ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN LOGARİTMİK KATSAYILARI

Hükmi KIZILTUNÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2002

Yard.Doç.Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, Hükmi KIZILTUNÇ tarafından hazırlanan bu çalışma 26.09.2002 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç.Dr. Ekrem KADIOĞLU İmza :

Üye: Y.Doç.Dr. Abdullah KAPLAN İmza :

Üye: Y.Doç.Dr. Sezgin AKBULUT İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(imza)

Ümit Deniz

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN LOGARİTMİK KATSAYILARI

Hükmi KIZILTUNÇ

Atatürk Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Sezgin AKBULUT

D birim diskinde analitik ve ünivalent olan $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\dots$ biçimindeki fonksiyonların sınıfı S olsun. S sınıfına ait f fonksiyonlarının γ_n logaritmik katsayıları çalışıldı.

2002, 41 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ünivalent fonksiyon, Analitik fonksiyon, Konveks ve Yıldızıl fonksiyonlar, Logaritmik katsayılar, Milin-Lebedev eşitsizlikleri.

ABSTRACT

Master Thesis

LOGARITHMIC COEFFICIENTS OF UNIVALENT FUNCTIONS

Hükmi KIZILTUNÇ

Atatürk University
Faculty of Arts and Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Let S be the class of functions $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ analytic and univalent in the unit disk D. It was studied the logarithmic coefficients γ_n of f functions belonging to the class S.

2002, 41 pages

Keywords: Univalent function, Analytic function, Convex and Starlike functions, Logarithmic coefficients, Milin-Lebedev inequalities.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Sezgin AKBULUT'a ve değerli fikirlerinden faydalandığım Sayın Doç. Dr. Ekrem KADIOĞLU, Sayın Doç. Dr. Muhammet KAMALİ, Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR ve Sayın Arş. Gör. Dr. Halit ORHAN'a en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güvenden dolayı aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Hükmi Kızıltunç

Ağustos 2002

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

A	D Birim Diskinde Analitik Olan Fonksiyonlar
$\mathbb{C}$	Kompleks Düzlem
K	Konveks Fonksiyonlar
S^*	Yıldızıl Fonksiyonlar
C	Konvekse Yakın Fonksiyonlar
B	Bölge
D	Birim Disk
Δ	Birim Diskin Dışı
$S^{(2)}$	Tek Fonksiyonlar
$\{B_n\}$	Basit Bağlantılı Bölgeler Dizisi
S	Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar
$\mathbb{R}$	Gerçel Eksen
P	Pozitif Gerçel Kısma Sahip Fonksiyonlar
Σ	Birim Diskin Dışında Ünivalent Fonksiyonlar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Ünivalent fonksiyonlar teorisi 20.yy'ın başlarında ortaya çıkmış eski teori olmasına rağmen, günümüz araştırmalarının aktif bir alanı olarak kalmayı başarmıştır. Bu alanın en önemli problemlerinden bir tanesi geçmişi 1916 yılına dayanan Bieberbach tahminidir. Bu tahmin, S sınıfındaki her bir fonksiyonun Taylor katsayıları için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin sağlandığını iddia eder. Bu meşhur Bieberbach tahmininin doğruluğunu göstermek için yapılan ispatların yeniden gözden geçirilmesi, ünivalent fonksiyonlar teorisi üzerine çalışan matematikçilerin düşünce ufkunu önemli ölçüde genişletmiştir. 1984 yılına kadar sadece $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ katsayıları için yapılabilen ispat, 1985 yılında L. De Branges tarafından tüm a_n katsayıları için verilmiştir. Bu katsayıların bulunma yılları şu şekildedir.

$n=2$	için	$a_2 \leq 2$	Bieberbach(1916)
$n=3$	için	$a_3 \leq 3$	Löwner(1923)
$n=4$	için	$a_4 \leq 4$	Garabedian ve Schiffer(1955)
$n=5$	için	$a_5 \leq 5$	Pederson ve Schiffer(1972)
$n=6$	için	$a_6 \leq 6$	Pederson ve Ozawa(1968-1969)
Tüm n ler	için	$a_n \leq n$	L. De Branges(1985)

Bieberbach tahmininin her n için çözülmüş olması, bu sahada çalışılacak problemlerin bitmesi anlamına gelmemektedir. Aksine bu çözüm, ünivalent fonksiyonlar teorisini daha da zenginleştirmiştir. Çağımızın önde gelen matematikçilerini yctmiş yıl uğraştıran bu problemin çözülmüş olması bir takım yeni problemlerin ortaya çıkmasına zemin oluşturmuştur.

$$\log\left[\frac{f(z)}{z}\right] = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$$

şeklinde tanımlanan $f \in S$ fonksiyonunun γ_n logaritmik katsayıları I. M. Milin tarafından incelendi. I: M. Milin çalışmalarında, $f \in S$ tek ünivalent fonksiyonlarının katsayıları için, $|a_n| \le e^{\delta/2} < 1.17$ tahminini yaptı. V. I. Milin ise bu tahmini $|a_n| \le e^{\delta/2} < 1.14$'e geliştirdi.

Özellikle Littlewood-Paley'in $|a_n| \le 1$ tahmininin yetersizliğinden dolayı, $\sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \delta (\delta<0.312)$ şeklindeki Milin lemmasındaki δ sabiti 0 alınamaz. Bununla birlikte Milin

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)k|\gamma_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\frac{1}{k} \tag{1.1}$$

eşitsizliğinin Bieberbach tahminini gerektirdiğini gösterdi (Andrew ve Duren). Daha sonra Milin eşitsizliği olarak adlandırılan bu (1.1) eşitsizliğinin ispatı L. De Branges tarafından verildi.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, tezde kullanmış olduğumuz bazı genel topolojik kavramlara yer verilecektir.

2.1.1. Tanım (ε-Komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 noktasının ε-komşuluğu denir.

2.1.2. Tanım (İç Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olsun. z_0 noktasının bir ε komşuluğu, tamamen A kümesine ait ise, z_0 noktasına bir iç nokta denir.

2.1.3. Tanım (Açık Küme): $A \subset \mathbb{C}$ olsun. A kümesinin her noktası bir iç nokta olan kümeye açık küme denir.

2.1.4. Tanım (İçi): $A \subset \mathbb{C}$ verilsin. A kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye, A kümesinin içi denir ve A^0 simgesiyle gösterilir.

2.1.5. Tanım (Kapalı Küme): $A \subset \mathbb{C}$ verilsin. A kümesinin tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.

2.1.6. Tanım (Dış Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ alt kümesi verilsin. A kümesinin tümleyeninin bir iç noktasına, A kümesinin bir dış noktası denir. Bütün dış noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin dışı denir ve $(\mathbb{C} - A)^0$ ile gösterilir.

2.1.7. Tanım (Kapanış Noktası): $A \subset \mathbb{C}$ alt kümesi ve bir $z \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. Eğer z noktasının her komşuluğunda A kümesinin en az bir elemanı varsa, z noktasına A kümesinin kapanış noktası denir.

2.1.8. Tanım (Bağlantılı Küme): A, Y ve Z $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin alt kümeleri olsun. Eğer $A \subset Y \cup Z$, $A \cap Z \neq \varnothing$, $A \cap Y \neq \varnothing$ ve $A \cap Y \cap Z = \varnothing$ olacak biçimde Y ve Z gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise, $A \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısızdır denir.

2.1.9. Tanım (Basit Bağlantılı Küme): $A \subset \mathbb{C}$ olsun.Eğer bir A kümesi içindeki herhangi iki noktayı birleştiren bütün yollar yine küme içinde kalıyorsa, bu A kümesine basit bağlantılı küme denir.

2.1.10. Tanım (Bölge): Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

2.1.11. Tanım (Seri):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

ifadesine seri denir. $a_1, a_2, \ldots$ sayılarına da serinin terimleri adı verilir.
Bir seriyi göstermek için

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

veya

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum a_n$$

kullanılır (Kadıoğlu-Kamali 1998).

2.1.12. Tanım (Yakınsaklık): Kompleks sayıların bir $\{z_n\}$ dizisi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa, bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsıyor denir. $\{z_n\}$ dizisinin z_0 noktasına yakınsaması $z_n \to z_0$ biçiminde gösterilir (Dönmez 1985).

2.1.13. Tanım (Düzgün Yakınsama): $A \subset \mathbb{C}$ ve $f_n : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının $\{f_n\}$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve tüm $z \in A$ değerleri için $n \geq n_0$ alındığında $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsıyor denir.

2.1.14. Tanım (Süreklilik): $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere $z \in A$ ve $|z - z_0| < \delta$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise f ye z_0 noktasında süreklidir denir.

2.1.15. Tanım (Parçalı Süreklilik): $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f nin A daki süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise f fonksiyonuna A üzerinde parçalı süreklidir denir (Balcı 1985).

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde ise, konumuzun asıl temelini oluşturan tanımların yanı sıra bunlarla ilgili bazı teoremler de verilecektir.

2.2.1. Tanım (Analitik Fonksiyon): f, kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir denir. Eğer $f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda diferensiyellenebilirse, f ye z_0 noktasında analitik fonksiyon denir (Duren 1983).

