RHALY OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU

Mustafa YILDIRIM

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1994

34857

ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

34857

RHALY OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU

Mustafa YILDIRIM

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 17.8.1994 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından 90/100 Not Takdir Edilerek Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

Prof.Dr.Öner ÇAKAR   Prof.Dr.Cihan ORHAN   Doç.Dr.Serpil PEHLİVAN

Danışman

Anneme

ve

Babama

ÖZET

Doktora Tezi

RHALY OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU

Mustafa YILDIRIM

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.Öner ÇAKAR

1994, sayfa: 65

Jüri: Prof.Dr.Öner ÇAKAR
Prof.Dr.Cihan ORHAN
Doç.Dr.Serpil PEHLİVAN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde sınırlı lineer operatörlerin spektrumu , ince spektrumu ve kompakt operatörlerin özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde bazı dizi uzaylarının tanımı , matris dönüşümlerinin tanımı ve bazı dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleriyle ilgili teoremler verilmiştir. Yine bu bölümde Rhaly operatörünün tanımı ile bazı dizi uzayları üzerinde sınırlı ve kompakt operatör olma durumu incelenmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümler ise çalışmanın orijinal kısımlar ıdır.

Üçüncü bölümde $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ için Rhaly operatörünün c_0 ve c üzerinde kompakt operatör olduğu gösterilmiştir. $L = 0$ için Rhaly operatörünün c_0, c ve ℓ_p $(p > 1)$ üzerindeki spektrumu ve ince (Fine) spektrumu elde edilmiştir. Sonuç olarak spektrumun toplanabilme teorisine uygulaması olarak bir Mercerian Teorem verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise $0 \neq L < \infty$ için Rhaly operatörünün c_0, c ve ℓ_p $(p > 1)$ üzerindeki spektrumu ve ince spektrumu elde edilmiştir. Ayrıca spektrumun toplanabilme teorisine uygulaması olarak bir Mercerian Teorem verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Resolvent, spektrum, nokta spektrum, ince spektrum, matris dönüşümü, Kompakt operatör, Rhaly operatörü, Cesàro operatörü, p-Cesàro operatörü, Mercerian Teoremi.

ABSTRACT

Ph.D.Thesis

ON THE SPECTRUM OF RHALY OPERATORS

Mustafa YILDIRIM

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr.Öner ÇAKAR

1994, Page: 65

Jury: Prof.Dr.Öner ÇAKAR
Prof.Dr.Cihan ORHAN
Assoc.Prof.Dr. Serpil PEHLİVAN

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the basic definitions and background materials about compact operators, spectrum and fine spectrum of the bounded linear operators have been given.

Second chapter is devoted to the basic concepts and theorems for some sequence spaces and matrix transformations. Also, in this chapter, the definition of a Rhaly matrix and its boundedness and compactness conditions on some sequence spaces have been given.

Third and fourth chapters are the original parts of this study.

In the third chapter, it is shown that, the Rhaly operator is a compact operator on c_0 and c for $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$. Then the spectrum and fine spectrum of the Rhaly operator on c_0, c and ℓ_p $(p > 1)$ for $L = 0$ have been obtained. Finally, a Mercerian theorem have been proved as an application of the spectrum to the theory of summability.

In the last chapter, the spectrum and fine spectrum of Rhaly operator on c_0, c and ℓ_p $(p > 1)$ for $0 \neq L < \infty$ have been obtained. Also, a Mercerian theorem have been proved as an application of the spectrum to the theory of summability.

KEY WORDS: Resolvent, spectrum, point spectrum, fine spectrum, matrix transformation, compact operator, Rhaly operator, Cesàro operator, p-Cesàro operator, Mercerian type theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım sayın Prof.Dr. Öner ÇAKAR ve Prof.Dr. Cihan ORHAN'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İçindekiler

SİMGELER

$((Ax)_n)$	: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$B(X,Y)$	: X uzayından Y uzayı içine tanımlı sınırlı lineer dönüşüm lerin sınıfı
C	: Kompleks sayılar cümlesi
c	: yakınsak diziler uzayı
c_A	: A matrisinin yakınsaklık alanı
c_0	: sıfıra yakınsak diziler uzayı
e	: bütün terimleri 1 olan dizi
e^k	: k-inci terimi 1, diğer terimleri 0 olan dizi
$\chi(A)$	: $\lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k a_k, \quad a_k := \lim_n a_{nk}$
I	: birim (özdeşlik) dönüşümü
L	: $\lim_n (n+1)a_n$
ln	: doğal logaritma
ℓ_p	: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p-inci kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı
ℓ_∞	: sınırlı diziler uzayı
M	: Rhaly matrisi
N	: Doğal sayılar cümlesi
$O(1)$	: sınırlı ifade

$\pi_0(T,X)$	: T sınırlı lineer dönüşümünün X üzerindeki nokta spektrumu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$Re\lambda$	: λ kompleks sayısının reel kısmı
$\rho(T,X)$	: T sınırlı lineer dönüşümünün X üzerindeki resolvent cümlesi
$R(T)$	: T dönüşümünün görüntü uzayı
$\overline{R(T)}$	: $R(T)$ nin kapanışı
s	: reel veya kompleks terimli bütün diziler uzayı
S	: $\{ a_n : n = 0,1,2, \ldots \}$ cümlesi
$\sigma(T,X)$	: T sınırlı lineer dönüşümünün X üzerindeki spektrumu
T^{-1}	: T dönüşümünün tersi
T^*	: T dönüşümünün adjointi
θ	: lineer uzayın sıfır elemanı
X^*	: X normlu uzayının sürekli duali
$(a_n) \sim (b_n)$	: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ dizisinin 1 e yakınsaklığı
$(a_n) \simeq (b_n)$	: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ve $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ dizilerinin sınırlılığı
$X^* \cong Y$	: X normlu uzayının sürekli duali Y dir.

GİRİŞ

Spektrum kavramı , toplanabilme teorisinde önemli bir yer tutar. Spektrum kavramının toplanabilme teorisindeki en önemli uygulaması , tamamen analitik yöntemlerle incelenmiş olan Mercerian Teoremlerinin fonksiyonel analitik yöntemler ile daha kısa ve anlaşılır biçimde elde edilmesine imkan sağlamasıdır.

$$M = (a_{nk}) = \begin{cases} a_n & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Rhaly matrisinde $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ alındığında C_1 Cesàro matrisi elde edilir. 1965 yılında Brown ve Halmos C_1 Cesàro operatörünün ℓ_2 Hilbert uzayı üzerinde sınırlı olduğunu göstermiş ve spektrumunu belirlemişlerdir. Daha sonra, aynı operatörün ℓ_p, $(1 < p < \infty)$, üzerindeki spektrumu 1973 yılında Leibowitz, c_0 üzerindeki spektrumu 1985 yılında Reade ve c, bv_0 ve bv üzerindeki spektrumu ise 1986 yılında Okutoyi tarafından Doktora Tezinde incelenmiştir.

M Rhaly matrisinde $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^s}$ $(s > 1)$ alındığında C_s, s-Cesàro matrisi elde edilir. 1987 yılında Leibowitz C_s ve C_s^* ın ℓ_p üzerindeki point spektrumu belirlenmiştir. 1989 yılında Rhaly, C_s nin ℓ_2 Hilbert uzayı üzerindeki spektrumunu elde etmiştir.

1987 yılında Leibowitz, M Rhaly matrisinin c_0, c ve ℓ_p üzerinde sınırlı operatör olma durumunu incelemiştir. 1989 yılında Rhaly ℓ_2 Hilbert uzayı üzerinde M nin spektrumunu hesaplamıştır.

Bu çalışmamızda M Rhaly Matrisinin c_0, c ve ℓ_p üzerindeki spektrumu incelenmiştir. Bu inceleme iki bölümde ele alınmıştır. Önce kompakt operatörlerin özelliklerinden yararlanarak Kompakt Rhaly operatörünün spektrumu hesaplanmıştır. Ayrıca spektrumun toplananabilme teorisine bir uygulaması olarak Kompakt Rhaly matrisi için bir Mercerian teorem elde edilmiştir.

Son olarak kompakt olmayan Rhaly operatörünün c_0, c, $\ell_p (1 < p < \infty)$ üzerindeki spektrumları belirlenmiş ve yine spektrumun toplananabilme teorisine bir uygulaması olarak Mercerian teorem elde edilmiştir.

Bölüm 1

Banach Cebirlerinde Spektrum

Bu bölümde sınırlı lineer operatörlerin Banach cebiri içindeki bir elemanın spektrumu ve ince spektrumu kavramları ile Bölüm 3 de kullanılacak olan kompakt operatör kavramı ve kompakt operatörlerin bazı özellikleri verilmiştir.

1.1 Sınırlı Lineer Operatörlerin Banach Cebiri

Tanım 1.1.1: **(Lineer Operatör)** X ve Y lineer uzaylar olsun. Her $x, y \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$(veya $\mathbb{R}$) için

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \tag{1.1.1}$$

özelliğini gerçekleyen $T : X \longmapsto Y$ fonksiyonuna *Lineer Operatör* (veya *Lineer dönüşüm*) denir. X uzayından Y uzayı içine tanımlı bütün lineer operatörlerin cümlesi $L(X, Y)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2: **(Sınırlı Lineer Operatör)** X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \longmapsto Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için;

$$\| T(x) \| \leq M \| x \| \tag{1.1.2}$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa T operatörüne X uzayından Y uzayı içine tanımlı bir *Sınırlı Lineer Operatör* denir. X uzayından Y uzayı içine bütün sınırlı lineer operatörlerin cümlesi $B(X, Y)$ ile gösterilir. Eğer $X = Y$ ise $B(X, X)$ yerine kısaca $B(X)$ yazılır.

Bir $T \in B(X,Y)$ için T nin normu

$$\| T \| := \sup_{x \neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} \tag{1.1.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.1.3: *X ve Y normlu uzaylar ise $B(X,Y)$ noktasal işlemlerle ve (1.2.3) ile tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır ve ayrıca Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır. (Brown and Page 1970, sh.105)*

Teorem 1.1.4: *X bir Banach uzayı olsun. $B(X)$ deki çarpma işlemi her $S,T \in B(X)$ için $(ST)(x) = S(T(x))$ şeklinde tanımlanırsa $B(X)$ birimli bir Banach Cebiridir. Bu birim $I : X \longmapsto X$ $(I(x) = x)$ özdeşlik dönüşümüdür. (Brown and Page 1970, sh.107)*

Tanım 1.1.5: **(Dual Uzay)** X herhangi bir normlu uzay ise X den $\mathbb{C}$(veya $\mathbb{R}$) ye tüm sınırlı lineer dönüşümlerin cümlesine X in ***sürekli duali*** denir ve X^* ile gösterilir. Yani $X^* = B(X,C)$ dir.

Şimdi de bir X normlu uzayı üzerindeki bir operatörün adjointini tanımlayalım.

Tanım 1.1.6: **(Lineer Operatörün Adjointi)** $L = L(X,C)$ diyelim. X^*, L nin bir altuzayıdır. $T : X \longmapsto X$, sürekli olması gerekmeyen bir lineer dönüşüm olsun. Şimdi T yi kullanarak L den L içine T' lineer operatörü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$T : X \longmapsto X, \quad f : X \to C, \quad f \in L$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f \circ T"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & C \end{tikzcd}$$

$T'f = f \circ T$, yani her $x \in X$ için $(T'f)(x) = f(T(x))$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} T' : L &\longmapsto L \\ f &\longmapsto T'f = f \circ T \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

dir. Eğer T ve f lineer ve sürekli iseler bu durumda $T'f$ de lineer ve süreklidir. Bu durumda T', T^* ile gösterilir ve T^* a T nin *adjointi* denir. Açıkça $T^* : X^* \longmapsto X^*$ dır. (Simmons 1963, sh.240-241)

1.2 Sınırlı Lineer Operatörün Spektrumu

X bir Banach uzayı olsun. Bir $T \in B(X)$ operatörünün spektrumu Banach cebiri içindeki bir elemanın spektrumu gibi

$$\sigma(T,X) := \{ \lambda \in \mathbf{C} : \lambda I - T, \ B(X) \ de \ tersinir \ değil \} \tag{1.2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla

$$\rho(T,X) = \{ \lambda \in \mathbf{C} : \lambda I - T, \ B(X) \ de \ tersinir \} = \mathbf{C} - \sigma(T,X) \tag{1.2.2}$$

dır.

Daha açık olarak eğer $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut, sınırlı ve X içinde yoğun bir cümle üzerinde tanımlı ise $\lambda \in \mathbf{C}$ sayısına, T dönüşümünün bir *Regüler* değeri, T nin bütün regüler değerlerinin oluşturduğu cümleye de T dönüşümünün *Resolventi* denir ve $\rho(T,X)$ ile gösterilir.

Böylece $\sigma(T,X) = \mathbf{C} - \rho(T,X)$ olduğundan, eğer $\lambda \in \sigma(T,X)$ ise

(1) $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut,

(2) $(\lambda I - T)^{-1}$ sınırlı ,

(3) $(\lambda I - T)^{-1}$, X içinde yoğun bir cümle üzerinde tanımlı

özelliklerinden en az biri gerçeklenmez.

Eğer X bir Banach uzayı ise $\rho(T,X)$, $\mathbf{C}$ nin açık bir altcümlesi ve dolayısıyla $\sigma(T,X)$, $\mathbf{C}$ nin kapalı bir altcümlesidir.

Tanım 1.2.1: (*Özdeğer , Özvektör*) $T : X \longmapsto X$ bir lineer operatör olsun. Eğer $Tx = \lambda x$ olacak biçimde X de bir $x \neq \theta$ elemanı varsa λ kompleks sayısına T nin bir *özdeğeri* ve $x \in X$ elemanına da bir *özvektör* denir. Bir T operatörünün bütün özdeğerlerinin cümlesini $\pi_0(T,X)$ ile göstereceğiz.

Açık olarak $\pi_0(T,X) \subseteq \sigma(T,X)$ dir.

Teorem 1.2.2: *$X \neq \{\theta\}$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T : X \to X$ lineer operatör olsun. Bu durumda $\pi_0(T,X) = \sigma(T,X)$ dir.*

Eğer X sonsuz boyutlu uzay ve $T \in B(X)$ ise $\pi_0(T,X) \subset \sigma(T,X)$ bağıntısı genellikle kesin bir bağıntıdır.

Açık olarak $\lambda \in \pi_0(T) \Longleftrightarrow \lambda I - T$ dönüşümü 1-1 değildir. (Brown and Page 1970, sh.230)

Teorem 1.2.3: *$X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $\sigma(T^*,X^*) \subseteq \sigma(T,X)$ dir. Eğer X bir Banach uzayı ise $\sigma(T^*,X^*) = \sigma(T,X)$ dir. (Brown and Page 1970, sh.242)*

1.3 Sınırlı Lineer Operatörün İnce Spektrumu

X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. T nin görüntü uzayı $R(T)$ ve $R(T)$ nin X içindeki kapanışını $\overline{R(T)}$ ile gösterelim. Bu durumda $R(T)$ için:

(I) $R(T) = X$

(II) $\overline{R(T)} = X$, fakat $R(T) \neq X$,

(III) $\overline{R(T)} \neq X$

ve $R(T)$ üzerinde göz önüne alınan T^{-1} için:

(1) T^{-1} mevcut ve sürekli,

(2) T^{-1} mevcut fakat sürekli değil,

(3) T^{-1} mevcut değil.

durumları vardır.

