

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DÜĞÜM GRAFLARI

1274,80

Tamer UĞUR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ERZURUM

2002

Her hakkı saklıdır

...Abdullah Kopuzlu.....danışmanlığında, Tamer UĞUR.....tarafından hazırlanan bu çalışma ...29 / 07 / 2002... tarihinde aşağıdaki jüri tarafındanMaltepe..... Anabilim Dalı'ndaDoktora..... tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : HÜSEYİN ALCAN

İmza

Üye : Murat ÖZDEMİR

İmza

Üye : Ahmet KÜÇÜK

İmza

Üye : Abdullah KOPUZLU

İmza

Üye : Serpil AKRULU

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(imza)

Metin Özcan
Enstitü Müdürü ✓

ÖZET

Doktora Tezi

DÜĞÜM GRAFLARI

Tamer UĞUR

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yard. Doç. Dr. Abdullah KOPUZLU

Bu çalışmada düğüm grafları, grafiksel davranışları, Jones polinomu ve matrisleri olmak üzere üç ana başlıkta incelenmiştir; düğüm graflarının grafiksel davranışları incelenirken, düğümlere uygulanan Reidemeister hareketleri düğüm graflarına uygulanmış ve alternatif bir ispatı yapılmıştır. Ayrıca iki trefoil düğümünün grafinin birleşimi ile elde edilen durumlar sunulmuştur. Jones polinomları ile ilgili olarak $q = 3, 5, 7, \dots$ olmak üzere, $K(2, q)$ tor düğümlerinin Jones polinomunu bulan bir algoritma ileri sürülmüştür. Düğüm graflarının matrisleri için ise Merdiven-toplam-Metodu adı verilen ve yine $K(2, q)$ tor düğümlerinin bağlantılı toplamlarının matrislerini bulan bir metot tanımlanmış ve buna bağlı olarak da bazı sonuçlar verilmiştir. Son olarak da, bu incelenen konularla ilgili olarak bazı bilgisayar programları sunulmuştur.

2002, 55 sayfa

Anahtar kelimeler : düğüm, düğüm grafi, tor düğümü, Jones polinomu, graf matrisi.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

KNOT GRAPHS

Tamer UĞUR

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

In this study, knot graphs are investigated generally for their graphical acts, Jones polynomial and matrix. In exploring graphical acts of knot graphs, Reidemeister moves employed on knots are applied on knot graphs and proved in alternative ways. Furthermore, the cases associated with the unions of two trefoil knots graphs are introduced . As a relation to Jones polynomial, for $q = 3, 5, \dots$, an algorithm showing a way to find Jones polynomial for $K(2, q)$ torus knots is proposed. A method finding matrices of connected sum of $K(2, q)$ torus knots is described for the matrices of knot graphs, and some results of implementation of this method are presented. Finally, a few computer software programs are exhibited for these issues under investigation.

2002, 55 pages

Key words : knot, knot graph, torus knot, Jones polynomial, graph matrix.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Yard. Doç. Dr. Abdullah KOPUZLU'ya en içten duygularla teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik Bölümünde gerekli yardımı ve ilgiyi esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere, anabilim dalımızın değerli öğretim üyeleri Sayın Yard. Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e, Sayın Yard. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK'e ve Matematik Bölümünün diğer bütün öğretim elemanlarına, tez izleme komitemde bulunan ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ramazan DİKİCİ'ye,

Erzincan Eğitim Fakültesinin çok değerli akademik ve idari personeline, özellikle bilgisayar programlarının hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Arş. Gör. Recep ÖZ'e,

çalışmalarım esnasında başta eşim ve kızım olmak üzere tüm aileme ve arkadaşlarıma, göstermiş oldukları destek ve teşvikten dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tamer UĞUR

Temmuz 2002

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1.GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	6
2.1Düğümler	6
2.1.1Düğüm	6
2.1.2 Regüler Diyagramlar	7
2.1.3 Basit Düğüm Hareketleri	9
2.1.4 Reidemeister Hareketleri	10
2.1.5 Düğümlerin Bağlantılı Toplamı	11
2.1.6 Düğümlerin Denkliği	15
2.1.7 Tor Düğümü	18
2.1.8 Düğüm Sabitleri	18
2.1.9 Düğümlerin Aritmetiği	19
2.2 Graflar	20
2.2.1 Graf	20
2.2.2 Yüklü Graf	20
2.2.3 Altgraf	20
2.2.4 Spanning altgraf	20
2.2.5 Spanning Köşe Graf.....	21
2.2.6 Ayrılabilir Graf	21
2.2.7 Blok	21
2.2.8 Kıstak	21
2.2.9 İlmek	21
2.2.10 Çokkatlı Graf	22
2.2.11 İndirgenmiş Graf	22

2.2.12 Basit Graf	22
2.2.13 Betti Sayısı	22
3. MATERYAL VE YÖNTEM	23
3.1 Materyal	23
3.1.1 Düzüm Grafi	23
3.2 Yöntem	23
3.2.1 Düzüm Graflarının Elde Edilişi	23
3.2.2 Graflar Üzerinde İşlemler	25
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	29
4.1 Düzüm Graflarının Grafiksel Davranışları	29
4.1.1 Düzüm Graflarına Uygulanan Reidemeister Hareketleri	29
4.1.2 Düzümlerin Birleşimlerinin Grafları	31
4.1.3 Düzüm Grafi Örnekleri	33
4.2 Düzüm Grafları için Jones Polinomu	35
4.3 Düzüm Graflarının Matrisleri	40
4.3.1 Merdiven toplam Metodu	40
5. SONUÇLAR	44
KAYNAKLAR	46
EK 1.....	48
EK 2.....	51
EK 3.....	53
EK 4.....	55

SİMGELER DİZİNİ

B^n	n -Boyutlu top
D	K düğümünün standart regüler diyagramı
G	Bir düğümün grafi
G'	Dual graf
$J_G(x, y, z)$	Bir düğümün G grafının Jones polinomu
K	Herhangi bir düğüm
K^*	K düğümünün ayna görüntüsü
$K(p, q)$	p, q -tipli tor düğümü
$M_{p,q}$	Bir düğümün grafının matrisi
$M_{2,q}^k$	Bir düğümün grafının k bağlantılı toplamının matrisi
$p(K)$	Bir düğümün sabiti
R^3	3-Boyutlu Euclid uzayı
S^1	1-Boyutlu küre
S^3	$R^3 \cup \{\infty\}$ şeklinde oluşturulan uzay
β_i	i inci Betti sayısı
π	K düğümünün standart regüler izdüşümü
Ω_i	$i = 1, 2, 3$ için Reidemeister Hareketleri
$\#$	Bağlantılı toplam operatörü

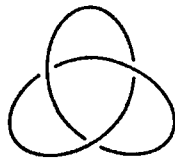
ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.	Trefoil düğümü	1
Şekil 2.1.1.	Düğümün izdüşümü.....	7
Şekil 2.1.2.	Katlı noktalar	8
Şekil 2.1.3.	Regüler diyagramlar	8
Şekil 2.1.4.	Basit düğüm hareketleri (1) ve (1)'	9
Şekil 2.1.5.	Basit düğüm hareketleri (2) ve (2)'	9
Şekil 2.1.6.	Reidemeister hareketleri	10
Şekil 2.1.7.	Ω_1 -Hareketi	11
Şekil 2.1.8.	(1,1)-Tangle örnekleri	12
Şekil 2.1.9.	Düğümlerin ayrışımı	12
Şekil 2.1.10.	K nın gerçek olmayan ayrışımı	13
Şekil 2.1.11.	Düğümlerin bağlantılı toplamı	14
Şekil 2.1.12.	Düğümlerin Perko çifti	15
Şekil 2.1.13.	Düğümlerin yönlendirmesi	16
Şekil 2.1.14.	Düğümlerin denkliği	16
Şekil 2.1.15.	Bileşke düğümler	19
Şekil 3.2.1.	Trefoil düğümü ve grafi.....	23
Şekil 3.2.2.	Grafın işareti	24
Şekil 3.2.3.	Graftan düğüm elde edilişi	25
Şekil 4.1.1.	Düğümlerin birleşimi	30
Şekil 4.1.2.	(3,4)-Tor düğümünün gölgelendirilerek grafının elde edilişi	32
Şekil 4.1.3.	(2,9)-Tor düğümünün gölgelendirilerek grafının elde edilişi	32
Şekil 4.1.4.	(5,13)-Tor düğümünün gölgelendirilerek grafının elde edilişi	33
Şekil 4.1.5.	(7,5)-Tor düğümünün gölgelendirilerek grafının elde edilişi	33
Şekil 4.2.1.	Trefoil düğümü ve işaretlenmiş grafi	36
Şekil 2.4.1.	(3,5)-Tor düğümü	50
Şekil 4.4.2.	(4,37)-Tor düğümü	50

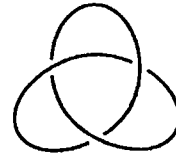
1. GİRİŞ

Ortalama uzunlukta mesela 50 cm boyunda bir ip bir hediye paketinin üzerine gevşek bir şekilde bağlansın. Burada ipin kutuyla temas etmemesi gerekir. Kutu sadece destek amacıyla kullanılmıştır. Elde edilen obje düğümün basit bir tipidir. Şimdi, bu ipin iki ucu yapıştırılsın. İşlem tamamlandığında özellikle görülmesi gereken şey 50 cm uzunluğunda bir iple meydana getirilen tek bir düğümlemiş ilmeektir. Matematikte bu ilmek düğüm olarak adlandırılır.

Daha kesin bir ifadeyle düğüm tek bir eğri olarak düşünülebilir. Dolayısıyla düğüm uzayda basit kapalı bir eğridir. Eğer yukarıda sağ el ile yapılan işlem sol el ile yapılırsa yine bir düğüm elde edilir. İlk bakışta her iki el ile yapılan iki düğümde birbirine benzerdir. Ancak dikkatle bakıldığında bu iki şekil arasında bazı yerlerde farklılıklar olduğunu görmek mümkündür. Aslında farklı şekildeki bu iki düğümün her biri trefoil düğüm (yonca yaprağı) olarak adlandırılır. Yukarıda bahsedilen işlemlerle elde edilen iki düğümü birbirinden ayırt edebilmek için birine sağ-el trefoil düğümü diğereine de sol-el trefoil düğümü adı verilmiştir (şekil 1.1).



Sağ-el



Sol-el

Şekil 1.1 Trefoil düğümü

Bir düğümü tanımlamak için bir parça ipi bir hediye paketine veya benzer bir şeye bağlayarak elde edilen objenin, düğüm olduğunu söylemek yeterli değildir. Bağlama şekillerine göre birbirinden bağımsız çeşitli düğüm tipleri elde edilebilir. Çok uzun bir ip kullanarak ve bu ipi çok karmaşık bir tarzda düğümleyerek oldukça karmaşık bir düğüm meydana getirilsin. Diğere yandan 10 cm uzunluğundaki bir iple de bir başka

düğüm elde edilsin. Eğer el maharetiyle bu iki düğüm kesilmeden birbirinin aynı olacak şekilde yeniden düzenlenirse bu durumda bu düğümlerin birbirinin aynı olduğu söylenebilir, dolayısıyla bu düğümlerin denk düğümler olduğu da görülebilir. İlgilenilen şey bir düğümün gerçek formu ise bu durumda düğümü oluşturan ipin ne kadar uzun veya ne kadar kalın olduğuna ihtiyaç duyulmaz. Aslında 50 cm uzunluğundaki bir ipten elde edilen bir düğümün 10 cm uzunluğundaki bir ipten elde edilen düğüme denk olduğunu söylemek mümkündür. Bir düğüm bir başka düğüme dönüştürülebileceğine göre düğümlerin uzunluğundan ve kalınlığından ziyade şekli ile ilgilenilir. Problemin asıl amacı da budur. Zaten Düğüm Teorisini de Topolojinin bir dalı yapan bu özelliktir.

19. yy. dan beri çok hızlı bir gelişime uğrayan düğüm teorisi özellikle 20. yy.' ın başından beri diğer bilim dallarına uygulamaları itibariyle de daha bir önem kazanmıştır.

Düğüm teorisi ile ilk olarak kimin ne zaman ilgilendiğini söylemek zor olsa da son dönemde Gauss'un bu alana biraz ilgi duyduğu bilinmektedir. Amerikalı matematikçi Alexander düğüm teorisinin 3-boyutlu topoloji çalışmalarında ne kadar önemli olduğunu gösteren ilk kişidir. Ayrıca, Alman matematikçi Seifert 1920'lerin başından 1930'a kadar yaptığı çalışmalarda bu teorisinin önemini belirtmiştir. Ayrıca cebirsel geometri ile düğüm teorisi arasındaki ilişki arasında gözle görülür çalışmalarda yine bu dönemde Almanya'da yapılmıştır.

İkinci dünya savaşından sonra A.B.D.' de düğüm teorisi ile ilgili büyük ilerlemeler görüldü. Bu araştırmaların etkisi altında Japonya büyük atılımlar yaptı. 1970'lerin düğüm teorisinde ise periyodik dönüşümlerle alakalı Smith tahmininin çözümünden dolayı düğüm teorisinin cebirsel sayı teorisi ile bağlantısının olabileceği farkedildi.

1980'lerin başında Jones'un epochal düğüm sabitlerini keşfinden dolayı düğüm teorisi topoloji başlığı altından çıkmış matematiksel fiziğe taşınmıştır. Bu durum düğüm teorisinin çözülebilir istatistiksel mekanikle yakınlığını da göstermiştir. Düğüm teorisi büyüyüp geliştiği için onun sınırları da devamlı olarak değişmektedir. Matematiksel

biyoloji, mekanik ve kimyanın belli alanlarında da gelişmeler göstermiştir. Örneğin, Biyolojide DNA moleküllerinin belli tiplerinin, bazı düğüm tiplerinin şeklini aldığı görülmüştür.

Günümüzde, bu tezin konusu da olan düğüm grafi kavramı düğüm teorisinin uygulamalarında oldukça önemli rol oynamaktadır. Düğüm teorisinin ilk yıllarında graf, 3-boyutlu uzaydaki düğüm çalışmalarında kullanılan bir metotttu. Bugün ise özellikle düğüm teorisinin kimyaya uygulamalarında düğüm grafi kavramı önemli araçlardan biri olmuştur. Spatial (uzaysal) graflar olarak adlandırılan ve düzlemsel graflardan biraz daha farklı olan bu graf kavramı bu alanda önemli yer tutar. Bu yüzyılın başından beri bazı kimyacılar, düğüm ya da halkaları ihtiva eden yapı formülü ile suni molekül sentezlemeye ilgi duymuşlardır. Frisch ve Wassermann (1961) bir halkayı (Hopf Halkası) ihtiva eden yapı formülü ile bir molekülü sentezlemeyi başardılar (Murasugi 1996). Bir düğümün yapısal formülü ile bir molekülü sentezleme teşebbüsü bazı kimyacılar tarafından sürdürüldü ve moleküller bu ilginç yapı formülü ile sentezlendi. Walba (1985) molekülün yapısal formülünü elde etmek için kullanılan işlemde, yapısal formül olarak bir düğümün yapısını kullanarak, Möbiüs merdivenli (M_3 -graf) bir molekül sentezlemeyi başardı (Murasugi 1996). Bu olay molekül topolojisinin doğmasına sebep oldu.

