H^p UZAYLARI

Ali AKBULUT

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1998

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

H^p UZAYLARI

Ali AKBULUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 10/8/1998 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği / ~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

C Orhan

Prof. Dr. Cihan ORHAN (Danışman) | Prof.Dr. Elgiz BAİRAMOV | Prof.Dr. M. Ali SARIGÖL

Ali Sarıgöl

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

H^p UZAYLARI

Ali AKBULUT

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

1998, Sayfa: 57

Jüri: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Prof.Dr. Elgiz BAİRAMOV

Prof.Dr. M. Ali SARIGÖL

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin çalışma kapsamı anlatılacaktır.

İkinci bölümde, H^p sınıfları tanıtılıp, kısaca topolojik yapısı incelenecektir. Ayrıca H^p üzerindeki sürekli lineer fonksiyoneller incelenip H^p uzayının B^p uzayı ile ilgili özellikleri verilecektir. Son olarak H^p uzayından ℓ^p ve ℓ^∞ gibi uzayları içine alan çarpan uzayı belirlenecektir.

Üçüncü bölümde, $z_1, z_2, \ldots$ açık birim diskte farklı noktalar ve $w_1, w_2, \ldots$ keyfi kompleks sayılar olmak üzere, "Genel interpolasyon problemi"; $f(z_k) = w_k$ $k = 1,2,3,\ldots$ olacak şekilde bir $f \in H^p$ fonksiyonunun mevcut olması için $\{z_k\}$ ve $\{w_k\}$ dizi çiftlerini karakterize etmek ve bütün interpolasyon fonksiyonlarını bulmaktır. Fakat böyle genel formdaki problem zordur ve henüz tamamı çözülememiştir. Bu bölümde "Evrensel (Üniversal) İnterpolasyon Dizilerinin" açıklanmasına ilişkin problemlere dikkatimizi çevireceğiz.

Son bölüm olan dördüncü bölümde önce $H^p(w)$ dizi uzayı tanıtılacak ve bir BK uzayı olduğu gösterilecektir. Ayrıca $H^p(w)$ uzayının kama (wedge) ve zorlayıcı (coercive) uzay olması gibi özellikler incelenecektir.

ANAHTAR KELİMELER: H^p uzayları, Çarpan Uzayları, İnterpolasyon Teorisi, Evrensel İnterpolasyon dizileri, Blaschke çarpımı.

ABSTRACT

Masters Thesis

H^p SPACES

Ali AKBULUT

Ankara University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Departmant of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN

1998, Page: 57

Jury: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Prof.Dr. Elgiz BAİRAMOV

Prof.Dr. M. Ali SARIGÖL

This thesis consist of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, the H^p classes are defined and the topological structure of H^p classes is investigated. Then continuous linear functionals on H^p are determined and common properties of H^p spaces and B^p spaces are given. At the end of the chapter, the multiplier spaces of H^p into ℓ^p and ℓ^∞ are determined.

Chapter 3 deals with interpolation. Let $z_1, z_2, \ldots$ be distinct points in the open unit disc, and let $w_1, w_2, \ldots$ be arbitrary complex numbers. The general interpolation problem is to characterize the pairs of sequences $\{z_k\}$ and $\{w_k\}$ for which there exists a function $f \in H^p$ with $f(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3,\ldots$, and to find all of interpolating functions. But in such general form the problem is difficult, and has not yet been fully solved. In this chapter we turn our attention to the more modest problem of describing the "universal interpolation sequences".

In the last chapter, sequence space $H^p(w)$ is introduced and it is shown that $H^p(w)$ is BK-space. Furthermore, it is also shown that $H^p(w)$ space is a wedge space and a coercive space.

KEY WORDS: H^p spaces, Multiplier spaces, Interpolation theory, Universal interpolation sequences, Blaschke product.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Cihan ORHAN'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

H^p : Hardy uzayları

$M_p(r,f) := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{1/p}$; $|z| < r < 1$, $0 < p < \infty$

$M_\infty(r,f) := \underset{0\leq\theta\leq 2\pi}{\text{maks}} |f(re^{i\theta})|$; $p = \infty$

$(H^p)^*$: H^p, $0<p<1$, uzayının dual uzayı

$\varphi_{n,z}(f) := \dfrac{f^{(n)}(z)}{n!}$; $f \in H^p$, $|z| < 1$ ve $n = 0,1,2,\ldots$

$M(X,Y)$: X dizi uzayından Y dizi uzayı içine olan çarpan uzay

$o(1)$: Sıfıra yakınsak ifade,

$O(1)$: Sınırlı ifade,

$B := B(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \dfrac{\overline{z}_k}{|z_k|} \dfrac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}$, Blaschke çarpımı

$T_p(f) := \left\{ (1-|z_k|^2)^{1/p} f(z_k) \right\}$; $f \in H^p$

$H^p(w) := \left\{ \{f(w_n)\} : f \in H^p \right\}$

$\delta_k^n := \begin{cases} 0 & ; \ k \neq n \\ 1 & ; \ k = n \end{cases}$

$C_r(t) := \dfrac{1}{1 - re^{it}}$, $-\pi \leq t \leq \pi$

$C_z(t) := \overline{C_r(\theta - t)}$, $-\pi \leq t \leq \pi$

E' : E FK-uzayının dual uzayı

E^* : E BK-uzayının dual uzayı

E^∞ : $\{\delta^n\}$ dizilerinin lineer gereni

$e := (1,1,\ldots)$

$\psi^n := e - \sum_{k=1}^{n} \delta^k$

s : Reel ya da kompleks terimli tüm diziler uzayı

c_0 $:= \left\{x \in s : \lim_n x_n = 0\right\}$

c $:= \left\{x \in s : \lim_n x_n \text{ mevcut}\right\}$

bv $:= \left\{x \in s : \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| < \infty\right\}$

ℓ^p $:= \left\{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \, , \; p > 0\right\}$

ℓ^∞ $:= \left\{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\right\}$

A $:= (a_{nk})$ sonsuz matris

Ax $:= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \; x_k\right\}$ dizisi

E_A $:= \left\{x \in s : Ax \in E\right\}$

c_A $:= \left\{x \in s : Ax \in c\right\}$

1. BÖLÜM

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezinde öncelikle H^p uzayları tanıtılacak, daha sonra ise topolojik yapısı ve sürekli duali incelenecektir (Walters (1950); Hoffman (1962); Duren (1970)). Ayrıca bu uzayları içeren B^p uzayları tanıtılacaktır (Duren-Shields (1969)). Daha sonra, H^p uzayına ait olan analitik fonksiyonların Taylor katsayılarının incelenmesiyle ℓ^p ve ℓ^∞ gibi çeşitli dizi uzayları içine olan "çarpan" uzaylarının belirlenmesi amaçlanmaktadır (Duren-Shields (1970)).

Son olarak H^p uzayları yardımıyla tanımlanan $H^p(w):=\left\{\left\{f(w_n)\right\} : f \in H^p\right\}$ uzaylarının conull ve kama (wedge) olması gibi bazı özelliklerinin incelenmesi amaçlanmaktadır (Snyder (1971)).

2. BÖLÜM

2. H^p $(0<p<1)$ UZAYI

Bu bölümde H^p sınıfları tanıtılıp, topolojik yapısı incelenecek ve ayrıca H^p üzerindeki sürekli lineer fonksiyoneller belirlenecektir. Daha sonra B^p uzayı tanıtılıp H^p uzayı ile ilişkisi verilecektir. Son olarak H^p uzayından ℓ^p ve ℓ^∞ gibi bazı dizi uzayları içine olan çarpan uzayı incelenecektir.

2.1. H^p Uzayları

$|z|<1$ birim diskinde analitik ve $0 \le r < 1$ için

$$M_p(r,f) := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad 0<p<\infty$$

ve

$$M_\infty(r,f) := \underset{0\le\theta\le2\pi}{\text{maks}} |f(re^{i\theta})|$$

sınırlı kalacak şekildeki f fonksiyonlarının sınıfı H^p $(0<p\le\infty)$ ile gösterilecektir. Böylece H^∞, birim diskteki sınırlı analitik fonksiyonlarının sınıfıdır (Walters (1950), Duren (1970)).

Şimdi, H^p uzayına ait olduğu halde H^1 uzayına ait olmayan bir örnek verelim.

Burada belirtelim ki $M_p(r,f)$, r ye göre artan bir fonksiyondur (Duren (1970), sf 9, Teorem 1.5).

ÖRNEK 2.1.1: $f(z)=(1-z)^{-1}$ ile tanımlı fonksiyonun $p<1$ için H^p uzayına ait olduğunu fakat $p=1$ için H^1 uzayına ait olmadığını gösterelim.

$$\begin{aligned} |1-re^{i\theta}|^{-2} &= \left[(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})\right]^{-1} \\ &= (1-re^{-i\theta}-re^{i\theta}+r^2)^{-1} \end{aligned}$$

$$=\left(1-2r(\frac{e^{-i\theta}+e^{i\theta}}{2})+r^2\right)^{-1}$$

$$=(1-2r\cos\theta+r^2)^{-1}$$

olduğundan

$$\left|1-re^{i0}\right|^{-p}=(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}$$

elde edilir.

Şimdi $p<1$ olsun. $f\in H^p$ olduğunu göstermek için $r\to 1$ olmak üzere

$$M_p(r,f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta\right\}^{1/p}$$

ifadesinin sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

Şimdi $0\le\theta\le\delta$ ve δ yeterince küçük olmak üzere

$$\lim_{r\to1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta\right\}^{1/p}=\lim_{r\to1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta\right\}^{1/p}$$

$$+\lim_{r\to1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta\right\}^{1/p}$$

$$+\lim_{r\to1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi-\delta}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta\right\}^{1/p}$$

$$+\lim_{r\to1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta\right\}^{1/p}$$

ifadesinin sınırlı olduğunu gösterelim.

$0\le\theta\le\delta$ veδ yeterince küçük alınmak üzere

$$1-2r\cos\theta+r^2\ge1-2r\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{24}\right)+r^2$$

$$= (1-2r+r^2) + r\theta^2\left(1-\frac{\theta^2}{12}\right)$$

$$= (1-r^2) + r\theta^2\left(1-\frac{\theta^2}{12}\right)$$

$$\geq \frac{r\theta^2}{2}$$

$$\geq \frac{\theta^2}{4}$$

olacağından

$$(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2} \leq 4^{p/2}\theta^{-p}$$

elde edilir.

Böylece, $0 \leq \theta \leq \delta$ olmak üzere

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta (1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}d\theta\right\}^{1/p} \leq \left\{\frac{1}{2\pi}4^{p/2}\int_0^\delta \theta^{-p}d\theta\right\}^{1/p}$$

$$= \left\{\frac{1}{2\pi}4^{p/2}\left\{\frac{1}{1-p}\theta^{1-p}\right\}\Big|_0^\delta\right\}^{1/p}$$

$$= \left\{\frac{4^{p/2}(\delta^{1-p})}{2\pi(1-p)}\right\}^{1/p}$$

$$= \frac{2^{1-1/p}\delta^{1/p-1}}{\pi^{1/p}(1-p)^{1/p}}$$

olduğundan

$$\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta (1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}d\theta\right\}^{1/p}$$

mevcuttur.

