. Bu ise kabulümüze aykırıdır. O halde R_ϕ, C yi öz olarak kapsıyorsa, ϕ bir sabit fonksiyon olamaz.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) olduğnu gösterelim: $\phi \in A(X,Y)$ fonksiyonu sabit olmasın. Bu durumda $\phi(X) \subset Y \subset S$ olup, $\phi(X)$ ve Y yi kapsayacak şekilde S de bir U açığı alabiliriz. U da holomorfik F ve G fonksiyonlarını seçersek, $f = F|\phi(X)$ ve $g = G|\phi(X)$ fonksiyonları $\phi(X)$ de holomorfik H(Y) ye ait iki fonksiyondur. $\Phi(f) - \Phi(g) = \Phi(f-g) = (f-g) \circ \phi$ olup, $f-g$, $\phi(X)$ üzerinde holomorfiktir. Eğer $\Phi(f) = \Phi(g)$ varsayarsak, $f = g$ olduğu görülür. Böylece, Φ bir bire-bir homomorfizmdir. Ayrıca $\Phi(H(Y)) = R_\phi$ olduğundan R_ϕ ve H(Y) izomorftur.

Son olarak, (iii) $\Rightarrow$ (i) olduğunu gösterelim: R_ϕ, H(Y) ye izomorf olsun. Bu durumda H(Y) sabit olmayan bir g fonksiyonu içerdiğinden [11] Kra $R_\phi \neq C$ dir. Çünkü bir c sabit fonksiyonu için $\Phi(g) = c$ olsaydı, bu durumda $\Phi^{-1}(c) = \{c, g\}$ olurdu, bu ise Φ nin bire-bir olmasına aykırıdır. O halde

R_ϕ, H(Y) ye izomorf ise, bu durumda R_ϕ, C yi öz olarak kapsar.

Sonuç olarak, H(X) in herhangi bir $\mathcal{R}$ althalkasının H(Y) ye $\mathbb{C}$-izomorf olması için gerek ve yeter koşul, $\mathcal{R} = \{g \circ \phi : g \in H(Y),\ \phi$, X ten Y içine analitik dönüşüm$\}$ olması $\mathcal{R}$ nin X üzerindeki sabit fonksiyonların C cümlesini öz olarak kapsamasıdır.

I. bölümden, ϕ, X ten Y üzerine bir bire-bir analitik dönüşüm ise, bu durumda Φ nin H(Y) den H(X) üzerine bir izomorfizm olduğu bilinmektedir. Yani, ϕ, X ten Y üzerine bire-bir analitik bir dönüşüm ve Φ, $g \in H(Y)$ için $\Phi(g) = g \circ \phi$ olacak biçimde H(Y) den H(X) e bir dönüşüm ise, $\Phi(H(Y)) = H(X)$ tir. Böylece $\Phi(H(Y)) = R_\phi$ nin H(X) in bir öz althalkası olması durumunda, ϕ hem bire-bir hem üzerine olamaz, ya bunlardan biridir veya hiçbiri değildir.

TEOREM 10. ϕ, X ten Y içine bire-bir analitik bir dönüşüm, λ, X ten Y içine sabit ve bire-bir olmayan bir analitik dönüşüm, $g \in H(Y)$ için, $\Phi(g) = g \circ \phi$, $\Lambda(g) = g \circ \lambda$ ve $\Phi(H(Y)) = R_\phi$, $\Lambda(H(Y)) = R_\lambda$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda R_ϕ ve R_λ izomorfturlar fakat $R_\phi \neq R_\lambda$ dır.

İSPAT . Φ ve Λ sıras ile, H(Y) den R_ϕ ve R_λ ya izomorfizmler olduğundan $\Lambda \circ \Phi^{-1}$ de R_ϕ den R_λ ya izomorfizmdir. O halde $R_\phi \neq R_\lambda$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım, $R_\phi = R_\lambda$ olsun. Bu durumda bir $g \in H(Y)$ ve $z \in X$ için $(g \circ \phi)(z) = (h \circ \lambda)(z)$ olacak biçimde bir $h \in H(Y)$ vardır. ϕ bire-bir ve λ bire-bir olmadığından $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in X$ için $\phi(z_1) \neq \phi(z_2)$, $\lambda(z_1) = \lambda(z_2)$ dır. Ayrıca H(Y), Y nin noktalarını ayırdığından bir $g \in H(Y)$ için $(g \circ \phi)(z_1) \neq (g \circ \phi)(z_2)$ dir. Fakat $(g \circ \phi)(z_1) = (h \circ \lambda)(z_1) = (h \circ \lambda)(z_2) = (g \circ \phi)(z_2)$ dır. Bu çelişki ispatı tamamlar. Yani $R_\phi \neq R_\lambda$ dır.

Bir X cümlesi üzerindeki bir A fonksiyon cebirinin sahip olduğu aşağıdaki (α), (β), (γ) özellikleri [18] Royden tarafından verilmiştir. Buna göre Y'nin S açık Riemann yüzeyinin boş olmayan bir altcümlesi olması durumunda $H(Y)$ holomorfik fonksiyonlar cebiri aşağıdaki üç özelliği sağlar.

(α) $f \in H(Y)$ ve her $z \in Y$ için $f(z) \neq 0$ ise $1/f \in H(Y)$ dır.

(β) $H(Y)$ nin $f_1,\ldots,f_n$ elemanlarının ortak sıfırı yoksa, bu durumda $f_1e_1 + \ldots + f_ne_n = 1$ olacak biçimde $H(Y)$ de $e_1,\ldots,e_n$ fonksiyonları vardır.

(γ) Eğer $f \in H(Y)$ ve $f \not\equiv 0$ ise, bu durumda $H(Y)$ de öyle bir $\{f_1,\ldots, f_n\}$ fonksiyon dizisi vardır ki, $x \neq y$ ve $f(x) = f(y) = 0$ için $f_i(x) \neq f_i(y)$ $(i = 1,\ldots,n)$ dır. Yani $i = 1,\ldots,n$ için f_i ler f nin sıfırlarını ayırır.

Bu kısımda R_ϕ nin (α), (β), (γ) özelliklerini hangi koşullar altında sağlayacağı incelenecektir.

TEOREM 11. R_ϕ nin C yi öz olarak kapsadığını kabul edelim. Bu durumda R_ϕ nin (β) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul ϕ analitik dönüşümünün X ten Y üzerine olmasıdır.

İSPAT . Önce ϕ analitik dönüşümünün X ten Y üzerine olduğunu kabul edelim. Bu durumda R_ϕ nin (β) yı sağladığını gösterelim. $i = 1,\ldots,n$ için $f_i \in R_\phi$ olsun ve f_i lerin hiç bir ortak sıfırı bulunmasın. R_ϕ nin tanımından dolayı $i = 1,\ldots n$ için $h_i \in H(Y)$ olmak üzere $\Phi(h_i) = f_i$ dir. $a \in Y$ için $h_i(a) = 0$ olduğunu varsayalım. ϕ, X i Y üzerine dönüştürdüğünden $\phi(z) = a$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Bu durumda $i = 1,\ldots,n$ için $0 = h_i(a) = h_i(\phi(z)) = \Phi(h_i(z)) = f_i(z)$ olur ki, bu çelişki, h_i lerin $i = 1,\ldots,n$ için hiç bir ortak sıfırının bulunmadığını gösterir.

H(Y), (β) özelliğini sağladığından $h_1e_1 + \ldots + h_ne_n = 1$ olacak biçimde H(Y) de $e_1,\ldots,e_n$ fonksiyonları vardır. Φ bir homomorfizm ve $i = 1,\ldots,n$ için $\Phi(h_i) = f_i$ olduğundan, $f_1\Phi(e_1)+\ldots+f_n\Phi(e_n) = 1$ olacak biçimde R_ϕ de $\Phi(e_i)$ $(i = 1,\ldots,n)$ fonksiyonları bulunmuş olur. Dolayısıyla R_ϕ , (β) özelliğini sağlar.

Karşıt olarak, R_ϕ (β) özelliğine sahip olsun. Bu durumda R_ϕ, (α) özelliğinede sahiptir. Çünkü $n = 1$ için (β), (α) dır. O halde $R_\phi \neq C$ ve R_ϕ nın (α) özelliğine sahip olması halinde ϕ nın X ten Y üzerine olduğunu gösterelim.