Örneğin $f(z)=z^2$ fonksiyonu heryerde analitiktir. Fakat $f(z)=|z|$ fonksiyonu hiçbir yerde analitik değildir. Çünkü bu fonksiyonun yalnız $z=0$ noktasında türevi vardır. z_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda türevi yoktur.

2.2.2. Tanım (Ünivalent Fonksiyon): B bir bölge olsun. B deki farklı z_1 ve z_2 noktaları için $f(z_1)\neq f(z_2)$ oluyorsa bu f fonksiyonuna ünivalent fonksiyon denir.

2.2.3. Tanım (Lokal Olarak Ünivalent Fonksiyon): Eğer f fonksiyonu $z_0\in B$ noktasının uygun bir komşuluğunda ünivalent ise f ye lokal olarak ünivalent denir.

f analitik fonksiyonu için $f'(z_0)\neq 0$ şartı z_0 noktasında lokal ünivalentliğe denktir.

Örneğin; $f(z)=z^2$ fonksiyonu $B=\{z:1<|z|<2,\ 0<\arg z<\frac{3\pi}{2}\}$ bölgesinde lokal ünivalenttir fakat ünivalent değildir.

2.2.4. Tanım (Meromorf Fonksiyon): Bir B bölgesinde kutuptan başka singüler noktası olmayan $f(z)$ fonksiyonuna B de meromorf fonksiyon denir (San 1973).

2.2.5. Tanım (S Sınıfı): $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve ünivalent olan ve $f(0)=0, f'(0)=1$ şartlarını sağlayan fonksiyon D diskinde

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir. Bu şekildeki fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

2.2.6. Tanım(P ve Σ Sınıfı): D birim diskinde

$$f(z)=\frac{1}{z}+b_1 z+b_2 z^2+\ldots b_n z^n+\ldots$$

açılımına sahip ünivalent ve meromorf $f(z)$ fonksiyonların sınıfı P ile ve $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ biçiminde olmak üzere $\mathbb{C}^* - \bar{D} = \{z : |z| > 1\}$ bölgesinde ünivalent ve meromorf olan

$$g(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots$$

biçimindeki $g(z)$ fonksiyonların sınıfı da $\sum$ ile gösterilir.

Bieberbach Tahmini: S sınıfındaki $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

açılımına sahiptir. Bieberbach, $n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq n$$

olduğunu söylemiştir. Bu eşitsizlik Bieberbach tahmini olarak adlandırılır.

2.2.7. Tanım (Tek Univalent Fonksiyon): Her $f \in S$ için

$$h(z) = \left[f(z^2)\right]^{1/2} = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots$$

fonksiyona tek ünivalent fonksiyon denir. S deki tek ünivalent fonksiyonların kümesi S^2 ile gösterilir.

2.2.8. Tanım (Negatif Katsayılı Fonksiyonlar): $f \in S$ olsun.

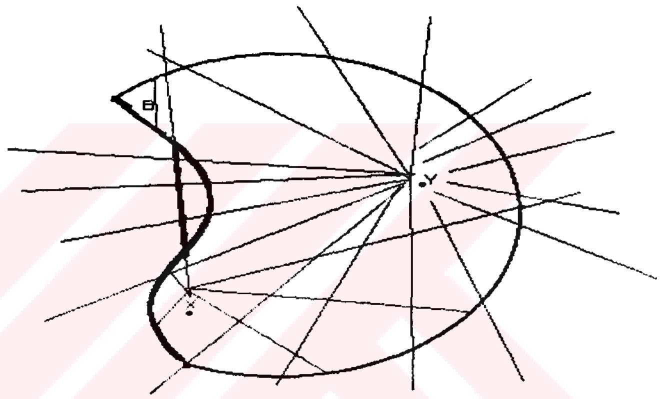
$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$$

şeklindeki fonksiyonlara negatif katsayılı fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların sınıfı T ile gösterilir.

2.2.9. Teorem (Maksimum Modül Teoremi): B sınırlı bir bölge olsun. f, B bölgesinde analitik ve B nin kapanışında sürekli ise $|f|$ maksimum değerini bölgenin sınırında alır.

2.3. Starlike Fonksiyonlar

2.3.1. Tanım (Starlike Bölge): $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $y \in B$ olsun. Eğer y noktasını B nin herhangi bir x noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B nin içinde kalıyorsa B ye y noktasına göre starlike bölge denir. Daha açık bir ifadeyle B bölgesinin her bir noktası y noktasından görülebilir.



Şekil 2.3.1. Starlike Bölge

Yukarıda şekilde; herhangi bir B bölgesi, y noktasına göre starlike, fakat x noktasına göre starlike değildir.

2.3.2. Tanım (Starlike Fonksiyon): $f \in S$ olsun. $f(D)$ orijine göre starlike ise bu $f(z)$ fonksiyonuna starlike fonksiyondur denir ve starlike fonksiyonların sınıfı genellikle S^* ile gösterilir.

Not: $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu için $\log k'(z)$ fonksiyonu starlike fonksiyondur (Duren ve McLaughlin 1972).

2.3.4. Lemma: $f \in S$, $\Delta = f(D)$, $\overline{D_r} = \{z : |z| \leq r < 1\}$ ve $\overline{\Delta_r} = f(\overline{D_r})$ olsun. Eğer Δ orijine göre starlike ise $\overline{\Delta_r}$ da aynı noktaya göre starliketır. Tersine, her $r < 1$ için $\overline{\Delta_r}$ orijine starlike ise Δ da aynı noktaya göre starliketır.

İspat: Eğer $z \in D$ ise $f(z) \in \Delta$ ve Δ starlike olduğundan $0 \leq t \leq 1$ için $tf(z) \in \Delta$ dır.

$$g(z) = f^{-1}(tf(z))$$

fonksiyonu D de analitik ve $|z| < 1$ için $g(0) = 0$, $|g(z)| < 1$ dir. Schwarz Lemmasından $|z| < 1$ için

$$|g(z)| \leq |z|$$

yazılır. Farzedelim ki $z_1 \in \overline{D_r}$ olsun. Buradan

$$f(z_1) \in \overline{\Delta_r} \quad \text{ve} \quad |g(z_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| \leq |z_1| \leq r$$

bulunur. Eğer $z_2 = f^{-1}(tf(z_1))$ alırsak

$$|z_2| \leq r \ \text{ ve } f(z_2) = tf(z_1) \in \overline{\Delta_r}$$

buluruz. Bu halde, $f(z_1) \in \overline{\Delta_r}$ iken $tf(z_1) \in \overline{\Delta_r}$ olup $\overline{\Delta_r}$ orijine göre starliketır.

$w^* \in D$ noktası bazı $\overline{\Delta_r}$ lerde ihtiva edileceğinden lemmanın tersi açıktır. Böyle bir durumda

$$z^* = f^{-1}(w^*)$$

ters görüntüsü de $r = |z^*|$ özelliğine sahip $\overline{D_r}$ lerde ihtiva edilir.

2.3.5. Lemma: $f \in S$ fonksiyonunun starlike olması için gerek ve yeter şart $0 < |z| = r < 1$ olacak şekilde bütün z ler için

$$\text{Re}\left\{ \frac{z f'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır.

İspat: $z \neq 0$ iken $\arg f(z)$ nin seçilen özel dalı için

$$\log f(z) = \ln|f(z)| + i\arg f(z)$$

yazabiliriz. $z = re^{i\theta}$ alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(z) = \frac{i\,z\,f'(z)}{f(z)} = i\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(z) + \frac{\partial}{\partial\theta}\ln|f(z)|$$

yazılır. Buradan da

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right\}$$

elde edilir. Lemma 2.3.4. e göre, $0<r<1$ olmak üzere f, D_r de starlike iken f fonksiyonu D bölgesinde de starliketır ve terside doğrudur. Böylece $-\pi<\theta\leq\pi$ olmak üzere $z = re^{i\theta}$ çemberi boyunca herhangi bir özel daldaki starlike fonksiyon için $\arg f(z)$ azalamaz. Aksi halde, $w = f(z)$ ye karşılık gelen yarıçap vektörü gerisin geriye dönüş yapacak ve aynı yarıçap birden daha çok noktadan $\overline{\Delta}_r$ nin sınırını keser. Böylece $|z| = r<1$ için

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\geq 0$$

dır. Bununla birlikte $U = \mathrm{Re}\left(zf'/f\right)$ harmonik fonksiyonuna maksimum modül teoremi uygulanırsa eşitliğin olamayacağı görülür. Bu yüzden de $|z| = r<1$ için

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0$$

olur. Bu durumda $\arg f(z)$ devamlı artandır ve f starliketır.

Not: Lemma 2.3.5 de S sınıfına ait f fonksiyonunun ($0<|z|<1$ için) starlike olması için gerek ve yeter şartın

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(z) = \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0$$

olduğu gösterildi. Eğer $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \ldots$ fonksiyonu D de analitik ise, yukarıdaki eşitsizlik f fonksiyonunun starlike olması için şarttır. Fakat $f(z) = z^2$ örneğindeki gibi f ünivalent olmayabilir.