Şimdi de $r \to 1$ için

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}d\theta\right\}^{1/p} \quad ; \ \delta\le\theta\le\pi$$

ifadesinin sınırlı olduğunu gösterelim.

$$\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}d\theta\right\}^{1/p}$$

$$\le\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{(1-2r(1-\varepsilon)+r^2)^{p/2}}d\theta\right\}^{1/p} \quad ; \ \theta\in[\delta,\pi] \text{ için } \cos\theta\le 1-\varepsilon\,;\varepsilon>0$$

$$=\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{((1-r)^2+2r\varepsilon)^{p/2}}d\theta\right\}^{1/p}$$

$$\le\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{(2r\varepsilon)^{p/2}}d\theta\right\}^{1/p}$$

$$=\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi(2r\varepsilon)^{p/2}}(\pi-\delta)\right\}^{1/p}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2\pi}\right)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

olduğundan

$$\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}d\theta\right\}^{1/p}$$

mevcuttur.

$\int_{\pi}^{2\pi-\delta}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}d\theta$ integralinde $\theta=2\pi-u$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_{\pi}^{2\pi-\delta}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}d\theta=\int_{\delta}^{\pi}(1-2r\cos u+r^2)^{-p/2}du$$

olduğu görülür. O halde yukarıda gösterildiği gibi

$$\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(1-2r\cos u+r^2)^{-p/2}\,du\right\}^{1/p}$$

mevcuttur.

Yine,

$\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta$ integralinde de $\theta=2\pi-u$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta=\int_{0}^{\delta}(1-2r\cos u+r^2)^{-p/2}\,du$$

olduğu görülür. Böylece, daha önce olduğu gibi

$$\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\delta}(1-2r\cos u+r^2)^{-p/2}\,du\right\}^{1/p}$$

var olduğu görülebilir.

Sonuç olarak,

$$\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta\right\}^{1/p}$$

limiti mevcut olduğundan $f(z)=(1-z)^{-1}$ ile tanımlı fonksiyon, $p<1$ için H^p uzayına aittir.

$p=1$ durumunda

$$\int_{0}^{2\pi}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta\geq\int_{0}^{\pi/2}(1-2r\cos\theta+r^2)^{-p/2}\,d\theta\ ;\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

$$1-2r\cos\theta+r^2=(\cos\theta-r)^2+1-\cos^2\theta$$

$$=(\cos\theta-r)^2+\sin^2\theta\quad;\quad|\sin\theta|\leq|\theta|$$

$$\leq (\cos\theta - r)^2 + \theta^2$$

$$\leq (1-r)^2 + \theta^2 \quad ; \quad \cos\theta \leq 1$$

olduğundan

$$(1-2r\cos\theta + r^2)^{-1/2} \geq ((1-r)^2 + \theta^2)^{-1/2}$$

elde edilir. O halde

$$\int_0^{\pi/2} (1-2r\cos\theta + r^2)^{-1/2} d\theta \geq \int_0^{\pi/2} ((1-r)^2 + \theta^2)^{-1/2} d\theta$$

$$= \ln\left(\frac{(1-r) + \sqrt{(1-r)^2 + \frac{\pi^2}{4}}}{2(1-r)} \right)$$

$$\lim_{r\to 1} \ln\left(\frac{(1-r) + \sqrt{(1-r)^2 + \frac{\pi^2}{4}}}{2(1-r)} \right) = +\infty$$

olduğundan $f(z) = (1-z)^{-1}$ ile tanımlı fonksiyon $p = 1$ için H^1 uzayına ait değildir.

2.2. $H^p(0 < p < 1)$ Uzayının Topolojisi

Bu kısımda H^p $(0 < p < 1)$ uzayının topolojisi tanıtılacaktır.

f nin normu; keyfi $f \in H^p$ için

$$\|f\| := \sup_{0\leq r<1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır. Fakat tanımlanan bu norm $0 < p < 1$ için üçgen eşitsizliğini gerçeklemediğinden bilinen anlamda bir norm değildir (Walters (1950)).

$0 < p < 1$ ve $U \subseteq H^p$ olsun. Keyfi bir $f_0 \in U$ için

$$B_{f_0}(r) := \left\{ f : \left\| f - f_0 \right\| < r \right\} \subset U$$

olacak şekilde bir $r > 0$ varsa U cümlesine H^p uzayında "açık" diyeceğiz (Walters (1950)).

Bu topoloji altında H^p $(0 < p < 1)$ uzayının tam lineer topolojik bir uzay olduğu ileride gösterilecektir.

Şimdi ileride sık sık kullanılacak olan bir teoremi verelim.

TEOREM 2.2.1: $f \in H^p$ ise bu durumda

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|}{(1-|z|)^{1/p}} \; ; \; |z| < 1 \text{ (Walters (1950)).}$$

İSPAT: Kabul edelim ki $f \neq 0$ olsun. F-Riesz Ayırma Teoreminden (Duren (1970), sf 20, Teorem 2.5) dolayı $|z| < 1$ üzerinden $h(z)$, regüler ve sınırlı; $g \in H^p$, $g(z) \neq 0$ ve $\|g\| = \|f\|$ olmak üzere $f(z) = g(z).h(z)$ şeklinde yazılabilir. Böylece $[g(z)]^p$ nin H^1 in elemanı olduğu açıktır.

Cauchy integral formülünden,

$$[g(z)]^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[g(\rho e^{i\theta})]^p \rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta} - z} d\theta \quad ; \quad |z| < \rho < 1$$

yazılabilir.

Bu durumda

$$|g(z)|^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[g(\rho e^{i\theta})]^p \rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta} - z} d\theta \right|$$

$$\leq \frac{\rho}{\rho - |z|} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \right\}$$

$$\leq \frac{\rho}{\rho - |z|} \|g\|^p = \frac{\rho}{\rho - |z|} \|f\|^p$$

olup

$$|f(z)|^p \le \frac{1}{1-|z|}\|f\|^p$$

elde edilir.

Şimdi, aşağıdaki teoremin ispatında kullanılacak olan sonucu ispatsız olarak verelim.

SONUÇ 2.2.2: Kabul edelim ki $\{f_n\}$ normlu bir lineer uzayda bir Cauchy dizisi olsun (Yani $m,n \to \infty$ için $\|f_n - f_m\| \to 0$ olsun). Bu durumda $\{f_n\}$ dizisi, $|z| < 1$ içinde analitik bir f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Hatta yakınsaklık $|z| < r < 1$ bölgesinde düzgündür (Taylor (1950)).

TEOREM 2.2.3: H^p $(0 < p < 1)$ uzayı tamdır (Walters (1950)).

İSPAT: Kabul edelim ki $\{f_n\}$ dizisi H^p uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Yukarıdaki sonuçtan $\{f_n\}$ dizisi, $|z| < 1$ içinde analitik olan bir f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır; hatta yakınsaklık $|z| < r < 1$ bölgesinde düzgündür. Böylece $r < 1$ ise,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_n(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}^{1/p} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}^{1/p}$$

Şimdi $\{f_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\|f_n\|$ sınırlıdır. $\forall n$, $\|f_n\| \le M$ diyelim. Bu durumda

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}^{1/p} \le M$$

dır.

Bu da $f \in H^p$ olduğunu ispatlar.

$\varepsilon > 0$ verildiğinde en az bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki $m,n \ge n_1$ için $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ olmasını gerektirir. Bu durumda $r > 1$ ise,

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|(f_n - f_m)(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right\}^{1/p} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right\}^{1/p}$$

$$\leq \left\|f_n - f_m\right\| < \varepsilon$$

$m \to \infty$ ve $n \geq n_1$ ise,

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|(f_n - f)(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right\}^{1/p} \leq \varepsilon$$

elde ederiz.

Buradan n, r-ye bağlı olmaksızın $n \geq n_1$ iken $\left\|f_n - f\right\| < \varepsilon$ bulunur. Böylece H^p de $f_n \to f$ dir ve H^p tamdır.

UYARI: H^p $(0 < p < 1)$ uzayının bir topolojik vektör uzayı olduğu da gösterilebilir (Walters (1950)).

$L^p[0,2\pi]$ üzerindeki topoloji şu şekilde tanımlanmıştır:

$\phi \in L^p[0,2\pi]$ olmak üzere

$$\|\phi\| = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\phi(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p}$$

tanımlayalım.

$U \subseteq L^p[0,2\pi]$ olsun. Keyfi $\phi_0 \in U$ için

$$B_{\phi_0}(r) := \left\{\phi : \left\|\phi - \phi_0\right\| < r\right\} \subset U$$

olacak şekilde bir $r > 0$ varsa U cümlesi $L^p[0,2\pi]$ de "açık" diyelim. Ayrıca $L^p[0,2\pi]$ uzayı yukarıda tanımlanan topoloji altında lineer topolojik uzaydır (Day (1940)).

Şimdi, H^p $(0 < p < 1)$ uzayı ile $L^p[0,2\pi]$ uzayı arasındaki bağıntıyı veren teoremi ifade edelim.

TEOREM 2.2.4: H^p $(0 < p < 1)$ uzayı, $L^p[0,2\pi]$ nin kapalı bir alt uzayına denktir (Yani, H^p uzayından $L^p[0,2\pi]$ uzayının kapalı bir alt uzayı üzerine en az bir Γ cebirsel izomorfizmi vardır. Burada izomorfizm normu korur) (Walters (1950)).

İSPAT: $f \in H^p$ ise, bu durumda $[0,2\pi]$ üzerinde $\lim\limits_{r\to1} f(re^{i\theta})$ hemen her yarde mevcuttur (Riesz (1923)) ve $\lim\limits_{r\to1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ şeklinde tanımlarsak Hardy ve Littlewood'un bir teoreminde (Duren (1970), sf 12, Teorem 1.9) $f(e^{i\theta}) \in L^p[0,2\pi]$ elde ederiz ve

$$\|f\| = \lim_{r\to1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right\}^{1/p}$$

$$= \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(e^{i\theta})\right|^p d\theta\right\}^{1/p}$$

$$= \left\|f(e^{i\theta})\right\|$$

elde edilir. O halde H^p nin bir elemanı olan f, $L^p[0,2\pi]$ nin bir elemanı olan $f(e^{i\theta})$ ile aynı norma sahiptir. Şimdi

$$\Gamma : H^p \to L^p[0,2\pi]$$
$$f \to \Gamma(f) = f(e^{i\theta})$$

şeklinde tanımlayalım. Γ nın 1-1 olduğu Γ dönüşümünün normu koruma özelliğinden açıktır.