Benzer işlemler, $R_\phi \neq C$ nin (β) yı sağlaması durumunda aynı sonucu verir.

a, Y ye ait bir eleman olsun. S açık Riemann yüzeyi üzerindeki bütün analitik fonksiyonların cebiri H(S) olmak üzere, $a \in S$ için, bir tek basit sıfır noktası a olan ve $S - \{a\}$ da sıfırdan farklı kalan bir $G \in H(S)$ fonksiyonu vardır [5] Florack. $G|Y = g$ dersek, $g(a) = 0$ ve $a \neq w$ için $g(w) \neq 0$ dır. $g \in H(Y)$ olduğundan $\Phi(g) \in R_\phi$ olup, bir $z \in X$ için $\Phi(g)(z) = g(\phi(z)) \neq 0$ ise, R_ϕ , (α) özelliğini sağladığından dolayı $\Phi(g).h = 1$ olacak biçimde bir $h \in R_\phi$ vardır. $h \in \Phi(H(Y))$ olduğundan dolayı

$h = \Phi(k)$ olacak biçimde bir $k \in H(Y)$ vardır. Yani $\Phi(g).\Phi(k)=1$ dır. Φ bir izomorfizm olduğundan $\Phi(gk) = 1$ olup, $gk = 1$ dir. Buradan da $g(a).k(a) = 1$ olduğu açıktır. Bu ise $g(a) = 0$ olmasına aykırıdır. O halde $z \in X$ için $g(\phi(z)) = 0$ olmalıdır. Bu ise $\phi(z) = a$ olduğunu verir. O halde ϕ, X ten Y üzerine bir dönüşümdür.

TEOREM 12. Eğer ϕ, X ten Y içine bir bire-bir dönüşüm ise, bu durumda R_ϕ, (γ) özelliğini sağlar.

İSPAT. $f \in R_\phi$ ve $f \not\equiv 0$ olsun. Bu durumda $\Phi(h) = f$ olacak biçimde bir $h \in H(Y)$ vardır. f nin seçiminden dolayı h, 0 sabit fonksiyonu olamaz. Bu nedenle $H(Y)$, (γ) özelliğine sahip olup, h ın sıfırlarını ayıracak şekilde $H(Y)$ de $h_1, \ldots, h_n$ fonksiyonları vardır. Şimdi $x \neq y$ için $f(x) = f(y) = 0$ olduğunu varsayalım. $f = \Phi(h) = h \circ \phi$ olduğundan $h(\phi(x)) = h(\phi(y)) = 0$ dır ve ϕ bire-bir olduğundan $\phi(x) \neq \phi(y)$ dır. O halde $H(Y)$ de bir h_i, $i = 1, \ldots, n$ fonksiyonu vardır öyleki $h_i(\phi(x)) \neq h_i(\phi(y))$ veya $\Phi(h_i)(x) \neq \Phi(h_i)(y)$ dir. Açık olarak, $\{\phi(h_i) : i = 1, \ldots, n\} \subseteq R_\phi$ olup, R_ϕ (γ) özelliğini sağlar.

TEOREM 13. R_ϕ nin X in noktalarını ayırması için gerek ve yeter koşul ϕ nın bire-bir olmasıdır.

İSPAT. Önce R_ϕ nin X in noktalarını ayırdığını kabul edelim. Bu durumda $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ olacak biçimde bir $f \in R_\phi$ vardır. O halde eğer $f = \Phi(g) = g \circ \phi$ ise, $g(\phi(x)) \neq g(\phi(y))$ dir. Eğer $x \neq y$ için $\phi(x) = \phi(y)$ ise, her $g \in H(Y)$ için $g(\phi(x)) = g(\phi(y))$ dir. Bu nedenle $\phi(x) \neq \phi(y)$ olmak zorundadır.

Dolayısıyla ϕ,X ten Y içine bir bire-bir dönüşümdür.

Karşıt olarak, ϕ, X ten Y içine bire-bir dönüşüm olsun. R_ϕ nin X in noktalarını ayırdığını gösterelim. Bunun için $x,y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda $\phi(x) \neq \phi(y)$ olup, $\phi(x), \phi(y) \in Y$ dir. H(Y), Y nin noktalarını ayırdığından bir $g \in H(Y)$ için $g(\phi(x)) \neq g(\phi(y))$ ve dolayısıyla $\Phi(g)(x) \neq \Phi(g)(y)$ dir. $\Phi(g) \in R_\phi$ olduğu için, R_ϕ, X in noktalarını ayırır.

TEOREM 14. (γ) özelliğine sahip R_ϕ, C yi öz olarak kapsarsa ϕ,X ten Y içine bir bire-bir dönüşümdür.

İSPAT. Teorem 13'ten dolayı (γ) özelliğine sahip $C \neq R_\phi$ nin X in noktalarını ayırdığını göstermemiz ispat için yeterlidir. Bunun için $x,y \in X$ ve $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. R_ϕ, (γ) özelliğini sağladığından, $f(x) = f(y) = 0$ olacak biçimde bir $0 \not\equiv f \in R_\phi$ nin bulunması durumunda R_ϕ de öyle bir $\{f_1,\ldots,f_n\}$ cümlesi vardır ki, $i = 1,\ldots,n$ için bir f_i, $f_i(x) \neq f_i(y)$ özelliğini sağlar. Ayrıca R_ϕ,C yi öz olarak kapsadığından R_ϕ de sabit olmayan bir g fonksiyonu vardır. Bilindiği gibi,eğer $g(x) \neq g(y)$ ise, bu durumda g, x ve y yi ayırır deriz. $g(x) = g(y) = c$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\underline{c}(x) = \underline{c}$ ve $\underline{c} \in R_\phi$ olduğundan $g - \underline{c}$ de R_ϕ ye aittir. Ayrıca $(g-\underline{c})(x) = (g-\underline{c})(y) = 0$ olup $g-\underline{c} = \underline{0}$ dır. Fakat g sabit olmadığından $g \not\equiv \underline{c}$ dır. Bu nedenle $g(x) \neq g(y)$ olmalıdır. Sonuç olarak R_ϕ nin (γ) özelliğini sağlaması durumunda $x,y \in X$ ve $x \neq y$ için $h(x) \neq h(y)$ olacak biçimde bir $h \in R_\phi$ fonksiyonu vardır. O halde R_ϕ, X in noktalarını ayırır. Böylece Teorem 13'ten ϕ bir bire-bir dönüşümdür.

Yukarıda ifade ve ispat edilen teoremleri gözönüre alarak ϕ ile R_ϕ arasındaki önemli sonuçları aşağıdaki biçimde özetleyebiliriz:

(1) Eğer $R_\phi \neq C$ ve R_ϕ, (α) yı sağlıyorsa, bu durumda ϕ, X ten Y üzerine bir dönüşümdür [Teorem 11]. R_ϕ nin H(X) in bir öz althalkası olması durumunda ϕ bire-bir dönüşüm olamaz, bu nedenle R_ϕ, X in noktalarını ayıramaz [Teorem 13].

(2) Eğer $R_\phi \neq C$ ise, bu durumda R_ϕ, hem (α) hem (γ) özelliklerine aynı anda sahip olamaz. Olması durumunda ϕ, X den Y ye bir bire-bir ve üzerine dönüşüm olup [Teorem 11 ve Teorem 14] $\Phi(H(Y)) = R_\phi = H(X)$ olur.

(3) Eğer R_ϕ, X in noktalarını ayırırsa ϕ, X ten Y ye bir bire-bir dönüşümdür [Teorem 13]. R_ϕ nin C yi öz olarak kapsaması ve $R_\phi \neq H(X)$ olması durumunda ϕ bir üzerine dönüşüm olamaz, bu nedenle de R_ϕ, (α) yı sağlayamaz [Teorem 11].

(4) $R_\phi \neq C$ olması durumunda Teorem 12, Teorem 13 ve Teorem 14 den dolayı aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

R_ϕ, (γ) yı sağlar.

R_ϕ, X in noktalarını ayırır.

ϕ, X ten Y içine bir bire-bir dönüşümdür.

(5) $1 \in R_\phi$ olduğundan R_ϕ, H(X) in bir ideali olamaz.