Eğer $R(T) = X$ ise $T \in I$ yazılır. Benzer şekilde eğer T inverse sahip değilse, $T \in(3)$ yazılır. Eğer $T \in II$ ve $T \in(1)$ ise $T \in II_1$ yazılır. T^* içinde benzer notasyonlar kullanılır. Eğer $T \in III_1$ ve $T^* \in I_3$ ise $(T, T^*) \in (III_1, I_3)$ yazarız. Böylece (T, T^*) için 81 farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıdaki teoremlerin ışığı altında bir dama tablosu gibi verebiliriz. (Goldberg 1966, sh.58)

Teorem 1.3.1: *Eğer T^* dönüşümü sınırlı bir inverse sahip ise $R(T^*)$ kapalıdır. (Goldberg 1966, sh.58)*

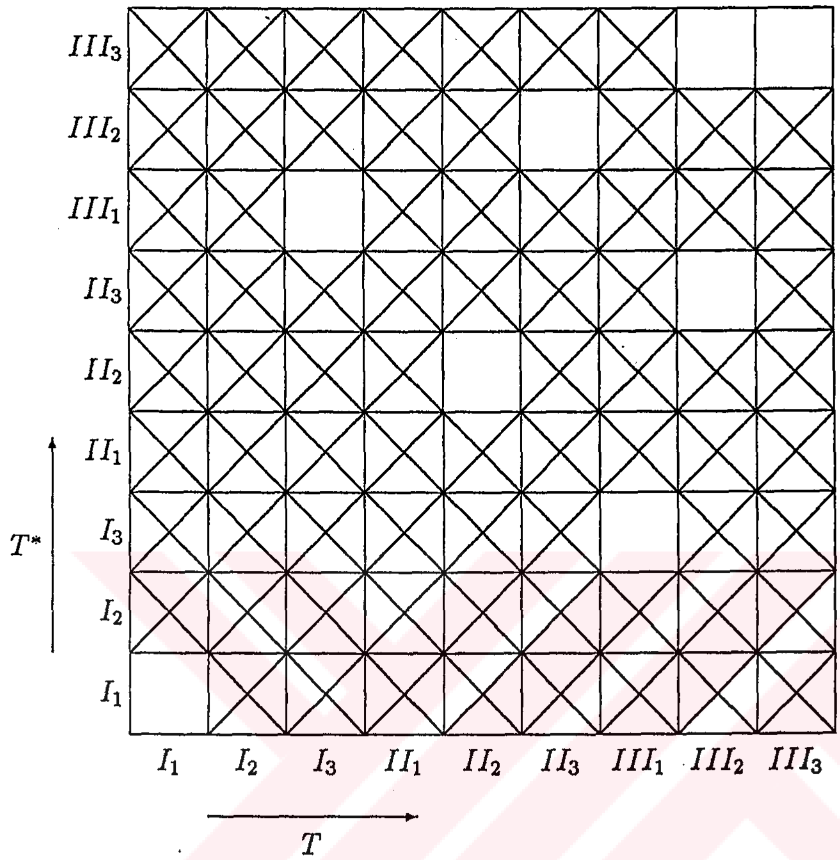
Teorem 1.3.2: *T nin yoğun görüntüye sahip olması için gerekli ve yeterli koşul T^* dönüşümünün 1-1 olmasıdır. (Goldberg 1966, sh.59)*

Teorem 1.3.3: *Eğer T ve T^* ın her ikisi de birer inverse sahip iseler $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ dir. (Goldberg 1966, sh.60)*

Teorem 1.3.4: *$R(T^*) = X^*$ olması için gerekli ve yeterli koşul T nin sınırlı bir inverse sahip olmasıdır. (Goldberg 1966, sh.60)*

Teorem 1.3.5: *$\overline{R(T)} = X$ ve T nin bir sınırlı inverse sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $\overline{R(T^*)} = X^*$ ve T^* ın sınırlı bir inverse sahip olmasıdır. (Goldberg 1966, sh.60)*

X Banach uzayı yansımalı değil ise $B(X)$ ve $B(X^*)$ için aşağıdaki diyagram Wenger tarafından 1975 yılında verilmiştir.



Şekil 1. Yansımalı olmayan X Banach uzayı için $B(X)$ ve $B(X^*)$'ın durum diyagramı

Örneğin T nin sınırlı bir inverse sahip olması için gerek ve yeterli koşul $R(T^*) = X^*$ olması gerektiği tablodan izlenebilir.

Şimdi Goldberg in bu sınıflandırmasını $A \in B(X)$ olmak üzere $T := \lambda I - A$ operatörü için tekrar yazarsak, $R(T = \lambda I - A)$ için:

(I) $(\lambda I - A)^{-1}$ örtendir.

(II) $\overline{R(\lambda I - A)} = X$, fakat $R(\lambda I - A) \neq X$,

(III) $\overline{R(\lambda I - A)} \neq X$

ve $R(\lambda I - A)$ üzerinde göz önüne alınan $(\lambda I - A)^{-1}$ için:

(1) $\lambda I - A$ dönüşümü 1-1 ve $(\lambda I - A)^{-1}$ sınırlı

(2) $\lambda I - A$ dönüşümü 1-1 fakat $(\lambda I - A)^{-1}$ sınırsız

(3) T^{-1} dönüşümü 1-1 değil.

dir. (Rhoades, 1989)

Buna göre λ, $T = \lambda I - A \in I_1$ veya II_1 olacak şekilde bir kompleks sayı ise açıkça $\lambda \in \rho(A,X)$ ve diğer durumlarda $\lambda \in \sigma(A,X)$ dir. Dolayısıyla A operatörünün spektrumunu yedi parçaya ayırabiliriz. Örneğin $T = \lambda I - A \in II_2$ ise $\lambda \in II_2\sigma(A,X)$ yazarız. Böylece $\sigma(A,X)$ cümlesini;

$I_2\sigma(A,X)$, $I_3\sigma(A,X)$, $II_2\sigma(A,X)$, $II_3\sigma(A,X)$, $III_1\sigma(A,X)$, $III_2\sigma(A,X)$, $III_3\sigma(A,X)$

şeklinde parçalara ayırabiliriz. Bu ayrışıma A operatörünün *İnce Spektrumu* denir.

1.4 Kompakt Operatörler

Bu kısımda, Bölüm 3 de ihtiyacımız olan kompakt operatör kavramını ve bazı özelliklerini vereceğiz.

Tanım 1.4.1: **(Kompakt Operatör)** X ve Y birer Banach uzayı , $T \in B(X,Y)$ ve U, X içinde açık birim yuvar olsun. Eğer $\overline{T(U)}$, Y de kompakt bir cümle ise T operatörüne bir *kompakt operatör* denir.

Teorem 1.4.2: *X, bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer T operatörünün görüntü uzayı $R(T)$, sonlu boyutlu ise T kompakt operatördür. (Rudin 1973, sh.98)*

Teorem 1.4.3: *X ve Y birer Banach uzayı , $T \in B(X,Y)$ ve her n için $T_n \in B(X,Y)$ ve* dim$R(T_n) < \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n - T \| = 0$$

ise T bir kompakt operatördür. (Rudin 1973, sh.106)

Teorem 1.4.4: *Eğer X bir Banach uzayı , $T \in B(X)$, T bir kompakt operatör ve $\lambda \neq 0$ ise $T - \lambda I$ kapalı görüntüye sahiptir. (Rudin 1973, sh.101)*

Teorem 1.4.5: *X ve Y Banach uzayları ve $T \in B(X,Y)$ olsun. Bu durumda T nin bir kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul T^* operatörünün kompakt olmasıd r. (Rudin 1973, sh.99)*

Teorem 1.4.6: *Eğer X bir Banach uzayı , boy$X = \infty$, $T \in B(X)$ ve T kompakt operatör ise $0 \in \sigma(T)$ dir. (Rudin 1973, sh.99)*

Teorem 1.4.7: *X bir Banach uzayı , $T \in B(X)$ ve T kompakt operatör olsun. Bu durumda eğer $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \in \sigma(T)$ ise λ, T ve T^* operatörlerinin bir özdeğeridir. (Rudin 1973, sh.99)*

Bölüm 2

Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Bu bölümde, çalışmanın orijinal bölümlerinde kullanılacak olan bazı dizi uzayları ve bu dizi uzayları arsında tanımlı matris dönüşümleri ile ilgili tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1 Dizi Uzayları

Bu çalışmada kullanacağımız dizi uzaylarını tanımlayarak işe başlayalım.

Tanım 2.1.1: Kompleks ya da reel terimli tüm dizilerin uzayını s, sınırlı diziler uzayını ℓ_∞, yakınsak diziler uzayını c, sıfıra yakınsak diziler uzayını c_0 ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p.inci kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayını ℓ_p ile göstereceğiz. Yani

$$\ell_\infty := \{x = (x_n) \mid \ sup_n \mid x_n \mid < \infty \} \tag{2.1.1}$$

$$c: = \{x = (x_n) \mid \ lim_n x_n = m, mevcut \} \tag{2.1.2}$$

$$c_0 := \{x = (x_n) \mid \ lim_n x_n = 0 \} \tag{2.1.3}$$

$$\ell_p := \{x = (x_n) \mid \ \sum_n \mid x_n \mid^p < \infty \} \tag{2.1.4}$$

dir. c,c_0 ve ℓ_∞ uzayları

$$\| x \|_\infty = sup_n \mid x_n \mid \tag{2.1.5}$$

normuyla, ℓ_p uzayı

$$\| x \|_p = (\sum_n | x_n |^p)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1.6}$$

normuyla birlikte birer Banach uzayıdırlar.

Bu uzayların sürekli dualleri ise;

$$c^* = c_0^* \cong \ell_1, \quad \ell_1^* \cong \ell_\infty \quad ve \quad \ell_p^* \cong \ell_q, \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \tag{2.1.7}$$

dir.

Ayrıca ℓ_1, c, c_0 yansımalı uzay değildir fakat $p > 1$ için ℓ_p bir yansımalı uzaydır.

2.2 Matris Dönüşümleri

Bir matris dönüşümünün, c_0, c, ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ gibi dizi uzayları üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüm belirlemesi için gerekli ve yeterli koşullar bilinmekte olup, bunlar bu kısımda ispatsız olarak verilecektir.

$A = (a_{nk})$, $(n, k = 0, 1, 2, ...)$ kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Verilen bir $x = (x_n)$ dizisi için

$$y_n := A_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k, \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{2.2.1}$$

mevcut ise $Ax = (A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer X ve Y, s nin iki altcümlesi olmak üzere her $x \in X$ için $(A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcut ve $(A_n(x)) \in Y$ ise A matrisi X den Y ye bir dönüşüm tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir. Toplamı veya limiti koruyan matrislerin sınıfı ise (X, Y, p) ile gösterilir.

Eğer $A \in (c, c)$ ise A ya *konservatif*, $A \in (c, c; p)$ ise A ya *regüler matris* denir.

(2.2.1) serisi her n için yakınsak olacağından matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır.

Şimdi toplanabilme teorisinde büyük öneme sahip iki matris örneği verelim.

Örnek 2.2.1: Bir $x = (x_n)$ dizisini, onun aritmetik ortalaması olan

$$y = y_n = \frac{x_0 + x_1 + ... + x_n}{n+1} \qquad (2.2.2)$$

dizisine dönüştüren operatöre Cesàro operatörü denir ve $(C,1)$ veya C_1 ile gösterilir. Açıkça bu operatöre karşılık gelen matris

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (2.2.3)$$

ile verilir. Diğer önemli matris ise

$$C_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2^p} & \frac{1}{2^p} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3^p} & \frac{1}{3^p} & \frac{1}{3^p} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (2.2.4)$$

p-Cesàro matrisidir $(p \geq 1)$.

Teorem 2.2.2: *$A \in B(\ell_\infty)$ olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$\| A \|_\infty := sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty \qquad (2.2.5)$$

olmasıdır. (Maddox 1970, sh.174)

Teorem 2.2.3: *$A \in B(\ell_1)$ olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$\| A \|_{\ell_1} := sup_k \sum_n | a_{nk} | < \infty \qquad (2.2.6)$$

olmasıdıdır. (Maddox 1970, sh.167)

Teorem 2.2.4: *$A \in B(c_0)$ olması için gerekli ve yeterli koşul* *(i)* $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty$

(ii) $lim_n a_{nk} = 0$ *(her sabit k için)* *(2.2.7)*

özelliklerinin gerçeklenmesidir. (Maddox 1970, sh220)

Teorem 2.2.5: **(Kojima-Schur)** $A \in B(c)$ *olması için gerekli ve yeterli koşul*

(i) $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty$

(ii) $lim_n \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p$ *(her sabit p çin)* *(2.2.8)*

özelliklerinin gerçeklenmesidir. (Maddox 1970, sh.170).

Tanım 2.2.6: **(Toplanabilirlirlik Alanı)** $A = (a_{nk}), n, k = 0, 1, 2, ...$ **kompleks sayıların bir** sonsuz matrisi olsun. Bu durumda

$$c_A := \{ x \in s \ : \ Ax \in c \} \tag{2.2.9}$$

cümlesine A matrisinin *yakınsaklık alanı*(veya *toplanabilirlik alanı)* denir.

Tanım 2.2.7: **(Normal Matris)** Eğer $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ve her n için $a_{nn} \neq 0$ ise bu durumda A ya bir *normal matris* (veya *üçgen matris*) denir.

Tanım 2.2.8: **(Matrisin Karakteristiği)** $A \in B(c)$ olsun. Bu durumda $a_k := lim_n\, a_{nk}$(her sabit k için) olmak üzere $a_k = 0$ ise A ya *çarpımsal matris* ,

$$\chi(A) := \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k a_k \tag{2.2.10}$$

sayısına A nın *karakteristiği* denir.

Tanım 2.2.9: $c_A = c$ olan matrise *Mercerian Matris* denir.

Teorem 2.2.10: *Bir konservatif normal A matrisinin Mercerian olması için gerekli ve yeterli koşul* A^{-1} *matrisinin konservatif olmasıdır. (Wilansky 1984, sh.14)*

Lemma 2.2.11: *$T \in B(c)$ ve T operatörü 1-1 olsun. Bu durumda T nin sınırlı , ıraksak hiç bir dizi limitlememesi için gerekli ve yeterli koşul $R(T)$, c içinde kapalı olmasıdır. (Wilansky 1964)*

Lemma 2.2.12: *Kabul edelim ki T bir regüler matris ve x herhangi bir kompleks dizi olsun. Bu durumda $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} \in \rho(T)$ olan α kompleks sayıları için $\lim(\alpha x + (1-\alpha)Tx) = t$ ifadesi $\lim x = t$ olmasını gerektirir. (Wenger 1975)*

Teorem 2.2.13: *$A \in B(\ell_\infty) \cap B(\ell_1)$ ise $1 < p < \infty$ için $A \in B(\ell_p)$ dir.(Maddox 1970, sh.170)*

Teorem 2.2.14: *$A \in B(c)$ olsun. Eğer A (2.2.5) özelliğini gerçekleyen bir A^{-1} inverse sahip ise $A^{-1} \in B(c)$ dir. (Wilansky 1984, sh.92)*

Teorem 2.2.15: *$A \in (c, c; p)$ olması için gerekli ve yeterli koşul*

(i) $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty$

(ii) $lim_n a_{nk} = 0$ *(her sabit k için)*

(iii) $lim_n \sum_k a_{nk} = 1$ *(2.2.11)*

özelliklerinin gerçeklenmesidir. (Maddox 1970, sh.165)

Teorem 2.2.16: *$1 < p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun ve her n, k için $b_{nk} > 0$ olmak üzere*

$$\sup_n \sum_k | a_{nk} | (b_{nk})^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.2.12}$$

ve

$$\sup_k \sum_n | a_{nk} | (b_{nk})^{-\frac{1}{q}} < \infty \tag{2.2.13}$$

özellikleri gerçeklensin. Bu durumda $A \in B(\ell_p)$ dir. (Borwein ve Jakimowsky 1979)

Dolayısıyla $B(c), B(c_0)$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $B(\ell_p)$ yukarıda teoremlerde verilen normlarıyla birlikte birer Banach cebiridir.