Bir molekülün yapısal formülü, köşeleri, moleküldeki atomlara karşılık gelen ve kenarları, kovalent bağlar yardımıyla atomlar arasındaki veri kombinasyonunu ifade eden bir graftır.

Bir graf R^3 de aşıkardır. Bir grafın bir kenarının uzunluğu ve iki kenar arasındaki açı gibi geometrik invariantları oldukça önemlidir. Ancak topolojik olarak incelendiğinde grafın kenarlarını değiştirebiliriz.

Düğüm grafları başlığı altında çalıştığımız bu konu graf teori ve düğüm teorisinin bir ortak çalışması olarak düşünülebilir. Ancak doğal olarak bu çalışmada ağırlık düğüm teorisine verildi. Yine de graf teorisinin temel tanım ve kavramlarından yeri geldikçe

faydalanıldı. Tarihsel olarak bakıldığında düğüm teori ve graf teorisinin geçmişi çok eskilere dayanmasına rağmen düğüm grafi kavramının orijini 1930'lara dayanmaktadır. İlk olarak Bankwitz (1930) düğüm grafi notasyonunu literatüre kazandırmıştır. Daha sonra Aumann (1956) alterne düğümler çalışmasında bu konuya yer vermiş Yajima ve Kinoshita (1957) bu kavramın grafiksel davranışlarını incelemişlerdir. İlerleyen dönemlerde de bu çalışmalar sürmüş 1980'den sonra ise Jones (1987) kendi ismini verdiği polinomu keşfinden sonra düğüm graflarının önemi bir kat daha artmıştır ki Jones polinomunun keşfinin düğüm teori için bir kilometre taşı olduğu söylenebilir. Daha sonra Kaufmann, Murasugi gibi isimler de bu yönde oldukça ciddi çalışmalarda bulunmuşlardır.

Düğüm ya da halkaların regüler izdüşümleri 2-boyutlu S küresini her biri açık bir diske homeomorf birkaç bölgeye böler. Düğüm teorisi çalışmalarında, bu bölgeleri, Tait metodu da denilen, siyah-beyaz veya gölgeli-gölgesiz gibi ifadelerle iki farklı sınıfa ayıran bir metot kullanılır. Yukarıda da bahsettiğimiz gibi bunu literatüre ilk olarak kazandıran Bankwitz (1930) olmuştur.

Bu çalışma Kuramsal Temeller, Materyal ve Yöntem, Araştırma Bulguları ve Sonuçlar olmak üzere dört ana bölümden meydana gelmiştir.

Kuramsal temeller kısmında tezin sonraki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramların açıklamalarına yer verilmiştir.

Materyal ve Yöntem kısmında tezin ana teması olan düğüm grafi kavramı açıklanmış, ayrıca düğüm graflarının elde edilişleri ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Araştırma Bulguları ve Tartışma kısmı ise üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci kısım da düğümlere uygulanan Reidemeister hareketlerinin düğüm graflarına uygulamasının alternatif olarak geometrik bir ispatı yapılmış, ayrıca iki 3_1 düğümünün birleşiminin grafiyle elde edilen durumlar sunulmuştur. Son olarak da bazı ilginç düğüm grafları sunulmuştur. İkinci kısımda düğüm grafları için bir invaryant olan Jones polinomu

incelenmiş, $K(2, q)$ -tor düğümlerinin grafları için Jones polinomunu bulan bir algoritma sunulmuştur. Üçüncü kısımda düğüm graflarının matrisleri tanımlanmış, $K(2, q)$ -tor düğümlerinin grafları için bu düğümlerin bağlantılı toplamalarının matrisini veren ve merdiven toplam metodu adını verdiğimiz bir metot tanımlanmıştır.

Sonuçlar kısmında, araştırma bulguları kısmında elde edilen sonuçlar özet halinde sunulmuştur.

Son olarak Ekler kısmında ise Araştırma Bulguları ve Tartışma kısmında elde edilen sonuçlarla ilgili olarak bilgisayar programları ve Alexander-Briggs tablosundaki asal düğümlerin bir tablosu verilmiştir.



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu kısımda sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar verilecektir. Düğüm grafları, düğüm teori ile graf teorisinin bir ortak çalışması olduğundan bu kavramlar Düğümler ve Graflar olmak üzere iki ana başlıkta toplanmıştır.

2.1 Düğümler

2.1.1 Düğüm

Düğümün formal tanımı yapılırken düğüm kavramı poligonal düğüm ve smooth düğüm olarak ikiye ayrılır. R^3 Öklid uzayında herhangi kapalı kendini kesmeyen poligonal doğrular poligonal düğüm olarak adlandırılır. Düğümlerin denkliği incelenirken kullanılan basit düğüm hareketleri bu poligonal düğümler üzerinde uygulanır. Ancak poligonal düğüm kavramı dolaştırılmış bir ipin sezgisel algılanmasını tam olarak yansıtmaz. Daha iyi bir matematiksel model smooth düğüm kavramıdır. Bir smooth düğüm, diferensiyeli sıfıra eşit olmayan sonsuz bir diferensiyellenebilir gömülme altında, R^3 de ki çemberin görüntüsü olarak tanımlanır. Yani,

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \neq (0,0,0)$$

dir. Burada S^1 çemberinin R^3 e gömülmesi, çemberin farklı noktalarının hiçbir çifti uzayda aynı noktaya dönüşmeyecek şekilde $f : S^1 \rightarrow R^3$ e bir sürekli dönüşüm olarak tanımlanır (Prasolov, Sossinsky 1996).

Dolayısıyla bir K düğümü en iyi şekilde S^1 in S^3 e gömülmesi ile elde edilen basit kapalı bir eğri olarak tanımlanır (Magnhild, William 2000). Burada S^3 , R^3 e sonsuz noktanın ilave edilmesiyle elde edilir (Burde, Zieschang 1985). Yani;

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_i) \in E_n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

$n-1$ küre olmak üzere;

$$S^3 = \left\{ x = (x_i) \in E_4 : \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1 \right\}$$

şeklinde oluşturulan bir uzaydır (Rolfsen 1976). Daha net bir ifadeyle S^3, R^3 ün bir tek nokta kompaktifikasyonudur (Kauffman 1986). Burada S^3 aynı zamanda B^4 topunun sınırındır. Burada,

$$B^n = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$$

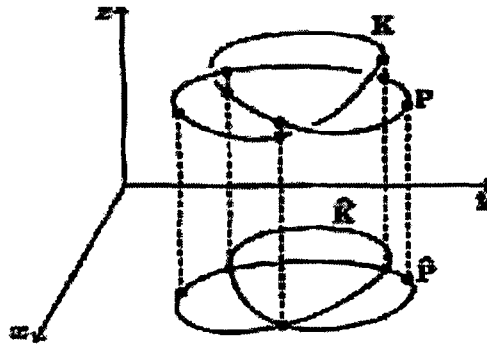
olmak üzere

$$B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : \sum_{i=1}^3 x_i^2 \leq 1\}$$

şeklindedir. R^3 içinde herhangi bir top B^3 e homeomorf olduğundan bundan sonra B^3 ü bu top yerine alacağız.

2.1.2 Regüler Diyagramlar

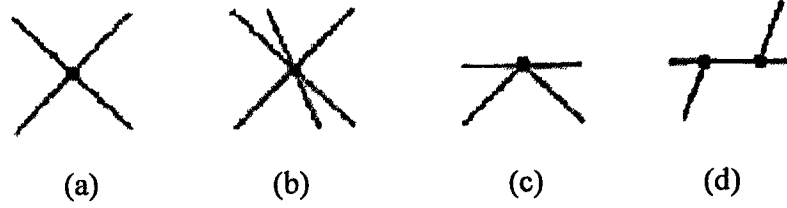
R^3 deki $P(x,y,z)$ noktasını şekil 2.1.1 de görüldüğü gibi xy -düzlemindeki $\hat{P}(x,y,0)$ noktasına izdüştüren dönüşüm π ile gösterilsin.



Şekil 2.1.1 Düğümün izdüştürümü

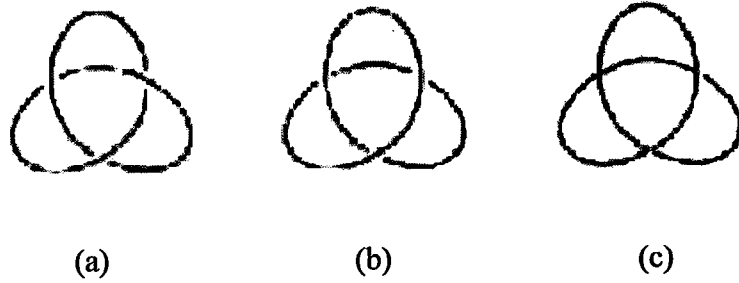
Eğer K bir düğüm ise $\pi(K) = \hat{K}$ ya K nın izdüştürümü denir. \hat{K} birkaç arakesit noktasına sahip olduğundan düzlemde basit kapalı bir eğri değildir. K düğümü üzerinde birkaç düğüm hareketi yapmak suretiyle aşağıdaki şartlar verilebilir.

1. \hat{K} sonlu sayıda arakesit noktasına sahiptir.
2. Eğer Q , \hat{K} nin bir arakesit noktası ise Q nun $\pi^{-1}(Q) \cap K$ ters görüntüsü K da iki noktaya sahiptir. Yani Q , \hat{K} nin bir katlı noktasıdır (Bakınız şekil 2.1.2(a)). Şekil 2.1.2(b) de gösterildiği gibi ikiden fazla noktaya müsaade edilmez.
3. K düğümü poligonal olarak düşünülürken K nin bir köşesi \hat{K} nin katlı noktasına dönüşmez. şekil 2.1.2(c) ve (d) deki örneklerin ikisinde de, bir poligonal doğru \hat{K} nin bir köşesine izdüşmüştür. Bu durumların ikisine de müsaade edilmez.



Şekil 2.1.2 Katlı noktalar

Yukarıdaki şartları sağlayan \hat{K} düğümünün izdüşümünün bir regüler izdüşüm olduğu söylenir. Ancak izdüşümlerle çalışmalarda katlı noktalardan doğan bazı önemli belirsizlikler ortaya çıkar. İzdüşümün katlı noktasında düğümün kendi kendisinin altından mı üstünden mi geçtiği belli değildir. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için düğümün kesim noktası işaretlenerek, katlı nokta civarında düğüm bir miktar değiştirilebilir. Böylece düğümün geçit noktasının alttan mı üstten mi olduğu konusunda orijinaline uymasa da gerçek görüntü çizilebilir. Böyle değiştirilmiş izdüşümler bir regüler diyagram olarak adlandırılır. Şekil 2.1.3(a), (b).



Şekil 2.1.3 Regüler diyagramlar

Bir regüler diyagram aslında düğümün üç boyutlu uzayda nasıl bulunduğunu verir. Yani düzlemde uzaysal bir çizimin verilebilmesine imkan tanır. Dahası izdüşümde kaybolan

bilgiyi elde etmek için regüler diyagram kullanılır. Örneğin şekil 2.1.3(c), şekil 2.1.3(a) ve (b) deki farklı iki düğümün regüler izdüşümüdür (Murasugi 1996).

2.1.3 Basit Düğüm Hareketleri

Bir düğüm matematiksel anlamda poligonal doğruların bir koleksiyonu olarak düşünülebileceği daha önce söylenmişti. Dolayısıyla bir düğümün biçiminde kolayca değişiklik yapılabilir. Örneğin bir K düğümü üzerindeki AB kenarını AC ve CB kenarlarıyla değiştirmek mümkündür. Bu değişikliğin tersi de yapılabilir. Böyle yer değiştirmeler basit düğüm hareketleri olarak adlandırılır. Bu değişim hareketleri daha net olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

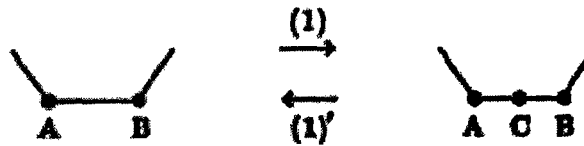
Verilen bir K düğümü üzerinde aşağıdaki dört işlem uygulanabilir.

(1) şekil 2.1.4 de görüldüğü gibi bir K düğümü üzerindeki AB kenarı bir C kenarı referans alınarak AC ve CB şeklinde iki kenara bölünebilir.

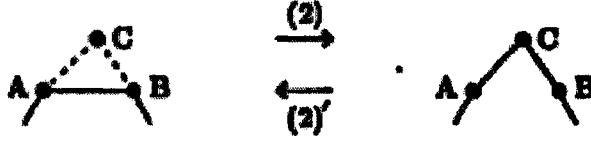
(1)' ((1) in tersi) şekil 2.1.4 de görüldüğü gibi bir K düğümü üzerinde bitişik AC ve CB kenarlarından oluşan bir doğru varsa bu C kenarı silinerek bir AB kenarı elde edilebilir.

(2) K düğümü üzerinde bulunmayan bir C noktasını düşünelim. AB ve C ile biçimlendirdiğimiz ABC üçgeni AB kenarı hariç K düğümünü kesmezse bu durumda AB kenarı ortadan kaldırabilir ve AC ve CB kenarları eklenebilir (şekil 2.1.5).

(2)' ((2) nin tersi) K düğümü üzerinde K nın AC ve CB bitişik iki kenarını ihtiva eden bir ABC üçgeni mevcutsa ve bu üçgen AC ve CB kenarları hariç K düğümünü kesmezse şekil 2.1.5 de görüldüğü gibi AC ve CB kenarları silinebilir ve AB kenarı eklenebilir.



Şekil 2.1.4 Basit düğüm hareketleri (1) ve (1)'



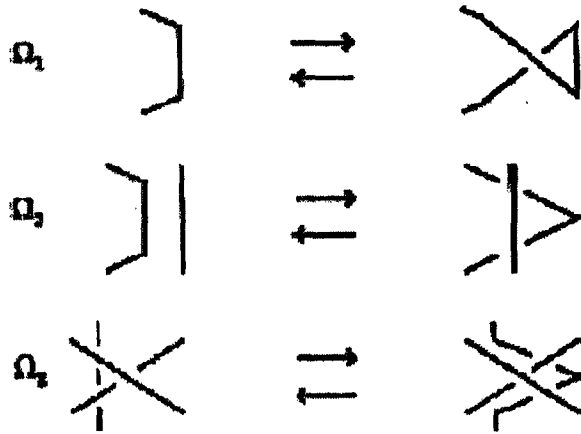
Şekil 2.1.5 Basit düğüm hareketleri (2) ve (2)'

Bu dört işlem basit düğüm hareketleri olarak adlandırılır (Murasugi 1996).