BÖLÜM III

Bu bölümde, Y bir S açık Riemann yüzeyinin boş olmayan herhangi bir altcümlesi olarak gözönüne alınacaktır. Bu bölümde amaç, Y yi Riemann yüzeyi olarak, holomorfik fonksiyonların halkaları yardımıyla karakterize etmektir. Bunun için R_ϕ nin spektrumunun bir Riemann yüzeyi olarak Y ye homeomorf olduğu gösterilecektir.

Burada ilk olarak, nokta-değerlendirme dönüşümleri olan R_ϕ nin spektrumundaki homomorfizmlerin $\phi(X) \subseteq Y$ nin noktaları ile bire-bir eşlemede olduğu, nokta değerlendirme dönüşümü olmayanların da $Y-\phi(X)$ in noktaları ile bire-bir eşlemede olduğu gösterilecektir.

Son olarak, R_ϕ nin spektrumu üzerinde tanımlanan Gelfand topolojisine göre R_ϕ nin spektrumunun Y ye homeomorf bir Riemann yüzeyi olduğu gösterilecektir.

Önce gerekli olan bazı temel tanımları verelim:

Tanım 7. Bir F cümlesi üzerinde tanımlı kompleks değerli fonksiyonların cebiri A olsun. A dan kompleks sayıların $\mathbb{C}$ cismi üzerine sıfırdan farklı π $\mathbb{C}$-homomorfizmlerin cümlesine <u>A nın spektrumu</u> denir ve ΣA ile gösterilir.

Tanım 8. Bir F cümlesi üzerinde kompleks değerli fonksiyonların cebiri A olsun. Bir $x \in F$ noktası için π_x dönüşümünü A dan $\mathbb{C}$ içine, $f \in A$ için $\pi_x(f) = f(x)$ olarak tanımlayalım. Bir $x \in F$ için, bu biçimde tanımlanan π_x dönüşümü bir $\mathbb{C}$-homomorfizmi olup, <u>nokta-değerlendirme dönüşümü</u>

adını alır. ΣA nın $\{\pi_x : x \in F\}$ ni kapsadığı açıktır.

X, R açık Riemann yüzeyinin herhangi bir altcümlesi olmak üzere, H(X) in kompleks değerli fonksiyonların cebiri olduğu Bölüm I'den bilinmektedir. Ayrıca Bölüm I'in 2. kesiminde H(X) den $\mathbb{C}$ üzerine $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmleri ele alınmış olup Teorem 4'te H(X) ten $\mathbb{C}$ ye tanımlı bir π dönüşümünün bir $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi olması durumunda, $\pi = \pi_x$ olacak biçimde birtek $x \in X$ noktasının varlığı gösterilmiştir.

Dolayısayla, H(X) in spektrumu $\Sigma H(X)$ bütün π_x nokta-değerlendirme dönüşümlerini içerir. $\pi \in \Sigma H(X)$ olması durumunda H(X) in $I_x(X) = \{f \in H(X): f(x) = 0\}$ idealinin π nin çekirdeği olduğu Bölüm I'den bilinmektedir. Böylece bir π, $\mathbb{C}$-cebir homomorfizminin, π nin çekirdeği ile saptanabileceği Teorem 4 ten görülür. Ayrıca π $\mathbb{C}$-cebir homomorfizmi, π nin çekirdiğinin dışında H(X) in bir başka elemanında ki değeri ile de saptanabilir. Gerçekten, $g \in H(X)$, π nin çekirdeğinin dışında başka bir eleman olsun. Bu durumda $\pi(g-\pi(g)) = \pi(g)-\pi(g) = 0$ olup, $g-\pi(g)$, π nin çekirdeğindedir. Bu nedenle $g(x)-\pi(g) = 0$ veya $g(x) = \pi(g)$ olup, böylece $\pi_x(g) = g(x) = \pi(g)$ bulunur. O halde $x \in X$ için $\pi = \pi_x$ dir.

Sonuç olarak, $\Sigma H(X)$, $x \in X$ olmak üzere bütün π_x nokta-değerlendirme dönüşümlerinden oluşur.

Burada X ve Y, sırası ile, R ve S açık Riemann yüzeylerinin boş olmayan herhangi altcümleleri olup, bu durum tekrarlanmayacaktır.

TEOREM 15. ϕ, X ten Y içine bir analitik dönüşüm ve $R_\phi = \Phi(H(Y))$ olduğunu kabul edelim. Burada Φ, H(Y) den H(X) içine $g \in H(Y)$ için $\Phi(g) = g \circ \phi$ olarak tanımlanan bir $\mathbb{C}$-izomorfizmidir. Ayrıca M, $\Sigma H(X)$ den ΣR_ϕ içine $M(\pi_x) = \pi_x|R_\phi$ olarak tanımlanan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

(i) M nin bire-bir olması için gerek ve yeter koşul ϕ nin bire-bir olmasıdır.

(ii) M nin üzerine olması için gerek ve yeter koşul ϕ nin üzerine olmasıdır.

İSPAT. (i) ϕ bire-bir olsun. Bu durumda Teorem 13 den dolayı R_ϕ, X in noktalarını ayırır. Şimdi $\pi_x \neq \pi_y$ olsun. π_x ve π_y tanımından dolayı $x \neq y$ olacağı açıktır. Böylece R_ϕ , X in noktalarını ayırdığından $g(x) \neq g(y)$ olacak biçimde bir $g \in R_\phi$ vardır. O halde $\pi_x(g) \neq \pi_y(g)$ dir. Bu nedenle $g \in R_\phi$ için π_x ve π_y farklı olduklarından $M(\pi_x) \neq M(\pi_y)$ dır ve dolayısıyla M bire-birdir.

Karşıt olarak, M bire-bir olsun. ϕ nin bire-bir olduğunu gösterelim. $x \neq y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda H(X), X in noktalarını ayırdığından $g(x) \neq g(y)$ olacak biçimde bir $g \in H(X)$ vardır. Böylece $\pi_x(g) \neq \pi_y(g)$ olup, M nin bire-birliğinden dolayı $\pi_x \neq \pi_y$ dır ve dolayısıyla $\pi_x|R_\phi \neq \pi_y|R_\phi$ dır. O halde öyle bir $f \in R_\phi$ vardır ki, $\pi_x(f) \neq \pi_y(f)$ veya eşdeğer olarak, $f(x) \neq f(y)$ dır. Bu ise R_ϕ nin X in noktalarını ayırdığını göstermektedir. Böylece Teorem 13'den ϕ bire-birdir.

Şimdi (ii) nin ispatını yapalım : $\pi \in \Sigma R_\phi$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda π, R_ϕ den $\mathbb{C}$ ye bir $\mathbb{C}$-homomorfizmi ve Φ, $H(Y)$ den $H(X)$ içine bir $\mathbb{C}$-izomorfizmi olduğundan, $\pi \circ \Phi$, $H(Y)$ den $\mathbb{C}$ ye bir $\mathbb{C}$-homomorfizmi olup, $\pi \circ \Phi \in \Sigma H(Y)$ dir. Dolayısıyla $\pi \circ \Phi = \psi_y$ olacak biçimde bir $y \in Y$ vardır ve $g \in H(Y)$ için $\psi_y(g) = g(y)$ dir. Burada $y \in \phi(X)$ ve $y \notin \phi(X)$ olmak üzere başlıca iki durum söz konusudur.

Eğer $y \in \phi(X)$ ise, bu durumda bir $x \in X$ için $y = \phi(x)$ olup, her $g \in H(Y)$ için $\pi(\Phi(g)) = \psi_y(g) = g(y) = g(\phi(x)) = \Phi(g)(x)$ dir. O halde her $f = \Phi(g) \in R_\phi$ için $\pi(f) = f(x) = \pi_x(f)$ dir. Bu ise $M(\pi_x) = \pi$ demektir.