Lemma 2.2.17: *$X(= c_0, c, \ell_p, \ell_\infty)$ ve $Y(= c_0, c, \ell_p, \ell_\infty)$ olmak üzere her sınırlı $T : X \longmapsto Y$ lineer operatörü kompleks terimli bir sonsuz matris ile verilebilir. (Taylor 1980, sh.221-223)*

Lemma 2.2.18: *$T : c_0 \longmapsto c_0$ bir lineer dönüşüm ve $T^* : \ell_1 \longmapsto \ell_1$, $T^*g = g \circ T$, $g \in c_0^* \cong \ell_1$ ise bu durumda T ve T^* Lemma 2.2.17 den bir matris gösterimine sahiptir ve ayrıca $T^* : \ell_1 \longmapsto \ell_1$, T nin transpozudur. (Wilansky 1984, sh.266)*

Lemma 2.2.19: *$T : c \longmapsto c$ bir lineer dönüşüm ve $T^* : \ell_1 \longmapsto \ell_1$, $T^*g = g \circ T$, $g \in c^* \cong \ell_1$ ise T ve T^* birer matris gösterimine sahiptirler. Ayrıca $T^* : \ell_1 \longmapsto \ell_1$ dönüşümü,*

$$T^* = A^* = \begin{pmatrix} \chi(\lim_A) & (\vartheta_n)_{n=0}^{\infty} \\ (a_k)_{k=0}^{\infty} & M^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \chi(lim_A) & \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \cdots \\ a_0 & a_{00} & a_{10} & a_{20} & \cdots \\ a_1 & a_{01} & a_{11} & a_{21} & \cdots \\ a_2 & a_{02} & a_{12} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.2.14}$$

ile verilir. Burada

$$\chi(lim_A) = lim_A e - \sum_{k=0}^{\infty} lim_A e_k,$$

$$\vartheta_n = \chi(P_n \circ T),$$

$$a_{nk} = P_n(T(e_k)) = (T(e_k))_n$$

anlamındadır. (Wilansky 1984, sh.267)

Çalışmanın orijinal kısımında kullanacağımız bir teorem ve bir lemmayı ispatsız olarak verelim.

Teorem 2.2.20: **(Kummer Testi)** $\sum_n a_n$ *bir pozitif seri ve* (p_n)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{ p_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}\right\} = \nu \qquad (2.2.15)$$

mevcut ve pozitif $(0 < \nu \le \infty)$ *olacak şekilde pozitif sabitlerin bir dizisi olsun. Bu durumda* $\sum_n a_n$ *yakınsaktır. Aksi halde bu seri ıraksaktır. (Olmsted 1961, sh.395)*

Lemma 2.2.21: *Eğer* $\alpha > 0$ *ise,* $z \in \mathbb{C}$ *olmak üzere* $z \to 0$ *için*

$$|\,1+z\,|^{\alpha} = 1 + \alpha Re(z) + O(|\,z\,|^2)$$

dir. (Leibowitz 1987)

2.3 Rhaly Matrisleri

Bu kısmın esas amacı Rhaly matrisi için bilinen özellikleri sıralamaktır.

Tanım 2.3.1: **(Rhaly Matrisi)** $a = (a_n)$ kompleks veya reel terimli bir dizi olsun.

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_1 & 0 & \dots \\ a_2 & a_2 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (2.3.1)$$

matrisine *Rhaly Matrisi* denir.

Eğer $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ alınırsa $M = C_1$ Cesàro matrisi ve $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^s}$, $(s > 1)$, alınırsa $M = C_s$ s-Cesàro matrisi olur.

Bu çalışmada her $i \neq j$ için $a_i \neq a_j$, her n için $a_n \neq 0$ ve (a_n) monoton azalan kabul edilecektir.

Şimdi M nin c_0, c ve ℓ_p üzerinde sınırlı bir operatör olma durumunu inceleyelim.

Teorem 2.3.2: *(a) M, c_0 üzerinde sınırlı bir operatör olması için gerekli ve yeterli koşul $\{(n+1)a_n\}$ dizisinin sınırlı olmasıdır.*

(b) M nin ℓ_∞ üzerinde sınırlı bir operatör olması için gerekli ve yeterli koşul $\{(n+1)a_n\}$ dizisinin sınırlı olmasıdır. (Leibowitz 1987)

Teorem 2.3.3: *(a) Bir M Rhaly Matrisinin Regüler olması için gerekli ve yeterli koşul $lim_n(n+1)a_n = 1$ olmasıdır.*

(b) M Rhaly Matrisinin konservatif olması için gerekli ve yeterli koşul $\{(n+1)a_n)\}$ yakınsak olmasıdır. (Leibowitz 1987)

Teorem 2.3.4: *(a) Eğer $\{(n+1)a_n\}$ sınırlı ise bu durumda, her $p > 1$ için ℓ_p üzerinde sınırlıdır ve*

$$\| M \| \leq \frac{p}{p-1} sup_n \mid (n+1)a_n \mid \tag{2.3.2}$$

dir.

(b) Eğer $\lim_n(n+1)a_n = 0$ ise M her $(p > 1)\ell_p$ üzerinde bir kompakt operatördür.

(c) Eğer $\lim_n \mid (n+1)a_n \mid = \infty$ ise M, her $p > 1$ için ℓ_p üzerinde sınırsız bir operatördür. (Leibowitz 1987)

Bölüm 3

Kompakt Rhaly Operatörünün Spektrumu

$L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ durumunda (2.3.1) ile tanımlanan M Rhaly matrisinin Teorem 2.3.2(a), Teorem 2.3.3(b) den c_0 ve c üzerinde sınırlı lineer bir operatör olduğu ve Teorem 2.3.4(b) den $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ ise M Rhaly matrisi ℓ_p $(p > 1)$ üzerinde kompakt bir operatör olduğu biliniyor. Bu bölümde de $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ durumunda M Rhaly matrisinin $c_0$ve c üzerinde kompakt bir operatör olduğu gösterildikten sonra, kompakt operatörlerin özelliklerinden yararlanarak c_0, c, ℓ_p $(p > 1)$ üzerindeki spektrumunu hesaplayacağız. Bu bölümün son kısmında spektrumun toplanabilme teorisine uygulaması olarak bir de Mercerian teorem verilmiştir.

$L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ olmak üzere (2.3.1) ile tanımlanan Rhaly matrisinde özel olarak $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^s}$ alınırsa C_s, s-Cesàro matrisi olur ki bunun ℓ_2 üzerindeki spektrumunu Rhaly 1989 yılında incelemiştir.

3.1 $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ için M nin c_0 Üzerindeki Spektrumu

$L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ olması durumunda Teorem 2.3.2(a) uyarınca M Rhaly matrisinin c_0 üzerinde sınırlı lineer operatör olduğu biliniyor. Bu kısımda $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ olması durumunda M Rhaly matrisinin kompakt bir operatör olduğunu gösterecek ve kompakt operatörlerin özelliklerinden yararlanarak spektrumunu inceleyeceğiz.

Şimdi de M nin c_0 üzerinde ne zaman kompakt bir operatör olduğunu araştıralım.

Teorem 3.1.1: $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ *ise* M, c_0 *üzerinde kompakt bir operatördür.*

İspat . $M^r(x) := (a_0x_0, a_1(x_0+x_1), \ldots, a_r(x_0+x_1+\ldots+x_r), 0, 0, \ldots)$

ile verilen M^r operatörü $B(c_0)$ dadır. $R(M^r)$ nin boyutu sonludur. Teorem 1.4.2 den her r için M^r, c_0 üzerinde bir kompakt operatördür.

Her $x \in c_0$ için

$$\begin{aligned}\|(M-M^r)(x)\| = \| (0,0,\ldots,a_{r+1}\sum_{k=0}^{r+1} x_k, a_{r+2}\sum_{k=0}^{r+2} x_k, \ldots) \| &= \sup_{n\geq r} | a_{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} x_k | \\ &\leq \sup_{n\geq r} \left(|a_{n+1}| \sum_{k=0}^{n+1} | x_k | \right) \\ &\leq (r+2) \, | a_{r+1} | \| x \|\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x \in c_0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \|(M-M^r)(x)\| = 0. \qquad (3.1.1)$$

dır. (M^r) kompakt operatörlerin bir dizisi c_0 üzerinde M ye yakınsar. Böylece Teorem 1.4.3 den $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ için M nin c_0 üzerinde kompakt bir operatör olduğu görülür. ∎

Şimdi de $\lim_n (n+1)a_n = 0$ olması durumunda c_0 üzerinde kompakt operatör olan M nin spektrumunu kompakt operatörlerin özelliklerinden yararlanarak hesaplayalım. Bunun için M ve M^* operatörlerinin özdeğerlerini bulalım.

Bu çalışma boyunca $S := \{ a_n \; : \; n = 0,1,2, \ldots \}$ olarak alınacaktır.

Teorem 3.1.2: $L = 0$ *için* $\pi_0(M, c_0) = S$ *dir.*

İspat . İlk olarak $Mx = y$ ise $a_0x_0 = y_0$ ve $n \geq 1$ için

$$a_n \sum_{k=0}^{n} x_k = y_n \tag{3.1.2}$$

denklemleri sağlanır. Buradan

$$x_n = \frac{y_n}{a_n} - \frac{y_{n-1}}{a_{n-1}} = a_n^{-1}y_n - a_{n-1}^{-1}y_{n-1} \tag{3.1.3}$$

elde ederiz.

Sonuç olarak $Mx = \lambda x$ ise

$$x_n = a_n^{-1}\lambda x_n - a_{n-1}^{-1}\lambda x_{n-1}$$

bulunur. Böylece $n \geq 1$ için

$$(\lambda a_n^{-1} - 1)x_n = a_{n-1}^{-1}\lambda x_{n-1} \tag{3.1.4}$$

dir. Eğer m, $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni ise $\lambda = a_m$ ve (3.1.4) den

$$x_{m+n} = \prod_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda a_{j-1}^{-1}}{\lambda a_j^{-1} - 1} \tag{3.1.5}$$

yazabiliriz. Şimdi $\lambda = a_m$ olduğunda $x \in c_0$ olduğunu gösterelim. Ancak bu sonucu $x \in \ell_2$ yani, $\sum_n |x|^2 < \infty$ olduğunu göstererek elde edeceğiz. Buna göre (3.1.5) den $n \geq m+1$ için

$$\left| \frac{x_n}{x_{n+1}} \right|^2 = \frac{|\lambda - a_{n+1}|^2}{|\lambda|^2} \frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} \tag{3.1.6}$$

dir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_n}{x_{n+1}} \right|^2 = 1 \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Yani bölüm testi sonuç vermez. Şimdi Teorem 2.2.20 ile verilen Kummer Testini $p_n = \dfrac{1}{na_n^2}$ $(n \geq M)$ alarak uygulayalım.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(p_n \mid \frac{x_n}{x_{n+1}} \mid^2 - p_{n+1}) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{na_n^2}\frac{|\lambda - a_{n+1}|^2}{|\lambda|^2}\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{(n+1)a_{n+1}^2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda|^2 - 2(n+1)a_{n+1}Re\lambda + (n+1)a_{n+1}^2}{n(n+1)a_{n+1}^2|\lambda|^2} \qquad (3.1.8) \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

olduğundan Kummer Testi gereğince $\sum_n |x_n|^2 < \infty$ dir yani $x \in \ell_2$ dir. Bu ise ispatı tamamamlar. ■

Lemma 2.2.18 den $L = 0$ için c_0 üzerinde sınırlı bir operatör olan M nin M^* adjointi, M nin transpozudur.

Teorem 3.1.3: *$L = 0$ ise $\pi_0(M^*, c_0^* \cong \ell_1) = S$ dir.*

İspat . Yukarıdaki açıklamaların ışığı altında M^*, M nin transpozu olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$(M^*x)_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i x_i \qquad (3.1.9)$$

olacaktır. $M^*x = y$ dersek $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$x_n = a_n^{-1}(y_n - y_{n+1}) \qquad (3.1.10)$$

olur. Eğer $M^*x = \lambda x$ ise bu durumda

$$x_n = a_n^{-1}(\lambda x_n - \lambda x_{n+1})$$

dir. Böylece

$$\lambda a_n^{-1} x_{n+1} = (\lambda a_n^{-1} - 1)x_n \qquad (3.1.11)$$

elde edilir. Buradan $0 \notin \pi_0(M^*)$ dır. (Çünkü $\lambda = 0$ ise her n için $x_n = 0$ olur.) (3.1.11) den

$$x_{n+1} = (1 - \frac{a_n}{\lambda})x_n \tag{3.1.12}$$

dir.

Eğer $n > 1$ ise

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-1}(1 - \frac{a_j}{\lambda})x_0 \tag{3.1.13}$$

bulunur.

Eğer bir m tamsayısı için $\lambda = a_m$ ise bu durumda her $n \geq m$ için $x_n = 0$ olacağından $x = (x_n) \in \ell_1$ dir. Yani her m için a_m, M^* ın bir özdeğeridir. Şimdi bu özdeğerlerden başka özdeğer olmadığını gösterelim. Bunun için $\lambda \neq a_m, (m = 0, 1, 2, ...)$ ise $x = (x_n) \in \ell_1$ var olmadığını gösterelim. $\lambda \neq a_m$, $(m = 0, 1, 2, ...)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda|}{|\lambda - a_n|} = 1 \tag{3.1.14}$$

olduğundan bölüm kriteri sonuç vermez. Dolayısıyla Raabe kriterini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|\frac{x_n}{x_{n+1}}|^2 - 1}{|\frac{x_n}{x_{n+1}}| + 1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{|\lambda|^2}{|\lambda - a_n|^2} - 1}{\frac{|\lambda|}{|\lambda - a_n|} + 1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n 2Re\lambda - a_n^2}{|\lambda - a_n|(|\lambda| + |\lambda - a_n|)}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} - 1\right) = 0 < 1 \tag{3.1.15}$$

olduğundan $\lambda \neq a_m$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ için $x = (x_n) \notin \ell_1$ dir. O halde $\lambda = a_m$ lerden ($m = 0,1,2,\ldots$) başka özdeğer yoktur.

Bu ise ispatı tamamlar. ■

Şimdi $L = 0$ için M nin c_0 üzerindeki spektrumunu kompakt operatörlerin özelliklerinden yararlanarak hesaplayabiliriz.

Teorem 3.1.4: *Eğer $L = 0$ ise bu durumda $\sigma(M, c_0) = S \cup \{0\}$ dır.*

İspat . $L = 0$ ise *boy* $c_0 = \infty$ olduğundan Teorem 1.4.6 dan $0 \in \sigma(M, c_0)$ dır. Teorem 1.4.7 den M nin sıfırdan farklı her spektral değeri bir özdeğer olacağından ispat açıktır. ■

3.2 $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ için M nin c_0 Üzerindeki İnce Spektrumu

Bu kısımda kompakt Rhaly operatörünün ince spektrumunu hesaplayacağız.