2.1.4 Reidemeister Hareketleri

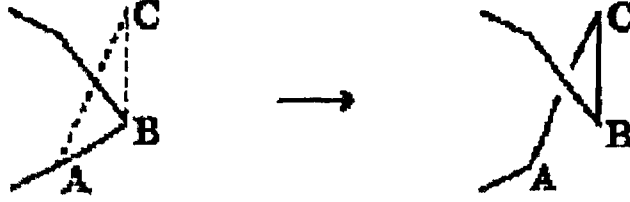
Reidemeister (1926) düğümler (halkalar) için bir denklik bağıntısı tanımladı. İki düğüm diyagramını şekil 2.1.6 da gösterilen Reidemeister hareketlerinin sonlu dizisi ile birbirleri üzerine dönüştürülebiliyorsa denktir. Reidemeister, aynı düğümler için herhangi iki diyagramın denk olduğunu gösterdi. Ayrıca, Reidemeister hareketlerinin incelenmesiyle iki diyagram denkse aynı düğümü ifade ettiği de açıktır (Murasugi 1996).

İki düğüm $i = 1, 2, 3$ için Ω_i veya onların tersi olan Ω_i^{-1} Reidemeister hareketlerinin sonlu bir dizisi ile ilişkilendiriliyorsa bu iki düğümün denk olduğu söylenir. (Burde, Zieschang 1985).



Şekil 2.1.6 Reidemeister hareketleri

Örneğin Ω_1 şekil 2.1.7 de gösterildiği gibi, $AC \cup CB$ ile AB yi yer değiştiren regüler diyagram üzerinde bir basit düğüm hareketine karşılık gelen hareket olarak düşünülebilir (Murasugi 1996).



Şekil 2.1.7 Ω_1 - hareketi

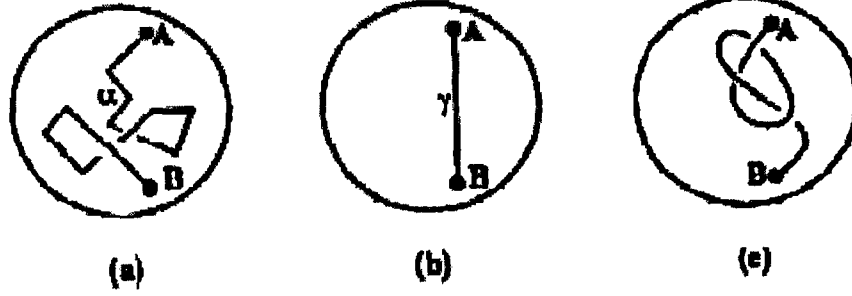
2.1.5 Düğümlerin Bağlantılı Toplamı

Düğümler üzerinde bir toplam işlemi tanımlanabilir. Böyle bir işlem vasıtasıyla düğümler üzerinde bir grup teşkil edilebilirse, teorik grup teknikleri de düğüm teorisine uygulanabilir. Öyleyse bu teknikler uygulanmadan önce bir takım işlemlerin tanımlanması gerekir. Bu nedenle iki düğümün birleşimi veya bağlantılı toplamı olarak adlandırılan iki düğümden tek bir düğümün nasıl elde edilebildiğini açıklayabilmek için, bu işlemin tersinin incelenmesi gereklidir. Yani, öncelikle bir düğümü daha basit iki düğüme ayırtırmak gereklidir.

S^3 de bir S küresini ve S ile sınırlanmış yani sınırı S olan 3-boyutlu B^3 topunu göz önüne alalım. B^3 ün içinde A, B uç noktaları S yüzeyinde bulunan bir α basit eğriliş doğrusunu alalım. Eğer bu α eğrisi S yi sadece A ve B noktalarında kesiyorsa, şekil 2.1.8 de de görüleceği gibi bu eğri (1,1)-tangle olarak adlandırılır. Bir (1,1)-tangle nin basit kapalı eğrilere ayrılabilceğine dikkat etmek gerekir.

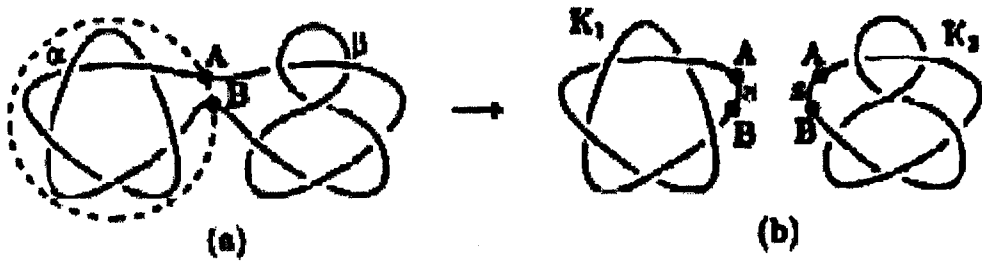
B^3 ün içinde bulunan α düğümlenmiş (1,1)-tangle nin parçalarına basit düğüm hareketleri uygulanabilir. Bu hareketlerle sabitlenmiş A ve B noktalarına sahip α eğrisini, şekil 2.1.8(b) de görüldüğü gibi (1,1)-tangle a değiştirildiği düşünülebilir.

Böyle bir α eğrisi bir aşikar (1,1)-tangle olarak adlandırılır. Burada şekil 2.1.8 (c) aşikar olmayan (1,1)-tangle a örnek teşkil ederken, şekil 2.1.8 (a) ve şekil 2.1.8 (b) de aşikar (1,1)-tangle örnekleridir.



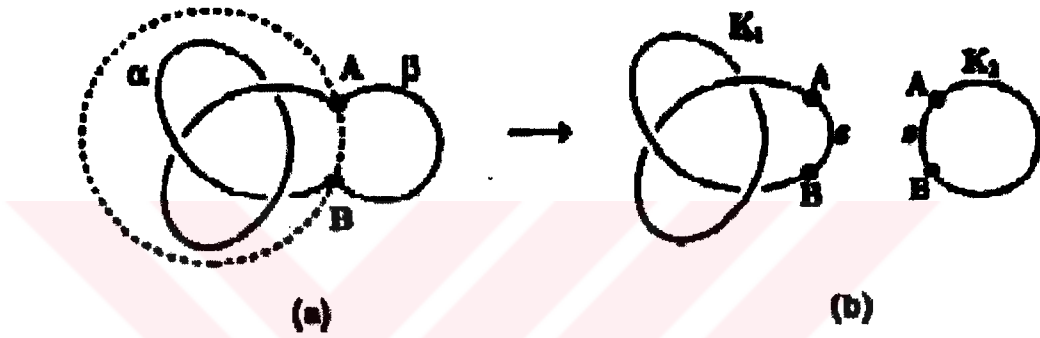
Şekil 2.1.8 (1,1)-Tangle örnekleri

K nın S^3 de bir düğüm olduğu kabul edilsin. Üstelik, K yı tam olarak A ve B şeklinde iki noktada kesen (dik açıda) bir 2-boyutlu Σ küresinin mevcut olduğunu farz edilsin. Σ nin yukarıda tanımlanan S nin rolünü üstlendiği fark edilebilir. Ancak K , S^3 de bulunduğu için bu düğüm, Σ vasıtasıyla şekil 2.1.9 (a) ve şekil 2.1.9 (b) de görüldüğü gibi biri Σ nin içinde diğeri Σ nin dışında bulunan α ve β şeklinde iki (1,1)-tangle a ayırır. [S , biri Σ den ve onun içinden, diğeri Σ den ve onun dışından oluşmuş iki 3-boyutlu topun sınırı olduğu için, iki (1,1)-tangle meydana gelir. S^3 ün, sınırlarına 2-boyutlu küre olan, sınırları boyunca birbirlerine yapıştırılmış iki (3-boyutlu) toptan meydana geldiği düşünülebilir. Eğer boyut bir aşağı düşürülürse, yapıştırma işlemi daha kolay anlaşılır. Eğer iki disk alınır ve onlar sınırları boyunca yapıştırılırsa ki burada sınırlar çemberlerdir, bu durumda iki boyutlu küre elde edilebilir]. Şimdi basit bir poligonal doğru vasıtasıyla A , B ye bağlansın. Böylece S yi α ya ve S yi β ya birleştirerek sırasıyla K_1 ve K_2 düğümleri elde edilir.



Şekil 2.1.9 Düğümlerin ayrışımı

Dolayısıyla şekil 2.1.9 de görüldüğü gibi bir K düğümü K_1 ve K_2 şeklinde iki düğüme ayrışabilir. Şekilde görülen s nin seçimi keyfidir. Çünkü S üzerinde bulunan bir başka basit poligonal doğru vasıtasıyla A , B ye bağlanabiliyorsa, K , bir kez daha K'_1 ve K'_2 denen iki düğüme ayrışabilir. K_1 ve K_2 ile K'_1 ve K'_2 nün denk düğümler olduğunu görmek oldukça kolaydır. Eğer α veya β nın biri aşikar bir (1,1)-tangle ise, K'_1 aşikar bir düğümdür. Böyle durumlarda K_1 ve K_2 , K nin gerçek bir ayrışımı değildir (şekil 2.1.10).



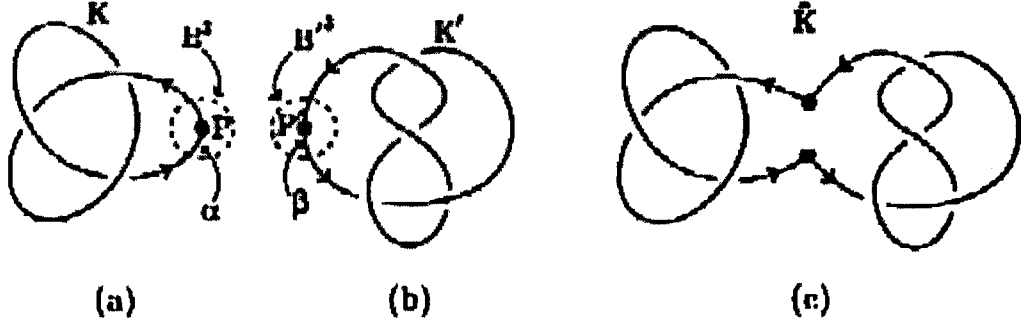
Şekil 2.1.10 K nin gerçek olmayan ayrışımı

Aslında K ve K_1 denktir, bu yüzden, K nin daha basit düğümlere ayrışabildiğini düşünmek gereksizdir. K için bir gerçek (aşikar olmayan) ayrışım bulunamadığından, K nin asal düğüm olduğu söylenebilir. Buradan bir K düğümünün ya asal düğüm ya da aşikar olmayan en az iki düğüme ayrışabilir olduğu sonucuna varılabilir.

Şimdi bu ayrışım işleminin tersi olan birleşme işlemini düşünelim. Düğümlerle çalışırken çözülmesi gereken birçok problem vardır. Bir düğüm üzerinde yönlendirme ters çevrilirse, bir düğümün yönlendirmeyi koruyan oto-homeomorfizm vasıtasıyla orijinal yönlendirmeli düğüme her zaman denk olmayacağı bilinir. İki düğüm birleştirildiği zaman onların yönlendirmeleri önemlidir. Problem yönlendirilmiş bu iki düğümlerle ilgili engelin nasıl aşılabacağına indirgenebilir. P nin S^3 de bir K düğümü üzerinde bir nokta olduğunu farzedelim. Burada P , şekil 2.1.11 (a) (b) de de görüldüğü gibi aşağıdaki özelliklere sahip çok küçük yarıçaplı B^3 topunun merkezi olarak düşünülebilir.

(1) K tam olarak (dik açıda) B^3 sınırı olan küre yüzeyini iki noktada keser.

(2) B^3 ün içinde K dan elde edilen (1,1)-tangle aşikar bir tangle'dir.



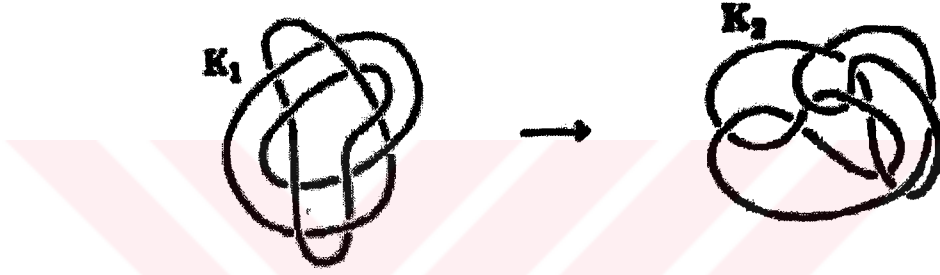
Şekil 2.1.11 Düğümlerin bağlantılı toplamı

Benzer olarak diğer bir 3-boyutlu S^3 küresinde bir başka K' düğümü üzerinde bir P' noktası seçilebilir. Yukarıdaki gibi B^3 topu şekil 2.1.11 (b) de görüldüğü gibi bir β aşikar (1,1)-tangle, K dan elde edilir. Doğal bir şekilde K ve K' den elde edilen sırasıyla α ve β , (1,1)-tangle'leri için bir yönlendirme tayin edilebilir. \bar{B}^3, B^3 ün iç noktalarını S^3 den çıkararak elde edilen top olsun. Benzer olarak \bar{B}^3 de \bar{B}^3 ün iç noktalarının S^3 den çıkarılmasıyla elde edilen top olsun. Bu topların her birinin yüzeyi bir (2-boyutlu) küredir. Eğer bu iki topun sınır kümesinin yönlendirmeyi ters çeviren bir homeomorfizm uygulayarak küre boyunca bu iki topu yapıştırırsak 3-boyutlu S^3 küresi elde edilmiş olur. Bu yapıştırma işlemi α ve β nin uç noktalarını birleştirir. Böylece bu yeni yönlendirilmiş \hat{K} düğümü bu 3-boyutlu S^3 küresinde biçimlenir (şekil 2.1.11 (c)). Dolayısıyla K düğümünün yönlendirmesi K veya K' düğümünün orijinal yönlendirmesiyle çelişki teşkil etmez.

Yukarıdaki işlemle meydana gelen \hat{K} düğümü K ve K' düğümünün toplamı olarak adlandırılır ve $K \# K'$ ile gösterilir. Üstelik bu $K \# K'$ toplamı orijinal olarak seçilen P ve P' noktalarından bağımsızdır. Böylece $K \# K'$ toplamının K ve K' ile tek bir şekilde tayin edildiği söylenebilir (Murasugi 1996).

2.1.6 Dügümlerin Denkliği

Dügüm Teorisinin ana problemlerinden biri de düğümlerin denkliği ile ilgilidir. Dügümlerin denkliği lokal ve global olarak ikiye ayrılabilir. Daha önce bahsedilen basit düğüm hareketleri bir düğümün yalnızca bir bölümüne uygulanan lokal hareketler veya dönüşümlerdir. Eğer bir düğüme tek bir basit düğüm hareketi uygulanırsa, o düğüm değişmez. Ancak farklı yerlerde bu işlem birkaç kez tekrarlanırsa, meydana gelen düğümün tamamen farklı bir düğüm olduğu görülür. Örneğin, Perko Çifti olarak adlandırılan şekil 2.1.12 deki K_1 ve K_2 düğümleri gözönüne alınabilir.