Ayrıca Γ dönüşümünün düzgün sürekli olmasından H^p deki bir Cauchy dizisi, Γ nın değer kümesinde de bir Cauchy dizisidir. $L^p[0,2\pi]$ uzayı tam olduğundan Cauchy dizisi yakınsaktır. O halde Γ nın değer cümlesi kapalıdır.

2.3. Lineer Fonksiyoneller

H^p $(0 < p < 1)$ üzerindeki lineer bir φ fonksiyoneli

$$\|\varphi\| := \sup_{\|f\|_p \le 1} \|\varphi(f)\| < \infty$$

ise sınırlıdır denir ve $\varphi \in (H^p)^*$ şeklinde gösterilir.

$(H^p)^*$, herhangi normlu uzayın dual uzayı gibidir ve aynı zamanda $(H^p)^*$ bir Banach uzaydır.

Her $f \in H^p$, $|z| < 1$ ve $n = 1,2,3,\ldots$ için

$\varphi_{n,z}(f) := \dfrac{f^{(n)}(z)}{n!}$ ve $|\varphi(f)| \le \|\varphi\| \|f\|$ dir. (Duren, Romberg and Shields (1969)).

TEOREM 2.3.1: $\varphi_{n,z} \in (H^p)^*$, $n = 0,1,\ldots$, $|z| < 1$ ve

$$\|\varphi_{0,z}\| \le \frac{1}{(1-|z|)^{1/p}},$$

$$\rho_{n,z} = \frac{\left[|z|(1-p) + pn + \left\{\left[|z|(1-p) + pn\right]^2 + 4p|z|(pn+1)\right\}^{1/2}\right]}{2(pn+1)}$$

olmak üzere $n > 0$ için,

$$\|\varphi_{n,z}\| \le \frac{\rho_{n,z}}{(\rho_{n,z} - |z|)^{n+1}(1-\rho_{n,z})^{1/p}}$$

dir (Walters (1950)).

İSPAT: $n = 0$ olması durumunda Teorem 2.2.1.in direkt bir sonucu olduğundan, $n > 0$ kabul edebiliriz. $|z| < \rho < 1$ olsun. O halde regüler bir fonksiyonun türevi için Cauchy İntegral formülünden

$$\varphi_{n,z}(f)=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}=\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\rho e^{i\theta})i\rho e^{i\theta}}{(\rho e^{i\theta}-z)^{n+1}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\rho e^{i\theta})\rho e^{i\theta}}{(\rho e^{i\theta}-z)^{n+1}}d\theta$$

Buradan

$$f^{(n)}(z)=\varphi_{n,z}(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\rho e^{i\theta})\rho e^{i\theta}}{(\rho e^{i\theta}-z)^{n+1}}d\theta$$

olup,

$$\left|f^{(n)}(z)\right|=\left|\varphi_{n,z}(f)\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\rho e^{i\theta})\rho e^{i\theta}}{(\rho e^{i\theta}-z)^{n+1}}d\theta\right|$$

$$\leq\frac{\rho}{(\rho-|z|)^{n+1}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta}\right|d\theta\right\}$$

Teorem 2.2.1 den;

$$\leq\frac{\rho}{(\rho-|z|)^{n+1}}\frac{\|f\|}{(1-\rho)^{1/p}}$$

elde edilir.

Böylece $\varphi_{n,z}\in(H^p)^*$ olduğu açıktır ve $|z|<\rho<1$ ise bu durumda

$$\|\varphi_{n,z}\|\leq\frac{\rho}{(\rho-|z|)^{n+1}}\frac{1}{(1-\rho)^{1/p}}$$

dir.

O halde teoremin sonucu $|z|<\rho<1$ aralığında $\dfrac{\rho}{(\rho-|z|)^{n+1}(1-\rho)^{1/p}}$ fonksiyonunun minimize edilmesiyle gösterilmiş olur.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 2.3.1 den kolayca elde edilir.

SONUÇ 2.3.2: $f \in H^p$ sıfir değilse, bu durumda $\exists n \in \eta_n(f) \neq 0$ özelliğine sahip H^p de $\{\eta_n\}$ lineer fonksiyonların sayılabilir bir sınıfi mevcuttur (Walters (1950)).

Şimdi ileride göz önüne alınacak bir teoremi ispatsız olarak verelim.

TEOREM 2.3.3: E bir metrik uzay, $G \subseteq E$ ve G, E de ikinci kategoriden olsun. $\Phi = \{\phi\}$, E üzerinde reel değerli ve sürekli fonksiyonların bir ailesi olduğunu kabul edelim. Ayrıca her bir ϕ için G üzerinde üstten sınırlı olduğunu kabul edelim. O halde $U \subseteq E$ olacak biçimde bir U küresi vardır ve bu küre üzerinde $\{\phi\}$ üstten düzgün sınırlıdır (Banach (1932); Teorem 11).

TEOREM 2.3.4: Kabul edelim ki, $\mathcal{F}$, H^p $(0 < p < 1)$ nin elemanlarının bir ailesi olmak üzere; her bir sabit $\varphi \in (H^p)^*$ için $\varphi(f)$, $\mathcal{F}$ üzerinde sınırlıdır. O halde her $f \in \mathcal{F}$ için

a) $|\varphi(f)| \leq M\|\varphi\|$,

b) $|f(z)| \leq \dfrac{M}{(1-|z|)^{1/p}}$,

c) $|\varphi_{n,z}(f)| \leq M\left\{\dfrac{\rho_{n,z}}{(\rho_{n,z}-|z|)^{n+1}(1-\rho)^{1/p}}\right\}$, $n > 0$

olacak şekilde bir $M > 0$ vardır (Walters (1950)).

İSPAT: Şimdi $G \equiv E \equiv (H^p)^*$ olacak şekilde tanımlayalım. $(H^p)^*$ bir Banach uzayı olduğundan Baire teoreminden dolayı kendi içinde ikinci kategoridendir.

$f \in \mathcal{F}$, $\phi_f(\varphi) \equiv |\varphi(f)|$ şeklinde tanımlayalım ve $\Phi \equiv \{\phi_f\}$ olsun.

$$|\phi_f(\varphi) - \phi_f(\varphi')| \leq \phi_f(\varphi - \varphi') = |\varphi(f) - \varphi'(f)|$$

$$\leq \|\varphi - \varphi'\|\|f\|$$

olduğundan ϕ_f, φ de süreklidir.

Şimdi Teorem 2.3.3. den, bazı $m > 0$, $r > 0$ ve $\overline{\varphi}$ için $B_{\varphi'}\left[\left\|\varphi' - \overline{\varphi}\right\| \le r\right]$ üzerinde $\phi_f(\varphi') \le m$ olduğunu görürüz. Böylece φ, $(H^p)^*$ nin sıfır olmayan herhangi bir elemanı olmak üzere, $\varphi' = \frac{r\varphi}{\|\varphi\|} + \overline{\varphi}$ fonksiyoneli için özellikle $\phi_f(\varphi') \le m$ veya $|\varphi'(f)| \le m$ veya $\left|\frac{r\varphi(f)}{\|\varphi\|} + \overline{\varphi}(f)\right| \le m$ veya $\overline{\varphi} \in B_{\varphi'}\left[\left\|\varphi' - \overline{\varphi}\right\| \le r\right]$ olduğundan

$$\frac{r|\varphi(f)|}{\|\varphi\|} \le 2m$$

olduğunu görürüz.

O halde,

$$|\varphi(f)| \le \frac{2m}{r}\|\varphi\|$$

dir ve $M = \frac{2m}{r}$ olsun. Böylece (a) sonucunu elde ederiz. (b) sonucunu $\varphi = \varphi_{0,z}$ alırsak,

$$|\varphi_{0,z}(f)| \le M\|\varphi_{0,z}\|$$

olup Teorem 2.3.1 den

$$\|\varphi_{0,z}\| \le \frac{1}{(1-|z|)^{1/p}}$$

olup,

$$|f(z)| \le \frac{M}{(1-|z|)^{1/p}}$$

elde ederiz.

(c) sonucunu (a) da $\varphi = \varphi_{n,z}$ alırsak

$$|\varphi_{n,z}(f)| \le M\|\varphi_{n,z}\|$$

olup Teorem 2.3.1 den

$$\left\|\varphi_{n,z}\right\| \le \frac{\rho_{n,z}}{(\rho_{n,z}-|z|)^{n+1}(1-\rho_{n,z})^{1/p}} \ , \ n>0$$

olup,

$$\left|\varphi_{n,z}\right| \le M\frac{\rho_{n,z}}{(\rho_{n,z}-|z|)^{n+1}(1-\rho_{n,z})^{1/p}}$$

elde ederiz.

2.4. B^p Uzayı

Bu kısımda H^p $(0<p<1)$ uzayının B^p uzayı ile ilgili özellikleri incelenecektir.

Şimdi B^p uzayının kısaca bir tanımı verilecektir.

p sabit olmak üzere $0<p<1$ olsun.

$$\|f\|_{B^p} = \|f\|_B := \int_0^1 (1-r)^{1/p-2} M_1(r,f)dr < \infty \tag{2.1}$$

olmak üzere birim diskteki analitik f fonksiyonların oluşturduğu uzay B^p uzayı olarak adlandırılacaktır.

H^p ve B^p normlarını kısaca $\|f\|_H$ ve $\|f\|_B$ şeklinde göstereceğiz.

$(H^p)^*$ dual uzayının bir Banach uzay olduğu biliniyor. Bundan dolayı H^p uzayının ikinci dual uzayı da bir Banach uzaydır. Ayrıca H^p nin ikinci dual uzayının içine gömüldüğüne dikkat etmeliyiz (Duren, Romberg and Shields (1969)).

TEOREM 2.4.1: B^p uzayı (2.1) normu ile birlikte bir Banach uzaydır. Bundan başka

i) $|f(z)| \le C_p\|f\|_B(1-r)^{-1/p}$, $f \in B^p$

ii) $f(z) = o((1-r)^{-1/p})$;

iii) Her bir $f \in B^p$ için, $f_\rho(z) = f(\rho z)$ olmak üzere $\rho \to 1$ için B^p normunda $f_\rho \to f$;

iv) H^p ,B^p nin yoğun bir alt cümlesidir.

v) $\|f\|_B \le C_p \|f\|_H$, $f \in H^p$ (Duren, Romberg and Shields (1969)).