Teorem 3.2.1: *Eğer $L = 0$ ise bu durumda $0 \in II_2\sigma(M, c_0)$ dir.*

İspat . Teorem 3.1.2 den $\pi_0(M, c_0) = S$ olduğundan $0 \notin \pi_0(M, c_0)$ dir. Böylece M^{-1} mevcuttur. Dolayısıyla $M \in (1) \cup (2)$ dir.

Şimdi de $M \in II$ olduğunu, yani $\overline{R(M)} = c_0$ ve $R(M) \neq c_0$ olduğunu gösterelim. Teorem 3.1.3 den $0 \notin \pi_0(M^*, \ell_1)$ olduğundan M^* operatörü 1-1 dir. Böylece Teorem 1.3.2 den $\overline{R(M)} = c_0$ dir. Şimdi de $R(M) \neq c_0$ olduğunu gösterelim.

Eğer $Mx = y$ ise bu durumda $x_0 = a_0^{-1} y_0$ ve $n \geq 1$ için

$$x_n = a_n^{-1} y_n \; - \; a_{n-1}^{-1} y_{n-1} \tag{3.2.1}$$

olur. Buradan $M^{-1} = (a_{nk})$ matrisinin

$$a_{nk} = \begin{cases} a_n^{-1}, & \text{k=n} \\ -a_{n-1}^{-1}, & \text{k=n-1} \\ 0, & \text{diğer yerde} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

ile verileceği açıktır. Eğer $y = (y_n) = \{(-1)^n a_n\} \in c_0$ şeklinde alırsak, her n için

$$x_n = a_n^{-1} a_n (-1)^n \; - \; a_{n-1}^{-1} a_{n-1} (-1)^{n-1} = 2(-1)^n \tag{3.2.3}$$

elde edilir. O halde $x \notin c_0$ dir. Dolayısıyla $y = (y_n) \in c_0$ fakat $x = (x_n) \notin c_0$ olduğundan M örten değildir, yani $R(M) \neq c_0$. Böylece $M \in II$ dir. Sonuç olarak $M \in II_1$ veya $M \in II_2$ dir. $0 \in \sigma(M, c_0)$ olduğundan $M \notin II_1$ dir. Böylece $M \in II_2$ ve dolayısı ile $0 \in II_2\sigma(M, c_0)$ elde edilmiş olur. ∎

Teorem 3.2.2: *Eğer $L = 0$ ise bu durumda $\lambda = a_m$, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ için $\lambda \in III_3\sigma(M, c_0)$ dır.*

İspat . Teorem 3.1.2 den her m için $\lambda = a_m \in \pi_0(M, c_0) = S$ dır. O halde $T^{-1} = (\lambda I - M)^{-1}$ mevcut değildir, yani $T \in (3)$ dür.

$\lambda = a_m \in \pi_0(M^*, \ell_1)$ olduğundan $T^* = \lambda I - M^*$, $\lambda = a_m$ için 1-1 değildir. Böylece Teorem 1.4.2 den $T = \lambda I - M$ yoğun görüntüye sahip değildir. Dolayısı ile $\overline{R(T)} \neq c_0$, yani $T \in III$ dir. Buna göre, $T = \lambda I - M \in III_3$ ve $\lambda = a_m \in III_3\sigma(M, c_0)$ dir. ∎

3.3 $L = \lim_n(n+1)a_n = 0$ için M nin c Üzerindeki Spektrumu

$L = \lim_n(n+1)a_n = 0$ olması durumunda, Teorem 2.3.3(b) den M Rhaly matrisinin c üzerinde sınırlı lineer operatör olduğu biliyoruz. Yine bu kısımda da $L = \lim_n(n+1)a_n = 0$ olması durumunda M Rhaly matrisinin c üzerinde bir kompakt operatör olduğu gösterilecek ve kompakt operatörlerin özelliklerinden yararlanılarak spektrumu incelenecektir.

Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 deki işlemler aynen tekrarlanarak aşağıdaki iki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.1: $L = \lim_n(n+1) = 0$ *ise* M, c *üzerinde kompakt bir operatördür.*

Teorem 3.3.2: $L = 0$ *için* $\pi_0(M,c) = S$ *dir.*

Lemma 3.3.3: *M Rhaly matrisi olmak üzere $M : c \to c$ ise bu durumda $M^* \in B(\ell_1)$ ve*

$$M^* = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & M^t \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

dir.

İspat . Lemma 2.2.19 un notasyonlarını burada kullanırsak

her k için

$$a_k = \lim_n a_{nk} = \lim_n a_n = 0,$$

her n için

$$\begin{aligned} \vartheta_n &= \chi(p_n \circ M) = (p_n \circ M)e - \textstyle\sum_k a_{nk} \\ &= (n+1)a_n - (n+1)a_n = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\chi(\lim_A) &= \lim_A e - \sum_k \lim_n a_{nk} \\ &= \lim_n (n+1)a_n \\ &= L.\end{aligned}$$

dir. Böylece Lemma 2.2.19 dan

$$M^* = \begin{pmatrix} \chi(\lim_A) & \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \cdots \\ a_0 & a_{00} & a_{10} & a_{20} & \cdots \\ a_1 & a_{01} & a_{11} & a_{21} & \cdots \\ a_2 & a_{02} & a_{12} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.3.2}$$

$$= \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ve $M^* \in B(\ell_1)$ dir.

Teorem 3.3.4: *$L = 0$ için $\pi_0(M^*, c^* \cong \ell_1) = S \cup \{0\}$ dir.*

İspat . Lemma 3.3.3 de c üzerinde $L = 0$ için

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ile verilebildiği gösterilmişti. Dolayısıyla $(M^*x)_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için

$$(M^*x)_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_{i-1}x_i \tag{3.3.3}$$

olacaktır. $M^*x = y$ dersek $y_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için

$$x_n = a_{n-1}^{-1}(y_n - y_{n+1}) \tag{3.3.4}$$

denklemleri gerçeklenir. Eğer $M^*x = \lambda x$ ise bu durumda

$$\lambda x_0 = 0 \; ve \; n \geq 1 \; icin \; x_n = a_{n-1}^{-1}(\lambda x_n - \lambda x_{n+1}) \tag{3.3.5}$$

dir. $\lambda x_0 = 0$ olması , $\lambda = 0$ veya $x_0 = 0$ olmasını gerektireceğinden $\lambda = 0$ bir özdeğerdir. Bu özdeğere karşı gelen öz vektör $x_0 \neq 0$ için

$$x = (x_0, 0, 0, \ldots) \tag{3.3.6}$$

alınabilir. Diğer yandan $n \geq 1$ için (3.3.5) den

$$\lambda a_{n-1}^{-1} x_{n+1} = (\lambda a_{n-1}^{-1} - 1)x_n \tag{3.3.7}$$

elde edilir. Böylece $n \geq 1$ için

$$x_{n+1} = (1 - \frac{a_{n-1}}{\lambda})x_n \tag{3.3.8}$$

dir. Buradan $n > 1$ için

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-2} \left(1 - \frac{a_j}{\lambda}\right) x_1 \tag{3.3.9}$$

bulunur.

Eğer bir m tamsayısı için $\lambda = a_m$ ise bu durumda her $n \geq 1$ için $x_n = 0$ olacağından $x = (x_n) \in \ell_1$ olacağı açıktır. Yani m tamsayıları için $\lambda = a_m$ ler M^* ın birer özdeğeridirler.

Şimdi bu bulduğumuz özdeğerlerden başka özdeğer olmadığını gösterelim. Kabul edelim ki $\lambda \neq 0$, ve her $m \in N$ için $\lambda \neq a_m$ olsun. Bu durumda $x = (x_n) \in \ell_1$ olacak şekilde bir dizinin bulunup bulunmadığına bakalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda|}{|\lambda - a_{n-1}|} = 1 \tag{3.3.10}$$

olduğundan, bölüm testi sonuç vermez. Şimdi Raabe testini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{|\frac{x_n}{x_{n+1}}|^2 - 1}{|\frac{x_n}{x_{n+1}}| + 1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\frac{|\lambda|^2}{|\lambda - a_{n-1}|^2} - 1}{\frac{|\lambda|}{|\lambda - a_{n-1}|} + 1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_{n-1} 2Re\lambda - a_{n-1}^2}{|\lambda - a_{n-1}|(|\lambda| + |\lambda - a_{n-1}|)}\right) \\
&= 0 < 1
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

elde edilir. Bu ise $x \notin \ell_1$ demektir. O halde

$$L = 0 \text{ için } \pi_0(M^*, c^* \cong \ell_1) = S \cup \{0\}$$

elde edilmiş olur. ■

Teorem 3.1.4 deki işlemler aynen tekrarlanarak aşağıdaki teorem verilebileceğinden, ispatlarını vermeden ifade edeceğiz.

Teorem 3.3.5: *Eğer* $L = 0$ *ise bu durumda* $\sigma(M,c) = S \cup \{0\}$ *dır.*

Teorem 3.3.6: *Eğer* $A \in B(c)$ *ise* $\sigma(A,c) = \sigma(A,\ell_\infty)$ *dır. (Cardlidge 1978)*

Sonuç 3.3.7: *Eğer* $L = 0$ *ise bu durumda* $\sigma(M,\ell_\infty) = S \cup \{0\}$ *dır.*

İspat . Teorem 3.3.6 dan $\sigma(M,c) = \sigma(M,\ell_\infty)$ ve Teorem 3.3.5 den $\sigma(M,c) = S \cup \{0\}$ olduğundan sonuç açıktır. ■

Şimdi de $L = 0$ için M nin c üzerindeki ince spektrumunu hesaplayalım.

3.4 $L = \lim_n(n+1) = 0$ için M nin c Üzerindeki İnce Spektrumu

Teorem 3.4.1: *Eğer* $L = 0$ *ise bu durumda* $0 \in III_2\sigma(M,c)$ *dir.*

İspat . $0 \in \pi_0(M,c)$ olduğundan M^{-1} ters dönüşümü mevcuttur. Ayrıca c üzerinde göz önüne alınan M^* matrisinin

$$a^*_{nk} = \begin{cases} a_{k-1}\,, & 2 \leq n \leq k \\ 0\,, & \text{diğer yerde} \end{cases} \tag{3.4.1}$$

ile verildiğini (3.3.2) den biliyoruz. Buna göre $M^*x = y$ den y nin ilk terimi $y_0 = 0$ olması gerekir. Böylece $y = (1,0,0,\ldots)$ alırsak $M^*x = y$ olacak şekilde $x \in \ell_1$ yoktur. Yani M^* örten değildir. Teorem 1.3.4 den M^{-1} sınırlı değildir. Yani $M \in (2)$ dir.

Diğer yandan $0 \in \pi_0(M^*,\ell_1)$ olduğundan M^*, operatörü 1-1 değildir. Teorem 1.3.2 den M yoğun görüntüye sahip değildir, yani $M \in III$ olur. Böylece $M \in III_2$ elde edilir ki bu da $0 \in III_2\sigma(M,c)$ demektir.

Teorem 3.2.2 deki işlemler aynen tekrarlanarak aşağıdaki teorem elde edileceğinden ispatsız olarak vermekle yetineceğiz.

Teorem 3.4.2: *Eğer* $L = 0$ *ise bu durumda* $\lambda = a_m, (m = 0, 1, 2, ...)$ *için* $\lambda \in III_3\sigma(M, c)$ *dır.*

3.5 $L = \lim_n (n+1) = 0$ için M nin ℓ_p Üzerindeki Spektrumu

$L = 0$ için M nin $\ell_p (p > 1)$ üzerinde sınırlı kompakt bir operatör olduğu Teorem 2.3.4 de gösterilmişti. Bu kısımda M nin ℓ_p $(p > 1)$ üzerindeki spektrumunu hesaplayacağız.

Teorem 3.5.1: $L = 0$ *ve* $p \geq 2$ *için* $\pi_0(M, \ell_p) = S$ *dir.*

İspat . Teorem 3.1.2 deki işlemler tekrar edilerek $Mx = \lambda x$ olması halinde

$$(\lambda a_n^{-1} - 1)x_n = a_{n-1}^{-1} \lambda x_{n-1}$$

elde edilir. Eğer m, $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni ise, $\lambda = a_m$ ve

$$x_{m+n} = \prod_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda a_{j-1}^{-1}}{\lambda a_j^{-1} - 1}$$

bulunur. Şimdi $\lambda = a_m$ oluğunda $x \in \ell_p$ olduğunu yani $\sum_n |x_n|^p < \infty$ olduğunu gösterelim. Bunun için önce bölüm testini uygulayalım. $n \geq m + 1$ için

$$\left| \frac{x_n}{x_{n+1}} \right|^p = \frac{|\lambda - a_{n+1}|^p}{|\lambda|^p} \frac{a_n^p}{a_{n+1}^p} \tag{3.5.1}$$

dir. Böylece

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x_n}{x_{n+1}} \right|^p = 1 \tag{3.5.2}$$

elde edilir, yani bölüm testi sonuç vermez. Teorem 2.2.20 ile verilen $p_n = \dfrac{1}{n a_n^p}$ $(p > 2)$ olmak üzere Kummer testi Lemma 2.2.21 göz önüne alınarak uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty} n \left\{p_n \mid \frac{x_n}{x_{n+1}} \mid^p - p_{n+1}\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{na_n^p} \mid 1 - \frac{a_{n+1}}{\lambda} \mid^p \frac{a_n^p}{a_{n+1}^p} - \frac{1}{(n+1)a_{n+1}^p}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)a_{n+1}^p} \left\{ (n+1) \mid 1 - \frac{a_{n+1}}{\lambda} \mid^p - 1\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)a_{n+1}^p} \left\{(n+1) \left[1 - pRe\frac{a_{n+1}}{\lambda}\right.\right.$$

$$\left.\left. + O\left(\mid \frac{a_{n+1}}{\lambda} \mid^2\right)\right] - n\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)a_{n+1}^p} \left\{ n + 1 - p(n+1)a_{n+1}Re\frac{1}{\lambda}\right.$$

$$\left. + (n+1)a_{n+1}O\left(\frac{a_{n+1}}{|\lambda|^2}\right) - n\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - p(n+1)a_{n+1}Re\frac{a_{n+1}}{\lambda} + (n+1)a_{n+1}O\left(\mid \frac{a_{n+1}}{\lambda} \mid^2\right)}{(n+1)a_{n+1}na_n a_{n+1}^{p-2}}$$

$$= \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla Kummer testinden, $p > 2$ için, $\sum_n \mid x_n \mid^p$ serisinin yakınsaklığı görülür. Yani $p > 1$ için $\pi_0(M, \ell_p) = S$ dir. Rhaly 1989 da $p = 2$ için de $\pi_0(M, \ell_p) = S$ olduğu gösterilmiştir. Böylece $p \geq 2$ için $\pi_0(M, \ell_p) = S$ dir. ∎

M nin ℓ_p $(p > 1)$ üzerindeki M^* adjointinin M nin transpozu olarak verilebileceği görülebilir. (Taylor 1980)

Teorem 3.5.2: *$L = 0$ için $\pi_0(M^*, \ell_p^* \cong \ell_q) = S$ dir.*

İspat . Yukarıdaki açıklamalardan M^*, M Rhaly matrisinin transpozu olarak elde edilir. Eğer $M^*x = \lambda x$ ise, bu durumda Teorem 3.1.3 de elde ettiğimiz gibi (3.1.11) denklemine sahibiz.

