6+13

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPEKTRAL TEORİ ve SPEKTRAL TEORİ YARDIMI İLE MERCERİAN TEOREMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Cafer COŞKUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 21.7.1989 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından .90. (Doksan.) Not Takdir Edilerek Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile Kabul Edilmiştir.

C Orhan

Doç.Dr.Cihan ORHAN
Danışman

Doç.Dr. İsmail TOK

Prof. Dr. Öner ÇAKAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SPEKTRAL TEORİ ve SPEKTRAL TEORİ YARDIMI İLE MERCERİAN TEOREMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Cafer COŞKUN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç.Dr. Cihan ORHAN

1989, Sayfa 87

Jüri : Doç.Dr.Cihan ORHAN
Doç.Dr.İsmail TOK
Prof.Dr.Öner ÇAKAR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, matris dönüşümlerinin tanımı ve bazı dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri ile ilgili teoremler verildi. Ayrıca Cesàro operatörü ve Ağırlıklı ortalama operatörünün tanımı ve bu operatörlerin özellikleri ile ilgili teoremler yine bu bölümde yer aldı.

İkinci bölümde, sınırlı lineer dönüşüm, spektrum ve fine spektrum kavramları tanımlanarak bunlarla ilgili özellikler tanıtıldı.

Üçüncü bölümde, Cesàro operatörünün $c_0, c, \ell_\infty, \ell_p$, $(1 < p < \infty)$, bv_0 ve bv üzerindeki spektrumu ve c üzerindeki fine spektrumu incelendi.

Dördüncü bölümde, ağırlıklı ortalama operatörünün $c, c_0, \ell_p, (1 \leq p < \infty)$, üzerindeki spektrumu ve c ve c_0 üzerindeki fine spektrumu incelendi.

Beşinci ve son bölümde ise spektrum yardımıyla Cesàro operatörü için Mercerian teoremleri elde edildi.

ANAHTAR KELİMELER : Matris dönüşümü, regüler matris, konservatif matris, koregüler matris, üçgensel matris, normal matris, yakınsaklığa denk matris, resolvent, spektrum, nokta spektrum, fine spektrum, Cesàro operatörü, ağırlıklı ortalama operatörü.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SPECTRAL THEORY and MERCERIAN THEOREMS
VIA SPECTRAL THEORY

Cafer COŞKUN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc.Prof.Dr. Cihan ORHAN

1989, Page: 87

Jury : Assoc.Prof.Dr. Cihan ORHAN
Assoc.Prof.Dr. İsmail TOK
Prof.Dr. Öner ÇAKAR

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the definition of matrix transformations has been given. Some theorems related to matrix transformations on certain sequence spaces have been stated without proof. Furthermore, definitions and some properties of the Cesàro and weighted mean operators have also been given.

In the second chapter, a bounded linear operator and its specturm and fine spectrum have been studied.

In the third chapter, the spectrum of the Cesàro operator acting on the sequence spaces $c_0, c, \ell_\infty, \ell_p$, $(1 < p < \infty)$, bv_0, bv and its fine spekctrum on c have been computed.

In chapter four, the spectrum of a weighted mean operator acting on the sequence spaces, c, c_0, ℓ_p, $(1 \leq p < \infty)$, and its fine spectrum on c, c_0 have been studied.

Finally, in chapter five, some Mercerian theorems have been obtained via spectral theory for Cesàro operator.

KEY WORDS : Matrix transformation, regular matrix, conservative matrix, coregular matrix, triangular matrix, normal matrix, matrix which is equivalent to convergence, resolvent, spectrum, point spectrum, fine spectrum, Cesàro operator, weighted mean operator.

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç.Dr.Cihan ORHAN'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Bu çalışma Ankara Üniversitesi Araştırma Fonu tarafından desteklenmiştir. (Proje Kod No: 89.25.00.13)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

GİRİŞ 1

BÖLÜM 1

DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ 2

1.1. Matris Dönüşümleri 3

1.2. Cesàro Operatörü 7

1.3. Ağırlıklı Ortalama Operatörü 7

BÖLÜM 2

SINIRLI LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU VE FİNE SPEKTRUMU 10

2.1. Sınırlı Lineer Dönüşüm 10

2.2. Spektrum 12

2.3. Fine Spektrum 15

BÖLÜM 3

CESARO OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU 17

3.1. Cesàro Operatörünün c_0 Üzerindeki Spektrumu 18

3.2. Cesàro Operatörünün c Üzerindeki Spektrumu . 23

3.3. Cesâro Operötürünün ℓ_p,(1 < p ∞), Üzerindeki Spektrumu 26

3.4. Cesâro Operatörünün bv_0 Üzerindeki Spektrumu 31

3.5. Cesàro Operatörünün bv Üzerindeki Spektrumu 37

3.6. Cesàro Operatörünün c Üzerindeki Fine Spektrumu 39

Sayfa

BÖLÜM 4
AĞIRLIKLI ORTALAMA OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU 46

4.1. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün c Üzerindeki Spektrumu 46

4.2. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün c_0 Üzerindeki Spektrumu 59

4.3. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün ℓ_p,$(1\leq p<\infty)$ Üzerindeki Spektrumu 61

4.4. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün c Üzerindeki Fine Spektrumu 71

4.5. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün c_0 Üzerindeki Fine Spektrumu 81

BÖLÜM 5
MERCERIAN TEOREMLERİ 83

KAYNAKLAR 86

SİMGELER

$(A_n x)$	x dizinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
bs	sınırlı seri oluşturan diziler uzayı
bv	sınırlı salınımlı diziler uzayı
bv_0	hem sınırlı salınımlı ve hemde sıfıra yakınsak diziler uzayı
C	Cesàro operatörü
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
E	$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lvert\lambda - \frac{1}{2}\rvert \leq \frac{1}{2}\}$
F	$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lvert\lambda - \frac{1}{2}\rvert < \frac{1}{2}\}$
G	$\{\overline{\frac{p_n}{P_n} : n} \geq 0\}$
c	yakınsak diziler uzayı
c_A	A matrisinin yakınsaklık alanı
c_0	sıfıra yakınsak diziler uzayı
c_A^0	$\{x = (x_k) : Ax \in c_0\}$
Çek(T)	T operatörünün çekirdeği
e	bütün terimleri 1 olan dizi
e_k	k·ıncı terimi 1 diğer terimleri 0 olan dizi
ℓ_∞	sınırlı diziler uzayı
ℓ_p	$1 \leq p < \infty$ olmak üzere p inci kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı
$\lim_A x$	$(A_n x)$ dönüşüm dizisinin limiti
$O(1)$	sınırlı ifade
R(T)	T operatörünün görüntü (değer) uzayı

$\overline{R(T)}$	R(T) nin kapanışı
$r(T)$	T operatörünün spektral yarıçapı
$\rho(T)$	T operatörünün resolventi
$\sigma(T)$	T operatörünün spektrumu
$\sigma_p(T)$	T operatörünün nokta spektrumu
T^*	T operatörünün adjointi
X^*	X normlu uzayının sürekli duali.

G İ R İ Ş

Spektrum kavramı toplanabilme teorisinde önemli bir yer işgal eder. Spektrum kavramının toplanabilme teorisindeki en önemli uygulaması, tamamen analitik yöntemlerle incelenmiş olan Mercerian teoremlerinin fonksiyonel analitik yöntemlerle daha kısa ve anlaşılır biçimde yeniden elde edilmesine imkân sağlamasıdır.

1965 yılında, A.Brown, P.R.Halmos ve A.L.Sheilds ℓ_2 Hilbert uzayı üzerinde tanımlı Cesàro operatörünün sınırlı olduğunu göstermiş ve spektrumunu incelemişlerdir. Daha sonra, aynı operatörün ℓ_p, $(1 < p < \infty)$, üzerindeki spektrumu 1973 yılında G.Leibowitz, c üzerindeki fine spektrumu 1975 yılında R.B.Wegner, c_0 üzerindeki spektrumu 1985 yılında J.B.Reade tarafından ve c, bv ve bv_0 üzerindeki spektrumu ise 1986 yılında J.I. Okutoyi tarafından incelenmiştir.

Ağırlıklı ortalama operatörünün c üzerindeki spektrumu 1977 yılında F.P. Cass ve B.E.Rhoades, c üzerindeki fine spektrumu 1983 yılında ve c_0 üzerindeki fine spektrumu 1987 yılında B.E.Rhoades ve ℓ_p,$(1 \leq p < \infty)$, üzerindeki spektrumu ise 1978 yılında J.M.Cartlidge tarafından incelenmiştir.

Bu araştırma, yukarıdaki çalışmaların derlenmesinden oluşmaktadır.

BÖLÜM 1

DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, matris dönüşümlerinin tanımını ve dizi uzayları arasında tanımlı matris dönüşümleri ile ilgili teoremleri verip, Cesàro Operatörü ve Ağırlıklı ortalama operatörünü tanımlayacağız. Ayrıca bu operatörlerin özelliklerini veren bazı teorem ve önermeleri ifade edeceğiz.

Bu çalışma boyunca kompleks ya da reel terimli bütün dizilerin uzayını s, sınırlı dizilerin uzayını ℓ_∞, yakınsak dizilerin uzayını c, sıfıra yakınsak dizilerin uzayını c_0, mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayını ℓ_1, $1 < p < \infty$ olmak üzere p inci kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayını ℓ_p, sınırlı salınımlı diziler uzayını bv, hem sınırlı salınımlı ve hem de sıfıra yakınsak dizilerin uzayını bv_0 ve sınırlı seri oluşturan dizilerin uzayını ise bs ile göstereceğiz.

Buna göre;

$$\ell_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$$

$$c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = \ell \text{ mevcut}\}$$

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\}$$

$$\ell_1 = \{x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty\}$$

$$\ell_p = \{x = (x_k): \sum_k |x_k|^p < \infty\}, \quad 1 < p < \infty$$

$$bv = \{x = (x_k): \sum_k |x_k - x_{k+1}| < \infty\}$$

$$bv_0 = c_0 \cap bv$$

ve

$$bs = \{x = (x_k): \sup_n |\sum_{k=0}^{n} x_k| < \infty\}$$

yazabiliriz.

1.1 Matris Dönüşümleri

X ve Y, s in iki alt cümlesi ve $A = (a_{nk})$ reel yada kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere, $x = (x_k) \in X$ ve her $n \geq 0$ için

$$y_n = A_n x = \sum_k a_{nk} x_k \tag{1}$$

serisi yakınsak ise $y = (y_n) = (A_n x) = Ax$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $y = (A_n x)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $y \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir. X dizi uzayını Y içine dönüştüren bütün matrislerin sınıfını (X,Y) ile göstereceğiz ve eğer A, X den Y içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X,Y)$ yazacağız. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfını ise $(X,Y;p)$ ile göstereceğiz. Özel olarak $A \in (c,c)$ ise A ya konservatif matris ve $A \in (c,c;p)$ ise A ya regüler matris (ya da kısaca regülerdir) denir.

(1) serisi her n için yakınsak olduğundan matris

dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır. X ve Y dizi uzayları, üzerinde gözönüne alınan normlarla birlikte, θ X lineer uzayının sıfır elemanını göstermek üzere eğer,

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \infty$$

ise A matris dönüşümü sınırlıdır denir ve bu durum $A \in B(X,Y)$ ile gösterilir. Eğer X = Y ise B(X,X) yerine kısaca B(X) yazacağız.

$A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris olsun. Eğer her $k > n \geq 0$ için $a_{nk} = 0$ ise A matrisine üçgenseldir denir. A üçgensel bir matris ve her n için $a_{nn} \neq 0$ ise A ya normal matris adı verilir.

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere,

$$c_A = \{x = (x_k) : Ax \in c\}$$

cümlesine A nın yakınsaklık alanı (toplanabilirlik alanı) ve eğer $c_A = c$ ise A yakınsaklığa denktir denir.

$A \in B(c)$ olsun. $a_k = \lim_n a_{nk}$ olmak üzere her k için $a_k = 0$ ise A matrisine çarpımsal matris,

$$\chi(A) = \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k a_k$$

sayısına A nın karakteristiği ve $\chi(A) \neq 0$ olacak biçimdeki A matrisine de koregüler matris adı verilir. $x \in c$ için

$$\lim Ax = \lim_A x = \chi(A) \lim x + \sum_k a_k x_k$$

olarak verilir ([21] Wilansky 1984, sh.6).

TEOREM 1.1.1: $A \in B(\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \qquad (2)$$

olmasıdır. ([11] Maddox 1970, sh.174).

TEOREM 1.1.2: $A \in B(\ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty$$

olmasıdır. ([11] Maddox 1970, sh.167).

TEOREM 1.1.3: $A \in B(c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (2) ve her k için $\lim_n a_{nk} = 0$ özelliklerinin gerçeklenmesidir. ([11] Maddox 1970, sh.163).

TEOREM 1.1.4: (Kojima-Schur): $A \in B(c)$ olması için gerek ve yeter şart (2) ve her p için $\lim_n \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p$ mevcut, özelliklerinin gerçeklenmesidir ([11] Maddox 1970, sh.166).

ÖNERME 1.1.5: $A \in B(c)$ olsun. Eğer A, (2) yi gerçekleyen bir A^{-1} inversine sahip ise $A^{-1} \in B(c)$ dir ([21] Wilansky 1984, sh.92).

ÖNERME 1.1.6: $A \in B(c)$ olsun. Eğer A nın (2) yi gerçekleyen bir sol taraflı inversi mevcut ise A hiçbir sınırlı ıraksak diziyi limitlemez ([6] Copping 1955).

TEOREM 1.1.7 (Silverman-Teoplitz): $A \in (c,c;p)$ olması için gerek ve yeter şart (2) ve

(i) $\lim_n a_{nk} = 0$, her k için

(ii) $\lim_n \sum_k a_{nk} = 1$

özelliklerinin gerçeklenmisidir ([11] Maddox 1970, sh.165)

TEOREM 1.1.8: Eğer $A \in B(\ell_\infty) \cap B(\ell_1)$ ise $A \in B(\ell_p)$, $(1 < p < \infty)$, dir ([11] Maddox 1970, sh.174).

TEOREM 1.1.9: $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun ve her n ve k için $b_{nk} > 0$ olmak üzere

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}|(b_{nk})^{1/p} < \infty$$

ve

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}|(b_{nk})^{-1/q} < \infty$$

gerçeklensin. Bu durumda $A \in B(\ell_p)$ dir ([1] Borwein ve Jakimovski 1979).

TEOREM 1.1.10 (Riesz-Thorin): $A \in B(\ell_\infty)$ olsun. Eğer $A \in B(\ell_p)$, $(1 \leq p < \infty)$, ve $q > p$ ise $A \in B(\ell_q)$ dir ([4] Cartlidge 1978).

TEOREM 1.1.11: $A \in B(bv)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{(i)} \quad \sup_m \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{m} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right| < \infty \qquad (3)$$

(ii) $Ae \in bv$

özelliklerinin gerçeklenmesidir, burada $e = (1,1,1,...)$ dir ([21] Wilansky 1984, sh.127).

TEOREM 1.1.12: $A \in B(bv_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3) ve her k için $\lim_n a_{nk} = 0$ özelliklerinin gerçeklenmesidir ([21] Wilansky 1984, sh.127).

1.2. Cesàro Operatörü

Bir $x = (x_n)$ dizisini, onun aritmetik ortalaması olan

$$y = (y_n) = \left(\frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n + 1} \right)$$

dizisine dönüştüren dönüşüme Cesàro operatörü denir ve C ile gösterilir. $C = (c_{nk})$ matrisinin

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} , & 0 \leq k \leq n \\ 0 , & k > n \end{cases} \qquad (4)$$

ile verileceği açıktır.

TEOREM 1.2.1: Cesàro Operatörü regülerdir, yani $C \in (c,c;p)$ dir.

1.3. Ağırlıklı Ortalama Operatörü

$p_0 > 0$, $n \geqq 1$ için $p_n \geqq 0$ ve $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$

olmak üzere

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{P_n} , & 0 \leq k \leq n \\ 0 , & k > n \end{cases} \tag{5}$$

biçiminde verilen $A = (a_{nk})$ matrisinin tanımladığı operatöre Ağırlıklı Ortalama Operatörü denir.

TEOREM 1.3.1: Ağırlıklı ortalama operatörünün regüler olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için $P_n \to \infty$ olmasıdır ([14] Petersen 1966, sh.10).

Aşağıdaki teoremler bir ağırlıklı ortalama operatörünün $B(\ell_p)$ de olmasına ilişkindir.

TEOREM 1.3.2: A, $\underline{\lim} \dfrac{p_n}{P_n} > 0$ olacak biçimde bir ağırlıklı ortalama operatörü ise $A \in B(\ell_p), (1 \leq p < \infty)$, dir ([4] Cartlidge 1978).