İSPAT: B^p nin bir Banach uzayı olduğu geçilecek ve diğerleri gösterilecektir.

i) Herhangi $R < 1$ için

$$\|f\|_B \ge \int_R^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(r,f)\,dr$$

$$\ge M_1(R,f)\left(\frac{1}{p}-1\right)^{-1}(1-R)^{\frac{1}{p}-1}$$

Böylece

$$M_1(R,f) \le \left(\frac{1}{p}-1\right)^{-1}\|f\|_B (1-R)^{1-\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

Buradan (i) ifadesi;

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

Cauchy integralinde $\xi = Re^{i\theta}$ ve $R = \frac{1}{2}(1+|z|)$ alınmak üzere,

$$|f(z)| \le \frac{R}{R-|z|}\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R}|f(\xi)|\,d\theta$$

$$\le \frac{R}{R-|z|}M_1(R,f)$$

(2.2) den;

$$\le \frac{R}{R-|z|}\left(\frac{1}{p}-1\right)\|f\|_B (1-R)^{1-1/p}$$

$$\leq \frac{R}{R-2R+1}\left(\frac{1}{p}-1\right)\|f\|_B(1-R)^{1-1/p}$$

$$\leq \frac{R}{1-R}(1-R)\left(\frac{1}{p}-1\right)\|f\|_B(1-R)^{-1/p}$$

olup,

$$|f(z)| \leq C_p\|f\|_B(1-r)^{-1/p}$$

elde ederiz.

(ii) nin ispatı (i) den elde edilir.

(iii) $f \in B^p$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\int_R^1 (1-r)^{1/p-2} M_1(r,f)dr < \varepsilon \tag{2.3}$$

olacak şekilde $r < 1$ seçilsin. $M_1(r,f)$, r nin artan bir fonksiyonu olduğundan (2.3) de f yerine f_ρ alındığında da doğru kalır.

Şimdi $|z| \leq R$ üzerinde $|f_\rho(z) - f(z)| < \varepsilon$ olduğunda ρ, 1 e yaklaşacak şekilde seçilsin. O halde,

$$\int_0^R (1-r)^{1/p-2} M_1(r,f_\rho - f)dr \leq \int_0^R (1-r)^{1/p-2} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f_\rho - f)(re^{i\theta})| d\theta dr$$

$$\leq \int_0^R (1-r)^{1/p-2}\varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta dr$$

$$\leq \varepsilon\int_0^R (1-r)^{1/p-2}dr$$

$$\leq \varepsilon\|1\|_B$$

olup, bu (2.3) ile birleştirildiğinde

$$\left\|f_\rho - f\right\| \le \varepsilon\|1\|_B + 2\varepsilon$$

elde ederiz, böylece $\rho \to 1$ için normda $f_\rho \to f$ dir.

(iv), (v) $H^p \subset B^p$ olduğunu ve norm eşitsizliğini aşağıda ispatsız olarak ifade edilen teoremden söyleyebiliriz.

TEOREM 2.4.2: $f \in H^p\ (0 < p < 1)$ ise bu durumda C, p ye bağlı bir sabit olmak üzere

$$\int_0^1 (1-r)^{1/p-2} M_1(r,f)dr \le C\|f\|_H$$

dır (Hardy-Littlewood (1932)).

Aynı zamanda, H^p daha büyük bir diskte bütün analitik fonksiyonları içerir ve birçok fonksiyon (iii) den dolayı B^p de yoğundur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Birim diskte analitik olan fonksiyonları bunların Taylor katsayıları ile özdeşleştirerek H^p ve B^p uzaylarını dizi uzayı olarak kabul etmek bazen yararlı olacaktır. Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

ÖNERME 2.4.3: B^p bir BK-uzayı ve H^p bir FK-uzayıdır (Bennett (1973)).

İSPAT: B^p nin bir Banach uzay olduğu Teorem 2.4.1 de verildi. Koordinat fonksiyonellerinin sürekli olduğunu göstermek için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in B^p$$

göz önüne alalım. n yi sabit alarak

$$|a_n|\beta\left(n+1, \frac{1}{p}-1\right) = \int_0^1 r^n (1-r)^{1/p-2}|a_n|dr$$

Cauchy integral formülünden;

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (1-r)^{1/p-2}\left(\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta\right)dr$$

$$= \|f\|_B$$

bulunur. Sonuç olarak B^p bir BK-uzayıdır.

H^p uzayının bir K-uzayı olduğu ise Teorem 2.3.1 de gösterilmiştir.

Şimdi, fıçı ve fıçılı uzay tanımı hatırlatarak, detaya girmeksizin aşağıdaki Teorem ispatsız olarak verilecektir.

Bir konveks uzayda bir küme mutlak konveks kapalı ve emen ise "fıçı" adını alır. Her fıçının komşuluk olduğu konveks uzaylara "fıçılı uzay" denir.

TEOREM 2.4.4: $0 < p < 1$ için H^p uzayı, B^p uzayının fıçılı bir alt uzayıdır (Bennett (1973)).

TEOREM 2.4.5: Bir FK-uzayının H^p uzayını içermesi için gerek ve yeter şart B^p uzayını içermesidir (Bennett (1973)).

İSPAT: Yeterlilik açıktır.

Gereklilik: H^p, B^p nin yoğun alt uzayı ve de Teorem 2.4.4 den fıçılı alt uzayıdır. O halde Bennett ve Kalton (1973)' a ait Teorem 1 den H^p uzayını içeren bir FK-uzayı, B^p uzayını da içermelidir.

SONUÇ 2.4.6: A bir sonsuz matris ve E bir FK-uzayı olsun. A matrisinin H^p uzayını E içine dönüştürmesi için gerek ve yeter şart A matrisinin B^p uzayını E içine dönüştürmesidir (Bennett (1973)).

İSPAT: $E_A := \{x \in s : Ax \in E\}$ uzayı bir FK-uzayıdır (Wilansky (1984)).O halde

$$A \in (H^p, E) \Leftrightarrow H^p \subseteq E_A$$

$$\Leftrightarrow B^p \subseteq E_A \quad ; \text{Teorem 2.4.5 den}$$

$$\Leftrightarrow A \in (B^p, E).$$

2.5. Çarpan Uzaylar

X ve Y kompleks iki dizi uzayı olsun. Herhangi bir $\{a_n\} \in X$ için $\{\lambda_n a_n\} \in Y$ olacak şekildeki $\{\lambda_n\}$ dizisine X den Y içine bir çarpan denir ve $\lambda \in \mathcal{M}(X;Y)$ yazılır.

NOT: E, w nin bir alt kümesi olsun. Eğer $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$ (sırasıyla B^p) olduğunda $\{\lambda_n a_n\} \in E$ ise bu durumda $\lambda = \{\lambda_n\}$ dizisine H^p (sırasıyla B^p) den E içine bir çarpan denir (Bennett (1973)).

Bu kısımda H^p uzayına ait olan analitik fonksiyonların Taylor katsayılarının incelenmesiyle ℓ^p , $p \geq 1$ ve ℓ^∞ gibi çeşitli dizi uzayları içine olan çarpan uzayları belirlenecektir. Ayrıca H^p uzayının çarpan uzaylarını belirlerken B^p uzayına ihtiyacımız olacaktır. Diğer yandan $\sum a_n z^n \in B^p$ olması durumunda $\sum |\lambda_n a_n| < \infty$ olacak şekilde $\{\lambda_n\}$ dizisinin sınıfı karakterize edilecektir (Duren and Shields (1969)).

Şimdi çarpan uzaylarının incelenmesinde başvuracağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

LEMMA 2.5.1: $b_n \geq 0$ ise bu durumda

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 b_n = O(N) \tag{2.4}$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=N}^{\infty} b_n = O\left(\frac{1}{N}\right) \tag{2.5}$$

olmasıdır (Duren and Shields (1969)).

İSPAT: (2.4) gerçeklensin ve $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=N}^{M} b_n = \sum_{n=N}^{M-1} S_n \left(n^{-2} - (n+1)^{-2}\right) + S_M M^{-2} - S_{N-1} N^{-2}$$

$$\leq C\sum_{n=N}^{M-1}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\frac{S_M}{M^2}-\frac{S_{N-1}}{N^2}$$

$$\leq C\left(\frac{1}{N}+\frac{3M-3}{M}-3\frac{N-1}{N}-\frac{1}{M}\right)+\frac{S_M}{M^2}-\frac{S_{N-1}}{N^2}$$

olmak üzere $M\to\infty$ için

$$\sum_{n=N}^{\infty}b_n\leq C\left(\frac{1}{N}+3\left(1-\frac{N-1}{N}\right)\right)-\frac{S_{N-1}}{N^2}$$

$$=C\left(\frac{1}{N}+3\frac{1}{N}\right)-O(1)\frac{1}{N}$$

$$=\frac{4C}{N}-O(1)\frac{1}{N}$$

$$=K\frac{1}{N}$$

olup

$$\sum_{n=N}^{\infty}b_n=O\left(\frac{1}{N}\right)$$

elde edilir.

Karşıt olarak (2.5) gerçeklensin ve $R_n=\sum_{k=n}^{\infty}b_k$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{N}n^2b_n=\sum_{n=1}^{N}\left(n^2-(n-1)^2\right)R_n-N^2R_{N+1}$$

$$\leq C.N$$

olup,

$$\sum_{n=1}^{N}n^2b_n=O(N)$$

elde edilir.

Artık çarpanların belirlenmesine ilişkin teoremleri verebiliriz.

ℓ^p , $p \geq 1$, bütün mutlak p-toplanabilir seri oluşturan diziler uzayı yani,

$$\ell^p := \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}.$$

ℓ^∞ sınırlı diziler uzayı yani,

$$\ell^\infty := \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}.$$

Şimdi aşağıdaki teoremin ispatında kullanılacak olan bir sonucu ispatsız olarak ifade edelim.

SONUÇ 2.5.2: X bir Fréchet uzayı, Y bir FK-uzayı ve $f: X \to Y$ lineer olsun. Eğer her n için $P_n o f: X \to K$ sürekli ise $f: X \to Y$ süreklidir (Wilansky (1984)).

TEOREM 2.5.3: $\lambda \in \mathcal{M}(B^p, \ell^1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=1}^{N} n^{1/p} |\lambda_n| = O(N) \tag{2.6}$$

olmasıdır (Duren and Shields (1969)).

İSPAT: $\lambda \in \mathcal{M}(B^p, \ell^1)$ ise bu durumda açık olarak $\lambda \in \mathcal{M}(H^p, \ell^1)$ dir. O halde

$$\Lambda : H^p \longrightarrow \ell^1$$
$$\sum a_n z^n \to \{\lambda_n a_n\}$$

şeklinde bir operatör tanımlansın.

Böylece,

$$\Lambda : H^p \to \ell^1 , \ \Lambda_\lambda(f) = \{\lambda_n a_n\} = (\lambda a)$$

λ sabit ve $f \in H^p$, $f(z) = \sum a_n z^n$ olsun. H^p nin bir BK-uzayı olduğunu biliyoruz.

$$\begin{array}{c} H^p \xrightarrow{\Lambda_\lambda} \ell^1 \xrightarrow{P_n} K \\ \underbrace{\hphantom{H^p \xrightarrow{\Lambda_\lambda} \ell^1 \xrightarrow{P_n} K}}_{P_n o \Lambda_\lambda} \end{array}$$

$$
\begin{tikzcd}
H^p \arrow[r, "\Lambda_\lambda"] \arrow[rr, bend right, "P_n \circ \Lambda_\lambda"'] & \ell^1 \arrow[r, "P_n"] & K
\end{tikzcd}
$$

$$(P_n \circ \Lambda_\lambda)(f) = P_n(\Lambda_\lambda(f)) = P_n(\lambda a) = \lambda_n a_n$$

H^p üzerinde her n için a_n sürekli olduğundan her n için $P_n \circ \Lambda_\lambda$ süreklidir. Dolayısıyla Sonuç 2.5.2 den Λ süreklidir. O halde aynı zamanda sınırlıdır.