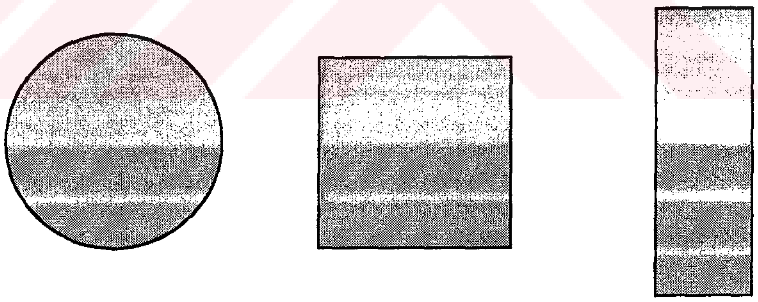
2.3.6. Tanım (Güçlü Starlike Fonksiyon): $U=\{z:|z|<1\}$ birim diskindeki analitik f fonksiyonlarının sınıfı A olsun ve $f(0)=f'(0)=0$ şartları sağlansın. Bu durumda

$$\widetilde{S^*}(\alpha) = \left\{ f\in A : \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\alpha\pi}{2},\ z\in U \right\}$$

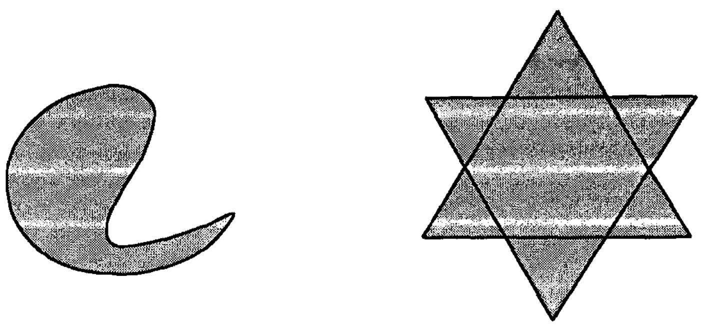
şeklindeki fonksiyona α $(0<\alpha\leq 1)$ mertebeden güçlü starlike fonksiyon denir. Burada $0<\alpha<1$ için $\widetilde{S^*}(\alpha)\subset S^*$ ve $\widetilde{S^*}(1) \equiv S^*$ dır.

2.4. Konveks Fonksiyonlar

2.4.1. Tanım (Konveks Bölge): Her z_1 ve $z_2 \in A$ noktaları için, bu noktaları birleştiren doğru parçası A bölgesinde kalıyorsa, böyle bölgelere konveks bölgeler denir.



Şekil 2.4.1. Konveks Bölgeler



Şekil 2.4.2. Konveks Olmayan Bölgeler

2.4.2. Tanım (Konveks Fonksiyon): D de analitik olan f fonksiyonunun $f(D)$ görüntü kümesi konveks bir bölge ise f fonksiyonuna D de konvekstir denir.

Not: Herhangi bir konveks bölge her bir noktasına göre starlike olduğundan konveks fonksiyonların sınıfı starlike fonksiyonlar sınıfının alt sınıfıdır. S sınıfına ait konveks fonksiyonlardan oluşan alt sınıf K ile gösterilir.

2.4.3. Örnek: $f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ $\left(|z|<1\right)$ fonksiyonu bir konveks fonksiyondur.

Çözüm: $f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}=w$ diyelim. Buradan,

$$\begin{aligned} w-wz=1+z &\Rightarrow w-1=wz+z \\ &\Rightarrow w-1=z(w+1) \\ &\Rightarrow z=\frac{w-1}{w+1} \end{aligned}$$

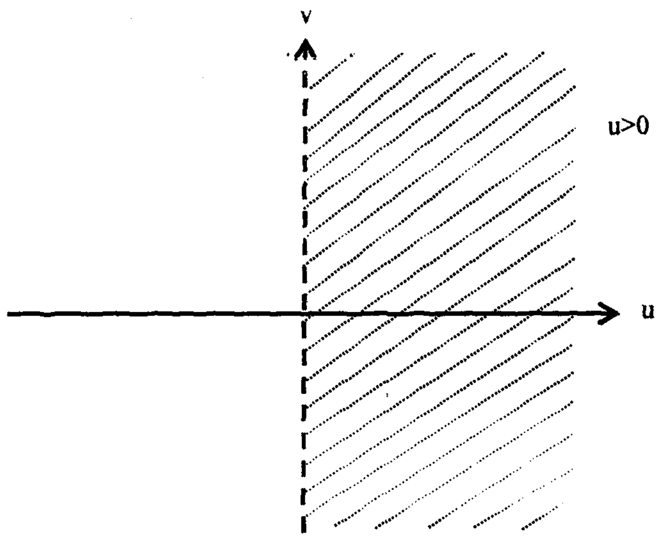
olur. En son eşitliğin her iki tarafının mutlak değerini alacak olursak,

$$|z|=\left|\frac{w-1}{w+1}\right|<1$$

olur. Daha sonra $w=u+iv$ denilirse,

$$\begin{aligned} \left|\frac{u+iv-1}{u+iv+1}\right|<1 &\Rightarrow |u-1+iv|<|u+1+iv| \\ &\Rightarrow (u-1)^2+v^2<(u+1)^2+v^2 \\ &\Rightarrow u^2-2u+1+v^2<u^2+2u+1+v^2 \\ &\Rightarrow -2u<2u \\ &\Rightarrow 4u>0 \\ &\Rightarrow u>0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da sağ yarı düzlemdir. O halde $f(z)$ fonksiyonu konvekstir.



Şekil 2.4.3.

2.4.4. Lemma: $f \in S$ olsun. *f(D)* nin konveks olması için gerek ve yeter şart tüm $r \in (0,1)$ için $f(D_r)$ nin konveks olmasıdır.

İspat: $\Delta = f(D)$, $\Delta_r = f(D_r)$ olmak üzere farzedelim ki Δ konvekstir. $w_1, w_2 \in \Delta_r$ olacak şekilde farklı iki nokta iken $0 < t < 1$ için

$$tw_1 + (1-t)w_2$$

doğru parçasının Δ_r de ihtiva edildiğini göstermeliyiz.

$$z_1 = f^{-1}(w_1) \text{ ve } z_2 = f^{-1}(w_2)$$

olsun. $z_1, z_2 \in D_r$ olup $|z_1| \leq |z_2|$ olarak kabul edilsin. Δ nın konveksliğinden dolayı D nin

$$\psi(z) = tf\left(\left(\frac{z_1}{z_2}\right)z\right) + (1-t)f(z) \qquad (0 \leq t < 1)$$

altındaki görüntüsü Δ da ihtiva edilir. Bu takdirde $g(z) = f^{-1}(\psi(z))$ fonksiyonu D de analitiktir ve $|g(z)| < 1$ ve $g(0) = 0$ şeklinde Schwarz Lemmasındaki aksiyomları sağlar. Böylece $|z| < 1$ için $|g(z)| \leq |z|$ yazılır. Buradan

$$|g(z_2)| = \left|f^{-1}\left(tw_1 + (1-t)w_2\right)\right| \le |z_2| < r... \qquad (2.1)$$

olur. $\Delta_r \subset \Delta$ olduğundan her bir $t \in (0,1)$ için

$$f(z_t) = tw_1 + (1-t)w_2$$

olacak şekilde $z_t \in D$ noktası vardır. Fakat (2.1)

$$\left|f^{-1}\left(f(z_1)\right)\right| = |z_1| < r \quad \text{veya} \quad z_t \in D_r$$

olduğunu gösterir. Böylece $tw_1 + (1-t)w_2$ nin tüm noktaları Δ_r dedir.

Tersine, her $0 < r < 1$ için Δ_r konveksi için Δ da konvekstir. Gerçekten w_1 ve w_2 , Δ da herhangi farklı iki nokta olsun. $z_1 = f^{-1}(w_1)$ ve $z_2 = f^{-1}(w_2)$ nin her ikisi de D_r de ihtiva edilecek şekilde r seçilebilir. Bu takdirde $\Delta_r = f(D_r)$, w_1 ve w_2 noktalarının her ikisini de ve böylece $0 \le t \le 1$ olmak üzere $tw_1 + (1-t)w_2$ doğru parçasının tüm noktalarını ihtiva edecektir. $\Delta_r \subset \Delta$ olduğundan bu doğru parçası Δ da ihtiva edilir.

2.4.5. Lemma: $f \in S$ olsun. f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$$

olmasıdır.