Eğer $y \notin \phi(X)$ ise, bu durumda bir $x \in X$ için $y \neq \phi(x)$ dir. Şimdi göstereceğiz ki, her $x \in X$ için öyle bir $f \in R_\phi$ vardır ki, $\pi(f) \neq f(x)$ olması durumunda $\pi \neq M(\pi_x)$ dir. Bunun için $x \in X$ olduğunu kabul edelim. $\phi(x) \in Y$, $y \in Y$ ve $y \neq \phi(x)$ olup, $H(Y)$, Y nin noktalarını ayırdığından, $g(y) \neq g(\phi(x))$ olacak biçimde bir $g \in H(Y)$ vardır. Ayrıca $R_\phi = \Phi(H(Y))$ olduğundan $\Phi(g) \in R_\phi$ ve $\pi(\Phi(g)) = g(y) \neq g(\phi(x)) = \Phi(g)(x)$ dir. Böylece $\pi(\Phi(g)) \neq \Phi(g)(x)$ olacak biçimde bir $\Phi(g) \in R_\phi$ bulunur. Bu nedenle $\pi \neq M(\pi_x) = \pi_x|R_\phi$ dır.

$\pi \in \Sigma R_\phi$ için $\pi \circ \Phi = \psi_y \in \Sigma H(Y)$ dir. $\pi \in M(\Sigma H(X))$ olması için gerek ve yeter koşulun $y \in \phi(X)$ olduğu gösterilmiştir.

Eğer ϕ üzerine bir dönüşüm ise, bu durumda her $y \in Y$ için $y \in \phi(X)$, $y = \phi(x)$ dır ve böylece $\pi \circ \Phi = \psi_y$ olmak üzere $\pi = M(\pi_x)$ dir.

Eğer ϕ üzerine bir dönüşüm değilse, bu durumda öyle bir $y \in Y-\phi(X)$ ve $\pi \in \Sigma R_\phi$ vardır ki, herhangi $x \in X$ için $\pi \circ \Phi = \psi_y$ ve $\pi \neq M(\pi_x)$ dir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

TEOREM 16. $\mathcal{R}$, $H(X)$ in herhangi bir althalkası ve M, $M(\pi_x) = \pi_x|\mathcal{R}$ olacak biçimde $\Sigma H(X)$ den $\Sigma\mathcal{R}$ içine bir dönüşüm olsun. M nin bir bire-bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul, $\mathcal{R}$ nin X in noktalarını ayırmasıdır.

İSPAT. M nin bire-bir olduğunu varsayalım. Eğer $\pi_x \neq \pi_y$ ise, bu durumda $\pi_x|\mathcal{R} \neq \pi_y|\mathcal{R}$ dir. Şimdi $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4 den ve $\pi_x|\mathcal{R} \neq \pi_y|\mathcal{R}$ olduğundan $\pi_x \neq \pi_y$ dir. O halde $\pi_x(f) \neq \pi_y(f)$ veya $f(x) \neq f(y)$ olacak biçimde bir $f \in \mathcal{R}$ vardır. Bu nedenle $\mathcal{R}$, X in noktalarını ayırır.

Karşıt olarak, $\mathcal{R}$ nin X in noktalarını ayırdığını ve $\pi_x \neq \pi_y$ olduğunu varsayalım. Her bir $x \in X$ için birtek π_x bulunduğundan [Teorem 4] $x \neq y$ dir. $\mathcal{R}$, X in noktalarını ayırdığından $f(x) \neq f(y)$ olacak biçimde bir $f \in \mathcal{R}$ vardır ve dolayısıyla $\pi_x|\mathcal{R} \neq \pi_y|\mathcal{R}$ dir. O halde M bir bire-bir fonksiyondur.

Şimdi bir A cebirinin ΣA spekturumu üzerinde bir topoloji inşa etmek için gerekli tanım ve bazı lemmalar verilecektir.

Tanım 9. Herhangi bir F cümlesi üzerindeki kompleks değerli fonkisyonların cebiri A ve A nın spektrumu ΣA olsun. $f \in A$ için ΣA üzerinde kompleks değerli $\hat{f}$ fonksiyonu $\hat{f}(\pi) = \pi(f)$ olarak tanımlanır ve tüm $\hat{f}$ fonksiyonlarının cümlesi $\hat{A} = \{\hat{f}: f \in A\}$ ile gösterilir.

LEMMA 2. $\hat{A}$, ΣA üzerindeki fonksiyonların noktasal toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cebir olup, C sabit fonksiyonlar cümlesini kapsar.

İSPAT. Eğer, $\hat{f}$, $\hat{g} \in \hat{A}$ ise, bu durumda
$(\hat{f}+\hat{g})(\pi) = \hat{f}(\pi) + \hat{g}(\pi) = \pi(f) + \pi(g) = \pi(f+g) = (\widehat{f+g})(\pi)$ ve
$(\hat{f}.\hat{g})(\pi) = \hat{f}(\pi).\hat{g}(\pi) = \pi(f).\pi(g) = \pi(f.g) = (\widehat{f.g})(\pi)$ dir.
Dolayısıyla $\hat{f} + \hat{g}$, $\hat{f}.\hat{g} \in \hat{A}$ dır. Ayrıca, $\underline{a} \in A$ sabit fonksiyonu için $\hat{a}(\pi) = \pi(\underline{a}) = \underline{a} \in \hat{A}$ dır. Yani $\hat{A}$ tüm sabit fonksiyonları içerir. Üstelik $\underline{a}\hat{f} \in \hat{A}$ olup, bu nedenle $\hat{A}$ bir cebirdir.

LEMMA 3. ψ: $f \mapsto \hat{f}$ dönüşümü A dan $\hat{A}$ üzerine bir $\mathbb{C}$-izomorfizmidir.

İSPAT. Lemma 2'de gösterilmiş olduğu gibi, $\hat{f} + \hat{g} = \widehat{f+g}$ ve $\hat{f}.\hat{g} = \widehat{f.g}$ dır. Diğer bir deyişle $\psi(f+g) = \psi(f) + \psi(g)$ ve $\psi(f.g) = \psi(f).\psi(g)$ olup, ψ bir homomorfizmdir. Ayrıca bir $\underline{a} \in A$ sabit fonksiyonu ve $\pi \in \Sigma A$ için, $\psi(\underline{a})(\pi) = \hat{\underline{a}}(\pi) = \pi(\underline{a}) = \underline{a}$, yani ψ bir $\mathbb{C}$-homomorfizmidir. $\hat{A}$ nın tanımı gereği ψ nin A dan $\hat{A}$ üzerine bir fonksiyon olduğu açıktır. Şimdi ψ nin bire-bir fonksiyon olduğunu gösterelim : $f,g \in A$ için $\psi(f) = \psi(g)$ veya $\hat{f} = \hat{g}$ olsun. Bu durumda $\pi \in \Sigma A$ için $\hat{f}(\pi) = \hat{g}(\pi)$ veya $\pi(f) = \pi(g)$ dır. Eğer her $\pi \in \Sigma A$ için $\pi(f) = \pi(g)$ ise, bu durumda $x \in F$ için $\pi_x(f) = \pi_x(g)$ olup, F üzerinde $f(x) = g(x)$, yani $f = g$ dır. O halde ψ birebirdir.

Burada eğer $f = g$ ise, $\pi \in \Sigma A$ için $\pi(f) = \pi(g)$ olup, $\hat{f}(\pi) = \hat{g}(\pi)$, yani $\hat{f} = \hat{g}$ dır. Bu nedenle $f = g$ olmak için gerek ve yeter koşul $\hat{f} = \hat{g}$ olmasıdır.

Sonuç olarak A ve $\hat{A}$ izomorftur.

Tanım gereği $x \in F$ için $\hat{f}(\pi_x) = \pi_x(f) = f(x)$ olduğu açıktır.

Bundan sonraki kısımlarda, yerine göre, H(X), A ve H(Y) üzerinde kompakt açık topoloji veya altüniform yakınsaklık topolojisi kullanılacaktır. $\Sigma H(X)$, ΣA, $\Sigma H(Y)$ üzerinde ise, aşağıdaki biçimde inşa edeceğimiz, Gelfand topolojisi ve $\Sigma H(X)$, $\Sigma H(Y)$ üzerinde de izdüşüm topolojisi kullanılacaktır.

Tanım 10. F üzerinde kompleks değerli fonksiyonların bir cebiri A olsun. $\hat{A}$ nın her elemanını sürekli bırakan topolojiye <u>Gelfand topolojisi</u> denir.