Şimdi υ, $\frac{1}{\upsilon+1} < p \leq \frac{1}{\upsilon}$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı olsun.

$$f(z) = \sum a_n z^n = (1-z)^{-(\upsilon+1)}$$

alalım. O halde B bir sabit olmak üzere $a_n z^n \sim B.n^{\upsilon}$. Böylece

$$
\begin{aligned}
f_r(z) = f(rz) &= (1-rz)^{-\upsilon+1} \\
&= \sum a_n z^n r^n
\end{aligned}
$$

olacaktır. Λ sınırlı olduğundan

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{\upsilon} |\lambda_n| r^n &= \|\Lambda(f_r)\|_1 \\
&\leq C.\|f_r\|_p \\
&= M_1(r,f)
\end{aligned}
$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\upsilon} |\lambda_n| r^n = O\left((1-r)^{-(\upsilon+1)+1/p}\right)$$

elde edilir. O halde $r = 1 - \frac{1}{N}$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{N} n^{\upsilon} |\lambda_n| \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = O\left((1 - 1 + \frac{1}{N})^{-(\upsilon+1)+1/p}\right)$$

bulunur. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{N} n^{\upsilon}|\lambda_n| = O\left(N^{\upsilon+1-1/p}\right)$$

elde edilir. Şimdi $\upsilon = \dfrac{1}{p}$ alırsak gereklilik elde edilir.

Karşıt olarak (2.6) nın $\lambda \in \mathcal{M}(B^p, \ell^1)$ olmasını gerektirdiğini gösterelim. Duren, Romberg ve Shields (1969)' e ait Teorem 5 den

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in B^p$$

olması için gerek ve yeter şartın

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2-1/p} a_n z^n \in B^{1/2}$$

olduğu biliniyor. Şimdi bu teoremde $p = \dfrac{1}{2}$ alarak ispatı gerçekleştirmek yeterli olacaktır. Böylece (2.6) gerçeklendiğinde

$$\sum_{n=1}^{N} n^2|\lambda_n| = O(n) \tag{2.7}$$

olur. Genellikten bir şey kaybetmeksizin $\lambda_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ alabiliriz. $S_1 = 0$ ve $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k$; $n = 2,3,\ldots$ olsun.

$$f(z) = \sum a_n z^n \in B^{1/2}$$

ise bu durumda

$$\infty > \int_0^1 M_1(r,f)dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n}^{S_{n+1}} M_1(r,f)dr$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_{S_n}^{S_{n+1}} r^n dr$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |a_n| S_n^n$$

bulunur. Burada $r^{-n} M_1(r,f) \geq |a_n|$ dir (Duren (1970), sf 98, Teorem 6.4).

Fakat (2.7) den ve Lemma 2.5.1 den

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \leq \frac{c}{n}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \leq \frac{c}{n}$$

$$1 - S_n \leq \frac{c}{n}$$

elde ederiz. O halde $S_n^n \geq \left(1 - \frac{c}{n}\right)^n \rightarrow e^{-c} > 0$ olup $\left\{\left(1 - \frac{c}{n}\right)^n\right\}$ monoton azalan; $0 < D \leq \left(1 - \frac{c}{n}\right)^n \leq S_n^n$ ve de $D \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n S_n^n < \infty$ olduğundan $\sum |a_n \lambda_n| < \infty$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

ÖNERME 2.5.4: H^p ve de B^p herhangi bir FK-uzayı içine aynı çarpanlara sahiptir (Bennett (1973)).

İSPAT: λ ile yapılan koordinatsal çarpım, $a_{ij} := \delta_{ij} \lambda_j$ ile tanımlı A matrisi yardımıyla verilebilir. Böylece ispat Sonuç 2.4.6 dan elde edilir.

SONUÇ 2.5.5: $0 < p < 1$ olsun. O halde $\lambda \in \mathcal{M}(H^p, \ell^1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=1}^{N} n^{1/p} |\lambda_n| = O(N)$$

olmasıdır (Duren and Shields (1969)).

İSPAT: Önerme 2.5.4 den açıktır.

TEOREM 2.5.6: $0 < p \leq 1$ için $\lambda \in \mathcal{M}(H^p, \ell^\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda_n = O(n^{1-1/p}) \tag{2.8}$$

olmasıdır.

Aynı zamanda $p < 1$ için (2.8) şartı $\lambda \in \mathcal{M}(B^p, \ell^\infty)$ olmasını karakterize eder (Duren and Shields (1970)).

İSPAT: Eğer $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in B^p$ ise bu durumda Duren, Romberg and Shields (1969)' e ait Teorem 4 den

$$a_n = o\left(n^{1-1/p}\right) \tag{2.9}$$

dir. $f \in H^1$ ise bu durumda Riemann-Lebesgue Lemmasından $a_n \to 0$ olmasından $\{\lambda_n a_n\} \in \ell^\infty$ elde edilir.

Karşıt olarak, kabul edelim ki $\lambda \in \mathcal{M}(H^p, \ell^\infty)$ olsun.

$$\Lambda : H^p \to \ell^\infty$$
$$f \to \{\lambda_n a_n\}$$

şeklinde lineer bir operatör tanımlansın. Λ operatörünün, Teorem 2.5.3 ün ispatında gösterdiğimiz yöntemle sınırlı olduğu gösterilebilir.

Diğer yandan,

$$\sup_n |\lambda_n a_n| = \|\Lambda(f)\|$$
$$\leq K\|f\| \, . \tag{2.10}$$

$$g(z) = \sum a_n z^n (1-z)^{-1-1/p}$$

diyelim. O halde B bir sabit olmak üzere $a_n \sim Bn^{1/p}$ ve $0 < r < 1$ sabiti için $f(z) = g(rz)$ seçilsin. Bu durumda (2.10) dan,

$$|\lambda_n| n^{1/p} r^n \leq C(1-r)^{-1}$$

dir. $r = 1 - \frac{1}{N}$ seçersek (2.8) şartı elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

UYARI: $\{\lambda_n\}$ nin H^p veya B^p den ℓ^∞ içine çarpan olması için gerek ve yeter şart c_0 içine çarpan olmasıdır (Duren and Shields (1970)).

Sonuç olarak (2.8) ifadesi en iyi yaklaşımdır. H^p sınıfının fonksiyonları için bu ifade Liltlewood (1932)' a aittir. Daha sonra Evgrafov (1952)' ur, $\{\delta_n\}$ sıfıra monoton gidiyor ise bu durumda $a_n \neq O(\delta_n n^{1/p-1})$ olacak şekilde bir $f \in H^p$ olduğunu göstermiştir. Bunun basit bir ispatını Duren ve Taylor (1970) verdi. Sonucu tekrar formüle edersek, her $f \in H^p$ için $a_n = O(d_n)$ ise bu durumda $d_n n^{1-1/p}$ sıfıra monoton gitmeyebilir. Şimdi bu ifadeyi aşağıda gösterildiği gibi doğrulayabiliriz.

SONUÇ 2.5.7: $\{d_n\}$, H^p de her $\sum a_n z^n$ fonksiyonu için $a_n = O(d_n)$ olacak şekilde pozitif sayıların herhangi bir dizisi ise bu durumda

$$d_n n^{1-1/p} \geq \varepsilon > 0, \ n = 1,2,\ldots$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır (Duren and Shields (1970)).

İSPAT: Her $f \in H^p$ için $a_n = O(d_n)$ ise bu durumda $\frac{1}{d_n} \in \mathcal{M}(H^p, \ell^\infty)$ dur.

O halde Teorem 2.5.6 dan

$$\frac{1}{d_n} = O(n^{1-1/p})$$

dir.

Şimdi H^p ve B^p den $\ell^q := \left\{ c = (c_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \right\}$, $0 < q < \infty$ içine çarpanları verilecektir. Aşağıdaki Teorem, Teorem 2.5.3 ün bir genelleştirilmesi olduğundan ispatsız olarak ifade edilecektir.

TEOREM 2.5.8: $0 < p < 1$ olsun.

i) $\lambda \in \mathcal{M}(H^p, \ell^q)$ $(p \leq q < \infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=1}^{N} n^{q/p}|\lambda_n|^q = O(N^q) \qquad (2.11)$$

olmasıdır.

ii) $\lambda \in \mathcal{M}(B^p, \ell^q)$ $(1 \le q < \infty)$ olması için gerek ve yeter şart (2.11) gerçeklenmelidir.

iii) $q < p$ ise (2.11) sonucu ne $\lambda \in \mathcal{M}(H^p, \ell^q)$ ne de $\lambda \in \mathcal{M}(B^p, \ell^q)$ olmasını gerektirmez (Duren and Shields (1970)).

SONUÇ 2.5.9: $f(z) = \sum a_n z^n \in H^p$ ise bu durumda

$$\sum n^{p-2}|a_n|^p < \infty$$

dir (Duren and Shields (1970)).

İSPAT: Teorem 2.5.8 (i) de $p = q$ ve $\lambda_n = n^{1-2/p}$ alırsak (2.11) şartının sağlandığını görürüz. O halde $n^{1-2/p} \in \mathcal{M}(H^p, \ell^p)$ olup,

$$\sum n^{p-2}|a_n|^p < \infty$$

dur.

3. BÖLÜM

3. İNTERPOLASYON TEORİSİ

$z_1, z_2, \dots$ açık birim diskte farklı noktalar ve $w_1, w_2, \dots$ keyfi kompleks sayılar olsun.

Genel interpolasyon problemi; $f(z_k) = w_k$, $k = 1,2,\dots$ olacak şekilde bir $f \in H^p$ fonksiyonunun mevcut olması için $\{z_k\}$ ve $\{w_k\}$ dizi çiftlerini karakterize etmek ve bütün interpolasyon fonksiyonlarını bulmaktır. Fakat böyle genel formdaki problem zordur ve henüz tamamı çözülememiştir. Bu bölümde "Evrensel (Universal) İnterpolasyon Dizilerinin" açıklanmasına ilişkin problemlere dikkatimizi çevireceğiz. Bunlar her sınırlı $\{w_k\}$ dizisi için bir H^∞ interpolasyonu kabul eden $\{z_k\}$ dizileridir. Bu kısıtlanmış problem, H^p $(0 < p < \infty)$ uzayına doğal bir genelleştirmeye sahiptir ve bu durumu da ele alacağız (Duren (1970)).