İspat: 2.4.4. lemmasından dolayı f nin konveks olması için gerek ve yeter şart her $r \in (0,1)$ için Δ_r nin konveks olmasıdır. Bu ifade geometrik olarak ifade eder ki f dönüşümü $C_r : \left\{z = re^{i\theta},\ 0 < r < 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$ çemberlerinin yönü saat ibresinin ters yönünde olan Γ_r basit kapalı(Jordon) eğrileri üzerine dönüştürür. $w = f(z)$ de Γ_r eğrisinin teğetinin eğim açısı ω ise

$$\omega = \theta + \frac{1}{2}\pi + \arg f'(z)$$

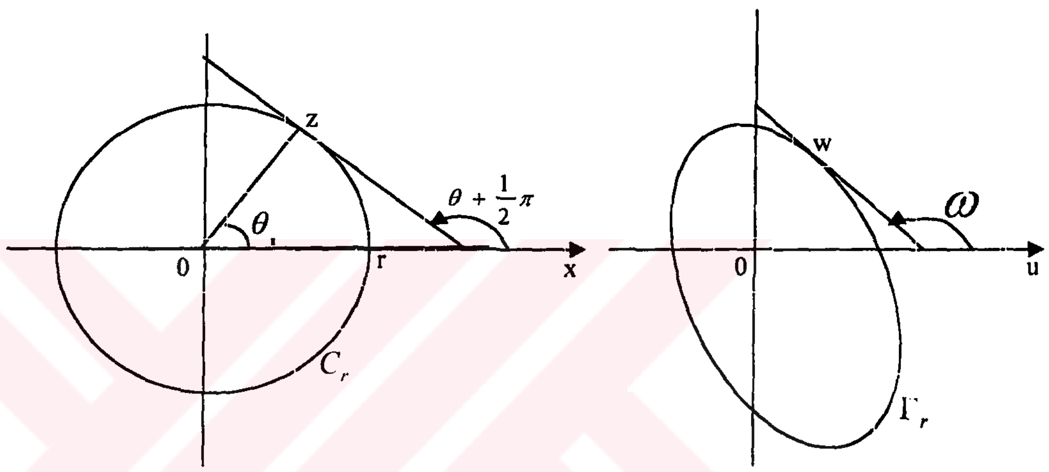
yazılır ve $\dfrac{\partial \omega}{\partial \theta} > 0$ şartı ile konveks fonksiyon karakterize edilir. Yani,

$$1+\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f'\left(re^{i\theta}\right)>0$$

veya

$$1+\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0$$

şeklindedir.



Şekil 2.4.4.

Not: Γ_r eğrisinin eğriliği T ile gösterilirse $f(D_r)$ nin konveksliği

$$T=\frac{d\omega}{ds}=\frac{d\omega/d\theta}{ds/d\theta}$$

ve $\dfrac{ds}{d\theta}>0$ olduğundan $\dfrac{d\omega}{d\theta}>0$ olma şartı $T>0$ olmasını ifade eder ve tersi de doğrudur (Gonzalez 1992).

2.4.6. Tanım (Konvekslik Yarıçapı): S sınıfındaki bütün fonksiyonlar konveks olmamasına rağmen $0<\rho\leq 1$ olacak şekilde öyle bir pozitif ρ reel sayısı vardır ki her bir $f\in S$ için D_ρ, f ile konveks bölge üzerine dönüştürülen en geniş disktir. Bu ρ sayısına f nin konvekslik yarıçapı denir.

2.4.7. Tanım (Strictly Konveks Fonksiyon): $\Phi(x)$, $-\infty < x < \infty$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve

$$\Phi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leq \frac{1}{2}[\Phi(x) + \Phi(y)]$$

oluyorsa $\Phi(x)$ fonksiyonuna konvekstir denir. $x \neq y$ için kesin eşitlik olursa Φ ye strictly konveks denir.

2.4.8. Teorem: $f \in S$ ise f dönüşümü $|z| < 2-\sqrt{3}$ diskini bir konveks bölge üzerine dönüştürür ve bütün $f \in S$ ler için sağlanan en geniş disk bu disktir.

İspat: 2.4.5. lemmanın ispatında Δ_r nin f altında görüntüsünün konveks olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

olması gerektiği gösterildi.

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re}\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

eşitsizliğinin sol tarafı kullanılarak $r^2-4r+1=0$ denkleminin en küçük pozitif kökü olan $r < 2-\sqrt{3}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 1+\frac{2r^2-4r}{1-r^2}$$
$$= \frac{1-4r+r^2}{1-r^2} > 0$$

elde ederiz.

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Koebe fonksiyonunun konvekslik yarıçapı

$$\rho = 2-\sqrt{3}$$

olduğundan bu sonuç daha da iyileştirilemez. Gerçekten bu fonksiyon için

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{1+4z+z^2}{1-z^2}$$

olup $z=-2+\sqrt{3}$ için bu ifade sıfırdır.

2.5. Konvekse Yakın Fonksiyonlar

2.5.1. Tanım (Konvekse Yakın Fonksiyon): $f \in S$ olsun. Her $z \in D$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}>0 \quad \text{ya da} \quad \left|\arg\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|<\frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde D de konveks $g(z)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna D de konvekse yakındır (close-to convex) denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir.

Konvekse yakın fonksiyonlar ilk defa 1952 yılında Kaplan tarafından takdim edildi. Konveks fonksiyonlar, starlike fonksiyonlar , konvekse yakın fonksiyonlar ve S sınıfına ait fonksiyonlar için

$$K \subset S^* \subset C \subset S$$

bağıntısı vardır.

Bir $f \in S$ fonksiyonu, $\alpha\,(0 \le \alpha < 1)$ olmak üzere $\operatorname{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha$, $(|z|<1)$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna α mertebeli starlike fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Eğer f fonksiyonu $\operatorname{Re}\left\{1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha$, $(|z|<1)$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna α mertebeli konveks fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sınıfı $K(\alpha)$ ile gösterilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde de daha sonra ki bölümlerde kullanacağımız Prawitz teoremi, Lebedev eşitsizlikleri, Goluzin eşitsizliği ve Robertson tahmini ispatsız olarak verildikten sonra lokal ortalama değer özelliği, alt harmonik fonksiyon ve Faber polinomları tanımlarına yer verilecektir.

3.1. Teorem (Prawitz Teoremi): Eğer $f \in S$ ise, bu halde $0 < p < \infty$ için

$$M_p^p(r,f) \le p\int_0^r \frac{1}{t} M_\infty^p(t,f)\,dt, \qquad 0 < r < 1$$

dır (Duren 1983).

3.2. Teorem (Lebedev Eşitsizliği): $g \in \Sigma$ ve N pozitif bir tamsayı olmak üzere $z_1, z_2, \ldots, z_N$ ve $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$, B de farklı noktaların keyfi sıralı N-lileri olsun. Bu durumda tüm λ_i ve μ_j kompleks sayıları için

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\mu_j \log\frac{g(z_i)-g(\zeta_j)}{z_i-\zeta_j}\right|^2$$

$$\le \left\{-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\bar{\lambda}_j \log\left(1-\frac{1}{z_i\bar{z}_j}\right)\right\}\left\{-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mu_i\bar{\mu}_j \log\left(1-\frac{1}{\zeta_i\bar{\zeta}_j}\right)\right\}$$

dir (Duren 1983).

3.3. Sonuç: $|z| = |\zeta| = r > 1$ olmak üzere her bir $g \in \Sigma$ için,

$$\frac{r^2-1}{r^2} \le \left|\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}\right| \le \frac{r^2}{r^2-1}$$

dir (Duren 1983).

3.4. Sonuç (Goluzin Eşitsizliği): $g \in \Sigma$ ve $z_1, z_2, ..., z_N$ noktaları da B bölgesinde farklı noktalar olsun. Bu durumda tüm $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ kompleks sayıları için

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j \log\frac{g(z_i)-g(z_j)}{z_i - z_j}\right| \leq -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\bar{\lambda}_j \log(1-\frac{1}{z_i\bar{z}_j})$$

yazılır (Duren 1983).

3.5. Tanım (Lokal Ortalama Değer Özelliği): B bir bölge, $z_0 \in B$ ve u da bu bölgede tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $z_0 \in B$ noktasına, tüm $r \leq \rho$ yarıçapları için

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

olacak biçimde $\rho > 0$ yarıçapı karşılık gelirse, u fonksiyonu lokal ortalama değer özelliğine sahiptir denir.

3.6. Tanım (Alt Harmonik Fonksiyon): Eğer bir u fonksiyonu sürekli ve bir B bölgesinde lokal ortalama değer özelliğine sahipse bu u fonksiyonuna B bölgesinde alt harmoniktir denir.

3.7. Tanım (Lokal Alt Ortalama Değer Özelliği): Bir u fonksiyonu, eğer her $r > 0$ sayıları ve her $z_0 \in B$ için

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

oluyorsa lokal alt ortalama değer özelliğine sahiptir denir.

Robertson Tahmini: $h(z) = [f(z^2)]^{\frac{1}{2}} = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + ...$ tek ünivalent fonksiyon olsun. $n = 2, 3, ...$ sayıları için

$$1 + |c_3|^2 + |c_5|^2 + ... + |c_{2n-1}|^2 \leq n$$

yazılır. Buna Robertson tahmini denir. Bu eşitsizlik $n=2$ için $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğine denktir (Duren 1983).

3.8. Tanım (Faber Polinomları): $g \in \Sigma$ olsun.

∞ un herhangi bir komşuluğundaki tüm ζ ler için geçerli olan

$$\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)-w} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(w)\zeta^{-n} \tag{3.1}$$

açılımını göz önüne alalım. Buradaki

$$F_n(w) = w^n + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} w^{n-k}$$

fonksiyonuna, g nin n. Faber polinomu denir.

Özellikle,

$$F_0(w) = 1$$
$$F_1(w) = w - b_0 w$$
$$F_2(w) = w^2 - 2b_0 w + (b_0^2 - 2b_1)$$
$$F_3(w) = w^3 - 3b_0 w^2 + (3b_0^2 - 3b_1)w + (b_0^3 + 3b_1 b_0 - 3b_2)$$

formülleri vardır (Duren 1983). Şimdi, g ünivalent olduğundan

$$\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)} - \frac{\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} z^{-k} \zeta^{-n} \tag{3.2}$$

fonksiyonu $|\zeta| > 1$ ve $|z| > 1$ için analitik olduğu öne sürülür. (3.1) den dolayı (3.2) bağıntısı

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n((g(z))\zeta^{-n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{z^n + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} z^{-k}\right\}\zeta^{-n}$$

ifadesini verir. Böylece Faber polinomları

$$F_n(g(z)) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} z^{-k}, \quad n = 1,2,\ldots$$

dır. Bu β_{nk} katsayıları g nin Grunsky katsayıları olarak bilinir.