TEOREM 1.3.3: A, bir ağırlık ortalama operatörü olsun. Eğer her $n \geq N$ için $p_{n+1} \geq p_n > 0$ olacak biçimde bir $N \geq 0$ sayısı varsa $A \in B(\ell_p)$, $(1 < p < \infty)$ dir ([4] Cartlidge 1978).

TEOREM 1.3.4: A ve B iki ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Eğer $B \in B(\ell_p)$ ve her $n \geq N$ için $b_{nn} \leq a_{nn} \leq Mb_{nn}$ olacak biçimde bir $N \geq 0$ sayısı varsa $A \in B(\ell_p), (1 < p < \infty)$, dir ([4] Cartlidge 1978).

Aşağıdaki teorem, pozitif terimli bir serinin karakterini belirlemek için zaman zaman başvurabileceğimiz bir kriterdir.

TEOREM 1.3.5 (Abel-Dini): $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ pozitif terimli ıraksak bir seri olsun. Bu durumda $D_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^{\alpha}}$$

serisi $\alpha > 1$ için yakınsak, $\alpha \leqq 1$ için ıraksaktır ([9] Knopp 1971, sh.290).

BÖLÜM 2

SINIRLI LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU ve FİNE SPEKTRUMU

2.1. Sınırlı Lineer Dönüşüm

X ve Y, aynı bir K cismi üzerinde normlu iki uzay ve $T:X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|Tx\| \leq M\|x\|$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa T ye X den Y içine bir sınırlı lineer dönüşüm adı verilir ve X den Y içine tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin sınıfı B(X,Y) ile gösterilir. Eğer $X = Y$ ise B(X,X) yerine kısaca B(X) yazacağız.

B(X,Y) üzerinde tanımlanan

$$(T + S)x = Tx + Sx$$

toplama ve

$$(\lambda T)x = \lambda Tx$$

skaler ile çarpma işlemleri ile K cismi üzerinde bir lineer uzaydır. Ayrıca B(X,Y) lineer uzayı

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

normuyla birlikte bir normlu lineer uzaydır. Eğer Y bir Banach uzayı ise B(X,Y) de bir Banach uzayıdır ([2] Brown ve Page 1970, sh.105).

TEOREM 2.1.1: X bir Banach uzayı olsun. B(X) deki tersi mevcut elemanların cümlesi, B(X) Banach uzayı içinde açıktır ([2] Brown ve Page 1970, sh.227).

X, K cismi üzerinde normlu bir uzay ve $T \in B(X)$ olsun. X^*, X in sürekli dualini göstermek üzere yani, $X^* = B(X,K)$ olmak üzere, her $x \in X$ ve her $f \in X^*$ için

$$T^*: X^* \rightarrow X^*$$
$$(T^*f)x = f(Tx)$$

biçiminde tanımlanan T^* operatörüne T nin adjointi denir.

TEOREM 2.1.2: X bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $T^* \in B(X^*)$ olup $\|T\| = \|T^*\|$ dir ([2] Brown ve Page 1970, sh.239).

TEOREM 2.1.3: Eğer T ve T^* ın tersi mevcut ise $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ dir ([7] Goldberg 1966, sh.60).

TEOREM 2.1.4: X bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T^{-1} in mevcut olması için gerek ve yeter şart T^* ın örten olmasıdır ([7] Goldberg 1966, sh.60).

TEOREM 2.1.5: X normlu bir uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T nin X içinde yoğun bir görüntüye sahip olması için gerek ve yeter şart T^* ın birebir olmasıdır ([7] Goldberg 1966, sh.59).

2.2. Spektrum

Bu kısımda X'i, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde normlu bir lineer uzay olarak gözönüne alıp, θ ile X lineer uzayının sıfır elemanını ve I ile X den X'e tanımlı özdeşlik operatörünü göstereceğiz.

TANIM 2.2.1: $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(x)$ olsun. Eğer $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut, sınırlı ve X de yoğun bir cümle üzerinde tanımlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T nin bir regüler değeri denir. T nin bütün regüler değerlerinin oluşturduğu cümleye T nin resolventi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir.

$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ cümlesine de T nin spektrumu adı verilir. Buna göre, eğer $\lambda \in \sigma(T)$ ise

(i) $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut

(ii) $(\lambda I - T)^{-1}$ sınırlı

(iii) $(\lambda I - T)^{-1}$ X de yoğun bir cümle üzerinde tanımlı

özelliklerinden enaz biri gerçeklenmez.

Eğer bir T sınırlı lineer operatörü birden fazla normlu lineer uzay üzerinde gözönüne alınıyorsa, gözönüne alındığı X normlu lineer uzayını belirtmek için $\rho(T)$ yerine $\rho(T,X)$ ve $\sigma(T)$ yerine $\sigma(T,X)$ yazacağız.

TANIM 2.2.2: $T:X \to X$ bir lineer operatör olsun. Eğer, $Tx = \lambda x$ olacak biçimde X de bir $x \neq \theta$ elemanı varsa λ kompleks sayısına T nin bir özdeğeri ve $x \in X$ elemanına da bir özvektör denir.

X in $\{x \in X: Tx = \theta\}$ alt cümlesine T nin çekirdeği denir ve Çek(T) ile gösterilir.

Tanım 2.2.2 gereğince "λ kompleks sayısının, T nin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $\lambda I - T$ operatörünün bire bir olmamasıdır" önermesi doğrudur. Gerçekten,

$\lambda \in \mathbb{C}$, T için bir özdeğer ise $Tx = \lambda x$ olacak biçimde X de bir $x \neq \theta$ elemanı vardır. Buna göre $Tx = \lambda x$ ise $(\lambda I - T)x = \theta$ olup $x \in$ Çek$(\lambda I - T)$ ve $x \neq \theta$ olduğundan $\lambda I - T$ operatörü bire bir değildir.

Karşıtı da benzer biçimde gösterilir.

Buradan şu sonucu elde ederiz.

SONUÇ 2.2.3: $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı T nin bir özdeğeri olsun. Bu durumda $\lambda \in \sigma(T)$ dir.

$X \neq \{\theta\}$ normlu bir uzay olmak üzere $T \in B(X)$ operatörünün bütün özdeğerlerinin oluşturduğu cümleyi $\sigma_p(T)$ ile göstereceğiz ve T nin nokta(point) spektrumu diyeceğiz.

Bilindiği gibi eğer X sonlu boyutlu bir normlu uzay ise $T:X \rightarrow X$ lineer operatörü sınırlıdır ve T^{-1} in mevcut olması için gerek ve yeter şart T nin bire bir olmasıdır. O halde şu önemli sonucu elde ederiz.

SONUÇ 2.2.4: $X \neq \{\theta\}$ sonlu boyutlu normlu bir uzay ve $T: X \to X$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda $\sigma_p(T) = \sigma(T)$ dir.

Burada hemen belirtelim ki, eğer X sonsuz boyutlu bir normlu uzay ise $T \in B(X)$ operatörü için $\sigma_p(T) = \sigma(T)$ eşitliği geçerli değildir. Yani $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ bağıntısı genellikle kesin bir bağıntıdır. Bunu bir örnekle görelim.

ÖRNEK 2.2.5: $T: \ell_2 \to \ell_2$

$$x \to Tx = (x_0, x_1, \cdots) = (0, x_0, x_1, \cdots)$$

biçiminde tanımlanan T operatörünü gözönüne alalım. Tanımı gereğince T lineerdir ve

$$\|Tx\| = (\sum_k |x_k|^2)^{1/2} = \|x\|$$

olduğundan sınırlıdır, yani $T \in B(\ell_2)$ dir. Ayrıca, aşikâr olarak T bire birdir. Dolayısıyla $\lambda = 0 \notin \sigma_p(T)$ dir. Ancak $x_0 \neq 0$ olacak biçimdeki bütün $x = (x_k) \in \ell_2$ elemanları T nin görüntü uzayının elemanı olmadığından T^{-1} in tanım cümlesi ℓ_2 de yoğun değildir. O halde $\lambda = 0$, T nin bir regüler değeri değildir yani $\lambda = 0 \in \sigma(T)$ dir.

TANIM 2.2.6: $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun.

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

sayısına T nin spektral yarıçapı denir. Eğer X bir Banach uzayı ise

$$r(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n}$$

dir ([2] Brown ve Page 1970, sh.237). Buna göre $\lambda \in \sigma(T)$ ise $|\lambda| \leqq r(T) \leqq \|T\|$ yazabiliriz.

TEOREM 2.2.7: $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $\sigma(T^*) \subset \sigma(T)$ dir. Eğer X bir Banach uzayı ise $\sigma(T^*) = \sigma((T)$ dir ([2] Brown ve Page 1970, sh.242).

Ancak $\sigma_p(T)$ ile $\sigma_p(T^*)$ arasında Teorem 2.2.7 deki gibi bir karşılaştırma yapılamamaktadır.

2.3. Fine Spektrum

X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. T nin görüntü uzayını R(T) ve R(T) nin X içindeki kapanışını $\overline{R(T)}$ ile gösterelim. Bu durumda R(T) için

I. $R(T) = X$

II. $R(T) \neq X$ ancak $\overline{R(T)} = X$

III. $\overline{R(T)} \neq X$

ve R(T) üzerinde göz önüne alınan T^{-1} için

1. T^{-1} mevcut ve sınırlı
2. T^{-1} mevcut ancak sınırlı değil
3. T^{-1} mevcut değil

durumları vardır ([7] Goldberg 1966, sh.66).

Yukarıdaki incelemeleri birlikte göz önüne alırsak; $I_2, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1, III_2$ ve III_3 olmak üzere dokuz farklı durum söz konusudur. Örneğin $T \in I_1$ ise

$R(T) = X$ ve T^{-1} mevcut ve sınırlıdır, $T \in III_2$ ise $\overline{R(T)} \neq X$ ve T^{-1}, $R(T)$ üzerinde mevcut ancak sınırlı değildir.

Eğer λ, $\lambda I - T \in I_1$ veya $\lambda I - T \in II_1$ olacak biçimde bir kompleks sayı ise $\lambda \in \rho(T)$ ve diğer durumlarda ise $\lambda \in \sigma(T)$ dir. Burada $\lambda I - T$ nin bulunduğu sınıfı göz önüne alarak $\sigma(T)$ yi $I_2\sigma(T)$, $I_3\sigma(T)$, $II_2\sigma(T)$, $II_3\sigma(T)$, $III_1\sigma(T)$, $III_2\sigma(T)$ ve $III_3\sigma(T)$ alt cümlelerine ayıracağız ve örneğin $\lambda I - T \in II_3$ ise $\lambda \in II_3\sigma(T)$ yazacağız.

BÖLÜM 3

CESÀRO OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU

Bu bölümde C, Cesàro operatörünün $c_0, c, \ell_\infty, \ell_p$, $(1 < p < \infty)$, bv ve bv_0 uzayları üzerindeki spektrumunu ve c üzerindeki fine spektrumunu inceleyeceğiz.

Cesàro operatörüne karşılık gelen $C = (c_{nk})$ matrisinin (4) ile verildiğini biliyoruz. c_0^*, ℓ_p^*, $(1 < p < \infty)$, ve bv_0^* uzaylarına sırasıyla izometrik olarak izomorf olan ℓ_1, ℓ_q, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, ve bs üzerinde göz önüne alınan C^* adjoint operatörü (4) ile verilen $C = (c_{nk})$ matrisinin transpozu, yani

$$c_{nk}^* = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & 0 \leq n \leq k \\ \\ 0, & k < n \end{cases} \tag{6}$$

olmak üzere $C^* = (c_{nk}^*)$ ile verilir. c^* ve bv^* uzaylarına sırasıyla izometrik olarak izomorf olan ℓ_1 ve $\mathbb{C} \oplus bs$ üzerinde göz önüne alınan C^* adjoint operatörü ise

$$c_{nk}^* = \begin{cases} 1, & n = k = 0 \\ 0, & n = 0,\ n < k \\ \dfrac{1}{k}, & 1 \leq n \leq k \\ 0, & 0 < k < n \end{cases} \tag{7}$$

olmak üzere $C^* = (c_{nk}^*)$ ile verilir ([12] Okutoyi 1986).

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe

$$F = \{\lambda \in \mathbb{C}:\ |\lambda - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{2}\}$$

ve

$$E = \{\lambda \in \mathbb{C}:\ |\lambda - \tfrac{1}{2}| \leqq \tfrac{1}{2}\}$$

olarak alınacaktır.

3.1. Cesàro Operatörünün c_0 Üzerindeki Spektrumu

Bu kısımda C Cesàro operatörünü $\|x\| = \sup_n |x_n|$ normu ile birlikte bir Banach uzayı olan c_0 uzayı üzerinde göz önüne alıp spektrumunu inceleyeceğiz.

Teorem 1.2.1 gereğince $C \in B(c_0)$ ve (2) den kolayca görüleceği gibi $\|C\| = 1$ olduğundan $\|C^*\| = 1$ dir.

TEOREM 3.1.1: $\sigma_p(C,c_0) = \phi$ dir ([15] Reade 1985).

İspat : $\sigma_p(C,c_0) \neq \phi$ olsun. O halde $Cx = \lambda x$ olacak biçimde c_0 da θ dan farklı bir $x = (x_n)$ dizisi vardır. Öyleyse,

$$\begin{aligned}
x_0 &= \lambda x_0 \\
\tfrac{1}{2}(x_0 + x_1) &= \lambda x_1 \\
\tfrac{1}{3}(x_0 + x_1 + x_2) &= \lambda x_2 \\
&\vdots \\
\tfrac{1}{n+1}(x_0 + \cdots + x_n) &= \lambda x_n \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

denklemleri gerçeklenir. Bu denklemleri çözerek, eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni x_m ise $\lambda = \frac{1}{m+1}$ ve her $n \geqq m$ için

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n+1-m} \geqq 1$$

elde ederiz. Bu ise $x_n \to 0$, $(n \to \infty)$, olması ile çelişir.

O halde $\sigma_p(C, c_0) = \phi$ dir.

LEMMA 3.1.2: Eğer $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) = \alpha$ ise $n \to \infty$ için

$$\prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right| \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$$

dır. Burada $a_n \sim b_n$ notasyonu ile (a_n/b_n) ve (b_n/a_n) dizilerinin sınırlı olması gösterilmektedir ([15] Reade 1985).

TEOREM 3.1.3: $\sigma_p(C^*, \ell_1) = F \cup \{1\}$ dir ([15] Reade 1980).

İspat: $x \neq \theta$ ve $C^*x = \lambda x$ olsun. Bu durumda (6) dan

$$x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \cdots = \lambda x_0$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \cdots = \lambda x_1$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n+1}x_n + \frac{1}{n+2}x_{n+1} + \cdots = \lambda x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

denklemleri gerçeklenir. Bu denklemleri çözersek $x_0 \neq 0$ olmak üzere $n \geqq 1$ için

$$x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right) x_0 \tag{8}$$

elde ederiz. Lemma 3.1.2 gereğince $x \in \ell_1$ yani $\sum_n |x_n| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) > 1$ olmasıdır. Halbuki $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) > 1$ olması ise $|\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ olmasına denktir.

UYARI: Aslında Reade [15], $\sigma_p(C^*, \ell_1) = F$ olduğunu gösterdi. Ancak Okutoyi ve Thorpe [13], $\lambda = 1$ inde ℓ_1 üzerinde göz önüne alınan C^* adjoint operatörünün bir özdeğeri olması gerektiğini belirtmişlerdir. Gerçekten de,

$x_0 \neq 0$ ve $n \geq 1$ için $x_n = 0$, yani $x = (x_0, 0, \ldots)$ ise $C^*x = x$ gerçeklenir. Halbuki, $x \neq \theta$ ve $x \in \ell_1$ olduğundan $\lambda = 1$ bir özdeğerdir.

Böylece $\sigma_p(C^*, \ell_1) = F \cup \{1\}$ elde edilir.

c_0 ın bir Banach uzayı olması nedeniyle $\sigma(C, c_0) = \sigma(C^*, \ell_1)$ ve $\sigma(C, c_0)$ kapalı olduğundan $E \subseteq \sigma(C, c_0)$ yazabiliriz. Halbuki aşağıdaki teoremde de göstereceğimiz gibi $\sigma(C, c_0) = E$ dir.

TEOREM 3.1.4: $\sigma(C, c_0) = E = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$ dir ([15] Reade 1985).

İspat: İspatı $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ özelliğine sahip λ kompleks sayılarının $\rho(C, c_0)$ da bulunduğunu göstererek yapacağız.

Teorem 3.1.1. gereğince $\lambda I - C$ bire bir dir.

Şimdi $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ özelliğine sahip λ kompleks sayıları için $(\lambda I - C)^{-1} \in B(c_0)$ olduğunu gösterelim.