3.1. Evrensel (Universal) İnterpolasyon Dizileri

$f(z_k) = w_k$, $k = 1,2,\dots$ olacak şekilde en genel $f \in H^p$ fonksiyonunu bulma problemini göz önüne alalım. Eğer özel bir f çözümü bulunabilirse, genel çözümün bulunması kolay olur. Gerçekten, iki interpolasyonun farkının z_k noktalarında sıfır olabildiğinden, f interpolasyonunun tek olması için gerek ve yeter şart

$$\sum (1 - |z_k|) = \infty$$

olmasıdır.

$\sum (1 - |z_k|) < \infty$ ise, bu durumda genel çözüm $f + Bg$ formundadır, Burada B, sıfırları $\{z_k\}$ olmak üzere

$$B(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}$$

şeklinde tanımlanan bir Blaschke çarpımı ve g de keyfi bir H^p fonksiyonudur.

p sabit $(0 < p \le \infty)$ ve $\{z_k\}$ bir dizi olmak üzere her bir $f \in H^p$ fonksiyonuna $\{f(z_k)\}$ dizilerini karşılık getiren T lineer operatörünü göz önüne alalım. T nin değer kümesi, interpolasyonunu mümkün olacak şekildeki bütün $\{w_k\}$ dizilerinin cümlesidir. Bu durumda problem her bir $\{z_k\}$ dizileri için $T(H^p)$ kümesini karakterize etmektir. Her bir $\{z_k\}$ dizisi için $T(H^\infty) \subset \ell^\infty$ olduğu açıktır ve $|z_k| \to 1$ ise bu durumda her $\{w_k\} \in T(H^p)$ $(0 < p < \infty)$ için

$$\lim_{k\to\infty} w_k (1-|z_k|)^{1/p} = 0$$

olduğu biliniyor (Duren (1970), sy 84, Teorem 5.9).

$T(H^\infty) = \ell^\infty$ olacak şekildeki $\{z_k\}$ dizilerini tanımlamak ilgi çekicidir. Her $\{w_k\} \in \ell^\infty$ için $f(z_k) = w_k$ olacak şekilde bir $f \in H^\infty$ fonksiyonu karşılık geldiğinden bunlara "Evrensel İnterpolasyon Dizileri" denir (Duren (1970)).

Eğer

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_j z_k} \right| \geq \delta \ , \ k = 1,2,\ldots$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\{z_k\}$ dizisine "Düzgün Ayrılmış Dizi" denir (Duren (1970)).

Blaschke çarpımının yakınsaklığı özellikle $\sum (1-|z_k|) < \infty$ olmasını gerektirir. Böylece $\{z_k\}$ nin evrensel interpolasyon dizisi olması için gerek ve yeter şart düzgün ayrılmış olmasıdır.

Bu sonuç keyfi bir H^p uzayına da genişletilebilir. Bu şöyle yapılabilir:

Bir $\{z_k\}$ dizisi verildiğinde T_p operatörünü H^p $(0 < p \leq \infty)$ üzerinde

$$T_p(f) = \left\{(1-|z_k|^2)^{1/p} f(z_k)\right\}$$

ile tanımlansın. Özel olarak $T_\infty = T$ alınacaktır. Yukarıda not edildi ki eğer $p < \infty$ ise, $\{z_k\}$ birim açık diskte limit noktasına sahip olmadığı sürece, T_p operatörü H^p uzayını sıfıra yakınsayan diziler içine dönüştürür. Yine not edelim ki $\sum(1-|z_k|)<\infty$ olsa bile T_p, H^p uzayına ℓ^p uzayına dönüştürmek zorunda değildir.

Şimdi aşağıdaki teorem verilecektir.

3.2. Başlıca İnterpolasyon Teoreminin İspatı

Bu kısımda Başlıca İnterpolasyon Teoremini ifade ederek $0<p\leq\infty$ için ispatını vereceğiz.

TEOREM 3.2.1: $0<p\leq\infty$ için, $T_p(H^p)=\ell^p$ olması için gerek ve yeter şart $\{z_k\}$ nın düzgün ayrılmış olmasıdır (Duren (1970)).

İSPAT: $T_p(H^p)=\ell^p$ olsun. $\{z_k\}$ nın düzgün ayrılmış dizi olmasını göstereceğiz. Teoremin ispatı $0<p<1$ ve $1\leq p\leq\infty$ olmak üzere iki aşamada yapılacaktır. İlk önce ispatı $1\leq p\leq\infty$ ele alalım.

Her $\{z_k\}$ dizisi için, $T=T_\infty$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} T: H^\infty \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & \ell^\infty \\ & \underset{f(z_k)}{\mathbb{C}} \arrow[ur, "w_k"'] & \end{tikzcd}$$

$$\|Tf\|_{\ell^\infty}=\|w\|_{\ell^\infty}\leq C\ ,\quad w\in\ell_\infty$$

olduğundan T sınırlı bir operatördür.

Daha genel olarak, $\{z_k\}$, $T_p(H^p)\subset\ell^p$ olacak şekilde ise bu durumda T_p nin H^p den ℓ^p ye sınırlı bir operatör olduğunu, T_p nin kapalı olduğunu göstererek Kapalı Grafik Teoreminden söylenebilir. Fakat,

$$f_n\in H^p\ ;\ f_n\to f$$

ve

$$T_p(f_n)=\left\{(1-|z_n|^2)^{1/p}f_n(z_k)\right\}\to w\in\ell^p$$

olduğunu kabul edelim. O halde her k için

$$f_n(z_k) \to f(z_k)$$

olduğundan

$$\left\|T_p(f) - w\right\| = \sup_k \left|(1-|z_k|^2)^{1/p} f(z_k) - w\right| < \varepsilon\,; \quad |z_k| < 1$$

olup $T_p(f) = w$. Bu da T_p nin kapalı bir operatör olduğunu ispatlar.

Şimdi kabul edelim ki $T_p(H^p) = \ell^p$ olsun ve

$$N^p = \left\{f \in H^p : f(z_k) = 0,\ k = 1,2,\dots\right\}$$

olmak üzere T_p nin çekirdeğini tanımlasın. H^p / N^p bölüm uzayı genel norm altında bir Banach uzayıdır (Duren (1970), Kısım 7.1). $T_p(H^p) = \ell^p$ olmasından T_p, H^p / N^p den ℓ^p üzerine sınırlı, lineer, birebir bir $\mathcal{T}_p$ operatörü oluşturur. Açık Dönüşüm Teoreminden $\mathcal{T}_p^{-1}$ sınırlıdır. Diğer yandan her bir $w = \{w_k\} \in \ell^p$ elemanına karşılık

$$(1-|z_k|^2)^{1/p} f(z_k) = w_k\ ;\ k = 1,2,\dots \tag{3.1}$$

ve M, p ye bağlı bir sabit olmak üzere

$$\|f\| \le M\|w\|$$

olacak şekilde bir $f \in H^p$ vardır. Özellikle de her bir pozitif k tam sabiti için

$$\|f_k\| \le M$$

ve

$$f_k(z_j) = \begin{cases} (1-|z_k|^2)^{-1/p} & ;\ j = k \\ 0 & ;\ j \ne k \end{cases}$$

olacak şekilde bir $f \in H^p$ fonksiyonu vardır. $n > k$ için

$$F_{nk}(z) = f_k(z) \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \frac{1-\bar{z}_j z}{z - z_j}$$

olsun. O halde $F_{nk} \in H^p$ ve $\|F_{nk}\| = \|f_k\| \leq M$ elde edilir.

Diğer yandan herhangi bir $F \in H^p$ için, C, p ye bağlı olmak üzere

$$|F(z)| \leq C\|F\|(1-|z|^2)^{-1/p} \quad \text{(Duren (1970), sf 36, Lemma)}$$

dir. Sonuç olarak

$$\left|\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{1-\bar{z}_j z_k}{z_k - z_j}\right| = (1-|z_k|^2)^{1/p}|F_{nk}(z)|$$

$$\leq (1-|z|^2)^{1/p} C\|F_{nk}\|(1-|z|^2)^{-1/p}$$

$$\leq C\|F_{nk}\|$$

$$\leq C.M$$

Bu da $T_p(H^p) = \ell^p$ olduğunda $\{z_k\}$ nın düzgün ayrılmış dizi olduğunu gösterir.

Teoremin yeterlilik kısmının ispatı zordur. Bunun için ilk önce $p = 2$ özel durumunda ispatı yapacağız, daha sonra elde edilen sonuçları genel duruma uygulayacağız.

Şimdi ispatın bu kısmında gerek duyulan iki Lemmayı verelim.

LEMMA 3.2.2: Eğer $\{z_k\}$ düzgün ayrılmış bir dizi ise bu durumda M, k dan bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\bar{z}_j z_k|^2} \leq M \ , \quad k = 1,2,\ldots$$

yazılabilir (Duren (1970)).

İSPAT: Basit bir hesaplamayla

$$\left|\frac{z_k - z_j}{1-\bar{z}_j z_k}\right|^2 = 1 - \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\bar{z}_j z_k|^2} = 1 - \alpha_{jk}$$

diyelim. Böylece

$$\delta^2 \le \prod_{j\ne k}\left|\frac{z_k - z_j}{1-\bar{z}_j z_k}\right|^2$$

$$= \prod_{j\ne k}(1-\alpha_{jk})$$

$$\le \exp\left\{-\sum_{j\ne k}\alpha_{jk}\right\}$$

Bu da $M = 1 - 2\log\delta$ olmak üzere istenen sonucu verir.

LEMMA 3.2.3: a_{jk} $(j,k = 1,2,\ldots,n)$, $a_{kj} = \bar{a}_{jk}$ ve

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \le M \ , \ k = 1,2,\ldots,n$$

olacak şekilde kompleks sayılar olsun. Bu durumda $x_1,\ldots,x_n$ herhangi sayıları için

$$\left|\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j \bar{x}_k\right| \le M \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$$ (Duren (1970)).

İSPAT: $|a_{jk} x_j \bar{x}_k| = \left(|a_{jk}|^{1/2}|x_j|\right)\left(|a_{jk}|^{1/2}|x_k|\right)$

olmak üzere

$$\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk} x_j \bar{x}_k| = \left|\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j \bar{x}_k\right|$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n}\left(|a_{jk}|^{1/2}|x_j|\right)\left(|a_{jk}|^{1/2}|x_k|\right)$$

ifadesi iki kez Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$\sum_{j,k=1}^{n}\left(|a_{jk}|^{1/2}|x_j|\right)\left(|a_{jk}|^{1/2}|x_k|\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|^{1/2}|x_j|\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|^{1/2}|x_k|\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}||x_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}||x_k|^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}||x_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}||x_k|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq M^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{jk}||x_k|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq M\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}$$

$$= M\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2$$

elde ederiz.

Şimdi teoremin ispatına geri dönelim.

$f,g \in H^2$ için,

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta$$

olsun ve aşağıda da kullanacağımız notasyonları tanımlayalım.