$z=\infty$ noktasının bir komşuluğunda

$$f(z)=z+c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\dots \tag{3.3}$$

biçiminde açılıma sahip olan $f(z)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer $F_m(t)$, t değişkenine bağlı m. dereceden bir polinom ve $z=\infty$ noktasında

$$F_m\left(f(z)\right)=z^m+\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}z^{-n} \tag{3.4}$$

açılımına sahipse $F_m(t)$ fonksiyonuna $f(z)$ ye göre m. dereceden bir Faber polinomu denir. Tüm Faber polinomları için genel bir fonksiyon aşağıdaki biçimde inşa edilir. İlk olarak ∞ noktasının bir komşuluğundaki z ve w değerleri için analitik olan

$$U(z,w)=\log\frac{f(z)-f(w)}{z-w} \tag{3.5}$$

foksiyonunu gözönüne alalım. Hem z ve hem de w değeri sonsuza gittiğinde $U(z,w)\to 0$ yakınsayacak biçimde logaritmanın esas dalını seçelim. Bu sonuç (3.3) ifadesinde açık olarak görülür. Böylece iki kompleks değişkenli $U(z,w)$ fonksiyonu için

$$U(z,w)=\log\left[f(z)-f(w)\right]-\log(z-w)=\sum_{m,n=1}^{\infty}d_{mn}z^{-m}z^{-n} \tag{3.6}$$

yazılır. Burada d_{mn} g fonksiyonunun Grunsky katsayılarıdır.

Eğer tekrar $z=\infty$ noktasının komşuluğunda

$$\log\frac{f(z)-t}{z}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}F_m(t)z^{-m} \tag{3.7}$$

açılımını inşa edersek, yine burada $F_m(t)$ fonksiyonu bir Faber polinomudur. (3.6) ve (3.7) ifadelerinden,

$$\begin{aligned}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}F_m(t)z^{-m}&=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}F_m(f(w))z^{-m}=\log\frac{f(z)-f(w)}{z-w}+\log(1-\frac{w}{z})\\&=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(w^m-\sum_{n=1}^{\infty}md_{mn}w^{-n})z^{-m}\end{aligned} \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir. Burada aynı kuvvetli terimler karşılaştırılırsa.

$$F_m(f(w)) = w^m - \sum_{n=1}^{\infty} m d_{mn} w^{-n} \tag{3.9}$$

yazılır. Görüldüğü gibi $F_m(t)$ katsayıları Faber polinomlarıdır. (3.4) ve (3.9) ifadeleri karşılaştırılırsa,

$$c_{mn} = -m d_{mn} \tag{3.10}$$

elde edilir. Burada $U(z,w)$ eşitliğinin z ve w değerlerinde simetri olmasından dolayı

$$d_{mn} = d_{nm} \tag{3.11}$$

yazılır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Grunsky eşitsizlikleri, bir ünivalent fonksiyonun 4.4. kesimde tanımlayacağımız logaritmik katsayıları hakkında detaylı bilgi sağlayan eşitsizliklerdir. 1960 yıllarında I. M. Milin sistematik olarak, bir ünivalent fonksiyonun katsayıları hakkında detaylı bilgi elde etmek için, bu eşitsizliklerde exponensiyel fikrini geliştirdi. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serisi verildiğinde $e^{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$ şeklindeki ifadeye $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serisinin exponensiyeli adını vereceğiz. Verilen orijinal seri ile o serinin exponensiyelinin katsayıları arasındaki bağıntıları veren yöntem, Lebedev-Milin eşitsizlikleri gibi bazı genel eşitsizliklere bağlıdır.

Bu bölümde tek ünivalent fonksiyonun ve S sınıfındaki bir ünivalent fonksiyonun katsayıları için bazı tahminler geliştirildi.

4.1. Kuvvet Serilerinin Exponensiyeli

Bir kuvvet serisinin exponensiyelindeki katsayılar orijinal kuvvet serinin katsayıları ile ifade edilmesine rağmen oldukça karmaşıktırlar. Bu bölümde orijinal serinin katsayıları yardımı ile exponensiyel serinin katsayılarını tahmin eden Lebedev ve Milin'e ait olan üç genel eşitsizlik incelenecektir.

$\varphi(0) = 0$ olmak üzere

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

yakınsaklık yarıçapı pozitif bir reel sayı olan keyfi bir kuvvet serisi olsun. Yukarıda bahsedildiği gibi $\psi(z)$ serisinin exponensiyeli

$$\psi(z) = e^{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$$

olarak yazılır. Şimdi Lebedev-Milin eşitsizliklerini verelim.

4.1.1. Birinci Lebedev-Milin Eşitsizliği: $\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2 < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 \le \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2\right\} \tag{4.1}$$

olur. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $|\gamma| < 1$ şartını sağlayan γ kompleks sayısı için $\alpha_k = \dfrac{\gamma^k}{k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ olmasıdır.

İspat: $\psi(z) = e^{\varphi(z)}$ eşitliğinin her iki yanının diferensiyeli alınırsa, $\psi'(z) = \psi(z)\varphi'(z)$ elde edilir. Bu eşitlikte katsayıların karşılaştırılmasıyla,

$$\beta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\alpha_{n-k}\beta_k, \quad \beta_0 = 1 \tag{4.2}$$

olur. Böylece Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$|\beta_n|^2 \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 |\alpha_{n-k}|^2 |\beta_k|^2 \tag{4.3}$$

yazılır. Şimdi $a_k = k|\alpha_k|^2$ olsun ve

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)a_{n-k}b_k, \quad b_0 = 1 \tag{4.4}$$

olarak tanımlansın. (4.3) eşitsizliğinden dolayı tümevarımla $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $|\beta_n|^2 \le b_n$ olduğu açıktır. Diğer yandan (4.2) ve (4.4) ifadeleri karşılaştırılırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right\}$$

olduğu görülür. $a_k \ge 0$ ve $b_k \ge 0$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right\} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2\right\}$$

olur. Bu da (4.1) eşitsizliğidir. Eşitlik sadece tüm k sayıları için $|\beta_k|^2 = b_k$ olduğunda ortaya çıkar. Bu da n nin her değeri için (4.3) de eşitlik olmasını gerektirir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde, eşitlik için gerekli koşullar hatırlanırsa, $n=1,2,3,...$ için λ_n kompleks sabitler olmak üzere

$$(n-k)\alpha_{n-k}\beta_k = \lambda_n, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1 \tag{4.5}$$

yazılır. Özellikle $\beta_0 = 1$ olduğundan $n\alpha_n = \lambda_n$ dir. (4.5) bağıntısı (4.2) de kullanılırsa, $\beta_n = \lambda_n$ eşitliği elde edilir. (4.5) kullanılarak $n=2,3,...$ olmak üzere tümevarımla $\lambda_n = \lambda_1^n$ sonucu elde edilir. $\gamma = \lambda_1$ alındığında bu $\alpha_n = \dfrac{\gamma^n}{n}$ ve $\beta_n = \lambda^n$ ifadesini verir.

Bir başka ifadeyle eşitlik sadece

$$\varphi(z) = -\log(1-\gamma z); \qquad \psi(z) = (1-\gamma z)^{-1}$$

olması durumunda ortaya çıkar. $\sum k|\alpha_k| < \infty$ olmasını temin etmek için $|\gamma| < 1$ şartına ihtiyaç duyulur.

4.1.2. İkinci Lebedev-Milin Eşitsizliği: $n = 1,2,3,...$ için

$$\sum_{k=0}^{n}|\beta_k|^2 \le (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\} \tag{4.6}$$

eşitsizliği yazılır. n bir tamsayı olmak üzere eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $\gamma \in \mathbb{C}$ ve $|\gamma| = 1$ için $\alpha_k = \dfrac{\gamma^k}{k}$, $k = 1,2,3,...,n$ olmasıdır.