Böylece

$$\lambda a_n^{-1} x_{n+1} = (\lambda a_n^{-1} - 1) x_n$$

olur. Buradan $0 \notin \pi_0(M^*, \ell_q)$ dur. (çünkü $\lambda = 0$ ise her n için $x_n = 0$ olur.) (3.1.11) den ise (3.1.12) ve dolayısıyla (3.1.13) denklemi elde edilir. Yani $n \geq 1$ için

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - \frac{a_j}{\lambda}) x_0$$

olacaktır. Eğer bir m tamsayısı için $\lambda = a_m$ ise bu durumda her $n \geq m$ için $x_n = 0$ olacağından $\sum_n \mid x_n \mid < \infty$ ve böylece $x = (x_n) \in \ell_q$ elde edilir. Yani her m için a_m, M^* ın bir özdeğeridir. Şimdi bu özdeğerlerden başka özdeğer olmadığını gösterelim. Bunun için $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq a_m$, $(m = 0, 1, 2, \dots)$ ise $x = (x_n) \in \ell_q$ var olmadığını gösterelim. $\lambda \neq a_m, m = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mid x_n \mid}{\mid x_{n+1} \mid} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mid \lambda \mid}{\mid \lambda - a_n \mid} = 1$$

olduğundan bölüm testi sonuç vermez. Şimdi Raabe testini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n \left(\mid \frac{x_n}{x_{n+1}} \mid^q - 1 \right) &= \lim_{n\to\infty} n \left(\mid \frac{\lambda}{\lambda - a_n} \mid^q - 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda - a_n} - 1 \mid^q - 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(1 + \frac{a_n}{\lambda - a_n} \mid^q - 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left\{ 1 + qRe\left(\frac{a_n}{\lambda - a_n} \right) + O\left(\frac{a_n^2}{\mid \lambda - a_n \mid^2} - 1 \right) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ n a_n q Re\left(\frac{1}{\lambda - a_n} \right) + n a_n O\left(\frac{a_n}{\mid \lambda - a_n \mid^2} \right) \right\} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

olduğundan Raabe testi gereğince $x = (x_n) \notin \ell_q$ ve dolayısıyla başka özdeğer yoktur. Yani

$$\pi_0(M^*, \ell_q) = S$$

dir. ∎

Teorem 3.5.3: *Eğer $L = 0$ ise, bu durumda $p \geq 2$ için $\sigma(M, \ell_p) = S \cup \{0\}$ dır.*

İspat . İspat Teorem 3.5.1 ve Teorem 3.5.2 birlikte düşünülürse Teorem 3.1.4 deki gibi sonuç elde edilir. ∎

3.6 $L = \lim_n(n+1) = 0$ ve $p \geq 2$ için M nin ℓ_p Üzerindeki İnce Spektrumu

Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 deki işlemler aynen tekrarlanarak aşağıdaki iki teorem verilebilir.

Teorem 3.6.1: *Eğer $L = 0$ ise bu durumda $p \geq 2$ için $0 \in II_2\sigma(M, \ell_p)$ dir.*

Teorem 3.6.2: *Eğer $L = 0$ ise bu durumda $p \geq 2$ ve $\lambda = a_m, (m = 0, 1, 2, ...)$ için $\lambda \in III_3\sigma(M, \ell_p)$ dir.*

3.7 Spektrumun Toplanabilme Teorisine Uygulaması

Tanım 2.2.9 dan da bilindiği gibi Mercerian teoremler bir matrisin yakınsaklığa denk olmasıyla ilgilidir.

Bu kısımda M Rhaly operatörü için bir Mercerian teorem vereceğiz. Spektrum kavramından yararlanarak $A := \lambda I + (1 - \lambda)M$ olmak üzere $c_A = c$ olacak biçimde λ kompleks sayılarını belirleyeceğiz.

Teorem 3.7.1: *$L = 0$ için $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \dfrac{a_m}{a_m - 1}$, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ olsun. Bu durumda $A := \lambda I + (1-\lambda)M$ ise $c_A = c$ dir.*

İspat . $A := \lambda I + (1-\lambda)M = (\lambda - 1)[\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} I - M]$ olacağından hipotezlerimiz altında $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \neq 0$ ve

$(m = 0, 1, 2, \ldots)$ için $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \neq a_m$ olur. Teorem 3.3.5 den $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \notin \sigma(M, c)$ olup $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \in \rho(M, c)$ elde edilmişti. Böylece $[\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} I - M]^{-1} \in B(c)$ olur; yani

$$A^{-1} = (\lambda - 1)^{-1} \left[\frac{\lambda}{\lambda - 1} I - M\right]^{-1} = [\lambda I + (1-\lambda)M]^{-1} \in B(c)$$

dir. Teorem 2.2.10 den A bir Mercerian matristir, yani $c_A = c$ elde edilmiş olur. ■

Bölüm 4

Kompakt Olmayan Rhaly Operatörünün Spektrumu

Bölüm 2 de $0 \neq L = \lim_n (n+1)a_n < \infty$ durumunda M Rhaly matrisinin c_0, c ve ℓ_p $(p \geq 1)$ üzerinde sınırlı lineer operatör olduğunu söylemiştik.

Biz bu bölümde ise $0 \neq L = \lim_n (n+1)a_n < \infty$ durumunda sınırlı lineer operatör olan M Rhaly matrisinin c_0, c ve ℓ_p $(p \geq 1)$ üzerindeki spektrumları inceleyeceğiz. Ayrıca bölümün son kısmında spektrumun toplanabilme teorisine uygulaması olarak bir Mercerian teorem vereceğiz.

$0 \neq L = \lim_n (n+1)a_n < \infty$ olmak üzere (2.3.1) ile tanımlanan Rhaly matrisinde $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ için, Brown ve Halmos 1965 yılında $M = C_1$ Cesàro operatörünün ℓ_2 Hilbert uzayı üzerinde sınırlı bir operatör olduğunu göstermiş ve spektrumunu belirlemiştir. Daha sonra, aynı operatörün ℓ_p $(1 < p < \infty)$ üzerindeki spektrumu 1973 yılında Leibowitz, $c_0$üzerindeki spektrumu 1985 yılında Reade ve c, bv_0 *ve* bv üzerindeki spektrumu ise 1986 yılında Okutoyi tarafından Doktora tezinde incelenmiştir.

1989 yılında Rhaly, M Rhaly matrisinin ℓ_2 Hilbert uzayı üzerindeki spektrumunu hesaplamıştır.

4.1 $0 \neq L = \lim_n (n+1)a_n < \infty$ için M nin c_0 Üzerindeki Spektrumu

$0 \neq L = \lim_n (n+1)a_n < \infty$ olması durumunda Teorem 2.3.2 den c_0 üzerinde sınırlı bir operatör olduğu görülür.

Şimdi $0 \neq L < \infty$ için M nin c_0 üzerindeki özdeğerleri ile ilgili bir teorem vereceğiz.

Teorem 4.1.1: $0 \neq L < \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$S \cap (2L, \infty) \subseteq \pi_0(M, c_0)$$

dir.

İspat . Eğer $Mx = \lambda x$ ise bu durumda Teorem 3.1.2 den her n için

$$x_n = a_n^{-1} \lambda x_n - a_{n-1}^{-1} \lambda x_{n-1}$$

denklemini elde ederiz. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni x_m ise bu durumda Teorem 3.1.2 den $\lambda = a_m$ ve $n \geq m+1$ için

$$x_{m+n} = \prod_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda a_{j-1}^{-1}}{\lambda a_j^{-1} - 1}$$

dir. Şimdi $\lambda = a_m$ oluğunda $x \in c_0$ olması koşuluna bakalım. Biz burada $x \in \ell_2$ olduğunu göstererek bu ispatı tamamlayacağız. Bunu Rhaly 1989 yılında göstermiştir. $n \geq m+1$ için

$$\left| \frac{x_n}{x_{n+1}} \right|^2 = \frac{| \lambda - a_{n+1} |^2}{| \lambda |^2} \frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}$$

dir. Böylece

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x_n}{x_{n+1}} \right|^2 = 1$$

elde edilir. Yani bölüm testi sonuç vermez. Şimdi Teorem 3.1.2 deki gibi Kummer testini uygulayalım. $p_n = \frac{1}{na_n^2}$ $(n \geq m)$ alalım. Böylece

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[p_n \mid \tfrac{x_n}{x_{n+1}} \mid^2 - p_{n+1}\right] &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{na_n^2}\frac{|\lambda - a_{n+1}|^2}{|\lambda|^2}\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{(n+1)a_{n+1}^2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda|^2 - 2(n+1)a_{n+1}Re\lambda + (n+1)a_{n+1}^2}{n(n+1)a_{n+1}^2|\lambda|^2} \\
&= \frac{|\lambda|^2 - 2LRe\lambda}{L^2|\lambda|^2} \\
&= \frac{1}{L^2}\left[1 - L\,\frac{2Re\lambda}{|\lambda|^2}\right]
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

dir. Kummer Testi göre

$$\lim_{n\to\infty}\left[p_n \mid \frac{x_n}{x_{n+1}} \mid^2 - p_{n+1}\right] = \vartheta > 0$$

olmalıdır. Buna göre

$\vartheta = \dfrac{1}{L^2}\left[1 - L\,\dfrac{2Re\lambda}{|\lambda|^2}\right] > 0$ olmalıdır. Bu ise

$1 - L\,\dfrac{2Re\lambda}{|\lambda|^2} > 0 \Longleftrightarrow L\dfrac{2Re\lambda}{|\lambda|^2} < 1 \Longleftrightarrow \mid \lambda - L \mid > L$ sonucunu verir, yani $\mid \lambda - L \mid > L$ için $\sum \mid x_n \mid^2 < \infty$ dir. Dolayısıyla $\lambda = a_m < 2L$ elde edilmiş olur. Açık olarak $\lambda = a_m < 2L$ ise $\sum \mid x_n \mid^2 < \infty$ dir. Böylece $x = (x_n) =\in \ell_2$ olup

$$S \cap (2L, \infty) \subseteq \pi_0(M, c_0)$$

bulunur. ∎

Uyarı :

$$\pi_0(C_1, c_0) = \emptyset$$

olduğu Reade 1985 yılında ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.2: $0 \neq L < \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$\left\{ \lambda : | \lambda - \frac{L}{2} | < \frac{L}{2} \right\} \cup S \subseteq \pi_0(M^*, c_0 \cong \ell_1) \subseteq \left(\left\{ \lambda : | \lambda - \frac{L}{2} | \leq \frac{L}{2} \right\} - \{0\} \right) \cup S$$

dir.

İspat . M nin c_0 üzerindeki M^* adjointinin M nin transpozu olarak verilebileceği Lemma 2.1.18de gösterilmişti. Buna göre eğer $M^*x = \lambda x$ ise bu durumda

$$x_n = a_n^{-1}(\lambda x_n - \lambda x_{n+1})$$

dir. Böylece $0 \notin \pi_0(M^*)$ dır. (Çünkü $\lambda = 0$ ise her n için $x_n = 0$ olur.) Her n için

$$x_{n+1} = (1 - \frac{a_n}{\lambda})x_n$$

dir. Eğer $n > 1$ ise

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-1}(1 - \frac{a_j}{\lambda})x_0$$

elde edilir.

Eğer bir m tamsayısı için $\lambda = a_m$ ise bu durumda her $n \geq m$ için $x_n = 0$ olacağından her m için $\lambda = a_m$, M^* ın bir özdeğeridir. λ nın diğer değerleri ise $\sum | x_n |^2 < \infty$ olacak şekildeki x lerin cümlesinin hesaplanması ile elde edilecektir. Öncelikle Bölüm testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{| x_n |}{| x_{n+1} |} = \lim_{n\to\infty} \frac{| \lambda |}{| \lambda - a_n |} = 1$$

dir. O halde bölüm testi sonuç vermez. Şimdi de Raabe testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{| x_n |}{| x_{n+1} |} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{| \frac{x_n}{x_{n+1}} |^2 - 1}{| \frac{x_n}{x_{n+1}} + 1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\frac{|\lambda|^2}{|\lambda - a_n|^2} - 1}{\frac{|\lambda|}{|\lambda - a_n|} + 1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n 2Re\lambda - a_n^2}{|\lambda - a_n|(|\lambda| + |\lambda - a_n|)} \right)$$

$$= L \frac{Re\lambda}{|\lambda|^2}$$

elde ederiz. Raabe testi gereğince

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} - 1 \right) = L \frac{Re\lambda}{|\lambda|^2} > 1 \tag{4.1.2}$$

olmalıdır. Böylece

$$\begin{aligned} L \frac{Re\lambda}{|\lambda|^2} > 1 \quad &\Longleftrightarrow \lambda = x + iy \ olmak\ uzere\ x^2 + y^2 - Lx < 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(x - \tfrac{L}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\tfrac{L}{2}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow |\lambda - \frac{L}{2}| < \frac{L}{2} \end{aligned}$$

Demek ki $|\lambda - \frac{L}{2}| < \frac{L}{2}$ ise $\sum_n |x_n|$ yakınsak ve $|\lambda - \frac{L}{2}| > \frac{L}{2}$ ise $\sum_n |x_n|$ ıraksaktır. Raabe testine göre $|\lambda - \frac{L}{2}| = \frac{L}{2}$ olduğunda şüpheli hal vardır. Böylece

$$\left\{ \lambda : |\lambda - \frac{L}{2}| < \frac{L}{2} \right\} \cup S \subseteq \pi_0(M^*, c_0 \cong \ell_1) \subseteq \left(\left\{ \lambda : |\lambda - \frac{L}{2}| \leq \frac{L}{2} \right\} - \{0\} \right) \cup S$$

elde edilmiş olur. ∎

Uyarı :

$$\pi_0(C_1^*, c_0 \cong \ell_1) = \left\{ \lambda : |\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \right\} \cup \{1\}$$

olduğunu Reade 1985 yılında ispatlamıştır.

Lemma 4.1.3: $Re\frac{1}{\lambda} = \alpha$ *ve* $0 \neq \lim_{n\to\infty}(n+1)a_n = L < \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$\prod_{k=0}^{N-1} |\, 1 - \frac{a_k}{\lambda} \,| \simeq \frac{1}{N^{\alpha L}} \tag{4.1.3}$$

dir.

İspat . $\sum_{\vartheta=0}^{N} \sim \log N, \quad a_n \sim \dfrac{L}{n+1}$ ve $e^x \geq 1 + x$ $(x \in \mathbf{R})$ olduğu kullanılarak

$$\prod_{n=0}^{N-1} |\, 1 - \frac{a_k}{\lambda} \,| = \prod_{n=0}^{N-1} \left(|\, 1 - \frac{a_k}{\lambda} \,|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \prod_{n=0}^{N-1} \{1 - 2\alpha a_n + (\alpha^2 + \beta^2) a_n^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \prod_{n=0}^{N-1} \{\exp\left(-2\alpha a_n + (\alpha^2 + \beta^2) a_n^2\right)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \exp\left\{\sum_{n=0}^{N-1} (-\alpha a_n + O(a_n^2))\right\}$$

$$\leq \exp\left\{-\alpha L \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} + O(a_n^2)\right\}$$

$$\leq \exp\{-\alpha L \log(N) + O(1)\}$$

$$\leq \frac{O(1)}{N^{\alpha L}}$$

ve

$$\prod_{n=0}^{N-1} |\, 1 - \frac{a_k}{\lambda} \,|^{-1} = \prod_{n=0}^{N-1} \{1 + \alpha a_n + O(a_n^2)\}$$

$$\leq \exp\left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \alpha a_n + O(a_n^2) \right\}$$

$$\leq \exp\{\alpha L \log(N) + O(a_n^2)\}$$

$$\leq O(1)\, N^{\alpha L}$$

elde edilir. ∎

Sonuç 4.1.4:

$$\prod_{k=1}^{N} |\, 1 - \frac{1}{n\lambda} \,| \simeq \frac{1}{N^\alpha} \tag{4.1.3}$$

dir. (Reade 1985)

İspat . Lemma 4.1.3 de $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ alınırsa sonuç elde edilir.