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_j}{1-\overline{z}_j z}$$

$$B_{nk}(z) = \frac{1-\overline{z}_k z}{z-z_k}B_n(z) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{z-z_j}{1-\overline{z}_j z}, \quad k \leq n$$

$$b_{nk} = B_{nk}(z_k)$$

$w = \{w_k\} \in \ell^2$ ve $\{z_k\}$ düzgün ayrılmış bir dizisi verilsin. $T_2(f) = w$ olacak şekilde bir $f \in H^2$ fonksiyonunun mevcut olduğunu göstermeliyiz.

$$g_{nk}(z) = (1-|z_k|^2)^{3/2}[B_n(z)]^2(z-z_k)^{-2}$$

ve

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} w_k b_{nk}^{-2} g_{nk}(z)$$

olsun. Bu durumda

$$(1-|z_k|^2)^{1/2} f_n(z_k) = w_k \quad , \quad k = 1,2,\dots,n$$

ve

$$\|f_n\|^2 = (f_n, f_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j,k=1}^{n} w_j b_{nj}^{-2} g_{nj}(e^{i\theta}) \overline{w}_k \overline{b_{nk}^{-2}}\, \overline{g_{nk}(e^{i\theta})} d\theta$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} w_j b_{nj}^{-2} \overline{w}_k \overline{b_{nk}^{-2}} \int_0^{2\pi} g_{nj}(e^{i\theta}) \overline{g_{nk}(e^{i\theta})} d\theta$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} w_j b_{nj}^{-2} \overline{w}_k \overline{b_{nk}^{-2}} (g_{nj}, g_{nk}) \tag{3.2}$$

olur.

$$(g_{nj}, g_{nk}) = (1-|z_j|^2)^{3/2}(1-|z_k|^2)^{3/2}(1+z_j\overline{z}_k)(1-z_j\overline{z}_k)^{-3}$$

ve

$$(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2) \le |1-z_j\overline{z}_k|^2$$

olması nedeniyle

$$\frac{1}{|1-z_j\overline{z}_k|} \le \frac{1}{(1-|z_j|^2)^{1/2}(1-|z_k|^2)^{1/2}}$$

olup

$$|g_{nj}, g_{nk}| \le 2(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)|1-z_j\overline{z}_k|^{-2}$$

elde edilir. O halde

$$\sum_{j=1}^{n} |g_{nj}, g_{nk}| \leq 2\sum_{j=1}^{n} (1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)|1 - z_j\bar{z}_k|^{-2}$$

dir. Lemma 3.2.2 den dolayı,

$$\sum_{j=1}^{n} |g_{nj}, g_{nk}| \leq 2M$$

$\{z_k\}$ nın düzgün ayrılmış bir dizi ($|b_{nk}| \geq \delta$) olmasını kullanarak, (3,2) ve Lemma 3.2.3 den

$$\|f_n\|^2 = \sum_{j,k=1}^{n} w_j \overline{w}_k b_{nj}^{-2} \overline{b_{nk}^{-2}} (g_{nj}, g_{nk})$$

$$\leq 2M\|w\|^2 \delta^{-4}$$

elde edilir. Bu da, f_n fonksiyonlarının Montel Teoremi (Ahlfors (1966)) ne göre normal aile formunda olduğunu gösterir yani, $\{f_n\}$ dizisi, $|z| < 1$ diskinin her kompakt alt cümlesi üzerinde düzgün yakınsak bir $\{f_{n_k}\}$ alt dizisi içerir. O halde bu ailenin bir alt dizisi

$$C = (2M)^{1/2} \delta^{-2}$$

olmak üzere

$$\|f\| = C\|w\| \quad \text{ve } T_2(f) = w \tag{3.3}$$

olması için bir $f \in H^2$ fonksiyonuna her bir $|z| \leq R < 1$ diskinde düzgün yakınsar. Bu da her $f \in H^2$, $T_2(f) = \ell^2$ olduğunu göstermekle elde edilir. O halde $w = \{w_k\}$ keyfi bir ℓ^2 dizisi olsun ve $h_n(z)$ de

$$h_n(z_k) = (1-|z_k|^2)^{-1/2} w_k \quad , k = 1,2,\ldots,n$$

olacak şekilde H^2 nin minimal normuna sahip bir fonksiyonu olsun. Az önce (3.3) ile bir $f \in H^2$ fonksiyonunun mevcut olduğunu gösterdik. O halde

$$\|h_n\| = C\|w\|$$

dir.

$$\min_{f \in H^p, f(z_j)=w_j} \|f\|_p = \max_{f \in H^q, \|f\|_q \le 1} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j(1-|z_j|^2)}{B_j(z_j)} f(z_j) \right| \tag{3.4}$$

bağıntısından, her $f \in H^2$ için

$\|w\| = 1$ olmak üzere her $w \in \ell^2$ üzerinden supremum alındığında, $|b_{nk}| \le 1$ olmasından

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} (1-|z_k|^2)|f(z_k)|^2 \right\}^{1/2} \le C\|f\|$$

olduğu sonucunu elde ederiz. Bu da bize her $f \in H^2$ için $T_2(f) \in \ell^2$ olduğunu gösterir.

Şimdi her $f \in H^p$ $(0 \le p < \infty)$ için $T_p(f) \in \ell^p$ olduğunu göstermek kolay bir adımdır.

B bir Blaschke çarpımı ve g de H^2 nin sıfır olmayan fonksiyonu olmak üzere

$$f(z) = B(z)[g(z)]^{2/p}$$

yazılır. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2)|f(z_k)|^p &\le \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2)|g(z_k)|^2 \\ &\le C^2\|g\|^2 \\ &= C^2\|f\|^2 \end{aligned}$$

yani, $f \in H^p$,

$$\|T_p(f)\| \le C^{2/p}\|f\| \tag{3.5}$$

Son olarak, $\{z_k\}$ düzgün ayrılmış dizi ise $T_p(H^p) \supset \ell^p$ $(1 \le p \le \infty)$ olduğu gösterilmelidir.

$\{w_k\} \in \ell^p$ verilsin, $g_n(z)$,

$$g_n(z_k) = (1-|z_k|^2)^{-1/p} w_k \; ; \; k = 1,2,\ldots,n$$

olmak üzere H^2 nin minimal normuna sahip bir fonksiyonu olsun. (3.4) bağıntısı tekrar uygulanırsa, bu durumda q konjuge indeks olmak üzere, $\|f\| = 1$ olacak şekilde bazı $f \in H^q$ için

$$\|g_n\| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k (1-|z_k|^2)^{1/q}}{b_{nk}} f(z_k) \right|$$

elde edilir. Böylece (3.5) den

$$\|g_n\| \leq \delta^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |w_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (1-|z_k|^2) |f(z_k)|^q \right\}^{1/q}$$

$$\leq \delta^{-1} C^{2/q} \|w\|$$

elde edilir.

$p = 1$ ve $p = \infty$ durumlarında, önemsiz değişikliklere gerek duyulur, fakat son sonuç benzerdir. Bu yüzden $g_n(z)$ fonksiyonları normal bir aile oluşturur ve bir alt dizisi $T_p(g) = w$ olması için bir $g \in H^p$ fonksiyonuna yakınsar. w keyfi olduğundan $T_p(H^p) \supset \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$, ispatlar.

$p < 1$ için ispat;

$\{z_k\}$ düzgün ayrılmış dizi ise $T_p(H^p) \subset \ell^p$ olduğunu $p < 1$ içinde geçerli olan ispatı bir önceki kısımda verdik. Diğer yandan, $1 \leq p \leq \infty$ için $T_p(H^p) \supset \ell^p$ olduğunun ispatı dualite bağıntısı üzerine kurulmuştur ki $p < 1$ için bunun karşılığı yoktur. Ancak ne var ki bu durumda direkt ve basit bir ispat mümkündür.

$\{z_k\}$ düzgün ayrılmış bir dizi, $0 < p < 1$ ve $w = \{w_k\} \in \ell^p$ olsun. $T_p(f) = w$ olacak şekilde bir $f \in H^p$ fonksiyonu bulundu. Bunu da keyfi bir $w \in \ell^p$ için $T_p(H^p) \supset \ell^p$ olduğu ispatlandı.

$$b_k(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{|z_j|}{z_j} \frac{z_j - z}{1 - \bar{z}_j z}$$

$$g_k(z) = (1-\overline{z}_k z)^{-2/p}$$

olsun.

$$|b_k(z_k)| \geq \delta > 0$$

den dolayı her bir $|z| \leq R < 1$ diskinde

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2)^{1/p} w_k [b_k(z_k)]^{-1} b_k(z)$$

serileri düzgün yakınsar.

Böylece f, $|z| < 1$ de analitiktir. Diğer yandan,

$$M_p^p(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2)^{1/p} w_k [b_k(z_k)]^{-1} b_k(e^{i\theta}) g_k(e^{i\theta}) \right|^p d\theta$$

$$\leq \delta^{-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2) |w_k|^p M_p^p(r, g_k)$$

$$\leq \delta^{-p} \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p$$

$$< \infty$$

bu da $f \in H^p$ olduğunu ispatlar. Buradan da $T_p(f) = w$ olduğu kolayca görülür. Bu da gösterir ki $\{z_k\}$ düzgün ayrılmış dizi ise $T_p(H^p) = \ell^p$ dir.

Karşıtı, $1 \leq p \leq \infty$ durumundakine hemen hemen benzer incelemelerle ispatlanabilir. Tabii ki H^p ve ℓ^p, $p < 1$ durumunda Banach uzay değildirler, fakat bunlar

$$d(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|^p \, d\theta$$

$$d(x,y) = \sum |x_k - y_k|^p$$

metrikleri altında birer F-uzayıdırlar. Böylece sonuç "açık ve kapalı dönüşüm" teoremlerinden elde edilir. H^p / N^p bölüm uzayı bir F uzayıdırlar, bunu da göstermek zor değildir. Örneğin, X herhangi bir F uzayı ve S kapalı alt uzay ise X/S aşikâr metrik altında bir F uzaydır.

3.3. Düzgün Ayrılmış Diziler

Düzgün ayrılmış için koşul, pratikte gerçekleştirmek ve anlamak zordur. Yani düzgün ayrılmış dizilerin varlığı aşikâr değildir. Ona daha yakın bir karakter bulmak önemlidir. Bu da interpolasyon teorisinde bağımsız tartışabilecek olan geometrik bir problemdir.

Şimdi düzgün ayrılmış diziler için verilen teoremin ispatında kullanılacak olan Lemma'yı ispatsız verelim.

LEMMA 3.3.1: $|\alpha|<1, |\beta|<1$ ise

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right| \geq \frac{|\alpha|-|\beta|}{1-|\alpha\beta|} \quad \text{(Duren (1970)).}$$

TEOREM 3.3.2: $1-|z_{n+1}| \leq C(1-|z_n|)$; $n=1,2,\ldots$ (3.6)

olacak şekilde bir C sabiti varsa bu durumda $\{z_n\}$, düzgün ayrılmış dizidir. Eğer $0 \leq z_1 < z_2 < \ldots$ ise (3.6) gerek şarttır (Duren (1970)).