İspat: Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin (4.2) ifadesine uygulanmasıyla

$$n^2|\beta_n|^2 \le \sum_{k=1}^{n}k^2|\alpha_k|^2\sum_{k=0}^{n-1}|\beta_k|^2 \tag{4.7}$$

elde edilir.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}k^2|\alpha_k|^2; \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n}|\beta_k|^2 \tag{4.8}$$

diyelim. Bu halde (4.7) ifadesinden

$$B_n = B_{n-1} + |\beta_n|^2 \leq \left\{1 + \frac{1}{n^2} A_n\right\} B_{n-1} = \frac{n+1}{n}\left\{1 + \frac{A_n - n}{n(n+1)}\right\} B_{n-1} \leq \frac{n+1}{n} \exp\left\{\frac{A_n - n}{n(n+1)}\right\} B_{n-1}$$

dır. $B_{n-1}, B_{n-2}, B_{n-3}, \ldots$ için karşılık gelen eşitsizlikler takdim edilerek

$$B_n \leq (n+1)\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k - k}{k(k+1)}\right\} = (n+1)\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right\}$$

elde edilir. Fakat

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

olduğundan dolayı

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \frac{1}{k(k+1)} = A_n s_n - \sum_{k=1}^{n} k^2 |\alpha_k|^2 s_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 |\alpha_k|^2$$

dır. Böylece,

$$B_n \leq (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\} = (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Eğer bazı n sayıları için (4.6) de eşitlik olursa, $1 + x \leq e^x$ ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerinde eşitlik olmalıdır. Böylece $k = 1, 2, \ldots, n$ için $A_k = k$ ve $m = 1, 2, \ldots, n$ ve $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ olmak üzere bazı kompleks λ_m sabitleri için

$$\beta_k = \lambda_m (m-k) \overline{\alpha}_{m-k} \tag{4.9}$$

yazılır. (4.9) ifadesi (4.2) de kullanılırsa,

$$m\beta_m = \lambda_m A_m = m\lambda_m$$

ya da $m = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $\beta_m = \lambda_m$ olur. $\beta_0 = 1$ olduğundan (4.9) bağıntısı da

$$\lambda_m m \overline{\alpha}_m = 1, \quad m = 1, 2, \ldots, n;$$

ve

$$\lambda_1 = \beta_1 = \lambda_m (m-1) \overline{\alpha}_{m-1} = \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}$$

olur. Böylece, $\beta_m = \lambda_m = \lambda_1^m$, ve $m\alpha_m = \overline{\lambda}_1^{-m}$, $m = 1, 2, \ldots, n$ bulunur. Sonuç olarak her k için $A_k = k$ olduğundan $|\lambda_1| = 1$ yazılır.

4.1.3. Üçüncü Lebedev-Milin Eşitsizliği: $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$|\beta_n|^2 \leq \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k})\right\} \tag{4.10}$$

yazılır. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $\gamma \in \mathbb{C}$ ve $|\gamma| = 1$ için $\alpha_k = \frac{\gamma^k}{k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ olmasıdır.

İspat: 2. Lebedev-Milin eşitsizliği (4.7) ve (4.8) ifadelerinde kullanılırsa,

$$|\beta_n|^2 \leq e\frac{A_n}{n}\exp\left\{-\frac{A_n}{n} + \sum_{k=1}^{n}(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k})\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.10) ifadesini elde etmek için $x = \frac{A_n}{n}$ olmak üzere $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$ eşitsizliği kullanılır. Eğer uygun n sayıları için eşitlik sağlanırsa, bu halde aynı n için (4.7) ifadesi ve $n-1$ sayısı için (4.6) ifadesindeki eşitlik sağlanmalıdır. Bu da yine $|\gamma| = 1$ olmak üzere $\alpha_k = \frac{\gamma^k}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ olmasını gerektirir.

Lebedev-Milin eşitsizlikleri ilginç bir geçmişe sahiptir. İlk eşitsizlik üslü bir fonksiyonla pek az kısmının ispatı yapılmış Lebedev ve Milin (1965)'in kısa bir makalesinde yayımlandı. Daha sonraları Milin (1971, 1977) de incelediği gibi ispat, negatif katsayılara sahip olmayan üstel fonksiyonlar için geçerlidir. Yukarıda verilen ispat ilk olarak Clunie ve Pommerenke'nin konferans notlarında görüldü (Pommerenke 1969). Milin, Lebedev ile ortaklaşa elde etmiş oldukları ikinci ve üçüncü eşitsizlikleri ispatsız ve açıklamasız sundu (Milin 1967). Onların yapmış olduğu ispatlar birkaç yıl sonra Milin'in kitaplarında yayımlandı (Milin 1971, 1977). Bu arada Aharonov (1971) bunlardan bağımsız olarak yukarıda verilen ispatları yaptı.

4.2. Grunsky Eşitsizliklerinin Yeniden Formülleştirilmesi

Burada Peter L. Duren'in vermiş olduğu Grunsky eşitsizliklerinin belli uygulamalar için uygun form ve bazı özel durumlarını tanıtacağız. Her $g \in \Sigma$ için

$$\log \frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{nk}\zeta^{-k}z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\frac{1}{\zeta})z^{-n} \qquad (4.11)$$

yazılır. Burada $A_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{nk}w^k$, $|w|<1$ dır. Güçlü Grunsky eşitsizliklerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{nk}\lambda_k\right|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\lambda_n|^2$$

biçiminde olduğunu hatırlayalım (Duren, 1983). $\lambda_k = w^k$ olarak seçilmesiyle bu eşitsizlik

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n(w)|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|w|^{2n} = -\log(1-|w|^2) \qquad (4.12)$$

biçimini alır. Burada amacımız

$$A^{(\nu)}(w) = \sum_{k=\nu}^{\infty}\gamma_{nk}k(k-1)...(k-\nu+1)w^{k-\nu}, \qquad \nu = 1,2, \ldots$$

ν. türev için de benzer bir eşitsizlik bulmaktır.

$$\lambda_k = \begin{cases} 0, & k<\nu; \\ k(k-1)...(k-\nu+1)w^{k-\nu}, & k \ge \nu \end{cases}$$

olarak alalım. Bu halde Grunsky eşitsizliklerinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n^{(\nu)}(w)|^2 \le \sum_{k=\nu}^{\infty}\frac{1}{k}k^2(k-1)^2...(k-\nu+1)^2|w|^{2(k-\nu)} = -\left[\frac{\partial^{2\nu}}{\partial w^{\nu}\partial \bar{z}^{\nu}}\log(1-w\bar{z})\right]_{z=w}$$

elde edilir. Özellikle ilk türev

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|A'_n(w)|^2 \le (1-|w|^2)^{-2} \qquad (4.13)$$

eşitsizliğini sağlar.

Şimdi Grunsky eşitsizliklerinin exponensiyel biçimini oluşturabiliriz. $|z|<1$ ve $|w|<1$ için

$$\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n(w)z^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(w)z^n \tag{4.14}$$

olsun. Bu durumda 1. Lebedev-Milin eşitsizliğinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} |B_n(w)|^2 \le \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n(w)|^2\right\}$$

yazılır. Bu ifade (4.12) eşitsizliği ile birleştirilerek $|w|<1$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} |B_n(w)|^2 \le (1-|w|^2)^{-1} \tag{4.15}$$

elde edilir. A_n fonksiyonları Faber polinomları ile yakın ilişkilidir. Bir $g \in \Sigma$ fonksiyonunun n. dereceden F_n Faber polinomu

$$\frac{g'(z)}{g(z)-w} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(w) z^{-n-1} \tag{4.16}$$

eşitsizliği ile elde edildiğini biliyoruz (Duren 1983). Bu ifadenin z değişkenine göre integrali alınırsa,

$$\log\frac{z}{g(z)-w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F_n(w) z^{-n} \tag{4.17}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin her iki yanı ∞ noktasında sıfır olduğundan integrasyon sabitinin doğru bir şekilde seçilmesine dikkat edilmelidir. Diğer yandan A_n fonksiyonları (4.11) tanımı ile

$$\log\frac{z}{g(z)-g(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{1}{\zeta}\right) z^{-n} + \log\frac{z}{z-\zeta}$$

olarak yazılır. Bu ifade (4.17) ile karşılaştırılırsa,

$$F_n(g(\zeta)) = nA_n\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \zeta^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.18}$$

elde edilir. Faber polinomları ve B_n fonksiyonları arasında da yakın ilişki vardır. (4.11) ve (4.14) den dolayı $|z|>1$, $|\zeta|>1$ olmak üzere

$$\frac{z-\zeta}{g(z)-g(\zeta)}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\frac{1}{\zeta})z^{-n} \tag{4.19}$$

yazılır. Diğer yandan (4.17) ifadesinin w ya göre diferensiyelinden

$$\frac{1}{g(z)-w}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}F_n'(w)z^{-n} \tag{4.20}$$

eşitliği yazılır. Bu ifade (4.19) ile birleştirilerek

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}F'_n(g(\zeta))z^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\zeta^k z^{-k-1}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\frac{1}{\zeta})z^{-n}$$

bulunur. Yukarıdaki son eşitlikte katsayıların karşılaştırılmasından

$$F'_n(g(\zeta))=n\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{n-k-1}B_k(\frac{1}{\zeta}) \tag{4.21}$$

bağıntısı elde edilir.

4.3. *n*. Katsayı Tahmini

Şimdi S sınıfındaki tüm

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$$

fonksiyonları arasında a_n n. katsayısı için kesin sınır bulma problemine dönelim. $|a_n|<en$ olduğunu Littlewood teoreminden (Duren 1983) biliyoruz. Bu eşitsizlik kullanılarak , kaba bir tahmin olarak

$$M_1(r,f)\le r(1-r)^{-1} \tag{4.22}$$

bulunur. (4.22) ifadesi

$$M_1(r,f)\le M_1(r,k)=r(1-r^2)^{-1}$$

kesin tahmini ile yer değiştirse bile yöntem, $|a_n|\le(\frac{e}{2})n$ den daha iyi bir sonuç veremez. Burada k Koebe fonksiyonudur.

1965 yılında $\frac{e}{2}$ engelini ilk olarak geçen Milin (1965, 1971, 1977) oldu. Onun hareket noktası Cauchy formülü değil, ancak $f \in S$ fonksiyonunun $n.$ katsayısı için Faber polinomları cinsinden yeni bir temsilidir. $g(z) = \dfrac{1}{f(\frac{1}{z})}$ fonksiyonu gözönüne alınarak

$$a_n = \frac{1}{n} F'_n(0), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.23}$$

elde edilir. Burada $g \in \Sigma$ ve F_n g nin $n.$ Faber polinomudur.