$(\lambda I - C)x = y$ den x i y cinsinden çözersek

$$x_0 = \frac{1}{\lambda - 1} y_0$$

ve $n \geq 1$ için

$$x_n = \frac{1}{\lambda - \frac{1}{n+1}} y_n + \frac{1}{(n+1)(\lambda - \frac{1}{n+1})(\lambda - \frac{1}{n})} y_{n-1}$$

$$+ \frac{\lambda}{(n+1)(\lambda - \frac{1}{n+1})(\lambda - \frac{1}{n})(\lambda - \frac{1}{n-1})} y_{n-2}$$

$$+ \cdots + \frac{\lambda^{n-2}}{(n+1)\prod_{i=2}^{n+1}(\lambda - \frac{1}{i})} y_1$$

$$+ \frac{\lambda^{n-1}}{(n+1)\prod_{i=1}^{n+1}(\lambda - \frac{1}{i})} y_0$$

denklemleri gerçeklenir. Bu ise

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{n-(k+1)}}{(n+1)\prod_{i=k+1}^{n+1}(\lambda - \frac{1}{i})}, & 0 \leq k < n \\[2ex] \dfrac{1}{\lambda - \frac{1}{n+1}}, & n = k \\[2ex] 0, & k > n \end{cases} \tag{9}$$

olmak üzere $(\lambda I - C)^{-1} = A = (a_{nk})$ matrisini tanımlar.

Lemma 3.1.2 gereğince aşikar olarak her sabit k için $\lim_n a_{nk} = 0$ dır.

Şimdi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olduğunu gösterelim.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}| = |a_{00}| = \frac{1}{|\lambda - 1|} = O(1)$$

dır. $n \geq 1$ için $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) = \alpha < 1$ olmak üzere Lemma 3.1.2 yardımıyla,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = |a_{nn}| + \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}|$$

$$= \frac{1}{\left|\lambda - \frac{1}{n+1}\right|} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+1)|\lambda|^2 \prod_{i=k+1}^{n+1} \left|1 - \frac{1}{i\lambda}\right|}$$

$$= \frac{n+1}{|\lambda(n+1)-1|} + \frac{1}{|\lambda|^2(n+1)} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} \left|1 - \frac{1}{i\lambda}\right|} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{k} \left|1 - \frac{1}{i\lambda}\right|}{\prod_{i=1}^{n+1} \left|1 - \frac{1}{i\lambda}\right|} \right\}$$

$$\leq O(1) + \frac{M(n+1)^{\alpha-1}}{|\lambda|^2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha}} \right\}$$

$$\leq O(1) + \frac{M(n+1)^{\alpha-1}}{|\lambda|^2} \left\{ 1 + \int_0^{n-1} \frac{dx}{x^{\alpha}} \right\}$$

$$\leq O(1) + \frac{M(n+1)^{\alpha-1}}{|\lambda|^2} \left\{ 1 + \frac{(n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right\}$$

$$\leq O(1) + \frac{1}{|\lambda|^2} \left\{ (n+1)^{\alpha-1} + O(1) \right\}$$

elde ederiz. O halde $\alpha = \mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) < 1$ olduğundan

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

dır.

Böylece Teorem 1.1.3. ün şartları gerçeklenir, yani $(\lambda I - C)^{-1} = A \in B(c_0)$ dır. Dolayısıyla $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ için $\lambda \in \rho(C,c_0)$ dır.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2. Cesàro Operatörünün c Üzerindeki Spektrumu

Bu kısımda C Cesàro operatörünü $\|x\| = \sup_n |x_n|$ normu ile birlikte bir Banach uzayı olan c üzerinde göz önüne alıp spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 3.2.1. $\sigma_p(C,c) = \{1\}$ dir ([12] Okutoyi 1986).

İspat $x \neq \theta$ ve $Cx = \lambda x$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.1 in ispatında olduğu gibi eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni x_m ise $\lambda = \frac{1}{m+1}$ ve her $n \geq m$ için

$$x_n = \frac{n}{n-m} x_{n-1}$$

elde edilir. Buradan

$$x_n = \frac{n}{n-m} \cdot \frac{n-1}{n-1-m} \cdot \frac{n-2}{n-2-m} \cdots \frac{m+1}{m+1-m} x_m$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} x_m = \binom{n}{m} x_m$$

yani,

$$x_n = \begin{cases} \binom{n}{m} x_m, & m \leq n \\ 0, & m > n \end{cases}$$

elde edilir ki, $x = (x_n) \in c$ olması için gerek ve yeter şart $m = 0$ yani $\lambda = 1$ olmasıdır.

Bu ise ispatı tamamlar.

TEOREM 3.2.2. $\sigma_p(C^*, \ell_1) = F \cup \{1\}$ dir ([12] Okutoyi 1986).

İspat: $x \neq \theta$ ve $C^*x = \lambda x$ gerçeklensin. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda x_0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \cdots &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \cdots &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ \frac{1}{n}x_n + \frac{1}{n+1}x_{n+1} + \cdots &= \lambda x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

denklemleri gerçeklenir.

$x_0 = \lambda x_0$ ise $\lambda = 1$ veya $x_0 = 0$ olmalıdır. Diğer yandan $n \geq 2$ için

$$x_n = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{i\lambda}\right) x_1 \tag{10}$$

elde edilir. Eğer $\lambda = 1$ ise $x_0 \neq 0$ için $x = (x_0, x_1, 0, \cdots) \in \ell_1$ olmak üzere $C^*x = x$ dir.

$n \geq 2$ için genel terimi (10) ile verilen

$x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ dizisinin ℓ_1 de bulunması için $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) > 1$ olmalı yani, $|\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ gerçeklenmelidir.

Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 den $F \cup \{1\} \subseteq \sigma(C,c)$ ve c nin bir Banach uzayı olması nedeniyle $E \subseteq \sigma(C,c)$ yazabiliriz. Halbuki aşağıdaki teoremde de göstereceğimiz gibi $\sigma(C,c) = E$ dir.

TEOREM 3.2.3: $\sigma(C,c) = E = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$ dir ([12] Okutoyi 1986).

İspat: İspat için $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ özelliğine sahip λ kompleks sayıları için $(\lambda I - C)^{-1} \in B(c)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise Teorem 3.1.4 ün ispatında olduğu gibi gösterilir.

ÖNERME 3.2.4: $A \in B(c)$ olsun. Bu durumda $\sigma(A,c) = \sigma(A,\ell_\infty)$ dır ([4] Cartlidge 1978).

İspat: $\lambda \in \rho(A,c)$ olsun. Bu durumda $(\lambda I - A)^{-1} \in B(c)$, yani $(\lambda I - A)^{-1}$ (2) yi gerçeklediğinden $(\lambda I - A)^{-1} \in B(\ell_\infty)$ dır. Bu ise $\lambda \in \rho(A,\ell_\infty)$ olması demektir.

Karşıt olarak, $\lambda \in \rho(A,\ell_\infty)$ ise $(\lambda I - A)^{-1}$ (2) yi gerçekler. Diğer yandan $A \in B(c)$ olduğundan $\lambda I - A \in B(c)$ dir. Böylece Önerme 1.1.5 den $(\lambda I - A)^{-1} \in B(c)$ yani $\lambda \in \rho(A,c)$ elde ederiz.

O halde $\rho(A,c) = \rho(A,\ell_\infty)$ ve dolayısıyla $\sigma(A,c) = \sigma(A,\ell_\infty)$ dir.

SONUÇ 3.2.5: $\sigma(C,\ell_\infty) = E$ dir.

3.3. Cesàro Operatörünün ℓ_p ,$(1 < p < \infty)$, Üzerindeki Spektrumu

Bu kısımda C, Cesàro Operatörünü $\|x\| = (\sum_k |x_n|^p)^{1/p}$ normu ile birlikte bir Banach uzayı olan ℓ_p, $(1 < p < \infty)$, uzayı üzerinde göz önüne alıp spektrumunu inceleyeceğiz.

LEMMA 3.3.1: Eğer $1 < p < \infty$, $a_n \geq 0$ ve $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n+1}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p$$

olup buradaki $\frac{p}{p-1}$ sabiti daha küçük bir sabitle değiştirilemez ([8] Hardy ve Littlewood 1952, sh.239).

TEOREM 3.3.2: $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $C \in B(\ell_p)$ dir.

İspat: $1 < p < \infty$ ve $x \in \ell_p$ olsun. Lemma 3.3.1 de $a_n = |x_n|$ alınırsa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $Cx = y$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{n+1}\right|^p$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |x_k|\right)^p$$

$$\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p = q^p \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

elde edilir. O halde $C \in (\ell_p, \ell_p)$ dir. Diğer yandan

$$\|C\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Cx\|}{\|x\|} \leqq \sup_{x \neq \theta} q = q < \infty$$

olduğundan $C \in B(\ell_p)$ elde edilir.

C operatörünün $\ell_p, (1 < p < \infty)$ üzerindeki normu, Teorem 3.3.2 gereğince $q = \frac{p}{p-1}$ olmak üzere

$$\|C\| \leqq q$$

eşitsizliğini sağlar. Ancak Lemma 3.3.1. gereğince

$$\|Cx\| \leqq M\|x\|$$

eşitsizliğini gerçekleyen $M > 0$ sayılarının en küçüğü q olduğundan $\|C\| = q$ olmak zorundadır.

TEOREM 3.3.3: $1 < p < \infty$ olmak üzere $\sigma_p(C, \ell_p) = \phi$ dır ([10] Leibowitz 1972).

İspat: $1 < p < \infty$ ve $x \neq \theta$ olmak üzere $Cx = \lambda x$ olsun. Bu durumda

$$x_0 = \lambda x_0$$

$$\frac{1}{2}(x_0 + x_1) = \lambda x_1$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n+1}(x_0 + \cdots + x_n) = \lambda x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

denklemleri gerçeklenir. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni x_m ise $\lambda = \frac{1}{m+1}$ ve her $n \geqq m$ için

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n+1-m} \geqq 1$$

elde edilir ki, bu durumda $\lim\limits_{n} |x_n|^p = 0$ olamayacağından $\sum\limits_{n} |x_n|^p = \infty$ yani $x \notin \ell_p$ dir.

Bu ise ispatı tamamlar.

TEOREM 3.3.4: $\sigma_p(C^*, \ell_q) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{q}{2}| < \frac{q}{2}\}$ dir ([10] Leibowitz 1972).

İspat: $x \neq \theta$ olmak üzere $C^*x = \lambda x$ ise $n \geq 1$ için

$$x_n = \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{i\lambda}) x_0$$

ve buradan da

$$|x_n|^q = |x_0|^q \prod_{i=1}^{n} |1 - \frac{1}{i\lambda}|^q$$

elde edilir ki, $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) = \alpha$ olmak üzere Lemma 3.1.2 gereğince

$$|x_n|^q \sim \frac{1}{n^{\alpha q}}$$

olduğundan $x = (x_n) \in \ell_q$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha q > 1$ yani $\alpha > \frac{1}{q}$ olmasıdır. Bu ise $|\lambda - \frac{q}{2}| < \frac{q}{2}$ olmasına denktir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\ell_p, (1 < p < \infty)$, bir Banach uzayı olduğundan Teorem 3.3.4. gereğince

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{q}{2}| \leq \frac{q}{2}\} \subseteq \sigma(C, \ell_p)$$

yazabiliriz. Ancak aşağıdaki teoremde de göstereceğimiz gibi

$$\sigma(C,\ell_p) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \tfrac{q}{2}| \leq \tfrac{q}{2}\}$$

dir.

TEOREM 3.3.5. $\sigma(C,\ell_p) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{q}{2}| \leq \frac{q}{2}\}$ dir ([10] Leibowitz 1972).

İspat: Teorem 3.3.3 gereğince her λ kompleks sayısı için $\lambda I - C$ bire bir dir.

İspatı, $|\lambda - \frac{q}{2}| > \frac{q}{2}$ özelliğine sahip λ kompleks sayıları için $(\lambda I - C)^{-1} \in B(\ell_p)$ olduğunu göstererek tamamlayacağız.

$(\lambda I - C)x = y$ den x i y cinsinden çözersek $(\lambda I - C)^{-1} = A = (a_{nk})$, (9) ile verilmek üzere $x = Ay$ elde ederiz. İspat için $A \in B(\ell_p)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$n,k = 0,1,2,\ldots$ için $b_{nk} = \frac{n+1}{k+1}$ olsun.

$\alpha = \mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) < \frac{1}{q}$ olmak üzere Lemma 3.1.2 yardımıyla

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|(b_{nk})^{1/p} = \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}|(b_{nk})^{1/p} + |a_{nn}|b_{nn}$$

$$= \frac{n+1}{|(n+1)\lambda - 1|} + \frac{(n+1)^{(1/p)-1}}{|\lambda|^2 \prod_{i=1}^{n+1} |1 - \frac{1}{i\lambda}|}$$

$$+ \frac{(n+1)^{(1/p)-1}}{|\lambda|^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{1/p} \prod_{i=k+1}^{n+1} |\lambda - \frac{1}{i\lambda}|}$$

$$= O(1) + \frac{(n+1)^{(1/p)-1}}{|\lambda|^2} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} |1 - \frac{1}{i\lambda}|} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{k} |1 - \frac{1}{i\lambda}|}{(k+1)^{1/p} \prod_{i=1}^{n+1} |1 - \frac{1}{i\lambda}|} \right\}$$

$$\leq O(1) + \frac{M(n+1)^{(1/p)-1}}{|\lambda|^2} \left\{ (n+1)^{\alpha} + (n+1)^{\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{1/p} k^{\alpha}} \right\}$$

$$\leq O(1) + \frac{M}{|\lambda|^2} (n+1)^{\alpha+(1/p)-1} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha+(1/p)}} \right\}$$

$$\leq O(1) + \frac{M}{|\lambda|^2} (n+1)^{\alpha+(1/p)-1} \left\{ 1 + \int_0^{n-1} \frac{dx}{x^{\alpha+(1/p)}} \right\}$$

$$= O(1) + \frac{M}{|\lambda|^2} (n+1)^{\alpha+(1/p)-1} \left\{ 1 + \frac{(n-1)^{1-\alpha-(1/p)}}{1 - \alpha - \frac{1}{p}} \right\}$$

$$\leq O(1) + \frac{M}{|\lambda|^2} \left\{ (n+1)^{\alpha+(1/p)-1} + \frac{1}{1 - \alpha - \frac{1}{p}} \right\}$$

elde edeceğiz. Buradan $\alpha + \frac{1}{p} - 1 < \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1 < 0$ olduğundan

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| (b_{nk})^{1/p} < \infty$$

bulunur.

$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| (b_{nk})^{-1/p} = |a_{kk}| (b_{kk})^{-1/q} + \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_{nk}| (b_{nk})^{-1/p}$$

$$= \frac{k+1}{|\lambda(k+1)-1|} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)|\lambda|^2 \prod_{i=k+1}^{n+1} |1 - \frac{1}{i\lambda}|} \left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{-1/p}$$

$$= 0(1) + \frac{(k+1)^{1/q}}{|\lambda|^2} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{k} |1 - \frac{1}{i\lambda}|}{\prod_{i=1}^{n+1} |1 - \frac{1}{i\lambda}|} (n+1)^{-1-(1/p)}$$

$$\leqq 0(1) + \frac{K(k+1)^{(1/q)-\alpha}}{|\lambda|^2} \sum_{n=k+1}^{\infty} (n+1)^{\alpha-1-(1/q)}$$

$$\leqq 0(1) + \frac{K(k+1)^{(1/q)-\alpha}}{|\lambda|^2} \int_k^{\infty} (x+1)^{\alpha-1-(1/q)} dx$$

$$= 0(1) + \frac{K(k+1)^{(1/q)-\alpha}}{|\lambda|^2} \cdot \frac{(k+1)^{-(1/q)+\alpha}}{\alpha - \frac{1}{q}} = 0(1)$$

elde ederiz. O halde

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}| (b_{nk})^{-1/q} < \infty$$

dır.

(i) ve (ii) den Teorem 1.1.9 gereğince $A \in B(\ell_p)$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

SONUÇ 3.3.6: $\sigma(C, \ell_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leqq 1\}$ dir.

3.4. Cesàro Operatörünün bv_0 Üzerindeki Spektrumu

Bu kısımda, C Cesàro operatörünü, $\|x\| = \sum_k |x_k - x_{k+1}|$ normuyla bir Banach uzayı olan bv_0, ([21] Wilansky 1984, sh.110), üzerinde göz önüne alıp spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 3.4.1: $C \in B(bv_0)$ dir ([12] Okutoyi 1986).

İspat: (4) den

(i) Her k için $\lim\limits_{n} c_{nk} = \lim\limits_{n} \frac{1}{n+1} = 0$ dır.

(ii) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{m} (c_{nk} - c_{n-1,k}) \right| = \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \right| = 1,$$

$c_{-1,k} = 0$

olduğundan

$$\sup_m \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{m} (c_{nk} - c_{n-1,k}) \right| = 1$$

dır.