Şekil 2.1.12 Dügümlerin Perko Çifti

Görünüşte yukarıdaki düğümlerin birbirinden tamamen farklı olduğu düşünülebilir. Ancak temel düğüm hareketleri anlamlı bir şekilde birkaç kez uygulandığında K_1 düğümünün K_2 düğümüne dönüştüğünü görmek mümkündür.

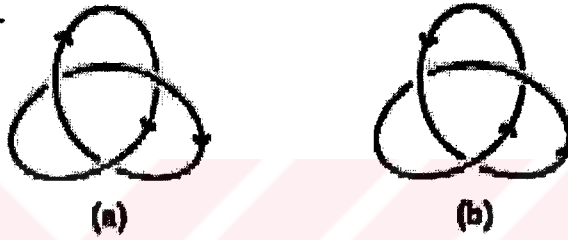
Basit düğüm hareketlerini uygulayarak, biri diğerine dönüştürülebilen düğümlerin denk veya eşit olduğu söylenebilir. Bu yüzden şekil 2.1.12 deki iki düğüm denktir.

Dolayısıyla, basit düğüm hareketlerini sonlu kez uygulayarak K düğümünden K' düğümü elde ediliyorsa bu K düğümünün K' düğümüne denk olduğu söylenir.

Eğer K düğümü K' düğümüne denk ise, K' de K ya denk olduğu için, K ve K' düğümlerinin denk (eşit) olduğunu söylenebilir. Dügüm teorisinde denk düğümlerin birbirinden farklarının olmadığı kabul edildiği için, onlar aynı düğümler olarak düşünülebilir.

2.1.3 de ki 2-basit düğüm hareketi bir AB kenarını, AC ve CB kenarlarıyla değiştirilmesine izin verir. ABC üçgeninin içindeki noktalar düğümün kendisiyle kesişmediği için, Uzayda sürekli bir dönüşüm altında bir düğüm, diğer bir düğüm üzerine dönüştürülebiliyorsa bu iki düğümün denk olduğu söylenebilir.

Bir düğüm başlangıç ve bitiş noktasına sahip değildir. Bir düğüm basit kapalı bir eğridir. Bu yüzden eğriye bir yönlendirme verilebilir. Alışılmış olarak, bir düğümün yönlendirmesi bir ok vasıtasıyla gösterilebilir. Herhangi bir düğümün yönlendirmesi, şekil 2.1.13 de görüldüğü gibi iki türdür.



Şekil 2.1.13 Düğümlerin yönlendirmesi

Eğer yönlendirilmiş K ve K' düğümleri, yönlendirilmiş basit düğüm hareketleri vasıtasıyla birbirlerine dönüştürülebiliyorsa K ve K' düğümlerinin yönlendirmeleri korunarak denk oldukları söylenir ve $K \cong K'$ şeklinde yazılır (şekil 2.1.14).



Şekil 2.1.14 Düğümlerin denkliği

Denk iki düğüme herhangi bir yönlendirme yapılmaz ise bu iki düğümün kesinlikle denk olduğu düşünülür. Ancak bu iki düğüme herhangi bir yönlendirme yapılırsa bu iki düğümün denk olup olmadığı konusunda bir netlik yoktur.

Basit düğüm hareketlerine bağlı lokal dönüşümler yerine, global dönüşümler veya hareketlere dayalı olarak düğümlerin denkliği yeniden tanımlanabilir. Bu dönüşümler uzaydaki mevcut bütün düğümler için geçerlidir (Murasugi 1996).

İki K_0 ve K_1 düğümü eğer, $t \in [0,1]$ olmak üzere f_0 özdeşlik ve $f_1(K_0) = K_1$ olacak şekilde K_0 düğümünü K_1 düğümüne götüren t parametresine bağlı smoothly difeomorfizmlerin $f_t : R^3 \rightarrow R^3$ tek parametrelili ailesi mevcutsa denk olarak adlandırılır. Burada “smoothly” $(x,t) \mapsto f_t(x)$ ile verilen $F : R^3 \times [0,1] \rightarrow R^3$ dönüşümünün diferensiyellenebilir olduğu anlamına gelir. f_t difeomorfizmlerinin ailesi K_0 düğümünü K_1 düğümüne birleştiren izotopi olarak adlandırılır. Dolayısıyla denk düğümler izotop ya da ambient izotop olarak da adlandırılırlar. Ortak yaylı iki izotop düğüm bu yayın bazı komşuluklarında taşınmaz noktalı bir izotopi ile bir diğerine izotop edilebilir (Prasolov, Sossinsky 1996). Bunun ispatı Burde, Zieschang (1985)’de bulunabilir.

K_0 ve K_1 düğümü eğer izotop ise, K_0 düğümünü K_1 e götüren R^3 ün bir homeomorfizminin olduğu (f_t gibi) izotopinin tanımından görülür. Özellikle bu homeomorfizm $R^3 - K_1$ ve $R^3 - K_0$ tümleyen kümelerinin homeomorf olduğunu belirtir. Öte yandan düğümlerin izotop olması için gerek ve yeter şart onların tümleyenlerinin homeomorf olmasıdır. Bu teoremin ispatı da Gordon, Leucke (1989)’da bulunabilir.

K_1 ve K_2 iki düğüm olmak üzere, K_1 düğümünü K_2 ye dönüştüren R^3 ün yönlendirmeyi koruyan bir homeomorfizmi varsa, K_1 ve K_2 nin denk olduğu ya da K_1 in K_2 ye denk olduğunu söyleriz (Kawauchi 1996).

Eğer $hK = K$ olacak şekilde R^3 den kendi üzerine yönlendirmeyi ters çeviren bir h homeomorfizmi mevcutsa bu K düğümü amphicherial dir denir. Bir K düğümünün amphicherial olması için gerek ve yeter şart K yı ayna görüntüsüne dönüştüren R^3 ün kendi üzerine olan yönlendirmeyi koruyan bir homeomorfizminin olmasıdır. Bir K düğümünün ayna görüntüsü $(x,y,z) \rightarrow (x,y,-z)$ şeklinde tanımlanan \mathfrak{R} yansıması altında K nın görüntüsü anlamına gelir (Crowell, Fox 1963).

2.1.7 Tor Düğümü

Bir düğüm aşık bir tor üzerindeki herhangi bir noktada, kesişmeden çizilebilen bir düğümüne denkse bu düğümüne tor düğümü denir. Aşık (standart) tor, yarıçapı 1 birim olan ve $(2,0)$ noktalı merkeze sahip xy düzleminde $m : (x-2)^2 + y^2 \leq 1$ çemberinin y eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen bir katı T torudur (Murasugi 1996). (p,q) -tipli tor düğümü yukarıda bahsedilen standart katı T toru etrafında paralel yönde p kez ve meridyen yönde de q kez dönme ile elde edilen bir düğümdür ve $K(p,q)$ şeklinde gösterilir. Burada p ve q aralarında asaldır (Rolfsen 1976).

2.1.8 Düğüm Sabitleri

İki düğümün denk olup olmadığını tayin etmenin bir yolu olarak düğüm sabitleri çok önemli bir rol oynar. Düğüm sabiti tipleri sayısal miktar bakımından sınırlanmamıştır. Bu düğüm sabitleri yaygın olarak grup ve halkalar gibi matematiksel kavramların kullanımına da bağlıdır.

Her K düğümünü, özel bir $p(K)$ niceliği ile işaretlediğimizi farzedelim. Eğer iki denk düğüm için işaretlediğimiz nicelik daima denkse, böyle $p(K)$ niceliği düğüm sabiti olarak adlandırılır.

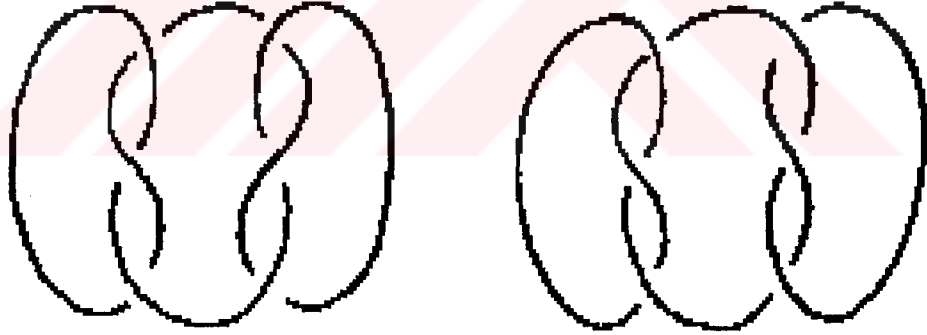
K ve K' düğümleri denkse, bu durumda K düğümüne sonlu sayıda basit düğüm hareketini uygulayarak K düğümünü K' düğümüne dönüştürebilmenin mümkün olduğu biliniyor. Böylece, düğüm sabiti olan $p(K)$ niceliğinin, K düğümüne uygulanan sonlu sayıda basit düğüm hareketinden sonra değişmemesi gerekir. Örneğin bir düğümün kenar sayısının bir düğüm sabiti olmadığı bundan dolayı görülebilir.

Genelde bir düğüm sabiti tek yönlüdür. Yani; eğer iki düğüm denkse sabitleri de eşittir. Bunun tersi her zaman doğru olmayabilir. İki düğüm sabiti farklıysa bu durumda

düğümün kendileri denk olamaz. Bu yüzden, bir düğüm sabiti iki düğümün denk olup olmadığını gösteren oldukça etkili bir metot verir.

2.1.9 Düğümlerin Aritmetiği

Bir düğüm aşikar değilse ve iki aşikar olmayan düğümün bağlantılı toplamı değilse asal olarak adlandırılır. Şekil 2.1.15 genellikle izci çocuk düğümü olarak da bilinen kare düğüm ve granny düğümü gibi iki asal olmayan bileşke düğüm örnekleri iken trefoiller asal düğümlere iyi birer örnektir. Düğümler bağlantılı toplama göre bir grup oluşturmasına rağmen hoş bir aritmetiğe sahiptirler. Schubert (1949) tarafından ispat edilen ayrışım teoremi asal bir faktör içerir. Schubert, her aşikar olmayan düğümün asal düğümlerin bağlantılı toplamının tek bir ayrışımına sahip olduğunu belirtir. Böylece düğümler negatif olmayan tamsayıların çarpımsal yarı grubuna izomorf bir yarı grup oluşturur.



Şekil 2.1.15 Bileşke düğümler

2.2 Graflar

2.2.1 Graf

Bir G grafi, $E \subseteq [V]^2$ altkümesini sağlayan kümelerin $G = (V, E)$ çiftidir. Yani E nin elemanları V nin 2-elemanlı altkümeleridir. Burada V köşeleri E de grafın kenarlarını temsil eder. Grafın resmini çizerken alışılmış metot, köşeleri noktalarla, kenarları da doğrularla çizmektir. Nokta çiftleri verildiği zaman karşılıklı gelen noktalar kenar denilen doğru parçalarıyla istenildiği gibi birleştirilir, dolayısıyla burada önemli olan nokta çiftleri ile ilgili bilgidir, noktaların birleştiriliş şekli önemli değildir (Diestel 1997)

2.2.2 Yüklü Graf

Eğer, yük olarak adlandırılan, $+1$ ya da -1 ile bir G grafının her bir kenarı işaretleniyorsa bu graf yüklü olarak adlandırılır. Daha açık olarak, G (ya da (G, f_G)), eğer $f_G : E(G) \rightarrow \{1, -1\}$ şeklinde yük fonksiyonu ile donatılmış bir graf ise, yüklü bir graftır. Daha açık olarak, bir e kenarı $f_G(e) = +1$ ise pozitif, aksi takdirde negatif olarak adlandırılacaktır (Diestel 1997)

2.2.3 Altgraf

Bir H grafi, $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$ ve H lerin her kenarı G de ki gibi H de ki aynı uçlara sahipse ve H , $f_H = f_G | E(H)$ şeklinde yük fonksiyonunu içeriyorsa G nin altgrafıdır (Diestel 1997)

2.2.4 Spanning altgraf

Bir H altgrafı $V(H) = V(G)$ ise, H , G nin spanning altgrafıdır. Özellikle, bir spanning köşe graf V_G ile gösterilir ve G nin bütün köşelerini içeren altgrafıdır (Diestel 1997).

2.2.5 Spanning köşe graf

Eğer G nin H altgrafı G nin tüm köşelerini ihtiva eden altgraf ise, H ye spanning köşe graf denir (Diestel 1997).

2.2.6 Ayrılabilir graf

Bir G grafının eğer, $\beta_0(G) < \beta_0(G - \{V_0\})$ şeklinde cut-köşe olarak adlandırılan bir V_0 köşesi varsa bu graf ayrılabilir aksine halde ayrılamaz (Diestel 1997).

2.2.7 Blok

G nin maksimal ayrılamaz bağlantılı altgrafıdır (Diestel 1997).

2.2.8 Kıstak

Bir e kıstağı $\beta_0(G) < \beta_0(G - \{e\})$ olacak şekilde bir kenardır (Diestel 1997).

2.2.9 İlmek

G nin bir kenarı eğer uçlarının sayısı 1 (bir) ise bir ilmek olarak adlandırılır (Diestel 1997).

2.2.10 Çokkatlı kenar

Eğer iki ya da daha çok kenar, aynı uçlara sahipse bu kenarlar çokkatlı kenar olarak adlandırılır (Diestel 1997)

2.2.11 İndirgenmiş graf

Eğer bir G grafı ne bir ilmek ne de bir kıstağa sahip değilse indirgenmiş graf olarak adlandırılır. (Diestel 1997)

2.2.12 Basit graf

Eğer bir G grafı ne çok katlı kenarlara ne de bir ilmeğe sahip değilse, basit graf olarak adlandırılır. (Diestel 1997)

2.2.13 Betti sayısı

Eğer n boyutlu K kompleksinin p -simplekslerinin sayısı α_p ve I_p değme matrisinin rankı r_p ise p . Betti sayısı b_p , $p = 1, 2, \dots, n$ için

$$b_0 = \alpha_0 - r_0 \text{ ve}$$

$$b_p = \alpha_p - r_p - r_{p-1}$$

ile verilir (Bozhtyük 1984).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Materyal

3.1.1 Dügüm Grafi

Reidemeister hareketlerinin sonlu dizisi ile kenarsız bir grafa indirgenebilen herhangi bir graf düğüm grafi olarak adlandırılır (Noble, Welsh 2000). Daha net bir ifadeyle bir K düğümünün regüler diyagramı olan D den elde edilen grafa K nın grafi denir (Murasugi 1996).