Lemma 4.1.5: *$T = \lambda I - M$ ise*

$$T^{-1} = (a_{nk}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda - a_n} & , k{=}n \\ \dfrac{a_n}{\lambda^2 \prod\limits_{j=k}^{n} (1 - \frac{a_j}{\lambda})} & , k < n \\ 0 & , \text{diğer yerde} \end{cases} \tag{4.1.4}$$

ile verilir.

İspat . $Tx = y$ bağıntısından

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{\lambda - a_0} y_0 \\
x_1 &= \frac{1}{\lambda - a_1} y_1 + \frac{a_1}{(\lambda - a_1)(\lambda - a_0)} y_0 \\
x_2 &= \frac{1}{\lambda - a_2} y_2 + \frac{a_1}{(\lambda - a_2)(\lambda - a_1)} y_1 + \frac{a_2 \lambda}{(\lambda - a_2)(\lambda - a_1)(\lambda - a_0)} y_1 \\
\vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\
x_n &= \frac{1}{\lambda - a_n} y_n + \frac{a_n}{(\lambda - a_n)(\lambda - a_{n-1})} y_{n-1} + \frac{a_n \lambda}{(\lambda - a_n)(\lambda - a_{n-1})(\lambda - a_{n-2})} y_{n-2} \\
&+ \dots + \frac{a_n \lambda^{n-2}}{\prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{a_k}{\lambda})} y_1 + \frac{a_n \lambda^{n-1}}{\prod_{k=0}^{n}(1 - \frac{a_k}{\lambda})} y_0 \\
\vdots &\quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $T^{-1} = (a_{nk})$ ters dönüşüm matrisi (4.1.4) ile verilir.

Teorem 4.1.6: $0 \neq L < \infty$ *ise bu durumda*

$$
\sigma(M, c_0) = \left\{ \lambda : |\lambda - \frac{L}{2}| \leq \frac{L}{2} \right\} \cup S \tag{4.1.5}
$$

dir.

İspat . Teorem 4.1.2 den

$$
\left\{ \lambda : |\lambda - \frac{L}{2}| < \frac{L}{2} \right\} \cup S \subseteq \pi_0(M^*, c_0 \cong \ell_1)
$$

yazılabileceğinden ve c_0 bir Banach uzayı olduğundan

$$
\left\{ \lambda : |\lambda - \frac{L}{2}| < \frac{L}{2} \right\} \cup S \subseteq \pi_0(M^*, c_0 \cong \ell_1) \subseteq \sigma(M^*, c_0^*) = \sigma(M, c_0)
$$

olur. Böylece spektrumun kapalı olduğu düşünülürse

$$\left\{ \lambda : | \lambda - \frac{L}{2} | \leq \frac{L}{2} \right\} \cup S \subseteq \sigma(M, c_0)$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için

$$\sigma(M, c_0) \subseteq \left\{ \lambda : | \lambda - \frac{L}{2} | \leq \frac{L}{2} \right\} \cup S \tag{4.1.6}$$

olduğunu gösterelim. Dolayısıyla $| \lambda - \frac{L}{2} | > \frac{L}{2}$ ve $\lambda \neq a_m \quad (m = 0, 1, 2, ...)$ özelliğine sahip λ kompleks sayılarının $\rho(M, c_0)$ de olduğunu gösterelim. Ayrıca $| \lambda - \frac{L}{2} | > \frac{L}{2} \Longleftrightarrow \alpha L < 1$ olduğunu göz önüne alalım.

Şimdi $| \lambda - \frac{L}{2} | > \frac{L}{2}$ ve $\lambda \neq a_m \quad (m = 0, 1, 2, ...)$ olsun. Bu durumda $T^{-1} = (\lambda I - M)^{-1} \in B(c_0)$ olduğunu göstermek için (4.1.4) ile verilen $T^{-1} = (a_{nk})$ matrisi için (2.2.5) ve (2.2.7) özelliklerinin gerçeklendiğini ispatlayalım. Bunun için Lemma 4.1.3 ü kullanacağız. Her k için $\alpha L < 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{nk} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{| \lambda |^2 \prod_{j=k}^{n} | 1 - \frac{a_j}{\lambda} |} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n \prod_{j=0}^{k} | 1 - \frac{a_k}{\lambda} |}{| \lambda |^2 \prod_{j=0}^{n} | 1 - \frac{a_k}{\lambda} |} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha L} a_n n^{\alpha L - 1}}{(k-1)^{\alpha L}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla (2.2.7) i göstermiş olduk.

Şimdi de $\sup_n \sum_k \mid a_{nk} \mid < \infty$ olduğunu gösterelim.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mid a_{0k} \mid = \mid a_{00} \mid = \frac{1}{\mid \lambda - a_0 \mid} = O(1) \tag{4.1.7}$$

dir. $n \geq 1$ için $\alpha L < 1$ olduğu göz önüne alınarak Lemma 4.1.3 ün yardımı ile

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \mid a_{nk} \mid &= \mid a_{nn} \mid + \sum_{k=0}^{n-1} \mid a_{nk} \mid \\
&= \frac{1}{\mid \lambda - a_n \mid} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_n}{\mid \lambda \mid^2 \prod_{j=k}^{n} \mid 1 - \frac{a_j}{\lambda} \mid} \\
&= \frac{1}{\mid \lambda - a_n \mid} + \frac{a_n}{\mid \lambda \mid^2 \prod_{j=0}^{n} \mid 1 - \frac{a_j}{\lambda} \mid} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_n \prod_{j=0}^{k-1} \mid 1 - \frac{a_j}{\lambda} \mid}{\mid \lambda \mid^2 \prod_{j=0}^{n} \mid 1 - \frac{a_j}{\lambda} \mid} \\
&= \frac{1}{\mid \lambda - a_n \mid} + \frac{a_n}{\mid \lambda \mid^2 \prod_{j=0}^{n} \mid 1 - \frac{a_j}{\lambda} \mid} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{k-1} \mid 1 - \frac{a_j}{\lambda} \mid \right\} \qquad (4.1.8) \\
&\leq O(1) + \frac{a_n (n+1)^{\alpha L}}{\mid \lambda \mid^2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha L}} \right\} \\
&\leq O(1) + \frac{(n+1) a_n (n+1)^{\alpha L - 1}}{\mid \lambda \mid^2} \left\{ 1 + \int_{k=0}^{n-1} \frac{dx}{x^{\alpha L}} \right\} \\
&\leq O(1) + K (n+1)^{\alpha L - 1} \left\{ 1 + \frac{(n-1)^{1-\alpha L}}{1 - \alpha L} \right\} \\
&\leq O(1) + K (n+1)^{\alpha L - 1} \left\{ 1 + \frac{(n+1)^{1-\alpha L}}{1 - \alpha L} \right\} \\
&\leq O(1) + K \left\{ (n+1)^{\alpha L - 1} + O(1) \right\}
\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $\alpha L < 1$ olduğundan

$$sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty$$

dur. Böylece Teorem 2.2.11 dan $T^{-1} = (\lambda I - M)^{-1} \in B(c_0)$ dır. Dolayısı ile $\lambda \neq a_m$ (her m için) ve $| \lambda - \frac{L}{2} | > \frac{L}{2}$ için $\lambda \in \rho(M, c_0)$ dir. Sonuç olarak

$$\sigma(M, c_0) = \left\{ \lambda : | \lambda - \frac{L}{2} | \leq \frac{L}{2} \right\} \cup S$$

elde edilir. ∎

Sonuç 4.1.7:

$$\sigma(C_1, c_0) = \left\{ \lambda : | \lambda - \frac{1}{2} | \leq \frac{1}{2} \right\}$$

dir. (Reade 1985)

İspat . Teorem 4.1.5 de $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ alınırsa sonuç elde edilir.

4.2 $0 \neq L < \infty$ için M nin c Üzerindeki Spektrumu

$0 \neq L = \lim_n (n+1) a_n < \infty$ olması durumunda Teorem 2.3.3 den c üzerinde sınırlı bir operatör olduğu gösterilmiştir. Şimdi $0 \neq L = \lim_n (n+1) a_n < \infty$ için M Rhaly operatörünün c üzerindeki özdeğerleri ile ilgili bir teorem vereceğiz.

Teorem 4.1.1 in ispatındaki işlemler tekrarlanarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.2.1: $0 \neq L < \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$S \cap (2L, \infty) \subseteq \pi_0(M, c)$$

dir.

Uyarı :

$$\pi_0(M,c) = \{1\}$$

olduğunu Okutoyi 1986 yılında ispatlamıştır.

Teorem 4.2.2: $0 \neq L < \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$\left\{ \lambda : |\lambda - \frac{L}{2}| < \frac{L}{2} \right\} \cup S \cup \{L\} \subseteq \pi_0(M^*, c \cong \ell_1) \subseteq \left(\left\{ \lambda : |\lambda - \frac{L}{2}| \leq \frac{L}{2} \right\} - \{0\} \right) \cup S$$

dir.

İspat . c üzerinde sınırlı bir lineer operatör olan M nin adjointi Lemma 3.3.3 de

$$M^* = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ile verilmişti. Eğer $M^*x = \lambda x$ ise bu durumda Teorem 3.3.4 deki benzer düşünce ile $Lx_0 = \lambda x_0$ ve $n \geq 1$ için $x_n = a_{n-1}^{-1}(\lambda x_n - \lambda x_{n+1})$ dir. $\lambda x_0 = 0$ dan $x_0 \neq 0$ alınarak $\lambda = L$ elde edilir. $x_0 \neq 0$ olmak üzere $x = (x_0, 0, 0, \ldots) \in \ell_1$ olduğundan $\lambda = L$ bir özdeğerdir. Diğer yandan $n \geq 1$ için $x_1 \neq 0$ olmak üzere

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-2} \left(1 - \frac{a_j}{\lambda} \right) x_1$$

olduğu Teorem 3.3.4 de elde edilmişti.

Eğer bir m tamsayısı için $\lambda = a_m$ ise bu durumda her $n \geq 1$ için $x_n = 0$ olacağından $x = (x_n) \in \ell_1$ dir. Yani her m tamsayısı için $\lambda = a_m$ ler M^* ın birer özdeğeridir.

Diğer λ değerleri ise $\sum_n \mid x_n \mid < \infty$ özelliğini sağlayan x lerin cümlesinden elde edilir. Şimdi bölüm testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mid x_n \mid}{\mid x_{n+1} \mid} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mid \lambda \mid}{\mid \lambda - a_{n-1} \mid} = 1$$

olduğundan Raabe testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\mid x_n \mid}{\mid x_{n+1} \mid} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\mid \frac{x_n}{x_{n+1}} \mid^2 - 1}{\mid \frac{x_n}{x_{n+1}} \mid + 1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\frac{\mid \lambda \mid^2}{\mid \lambda - a_{n-1} \mid^2} - 1}{\frac{\mid \lambda \mid}{\mid \lambda - a_{n-1} \mid} + 1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_{n-1} 2Re\lambda - a_{n-1}^2}{\mid \lambda - a_{n-1} \mid (\mid \lambda \mid + \mid \lambda - a_{n-1} \mid)} \right)$$

$$= L \frac{Re\lambda}{\mid \lambda \mid^2} > 1$$

olmalıdır. Bu da Teorem 4.1.2 den görüleceği gibi $L \frac{Re\lambda}{\mid \lambda \mid^2} > 1$ olması $\mid \lambda - \frac{L}{2} \mid < \frac{L}{2}$ olmasına denk olduğundan $\mid \lambda - \frac{L}{2} \mid < \frac{L}{2}$ özelliğine sahip λ kompleks sayıları için $\sum_n \mid x_n \mid < \infty$ dur. $\mid \lambda - \frac{L}{2} \mid < \frac{L}{2}$ özelliğine sahip λ kompleks sayıları birer özdeğerdir. Raabe testi gereğince $L \frac{Re\lambda}{\mid \lambda \mid^2} = 1$ olduğu durumda şüpheli hal vardır. Yani $L \frac{Re\lambda}{\mid \lambda \mid^2} = 1$ özelliğine sahip bazı λ kompleks sayılarıda özdeğer olabilir. Dolayısıyla

$$\left\{ \lambda : \mid \lambda - \frac{L}{2} \mid < \frac{L}{2} \right\} \cup S \cup \{L\} \subseteq \pi_0(M^*, c \cong \ell_1) \subseteq \left(\left\{ \lambda : \mid \lambda - \frac{L}{2} \mid \leq \frac{L}{2} \right\} - \{0\} \right) \cup S$$

elde edilmiş olur. ∎

Uyarı :

$$\pi_0(C_1^*, c \cong \ell_1) = \left\{ \lambda : \mid \lambda - \frac{1}{2} \mid < \frac{1}{2} \right\} \cup \{1\} \, \pi_0(M^*, c \cong \ell_1)$$

olduğu Okutoyi 1986 yılında ispatlanmıştır.

Aşağıdaki teoremi Teorem 3.1.4 e benzer olarak ispatlayabiliriz.

Teorem 4.2.3: *$0 \neq L < \infty$ ise bu durumda*

$$\sigma(M,c) = \left\{ \lambda \ : | \lambda - \frac{L}{2} | \leq \frac{L}{2} \right\} \cup S$$

dir.

Sonuç 4.2.4:

$$\sigma(C_1,c) = \left\{ \lambda \ : | \lambda - \frac{1}{2} | \leq \frac{1}{2} \right\}$$

dir. (Okutoyi 1986)

İspat . Teorem 4.2.3 de $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ alınırsa sonuç elde edilir.

Aşağıdaki sonucu Teorem 3.3.6 ya benzer olarak ispatlayabiliriz.

Sonuç 4.2.5: *$0 \neq L < \infty$ ise bu durumda*

$$\sigma(M,\ell_\infty) = \left\{ \lambda \ : | \lambda - \frac{L}{2} | \leq \frac{L}{2} \right\} \cup S$$

dir.

4.3 $0 \neq \lim_n (n+1)a_n = L < \infty$ için M nin ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ Üzerindeki Spektrumu

Lemma 4.3.1: *$Re\frac{1}{\lambda} = \alpha$ ve $0 \neq \lim_n (n+1)a_n = L < \infty$ olsun. Bu durumda $q > 0$ için*

$$\prod_{k=0}^{N-1} | 1 - \frac{a_k}{\lambda} |^q \simeq \frac{1}{N^{\alpha L q}} \tag{4.3.1}$$

dir.