Böylece Teorem 1.1.12 gereğince $C \in B(bv_0)$ elde edilir.

TEOREM 3.4.2: $\sigma_p(C, bv_0) = \phi$ dır ([12] Okutoyi 1986).

İspat: $bv_0 \subset c_0$ olduğundan ispat Teorem 3.1.1. den elde edilir.

Şimdi, ispatlayacağımız teoremlerde yararlanacağımız şu lemmayı verelim.

LEMMA 3.4.3: $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$z_n = \prod_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{(i+1)\lambda}\right)$$

olsun. Bu durumda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda \neq 1$ olmak üzere $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) \geq 1$ olmasıdır ([12] Okutoyi 1986).

TEOREM 3.4.4: $\sigma_p(C^*,bs)=E\setminus\{0\}=\{\lambda\in\mathbb{C}: |\lambda-\frac{1}{2}|\leq\frac{1}{2}\}\setminus\{0\}$ dır ([12] Okutoyi 1986).

İspat: $x\neq\theta$ olmak üzere $C^*x=\lambda x$ gerçeklensin. Bu durumda $x=(x_n)$ dizisinin genel terimi (8) ifadesini gerçekler.

Buradan Lemma 3.4.3 gereğince $x\in bs$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda\neq 0,1$ olmak üzere, $Re(\frac{1}{\lambda})\geqq 1$ olmasıdır.

$x_0\neq\theta$ ve $n\geqq 1$ için $x_n=0$ yani $x=(x_0,0,0,\ldots)$ ise $C^*x=x$ olup $x\neq\theta$ ve $x\in bs$ olduğundan $\lambda=1\in\sigma_p(C^*,bs)$ dir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

UYARI: Aslında, [12] de $\sigma_p(C^*,bs)=E$ olduğu ispatlanmıştır. Fakat ispat yeniden incelenirse $\lambda=0$ ın bir özdeğer olamayacağı görülecektir.

TEOREM 3.4.5: $\sigma(C,bv_0)=E$ dir ([12] Okutoyi 1986).

İspat: bv_0 ın bir Banach uzayı olması nedeniyle $\sigma(C,bv_0)$ kapalıdır. O halde, Teorem 3.4.4 gereğince $E\subseteq\sigma(C,bv_0)$ dır. İspatı $|\lambda-\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}$ özelliğine sahip λ kompleks sayıları için $(\lambda I-C)^{-1}\in B(bv_0)$ olduğunu göstererek tamamlayacağız.

$(\lambda I-C)x=y$ den x i y cinsinden çözersek $A=(a_{nk})$, (9) ile verilen matris olmak üzere $Ay=(\lambda I-C)^{-1}y=x$ elde ederiz.

(i) Her k için $\lim_n a_{nk} = 0$ olduğu Teorem 3.1.1 in ispatında gösterilmişti.

$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Big| \sum_{k=0}^{m} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \Big| = \sum_{n=0}^{m} \Big| \sum_{k=0}^{n} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \Big|$$

$$+ \Big| \sum_{k=0}^{m} (a_{m+1,k} - a_{mk}) \Big| + \sum_{n=m+2}^{\infty} \Big| \sum_{k=0}^{m} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \Big|$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$$

diyelim.

$e = (1,1,1,...)$ olmak üzere $Ae = \left(\sum_{k=0}^{n} a_{nk} \right)$ dır.

Diğer yandan $A(\lambda I - C) = (\lambda I - C)^{-1}(\lambda I - C) = I$ ve $Ce = e$ olduğundan,

$$A(\lambda I - C) = e \Longrightarrow A(\lambda e - Ce) = e$$
$$\Longrightarrow A((\lambda - 1)e) = e$$
$$\Longrightarrow (\lambda - 1)Ae = e$$
$$\Longrightarrow Ae = \frac{1}{\lambda - 1} e$$

elde edilir. O halde

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \frac{1}{\lambda - 1}$$

bulunur. Dolayısıyla $a_{-1,k} = 0$ olmak üzere

$$\Sigma_1 = |a_{00}| + \sum_{n=1}^{m} \Big| \sum_{k=0}^{n} a_{nk} - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} \Big|$$

$$= \frac{1}{|\lambda - 1|} + \sum_{n=1}^{m} \Big| \frac{1}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda - 1} \Big| = \frac{1}{|\lambda - 1|} \qquad (11)$$

elde ederiz.

$$\Sigma_2 = \left|\sum_{k=0}^{m} (a_{m+1,k} - a_{mk})\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{m+1} a_{m+1,k} - a_{m+1,m+1} - \sum_{k=0}^{m} a_{mk}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\lambda - 1} - \frac{m+2}{(m+2)\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda - 1}\right|$$

$$= \frac{m+2}{|(m+2)\lambda - 1|} = 0(1) \qquad (12)$$

elde ederiz.

$\alpha = Re(\frac{1}{\lambda}) < 1$ olmak üzere Lemma 3.1.2 den

$$\Sigma_3 = \sum_{n=m+2}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{m} (a_{nk} - a_{n-1,k})\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{n=m+2}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{m} \left[\frac{1}{(n+1)\prod_{i=k}^{n}(1 - \frac{1}{(i+1)\lambda})} - \frac{1}{n\prod_{i=k}^{n-1}(1 - \frac{1}{(i+1)\lambda})}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{n=m+2}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{m} \frac{n - (n+1)(1 - \frac{1}{(n+1)\lambda})}{n(n+1)\prod_{i=k}^{n}(1 - \frac{1}{(i+1)\lambda})}\right|$$

$$= \frac{|1 - \frac{1}{\lambda}|}{|\lambda|^2} \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left|\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\prod_{i=k}^{n}(1 - \frac{1}{(i+1)\lambda})}\right|$$

$$\leq \frac{|1 - \frac{1}{\lambda}|}{|\lambda|^2} \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\prod_{i=k}^{n}|1 - \frac{1}{(i+1)\lambda}|}$$

$$= \frac{|1-\frac{1}{\lambda}|}{|\lambda|^2}\Bigg\{\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\,\frac{1}{\prod_{i=0}^{n}|1-\frac{1}{(i+1)\lambda}|}$$

$$+\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{m}\frac{\prod_{i=0}^{k-1}|1-\frac{1}{(i+1)\lambda}|}{\prod_{i=0}^{n}|1-\frac{1}{(i+1)\lambda}|}\Bigg\}$$

$$= \frac{|\lambda-1|}{|\lambda|^2}\Bigg\{\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\,\frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1}|1-\frac{1}{i\lambda}|}$$

$$+\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{k}|1-\frac{1}{i\lambda}|}{\prod_{i=1}^{n+1}|1-\frac{1}{i\lambda}|}\Bigg\}$$

$$\leq \frac{K|\lambda-1|}{|\lambda|^3}\Bigg\{\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}}{n(n+1)}+\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}}{n(n+1)}\Big(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^{\alpha}}\Big)\Bigg\}$$

$$\leq \frac{K|\lambda-1|}{|\lambda|^3}\Bigg\{\frac{1}{(1-\alpha)(m+1)^{1-\alpha}}\,(1+m^{1-\alpha})\Bigg\}$$

$$= \frac{K|\lambda-1|}{(1-\alpha)|\lambda|^3}\Bigg\{\frac{1}{(m+1)^{1-\alpha}}+0(1)\Bigg\} = 0(1) \qquad (13)$$

elde ederiz.

Böylece (11),(12) ve (13) den

$$\sup_m \sum_{n=0}^{\infty}\Big|\sum_{k=0}^{m}(a_{nk}-a_{n-1,k})\Big| < \infty$$

bulunur.

Dolayısıyla Teorem 1.1.12 gereğince
$A = (\lambda I - C)^{-1} \in B(bv_0)$ dır.

Bu ise teoremi ispatlar.

3.5. Cesàro Operatörünün bv Üzerindeki Spektrumu

Bu kısımda Cesàro operatörünün
$\|x\| = |\lim x| + \sum_k |x_k - x_{k+1}|$ normuyla birlikte bir Banach uzayı olan bv üzerinde göz önüne alıp spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 3.5.1: $C \in B(bv)$ dir ([12] Okutoyi 1986).

İspatı: (1) $e = (1,1,1,\ldots)$ olmak üzere $Ce = e$ olduğundan $Ce \in bv$ dir.

$$\text{(ii)} \quad \sup_m \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{m} (c_{nk} - c_{n-1,k}) \right| = 1$$

olduğu Teorem 3.4.1 in ispatında gösterilmişti.

O halde Teorem 1.1.11 gereğince $C \in B(bv)$ dir.

TEOREM 3.5.2: $\sigma_p(C,bv) = \{1\}$ dir ([12] Okutoyi 1986).

İspat: $bv \subset c$ ve Teorem 3.2.1 gereğince $\sigma_p(C,c) = \{1\}$ olduğundan $\sigma_p(C,bv) \subseteq \{1\}$ olmalıdır. Diğer yandan $e = (1,1,\ldots) \in bv$ olup $Ce = e$ olduğundan $1 \in \sigma_p(C,bv)$ dir.

Böylece $\sigma_p(C,bv) = \{1\}$ elde edilmiş olur.

TEOREM 3.5.3: $\sigma_p(C^*, \mathbb{C} \oplus bs) = E \setminus \{0\}$ dır ([12] Okutoyi 1986).

İspat: $x \neq \theta$ olmak üzere $C^*x = \lambda x$ olsun. Buradan

$$\lambda x_0 = x_0$$

ve $n \geq 2$ için

$$x_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right) x_1 \tag{14}$$

elde edilir ki Lemma 3.4.3 gereğince $x_1 \neq 0$ olmak üzere genel terimi $n \geq 2$ için (14) ile verilen $x = (x_n)$ dizisinin bs de bulunması için gerek ve yeter şart $\lambda \neq 0,1$ olmak üzere $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) \geq 1$ olmasıdır.

Eğer $\lambda = 1$ ise $x_0 \neq 0$ olmak üzere $x = (x_0, x_1, 0, \ldots)$ seçilirse $x \in bs$ ve $C^*x = x$ olup $\lambda \neq \theta$ olduğundan $1 \in \sigma_p(C^*, \mathbb{C} \oplus bs)$ dir.

Ayrıca $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) \geq 1$ olması, $|\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ olmasına denk olduğundan $\sigma_p(C^*, \mathbb{C} \oplus bs) = E \setminus \{0\}$ elde edilir.

UYARI: Aslında, [12] de $\sigma_p(C^*, \mathbb{C} \oplus bs) = E = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$ olduğu ispatlanmıştır. Fakat ispat yeniden incelenirse $\lambda = 0$ ın bir özdeğer olamayacağı görülecektir.

TEOREM 3.5.4: $\sigma(C, bv) = E$ dir. ([12] Okutoyi 1986).

İspat: bv bir Banach uzayı olduğundan $\sigma(C, bv)$

kapalı olacağından Teorem 3.5.3 den $E \subseteq \sigma(C,bv)$ elde ederiz. İspatı tamamlamak için $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ özelliğine sahip λ kompleks sayıları için $(\lambda I - C)^{-1} \in B(bv)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

λ, $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ özelliğine sahip bir kompleks sayı olmak üzere $A = (\lambda I - C)^{-1} = (a_{nk})$ olsun.

$$\text{(i)} \quad \sup_m \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{m} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right| < \infty$$

olduğu Teorem 3.4.5 in ispatında gösterilmiştir.

(ii) $A(\lambda I - C) = (\lambda I - C)^{-1}(\lambda I - C) = I$ ve $Ce = e$ olduğundan $Ae = \frac{1}{\lambda - 1} e \in bv$ dir.

O halde Teorem 1.1.11 gereğince $A = (\lambda I - C)^{-1} \in B(bv)$ dir. Böylece $\sigma(C,bv) = E$ elde edilir.

3.6. Cesàro Operatörünün c Üzerindeki Fine Spektrumu

Bu kısımda C Cesàro operatörünü yine c üzerinde göz önüne alıp, fine spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 3.6.1: Eğer $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) < 1$ ise $\lambda \in \rho(C,c)$ dir ([19] Wegner 1975).

İspat: Kısım 3.2 de $\sigma(C,c) = E = \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$ olduğu gösterilmişti. $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) < 1$ olması $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ olmasına denk olduğundan ispat açıktır.

TEOREM 3.6.2: $\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ olmak üzere $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) > 1$ olsun. Bu durumda $\lambda \in III_1\sigma(C,c)$ dir ([19] Wegner 1975).

İspat: (i) $\lambda \neq 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ olduğundan $\lambda I - C$ operatörüne karşılık gelen matris bir normal matris olduğundan $\lambda I - C$ bire bir dir. Dolayısıyla $(\lambda I - C)^{-1}$ mevcut yani $\lambda I - C \in 1 \cup 2$ dir.

(ii) Şimdi $(\lambda I - C)^* = \lambda I - C^*$ operatörünü göz önüne alalım. Eğer $(\lambda I - C^*)x = \theta$ ise

$$(\lambda - 1)x_0 = 0$$

ve $n \geqq 1$ için

$$(\lambda - \frac{1}{n})x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0$$

denklemleri gerçeklenir. Bu denklemleri çözersek $x_0 = 0$ ve $n \geqq 2$ için x_n, (14) ile verilir. $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) > 1$ olduğundan Lemma 3.1.2 gereğince $x \in \ell_1$ dir. Yukarıda tanımlanan $x = (0, x_1, x_2, \ldots)$ dizisinin ℓ_1 de bulunması için $x_1 = 0$ ve dolayısıyla $x = \theta$ olması gerekmez, yani $\lambda I - C^*$ bire bir değildir.

O halde Teorem 2.1.5 gereğince $\overline{R(\lambda I - C)} \neq c$ yani $\lambda I - C \in III$ dir.

(i) ve (ii) yi birlikte göz önüne alırsak $\lambda I - C \in III_1 \cup III_2$ elde ederiz.

$\lambda I - C \in III_1$ olduğunu göstermek için Teorem 2.1.4

gereğince $R(\lambda I - C^*) = \ell_1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$y = (y_0, y_1, \ldots) \in \ell_1$ olsun. Eğer $(\lambda I - C^*)x = y$ olacak biçimde bir $x = (x_0, x_1, \ldots)$ dizisi mevcut ise

$$(\lambda - 1)x_0 = y_0$$

ve $n \geqq 1$ için

$$(\lambda - \frac{1}{n})x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{k} = y_n$$

denklemleri gerçeklenir. Eğer $x_1 = 0$ seçer ve x i y cinsinden çözersek

$$x_0 = \frac{1}{\lambda - 1} y_0$$

$$x_2 = \frac{1}{\lambda} [y_2 - y_1]$$

ve $n \geqq 3$ için

$$x_n = \frac{1}{\lambda} [y_n - \frac{1}{(n-1)} y - \frac{1}{(n-2)\lambda} \quad (1 - \frac{1}{(n-1)\lambda})y_{n-2}$$

$$- \cdots \frac{1}{2\lambda}(1 - \frac{1}{(n-1)\lambda})(1 - \frac{1}{(n-2)\lambda}) \cdots (1 - \frac{1}{3\lambda})y_2$$

$$- (1 - \frac{1}{(n-1)\lambda})(1 - \frac{1}{(n-2)\lambda}) \cdots (1 - \frac{1}{2\lambda})y_1]$$

elde ederiz. Bu ise

$$a_{00} = \frac{1}{\lambda - 1}$$

$$a_{1k} = 0$$

$$a_{21} = -\frac{1}{\lambda}$$

$$a_{n1} = -\frac{1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n-2}\left(1-\frac{1}{(i+1)\lambda}\right), \quad n > 2$$

$$a_{n,n-1} = -\frac{1}{(n-2)\lambda} \qquad , \; n > 2$$

$$a_{nk} = -\frac{1}{\lambda^2 k}\prod_{i=k}^{n-2}\left(1-\frac{1}{(i+1)\lambda}\right), \quad 1 < k < n-1$$

$$a_{nn} = \frac{1}{\lambda} \qquad , \; n > 1$$

$$a_{nk} = 0 \qquad ; \; k > n > 1$$

olmak üzere bir $A = (a_{nk})$ matrisi tanımlar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n0}| = |a_{00}| = \frac{1}{|\lambda - 1|} \tag{15}$$

$\alpha = \mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) > 1$ olmak üzere Lemma 3.1.2 yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n1}| = \frac{1}{|\lambda|} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|}\prod_{i=1}^{n-2}\left|1-\frac{1}{(i+1)\lambda}\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|}\left(1+\frac{1}{|1-\frac{1}{\lambda}|}\sum_{n=3}^{\infty}\prod_{i=1}^{n-1}\left|1-\frac{1}{i\lambda}\right|\right)$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|}\left(1+\frac{K_1}{|1-\frac{1}{\lambda}|}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}\right)$$

$$= O(1) \tag{16}$$

elde ederiz. $k \geq 2$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| = \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{k|\lambda|} + \frac{1}{k|\lambda|^2}\sum_{n=k+2}^{\infty}\prod_{i=k}^{n-2}\left|1-\frac{1}{(i+1)\lambda}\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k|\lambda|} \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} |1 - \frac{1}{i\lambda}|}{\prod_{i=1}^{k} |1 - \frac{1}{i\lambda}|}\right)$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{K_2 k^{\alpha-1}}{|\lambda|} \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{\alpha}}\right)$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{K_2 k^{\alpha-1}}{|\lambda|} \int_{k+1}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{\alpha}}\right)$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{K_2 k^{\alpha-1}}{|\lambda|} \cdot \frac{k^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{K_2}{|\lambda|(\alpha - 1)}\right) = 0(1) \qquad (17)$$

elde ederiz.