3.2 Yöntem

3.2.1 Dügüm Graflarının Elde Edilişi

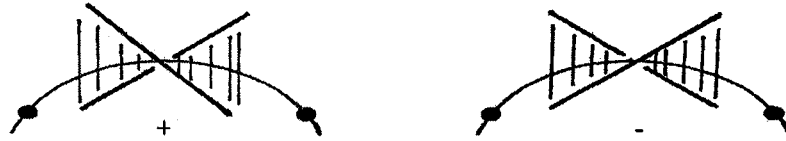
Dügümlerin ve halkaların regüler izdüşümleri 2-boyutlu S küresini her biri açık bir diske homeomorf birkaç bölgeye böler. Bu bölgeler siyah-beyaz, gölgeli-gölgesiz, taralı-taralı olmayan ya da iç-dış diye sınıflara ayrılır. π , 2-boyutlu S küresinde bir K düğümünün regüler standart izdüşümü olsun. Eğer π , D_1, D_2, \dots, D_n şeklinde n katlı noktaya sahipse, π , S yi her biri açık bir diske homeomorf, $n+2$ bölgeye böler. Şimdi bu bölgeleri α ve β şeklinde iki sınıfa ayırılım (şekil 3.2.1(a)). Öyle ki; π nın her bir parçası, örneğin katlı bir noktadan bir diğer katlı noktaya bir yay gibi, daima α ve β bölgelerinin ortak sınırı olacaktır. Uygunluk için, sonsuzdaki noktanın β sınıfının bölgesinde ihtiva edildiğini kabul edelim.



Şekil 3.2.1 Trefoil düğümü ve onun grafi

$A_1, A_2, \dots, A_\alpha$, α sınıfının bölgeleri olsun. ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) için $P_i \in A_i$ noktalarını alalım ve bu noktaları d_1, d_2, \dots, d_n şeklinde kesişmeyen n yayla bağlayalım. Şöyle ki; buradaki her d_k , $k = 1, 2, \dots, n$ için D_k ya karşılık gelir ve P_i ve P_j nin d_k ile bağlantılı olması için gerek ve yeter şart A_i ve A_j nin sınırları üzerinde ortak katlı bir D_k noktalarına sahip olmalarıdır.

α sınıfının bölgelerinin tamamı, π nın her katlı noktasında 180° burulan bir spanning K yüzeyinin bir izdüşümü olarak gözönüne alınabilir. Bu düşünceden hareketle, d_k nın işaretini $k = 1, 2, \dots, n$ için tanımlayabiliriz. Öyle ki; şekil 3.2.2 de görüldüğü gibi, sırasıyla, sağ dönüş ya da sol dönüşle bağlı olarak, yüzeyin D_k noktasındaki burulmasına göre işaret $+$ ya da $-$ olur.

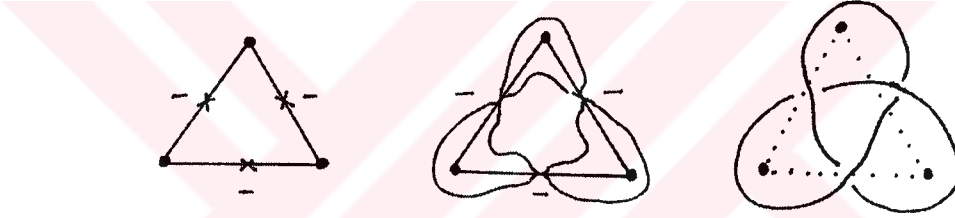


Şekil 3.2.2 Grafın işareti

Böylece her bir köşesi, α nın bir bölgesine karşılık gelen $P_1, P_2, \dots, P_\alpha$ köşelerinin ve her işaretlenmiş yayı, bir standart katlı noktaya karşılık gelen n işaretlenmiş d_1, d_2, \dots, d_n yaylarının lineer bir grafını elde ederiz. Bu G lineer graf π izdüşümünün grafi olarak adlandırılır.

Aynı düşünceden hareketle β sınıfından da bir başka G' grafi elde edilebilir. Bu grafa da G nın dual grafi adı verilir. G' dual grafını aşağıdaki şekilde verilen bir G

grafından doğrudan elde ederiz. $B'_1, B'_2, \dots, B'_\beta$, $S - G$ nın bölgeleri olsunlar. $i = 1, 2, \dots, \beta$ için $Q_i \in B'_i$ noktalarını alalım ve bu noktaları $k = 1, 2, \dots, n$ için her bir d'_k , G nın bir d_k noktasına karşılık gelecek şekilde, d'_1, d'_2, \dots, d'_n şeklinde kesişmeyen n yay vasıtasıyla birleştirelim. Q_i ve Q_j nin d'_k ile bağlantılı olması için gerek ve yeter şart d_k nın B'_i ve B'_j nin ortak sınırı olmasıdır. Her d'_k yayı d_k nın işaretinin tersini alır. Böylece d'_1, d'_2, \dots, d'_n yaylarını ve Q_1, Q_2, \dots, Q_β köşelerini ihtiva eden G' grafını elde ederiz. Bu düğüm teorisinde kullanılan bir metottur ve P. G. Tait tarafından uygulanmıştır. Bu Trefoil düğümü üzerinde kolayca görülebilir (şekil 3.2.2(b)). Ayrıca, kenarlara işaret vererek işaretlenmiş bir graf elde edilebilir (Yajima, Kinoshita 1957). Aynı şekilde grafi verilen bir düğüm de ters işlemle elde edilebilir (Aumann 1956) (şekil 3.2.3).



Şekil 3.2.3 Graftan düğüm elde edilişi

Burada dikkat edilirse düğümlerin birden çok grafının olduğu görülebilir. Ancak, regüler izdüşümü verilen bir düğümün kendi grafı ve dual grafı olmak üzere iki tane grafı vardır. Dual grafta yine Tait'in metodu ile elde edilebilir. Şayet graf verilmiş ise tek bir düğüm elde edilir (Murasugi 1996).

π ve π^* , sırasıyla, K ve K^* düğümlerinin izdüşümleri olsun. Burada K^* , K nın ayna görüntüsüdür. Bu durumda G ve G^* grafları aynı tiptedir ve zıt işaretlidir. G^* , G nin denk grafıdır (Murasugi 1996).

3.2.2 Graflar üzerinde işlemler

Bir düğümün her deformasyonunun Reidemeister hareketlerindeki Ω_1, Ω_2 ve Ω_3 esas deformasyonlarının bir birleşimine denk olduğu iyi bilinir. Bunu ilk olarak Yajima ve

Kinoshita (1957) düğüm graflarına uygulamıştır. Bu hareketlerin farklı bir tanımını da Schwarzler, Welsh (1993) yapmıştır.

Bu esas deformasyonlar aşağıda gösterildiği gibi graflar üzerindeki işlemlere de dönüştürülebilir. Aşağıdaki tüm sonuçlar Yajima ve Kinoshita (1957)'den alınmıştır. Bir düğümün bir π izdüşümü için G ve G' şeklinde iki grafi olduğu için bir Ω_i deformasyonu için Q_i ve Q'_i şeklinde graflar üzerine iki işlem vardır. Bu işlemlerden her biri diğerinin dual işlemi olarak adlandırılacaktır.

1. Eğer bir G grafi kesişimleri bir tek nokta olan bir Γ bloğunu ve bir kapalı d yayını ihtiva ediyorsa, bu durumda d ihmal edilebilir. Ters işlem de doğrudur.
2. Bir G grafi, Γ , d_1 , d_2 , Γ dan oluşan bir seride bağlantılı olan Γ bloğunu ve zıt işaretli d_1 ve d_2 yayını ihtiva ediyorsa bu durumda, Γ nın eklemleri (joints) eklenerek d ihmal edilebilir. Bir G grafi, bir paralelde bağlantılı olan zıt işaretli d_1 ve d_2 yayını ve Γ bloğunu ihtiva ediyorsa, bu durumda yaylar ihmal edilebilir. Ters işlem de doğrudur.
3. P_1, P_2 ve P_3 köşeleri sırasıyla d_1, d_2 ve d_3 yaylarıyla biri diğerlerinden farklı işarette olacak şekilde bir P_0 köşesinde bağlanırsa, bu durumda, P_0 ihmal edilebilir ve $i = 1,2,3$ için her d_i, P_j ve P_k köşelerini bağlayan zıt işaretli d'_i yayıyla yer değiştirir. Burada, j, k nın elverişliliği i den ve diğerlerinden farklıdır. Ters işlem de doğrudur.

Yukarıdaki işlemlerden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

3.2.2.1 Sonuç. Bir G grafi, $\Gamma_0, \Gamma_1, d, \Gamma_0$ dan oluşan bir seride bağlantılı olan Γ_0 ve Γ_1 bloklarını ve d yayını ihtiva ediyorsa ki burada Γ_1 , paralelde bağlantılı olan aynı işaretli iki yayı ihtiva eder ve d, Γ_1 e zıt işaretlidir. Bu durumda, d ihmal edilebilir ve Γ_1 işaret değiştirir. Ters ve dual işlemleri de doğrudur.

3.2.2.2 Sonuç. Bir G grafi, $\Gamma_0, \Gamma_1, d, \Gamma_0$ dan oluşan bir seride bağlantılı olan Γ_0 ve Γ_1 bloklarını ve d yayını ihtiva ediyorsa, burada, Γ_1 paralelde bağlantılı olan aynı işaretli

üç yayı ihtiva eder ve d, Γ_1 e zıt işaretlidir. Bu durumda, d ihmal edilebilir ve Γ_1, Γ_1 den zıt işaretli Γ_1' üçgensel bloğu ile yer değiştirir. Tersi ve dual işlemleri de doğrudur.

Yukarıda bahsedilen graflar üzerindeki işlemler düğümlerin lokal deformasyonlarına karşılık gelir. Ayrıca global deformasyonlara karşılık gelen graflar üzerindeki işlemleri de sağlar. Bu işlemler graflar üzerindeki esas işlemlerin sonucudur.

3.2.2.3 Sonuç. Bir düğümün her G grafi esas işlemlerden dolayı G' dual grafına denktir.

İspat. G, U sınıfından bir graf ve B_∞ da sonsuz noktayı ihtiva eden $S - \pi$ bölgesi olduğunu kabul edelim. D_1, B_∞ sınırında π nin katlı bir noktası ve D_2 de B_∞ sınırı boyunca π nin ardışık katlı noktası olsun. s , sınırları D_1 ve D_2 olan B_∞ un sınırlı bir parçası olsun. D_1' ve D_2' de s üzerinde iki nokta ve s' de sınırları D_1' ve D_2' olan s nin alt-parçası olsun. π nin C çemberinde ihtiva edildiğini kabul edelim. C çemberi üzerinde E_1 ve E_2 iki noktasını alırsak, bu durumda, C, C_1 ve C_2 iki yayına bölünür. Sırasıyla t_1 ve t_2 yaylarıyla D_1' ile E_1 i ve D_2' ile de E_2 yi bağlayabiliriz. Burada t_1 ve t_2 , sınırlar hariç π ve C yi kesmezler. $i = 1,2$ için $\pi_i = \pi - s' + (C_i + t_1 + t_2)$ alalım. Ya $C_1 + t_1 + t_2$ ya da $C_2 + t_1 + t_2$, $S - \pi + s'$ de s' ne değiştirilebilir. İlkinin değiştirildiğini kabul edelim. Bu durumda, $G_1 = G$ ve $G_2 = G'$ elde ederiz. π_1, C_1 in C_2 ye dönüşmesiyle π_2 ye denk olduğundan, G_1 esas işlemler yardımıyla G_2 ye denktir. Böylece, G, G' ye denktir.

3.2.2.4 Sonuç. Bir G grafi paralelde bağlantılı olan $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ bloklarını ihtiva ediyorsa, bu durumda bir bloğu devirli bir düzende değiştirebiliriz. G bir küre üzerinde bulunduğu için ifade sağlanır.

3.2.2.5 Sonuç. Eğer bir G grafi Γ_1 ve Γ_2 bloklarını ve $\Gamma_1, d_1, \Gamma_2, d_2, \Gamma_1$ serisinde bağlantılı olacak şekilde d_1 ve d_2 zıt işaretli yaylarını ihtiva ediyorsa bu durumda, bu

yaylar Γ_2 nin eklemleri boyunca eksen çevresinde Γ_2 nin 180^0 lik dönmesiyle ihmal edilebilir. Ters işlem de doğrudur.

3.2.2.6 Sonuç. Eğer bir G grafi Γ_1 ve Γ_2 bloklarını ve Γ_1, d, Γ_2 serisinde bağlantılı olacak şekilde herhangi işaretli d yayını ihtiva ediyorsa bu durumda, d, Γ_2 nin 180^0 lik dönmesiyle ihmal edilebilir. Ters işlem de doğrudur.

Yukarıdaki sonuçların tümünün ispatı Yajima, Kinoshita (1957)'de bulunabilir.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

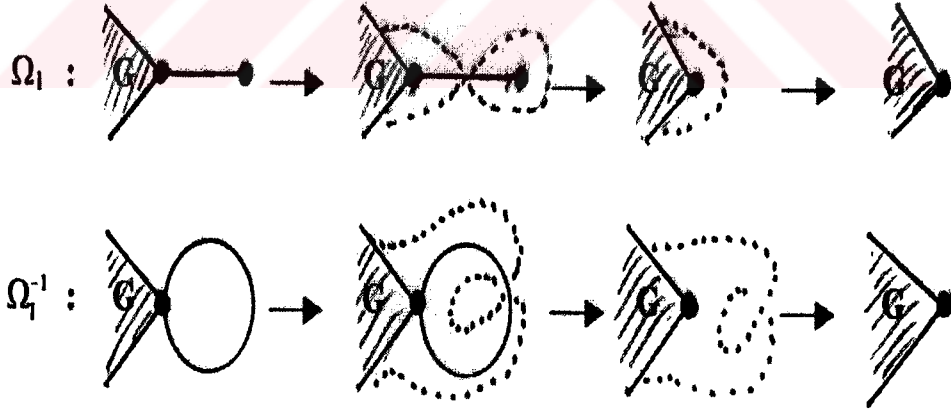
4.1 Düğüm Graflarının Grafiksel Davranışları

4.1.1 Düğüm Graflarına Uygulanan Reidemeister Hareketleri

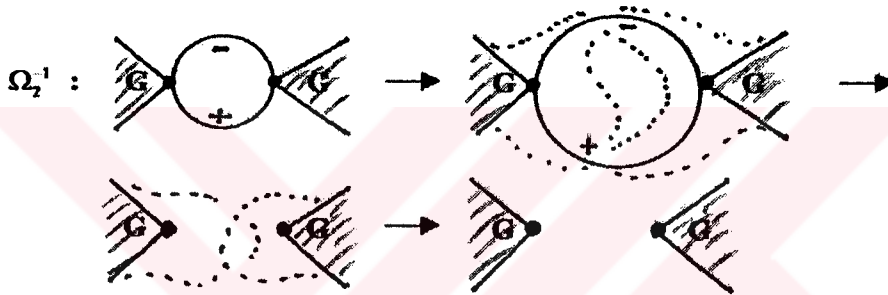
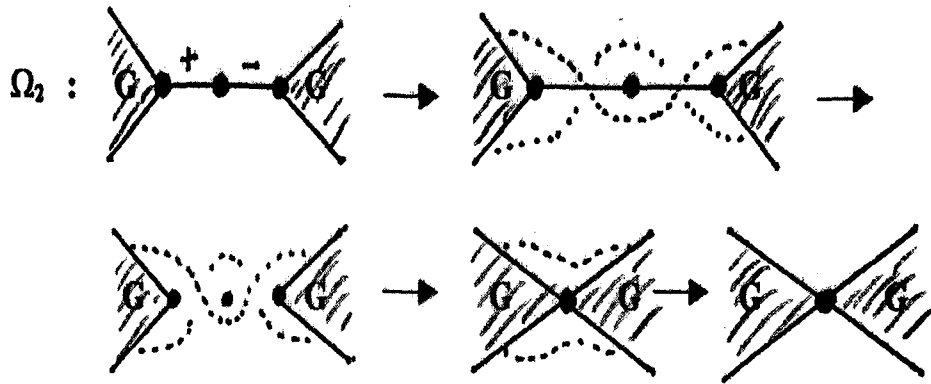
Düğümlere uygulanan Reidemeister hareketleri düğüm graflarına da uygulanabilir. Bir düğümün izdüşümü iki grafa sahip olduğundan, Reidemeister hareketlerinin tersleri de düğüm grafları üzerine uygulanabilir (Yajima, Kinoshita 1957).