4.3.1. Teorem (Milin Teoremi): Her $f \in S$ için

$$|a_n| < 1.243n, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

olur.

İspat: İddia a_n için (4.23) formülüne dayanır. $F'_n(0)$ ifadesini tahmin etmek için Cauchy-Schwarz eşitsizliği (4.21) ifadesine uygulanır ve exponensiyel biçimde yazılmış Grunsky eşitsizliği kullanılırsa

$$|F'_n(g(\zeta))|^2 \le n^2 \sum_{k=0}^{n-1} |\zeta|^{2k} \sum_{k=0}^{n-1} \left| B_k(\frac{1}{\zeta}) \right|^2 \le n^2 \frac{|\zeta|^{2n} - 1}{|\zeta|^2 - 1} \cdot \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - 1}, \qquad |\zeta| > 1 \tag{4.24}$$

elde edilir. Fakat g sıfır değerini almadığından $|\zeta| = \rho > 1$ çemberinin g altındaki görüntüsü, orijini saran bir C_ρ Jordan eğrisidir. Böylece maksimum modül prensibinden

$$|F'_n(0)| \le \max_{w \in C_\rho} |F'_n(w)| = \max_{|\zeta| = \rho} |F'_n(g(\zeta))|$$

elde edilir. Bununla (4.24) birleştirilir ve (4.23) temsili kullanılırsa $\rho > 1$ olmak üzere

$$|a_n| \le \frac{\rho}{\rho^2 - 1} (\rho^{2n} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

sonucu bulunur. En uygun durum için bu son ifade de ρ sayısını mümkün olduğunca küçük seçmeliyiz.

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2t} = 1 + \frac{1}{3!}t^2 + \ldots > 1, \quad t > 0$$

olduğundan son eşitsizlikte $\rho = e^{\frac{x}{2n}}$ yazılırsa her $x > 0$ için

$$|a_n| \leq \frac{e^{\frac{x}{2n}}}{e^{\frac{x}{n}} - 1}(e^x - 1)^{\frac{1}{2}} < \frac{(e^x - 1)^{\frac{1}{2}}}{x} n$$

elde edilir. Diferensiyel gösterir ki $x^{-1}(e^x - 1)^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun $x = \log 2 - \log(2 - x)$ olduğu noktada bir minimuma sahiptir. Bu denklemin çözümü yaklaşık olarak $x = 1.594$ dür. Bu fonksiyon yüzeysel olarak 1.243 den daha küçük bir değere sahiptir. Bu da Milin teoremini ispatlar.

4.4. Logaritmik Katsayılar

S sınıfındaki her bir f fonksiyona karşılık gelen γ_n logaritmik katsayıları

$$\log \frac{f(z)}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n, \quad |z| < 1$$

eşitliği ile tanımlanır. Grunsky eşitsizlikleri logaritmik katsayıları tahmin için doğal bir yöntem sağlar. Lebedev-Milin eşitsizlikleri vasıtasıyla bu sınırlar, f nin katsayıları üzerindeki sınırlara dönüştürülebilir.

$k(z) = z(1-z)^{-2}$ ile gösterilen Koebe fonksiyonunun logaritmik katsayıları $\gamma_n = \frac{1}{n}$ dir. Eğer $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S$ ise $\gamma_1 = \frac{1}{2}a_2$ dir (Girela 1988). Starlike fonksiyonlar için $|\gamma_n| \leq \frac{1}{n}$ eşitsizliği sağlanır fakat tüm S sınıfı için bu eşitsizlik sağlanmayabilir. $n \geq 2$ için close-to convex fonksiyonlarda bu eşitsizliğin yanlış olduğunu gösterdi (Girela (2000). Bununla birlikte I. M. Milin (1967, 1971, 1977) γ_n nin $\frac{1}{n}$ den büyük olamayacağını gösterdi (Duren 1983). Bu sonuç Milin lemması olarak bilinir.

Milin Lemması: $\delta < 0.312$ sabit sayısı için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sup_{f \in S} \sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \delta, \quad n = 1, 2, ...$$

yazılır.

İspat: Alt tahmin f nin Koebe fonksiyonu olarak seçilmesiyle $\gamma_k = \frac{1}{k}$ alınarak elde edilir. Üst tahmin o kadar basit değildir. İlk olarak (4.17) den dolayı

$$2\gamma_n = \frac{1}{n} F_n(0) \tag{4.25}$$

olduğu bilinir. Burada F_n, $g(z) = \dfrac{1}{f(\frac{1}{z})}$ fonksiyonunun n. Faber polinomudur. F_n ve A_n arasındaki (4.18) bağıntısını gözönüne alır ve

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

olduğu kullanılırsa

$$\frac{1}{n}|F(g_n(\zeta))|^2 \leq 2n\left|A_n(\frac{1}{\zeta})\right|^2 + \frac{2}{n}|\zeta|^{2n} \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.25) eşitliğinden

$$4\sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}|F_k(0)|^2$$

olur. Diğer yandan g fonksiyonu her $|z| = \rho > 1$ çemberi orijini çevreleyen bir C_ρ Jordan eğrisi üzerine dönüştürür ve

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}|F_k(w)|^2$$

fonksiyonu C_ρ Jordan eğrisi içinde alt harmoniktir. Alt harmonik fonksiyonlar için maksimum prensibi uygulanırsa

$$4\sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 \leq \max_{w \in C_\rho} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}|F_k(w)|^2 \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.26) ile (4.27) birleştirilir ve (4.12) formundaki Grunsky eşitsizliği kullanılırsa $\rho > 1$ olmak üzere

$$2\sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\rho^{2k} - \log(1-\rho^{-2}) \tag{4.28}$$

elde edilir.

Son adımda (4.28) ifadesinin sağ tarafını mümkün olduğunca küçük yapabilmek için ρ özel olarak seçilmelidir. Fakat bu o kadar kolay değildir. Bu sayıyı tahmin yerine $\gamma = 0.577...$ Euler sabiti olmak üzere

$$\log(n+\frac{1}{2}) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma \tag{4.29}$$

ve

$$m\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} < (n+\frac{1}{2})^m, \quad m = 1,2,... \tag{4.30}$$

eşitsizliklerini kullanacağız. (4.29) ve (4.30) ifadelerinin ispatlarını daha sonraya bırakarak, onları Milin yardımcı teoreminin ispatını tamamlamak için kullanacağız. (4.28) eşitsizliğinde $t > 0$ olmak üzere

$$\rho^2 = e^t \text{ ve } t = \frac{2x}{2n+1}$$

alınır ve (4.29) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} -\log(1-\rho^{-2}) &= \frac{t}{2} - \log(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}) < \frac{t}{2} - \log t = \frac{x}{2n+1} - \log x + \log(n+\frac{1}{2}) \\ &< \frac{x}{2n+1} - \log x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma \end{aligned} \tag{4.31}$$

bulunur. (4.30) dan dolayı (4.28) deki diğer terim

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\rho^{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(kt)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(t)^m \sum_{k=1}^{n} k^{m-1} &< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + nt + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!\,m} t^m (n+\frac{1}{2})^m \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{2nx}{2n+1} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m!\,m} \end{aligned} \tag{4.32}$$

biçimindedir. (4.31) ve (4.32) ifadeleri toplanırsa (4.28) in sağ yanının

$$G_n(x) = \int_0^x \frac{e^\zeta - 1}{\zeta} d\zeta - \log x + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma$$

ifadesinden daha küçük olduğu görülür. Fakat G_n fonksiyonu minimum değerini

$$G'_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

eşitliğini sağlayan $x = \log 2$ de alır. Böylece (4.28) eşitsizliğinden

$$\sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 \le \frac{1}{2} G_n(\log 2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \delta$$

yazılır. Burada

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^{\log 2} \frac{e^\zeta - 1}{\zeta} d\zeta - \frac{1}{2} \log\log 2 - \frac{\gamma}{2} < 0.312$$

dir. Bu (4.29) ve (4.30) eşitsizliklerinin gerçeklenmeleri hariç, Milin teoreminin ispatını tamamlar.

(4.29) eşitsizliği

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n + \frac{1}{2})$$

nin γ ya azalarak yaklaştığı gösterilerek ispatlanır. Aslında $y_n - y_{n-1} = \psi(n)$ olup, burada

$$\psi(x) = \frac{1}{x} - \log \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}}$$

biçimindedir. Hesap yapılarak $\psi(1) < 0$, $\psi'(x) > 0$ ve $x \to +\infty$ giderken $\psi(x) \to 0$ olduğu gösterilebilir. Böylece $n = 2, 3, \ldots$ olmak üzere $y_n < y_{n-1}$ olması (4.29) ifadesini ispatlar. (4.30) ifadesinin doğruluğu n üzerinde tümevarımla gösterilebilir. m üzerinde tümevarımla görüldüğü gibi $n = 1$ için doğrudur. Eğer (4.30) ifadesi herhangi bir $(n-1)$ tam sayısı için doğru ise binom açılımı

$$(n + \frac{1}{2})^m - (n - \frac{1}{2})^m > mn^{m-1}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} < \frac{1}{m}(n - \frac{1}{2})^m + n^{m-1} < \frac{1}{m}(n + \frac{1}{2})^m$$

yazılır. Bu da (4.30) ifadesinin doğruluğunu gösterir.