(15), (16) ve (17) ifadeleri birlikte göz önüne alınırsa

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty$$

olduğu görülür. Teorem 1.1.2 gereğince de $A \in B(\ell_1)$ dir.

O halde $Ay = x \in \ell_1$ dir. Bu ise $\lambda I - C^*$ operatörünün örten yani $R(\lambda I - C^*) = \ell_1$ olduğunu gösterir.

Böylece $\lambda I - C \in III_1$ ve dolayısıyla $\lambda \in III_1\sigma(C,c)$ elde edilmiş olur.

TEOREM 3.6.3: $\lambda \neq 1$ ve $Re(\frac{1}{\lambda}) = 1$ olsun. Bu durumda $\lambda \in II_2\sigma(C,c)$ dir. ([19] Wegner 1975).

İspat: (i) $\lambda \neq 1$ ve $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) = 1$ olduğundan $\lambda I - C$ operatörüne karşılık gelen matris bir normal matristir. O halde $\lambda I - C$ bire birdir. Böylece $(\lambda I - C)^{-1}$ mevcut yani $\lambda I - C \in 1 \cup 2$ dir.

(ii) Şimdi $\lambda I - C^*$ adjoint operatörünü göz önüne alalım. Eğer $(\lambda I - C^*)x = \theta$ ise $x_0 = 0$ ve $n \geq 2$ için x_n (14) ü gerçekler. O halde, $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) = 1$ olduğundan Lemma 3.1.2 gereğince $x = (0, x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $x_1 = 0$ yani $x = \theta$ olmasıdır. Bu ise $\lambda I - C^*$ operatörünün bire bir olduğunu gösterir. Teorem 2.1.5 gereğince de $\overline{R(\lambda I - C)} = c$ ve dolayısıyla $\lambda I - C \in II$ dir.

(i) ve (ii) yi birlikte göz önüne alırsak $\lambda I - C \in II_1 \cup II_2$ elde ederiz. Hipotezi gerçekleyen λ kompleks sayıları $\sigma(C,c)$ de bulunduğundan $\lambda I - C \in II_1$ olması mümkün değildir. O halde $\lambda I - C \in II_2$ ve dolayısıyla $\lambda \in II_2\,\sigma(C,c)$ olmak zorundadır.

TEOREM 3.6.4: $1 \in III_3\sigma(C,c)$ dir ([19] Wegner 1975).

İspat: (i) $e = (1,1,1,\ldots) \in c$ olup $(I - C)e = \theta$ olduğundan $I - C$ bire bir değildir. O halde $(I - C)^{-1}$ mevcut değil yani $I - C \in 3$ dir.

(ii) $z_0 \neq 0$ olmak üzere $z = (z_0, z_1, \ldots) \in C$ olsun. Bu durumda her $x \in c$ için

$$\|(I - C)x - z\| \geq |z| > \frac{|z_0|}{2} > 0$$

dır. O halde $z \notin \overline{R(I - C)}$ yani $\overline{R(I - C)} \neq c$ dir. Bu ise $\lambda I - C \in II$ olması demektir.

(i) ve (ii) den $I - C \in III_3$ yani $1 \in III_3\sigma(C,c)$ elde ederiz ki, bu da ispatı tamamlar.

BÖLÜM 4

AĞIRLIKLI ORTALAMA OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU

Bu bölümde, ağırlıklı ortalama operatörünün c, c_0 ve ℓ_p ,($1 \leq p \leq \infty$), üzerindeki spektrumunu ve c ve c_0 üzerindeki fine spektrumunu inceleyeceğiz.

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe $\gamma = \underline{\lim} \dfrac{p_n}{P_n}$, $\delta = \overline{\lim} \dfrac{p_n}{P_n}$ ve $G = \overline{\{ \dfrac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}}$ olarak alınacaktır.

4.1. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün c Üzerindeki Spektrumu

LEMMA 4.1.1: A, bir ağırlıklı ortalama operatörü ve λ, $B = \lambda I - A = (b_{nk})$ olmak üzere her n için $b_{nn} \neq 0$ olacak biçimde bir kompleks sayı olsun. Bu durumda $D = B^{-1} = (d_{nk})$ matrisi

$$d_{nk} = \begin{cases} \dfrac{P_n}{\lambda P_n - p_n} & ; \ k = n \\[2ex] \dfrac{\lambda^{n-k-1} p_k}{P_n} \displaystyle\prod_{j=k}^{n} \dfrac{P_j}{P_j \lambda - p_j} & , \ 0 \leq k < n \\[2ex] 0 & ; \ k > n \end{cases} \qquad (18)$$

ile verilir ([5] Cass ve Rhoades 1977).

İspat :

$$B = \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - \frac{p_0}{P_0} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{p_0}{P_1} & \lambda - \frac{p_1}{P_1} & 0 & \cdots \\ -\frac{p_0}{P_2} & -\frac{p_1}{P_2} & \lambda - \frac{p_2}{P_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olmak üzere $Bx = y$ ise

$$x_0 = \frac{P_0}{P_0\lambda - p_0} y_0$$

$$x_1 = \frac{P_1}{P_1\lambda - p_1} y_1 + \frac{p_0}{P_1} \left(\frac{P_1}{P_1\lambda - p_1}\right)\left(\frac{P_0}{P_0\lambda - p_0}\right) y_0$$

$$x_2 = \frac{P_2}{P_2\lambda - p_2} y_2 + \frac{p_1}{P_2} \left(\frac{P_2}{P_2\lambda - p_2}\right)\left(\frac{P_1}{P_1\lambda - p_1}\right) y_1$$

$$+ \frac{p_0\lambda}{P_2} \left(\frac{P_2}{P_2\lambda - p_2}\right)\left(\frac{P_1}{P_1\lambda - p_1}\right)\left(\frac{P_0}{P_0\lambda - p_0}\right) y_0$$

....

$$x_n = \frac{P_n}{P_n\lambda - p_n} y_n + \frac{p_{n-1}}{P_n} \left(\frac{P_n}{P_n\lambda - p_n}\right)\left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-1}\lambda - p_{n-1}}\right) y_{n-1}$$

$$+ \frac{p_{n-2}\lambda}{P_n} \left(\frac{P_n}{P_n\lambda - p_n}\right)\left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-1}\lambda - p_{n-1}}\right)\left(\frac{P_{n-2}}{P_{n-2}\lambda - p_{n-2}}\right) y_{n-2}$$

$$+ \cdots + \frac{p_1\lambda^{n-2}}{P_n} \left(\frac{P_n}{P_n\lambda - p_n}\right) \cdots \left(\frac{P_2}{P_2\lambda - p_2}\right)\left(\frac{P_1}{P_1\lambda - p_1}\right) y_1$$

$$+ \frac{p_0\lambda^{n-1}}{P_n} \left(\frac{P_n}{P_n\lambda - p_n}\right) \cdots \left(\frac{P_1}{P_1\lambda - p_1}\right)\left(\frac{P_0}{P_0\lambda - p_0}\right) y_0$$

....

denklemleri gerçeklenir. Buradan,

$$d_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_n}{P_n\lambda - p_n} & , \; n = k \\[2ex] \dfrac{\lambda^{n-k-1}\, p_k}{P_n} \displaystyle\prod_{j=k}^{n} \dfrac{P_j}{P_j\lambda - p_j} & , \; 0 \leqq k < n \\[2ex] 0 & , \; k > n \end{cases}$$

elde ederiz.

TEOREM 4.1.2: A bir ağırlık ortalama operatörü olsun. Bu durumda $\sigma(A,c) \subseteq E$ dir ([5] Cass ve Rhoades 1977).

İspat: λ, $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ eşitsizliğini gerçekleyecek şekilde bir kompleks sayı olsun ve $-\frac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ diyelim. Bu durumda $\alpha > -1$ dir. $j = 0,1,2,\ldots$ için $0 \leqq \frac{p_j}{P_j} \leqq 1$ olduğundan

$$|1 - \frac{p_j}{P_j\lambda}| \geqq |1 + \alpha\frac{p_j}{P_j}| = 1 + \alpha\frac{p_j}{P_j}$$

gerçeklenir. (18) den $k < n$ için

$$|d_{nk}| = |\frac{p_k\lambda^{n-k-1}}{P_n} \prod_{j=k}^{n} (\frac{P_j}{P_j\lambda - p_j})| = |\frac{p_k}{P_n\lambda^2} \prod_{j=k}^{n} (\frac{1}{1 - \frac{p_j}{P_j\lambda}})|$$

$$= \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_n} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{|1 - \frac{p_j}{P_j\lambda}|} \leqq \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_n} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{(1 + \alpha\frac{p_j}{P_j})} = f_{nk} \quad (19)$$

elde ederiz. Buradan,

$$f_{n0} + f_{n1} = \frac{p_0}{|\lambda|^2 P_n} \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{(1 + \alpha \frac{p_j}{P_j})} + \frac{p_1}{|\lambda|^2 P_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 + \alpha \frac{p_j}{P_j})}$$

$$= \frac{p_0 + p_1(1+\alpha)}{|\lambda|^2 P_n (1+\alpha)(1 + \alpha \frac{p_1}{P_1})} \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{(1 + \alpha \frac{p_j}{P_j})}$$

$$= \frac{P_1[p_0 + p_1(1+\alpha)]}{|\lambda|^2 P_n (1+\alpha)[p_0 + p_1(1+\alpha)]} \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{(1 + \alpha \frac{p_j}{P_j})}$$

$$= \frac{P_1}{|\lambda|^2 P_n (1+\alpha)} \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{(1 + \alpha \frac{p_j}{P_j})}$$

ve $0 < r < n$ için tümevarımla

$$\sum_{k=0}^{r} f_{nk} = \frac{P_r}{|\lambda|^2 P_n (1+\alpha)} \prod_{j=r+1}^{n} 1/(1 + \alpha \frac{p_j}{P_j})$$

elde ederiz. Dolayısıyla (19) dan

$$\sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk}| = |d_{nn}| + \sum_{k=0}^{n-1} |d_{nk}| \leq \frac{P_n}{|P_n \lambda - p_n|} + \sum_{k=0}^{n-1} f_{nk}$$

$$= \frac{1}{|\lambda| \, |1 - \frac{p_n}{P_n \lambda}|} + \frac{P_{n-1}}{|\lambda|^2 P_n (1+\alpha)(1 + \alpha \frac{p_n}{P_n})}$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda| (1 + \alpha \frac{p_n}{P_n})} \left(1 + \frac{1}{(1+\alpha)|\lambda|}\right) \tag{20}$$

bulunur.

Eğer $\alpha > 0$ ise $0 \leqq \frac{p_n}{P_n} \leqq 1$ olduğundan

$$1 + \alpha \frac{p_n}{P_n} > 1$$

ve eğer $-1 < \alpha \leqq 0$ ise

$$1 + \alpha \frac{p_n}{P_n} \geqq 1 + \alpha$$

elde edilir. $M = \min \{1, 1 + \alpha\}$ dersek (20) den her n için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk}| \leqq \frac{1}{|\lambda| M} (1 + \frac{1}{M|\lambda|}) = O(1)$$

ve dolayısıyla

$$\sup_n \sum_k |d_{nk}| < \infty$$

elde ederiz. O halde Önerme 1.1.5 gereğince $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ için $D \in B(c)$ dir. Böylece $\sigma(A,c) \subseteq E$ elde edilmiş olur.

TEOREM 4.1.3: A, regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\delta}| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta}\} \cup G \subseteq \sigma(A,c)$$

dir ([5] Cass ve Rhoades 1977).

İspat: λ, $|\lambda - \frac{1}{2-\delta}| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta}$ eşitsizliğini gerçeklesin ve her n için $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ olsun. Bu durumda (18) den $k < n$ için

$$|d_{nk}| = \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_n} \prod_{j=k}^{n} \frac{P_j}{|P_j - \frac{p_j}{\lambda}|}$$

$$= \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_n} \prod_{j=k}^{n} \frac{P_j}{P_{j-1}|1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_j}{P_{j-1}}|}$$

$$= \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_{k-1}} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_j}{P_{j-1}}\right|} \qquad (21)$$

elde ederiz. Diğer yandan

$|1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_{n+1}}{P_n}| \leq 1$ olması için gerek ve yeter şart $-\frac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ olmak üzere

$$(1 + (1+\alpha) \frac{p_{n+1}}{P_n})^2 + (\beta \frac{p_{n+1}}{P_n})^2 \leq 1$$

yani

$$2(1+\alpha) \frac{p_{n+1}}{P_n} + [(1+\alpha)^2 + \beta^2](\frac{p_{n+1}}{P_n})^2 \leq 0 \qquad (22)$$

dir. $p_{n+1} = 0$ olacak biçimdeki her n için (22) aşikar olarak gerçeklenir. $p_{n+1} > 0$ olacak biçimdeki her n için ise (22),

$$2(1+\alpha) + [(1+\alpha)^2 + \beta^2] \frac{p_{n+1}}{P_n} \leq 0 \qquad (23)$$

ifadesine denktir. (23) ün gerçeklenmesi için

$$\frac{p_{n+1}}{P_n} = \frac{\dfrac{p_{n+1}}{P_{n+1}}}{1 - \dfrac{p_{n+1}}{P_{n+1}}}$$

ifadesi $\dfrac{p_n}{P_n}$ ye göre artan olduğundan yeterince büyük n ler için δ nın

$$2(1+\alpha) + [(1+\alpha)^2 + \beta^2] \frac{\delta}{1-\delta} \leqq 0 \tag{24}$$

ifadesini gerçeklemesi yeterlidir. Halbuki (24) ise

$$|\lambda - \frac{1}{2-\delta}| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta} \tag{25}$$

olmasına denktir.

O halde λ, (25) ifadesini gerçekleyen bir kompleks sayı olmak üzere (21) den

$$|d_{nk}| \geqq \frac{1}{|\lambda|^2} \frac{p_k}{P_k}$$

elde ederiz. Böylece yeterince büyük n ler için

$$\sum_{k=N}^{n-1} |d_{nk}| \geqq \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{k=N}^{n-1} \frac{p_k}{P_{k-1}} \geqq \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{k=N}^{n-1} \frac{p_k}{P_k}$$

olup $k \to \infty$ için $P_k \to \infty$ olduğundan Abel-Dini teoremi (Teorem 1.3.5) gereğince

$$\sup_n \sum_k |d_{nk}| = \infty$$

ve dolayısıyla $\lambda \in \sigma(A,c)$ dir.

Eğer $\lambda = \frac{p_n}{P_n}$ ise $B = \lambda I - A = (b_{nk})$ olmak üzere $b_{nn} = 0$ olacağından $(\lambda I - A)^{-1}$ mevcut değildir. O halde $\frac{p_n}{P_n} \in \sigma(A,c)$ dir.

Böylece,

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda - \frac{1}{2-\delta}| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta}\} \cup \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\} \subseteq \sigma(A,c)$$

elde ederiz. Ancak c bir Banach uzayı olduğundan $\sigma(A,c)$ kapalıdır. O halde

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda - \frac{1}{2-\delta}| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta}\} \cup G \subseteq \sigma(A,c)$$

dir.

SONUÇ 4.1.4: A, $\delta = 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda

$$\sigma(A,c) = E$$

dir ([5] Cass ve Rhoades 1977).

İspat: Teorem 4.1.2 den $\sigma(A,c) \subseteq E$ olup, Teorem 4.1.3 de $\delta = 0$ alınırsa $E \subseteq \sigma(A,c)$ elde edilir.

Böylece $\sigma(A,c) = E$ elde ederiz.

TEOREM 4.1.5: A, $\gamma > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü ise

$$\sigma(A,c) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup G$$

dir ([5] Cass ve Rhoades 1977).

İspat: λ, $|\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| > \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$ eşitliğini gerçeklesin ve her n için $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ olsun. Teorem 4.1.2 nedeniyle sadece $|\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ eşitsizliğini gerçekleyen λ kompleks sayılarını göz önüne alacağız. Bu durumda $-\frac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ olmak üzere $\alpha \leq -1$ olacaktır. Ancak $\alpha = -1$ olması $\lambda = 1$ olmasını gerektirdiğinden ve $\frac{p_0}{P_0} = 1$ olması nedeniyle $1 \in \sigma(A,c)$ olduğundan $\alpha < -1$ kabul edebiliriz.