Aşağıda düğüm graflarına uygulanan Reidemeister hareketlerinin Yajima, Kinoshita (1957) nin makalesindeki ispata alternatif olacak şekilde Aumann (1956)'da bahsedilen kanonik form yardımıyla ters işlem kullanılarak geometrik bir ispatı yapılmıştır (Uğur *et al.* 2002(a)).

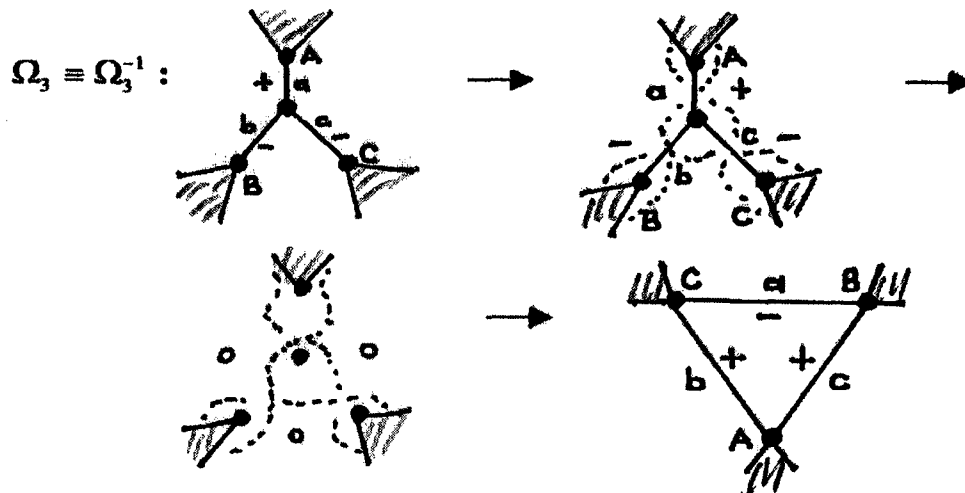
1. Reidemeister hareketi için ispat:



2. Reidemeister hareketi için ispat:

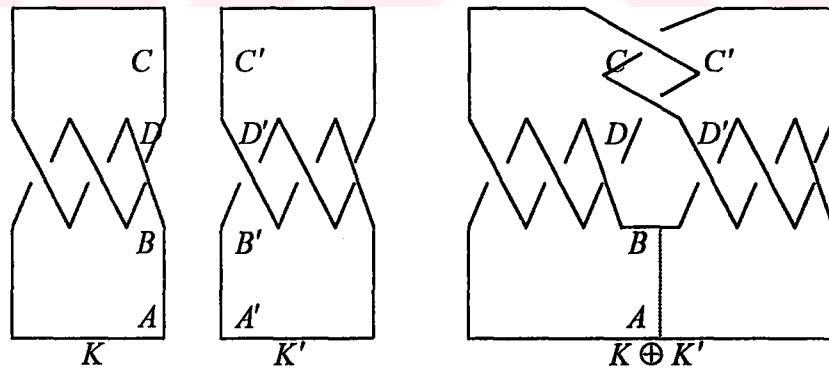


3. Reidemeister hareketi için ispat:



4.1.2 Dügümlerin Birleşimlerinin Grafları

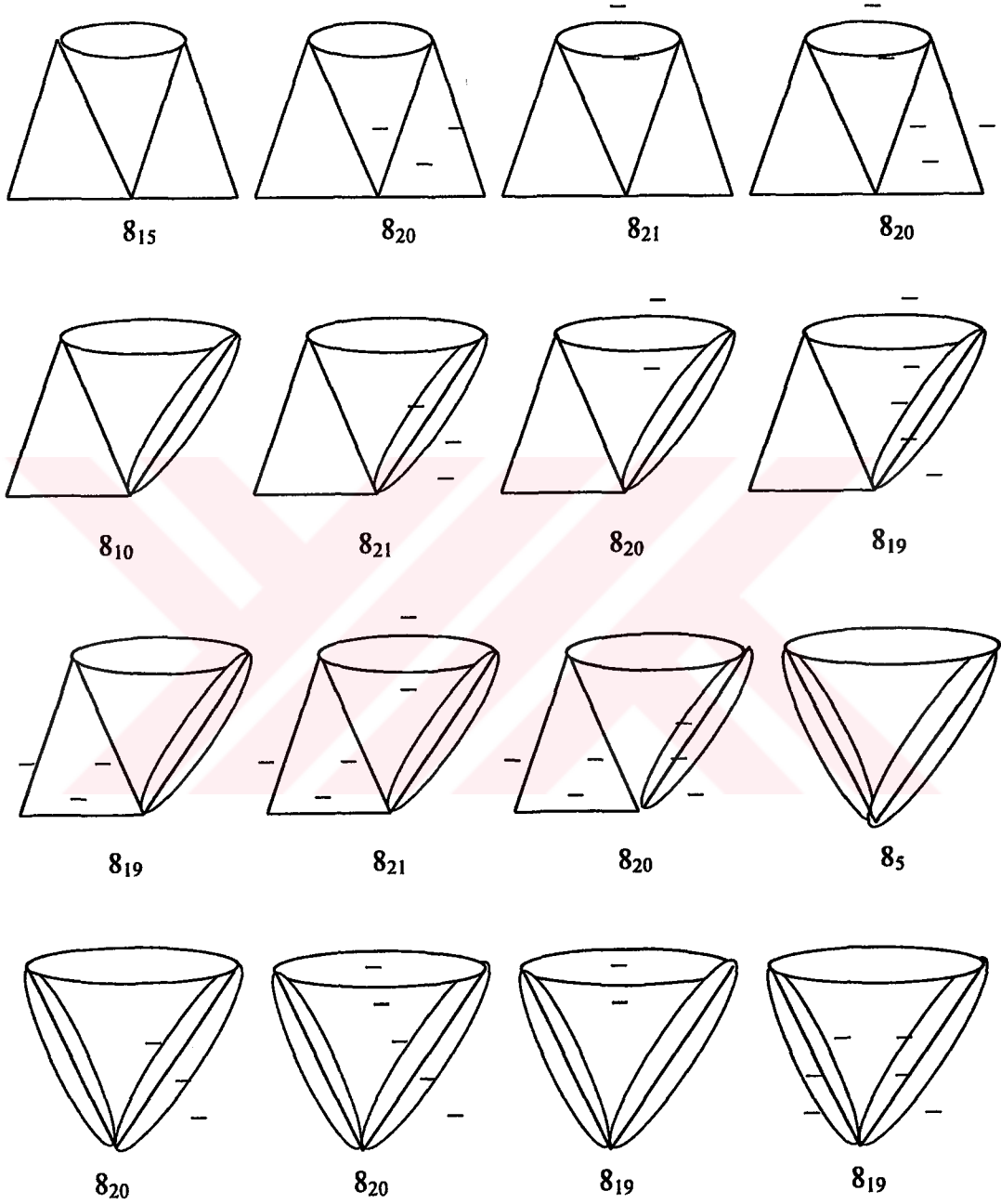
K bir Q küpütün içinde, K' de Q küpütün dışında ve α da doğal olarak Q nun sınırında bulunacak şekilde ortak α yaylı K ve K' düğümleri bu α boyunca birbirine birleştirilirse, yani α , K ve K' nün dışında tek bir düğüm elde etmek için silinirse, bu durumda daha önce bahsedildiği gibi K ve K' düğümlerinin toplamı elde edilir. Bir K düğümü aşikar olmayan herhangi iki düğümün toplamı değilse, bu durumda K nın asal olarak adlandırıldığı daha önce söylenmişti. İki düğümün toplamının türünün bu düğümlerin genel toplamına denk olduğunu gösteren ve her aşikar olmayan düğümün asal düğümlere tek bir şekilde ayrışabileceğini gösteren ilk kişi Schubert (1949) olmuştur. Şubert'in bu sonucundan hareketle Reidemeister (1932)'in kitabında basit bir ip vasıtasıyla oluşturulan düğüm tablosundan ziyade, Alexander-Briggs (1927)'in tablosuna bakıldığında karmaşık bir şekilde asal düğümleri oluşturan çok sayıda düğümün varolduğu görülür. Bununla ilgili olarak düğümlerin bir tablosu EK 4 de sunulmuştur. Önce K ve K' düğümlerini alışılmış bağlantılı toplam işleminde olduğu gibi AB ve $A'B'$ yayları boyunca birleştirelim. Daha sonra CD ve $C'D'$ yaylarının komşuluklarında bu yayları burarak (döndürerek) düğümlerin birleşimi elde edilir. Düğümlerin birleşimi işlemi de aslında bağlantılı toplamın bir versiyonudur.



Şekil 4.1.1 Düğümlerin birleşimi

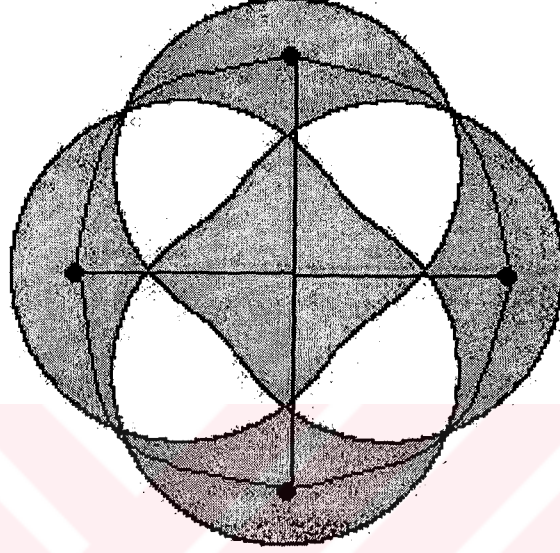
Böylece iki 3_1 düğümünün birleşiminden 8_5 ve 8_{21} (özellikle $8_{19(n)}$, $8_{20(n)}$, $8_{21(n)}$) arasındaki düğümleri elde ederiz. Bu düğümlerin birleşimlerinin graflarından aşağıdaki mümkün olan durumlar meydana gelir. Bunların ispatları geometrik olarak düğüm

graflarına uygulanan Reidemeister hareketlerinden veya Alexander polinomlarının incelenmesiyle görülebilir (Uğur *et al.* 2002(a)).

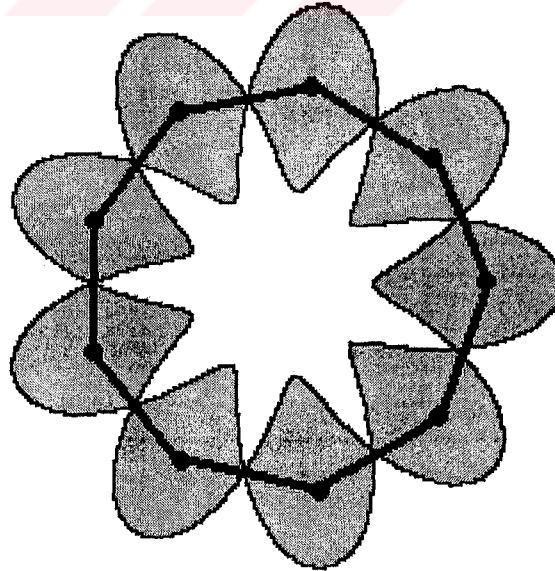


4.1.3 Dügüm Grafi Örnekleri

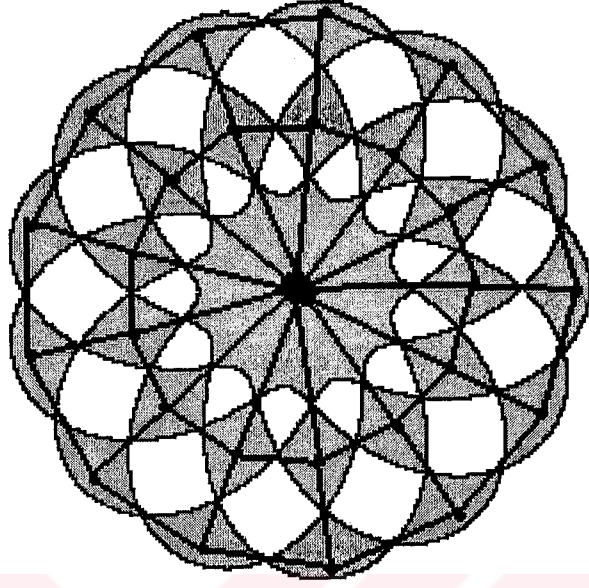
Bu örneklerin çiziminde kullanılan bilgisayar programı ve örneği EK 1 de sunulmuştur.