Şimdi bu topolojiye göre açık komşulukları,dolayısıyla taban elemanlarını tanımlayalım.

$\pi_0 \in \Sigma A$, $\hat{f} \in \hat{A}$ olsun ve $S_\epsilon(\hat{f}(\pi_0))$, $\hat{f}(\pi_0)$ merkezli ve $\epsilon > 0$ yarıçaplı bir daireyi göstersin. Bu durumda,

$$\hat{f}^{-1}(S_\epsilon(\hat{f}(\pi_0))) = \{\pi \in \Sigma A : |\hat{f}(\pi)-\hat{f}(\pi_0)| < \epsilon\}$$

$$= \{\pi \in \Sigma A: |\pi(f)-\pi_0(f)| < \epsilon\}$$ dır. Bu şekildeki cümlelerin sonlu bir kesişimi, $\{\pi \in \Sigma A: |\pi(f_i)-\pi_0(f_i)| < \epsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ f_i \in A\}$ biçiminde bir cümle olup, bu tip cümleler Gelfand topolojisinin bir <u>tabanını</u> oluştururlar.

Tanım 11. K, A nın sonlu bir altcümlesi olsun ve $\epsilon > 0$ bulunsun. $U_{\pi_0,\epsilon,K} = \{\pi \in \Sigma A: |\pi(f)-\pi_0(f)| < \epsilon, f \in K\}$ cümlesine $\pi_0 \in \Sigma A$ nın bir <u>açık komşuluğu</u> denir.

LEMMA 4. Gelfand topolojisi Hausdorff'tur.

Gerçekten, eğer $\pi_1, \pi_2 \in \Sigma A$ için $\pi_1 \neq \pi_2$ ise, bu durumda bir $f \in A$ için, $\pi_1(f) \neq \pi_2(f)$, yani $\hat{f}(\pi_1) \neq \hat{f}(\pi_2)$ dir. Ayrıca eğer $|\hat{f}(\pi_1) - \hat{f}(\pi_2)| = \epsilon > 0$ ise, bu durumda $\hat{f}^{-1}(S_{\epsilon/2}(\hat{f}(\pi_1)))$ ve $\hat{f}^{-1}(S_{\epsilon/2}(\hat{f}(\pi_2)))$, sırası ile, π_1 ve π_2 ayrık komşuluklarıdır. Aksi halde, $\pi \in \hat{f}^{-1}(S_{\epsilon/2}(\hat{f}(\pi_1)))$ ve $\pi \in \hat{f}^{-1}(S_{\epsilon/2}(\hat{f}(\pi_2)))$ için, $|\hat{f}(\pi) - \hat{f}(\pi_1)| < \epsilon/2$ ve $|\hat{f}(\pi) - \hat{f}(\pi_2)| < \epsilon/2$ dir. Bu ise,

$$|\hat{f}(\pi_1) - \hat{f}(\pi_2)| \leq |\hat{f}(\pi_1) - \hat{f}(\pi)| + |\hat{f}(\pi) - \hat{f}(\pi_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olmasıdır ki, bu da $|\hat{f}(\pi_1) - \hat{f}(\pi_2)| = \epsilon$ kabulumüze aykırıdır. O halde ΣA, Gelfand topolojisine göre bir Hausdorff uzayıdır.

Tanım 12. $\Sigma H(X)$ üzerindeki <u>izdüşüm topolojisi</u> $p \in X$ olmak üzere, $p \mapsto \pi_p$ dönüşümünün sürekli ve açık olduğu bir topolojidir. Bu dönüşüm altında X in açık cümleleri, $\Sigma H(X)$ in açık cümleleri üzerine izdüşürülmüştür. N_p, $p \in X$ in bir açık komşuluğu ve $\pi_p \in \Sigma H(X)$ olsun. İzdüşüm topolojisinde π_p nin bir açık komşuluğu $\{\pi_q \in \Sigma H(X) : q \in N_p\}$ şeklinde bir cümledir.

Şimdi Gelfand topolojisi ile izdüşüm topolojisi arasındaki bağıntıyı gösteren bir Lemma verelim.

LEMMA 5. $\Sigma H(X)$ üzerindeki Genfand topolojisi $\Sigma H(X)$ üzerindeki izdüşüm topolojisi tarafından kapsanır.

İSPAT. $\pi_q \in \Sigma H(X)$, $H(X)$ in sonlu bir altcümlesi H ve $\epsilon > 0$ bulunsun. Gelfand topolojisinde π_q nun bir açık komşuluğu $U_{\pi_q, \epsilon, H} = \{\pi_p : |f(p)-f(q)| < \epsilon,\ f \in H\}$

$$= \{\pi_p : p \in \bigcap_{f \in H} f^{-1}(S_\epsilon(f(q)))\} = \{\pi_p : p \in N_q\}$$

olup, burada N_q, $q \in X$ in bir açık komşuluğudur. Çünkü $f \in H$, X üzerinde süreklidir. Fakat $\{\pi_p : p \in N_q\}$, izdüşüm topolojisinde π_q nin bir açık komşuluğu olduğundan, iddiamız ispat edilmiş olur.

TEOREM 17. Φ, $H(Y)$ den $H(X)$ içine bir $\mathbb{C}$-izomorfizmi ve $R_\phi = \Phi(H(Y))$ olsun. Bu durumda ΣR_ϕ ve $\Sigma H(Y)$ üzerindeki Gelfand topolojisinde $L(\pi) = \pi \circ \Phi$ olarak tanımlanan L fonksiyonu ΣR_ϕ den $\Sigma H(Y)$ üzerine bir homeomorfizmdir.

İSPAT. $\pi \in \Sigma R_\phi$ olsun. Açık olarak $\pi \circ \Phi$, $H(Y)$ den $\mathbb{C}$ içine bir homomorfizm olduğu için $\pi \circ \Phi \in \Sigma H(Y)$ dir. Üstelik bir $\underline{a}$ sabit fonksiyonu için $(\pi \circ \Phi)(\underline{a}) = \pi(\Phi(\underline{a})) = \pi(\underline{a}) = \underline{a}$ olduğundan $\pi \circ \Phi$ bir $\mathbb{C}$-homomorfizmidir. Bu nedenle, L, ΣR_ϕ den $\Sigma H(Y)$ içine bir dönüşümdür. Şimdi $\psi \in \Sigma H(Y)$ olsun. Bu durumda Φ bire-bir ve $L(\psi \circ \Phi^{-1}) = \psi \circ \Phi^{-1} \circ \Phi = \psi$ olduğu için $\psi \circ \Phi^{-1} \in \Sigma R_\phi$ olup, bu nedenle L, ΣR_ϕ den $\Sigma H(Y)$ üzerine bir dönüşümdür.

L bir bire-bir dönüşümdür. Gerçekten $\pi_1, \pi_2 \in \Sigma R_\phi$ için $L(\pi_1) = L(\pi_2)$ yani $\pi_1 \circ \Phi = \pi_2 \circ \Phi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bir $h \in H(Y)$ için $(\pi_1 \circ \Phi)(h) = (\pi_2 \circ \Phi)(h)$ dır ve dolayısıyla $f \in R_\phi = \Phi(H(Y))$ için $\pi_1(f) = \pi_2(f)$ veya $\pi_1 = \pi_2$ dir.

L nin sürekliliği göstermek için $\hat{\pi} \in \Sigma R_\phi$, H, $H(Y)$ nin sonlu bir altcümlesi ve $\epsilon > 0$ olsun. Bu durumda $L(\hat{\pi})$ nın herhangi bir açık komşuluğu,

$$U_{\hat{\pi} \circ \Phi, \epsilon, H} = \{\pi \circ \Phi \in \Sigma H(Y) : |(\pi \circ \Phi)(g) - (\hat{\pi} \circ \Phi)(g)| < \epsilon,\ g \in H\} \text{ dır.}$$

$$L,\ U_{\hat{\pi}, \epsilon, \Phi(H)} = \{\pi \in \Sigma R_\phi : |\pi(\Phi(g)) - \hat{\pi}(\Phi(g))| < \epsilon,\ g \in H\} \text{ yı}$$

$U_{\hat{\pi} \circ \Phi, \epsilon, H}$ içine dönüştürür. O halde L süreklidir.