İspat . Lemma 4.1.3 ün notasyonlarını burada kullanırsak

$$\prod_{j=0}^{N-1} \mid 1 - \frac{a_j}{\lambda} \mid^q = \prod_{j=0}^{N-1} \left(\mid 1 - \frac{a_j}{\lambda} \mid^2\right)^{\frac{q}{2}}$$

$$= \prod_{j=0}^{N-1} \{\mid 1 - a_j(\alpha + i\beta) \mid^2\}^{\frac{q}{2}}$$

$$= \prod_{j=0}^{N-1} \{\mid 1 - a_j\alpha - ia_j\beta \mid^2\}^{\frac{q}{2}}$$

$$= \prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - 2a_j\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)a_j^2\right)^{\frac{q}{2}}$$

$$\leq \prod_{j=0}^{N-1} \exp\left(-qa_j\alpha + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)q}{2}a_j^2\right)$$

$$\leq \exp \sum_{j=0}^{N-1} \left((-q\alpha)a_j + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)q}{2}a_j^2\right)$$

$$\leq \exp\left[(-\alpha qL)\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} + O(1)\right]$$

$$\leq \exp\left[-\alpha qL \log N + O(1)\right]$$

$$= \frac{O(1)}{N^{\alpha qL}}$$

ve

$$\prod_{j=0}^{N-1} | 1 - \frac{a_j}{\lambda} |^{-q} = \prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - 2a_j\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)a_j^2\right)^{-\frac{q}{2}}$$

$$\leq \prod_{j=0}^{N-1} \exp\left(qa_j\alpha - \frac{(\alpha^2+\beta^2)q}{2}a_j^2\right)$$

$$\leq \exp \sum_{j=0}^{N-1} ((q\alpha)a_j + O(1))$$

$$\leq \exp\left[(\alpha q L)\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} + O(1)\right]$$

$$\leq \exp\left[\alpha q L \log N + O(1)\right]$$

$$= O(1) N^{\alpha q L}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.3.2:

$$\prod_{k=1}^{N} | 1 - \frac{1}{k\lambda} |^q \simeq \frac{1}{N^{\alpha q}}$$

dir. (Leibowitz 1972)

İspat . Lemma 4.3.1 de $a_k = \dfrac{1}{k}$ alınırsa sonuç elde edilir.

Teorem 4.3.3: $0 \neq L < \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$\pi_0(M^*, \ell_q) = \left\{ \lambda : | \lambda - \frac{qL}{2} | < \frac{qL}{2} \right\} \cup S$$

dir.

İspat . M nin ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ üzerindeki adjointinin M nin transpozu olarak verilebildiğini biliyoruz. Buna göre $M^*x = \lambda x$ ise bu durumda Teorem 3.1.3 den

$$\lambda a_n^{-1} x_{n+1} = (\lambda a_n^{-1} - 1)x_n$$

dir. Buradan ise $0 \notin \pi_0(M^*, \ell_q)$ dur (çünkü $\lambda = 0$ ise $x = \theta$ dır). Her n için

$$x_{n+1} = (1 - \frac{a_n}{\lambda})x_n$$

dir. Eğer $n > 1$ için

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-1}(1 - \frac{a_j}{\lambda})x_0$$

elde edilir.

Eğer bir m tamsayısı için $\lambda = a_m$ ise bu durumda her $n \geq m$ için $x_n = 0$ olacağından her m için $\bar{\bar{\lambda}} a_m$, M^* ın bir özdeğeridir. λ nın diğer değerleri ise $\sum \mid x_n \mid^q < \infty$ olan x lerin cümlesini bulmakla olur. Bunun için

$$\mid x_n \mid^q \;=\; \left(\prod_{j=0}^{n-1} \mid 1 - \frac{a_j}{\lambda} \mid \mid x_0 \mid\right)^q$$

$$= \mid x_0 \mid^q \prod_{j=0}^{n-1} \mid 1 - \frac{a_j}{\lambda} \mid^q$$

$$\simeq \frac{\mid x_0 \mid O(1)}{n^{\alpha L q}}$$

elde edilir. Böylece $\sum_n \mid x_n \mid^q < \infty \iff \alpha L q > 1$, yani $\alpha L > \frac{1}{q}$ olmasıdır. O halde $Re\frac{1}{\lambda} = \alpha$ olduğundan $\lambda = x + iy$ dersek

$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ ve $Re\frac{1}{\lambda} = \alpha = \frac{x}{x^2+y^2}$ olmak üzere $\alpha L q > 1$

$\iff \frac{x}{x^2+y^2}Lq > 1 \iff qLx > x^2+y^2 \iff (x - \frac{qL}{2}^2) + y^2 < \left(\frac{qL}{2}\right)^2$

$\iff \mid \lambda - \frac{qL}{2} \mid < \frac{qL}{2}$

olacağından

$$\pi_0(M^*, \ell_q) = \left\{ \lambda : | \lambda - \frac{qL}{2} | < \frac{qL}{2} \right\} \cup S$$

elde edilir.

Uyarı :

$$\pi_0(C_1^*, \ell_q) = \left\{ \lambda : | \lambda - \frac{q}{2} | < \frac{q}{2} \right\}$$

olduğu Leibowitz 1972 yılında ispatlanmıştır.

Teorem 4.3.4: $0 \neq L < \infty$ *ise* $p > 1$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *için*

$$\sigma(M, \ell_p) = \left\{ \lambda : | \lambda - \frac{qL}{2} | < \frac{qL}{2} \right\} \cup S$$

dir.

İspat . Teorem 4.3.2 den

$$\left\{ \lambda : | \lambda - \frac{qL}{2} | < \frac{qL}{2} \right\} \cup S = \pi_0(M^*, \ell_q)$$

ve her zaman $\pi_0(M^*, \ell_q) \subseteq \sigma(M^*, \ell_q) = \sigma(M, \ell_p)$ olduğundan

$$\left\{ \lambda : | \lambda - \frac{qL}{2} | < \frac{qL}{2} \right\} \cup S \subseteq \sigma(M, \ell_p) \tag{4.3.2}$$

elde edilir. Şimdi $\sigma(M, \ell_p)$ nin kapalı olduğu göz önüne alınarak (4.3.1) in her iki tarafının kapanışını alalım. Böylece

$$\left\{ \lambda : | \lambda - \frac{qL}{2} | \leq \frac{qL}{2} \right\} \cup S \subseteq \sigma(M, \ell_p) \tag{4.3.3}$$

elde edilmiş olur. İspatı tamamlamak için

$$\sigma(M, \ell_p) \subseteq \left\{ \lambda : | \lambda - \frac{qL}{2} | \leq \frac{qL}{2} \right\} \cup S \tag{4.3.4}$$

olduğunu gösterelim. Bu amaçla $|\lambda - \frac{qL}{2}| > \frac{qL}{2}$ ve $\lambda \neq a_m$ $(m = 0,1,2,...)$ özelliğine sahip λ kompleks sayılarının $\rho(M,\ell_p)$ de olduğunu göstereceğiz. Bunun için $|\lambda - \frac{qL}{2}| > \frac{qL}{2} \Longleftrightarrow \alpha L < \frac{1}{q}$ olduğunu göz önüne alalım.

Şimdi kabul edelim ki $|\lambda - \frac{qL}{2}| > \frac{qL}{2}$ ve $\lambda \neq a_m$ $(m = 0,1,2,...)$ olsun. Bu durumda $T^{-1} = (\lambda I - M)^{-1} \in B(\ell_p)$ olduğunu gösterelim. $T^{-1} = (a_{nk})$ matrisi (4.1.6) ile verildiğinden Teorem 2.2.16 da $b_{nk} = \frac{a_k}{a_n}$ alıp (2.2.12) ve (2.2.13) nin gerçeklendiğini göstererek $T^{-1} \in B(\ell_p)$ elde edeceğiz.

İlk önce (2.2.2) nin gerçeklendiğini gösterelim. Böylece $\alpha = Re\frac{1}{\lambda}$, $\alpha L > \frac{1}{q}$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| (b_{nk})^{1/p} = \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}| (b_{nk})^{1/p} + |a_{nn}| b_{nn}^{1/p}$$

$$= \frac{1}{|\lambda - a_n|} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_n^{1-1/p} a_k^{1/p}}{|\lambda|^2 \prod_{j=k}^{n} |1 - \frac{a_k}{\lambda}|^q}$$

$$= \frac{1}{|\lambda - a_n|} + \frac{a_n^{1-1/p}}{|\lambda|^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_n^{1-1/p} a_k^{1/p}}{\prod_{j=k}^{n} |1 - \frac{a_k}{\lambda}|^q}$$

$$= \frac{1}{|\lambda - a_n|} + \frac{a_n^{1-1/p}}{|\lambda|^2} \left\{ \frac{a_k^{1/p}}{\prod_{j=k}^{n} |1 - \frac{a_k}{\lambda}|^q} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k^{1/p} \prod_{j=0}^{k-1} |1 - \frac{a_k}{\lambda}|^q}{\prod_{j=k}^{n} |1 - \frac{a_k}{\lambda}|^q} \right\}$$

$$\leq O(1) + O(1)(n+1)a_n a_n^{1/p}(n+1)^{\alpha L-1}\left\{ a_0^{1/p} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k^{1/p}}{k^{\alpha L}} \right\}$$

$$\leq O(1) + O(1)(n+1)^{1/p+\alpha L-1}\left\{ a_0^{1/p} + N\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^{1/p}k^{\alpha L}} \right\}$$

$$\leq O(1) + O(1)(n+1)^{1/p+\alpha L-1+1/p}\left\{ a_0^{1/p} + N\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{\alpha L+1/p}} \right\}$$

$$\leq O(1) + O(1)(n+1)^{1/p+\alpha L-1+1/p}\left\{ a_0^{1/p} + N\int_0^{n-1}\frac{dx}{x^{\alpha L+1/p}} \right\}$$

$$\leq O(1) + O(1)(n+1)^{1/p+\alpha L-1+1/p}\left\{ a_0^{1/p} + N\frac{(n-1)^{1-\alpha L-1/p}}{1-\alpha L-1/p} \right\}$$

$$= O(1) + O(1)\left\{(n+1)^{1/p+\alpha L-1+1/p}\, a_0^{1/p} + O(1)\tfrac{1}{1-\alpha L-1/p}\right\}$$

$$= O(1)$$

dir. Çünkü $\alpha L < \dfrac{1}{q}$ olduğundan $\alpha L + \dfrac{1}{p} - 1 < \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} - 1 = 0$ dır. Böylece

$$sup_n \sum_k |\, a_{nk} \,|\, (b_{nk})^{1/p} < \infty$$

elde edilir, yani (2.2.12) gerçeklenir. İkinci olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\, a_{nk} \,|\, (b_{nk})^{-1/q} = |\, a_{kk} \,|\, (b_{kk})^{-1/q} + \sum_{n=k+1}^{\infty} |\, a_{nk} \,|\, (b_{nk})^{-1/q}$$

$$= \tfrac{1}{|\lambda - a_k|} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n^{1+1/q} a_k^{-1/q}}{|\, \lambda \,|^2 \prod_{j=k}^{n} |\, 1 - \frac{a_k}{\lambda} \,|^q}$$

$$= \frac{1}{|\lambda - a_k|} + \frac{a_k^{-1/q}}{|\lambda|^2} \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n^{1+1/q} \frac{(n+1)^{\alpha L}}{k^{\alpha L}}$$

$$\leq O(1) + \frac{O(1)}{(k+1)^{-1/q}} \sum_{n=k+1}^{\infty} (n+1) a_n \frac{(n+1)^{\alpha L - 1 - 1/q}}{k^{\alpha L}}$$

$$\leq O(1) + O(1)(k+1)^{\alpha L - 1/q} \sum_{n=k+1}^{\infty} (n+1)^{\alpha L - 1 - 1/q}$$

$$\leq O(1) + O(1)(k+1)^{\alpha L - 1/q} \int_k^{\infty} (x+1)^{\alpha L - 1 - 1/q} dx$$

$$\leq O(1) + O(1)(k+1)^{\alpha L - 1/q} \left[\frac{(k+1)^{\alpha L - 1/q}}{\alpha L - 1/q} \right]$$

$$= O(1)$$

olup

$$sup_k \sum_n | a_{nk} | (b_{nk})^{-1/q} < \infty$$

elde edilir ki bu da (2.2.13)'ün gerçeklenmesi demektir. O halde Teorem 2.2.16 dan $| \lambda - \frac{qL}{2} | > \frac{qL}{2}$ ve $\lambda \notin S$ özelliğindeki λ değerleri $\rho(M, \ell_p)$ dedir. Böylece

$$\sigma(M, \ell_p) \subseteq \left\{ \lambda : | \lambda - \frac{qL}{2} | \leq \frac{qL}{2} \right\} \cup S$$

elde edilir. Bu sonuç (4.3.3) ve (4.3.4) ile birleştirilirse

$$\sigma(M, \ell_p) = \left\{ \lambda : | \lambda - \frac{qL}{2} | \leq \frac{qL}{2} \right\} \cup S$$

buluruz. Bu da ispatı tamamlar. ∎

Sonuç 4.3.5:

$$\sigma(C_1,\ell_p) = \left\{ \lambda \ : |\ \lambda - \frac{q}{2}\ | \leq \ \frac{q}{2} \right\}$$

dir. (Leibowitz 1972)

İspat . Teorem 4.4.3 de $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ alınırsa sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.6:

$$\sigma(M,\ell_2) = \{ \ \lambda \ : |\ \lambda - L\ | \leq \ L\} \ \cup \ S$$

dir. (Rhaly 1989)

İspat . Teorem 4.4.3 ün $p = 2$ halidir.

4.4 $0 \neq \lim_n (n+1)a_n \ = \ L \ < \ \infty$ İçin M nin c Üzerindeki İnce Spektrumu

Bölüm 4.2 de M nin c üzerindeki spektrumu hesaplanmıştı . Şimdi de M nin ince spektrumunu inceleyelim.

Teorem 4.4.1: *$\lambda \notin S$, $\lambda \neq L$ ve $\alpha L > 1$ olsun. Bu durumda $\lambda \in III_1\sigma(M,c)$ dir.*

İspat . $\lambda \notin S$ olduğundan $T = \lambda I - M$ operatörüne karşılık gelen matris normal matris olduğundan birebirdir. Yani $T^{-1} = (\lambda I - M)^{-1}$ mevcuttur. $T^* = (\lambda I - M)^*$ operatörünü göz önüne alalım.

$$M^* = \begin{pmatrix} \lambda - L & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda - a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_2 & -a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{4.4.1}$$

şeklinde olduğundan $T^* = \theta$ ise

$$\begin{aligned} &(\lambda - L)x_0 && = 0 \\ &\qquad (\lambda - a_0)x_1 && -a_1x_2 - a_2x_3 - \ldots = 0 \\ &&& (\lambda - a_0)x_1 - a_2x_3 - \ldots = 0 \\ &&& \ddots \end{aligned}$$

olur. Yani $(\lambda - L)x_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için

$$(\lambda - a_{n-1})x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k-1}x_k = 0 \tag{4.4.2}$$

denklemleri gerçeklenir. Böylece $x_0 = 0$ ve $n \geq 2$ çin yukarıdaki denklem sisteminden

$$x_n = (1 - \frac{a_{n-2}}{\lambda})x_{n-1} \tag{4.4.3}$$

olacağından (4.4.3) denkleminden

$$x_n = \prod_{k=0}^{n-2}(1 - \frac{a_k}{\lambda})x_1 \tag{4.4.4}$$

bulunur. $\alpha L > 1$ olduğundan Lemma 4.1.3 den $x \in \ell_1$ dir. Buna göre $x = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ dizisinin ℓ_1 de olması için her n için $x_n = 0$ olması gerekmediğinden, $x = \theta$ olması gerekmez.