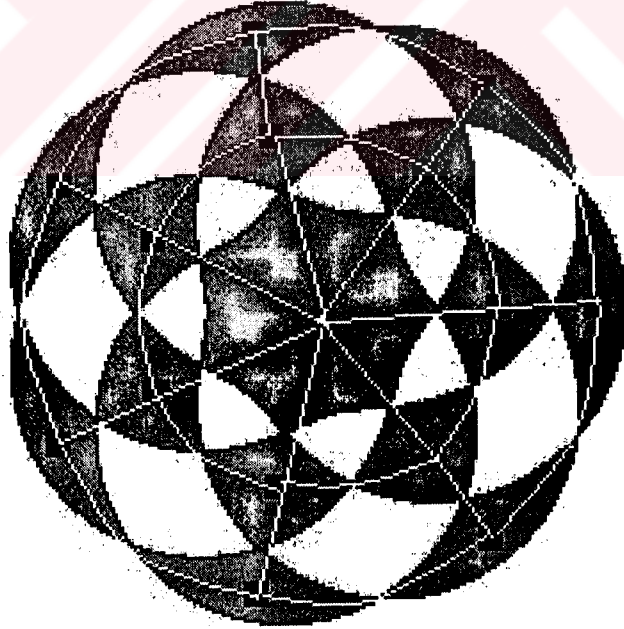
Şekil 4.1.2 (3,4)-Tor düğümünün gölgelendirilerek grafının elde edilişi



Şekil 4.1.3 (2,9)-Tor düğümünün gölgelendirilerek grafının elde edilişi



Şekil 4.1.4 (5,13)-Tor düğümünün gölgelendirilerek grafının elde edilişi



Şekil 4.1.5 (7,5)-Tor düğümünün gölgelendirilerek grafının elde edilişi

4.2 Dügüm Grafları için Jones Polinomu

1980 den sonra Jones kendi ismini taşıyan polinomu keşfettikten sonra düğüm graflarının önemi de artmıştır. Jones polinomunun keşfinin düğüm teorisi için bir kilometre taşı olduğu söylenebilir. Daha sonrada Kauffman, Murasugi gibi isimlerde bu yönde oldukça ciddi çalışmalarda bulunmuşlardır. Özellikle Murasugi (1989, 1991, 1992) bu polinomu düğüm graflarına uygulamış ve birçok yeniliğe yol açmıştır.

Bir graf R^3 de CW -kompleksi (sonlu bir boyutlu) olarak bir grafiğin geometrik gerçekleşmesidir. Bir köşe 0-simplekse ve 1-simpleksde bir kenara karşılık gelir.

Bir x kümesi için, $|x|$, x in kardinalitesini gösterir. Ayrıca, aşağıdaki notasyonlar da kullanılacaktır.

G nın bir H altgrafı için, $P(H) = |f^{-1}(1) \cap E(H)|$, H deki pozitif kenarların sayısını. $N(H) = |f^{-1}(-1) \cap E(H)|$, H deki negatif kenarların sayısı. $\beta_i(H)$ de, bir 1-kompleks olarak H nin i inci betti sayısını gösterir.

Verilen bir G grafı ve G nın bir e kenarı için, $G - (e)$, $E(G - \{e\}) = E(G) - \{e\}$ ve $V(G - \{e\}) = V(G)$ olacak şekilde grafı gösterir. $G - (e)$, G grafından e kenarı silinerek elde edilmiştir. Öte yandan, e uçları özdeşlenerek $G - (e)$ den inşa edilen $G / (e)$, e nin büzülmesiyle elde edilir. Eğer e bir ilmekse bu durumda $G - (e) = G / (e)$ dir (Murasugi 1989).

(G, f_G) yüklü grafı için, yeni bir $(G, -f_G)$ yüklü grafı, (G, f_G) grafının zıt grafı olarak adlandırılır.

Şimdi her yüklü G grafı için, G nın polinomu olarak adlandırılan, 3-değişkenli tamsayı polinomu $J_G(x,y,z)$ ile gösterilecektir. $J_G(x,y,z)$, Kauffmann tarafından tanımlanan bir çok polinomun çeşitli varyasyonlarından biridir.

4.2.1 Tanım $S_G(r,s)$, $\beta_0(H) = r + 1$ ve $\beta_1(H) = s$ olacak şekilde, G nın bütün spanning H altgraflarının kümesini gösterebilir. Bu durumda $J_G(x,y,z)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$J_G(x,y,z) = \sum_{0 \leq r, s < \infty} \left\{ \sum_{H \in S_G(r,s)} x^{p(H)-n(H)} \right\} y^r z^s$$

dir.

Eğer, $r < 0$ yada $r \geq |V(G)|$ ise, yada $s < 0$ yada $s \geq \beta_1(G) + 1$ ise, $S(r,s) = \emptyset$ olduğuna dikkat etmek gerekir.

Pratikte $J_G(x,y,z)$, aşağıdaki formüller kullanılarak da bir miktar kolaylıkla hesaplanabilir.

(1) Eğer $E(G) = \emptyset$ ve $|V(G)| = v$ ise, bu durumda,

$$J_G(x,y,z) = y^{v-1}$$

(2) $e \in E(G)$ olsun ve $f_G(e) = \varepsilon$ olsun.

(i) Eğer e , bir ilmek değilse, bu durumda,

$$J_G(x,y,z) = J_{G-(e)}(x,y,z) + x^\varepsilon J_{G/(e)}(x,y,z)$$

(ii) Eğer e bir ilmek ise, bu durumda,

$$J_G(x,y,z) = (1+x^\varepsilon z) J_{G/(e)}(x,y,z)$$

$J_G(x,y,z)$ polinomu, yalnız bir grafin invaryantı değil aynı zamanda, 2-izomorf graflar içinde bir invaryanttır (Murasugi 1991).

4.2.1 Önerme (1) G , m bağlantılı G_1, G_2, \dots, G_m bileşenlerine sahipse, bu durumda

$$J_G(x,y,z) = y^{m-1} \prod_{i=1}^m J_{G_i}(x,y,z)$$

(2) G bağlantılı ise G_1, G_2, \dots, G_k G nin blokları ise bu durumda

$$J_G(x,y,z) = \prod_{i=1}^k J_{G_i}(x,y,z)$$

dir (Murasugi 1989).

4.2.1 Sonuç $\varepsilon_i = f_{\Gamma}(e_i)$ olsun

(1) G, e_1, e_2, \dots, e_k şeklinde k ilmeği ihtiva ediyorsa bu durumda,

$$J_G(x, y, z) = \prod_{i=1}^k (1 + x^{\varepsilon_i} z)$$

(2) G, e_1, \dots, e_l şeklinde l kenarlı bir "ağaç" ise,

$$J_G(x, y, z) = \prod_{i=1}^l J_{G_i}(y + x^{\varepsilon_i})$$

dir (Murasugi 1991)

4.2.2 Sonuç \hat{G} , G nın zıt grafi ise,

$$J_{\hat{G}}(x, y, z) = J_G(x^{-1}, y, z)$$

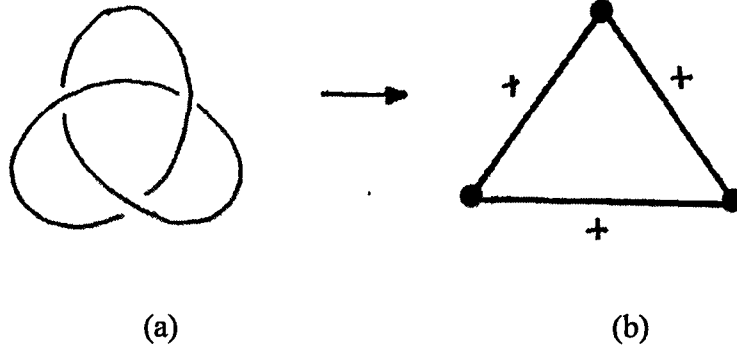
dir (Murasugi 1992)

4.2.2 Önerme G , bir pozitif graf ise, bu durumda,

$$J_G(x, y, z) = x^{v-1} \sum_{0 \leq r, s < \infty} |S_G(r, s)| \left(\frac{y}{x}\right)^r (xz)^s$$


dir. Burada $v = |V(G)|$ dir (Murasugi 1989).


4.2.1 Örnek $K(2,3)$ bir tor düğümü olsun (trefoil düğümü, şekil 4.2.1(a)). G de onun grafi olsun (şekil 4.2.1(b)).





Şekil 4.2.1 Trefoil ve onun işaretlenmiş grafi

K nın spanning altgrafları:

i. $G_1 =$  $I_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{rank}I_0 = 0$, $\text{rank}I_1 = 0$, $r = 2$, $s = 0$
 $J_{G_1}(x, y, z) = y^2$

ii. $G_2 =$  $I_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{rank}I_0 = 1$, $\text{rank}I_1 = 0$, $r = 1$, $s = 0$
 $J_{G_2}(x, y, z) = 3xy$

iii. $G_3 =$  $I_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{rank}I_0 = 2$, $\text{rank}I_1 = 0$, $r = 1$, $s = 0$
 $J_{G_3}(x, y, z) = 3x^2$

iv. $G_4 =$  $I_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{rank}I_0 = 2$, $\text{rank}I_1 = 0$, $r = 0$, $s = 1$
 $J_{G_4}(x, y, z) = x^3z$

$$J_G(x, y, z) = x^3z + 3x^2 + 3xy + y^2.$$

4.2.2 Örnek Eğer G sadece bir köşeyi ihtiva ediyorsa, bu durumda $J_G(x, y, z) = 1$ dir.

4.2.3 Örnek Bazı $K(2, q)$ tor düğümlerinin graflarının Jones polinomu

i) $K(2,5)$ $J_G(x, y, z) = x^5z + 5x^4 + 10x^3y + 10x^2y^2 + 5xy^3 + y^4$

ii) $K(2,7)$ $J_G(x, y, z) = x^7z + 7x^6 + 21x^5y + 35x^4y^2 + 35x^3y^3 + 21x^2y^4 + 7xy^5 + y^6$

iii) $K(2,9)$ $J_G(x, y, z) = x^9z + 9x^8 + 36x^7y + 74x^6y^2 + 126x^5y^3 + 126x^4y^4 + 74x^3y^5 + 36x^2y^6 + 9xy^7 + y^8$

4.2.3 Önerme $q = 3, 5, \dots$, için, $K(2, q)$ bir tor düğümü ve G de onun grafi olsun. Bu durumda,

$$J_G(x, y, z) = x^n z + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k-1}$$

burada $n = |E(G)|$ dir.

4.2.4 Önerme K_1, K_2, \dots, K_n , $K(2, q)$ tor düğümleri ve $K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n$ de onun bağlantılı toplamı olsun. Eğer $K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n$ düğümünün grafi G ise bu durumda,

$$J_G(x, y, z) = y^{n-1} \prod_{i=1}^n J_{G_i}(x, y, z)$$

dir.



4.3 Dügüm Graflarının Matrisleri

G işaretlenmiş bir graf olsun. Bir K düğümünün G grafının B_G matrisi :

$$B_G = D_G - A_G$$

dir. Burada, A_G adjacency matrisi herhangi $i \neq j$ için, a_{ij} , pozitif kenarların sayısı eksi uçları v_i ve v_j olan negatif kenarların sayısı ve $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \dots, |V(G)|$ olacak şekilde $|V(G)| \times |V(G)|$ şeklinde bir $A_G = \|a_{ij}\|$ tamsayı matrisidir.

$D_G = \|d_{ij}\|$, $|V(G)|$ mertebeli diyagonal bir matris olsun. Burada,

$$d_{ii} = \sum_{j=1}^{|V(G)|} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, |V(G)|.$$

dir.

B_G , simetrik ve singülerdir. B_G 'nin her bir satır ve sütunu G 'nin bir köşesine tekabül eder (Murasugi 1992).

4.3.1 Önerme (Merdiven Toplam Metodu) $q = 1, 3, 5, \dots$ için,

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

herhangi bir $K(2, q)$ tor düğümünün grafının matrisi olsun. # bağlantılı toplam olmak üzere bu K düğümünün grafının $G \# G \# \dots \# G$ şeklinde k -bağlantılı toplamının matrisi;

Dolayısıyla bu grafın $B_G = D_G - A_G$ matrisini elde ederken A_G bitişik matris değişmez. Değişen matris D_G diyagonal matrisindeki V_s köşesine karşılık gelen elemandır.

$$B_G = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - A_G$$

Böylece a_{mm} inci eleman her zaman yine V_1 köşesi ile bağlantılı olacağından V_1 köşesine karşılık gelen eleman a_{11} ve V_s köşesine karşılık gelen eleman a_{mm} dir ve $a_{11} + a_{mm}$ toplamı diyagonal matristeki V_s köşesine karşılık gelir. Böylece G_1 ve G_2 grafı için ifade ispatlanır. Bu ispatı genelleştirsek, G_1, G_2, \dots, G_n şeklinde n tane grafın bağlantılı toplamı her grafın bağlantılı toplamında $V_{s_1}, V_{s_2}, \dots, V_{s_n}$ tane 4 kenardan oluşan bir köşe olacağından B_G matrisinin tanımından simetrik singüler yeni bir matris elde edilir.

4.3.1 Örnek

$K(2,3)$ tor düğümünün grafının matrisi; $M_{2,3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ dir. k bağlantılı toplam

sayısı olmak üzere bu düğümün grafının k -bağlantılı toplamının matrisi;

$$M_{2,3}^k = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 2+2 & -1 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & -1 & 2+2 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2+2 & -1 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisin boyutu;

$$\dim M_{2,3}^k = 2k + 1 \text{ dir}$$

4.3.2 Önerme $\dim M_{2,q}^k = (q-1)k+1$ dir.

İspat Tablodan görüleceği gibi tümevarım ile önermenin doğruluğu ispatlanır.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	...	k
q	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1
3	3	5	7	9	11	13	15	17	...	$2k+1$
5	5	9	13	17	21	25	29	33	...	$4k+1$
7	7	13	19	25	31	37	43	49	...	$6k+1$
9	9	17	25	33	41	49	57	65	...	$8k+1$
.
q	q	$(q-1)2+1$	$(q-1)k+1$

5. SONUÇLAR

Bu tezde ilk olarak düğüm graflarına uygulanan Reidemeister hareketlerinin Yajima, Kinoshita (1957)'nin makalesindeki ispata alternatif olacak şekilde ters işlem kullanılarak geometrik bir ispatı yapılmıştır. Ayrıca iki trefoil düğümünün birleşimin grafi ile elde edilen durumlar sunularak bu birleşimlerden elde edilen 8_5 , 8_{10} , 8_{15} , $8_{19(n)}$, $8_{20(n)}$ ve $8_{21(n)}$ düğümler elde edilmiştir (Uğur *et al.* 2002).

Ayrıca Düğüm grafları için Jones polinomu incelenmiş $q = 3,5,\dots$ için, $K(2, q)$ bir tor düğümü ve G de onun grafi ise,

$$J_G(x, y, z) = x^n z + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k-1}$$

şeklinde bir algoritma geliştirilmiştir. Buna ek olarak, $K_1, K_2, \dots, K_n, K(2, q)$ tor düğümleri ve $K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n$ de onun bağlantılı toplamı olmak üzere, eğer $K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n$ düğümünün grafi G ise bu durumda,

$$J_G(x, y, z) = y^{n-1} \prod_{i=1}^n J_{G_i}(x, y, z)$$

eşitliği de görülmüştür. Bununla ilgili bilgisayar programı ve programın çalıştırılması ile elde edilen polinomlar Ek 2 de sunulmuştur.