Şimdi ise L^{-1} in sürekliliğini gösterelim. K nın R_ϕ nin sonlu bir altcümlesi ve $\epsilon > 0$ olması durumunda $\hat{\pi}$ nin herhangi bir açık komşuluğu

$U_{\hat{\pi},\epsilon,K} = \{\pi \in \Sigma R_\phi : |\pi(f)-\hat{\pi}(f)| < \epsilon,\ f \in K\}$ dır. L^{-1}, $\pi \circ \Phi$ yi π ye dönüştürür ve Φ bire-bir olduğu için $\Phi^{-1}(K)$, H(Y) nin sonlu bir altcümlesidir. Böylece L^{-1},

$U_{\hat{\pi} \circ \Phi, \epsilon, \Phi^{-1}(K)} = \{\pi \circ \Phi \in \Sigma H(Y) : |(\pi \circ \Phi)(g)-(\hat{\pi} \circ \Phi)(g)| < \epsilon,$ $g \in \Phi^{-1}(K)\}$ yı $U_{\hat{\pi},\epsilon,K} = \{\pi \in \Sigma R_\phi : |\pi(\Phi(g))-\hat{\pi}(\Phi(g))| < \epsilon,\ \Phi(g) \in K\}$ içine dönüştürür. Dolayısıyla L^{-1} süreklidir.

Böylece L nin bir homeomorfizmolduğu gösterilmiş olup, teoremin ispatı tamamlanmıştır.

TEOREM 18. $P(x) = \pi_x$ olarak tanımlanmış olsun. Bu durumda P, Y den $\Sigma H(Y)$ üzerine sürekli ve bire-bir bir fonksiyondur. Burada, $\Sigma H(Y)$ üzerinde ki topoloji Gelfand topolojisidir.

İSPAT. Önce P nin bire-bir bir fonksiyon olduğunu gösterelim. Bunun için $x,y \in Y$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda H(Y), Y nin noktalarını ayırdığından $g(x) \neq g(y)$ olacak biçimde bir $g \in H(Y)$ vardır. Dolasıyla, $\pi_x(g) \neq \pi_y(g)$ olup, $\pi_x \neq \pi_y$ dir. Yani, $x,y \in Y$, $x \neq y$ için $P(x) \neq P(y)$ olup, P bire-bir fonksiyondur.

H(Y) nin spektrumu yalnız nokta değerlendirme dönüşümlerinden oluştuğundan ve Teorem 4'den dolayı P bir üzerine dönüşümdür.

Şimdi P nin sürekli olduğunu gösterelim. H, H(Y) nin sonlu bir altcümlesi ve $\epsilon > 0$ olsun. π_x in bir açık komşuluğu

$U_{\pi_x,\epsilon,H} = \{\pi_y \in \Sigma H(Y) : |\pi_y(f) - \pi_x(f)| < \epsilon,\ f \in H\}$ dır. $f \in H(Y)$ sürekli ve H sonlu olduğu için $N = \bigcap_{f \in H} \{y \in Y : |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$, x 'i içeren bir açık cümledir. Eğer $y \in N$ ise, bu durumda her $f \in H$ için $|\pi_y(f) - \pi_x(f)| < \epsilon$ dur. Bu nedenle $\pi_y \in U_{\pi_x,\epsilon,H}$ dır. O halde P, N yi $U_{\pi_x,\epsilon,H}$ içine dönüştürür. Dolayısıyla P, π_x de süreklidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Dolayısıyla Teorem 17 ve Teorem 18'de ΣR_ϕ ile Y arasında bir bire-bir eşlemenin varlığı gösterilmiş oluyor. O halde Teorem 15 ve bu özellikten dolayı aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$Y - \phi(X)$ in noktaları ile, R_ϕ üzerinde nokta-değerlendirme dönüşümleri olmayan ΣR_ϕ nin elemanları arasında bir bire-bir eşleme vardır.

Teorem 18'de tanımlanan P dönüşümü aynı zamanda bir açık dönüşümdür. Her açık Riemann yüzeyinin $\mathbb{C}^3$ içine öz olarak yerleştirilebileceğini ve buradan da, Y nin Gelfand topolojisinin gerçekte Y nin ilk (orjinal) topolojisi olduğu gerçeğini Remmert'in gösterdiğini [18] Royden ifade etmektedir. Yukarıdaki bu sonuç Remert'in şu teoreminden elde edilmiştir : F herhangi bir holomorfik olarak tam ve lokal olarak indirgenebilir bir kompleks uzay* olsun. Bu durumda F, yeteri kadar büyük bir N doğal sayısı için, bir $\mathbb{C}^N$ sayı uzayına

---

* : *Kompleks uzay, lokal olarak indirgenebilme, holomorfik olarak tamlık kavramları bu çalışmada bir araç olarak kullanılmakta olup, bunlar için [15], [16] referans olarak verilebilir.*

yerleştirebilir; yani bir $\tau: F \to \mathbb{C}^N$ holomorfik, öz, injektif dönüşümü daima vardır [17] Remmert.

Bilindiği gibi bir S açık Riemann yüzeyi lokal olarak indirgenebilir bir kompleks uzay olup, holomorfik olarak tamdır [3] Behnke. O halde Remmert'in teoreminden dolayı bir n doğal sayısı için S de $\mathbb{C}^n$ içine holomorfik, öz, injektif bir dönüşüm vardır.

Önce bir kompleks uzayda ve $\mathbb{C}^n$ nin bir açık altcümlesi üzerinde holomorfik fonksiyon tanımlarını verelim.

Tanım 13. τ, bir F kompleks uzayından bir G kompleks uzayı içine sürekli bir dönüşüm olsun. Herhangi bir f fonksiyonunun bir $V \subseteq G$ açık cümlesi üzerinde holomorfik olması durumunda, eğer $f \circ \tau$ fonksiyonu da $\tau^{-1}(V)$ açık cümlesi üzerinde holomorfik ise, bu durumda τ dönüşümüne holomorfiktir denir [15] Remmert.

Tanım 14. f bir $V \subseteq \mathbb{C}^n$ açık cümlesi üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $w \in V$ noktasının $w \in D \subseteq V$ olacak biçimde, bir D açık komşuluğu varsa ve tüm $z \in D$ için f fonksiyonunun yakınsak olan bir

$$f(z) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n} (z_1 - w_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - w_n)^{\nu_n}$$ kuvvet

serisi açılımı bulunabilirse, bu durumda f fonksiyonuna V de <u>holomorfiktir</u> denir.

Eğer $w = (w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{C}^n$ ve $z = (z_1,\ldots,z_n) \in D$ ise, burada D, w yi içeren $\mathbb{C}^n$ nin bir açık altcümlesidir, bu durumda $P_1(z) = w_1 + (z_1 - w_1) = z_1$ tanımdan dolayı $\mathbb{C}^n$ de bir holomorfik fonksiyondur. Bu durum $P_i(z) = z_i$, $1 < i \leqslant n$ için de doğrudur.

Bu tanımlardan yararlanarak gösterilebilir ki; τ nun S açık Riemann yüzeyinden $\mathbb{C}^n$ içine bir holomorfik dönüşüm ve $f_1, \ldots, f_n$ lerinde S den $\mathbb{C}$ içine holomorfik fonksiyonlar olması durumunda bir $q \in Y \subset S$ için $\tau(q) = (f_1(q), \ldots, f_n(q))$ dir. Burada $f_i(q) = z_i$, $i = 1, \ldots, n$ dır. Bölüm I den $i=1, \ldots, n$ için $f_i \in A(S, \mathbb{C}) = H(S)$ olduğundan q nun bir açık komşuluğunda holomorf olan öyle bir g_i $(i = 1, \ldots, n)$ fonksiyonu vardır ki, q komşuluğunda ki Y nin tüm noktalarında $i = 1, \ldots, n$ için g_i, $f_i|Y$ ile çakışıktır. Aynı zamanda $\tau|Y = \sigma$, Y den $\mathbb{C}^n$ içine holomorfik dönüşüm olup, $q \in Y$ için $\sigma(q) = (g_1(q), \ldots, g_n(q))$ dır. Burada $i = 1, \ldots, n$ için $g_i \in A(Y, \mathbb{C}) = H(Y)$ dir.