Milin lemmasında ki δ sayısı Milin sabiti olarak bilinir. Milin lemması

$$h(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots, \quad |z| < 1$$

biçimindeki tek ünivalent fonksiyonların katsayıları için geliştirilmiş genel bir sınır elde etmek için uygulanabilir. Littlewood ve Paley'in çalışması tüm n sayıları için $|c_n| \le 14$ tahminini verir. Sınır 1 e indirgenemez. Fakat Levin (1935) tarafından 3.39 a ve Kung Sun (1955) tarafından 2.54 değerine indirgendi. I. M. Milin (1967, 1971, 1977) onu 1.17 ye ve V. I. Milin (1980) 1.14 'e indirgendi. Bugün bilinen en iyi değer de bu değerdir.

4.4.1. Teorem: Her $h \in S$ tek fonksiyonu için

$$|c_n| < e^{\frac{\delta}{2}} < 1.17 \qquad n = 3,5,7,\dots$$

yazılır. Burada δ Milin sabitidir.

İspat: Her bir tek ünivalent h fonksiyonu

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)}, \qquad f \in S$$

biçiminde yazılır. Böylece,

$$\log \frac{h(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \log \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$$

olur. Bir başka ifadeyle

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^n = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n \right\}, \quad c_1 = 1 \tag{4.33}$$

dır. 3. Lebedev-Milin eşitsizliğinden

$$|c_{2n+1}|^2 \le \exp\left\{ k \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right\} \tag{4.34}$$

olur. Milin lemmasından

$$|c_{2n+1}| \le e^{\frac{\delta}{2}} < e^{0.156} < 1.17, \quad n = 1,2,\dots$$

yazılır.

δ Milin sabitinin mümkün olan en iyi değerini bulma ilginç bir açık problemdir. δ sayısının Milin tahmini, (4.28) eşitsizliğinden en iyi elde edilebilir. Teorem 4.4.1 e göre δ sıfıra indirgenemez. Yine de I. M. Milin (1971, 1977) $\delta = 0$ olduğunu iddia eden aşağıdaki önereyi sundu.

Milin Tahmini: Her $f \in S$ için

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}) \le 0, \quad n = 1,2,3,...$$

olur.

(4.33) ifadesi ve ikinci Lebedev-Milin eşitsizliğinden dolayı Milin tahmini

$$\sum_{k=0}^{n}|c_{2k+1}|^2 \le n+1$$

biçimindeki Robertson tahminini gerektirir. Bu da $|a_{n+1}| \le n+1$ biçimindeki Bieberbach tahminini gerektirir. Milin tahmininin doğruluğu $\gamma_1 = \frac{1}{2}a_2$ olduğundan $n=1$ için açıktır. Grinspan (1972) $n=2$ ve $n=3$ için ispatladı. Milin yönteminde yapılacak basit bir değişiklikle yeter derecede küçük ikinci katsayılı fonksiyonlar için Bieberbach tahminini kurmak mümkündür. Aşağıdaki sonuç Aharonov (1970)'a aittir.

4.4.2. Teorem: Eğer $f \in S$ ve $|a_2| < 0.867$ ise, $n = 3,4,5,...$ olmak üzere $|a_n| < n$ dir.

İspat: Milin lemmasının ispatı, (4.28) ifadesinin yerine

$$2\sum_{k=2}^{n}k|\gamma_k|^2 \le \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\rho^{2k} - \log(1-\rho^{-2}) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\rho^{2k} - \log(1-\rho^{-2}) - 1$$

eşitsizliği alınarak ispatlanabilir. Bu son ifadeyi minimize etmek için ρ seçilirse Milin lemmasının ispatındaki gibi $2\gamma_1 = a_2$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n}k|\gamma_k|^2 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \delta - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}|a_2|^2$$

bulunur. (4.34) eşitsizliğinden dolayı

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$$

fonksiyonunun katsayıları için

$$|c_{2n+1}|^2 < \exp\left\{\delta - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}|a_2|^2\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta < 0.312$ olduğundan eğer $|a_2| < 0.867$ ise, her $n > 0$ için nümerik bir hesapla $|c_{2n+1}| < 1$ olduğu görülür.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, 1960'lı yıllarda I. M. Milin tarafından geliştirilen, bir ünivalent fonksiyonun katsayıları hakkında detaylı bilgi elde etmek için kullanılan Grunsky eşitsizlikleri ve bu eşitsizliklerin exponensiyeli incelendi. Dolayısıyla bu eşitsizliklerin S sınıfındaki her bir fonksiyona karşılık gelen γ_n logaritmik katsayıları hakkında detaylı bilgi veren eşitsizlikler olduğu görüldü. Daha sonra

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklindeki Koebe fonksiyonu için logaritmik katsayıların $\gamma_n = \frac{1}{n}$,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S$$

şeklindeki fonksiyonların logaritmik katsayıları için de $\gamma_1 = \frac{1}{2} a_2$ eşitliklerinin mevcut olduğu görüldü.

Yine S sınıfında olan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonları arasında a_n n. katsayısı için kesin sınır bulma problemleri incelendi.

Ayrıca,

$$h(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots \qquad ,|z| < 1$$

şeklindeki fonksiyonlarda tüm n sayıları için sınır elde etme çalışması Littlewood-Paley tarafından $|c_n| \le 14$ ile başlanıp I. M. Milin (1980) ile bu sınırın 1.14'e indirgendiği görüldü. Bugün bilinen en iyi değerde bu değerdir. Milin lemması bu $h(z)$ tek ünivalent fonksiyonların katsayıları için geliştirilmiş genel bir sınır elde etmek için kullanılabilir.

KAYNAKLAR

Aharonov. D., 1970. Proof of the Bieberbach conjecture for a certain class of univalent functions., Israel J. Math. 8, 103-104.

Aharonov, D., 1971. Special Topics in Univalent Functions. Lecture Notes, Univ of Maryland.

Aharonov, D., 1973. On the Bieberbach conjecture for functions with a small second coefficient., Israel J. Math. 15, 137-139.

Balcı, M., 1985. Matematik Analiz, I.Cilt. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, No:142, Ankara.

Clunie, J., and Pommerenke, C.H., 1966. On the coefficients of close -to convex ünivalent functions., J. London Math. Soc., 41, 161-165.

Dönmez, A., 1985. Karmaşık Fonksiyonlar Kuramı., Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Yayın No:10, Diyarbakır.

Duren, P.L., 1983. Ünivalent Functions., Sipringer- Verlag, New York.

Duren, P.L., and McLaughlin, R., 1972. Two-slit mappings and the Marx conjecture. *Michigan Math. J.*, 19, 267-273.

Girela, D., 2000. Logaritmic Coefficients of Univalent Functions., Annales Academia Scientiarum Fennicae Math., Vol. 25, 337-350.

Gonzalez, M.O., 1992. Classiccal Complex Analysis, Marcel Deccer Inc., Madison Avenue, New York.

Gonzalez, M.O., 1992. Complex Analysis Selected Topics, Marcel Deccer Inc., Madison Avenue, New York.

Kadıoğlu, E., – Kamali, M., 1998. Genel Matematik, 419-431., Erzurum.

Kung Sun, 1955. Contributions to the theory of schlicht functions. II. The coefficient problem . Sci. Sinica, 4, 359-373.

Lebedev, N.A. and Milin, I.M., 1965. An inequality. Vestnik Leningrad. Univ., 20, n0. 19, 157-158.

Levin, V.I., 1935. Some remarks on the coefficients of schlich functions. Proc. London Math. Soc., 39, 467-480.

Milin, I.M., 1965. Estimation of coefficients of univalent functions., Dokl. Akad. Nauk SSSR, 160, 769-771(in Russian)= Soviet Math. Dokl., 6, 196-198.

Milin, I.M., 1967. On the coefficients of ünivalent functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 176, 1015-1018 (in Russian)= Soviet Math. Dokl., 8, 1255-1258.

Milin, I.M., 1970. Hayman's regularity theorem for coefficients of ünivalent functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 192, 738-741 (in Russian)=Soviet Math. Dokl., 11, 724-728.

Milin, I.M., 1971. Univalent functions and Orthonormal systems. Izdat 'Nauka' : Moscow, 1971 (in Russian); English Transl., Amer. Mat. Soc., Providence, R., I., 1977.

Milin, V.I., 1980. Estimation of coefficients of odd univalent functions, Mecric Questions in the Theory of Functions (edited by G. E. Suvorov; 'Naukova Dumka': Kiev), 78-86 (in Russian).

Pommerenke, C.H., 1969. The Grunsky inequality for univalent functions. Lecture Notes, Imperial College London, March.

San, N., 1973. Analitik Fonksiyonlar Teorisi, I. cilt., Atatürk Üniversitesi Yayınları, No: 267, Baylan Matbaası, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Erzurum' un Pasinler ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Pasinler' de, lise öğrenimini Erzurum' da tamamladı. 1994 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girerek 1998' de mezun oldu. Aynı yıl ilgili bölümde yüksek lisans öğrenimine başlayıp bunun yanında Erzurum ili Pasinler ilçesinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.