Ayrıca, $q = 1,3,5,\dots$ için,

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

herhangi bir $K(2, q)$ tor düğümünün grafinin matrisi ve $\#$ bağlantılı toplam olmak üzere bu K düğümünün grafinin $G\#G\#\dots\#G$ şeklinde k -bağlantılı toplamının matrisi;

KAYNAKLAR

- Alexander, J. W., Briggs, G. B., 1927. On types of knotted curve. *Ann. Math.*, 28, 562 - 586.
- Aumann, R. J., 1956. Asphericity of alternating knots. *Ann. of Math.*, 64, 374 – 392
- Bankwitz, C., 1930. Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten. *Math. Ann.*, 103, 145-161.
- Bozhüyük, M. E., 1984. Genel Topolojiye Giriş. Atatürk Üni. No: 610, Fen-Ede. Fak. No:21 Ders Kitapları No:59, 150 s, Erzurum.
- Burde, G., Zieschang, H., 1985. *Knots*. Walter de Gruyter, 399 s, Berlin-NewYork.
- Crowell, R. H., Fox, R. H., 1963. *Introduction to Knot Theory*. Blaisdell Publishing Company, 181 s, New York.
- Diestel, R., 1997. *Graph Theory*. Electronic Edition, Springer-Verlag, 322 s, New York.
- Gordon, C. McA., Leucke, J., 1989. Knots are determined by their complements. *J. Amer. Math. Soc.*, 2, 371 – 415.
- Jones, V. F. R., 1987. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. of Math.*, 126, 335 – 388.
- Kauffman, L. H., 1987. *On Knots*. Princeton University Press, 474 s, Princeton, New-Jersey.
- Kawauchi, A., 1996. *A Survey of Knot Theory*. Birkhauser Verlag, 415 s, Basel-Boston-Berlin.
- Kinoshita, S., Terasaka, H., 1957. On Unions of knots. *Osaka Math J.*, 9, 131-153
- Kopuzlu, A., Ugur, T., 2002. A Method on matrix of graph of torus knot $K(2,q)$. *Applied math and Comput.* In pressed.
- Lien, M., Watkins, W., 2000. Dual graphs and knot invariants. *Linear algebra and its Appl.* 306, 123 – 130.
- Murasugi, K., 1989. On invariants of graphs with applications to knot theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 314, 1-49.
- Murasugi, K., 1991. Invariants of graphs and their applications to knot theory, In: *Algebraic topology (Poznan, 1989)*, 83-97, *Lecture Notes in Math.*, 1474, Springer Verlag.
- Murasugi, K., 1992. Classical numerical invariants in knot theory, *NATO ASI series*, Kluwer Academic Publ., 399, 157-194.
- Murasugi, K., 1996. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhauser, 337 s, Boston.
- Noble, S. D., Welsh, D. J. A., 2000. Knot Graphs. *J. Graph Theory*, 34, 100 – 111.
- Prasolov, V. V., Sossinsky, A. B., 1996. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. Amer. Math. Soc. 237 s, Providence-Rhode Island.
- Reidemeister, K., 1926. Knoten und Gruppen. *Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg*, 5, 7 – 23.
- Reidemeister, K., 1932. *Knotentheorie*. *Ergebn. Math. Grenzgeb.*, Springer-Verlag, Berlin.
- Rolfen, D., 1976. *Knots and Links*. Publish or Perich Inc., 437 s, Wilmington Delaware.
- Schubert, H., 1949. Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math. -nat. Kl.*, 3, 57 – 104.

- Ugur, T., Şimşek, H., Kopuzlu, A., 2002(a). On Knot Graphs. Erciyes Üniversitesi Dergisi. In pressed.
- Ugur, T., Kopuzlu, A., Şimşek, H., 2002(b). A Work on Torus Knots. Applied Math. and Comput. In pressed.
- Walba, D.M., 1985. Topological Stereochemistry. Tetrahedron, 41, 3161-3212.
- Yajima, T., Kinoshita, S., 1957. On the Graphs of Knots. Osaka Math J., 9, 155 – 163.



EK 1 **$K(2,n)$ - Tor düğümlerinin Visual Basic 6.0 ile yapılmış bilgisayar programı**

Bu kısımda $K(p,q)$ -Tor düğümlerinin Visual Basic 6.0 ile yapılmış bilgisayar programı sunulmuştur (Uğur *et al.* 2002(b)). Bu program yapılırken, Türk düğümleri için Basic programlama diliyle yapılmış olan bilgisayar programı geliştirilerek Visual Basic 6.0 ile yeniden yazılması ile elde edilen çalışma temel alınmıştır. Ayrıca bu program kullanılarak elde edilen birkaç tor düğümü örneği sunulmuştur.

```

Dim dd1(3000)
Private Sub Command1_Click()
A = Val(Form1.Text1)
B = Val(Form1.Text2)
X = A
Y = B
df = 3000
dr = 2500
D9 = 0.4 * A ^ (3 / 4) / B ^ (2 / 3)
R = B / A
S = 3.1415926 / B
P1 = A - 2
Q = 1
D1 = Fn(R, S, D9)
For T = 1 To (A - 1) * B Step 0.08
FSN = Fn2(P1, A)
P2 = FSN
I9 = (Q + FSN) * S
D2 = Fn(R, I9, D9)
For I = (Q * S + D1) To 100 * (I9 - D2) Step 1 * Sqr(A / B
/ 2)

```

```

Picture1.Line (df + dr * (Cos(I) * (Cos(R * I) + 2) / 3),
df + dr * (Sin(I) * (Cos(R * I) + 2) / 3))-(df + dr *
(Cos(I) * (Cos(R * I) + 2) / 3), df + dr * (Sin(I) * (Cos(R
* I) + 2) / 3)), 12, BF
Next I
X1 = (Cos(I9 - D2) * (Cos(R * (I9 - D2)) + 2) / 3) * dr +
df
Y1 = (Sin(I9 - D2) * (Cos(R * (I9 - D2)) + 2) / 3) * dr +
df
Picture1.Line (X1, Y1)-(X1, Y1), 11, BF
D1 = D2
Q = Q + P2
Next T
End Sub

Static Function Fn(R, S1, D9)
ddl(S1) = D9 / Abs(Sin(R * S1)) ^ (3 / 4)
Fn = ddl(S1)
End Function

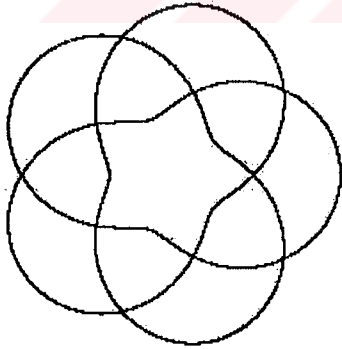
Static Function Fn2(P1, A)
If P1 <> 0 Then
    Fn2 = 1
    FnO2 = 1
    P1 = P1 - 1
Else
    Fn2 = 2
    FnO2 = 2
    P1 = A - 2
End If
If P1 <> 0 Then
    FnO2 = FnO2 + 1
    Fn2 = FnO2

```

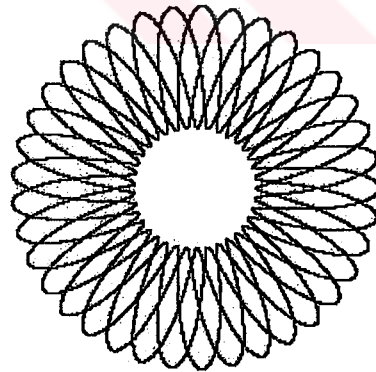
```
P1 = P1 - 1
Else
FnO2 = FnO2 + 2
Fn2 = FnO2
P1 = A - 2
End If
P2 = FnO2
Fn2 = P1
End Function
```

```
Private Sub Command2_Click()
Clipboard.Clear
Clipboard.SetData Picture1.Picture
End Sub
```

```
Private Sub Command3_Click()
End
End Sub
```



Şekil 4.4.1 (3,5)-Tor düğümü



Şekil 4.4.2 (4,37)-Tor düğümü

EK 2 **$K(2,n)$ - Tor düğümlerinin graflarının Jones polinomu için MAPLE Source Code ile yapılmış bilgisayar programı**

Bu kısımda 4.2.3 Önerme de ileri sürülen eşitlik için $K(2,n)$ - tor düğümlerinin ($n = 3,5,..$) Jones polinomunu hesaplayan MAPLE Source Code programı sunulmuş ve ardından da bu program ile hesaplanan (11 geçitli düğümlere kadar) düğümlerin graflarının Jones Polinomları sunulmuştur.

```
> cones:=proc(nn)
> local tt,x,z,k;
>tt:=x^nn*z+sum('binomial(nn,k)'*x^(nn-k)*y^(k-
    1),'k'=1..nn);
> return;
> tt;

> cones(3);
```

$$x^3 z + 3 x^2 + 3 x y + y^2$$

```
> cones(5);
```

$$x^5 z + 5 x^4 + 10 x^3 y + 10 x^2 y^2 + 5 x y^3 + y^4$$

```
> cones(7);
```

$$x^7 z + 7 x^6 + 21 x^5 y + 35 x^4 y^2 + 35 x^3 y^3 + 21 x^2 y^4 + 7 x y^5 + y^6$$

```
> cones(9);
```

$$x^9 z + 9 x^8 y + 36 x^7 y^2 + 84 x^6 y^3 + 126 x^5 y^4 + 126 x^4 y^5 + 84 x^3 y^6 + 36 x^2 y^7 + 9 x y^8 + y^9$$

> cones(11);

$$x^{11} z + 11 x^{10} y + 55 x^9 y^2 + 165 x^8 y^3 + 330 x^7 y^4 + 462 x^6 y^5 + 462 x^5 y^6 + 330 x^4 y^7 + 165 x^3 y^8 + 55 x^2 y^9 + 11 x y^{10} + y^{11}$$



:

EK 3 **$K(2,n)$ - Tor Düğümlerinin matrisleri için MAPLE Source Code ile yapılan Bilgisayar programı**

Bu kısımda 4.3.1 Önerme de sunulan Merdiven-toplam-Metodu için $K(2,n)$ -tor düğümlerinin bağlantılı toplamlarının matrisini veren bilgisayar programı sunulmuştur. Ayrıca, bu program yardımıyla hesaplanan matris örneği verilmiştir (Kopuzlu, Uğur 2002).

```
#q           :the number of wrap around torus(meridional
direction)
#k           :the number of connected sum
#A           :the matrix of graph of torus knot  $K(2,q)$ 

with(linalg):
M:=array(1..500):
l:=q:
M[1]:=A:
for i from 1 to k do
B:=diag(M[i], A):
C:=addrow(B, q, q+1):
F:=delrows(C, q..q):
E:=addcol(F, q, q+1):
R:=delcols(E, q..q):
M[i+1]:=R:
M[i]:=M[i+1]:
n:=n+(l-1):
od:
print(M[1]);
```

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad q = 3, \quad k = 5 \text{ için yukarıda verilen MAPLE source code}$$

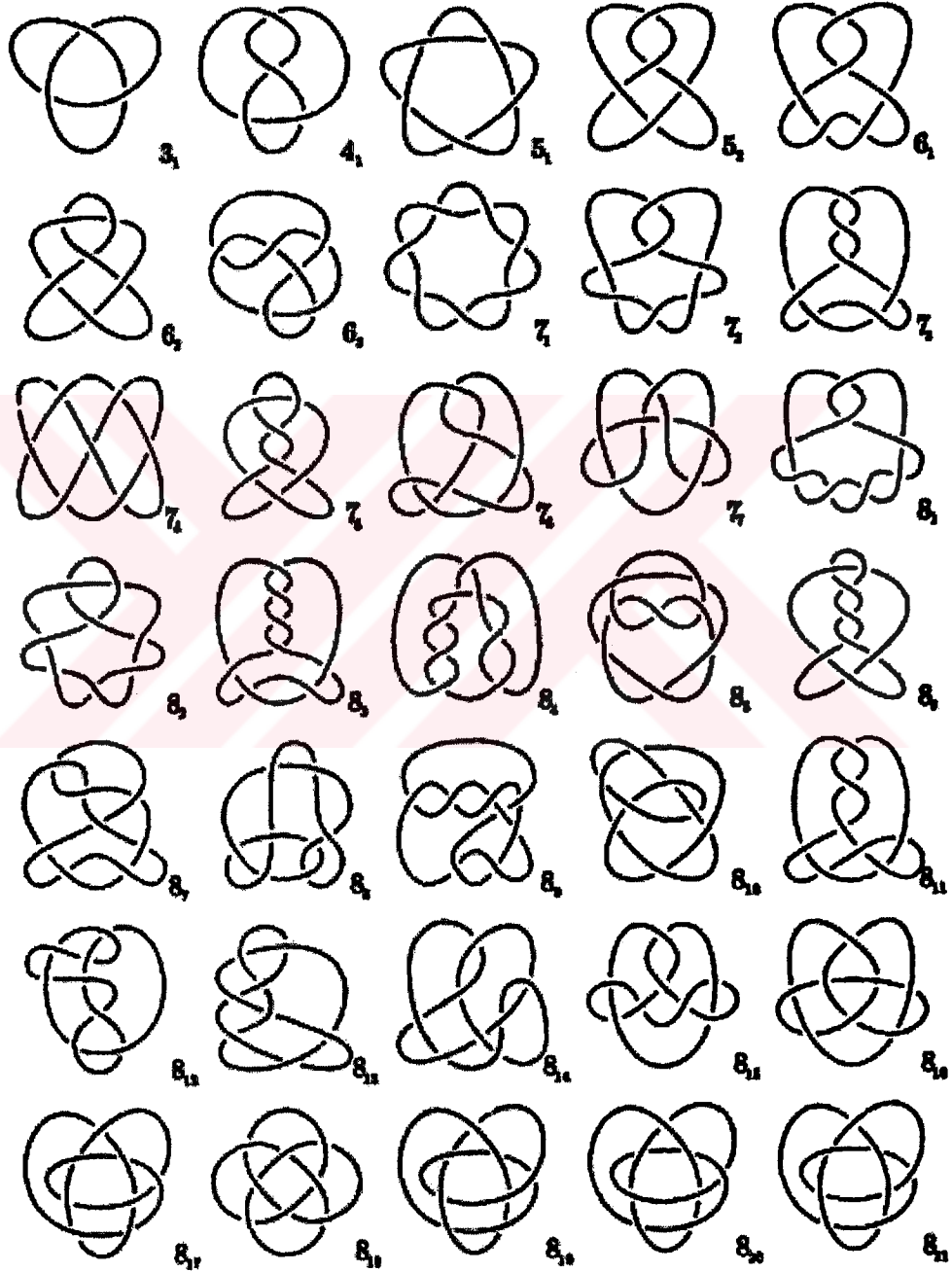
çalıştırılırsa, bu durumda $K(2,3)$ -tor düğümünün 5-bağlantılı grafının matrisi;

$$M_{2,3}^5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

EK 4

Bu kısımda 9-geçitli düğümlere kadar asal düğümlerin bir tablosu sunulmuştur.



ÖZGEÇMİŞ

Erzurum'da 1970 yılında doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 1987 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1992 yılında mezun oldu. Eylül 1995- Temmuz 1998 yılları arasında, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

Atatürk Üniversitesi Erzincan Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümünde 1996 yılından beri Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