Yani $T^* = \lambda I - M^*$, birebir değildir. Teorem 1.3.2 den T yoğun görüntüye sahip değildir, yani $\overline{R(T)} \neq c$ dir. Böylece $T \in III$ elde edilir.

Eğer T^{-1} in sürekli olduğunu gösterirsek ispat tamamlanacaktır. Bunun için Teorem 1.3.4 den $R(T^*) = c^* = \ell_1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$y = (y_n) \in \ell_1$ olsun. Eğer $T^*x = y$ olacak biçimde ℓ_1 de bir $x = (x_n)$ dizisi mevcut ise

$$(\lambda - L)x_0 = y_0$$

ve $n \geq 1$ için

$$(\lambda - a_{n-1})x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k-1}x_k = y_n \tag{4.4.5}$$

denklemleri gerçeklenir. Eğer $x_1 = 0$ seçersek

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{\lambda}[y_2 - y_1] \\
x_3 &= \frac{1}{\lambda}\left[y_3 - \frac{a_1}{\lambda}y_2 - (1 - \frac{a_1}{\lambda})y_1\right] \\
x_4 &= \frac{1}{\lambda}\left[y_4 - \frac{a_2}{\lambda}y_3 - \frac{a_1}{\lambda}(1 - \frac{a_2}{\lambda})y_2 - (1 - \frac{a_2}{\lambda})(1 - \frac{a_1}{\lambda})y_1\right] \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{1}{\lambda}\Big\{y_n - \frac{a_{n-2}}{\lambda}y_{n-1} - \frac{a_{n-3}}{\lambda}(1 - \frac{a_{n-2}}{\lambda})y_{n-2} - \frac{a_{n-4}}{\lambda}(1 - \frac{a_{n-2}}{\lambda})(1 - \frac{a_{n-3}}{\lambda})y_{n-3} \\
&- \ldots - \frac{a_1}{\lambda}(1 - \frac{a_{n-2}}{\lambda})(1 - \frac{a_{n-3}}{\lambda})\ldots(1 - \frac{a_2}{\lambda})y_2 \\
&- (1 - \frac{a_{n-2}}{\lambda})(1 - \frac{a_{n-3}}{\lambda})\ldots(1 - \frac{a_2}{\lambda})(1 - \frac{a_1}{\lambda})y_1\Big\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu dönüşüm matrisi $A = (a_{nk})$ ile gösterilirse, bu matris

$$a_{00} = \frac{1}{\lambda - L}, \quad a_{0k} = 0, \quad a_{1k} = 0 \tag{4.4.6}$$

$$a_{21} = -\frac{1}{\lambda} \tag{4.4.7}$$

$$a_{n1} = -\frac{1}{\lambda}\prod_{j=1}^{n-2}(1-\frac{a_j}{\lambda}), \quad n > 2 \tag{4.4.8}$$

$$a_{n,n-1} = -\frac{a_{n-2}}{\lambda}, \quad n > 2 \tag{4.4.9}$$

$$a_{n1} = -\frac{1}{\lambda^2}a_{k-1}\prod_{j=k}^{n-2}(1-\frac{a_j}{\lambda}), \quad 1 < k < n-1 \tag{4.4.10}$$

$$a_{nn} = \frac{1}{\lambda} \tag{4.4.11}$$

$$a_{nk} = 0, \quad k > n > 1 \tag{4.4.12}$$

ile verilir. (4.4.6) dan

$$\sum_{n=0}^{\infty} | a_{n0} | = O(1) \tag{4.4.13}$$

$\alpha L > 1$ olmak üzere Lemma 4.1.3 ü kullanarak (4.4.8) den

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} | a_{n1} | &= | a_{11} | + | a_{21} | + \sum_{n=3}^{\infty} | a_{n1} | \\ &= \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\prod_{j=1}^{n-2} | 1-\frac{a_j}{\lambda} | \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(1+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{O(1)}{(n-2)^{\alpha L}}\right) = O(1)\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

olur. $k > 2$ için (4.4.9), (4.4.10) ve (4.4.11) kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} | a_{nk} | &= | a_{kk} | + | a_{k+1,k} | + \sum_{n=k+2}^{\infty} | a_{nk} | \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{a_{k-1}}{\lambda^2}\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{a_{k-1}}{\lambda^2}\prod_{j=k}^{n-2} | 1-\frac{a_j}{\lambda} |\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} + \frac{a_{k-1}}{\lambda^2}\left[1 + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-2} |1 - \frac{a_j}{\lambda}|}{\prod_{j=0}^{k-1} |1 - \frac{a_j}{\lambda}|}\right]$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{a_{k-1}}{|\lambda|^2}\left[1 + (k-1)^{\alpha L} \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{\alpha L}}\right]$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{a_{k-1}}{|\lambda|^2}\left[1 + (k-1)^{\alpha L} \int_{k+1}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{\alpha L}}\right]$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{a_{k-1}}{|\lambda|^2}\left[1 + (k-1)^{\alpha L} \frac{k^{1-\alpha L}}{\alpha L - 1}\right] \tag{4.4.15}$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|^2}\left[a_{k-1} + k a_{k-1} k^{\alpha L - 1} \frac{k^{1-\alpha L}}{\alpha L - 1}\right]$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{a_{k-1}}{|\lambda|} + \frac{O(1)}{|\lambda|(\alpha L - 1)}\right]$$

$$= O(1)$$

elde ederiz. Böylece $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olur, yani $A \in B(\ell_1)$ dir. O halde $Ay = x \in \ell_1$ elde ederiz ki bu da T^* dönüşümünün örten olduğunu gösterir. Sonuç olarak $T \in III_1$ ve $\lambda \in III_1\sigma(M,c)$ elde edilmiş olur. ∎

Teorem 4.4.2: *$\lambda \notin S$, $\lambda \neq L$ ve $\alpha L = 1$ olsun. Bu durumda $\lambda \in II_2\sigma(M,c)$ dir.*

İspat . $\lambda \notin S$ olduğundan $T = \lambda I - M$ operatörüne karşılık gelen matris normal bir matristir. O halde $T = \lambda I - M$ birebirdir. $T = \lambda I - M \in (1)$ veya $T = \lambda I - M \in (2)$ dir.

$T^* = \lambda I - M^*$ adjoint operatörününü göz önüne alalım. Eğer $T^*x = \theta$ ise (4.4.1) e göre

$$\begin{aligned}
&(\lambda - L)x_0 &&= 0\\
&\qquad (\lambda - a_0)x_1 &&-a_1x_2 - a_2x_3 - \ldots = 0\\
& &&(\lambda - a_1)x_2 - a_2x_2 - \ldots = 0\\
& &&\ddots
\end{aligned}$$

denklemleri gerçeklenir. Yani $(\lambda - L)x_0 = 0$ $(x_0 = 0)$ ve $n \geq 1$ çin

$$\prod_{k=0}^{n-2}(1 - \frac{a_k}{\lambda})x_1$$

olur. $\alpha L = 1$ olduğundan

$$x = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell_1 \iff x_1 = 0 \iff x = \theta$$

olacaktır. Böylece T^* birebirdir. Dolayısıyla $T^* \in (1) \cup (2)$ dir. Diagram (1.4.1) den $T \in I_1 \cup II_2$ dir. $\lambda \in \sigma(M, c)$ olduğundan $T \notin I_1$ dir. Böylece $T \in II_2$ olmalıdır. Yani $\lambda \in II_2\sigma(M, c)$ elde edilir. ∎

Uyarı : 1. $\lambda = \frac{1}{j}$; $j = 2, 3, \ldots$ için $\lambda \in III_1\sigma(M, c)$

ve

(2) $1 \in III_1\sigma(M, c)$

olduğu Wenger tarafından 1975 yılında ispatlanmıştır.

4.5 Spektrumun Toplanabilme Teorisine Uygulaması

Kısım 3.7 deki gibi, bu kısımda da spekrumun toplanabilme teorisine ilişkin bir uygulaması olarak bir Mercerian Teoremi vereceğiz.

Teorem 4.5.1: $\lim_n (n+1)a_n = 1$ *olsun.*

(i) Eğer $Re\alpha > 0$ *ve* $\lim(\alpha x + (1-\alpha)Mx) = t$ *ise* $\lim x = t$ *dir.*

(ii) $Re\alpha < 0$ *ve* $\alpha \neq a_m$, $(m = 0, , 1, 2, ...)$ *olsun. Eğer* $\lim(\alpha x + (1-\alpha)Mx) = t$ *ise ya* $\lim x = t$ *ya da* x *sınırsızdır.*

(iii) Eğer $Re\alpha = 0$ $(\alpha \neq 0)$ *ise* $\alpha I + (1-\alpha)M$ *operatörü sınırlı ıraksak bir dizi limitler.*

İspat . $\lim_n (n+1)a_n = 1$ ise Teorem 2.3.3(a) dan M regüler bir matristir.

(i) $\lim(\alpha x + (1-\alpha)Mx) = t$ olsun. $\alpha = 1$ için $\alpha I + (1-\alpha)M = I$ olacağından $\lim x = t$ gerçeklenir. Şimdi de $\alpha \neq 1$ ve $Re\alpha > 0$ olsun. $Re\alpha > 0 \iff Re\dfrac{\alpha - 1}{\alpha} < 1$ olduğundan Teorem 4.2.3 den $\lambda := \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} \in \rho(M, c) \iff Re\dfrac{\alpha - 1}{\alpha} < 1 \iff Re\alpha > 0$ ve böylece Lemma 2.2.12den $\lim(\alpha x + (1-\alpha)Mx) = t$ olması $\lim x = t$ olmasını gerektirir.

(ii) $Re\alpha < 0$ ve $\alpha \neq a_m$, $m = 0, , 1, 2, ...$ olsun. Bu durumda

$$Re\alpha < 0 \iff Re\frac{1}{\lambda} = Re\frac{\alpha - 1}{\alpha} < 1 \iff \lambda = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \in III_1\sigma(M, c) \iff [\alpha I + (1-\alpha)M]^{-1}$$

mevcut ve sınırlı oldğundan $R(\alpha I + (1-\alpha)M)$, c içinde kapalıdır. Lemma 2.2.11den $\alpha I + (1-\alpha)M$ sınırlı ıraksak hiç bir dizi limitlemez. Böylece $\lim \alpha x + (1-\alpha)Mx = t$ ise ya $x \in c$ ya da x sınırsızdır. eğer $x \in c$ ise $\lim Mx = \lim x$ olacağından $\lim \alpha x + (1-\alpha)Mx = \alpha x + (1-\alpha)\lim Mx = \lim x = t$ dir.

(iii) $Re\alpha = 0$ $(\alpha \neq 0)$ olsun.

$Re\alpha = 0 \iff Re\dfrac{1}{\lambda} = Re\dfrac{\alpha - 1}{\alpha} = 1$ olduğundan Teorem 4.4.2 den $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} \in II_2\sigma(M, c)$ dir. O halde $[\alpha I + (1-\alpha)M]^{-1}$ mevcut fakat sürekli değil ve $Re(\alpha I + (1-\alpha)M) \neq c$ ve $\overline{Re(\alpha I + (1-\alpha)M)} = c$ dir. Yani $Re(\alpha I + (1-\alpha)M)$, c içinde kapalı değildir. Böylece Lemma 2.2.11den $\alpha I + (1-\alpha)M$ sınırlı , ıraksak en az bir dizi limitler.

Kaynaklar

BORWEIN,D., and JAKIMOWSKI,A. Matrix Operators on ℓ_p.

Rocky Mountain J.Mathematics 4(1979),463-477.

BROWN,A., HALMOS,P.R. and SHEILDS,A.L. Cesàro Operators.

Acta.Sci.Math. 26(1965),125-137.

BROWN,A.,and PAGE,E. Elements of Funtional Analysis.

Von Nostrand Reinhold Comp.(1970).

CATRLIDGE, J.M. Weighted Mean Matrices as Operators on ℓ_p.

Ph.D.Thesis. Indiana University (1978)

CASS,F.P and RHOADES,B.E. Mercerian Theorems via Spectral Theory.

Pasific j.Math.73(1977), 63-71.

DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.T. Linear Operators.

Interscience Publishers, Inc.New York (1978).

GOLDBERG, S. Unbounded Linear Operators.

Mc Graw-Hill Book Comp. (1966).

GONZALEZ, M. The Fine Spectrum of the Cesàro Operator in ℓ_p $(1 < p < \infty)$

Arch. Math 44(1985),355-385.

HARDY, G.H. Divergent Series.

Oxford University Press (1949).

HEUSER, H.G. Functional Analysis.

A.Wiley-Interscience Publication (1982).

HUTSON, V. and PYM, J.S. Applications of Functional Analysis and Operator Theory.

Academic Press.London (1980).

KNOPP, K. and LORENTZ, G.G. Beitröge zur absoluten limitierung.

Arch.Math. 2(1949), 10-16.

KNOPP, K. Theory and Application of Infinite Series.

Blackie and Son Ltd. (1971).

KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Aplications.

John Wiley and Sons New York (1978).

LEIBOWITZ, G. Spectra of Discrete Cesàro Operators.

Tamkang J.Math. 3(1972), 123-132.

LEIBOWITZ, G.Rhaly Matrices.

J. Math. Analysis and Aplications. 128(1987), 272-286.

MADDOX, I.J. Elements of Functional Analysis.

Cambridge University Press. (1970).

OKUTOYI, J.I. On the Spectrum of the Cesàro Operator.

Ph.D.Thesis. Birmingham University (1986).

OKUTOYI, J.I. On the Spectrum of C_1 as an Operator on bv_0.

J. Austral. Math. Soc.(Series A) 48 (1980), 79-86.

OLMSTED, J.M.H. Advanced Calculus.

Appleton-Centruy-Crofts, New York (1961).

PETERSEN, G. Regular Matrix Transformations.

Mc. Graw-Hill Publishing Comp. (1966).

POWELL, R.E. and SHAH, S.M. Summability Theory and Aplications.

Prentice-Hall of India Private Limited. New Delhi (1988).

READE, J.B. On the Spectrum of the Cesàro Operators.

Bull. London Math. Soc. 17(1985), 263-267.

RHALY, JR.H.C. p-Cesàro Matrices.

Houston J.Math. 15(1989), 137-146.

RHALY, JR.H.C. Terrace Matrices.

Bull. London Math. Soc. 21(1989), 399-406.

RHOADES, B.E. The Fine Spectra for Weighted Mean Operators.

Pasific J. Math. 104(1983), 219-230.

RHOADES, B.E. The Spectrum of Weighted Mean Operators.

Canad. Math. Bull. 30(1987), 446-449.

RHOADES, B.E. The Fine Spectra for Weighted Mean Operators in $B(\ell_p)$.

Int.Equ. and Op.Theory 13(1989), 82-98.

RUDIN, W. Functional Analysis.

Mc Graw-Hill Book Comp. (1973).

SIMMONS, G.F. Introduction to Topology and Modern Analysis.

Mc Graw-Hill Book Comp. (1963).

TAYLOR, A.E. Introduction to Functional Analysis.

John Wiley and Sons (1980).

WENGER, R.B. The Fine Spectra of Hölder Summability Operators.

Indian J. Pure. Appl. Math. 6(1965), 695-712.

WILANSKY, A. Summability Through Functional Analysis.

North Holland (1984).

WILANSKY, A. Topological Divisors of Zero and Tauberian Theorems.

Trans. Am. Math. Soc. 113(1964), 240-251.