λ üzerindeki kabullerimiz altında her j için

$$|1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_j}{P_j}| > 1$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için

$$f(t) = 1 + 2(1+\alpha)t + [(1+\alpha)^2 + \beta^2]t^2$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. f, fonksiyonu

$$t_0 = \frac{-(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2 + \beta^2}$$

noktasında bir minimuma sahiptir. Diğer yandan

$$|\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| > \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$$

olması

$$\gamma(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha > \gamma - 2 \tag{26}$$

olmasına denktir. Buradan

$$\frac{\gamma}{2(1-\gamma)} > \frac{-(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2 + \beta^2} = t_0$$

olduğundan her $t > \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}$ için f artandır.

$\varepsilon > 0$ sayısını yeterince küçük seçelim. Bu durumda,

$$f(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon) = 1 + (1+\alpha)(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon) + [(1+\alpha)^2 + \beta^2](\frac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon)^2$$

$$= 1 + 2(1+\alpha)\frac{\gamma}{1-\gamma} + [(1+\alpha)^2 + \beta^2](\frac{\gamma}{1-\gamma})^2$$

$$- 2\varepsilon\{(1+\alpha) + [(1+\alpha)^2 + \beta^2](\frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{\varepsilon}{2})\}$$

$$= f(\frac{\gamma}{1-\gamma}) - 2\varepsilon g(\varepsilon)$$

elde ederiz. f, $t > \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}$ için artan olduğundan yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $g(\varepsilon) > 0$ dır.

Şimdi $f(\frac{\gamma}{1-\gamma}) > 1$ olduğunu gösterelim. (26) ifadesi

$$\left|\frac{1}{1-\gamma} - \frac{\gamma}{\lambda(1-\gamma)}\right| > 1$$

ifadesine denktir. Buna göre,

$$f(\frac{\gamma}{1-\gamma}) = 1 + 2(1+\alpha)\frac{\gamma}{1-\gamma} + [(1+\alpha)^2 + \beta^2](\frac{\gamma}{1-\gamma})^2$$

$$= [1 + (1+\alpha)\frac{\gamma}{1-\gamma}]^2 + (\frac{\gamma}{1-\gamma})^2\beta^2$$

$$= \left|1 + (1 + \alpha + i\beta)\frac{\gamma}{1-\gamma}\right|^2$$

$$= \left|1 + (1 - \frac{1}{\lambda})\frac{\gamma}{1-\gamma}\right|^2$$

$$= \left|1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{\gamma}{\lambda(1-\gamma)}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{1-\gamma} - \frac{\gamma}{\lambda(1-\gamma)}\right|^2 > 1$$

elde ederiz.

Şimdi $\varepsilon > 0$ sayısını

$$f\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon\right) = f\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) - 2\varepsilon g(\varepsilon) = \mu^2 > 1$$

olacak biçimde seçelim. Bu durumda γ nın tanımı gereğince her $n \geqq N$ için

$$\frac{p_{n+1}}{P_n} = \frac{\dfrac{p_{n+1}}{P_{n+1}}}{1 - \dfrac{p_{n+1}}{P_{n+1}}} > \frac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı vardır. Böylece her $n \geqq N$ için

$$f\left(\frac{p_n}{P_{n-1}}\right) > f\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon\right) = \mu^2$$

yazabiliriz. Diğer yandan her $n \geqq N$ için

$$\frac{|d_{nk}|}{|d_{n+1,k}|} = \frac{\left|p_{n+1} - \frac{1}{\lambda} p_{n+1}\right|}{P_n} = \left|\frac{P_n + p_{n+1}}{P_n} - \frac{p_{n+1}}{\lambda P_n}\right|$$

$$= \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_{n+1}}{P_n}\right|$$

$$= f\left(\frac{p_{n+1}}{P_n}\right)^{1/2} > \mu > 1$$

elde ederiz ki, bu her $n,k \geqq N$ için $|d_{nk}|$ nın n ye göre monoton azaldığını gösterir. Dolayısıyla D nin sütun elemanları sınırlıdır. Böylece

$$\sup_n \sum_k |d_{nk}| < \infty$$

olduğunu göstermek için $|d_{nn}|$ ve $\sum_{k=N}^{n-1} |d_{nk}|$ ifadelerinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\frac{p_n}{P_{n-1}} = \frac{\frac{p_n}{P_n}}{1 - \frac{p_n}{P_n}}$$

ifadesi $\frac{p_n}{P_n}$ ye göre monoton artan olduğundan her $n \geq N$ için

$$\frac{p_n}{P_n} < \frac{\delta}{1-\delta} + 1$$

olacak biçimde $N > 0$ sayısını yeterince büyük seçebiliriz. Bu durumda

$$\sum_{k=N}^{n-1} |d_{nk}| = \sum_{k=N}^{n-1} \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_{k-1}} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_j}{P_{j-1}}\right|}$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|^2} \left(\frac{\delta}{1-\delta} + 1\right) \sum_{k=N}^{n-1} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1 + (1 - \frac{p_j}{P_{j-1}})\right|}$$

$$< \frac{1}{|\lambda|^2} \left(\frac{\delta}{1-\delta} + 1\right) \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{\mu^{n-k-1}} = O(1) \qquad (27)$$

ve

$$|d_{nn}| = \left|\frac{p_n}{P_n\lambda - p_n}\right| = \frac{\dfrac{p_n}{P_{n-1}}}{|\lambda|\left|1 + (1 - \frac{1}{\lambda})\dfrac{p_n}{P_{n-1}}\right|}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{p_n}{P_{n-1}}}{|\lambda|\left|1 + (1 - \frac{1}{\lambda})\dfrac{p_n}{P_{n-1}}\right|} < \frac{2 + \dfrac{\delta}{1-\delta}}{|\lambda|\mu} = O(1) \quad (28)$$

elde ederiz.

Bu göre (27) ve (28) birlikte gözönüne alınırsa

$\sup_n \sum_k |d_{nk}| < \infty$

yazılabilir.

Ohalde Önerme 1.1.5 den $(\lambda I - A)^{-1} = D \in B(c)$ elde ederiz. Yani $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ ve $|\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| > \frac{1-\gamma}{1-\gamma}$ için $\lambda \in \rho(A,c)$ olduğunu ispatladık. Bu ise

$$\sigma(A,c) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup G$$

olduğunu gösterir.

SONUÇ 4.1.6: A, $\gamma = \lim \frac{p_n}{P_n} > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda

$$W = \{\frac{p_n}{P_n} : \frac{p_n}{P_n} < \frac{\gamma}{2-\gamma}\}$$

olmak üzere

$$\sigma(A,c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup W$$

dir ([5] Cass ve Rhoades 1977).

İspat: Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.5 birlikte göz-önüne alınırsa

$$\sigma(A,c) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup G$$

elde edilir. Eğer $\lambda \in G \setminus W$ ise

$$\frac{\gamma}{2-\gamma} \leq \lambda \leq 1$$

gerçeklenir. Bu durumda ise

$$|\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$$

olacağından

$$\sigma(A,c) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup W$$

elde edilir.

4.2. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün c_0 Üzerindeki Spektrumu

LEMMA 4.2.1: A, tersi (2) yi gerçekleyen, çarpımsal, koregüler bir üçgensel matris olsun. Bu durumda $A^{-1} \in B(c_0)$ ve $c_A^0 = \{x = (x_k): Ax \in c_0\}$ olmak üzere

$c_A^0 = c_0$ dır ([17] Rhoades 1987).

İspat: Hipotezler altında $A \in B(c_0)$ dir.

$x \in c_A^0$ olsun. Bu durumda $Ax = y \in c_0$ olacaktır. $c_0 \subset \ell_\infty$ ve $\|A^{-1}\| < \infty$ olduğundan

$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}y$$

den $x \in \ell_\infty$ elde ederiz. O halde $c_A^0 \subset \ell_\infty$ dır.

Önerme 1.1.6 gereğince ise $c_A^0 \subset c$ olmak zorundadır.

Şimdi kabul edelim ki, $Ax \in c_0$ için $x \in c \setminus c_0$ olsun ve $\lim x = \ell$ diyelim. Bu durumda $(x - \ell) \in c_0$ ve $A(x - \ell) \in c_0$ dır. Ancak $A(x - \ell) = Ax - A\ell$ olup $Ax \in c_0$ ve

$$\lim A\ell = \lim_A \ell = \chi(A)\ell + \sum_k a_k \ell = \chi(A)\ell \neq 0$$

olduğundan $A(x - \ell) \in c_0$ olması mümkün değildir. O halde $x \in c_0$ olmak zorundadır. Böylece $c_A^0 \subset c_0$ elde ederiz.

Şimdi de $x \in c_0$ olsun. Bu durumda hipotezler altında

$$\lim Ax = \chi(A)\lim x + \sum_k a_k x_k = 0$$

olduğundan $Ax \in c_0$ yani $x \in c_A^0$ dır.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Kısım 4.1 de c için ifade ettiğimiz teoremleri Lemma 4.2.1 yardımıyla c_0 için elde ederiz. Buna göre aşağıdaki teoremleri ispatsız olarak verebiliriz.

TEOREM 4.2.2: A, regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $\sigma(A,c_0) \subsetneq E$ dir ([17] Rhoades 1987).

TEOREM 4.2.3: A, regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\delta}| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta}\} \cup G \subseteq \sigma(A,c_0)$$

dır ([17] Rhoades 1987).

SONUÇ 4.2.4: A, $\delta = 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda

$$\sigma(A,c_0) = E$$

dir ([17] Rhoades 1987).

TEOREM 4.2.5: A, $\gamma > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda

$$\sigma(A,c_0) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup G$$

dir ([17] Rhoades 1987).

SONUÇ 4.2.6: A, $\gamma = \lim \frac{p_n}{P_n} > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda

$$\sigma(A,c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup W$$

dır ([17] Rhoades 1987).

4.3. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün ℓ_p, $(1 \leq p < \infty)$, Üzerindeki Spektrumu

Bu kısımda ağırlıklı ortalama operatörünün ℓ_p, $(1 \leq p < \infty)$, üzerindeki spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 4.3.1: A bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $A^{-1} \in B(\ell_p)$,$(1 \leq p < \infty)$, olması için gerek ve yeter şart $0 \notin G$ olmasıdır ([4] Cartlidge 1978).

İspat: Eğer $0 \in G$ ise, ℓ_p, $(1 \leq p < \infty)$, uzayının bir Banach uzayı olması nedeniyle $\sigma(A,\ell_p)$ kapalı olacağından $G \subseteq \sigma(A,\ell_p)$ ve dolayısıyla $0 \in \sigma(A,\ell_p)$ dir. Bu ise $A^{-1} \notin B(\ell_p)$ olmasını gerektirir.

Karşıt olarak $0 \notin G$ ise (18) den $\lambda = 0$ için

$$d_{nk} = \begin{cases} \dfrac{P_n}{p_n} & , \quad k = n \\[2ex] \dfrac{P_n}{p_n} - 1 & , \quad k = n-1 \\[2ex] 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

elde ederiz. Böylece

$$\sup_n \sum_k |d_{nk}| = \sup_n \{ |d_{n,n-1}| + |d_{nn}| \} = \sup_n \{ \frac{2P_n}{p_n} - 1 \}$$

$$\leq 2\sup_n \frac{P_n}{p_n} - 1 = \frac{2}{\inf_n \frac{p_n}{P_n}} - 1 < \infty \qquad (29)$$

$$\sup_k \sum_n |d_{nk}| = \sup_k \{ |d_{k-1,k}| + |d_{kk}| \}$$

$$\leq 2\sup_k \frac{P_k}{p_k} - 1$$

$$= \frac{2}{\inf_k \frac{p_k}{P_k}} - 1 < \infty \qquad (30)$$

elde ederiz. Böylece (29) ve (30) birlikte göz önüne alınırsa Teorem 1.1.8 gereğince $A^{-1} \in B(\ell_p)$ dir.

Genel halde, (18) ile verilen $D = (d_{nk})$ matrisini

$$b_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_n}{P_n\lambda - p_n} & , n = k \\ 0 & , n \neq k \end{cases}$$

ve

$$s_{nk} = \begin{cases} 0 & , k \geqslant n \\ \dfrac{p_k}{\lambda^2 P_n} \displaystyle\prod_{j=k}^{n} \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{p_j}{P_j\lambda}\right)} & , 0 \leq k < n \end{cases}$$

olmak üzere $D = B + S$ biçiminde yazabiliriz. Buna göre $D = (\lambda I - A)^{-1} \in B(\ell_p)$ olduğunu göstermek için $\lambda \notin G$ ve $S \in B(\ell_p)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Ancak

$$\lambda \in G \setminus \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}$$

ise

$$\sup_n |s_{n,n-1}| = \frac{1}{|\lambda|^2} \sup_n \frac{\dfrac{p_{n-1}}{P_n}}{\left|1 - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{p_{n-1}}{P_{n-1}}\right| \cdot \left|1 - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{p_n}{P_n}\right|} = \infty$$

olduğundan $S \notin B(\ell_p)$ dir. Böylece

$$\sigma(A,\ell_p) = \{\lambda \in \mathbb{C} : S \notin B(\ell_p)\} \cup \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}$$

yazabılıriz. Karşıt olarak

$$\rho(A,\ell_p) = \{\lambda \in \mathbb{C}: S \in B(\ell_p)\}$$

dir. Dolayısıyla A ağırlıklı ortalama operatörünün spektrumunu incelerken, her n için $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ kabul ederek $S \in B(\ell_p)$ olup olmadığına bakmamız yeterli olacaktır.

Kompleks sayıların özellikleri kullanılarak aşağıdaki lemma kolayca ispatlanabileceği için ispatsız olarak vereceğiz.

LEMMA 4.3.2: Eğer $0 \leqq t \leqq 1$ ise

$$E_t = \{\lambda \in \mathbb{C}: (1-t)\frac{|\lambda|}{|\lambda - t|} \geqq 1\} = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-t}| \leqq \frac{1-t}{2-t}\}$$

ve $E_0 = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{2}\}$ olmak üzere $0 \leqq t \leqq r \leqq 1$ için $E_r \subset E_t$ dir ([4] Cartlidge 1978).

TEOREM 4.3.3: A bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Eğer $A \in B(\ell_p),(1 \leqq p < \infty)$, ise

$$\{\frac{p_n}{P_n}: n \geqq 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\delta}| \leqq \frac{1-\delta}{2-\delta}\} \subseteq \sigma(A,\ell_p)$$

dir ([4] Cartlidge 1978).

İspat: $\delta = \overline{\lim}\, \frac{p_n}{P_n}$ ise $\delta \leqq 1$ dir. Eğer $\delta = 1$ ise

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leqq 0\} = \{1\} \subset \{\frac{p_n}{P_n}: n \geqq 0\} \subset \sigma(A,\ell_p)$$

dir.

$\delta < 1$ olsun. Bu durumda λ, $|\lambda - \frac{1}{2-\delta}| \leqq \frac{1-\delta}{2-\delta}$

eşitsizliğini gerçekleyen bir kompleks sayı olmak üzere

$$\sum_n |s_{n0}|^p = \infty$$

olduğunu göstererek $S \notin B(\ell_p)$ elde edeceğiz.

$$\frac{|s_{n+1,0}|}{|s_{n0}|} = \frac{(1 - \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}})|\lambda|}{|\lambda - \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}|}$$

dir. $\delta < 1$ olduğundan $0 < 1 - \delta$ dır. Şimdi $\varepsilon > 0$ sayısını $\varepsilon < 1 - \delta$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda δ nın tanımı gereğince her $n \geqq N$ için

$$\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} < \delta + \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla Lemma 4.3.2 gereğince her $n \geqq N$ için $E_{\delta+\varepsilon} \subset E_{p_{n+1}/P_{n+1}}$

yani,

$$|\lambda - \frac{1}{2-(\delta+\varepsilon)}| \leqq \frac{1-(\delta+\varepsilon)}{2-(\delta+\varepsilon)}$$

için $|\frac{s_{n+1,0}}{s_{n0}}|^p \geqq 1$ dir. Böylece $\sum_n |s_{n,0}|^p = \infty$

yani $(s_{n,0}) \notin \ell_p$ dir. Buradan $0 < \varepsilon < 1 - \delta$ için $S \notin B(\ell_p)$ elde ederiz. Ayrıca $\sigma(A,\ell_p)$ kapalı olduğundan

$$\bigcup_{0<\varepsilon<1-\delta}\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-\frac{1}{2-(\delta+\varepsilon)}|\leq\frac{1-(\delta+\varepsilon)}{2-(\delta+\varepsilon)}\}\cup\{\frac{p_n}{P_n}:n\geq 0\}\subseteq\sigma(A,\ell_p)$$

ve buradan

$$\{\frac{p_n}{P_n}:n\geq 0\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-\frac{1}{2-\delta}|\leq\frac{1-\delta}{2-\delta}\}\subseteq\sigma(A,\ell_p)$$

bulunur. Bu ise teoremi ispatlar.