Daima, U,Y de bir açık cümle ve $x \in U$ olacak biçimde Y nin en az bir x noktası bulunabilir. Eğer, $g_1(U), \ldots, g_n(U)$ lar $\mathbb{C}$ de açık cümleler ise, bu durumda $g_i(U)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\epsilon > 0$ için, $\{z \in \mathbb{C} : |z - g_i(x)| < \epsilon\}$ cümlesini kapsar. $\sigma(U) = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_i = g_i(x),\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ x \in U\}$ dır.

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{y \in Y : |g_i(y) - g_i(x)| < \epsilon\} \subsetneq \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in Y : g_i(y) \in g_i(U)\}$$

$= \{y \in Y : \sigma(y) \in \sigma(U)\} = \sigma^{-1}(\sigma(U)) = U$ dur. Burada σ bir injektif dönüşüm olduğundan $\sigma^{-1}(\sigma(U)) = U$ dur. Dolayısıyla U, $\bigcap_{i=1}^{n} \{y \in Y : |g_i(y) - g_i(x)| < \epsilon\}$ cümlesini kapsar.

Bu ise P(U) nun Gelfand topolojisinde π_x in bir açık komşuluğu olan $\bigcap_{i=1}^{n} \{\pi_y \in \Sigma H(Y) : |g_i(y) - g_i(x)| < \epsilon\}$ cümlesini kapsadığını gösterir. Böylece Gelfand topolojisinde P(U) açık olup, P, Y den $\Sigma H(Y)$ üzerine bir açık dönüşümdür.

Sonuç olarak L, ΣR_ϕ den $\Sigma H(Y)$ üzerine bir homeomorfizm ve P de Y den $\Sigma H(Y)$ üzerine bir homeomorfizm olduğundan

$P^{-1} \circ L$, ΣR_ϕ den, Gelfand topolojisi ile birlikte Y üzerine bir homeomorfizmdir.

Son olarak, ΣR_ϕ nin bir Riemann yüzeyi olduğunu gösterelim:

Bunun için önce Riemann yüzeyi kavramı ile ilgili tanımları hatırlatalım. Bilindiği gibi, kabaca, Riemann yüzeyleri; üzerinde analitik fonksiyonların tanımlandığı yüzeylerdir. Bir Riemann yüzeyinin sağlaması gereken özellikler şunlardır :

M irtibatlı bir Hausdorff uzayı ve eğer M nin her noktası $\mathbb{R}^2$ Euclid düzleminde bir açık cümleye homeomorf olacak biçimde bir açık cümle tarafından içerilirse, bu durumda M iki boyutlu manifold adını alır. O halde M nin iki boyutlu bir manifold olması durumunda, eğer

(a) bir $\dot{I}$ indeks cümlesi için $\{U_i : i \in \dot{I}\}$, M nin bir açık örtüsü ve θ_i, U_i den $\mathbb{C}$ de bir açık cümleye homeomorfizm olmak üzere bir $\{(U_i,\theta_i) : i \in \dot{I}\}$ kolleksiyonu bulunabilirse,

(b) U_i, U_j açık cümlelerinin birbirini kısmen örtmesi durumunda $\theta_j \circ \theta_i^{-1}$, $\theta_i(U_i \cap U_j)$ den $\theta_j(U_i \cap U_j)$ üzerine yön-koruyan bir konform dönüşüm, yani $w=(\theta_j \circ \theta_i^{-1})(z)=f(z)$ $\theta_i(U_i \cap U_j)$ de z nin bir analitik fonksiyonu ise,

bu durumda M bir Riemann yüzeyidir.

M bir Riemann yüzeyi ve M üzerinde $(U,\theta) \in \{(U_i,\theta_i):i \in \dot{I}\}$ ve $P_0 \in U$ ise, bu durumda $z = \theta(P)$, U daki P_0 komşuluğunda bir lokal parametre adını alır. Birden çok U_i cümlesi P_0'ı içerdiğinden, P_0 komşuluğunda birden çok lokal parametre bulunabilir. Eğer, özel olarak $\theta(P_0) = z_0$ ise, bu durumda yeteri kadar küçük bir $r>0$ sayısı için $|z-z_0|\leqslant r$ dairesi $\theta(U)$ tarafından kapsanır ve $w=\frac{z-z_0}{r}$ alındığında $\psi(P_0)=0$, $|w|\leqslant 1$ olacak biçimde yeni bir $w=\psi(P)$ lokal parametresi bulunmuş olur. Böylece M nin yapısı değişmemiş olacaktır.

f, M üzerinde kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $z=\theta(P)$, $\theta(P_0)=0$ lokal parametresi cinsinden $f(\theta^{-1}(z))$ fonksiyonu bir $r>0$ ve $|z|<r$ için z nin bir analitik fonksiyonu, yani $f(\theta^{-1}(z))=\sum_0^\infty a_n z^n$ ise, bu durumda f fonksiyonuna P_0 noktasında <u>analitik</u> veya <u>holomorfik</u> denildiği bilinmektedir |2| Ahlfors, |6| Gunning, |23| Springer.

Burada Φ , bir $\mathbb{C}$-homomorfizmi ve Y irtibatlı bir cümle olarak gözönüne alınacaktır.

Şimdi ΣR_ϕ nin bir Riemann yüzeyi olduğunu gösterelim. ΣR_ϕ, Gelfand topolojisi ile birlikte bir Hausdorff uzayıdır (Lemma 4). Ayrıca ΣR_ϕ, Y ye homeomorf ve Y irtibatlı olduğundan ΣR_ϕ irtibatlıdır. O halde ΣR_ϕ nin bir Riemann yüzeyi olması için (a) ve (b) koşullarının sağlanması yeterlidir.

$R_\phi=\Phi(H(Y))$ ve $\pi\in\Sigma R_\phi$ olsun. Bu durumda $q\in Y$ için, $\pi\circ\Phi=\psi_q\in\Sigma H(Y)$ dir (Teorem 17). Ayrıca S bir açık Riemann yüzeyi olduğundan $|z|<\rho$ ve $\sigma_q(0)=q$ için $(h_q\circ\sigma_q)(z)=\Sigma a_i z^i$ ve $N_q=\sigma_q(|z|<\rho)$ üzerine $h=\Sigma\, a_i(h_q)^i$ olmasını gerektirir. $y\in N_q$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$\psi_y(h)=h(y)=\sum_0^\infty a_i(h_q(y))^i=\sum_0^\infty a_i(\psi_y(h_q))^i$ dir. $\pi_y\circ\Phi=\psi_y$ olacak biçimde π_y, ΣR_ϕ nin bir elemanını belirtsin. Eğer $f\in R_\phi$ ise $f=\Phi(h)$ ve $\psi_y(h)=\pi_y(\Phi(h))=\sum_0^\infty a_i(\pi_y(\Phi(h_q)))^i$ olur. $\Phi(h_q)=f_q\in R_\phi$ dersek, $y\in N_q$ için $\pi_y(f)=\sum_0^\infty a_i(\pi_y(f_q))^i$ olur.

Şimdi de $q \in Y$ için q nun komşuluğu N_q olsun. f_q ve π_y yi yukarıda tanımlandığı şekilde gözönüne alalım ve $y \in N_q$ için δ_q yu, $\delta_q(\pi_y) = \pi_y(f_q)$ biçiminde tanımlayalım. Bu durumda,

$$\delta_q(\pi_q) = \pi_q(f_q) = \pi_q(\Phi(h_q)) = (\pi_q \circ \Phi)(h_q) = \psi_q(h_q) = h_q(q) = 0$$

dir.

Dolayısıyla δ_q, $\pi_q \in \Sigma R_\phi$ nin bir $N_{\pi_q} = \{\pi_y \in \Sigma R_\phi : y \in N_q\}$ komşuluğunu $S_\rho(0)$ üzerine dönüştürür. ve $\delta_q, N_{\pi_q} = \{\pi_y \in \Sigma R_\phi : y \in N_q\}$ üzerinde bir lokal parametredir. Gerçekten, $\delta_q(\pi_q) = 0$ ve $y \in N_q$ için $\delta_q(\pi_y) = \pi_y(f_q) = (\pi_y \circ \Phi)(h_q) = \psi_y(h_q) = h_q(y)$ dir. $\{z : |z| < \rho\} = \sigma_q^{-1}(N_q)$ üzerinde $(h_q \circ \sigma_q)(z) = z$ olduğundan $h_q|N_q = \sigma_q^{-1}$ olup, $h_q|N_q$, $\{z: |z| < \rho\}$ üzerine bir homeomorfizmdir.