TEOREM 4.3.4: A, bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $A\in B(\ell_p)$, $(1\leq p<\infty)$, ve $q>p$ ise

$$\rho(A,\ell_p)\cap\rho(A,\ell_\infty)\subseteq\rho(A,\ell_q)$$

ve

$$\sigma(A,\ell_q)\subseteq\sigma(A,\ell_p)\cup\sigma(A,\ell_\infty)$$

dır ([4] Cartlidge 1978).

İspat: $A\in B(\ell_p)$ ve $q>p$ olsun.

$\lambda\in\rho(A,\ell_p)\cap\rho(A,\ell_\infty)$ ise $(\lambda I-A)^{-1}\in B(\ell_p)\cap B(\ell_\infty)$ dır. Riesz-Thorin Teoremi (Teorem 1.1.10) gereğince $(\lambda I-A)^{-1}\in B(\ell_q)$ yani $\lambda\in\rho(A,\ell_q)$ dır. Bu ise

$$\rho(A,\ell_p)\cap\rho(A,\ell_\infty)\subseteq\rho(A,\ell_q)$$

olduğunu gösterir. Bu ifadenin $\mathbb{C}$ ye göre tümleyenini alırsak

$$\sigma(A,\ell_q)\subseteq\sigma(A,\ell_p)\cup\sigma(A,\ell_\infty)$$

elde ederiz.

TEOREM 4.3.5: Eğer A, $\gamma > 0$ olacak biçimde bir ağırlıklı ortalama operatörü ise

$$\sigma(A,\ell_1) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}$$

dır ([4] Cartlidge 1978).

İspat: $\gamma > 0$ olduğundan Teorem 1.3.2 gereğince $A \in B(\ell_1)$ dir. $\varepsilon > 0$ sayısı

$\varepsilon < \gamma - \frac{\gamma}{2-\gamma}$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda her $n \geq N$ için $\gamma - \varepsilon < \frac{p_n}{P_n}$ olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı vardır. Böylece her $n \geq N$ için

$$\frac{p_n}{P_n} \in \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\}$$

dır.

λ, $|\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| > \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$ eşitsizliğini gerçeklesin ve her n için $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ olsun.

$\gamma - \varepsilon \leq \beta \leq 1$ olmak üzere f fonksiyonunu

$$f(\beta) = \frac{|\lambda|(1-\beta)}{|\lambda - \beta|}$$

olarak tanımlayalım. λ, $|\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| > \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$ eşitsizliğini gerçeklediğinden $\gamma \neq \beta$ olmak zorundadır. O halde f süreklidir. Diğer yandan $f(\beta) \geq 0$ ve Lemma 4.3.2 gereğince $f(\beta) < 1$ dir.

Sürekli bir fonksiyon, kompakt bir cümle üzerinde maksimum ve minimum değerlerine ulaşacağından $[\gamma-\varepsilon,1]$ üzerinde $0 \leqq f(\beta) \leqq \mu < 1$ olacak biçimde bir μ sayısı vardır.

Her $n \geqq N$ ve $n \geqq k+1$ için

$$\frac{|s_{n+1,k}|}{|s_{nk}|} = \frac{|\lambda|\left(1-\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right)}{\left|\lambda-\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right|} = f\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right) \leqq \mu < 1$$

elde ederiz ki, bölüm kriteri gereğince $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |s_{nk}|$ serisi yakınsaktır. Bununla birlikte her $k \geqq N$ için

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |s_{nk}| = |s_{k+1,k}| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|s_{nk}|}{|s_{k+1,k}|}$$

$$\leqq |s_{k+1,k}| \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n = \frac{|s_{k+1,k}|}{1-\mu}$$

$$= \frac{1}{1-\mu} \frac{p_k}{P_{k+1}} \frac{1}{\left|\lambda-\frac{p_k}{P_k}\right| \left|\lambda-\frac{p_{k+1}}{P_{k+1}}\right|}$$

elde ederiz. Her n için $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ olduğundan $\left|\lambda-\frac{p_n}{P_n}\right| > K$ olacak biçimde bir $K > 0$ sayısı vardır. O halde

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |s_{nk}| \leqq \frac{1}{(1-\mu)K^2} \frac{p_k}{P_{k+1}} \leqq \frac{1}{(1-\mu)K^2} = 0(1)$$

yazabiliriz. Böylece

$$\sup_k \sum_n |s_{nk}| < \infty$$

ve dolayısıyla $S \in B(\ell_1)$ elde ederiz. Bu ise

$$\sigma(A,\ell_1) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}$$

olduğunu gösterir.

TEOREM 4.3.6: A, $\gamma > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda ,$(1 \leq p < \infty)$,

$$\sigma(A,\ell_p) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}$$

dır ([4] Cartlidge 1978).

İspat: Teorem 4.1.5 ve Önerme 3.2.4 gereğince

$$\sigma(A,\ell_\infty) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}$$

ve Teorem 4.3.5 gereğince

$$\sigma(A,\ell_1) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}$$

dir. Teorem 4.3.4 de $p = 1$ ve $q = p$ alınırsa

$$\sigma(A,\ell_p) \subseteq \sigma(A,\ell_1) \cup \sigma(A,\ell_\infty)$$

$$\subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}$$

elde edilir.

SONUÇ 4.3.7: Eğer A, $\lim \frac{p_n}{P_n} = \gamma > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü ise $1 \leq p < \infty$

olmak üzere,

$$\sigma(A,\ell_p) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}$$

dir. ([4] Cartlidge 1978).

İspat: Teorem 4.3.3 ve Teorem 4.3.6 birlikte gözönüne alınırsa

$$\{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\} \cup |\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| < \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \subseteq \sigma(A,\ell_p)$$

ve

$$\sigma(A,\ell_p) \subseteq \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

TEOREM 4.3.8: A, $\lim \frac{p_n}{P_n} = \gamma$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü ve $A \in B(\ell_p), (1 \leq p < \infty)$, olsun. Eğer $q > p$ ise $\sigma(A,\ell_q) \subseteq \sigma(A,\ell_p)$ dir ([4] Cartlidge 1978).

İspat: $\gamma > 0$ ise Sonuç 4.3.7 gereğince

$$\sigma(A,\ell_p) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup \{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}$$

dir. O halde λ, $|\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| > \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$ özelliğine sahip ve

her n için $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ ise $(\lambda I - A)^{-1} \in B(\ell_p)$ ve

$(\lambda I - A)^{-1} \in B(\ell_\infty)$ dır. Riesz-Thorin Teoremi (Teorem 1.1.10) gereğince de $(\lambda I - A)^{-1} \in B(\ell_q)$ elde ederiz. Bu durumda

$\lambda \in \rho(A,\ell_q)$ yani $\rho(A,\ell_p) \subseteq \rho(A,\ell_q)$ olacağından ispat açıktır.

Eğer $\gamma = 0$ ise Teorem 4.1.2 ve Önerme 3.2.4 gereğince

$$\sigma(A,\ell_\infty) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \tfrac{1}{2}| \leq \tfrac{1}{2}\}$$

dir. Diğer yandan Teorem 4.3.3 gereğince

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \tfrac{1}{2}| \leq \tfrac{1}{2}\} \subseteq \sigma(A,\ell_\infty)$$

dir. O halde $\sigma(A,\ell_\infty) \subset \sigma(A,\ell_p)$ yazabiliriz. Buradan Teorem 4.3.4 yardımıyla

$$\sigma(A,\ell_q) \subseteq \sigma(A,\ell_p) \cup \sigma(A,\ell_\infty) = \sigma(A,\ell_p)$$

elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

4.4. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün c Üzerindeki Fine Spektrumu

Bu kısımda ağırlıklı ortalama operatörünü c üzerinde gözönüne alıp fine spektrumunu inceleyeceğiz.

Kısım 4.1 de A regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü, $\delta = \overline{\lim} \frac{p_n}{P_n}$, $\gamma = \underline{\lim} \frac{p_n}{P_n}$ ve $G = \overline{\{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}}$ olmak üzere

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{1-\delta}| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta}\} \cup G \subseteq \sigma(A,c) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \frac{1}{2-\gamma}| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\} \cup G$$

olduğunu göstermiştik.

Bu kısımda sadece $\gamma = \delta$ olacak biçimdeki A, regüler ağırlıklı ortalama operatörünü göz önüne alacağız.

TEOREM 4.4.1: λ, $|\lambda - \frac{1}{2-\delta}| < \frac{1-\delta}{2-\delta}$ eşitsizliğini gerçeklesin ve $\lambda \notin G$ olsun. Bu durumda $\lambda \in III_1\sigma(A,c)$ dir ([16] Rhoades 1983).

İspat: (i) $\lambda \notin G$ olduğundan her n için $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ dir. O halde $\lambda I - A$ operatörüne karşılık gelen matris bir normal matristir. Bu ise $\lambda I - A$ nın bire bir yani $(\lambda I - A)^{-1}$ in mevcut olduğunu gösterir. Bu durumda ise $\lambda I - A \in 1 \cup 2$ elde ederiz.

(ii) $(\lambda I - A)^* = \lambda I - A^*$ operatörünü gözönüne alalım. A regüler olduğundan $A^* \in B(\ell_1)$ ve bu operatöre karşılık gelen $A^* = (a^*_{nk})$ matrisi

$$a^*_{00} = \chi(A) = 1$$

$$a^*_{n0} = a^*_{0n} = 0 \quad , \; n > 0$$

$$a^*_{nk} = a_{k-1,n-1} \quad , \; n,k > 0$$

dır ([12] Okutoyi 1986). O halde

$$a^*_{nk} = \begin{cases} 1 & , \; n = k = 0 \\ \dfrac{p_{n-1}}{P_{k-1}} & , \; 0 < n \leq k \\ 0 & , \; \text{diğer durumda} \end{cases}$$

elde ederiz.

Eğer $(\lambda I - A^{*})x = \theta$ ise

$(\lambda - 1)x_0 = x_0$

ve $n \geqq 1$ için

$$(\lambda - \frac{p_{n-1}}{P_{n-1}})x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{P_{k-1}} x_k = 0 \tag{31}$$

denklemleri gerçeklenir. $\lambda \neq 1$ olduğundan $x_0 = 0$ ve (31) den

$$x_2 = \frac{p_1}{\lambda p_0} (\lambda - \frac{p_0}{P_0})x_1 = \frac{p_1}{P_0} (1 - \frac{p_0}{P_0})x_1$$

$$x_3 = \frac{p_2}{P_0 \lambda^2} (\lambda - \frac{p_0}{P_0})(\lambda - \frac{p_1}{P_1})x_1 = \frac{p_2}{P_0} x_1 \prod_{j=0}^{1} (1 - \frac{p_j}{P_j \lambda})$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{p_{n-1}}{P_0} x_1 \prod_{j=0}^{n-2} (1 - \frac{p_j}{P_j \lambda}) \tag{32}$$

. . . .

elde ederiz. (32) den de

$$x_n = (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_{n-1}}{P_{n-1}} x_1 \prod_{j=1}^{n-2} (1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_j}{P_{j-1}}) \tag{33}$$

yazabiliriz. Yeterince büyük j ler için $-\frac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ olmak üzere

$$|1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_j}{P_{j-1}}| < 1$$

olması

$$(1 + (1 + \alpha) \frac{p_j}{P_{j-1}})^2 + (\beta \frac{p_j}{P_{j-1}})^2 < 1$$

olmasına denktir.

1.Hâl: Kabul edelimki ancak sonlu sayıdaki k lar için

$p_k = 0$ olsun. Bu durumda her $j \geqq N$ için $\frac{p_j}{P_{j-1}} > 0$

olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı vardır. Böylece her

$j \geqq N$ için

$$(1 + (1+\alpha)\frac{p_j}{P_{j-1}})^2 + (\beta \frac{p_j}{P_{j-1}})^2 < 1$$

olması

$$2(1 + \alpha) + [(1+\alpha)^2 + \beta^2]\frac{p_j}{P_{j-1}} < 0 \qquad (34)$$

olmasına denktir. $\lim_{n} \frac{p_n}{P_n} = \delta$ olduğundan ise yeterince

büyük j ler için (34) ifadesi

$$2(1 + \alpha) + [(1 + \alpha)^2 + \beta^2]\frac{\delta}{1 - \delta} < 0 \qquad (35)$$

ifadesine denktir. Halbuki (35) ifadesi de

$$|\lambda - \frac{1}{2 - \delta}| < \frac{1 - \delta}{2 - \delta}$$

olmasına denktir.

$$z_n = \prod_{j=1}^{n-2} (1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_j}{P_{j-1}})$$

diyelim. Bu durumda

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = |1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_{n-1}}{P_{n-2}}|$$

dir. O halde yeterince büyük n ler için

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \leq \nu < 1 \tag{36}$$

gerçeklenir. Şu halde $\sum\limits_n |z_n|$ yakınsaktır.

Diğer yandan

$$|(1-\frac{1}{\lambda})\frac{p_{n-1}}{P_{n-2}}x_1| = |(1-\frac{1}{\lambda})x_1|\frac{p_{n-1}}{P_{n-2}}$$

sınırlı ve

$$|x_n| = |(1-\frac{1}{\lambda})x_1|\frac{p_{n-1}}{P_{n-1}}|z_n|$$

olduğundan $\Sigma\ |x_n|$ yakınsakdır.

O halde $(\lambda I - A^*)x = \theta$ olması $x = \theta$ olmasını gerektirmez. Bu ise $\lambda I - A^*$ operatörünün bire bir olması demektir ki, Teorem 2.1.5 gereğince $\overline{R(\lambda I - A)} \neq c$ elde ederiz. Böylece $\lambda I - A \in III$ elde ederiz.

Bu durumu (i) ile birlikte göz önüne alırsak $\lambda I - A \in III_1 \cup III_2$ elde ederiz. $\lambda I - A \in III_1$ olduğunu göstermek için Teorem 2.1.4 gereğince $R(\lambda I - A^*) = \ell_1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$y \in \ell_1$ olmak üzere $y = (\lambda I - A^*)x$ gerçeklensin. Bu durumda

$$(\lambda - 1)x_0 = y_0$$

ve $n \geq 1$ için

$$(\lambda - \frac{p_{n-1}}{P_{n-1}})x_n - p_{n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{P_{k-1}} = y_n \qquad (37)$$

denklemleri gerçeklenir. $x_1 = 0$ seçip x i y cinsinden çözersek

$$x_0 = \frac{1}{\lambda - 1} y_0$$

$$x_2 = \frac{1}{\lambda} [y_2 - \frac{p_1}{P_0} y_1]$$

$$x_3 = \frac{1}{\lambda} [y_3 - \frac{1}{\lambda} \frac{p_2}{P_1} y_2 - (1 - \frac{p_1}{P_1 \lambda}) \frac{p_2}{P_0} y_1]$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{\lambda} \{y_n - \frac{p_{n-1}}{P_{n-2}} y_{n-1} - \cdots - [\frac{p_{n-1}}{P_0} \prod_{j=1}^{n-2} (1 - \frac{p_j}{P_j \lambda})] y_1\}$$

....

elde ederiz. Bu ise

$$b_{00} = \frac{1}{\lambda - 1}$$

$$b_{nn} = \frac{1}{\lambda} \qquad , \quad n > 1$$

$$b_{21} = \frac{-p_1}{\lambda P_0}$$

$$b_{n,n-1} = - \frac{p_{n-1}}{P_{n-2} \lambda^2} \quad , \quad n > 2$$

$$b_{n1} = \frac{-p_{n-1}}{\lambda P_n} \prod_{j=1}^{n-2} (1 - \frac{p_j}{P_j \lambda}), \quad n > 2$$

$$b_{nk} = \frac{-p_{n-1}}{\lambda^2 P_{k-1}} \prod_{j=k}^{n-2} (1 - \frac{p_j}{P_j \lambda}), \quad 1 < k < n-1$$

$b_{nk} = 0$, diğer durumlarda

olmak üzere bir $B = (b_{nk})$ matrisi tanımlar. Şimdi $B \in B(\ell_1)$ olduğunu gösterelim.

$$\sum_n |b_{n0}| = |b_{00}| = \frac{1}{|\lambda - 1|}$$

dır.

$$1 - \frac{p_j}{P_j \lambda} = \frac{P_{j-1}}{P_j} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_j}{P_{j-1}}\right)$$

ve

$$\sup_{n > 1} \left|\frac{p_{n-1}}{P_{n-2}}\right| \leq M < \infty$$

olduğundan

$$\sum_n |b_{n1}| = |b_{21}| + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{|\lambda| P_0} \prod_{j=1}^{n-2} \left|1 - \frac{p_j}{P_j \lambda}\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \frac{p_1}{P_0} + \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{P_0} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{P_{j-1}}{P_j} \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_j}{P_{j-1}}\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \frac{p_1}{P_0} + \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{P_{n-2}} \prod_{j=1}^{n-2} \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_j}{P_{j-1}}\right|$$

$$= \frac{M}{|\lambda|} \left(1 + \sum_{n=3}^{\infty} \prod_{j=1}^{n-2} \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_j}{P_{j-1}}\right|\right)$$

ve $k > 1$ için

$$\sum_n |b_{nk}| = |b_{kk}| + |b_{k+1,k}| + \sum_{n=k+2}^{\infty} |b_{nk}|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|^2} \frac{p_k}{P_{k-1}} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{|\lambda|^2 P_{k-1}} \prod_{j=k}^{n-2} \left|1 - \frac{p_j}{P_j \lambda}\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{M}{|\lambda|^2}\left(1 + \sum_{n=k+2}^{\infty} \prod_{j=k}^{n-2} \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right|\right)$$

bulunur.

$$\left|\lambda - \frac{1}{2-\delta}\right| < \frac{1-\delta}{2-\delta}$$

gerçeklendiğinden

$$\left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right| < 1$$

dir. Dolayısıyla $k > 1$ olmak üzere

$$\prod_{j=1}^{n-2} \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right| < \prod_{j=k}^{n-2} \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right| \quad (38)$$

dir. Buna göre (36) dan

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \prod_{j=k}^{n-2} \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right| < \infty$$

ve (38) gereğince de

$$\sum_{n=3}^{\infty} \prod_{j=1}^{n-2} \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right| < \infty$$

dır. O halde

$$\sup_k \sum_n |b_{nk}| < \infty$$

yani $B \in B(\ell_1)$ dir. Bu ise $x \in \ell_1$ yani $R(\lambda I - A^*) = \ell_1$ olduğunu gösterir.

2. Hâl: Sonsuz sayıdaki k lar için $p_k = 0$ olsun. A nın regüler olması yani, $P_n \to \infty, (n \to \infty)$, olması nedeniyle de

sonsuz sayıdaki k lar için $p_k \neq 0$ olmak zorundadır. $p_k \neq 0$ olacak biçimdeki terimlerden oluşan alt diziyi (p_{n_k}) ile gösterelim. (33) den

$$n \neq 1 + n_k \quad \text{için} \quad x_n = 0$$

ve

$$n = 1 + n_k \ \text{için} \quad x_n = x_{1+n_k} = (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_{n_k}}{P_{n_k-1}} \prod_{j=1}^{r} (1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{p_{n_j}}{P_{n_j-1}})$$

elde ederiz. 1. Hâldeki gibi $\Sigma|z_n|$ serisinin yakınsak olduğunu göstererek $\lambda I - A^*$ operatörünün bire bir olmadığını elde ederiz ve sonsuz sayıdaki k lar için $p_k \neq 0$ olduğundan $(\lambda I - A^*)^{-1}$ operatörüne karşılık gelen matrisin terimleri sıfır olanlar dışında $B = (b_{nk})$ ile aynı olacaktır. Dolayısıyla $R(\lambda I - A^*) = \ell_1$ dir. Böylece $\lambda I - A \in III_1$ elde edilir.

TEOREM 4.4.2: A, yeterince büyük n için $\frac{p_n}{P_n} \geq \delta$ eşitsizliğini gerçekleşin. Bu durumda λ, $|\lambda - \frac{1}{2-\delta}| = \frac{1-\delta}{2-\delta}$, ve $\lambda \neq 1, \frac{1}{2-\delta}$ özelliklerine sahip bir kompleks sayı ise $\lambda \in II_2\sigma(A,c)$ dir ([16] Rhoades 1983).

İspat: $\lambda \neq 1, \frac{1}{2-\delta}$ ve $|\lambda - \frac{1}{2-\delta}| = \frac{1-\delta}{2-\delta}$ olduğundan her n için $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ ve dolayısıyla $\lambda I - A$ bire birdir. Buradan $(\lambda I - A)^{-1}$ mevcut yani $\lambda I - A \in 1 \cup 2$ elde ederiz.

$\lambda I - A^*$ operatörünü göz önüne alalım. Eğer $(\lambda I - A^*)x = \theta$ ise $x_0 = 0$ olup $n \geqq 2$ için x_n, (33) ü gerçekler.

Hipotezden her $n \geqq N$ için $\frac{p_n}{P_n} \geqq \delta$ olacak biçimde bir $N > 0$ mevcut ve λ, yukarıdaki hipotezleri gerçeklediğinden aynı n ler için

$$\left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_n}{P_{n-1}}\right| \geqq 1$$

gerçeklenir. O halde her $n \geqq N$ için (33) den

$$|x_n| \geqq \left|\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x_1\right| \frac{p_{n-1}}{P_{n-2}} \tag{39}$$

yazabiliriz. Diğer yandan

$$\frac{p_{n-1}}{P_{n-2}} \geqq \frac{p_{n-1}}{P_{n-1}}$$

olup, A regüler olduğundan Abel-Dini Teoremi (Teorem 1.3.5) gereğince $\Sigma \frac{p_n}{P_n}$ ıraksaktır. Böylece $x_1 \neq 0$ için (39) dan $\Sigma|x_n|$ ıraksaktır. Buna göre $x = (x_n) \in \ell_1$ olabilmesi için $x_1 = 0$ olmalı, (33) den ise $x = \theta$ olmalıdır. Buradan $\lambda I - A^*$ bire bir olup Teorem 2.1.5 gereğince $\overline{R(\lambda I - A)} = c$ dir.

Diğer yandan hipotezi gerçekleyen λ kompleks sayıları $\sigma(A,c)$ de bulunduğundan $\lambda I - A \in II_2$ olmak zorundadır. Bu ise $\lambda \in II_2\sigma(A,c)$ olduğunu gösterir.

TEOREM 4.4.3: $1 \in III_3\sigma(A,c)$ dir ([16] Rhoades 1983).

İspat: (i) $e = (1,1,\ldots) \in c$ olup $(I - A)e = \theta$ olduğundan I-A bire bir değildir. O halde $(I - A)^{-1}$ mevcut değil yani $I - A \in 3$ dir.

(ii) $z_0 \neq 0$ olmak üzere $z = (z_0, z_1, \ldots) \in c$ olsun. Bu durumda her $x \in c$ için,

$$\|(I - A)x - z\| \geq |z_0| > \frac{|z_0|}{2} > 0$$

olacağından $z \notin \overline{R(I - A)}$ ve dolasıyla $\overline{R(I - A)} \neq c$ dir. Bu ise $I - A \in III_3$ olması demektir.

(i) ve (ii) birlikte göz önüne alınırsa $I - A \in III_3$ yani $1 \in II_3\sigma(A,c)$ elde edilir.

4.5 Ağırlıklı Ortalama Operatörünün c_0 Üzerindeki Fine Spektrumu

Bu kısımda ağırlıklı ortalama operatörünü c_0 üzerinde göz önüne alıp fine spektrumunu inceleyeceğiz. İspat tekniği aynı olduğundan Kısım 4.4 de c için verilen teoremleri, c_0 için ispatsız olarak vereceğiz.

Bu kısımda da sadece $\lim \frac{p_n}{P_n} = \delta$ mevcut olacak biçimdeki A, regüler ağırlıklı ortalama operatörünü gözönüne alacağız.

TEOREM 4.5.1: λ, $|\lambda - \frac{\delta}{2-\delta}| < \frac{1-\delta}{2-\delta}$ eşitsizliğini gerçeklesin ve $\lambda \notin G$ olsun. Bu durumda $\lambda \in III_1\sigma(A,c_0)$ dır ([17] Rhoades 1987).

TEOREM 4.5.2: A, yeterince büyük n için $\frac{p_n}{P_n} \geqq \delta$ eşitsizliğini gerçeklesin. Bu durumda λ, $|\lambda - \frac{\delta}{2-\delta}| = \frac{1-\delta}{2-\delta}$ ve $\lambda \neq 1$, $\frac{\delta}{2-\delta}$ özelliklerine sahip bir kompleks sayı ise $\lambda \in II_2\sigma(A,c_0)$ dır. ([17] Rhoades 19877).

TEOREM 4.5.3: $1 \in III_3\sigma(A,c_0)$ dır ([17] Rhoades 1987).

BÖLÜM 5

MERCERİAN TEOREMLERİ

Mercerian teoremleri verilen bir A operatörünün yakınsaklığa denk olması ile ilgilidir. Bu bölümde C Cesàro operatörü için $\lambda I + (1-\lambda)C$ yakınsaklığa denk olacak biçimdeki λ kompleks sayılarını belirleyeceğiz. Aslında elde edeceğimiz sonuçlar bilinmektedir. Ancak bizim amacımız bu sonuçların spektrum yardımıyla daha kısa ve daha anlaşılır biçimde elde edilebileceğini göstermektir.

LEMMA 5.1.1: $A \in B(c)$ ve A operatörü bire bir olsun. Bu durumda A nın hiç bir sınırlı ıraksak diziyi limitlememesi için gerek ve yeter şart $R(A)$ nın c içinde kapalı olmasıdır ([20] Wilansky 1964).

LEMMA 5.1.2: A regüler bir operatör ve $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Bu durumda $\frac{\lambda}{\lambda - 1} \in \rho(A,c)$ ve $\lambda = 1$ olacak biçimdeki λ kompleks sayıları için eğer, $\lim(\lambda x + (1-\lambda)Ax) = \ell$ ise $\lim x = \ell$ dir ([19] Wegner 1975).

İspat: Eğer $\lambda = 1$ ise $\lambda I + (1-\lambda)A = I$ olacağından ispat aşikardır.

$\frac{\lambda}{\lambda-1} \in \rho(A,C)$ ve $\lim(\lambda x + (1-\lambda)Ax) = \ell$ olsun. Bu durumda $(\frac{\lambda}{\lambda-1} I - A)^{-1} \in B(c)$ ve dolayısıyla

$(\lambda I + (1-\lambda)A)^{-1} \in B(c)$ dir. Böylece $(\lambda I + (1-\lambda)A)^{-1}$ sınırlı (sürekli) olduğundan $R(\lambda I + (1-\lambda)A)$, c içinde kapalıdır. O halde Lemma 5.1.1 gereğince $\lambda I + (1-\lambda)A$ hiçbir sınırlı ıraksak diziyi limitlemez.

Diğer yandan $(\lambda I + (1-\lambda)A)x \in c$ olduğundan $x = (\lambda I + (1-\lambda)A)^{-1}(\lambda I + (1-\lambda)A)x$ ve buradan

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(\lambda I + (1-\lambda)^{-1}(\lambda I + (1-\lambda)A)x\| \\ &\leqq \|(\lambda I + (1-\lambda)A)^{-1}\|\,\|(\lambda I + (1-\lambda)A)x\| < \infty \end{aligned}$$

olduğundan $x \in c$ olmalıdır. Ayrıca A regüler olduğundan $\lim Ax = \lim x$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \ell = \lim(\lambda x + (1-\lambda)Ax) &= \lambda \lim x + (1-\lambda)\lim Ax \\ &= \lambda \lim x + (1-\lambda)\lim x \\ &= \lim x \end{aligned}$$

elde edilir.

TEOREM 5.1.3: (i) Eğer $Re(\lambda) > 0$ ve $\lim(\lambda x + (1-\lambda)Cx) = \ell$ ise $\lim x = \ell$ dir.

(ii) Eğer $Re(\lambda) < 0$ ve $(\lambda x + (1-\lambda)Cx) = \ell$ ise ya $\lim x = \ell$ veya $x \notin \ell_\infty$ dır.

(iii) $Re(\lambda) = 0$ ise $\lambda I + (1-\lambda)C$ operatörü sınırlı ıraksak bir dizi limitler ([19] Wegner 1975).

İspat: C Cesàro operatörü regüler olduğundan Lemma 5.1.2 yi uygulayabiliriz.

(i) $Re(\lambda) > 0$ olsun. Eğer $\lambda = 1$ ise $\lambda I + (1-\lambda)C = I$ olduğundan ispat aşikardır. $\lambda \neq 1$ için $Re(\lambda) > 0$ olması $Re(\frac{\lambda - 1}{\lambda}) < 1$ olmasına denktir. Teorem 3.2.3 gereğince ise $\frac{\lambda}{\lambda - 1} \in \rho(C,c)$ dir. O halde Lemma 5.1.2 gereğince $\lim(\lambda x + (1-\lambda)Cx) = \ell$ olması $\lim x = \ell$ olmasını gerektirir.

(ii) $Re(\lambda) < 0$ olsun. Bu durumda $Re(\frac{\lambda - 1}{\lambda}) > 1$ olacağından Teorem 3.6.2 gereğince $\frac{\lambda}{\lambda - 1} \in III_1\sigma(C,c)$ dir. Bu durumda $(\lambda I + (1-\lambda)C)^{-1}$ mevcut ve sınırlı (sürekli) olduğundan $R(\lambda I + (1-\lambda)C)$ c içinde kapalıdır. O halde Lemma 5.1.2 gereğince $\lambda I + (1-\lambda)C$ hiçbir sınırlı ıraksak diziyi limitlemez. Böylece $\lim(\lambda x + (1-\lambda)Cx) = \ell$ ise ya $x \in c$ yani $\lim x = \ell$ veya $x \notin \ell_\infty$ olmak zorundadır.

(iii) $Re(\lambda) = 0$ olsun. Eğer $\lambda \neq 0$ ise Bu durumda $Re(\frac{\lambda - 1}{\lambda}) = 1$ olmasına denktir. Teorem 3.6.3 gereğince $\frac{\lambda}{\lambda - 1} \in II_2\sigma(C,c)$ yani $(\lambda I + (1-\lambda)C)^{-1}$ mevcut ancak sınırlı (sürekli) değildir. O halde $R(\lambda I + (1-\lambda)C)$ c içinde kapalı değildir. Bu ise Lemma 5.1.2 gereğince $\lambda I + (1-\lambda)C$ sınırlı ıraksak dizileri limitler.

Eğer $\lambda = 0$ ise $\lambda I + (1-\lambda)C = C$ olup, C Cesàro operatörü sınırlı ıraksak bir dizi limitlediğinden ispat aşikardır.

KAYNAKLAR

1. BORWEIN, D. ve JAKIMOVSKI, A. Matrix Operators on ℓ_p. Rocky Mountain J.Math. 9(1979), 463-477.

2. BROWN, A.L. ve PAGE, E. Elements of Functional Analysis Von Nostrand Reinhold Comp. (1970).

3. BROWN, A., HALMOS, P.R. ve SHEILDS, A.L. Cesàro Operators. Acta Sci.Math. 26(1965), 125-137.

4. CARTLIDGE, J.M. Weighted Mean Matrices as Operators on ℓ_p.Ph.D.Thesis. Indiana University (1978).

5. CASS, F.P. ve RHOADES, B.E. Mercerian Theorems via Spectral Theory. Pasific J.M. 73(1977), 31-34.

6. COPPING, J. K-Matrices Which Sum No Bounded Divergent Sequences. J.London Math.Soc.30(1955), 123-127.

7. GOLDBERG, S. Unbounded Linear Operators. Mc Graw-Hill Book Comp. (1966).

8. HARDY, G., LITTLEWOOD, J.E. ve POLYA, G. Inequalities. Cambridge University Press. (1952).

9. KNOPP, K. Theory and Application of Infinite Series. Blackie and Son Ltd. (1971).

10. LEIBOWITZ, G. Spectra of Discrete Cesâro Operators. Tamkang J.Math. 3(1972), 123-132.

11. MADDOX, I.J. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press. (1970).

12. OKUTOYI, J.I. On the Spectrum of the Cesâro Operator. Ph.D. Thesis. Birmingham University (1986).

13. OKUTOYI, J.I. ve THORPE, B. The Spectrum of the Cesàro Operator on $c_0(c_0)$. Math.Proc.Camb. Phil.Soc. 105(1989), 123-129.

14. PETERSEN, G. Regular Matrix Transformations Mc Graw-Hill Publishing Comp. (1966).

15. READE, J.B. On the Spectrum of the Cesàro Operator. Bull. London Math.Soc. 17(1985), 263-267.

16. RHOADES, B.E. The Fine Spectra for Weighted Mean Operators. Pasific J.M. 104(1983), 219-230.

17. RHOADES, B.E. The Spectrum of Weighted Mean Operators. Canad. Math.Bull. 30(1987), 446-449.

18. TAYLOR, A.E. Introduction to Functional Analysis. John Wiley and Sons Inc. (1963).

19. WEGNER, R.B. The Fine Spectra of Hölder Summability Operators. Indian J.Pure Appl. Math. 6(1975), 695-712.

20. WILANSKY, A. Topological Divisors of Zero and Tauberian Theorems. Trans.Amer.Math.Soc. 113(1964), 240-251.

21. WILANSKY, A. Summability Through Functional Analysis. North Holland (1984).