P, Y den $\Sigma H(Y)$ ye $P(y) = \psi_y$ olarak tanımlanan bir homeomorfizm (Teorem 18) ve L, ΣR_ϕ den $\Sigma H(Y)$ ye $L(\pi) = \pi \circ \Phi$ olarak tanımlanan bir homeomorfizm (Teorem 17) olduğundan $\pi_y \in N_{\pi_q} = \{\pi_y : y \in N_q\}$ için $\delta_q(\pi_y) = (\sigma_q^{-1} \circ P^{-1} \circ L)(\pi_y)$ dir.

$P^{-1} \circ L$, Gelfand topolojisi ile birlikte ΣR_ϕ den Y ye bir homeomorfizm ve σ_q^{-1}, N_q dan $|z| < \rho$ ya bir homeomorfizm olduğundan δ_q da N_{π_q} dan $|z| < \rho$ üzerine bir homeomorfizmdir.

Şimdi, $W = N_{\pi_{q_1}} \cap N_{\pi_{q_2}}$ olması halinde $\delta_{q_1} \circ \delta_{q_2}^{-1}$ in, $\delta_{q_2}(W)$ den $\delta_{q_1}(W)$ içine bir aralitik dönüşüm olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\pi_y \in W$ olsun. Bu durumda $y \in N_{q_1} \cap N_{q_2}$ dir.

N_{q_2} üzerinde $h_{q_1} = \sum_0^\infty a_i (h_{q_2})^i$ olması durumunda, $y \in N_{q_2}$ olduğundan dolayı

$\delta_{q_1}(\pi_Y) = h_{q_1}(y) = \sum_0^{\infty} a_i(h_{q_2}(y))^i = \sum_0^{\infty} a_i(\delta_{q_2}(\pi_Y))^i$ dir.

O halde $z_1 = \delta_{q_1}(\pi_Y) = \sum_0^{\infty} a_i(\delta_{q_2}(\pi_Y))^i = \sum_0^{\infty} a_i z_2^i$, $\delta_{q_2}(W)$ den $\delta_{q_1}(W)$ üzerine bir holomorfik dönüşümdür.

Sonuç olarak ΣR_ϕ bir Riemann yüzeyidir.

Açık Problem : H(X) holomorfik fonksiyonlar halkasının kesirler cismi olan M(X) meromorfik fonksiyonlar halkası için bu çalışmanın hangi koşullarda geçerli olduğu bir araştırma konusudur.

Öncelikle ele alınması gereken problem; Bölüm I.1.2. de verilen teoremlerin hangi koşullar altında meromorfik fonksiyonlar cismi içinde geçerli olduğudur. Bunun için X ve Y, sırası ile, R ve S açık Riemann yüzeylerinin herhangi alt cümleleri, M(X) ve M(Y) de sırası ile X ve Y üzerinde meromorfik fonksiyonların halkaları olsun. M(X) ve M(Y) nin izomorf olması durumunda; X ve Y nin konform eşdeğer olup olmadığı problemi ele alınabilir ki, söz konusu problem [11] Kra ve [19],[20] Royden tarafından açık Riemann yüzelleri için ele alınmış olup, valuasyon teorisinden yararlanarak incelenmiştir. [10] Kelleher ise, bu problemi şöyle ifade etmiştir: "R ve S Riemann yüzeyleri ve R açık olsun. B_1, M(R) in bir A-halkası ve B_2, S üzerindeki sabitlerden oluşan, M(S) nin herhangi bir althalkası olsun. Eğer $\Phi: B_1 \to B_2$ üzerine bir halka izomorfizmi ise, bu durumda ya,

(a) $\Phi(i) = i$ olmak üzere, her $f \in B_1$ için $\Phi(f) = f \circ \phi$ biçiminde birtek $\phi: S \to R$ analitik dönüşümü vardır.

veya

(b) $\Phi(i) = -i$ olmak üzere, her $f \in B_1$ için $\Phi(f) = \overline{f \circ \phi}$ olacak biçimde bir tek ϕ: S → R konjuge analitik dönüşümü vardır."

Bu teorem gözönüne alınarak M(R) in althalkaları üzerindeki spektrumların varlığı ve bir Riemann yüzeyi olarak, ΣR_ϕ nin Y altcümlesine homemorf olması durumu araştırma konusudur.

Ayrıca Φ: M(R) → M(S) bir izomorfizm olması halinde S den R ye ϕ dönüşümünün varlığının hangi koşullarda söz konusu olduğu ayrı bir problemdir.

[14] Nakai, M(R) ve M(S) nin izomorf olmaları halinde R ve S nin topolojik eşdeğer olduklarını göstermiş olup, probleme iki farklı çözüm vermiştir.

KAYNAKLAR

[1] AHLFORS, L.V., 1979. Complex Analysis. Üçüncü Baskı Mc.Graw Hill Book Company.

[2] AHLFORS, L.V. ve SARIO, L., 1960. Riemann Surfaces. Princeton Uni. Press, New Jersey.

[3] BEHNKE, H., ve SCHEJA, G., 1962. "Über abstrakte und konkrete Riemannflächen." "Studies in Mathematical Analysis and Related Topics". Stanford Uni. Press. (16-24)

[4] BERS, L., 1948. On Rings of Analytic Functions. Bull. Amer.Math.Soc. 54, (311-315)

[5] FLORACK, H., 1948. Regülare und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flachen. Math.İnst.Univ. Münster. No.1.

[6] GUNNING, R.C., 1968. Lectures On Riemann Surfaces Princeton Uni. Press Princeton, Newjersey.

[7] HEINS, M., 1969. Complex Function Theory. İkinci Baskı. Academic Press. NewYork and London

[8] ISS'SA, H., 1965. On the Meromorphic Function Field of Stein Variety, Ann.Math. 83 (34-46)

[9] KELLEHER, J., 1968. On Isomorphisms of Meromorphic Function Fields, Canad. J.Math. 20 (1230-1241)

[10] KELLEHER, J., 1969. Rings of Meromorphic Functions On Non-compact Riemann Surfaces. Canad. J.Math. 21 (284-300)

[11] KRA, I., 1968. On the Ring of Holomorfic Function on an Open Riemann Surfaces. Trans.Amer.Math. Soc. 132. (231-244)

[12] MINDA, C.D., 1973. Analytic Functions on nonopen sets. Mathematics Magazine (223-224)

[13] NAKAI, M., 1963. On Rings of Analytic Functions, Proc.Japan Acad., 39, (79-87)

[14] NAKAI, M., ve SARIO, L., 1981. Meromorphic Function Fields On Riemann Surfaces, Hokkaido Math. J. 10 (531-543)

[15] REMMERT, R., 1956. Projectionen analytischer Mengen. Math.Annalen, Vol.130 (410-441)

[16] REMMERT, R., 1957. Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexen Raume. Math. Annalen, Vol 133 (328-370)

[17] REMMERT, R. ve STEIN, K., 1960. Eigentliche holomorphe Abbildungen. Math. Zeitschrift Vol. 73 (159-189)

[18] ROYDEN, H., 1963. Function Algebras. Bull.Amer.Math. Soc. Vol 69. (281-298)

[19] ROYDEN, H., 1956. Rings of Anaytic and Meromorphic Functions. Trans.Amer.Math.Soc. Vol 83 (269-276)

[20] ROYDEN, H., 1958. Rings of Meromorphic Functions. Proc. Math.Soc. 9 (959-965)

[21] RUDIN, W., 1955. Some Theorems on Bounded Analytic Functions. Trans. Amer.Math.Soc. 78, (333-342)

[22] RUDIN, W., 1955. An Algebraic Charaterization of Conformal Equivalance. Bull.Amer.Math.Soc. 61, 543.

[23] SPRINGER, G., 1967. Introduction to Riemann Surfaces. Addison-Wesley, Reading, Mass.

[24] SU, L.P., 1972. Rings of Analytic Functions on Any Subset of the Complex Plane. J.Math. 43, (535-538)