İSPAT: (3.6) şartı

$$1-|z_j| \leq C^{j-k}(1-|z_k|) \quad j>k\,;\ k=1,2,\ldots \tag{3.7}$$

durumunu gerektirir. Özellikle de $\sum(1-|z_j|)<\infty$, $j>k$ için (3.7) den

$$|z_j|-1 \geq -C^{j-k}(1-|z_k|)$$

$$\Rightarrow \quad |z_j| \geq 1-C^{j-k}+C^{j-k}|z_k|$$

$$\Rightarrow \quad |z_j|-|z_k| \geq 1-C^{j-k}+C^{j-k}|z_k|-|z_k|$$

$$=(1-C^{j-k})(1-|z_k|)$$

$$\Rightarrow \quad |z_j|-|z_k| \geq (1-C^{j-k})(1-|z_k|)$$

ve

$$\begin{aligned} 1-|z_j z_k| &= 1-|z_j|+|z_j|(1-|z_k|) \\ &\leq C^{j-k}(1-|z_k|)+|z_j|(1-|z_k|) \\ &= (C^{j-k}+|z_j|)(1-|z_k|) \\ &\leq (1+C^{j-k})(1-|z_k|) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.3.1 den

$$\left|\frac{z_k - z_j}{1-\overline{z}_j z_k}\right| \geq \frac{|z_j|-|z_k|}{1-|z_j z_k|} \geq \frac{1-C^{j-k}}{1+C^{j-k}} \quad ; \quad j>k$$

Aynı zamanda $j<k$ içinde bu eşitsizlik

$$\left|\frac{z_k - z_j}{1-\overline{z}_j z_k}\right| \geq \frac{1-C^{k-j}}{1+C^{k-j}}$$

formundadır. Dolayısıyla

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{\infty} \left|\frac{z_k - z_j}{1-\overline{z}_j z_k}\right| \geq \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-C^n}{1+C^n}\right) > 0$$

dır, bu da $\{z_k\}$ nın düzgün ayrılmış dizi olduğunu gösterir.

Şimdi kabul edelim ki,

$$0 \leq z_1 < z_2 < \ldots \text{ ve } \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{\infty} \left|\frac{z_k - z_j}{1-\overline{z}_j z_k}\right| \geq \delta > 0 \; ; \quad k=1,2,\ldots$$

olsun. O halde

$$z_{n+1} - z_n \geq \delta(1-z_n z_{n+1}) \; ; \quad n=1,2,\ldots$$

böylece

$$z_{n+1} - z_n \geq \delta - \delta z_n z_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad z_{n+1} \geq -\delta z_n z_{n+1} + \delta + z_n$$

$$\Rightarrow \quad z_{n+1}(1 + \delta z_n) \geq \delta + z_n$$

$$\Rightarrow \quad z_{n+1} \geq \frac{\delta + z_n}{1 + \delta z_n}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - z_{n+1} \leq 1 - \frac{\delta + z_n}{1 + \delta z_n} \leq (1 - \delta)(1 - z_n)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{z_n\}$, (3.7) şartını gerektirir.

4. BÖLÜM

4. $H^p(w)$ DİZİ UZAYI

$w = \{w_n\}$, $D = \{z : |z| < 1\}$ diskindeki farklı noktaların bir dizisi ve $|w_n| \to 1$ olsun. $1 \le p \le \infty$ için H^p, daha önce tanımlandığı gibi olmak üzere

$$H^p(w) := \{\{f(w_n)\} : f \in H^p\}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu bölümde, ilk önce $H^p(w)$ dizi uzayının yapısı incelenecektir. $H^p(w)$ nın bir BK-uzayı olduğu gösterilecek ve de $p < \infty$ ise $H^p(w)$ nın AD özelliğine sahip olduğu ve $1 < p < \infty$ ise projeksiyonların $H^p(w)^*$ de temel olduğu gösterilecektir.

Son olarak;

$$\delta_k^n = \begin{cases} 0 & ; \ k \ne n \\ 1 & ; \ k = n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $\{\delta^n\}$ dizisinin $H^p(w)$ $(p < \infty)$ için bir baz olması için gerek ve yeter şartın $w = \{w_n\}$ nin bir interpolasyon dizisi olduğu gösterilecektir.

Şimdi bu bölümde kullanılacak notasyonları verelim.

$$C_r(t) := \frac{1}{1 - re^{it}} \ ; \ -\pi \le t \le \pi$$

tanımlanmak üzere $\{C_r\}$, $(0 \le r < 1)$, fonksiyonlarının ailesi Cauchy çekirdeğidir.

Ayrıca D açık birim diskinde $z = re^{i\theta} \in D$ olmak üzere

$$C_z(t) := \overline{C_r(\theta - t)}, \quad -\pi \le t \le \pi$$

dir.

Böylece, $f \in L^1$ ve f in Fourier katsayıları negatif tamsayılar üzerinde sıfır ise bu durumda

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{C_z(t)}dt$$

ile verilen ifade D üzerinde analitik bir fonksiyon verir.

Her bir kompleks $x=\{x_k\}$ dizisi ve her bir pozitif n tamsayısı için $\pi_n(x)=x_n$ olsun. Bir E FK-uzayı (BK-uzayı) her bir π_n fonksiyoneli sürekli olacak şekilde lokal konveks bir Fréchet uzayı (Banach uzayı) olan bütün kompleks diziler uzayının lineer bir alt uzayı olsun.

Bir E FK-uzayı üzerinde bütün sürekli lineer fonksiyonellerin cümlesi E' ve E nin BK- uzayı olması halinde E nin dual uzayı da E^* olsun.

E^∞, $\{\delta^n\}$ dizilerinin lineer gerenini göstersin ve genel olarak aksi gösterilmedikçe FK-uzayının $e:=(1,1,\ldots)$ ve E^∞ u içerdiği kabul edilecektir (Snyder (1970)).

4.1. $H^p(w)$ Dizi Uzayı

Bu kısımda $H^p(w)$ dizi uzayının özellikleri incelenecektir.

TEOREM 4.1.1: $w=\{w_n\}$, D de farklı noktaların bir dizisi ve $S=\{f\in H^p : \text{her n için } f(w_n)=0\}$ olsun.

Aşağıdaki özelliklerle birlikte $H^p(w)$ üzerinde bir norm mevcuttur.

i) $H^p(w)$ BK-uzayı, H^p/S bölüm uzayına denktir.

ii) $1<p<\infty$ ise bu durumda $H^p(w)$ yansımalıdır (reflexive).

iii) $H^2(w)$ Hilbert uzayı H^2 deki S nin ortogonal tümleyenine denktir (Snyder (1971)).

İSPAT: $f\in H^p$ ve $z\in D$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{C_z(t)}dt \right|$$

$$\leq \|f\|_p \|C_z\|_q$$

Fakat her bir z için $C_z \in L_q$ fonksiyonu, "z deki değer" gibi, $H^p(w)^*$ nin bir elemanıdır. S nin H^p den $H^p(w)$ üzerine $f \to \{f(z_n)\}$ dönüşümünü gözönüne alalım. S bir çekirdek olmak üzere $f + S \to \{f(z_n)\}$ dönüşümü H^p / S den $H^p(w)$ üzerine bir izomorfizmdir. O halde $H^p(w)$, $f + S \to \{f(z_n)\}$ dönüşümünün izomorfizm olmasından H^p / S in normuna sahiptir. Bu durumda $H^p(w)$ bir Banach uzayıdır. $f \to f(z_n)$ dönüşümü S üzerinde sıfır olduğundan, her bir n için $H^p(w)$ üzerinde $\{x_n\} \to x_n$ dönüşümü süreklidir. Bu nedenle $H^p(w)$ bir BK-uzayıdır.

$1 < p < \infty$ ise bu durumda H^p / S den dolayı H^p yansımalıdır. O halde (ii) özelliği (i) den elde edilir. Aynı zamanda (iii) özelliği de (i) den direkt olarak gösterilebilir.

Şimdi, aşağıdaki teoremin ispatında kullanılan notasyonları tanımlayalım.

B bir Blaschke çarpımı olmak üzere;

B_n, B de $k = n$ alınarak elde edilen çarpımı;

f_n, ilk n terimin çarpımı;

ve $f^{(n)}$, $k > n$ için terimlerin çarpımı olsun.

TEOREM 4.1.2: (i) $p < \infty$ ise bu durumda $H^p(w)$ AD özelliğine sahiptir.

(ii) $1 < p < \infty$ ise bu durumda $\{\pi_n\}$, $H^p(w)^*$ de temeldir.

(iii) $p = 2$ ise bu durumda

$$\|\delta^n\| = \frac{(1 - z_n^2)^{1/2}}{|B_n(z_n)|} \quad \text{ve} \quad \|\pi_n\| \frac{1}{(1 - |z_n|^2)^{1/2}}$$

(iv) $1 \leq p < \infty$ ise bu durumda

$$\|\delta^n\| \geq \frac{1}{\|\pi_n\| |B_n(z_n)|} \qquad \text{(Snyder (1971)).}$$

İSPAT: Daire üzerindeki H^2 de $P_n \to B$ olduğu Hoffman ((1946) sf: 65) da bulunabilir. O halde

$$P_n(1 - P^n) = P_n - P_n P^n$$
$$= P_n - B \to 0$$

olup,

$$\|P_n - B\|_2 \to 0$$

böylece H^2 de $P^n \to 1$. Bundan dolayı daire de hemen her yerde noktasal $P^{(n_k)} \to 1$ olacak şekilde bir $\{P^{(n_k)}\}$ alt dizisi mevcuttur.

$f \in H^p$ keyfi olsun. Bu durumda $f\,P^{(n_k)} \in H^p$ ve $f\,P^{(n_k)} \to f$ hemen her yerde noktasal yakınsaktır. Baskın yakınsaklık teoreminden H^p de $f\,P^{(n_k)} \to f$ dir.

Teorem 4.1.1, (i) den, $k \to \infty$ için $H^2(w)$ de $\{(f\,P^{(n_k)})(z_n)\} \to \{f(z_n)\}$ olduğunu gösterir. Fakat $\{(f\,P^{(n_k)})(z_n)\} \in E^\infty$ olup, E^∞, $H^p(w)$ de yoğundur yani $H^p(w)$, AD özelliğine sahiptir.

(ii) sonucu doğrudan Teorem 4.1.1 (ii) den gösterilir.

$$S := \{f \in H^2 : \forall n \text{ için}, f(z_n) = 0\}$$

ve

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

H^2 için genel iç çarpım olsun.

Teorem 4.1.1 (iii) den $H^2(w)$ Hilbert uzayı $S^{\perp}$ denktir, H^2 deki S nin ortogonal tümlemesidir. $S^{\perp}$ üzerinde $f \to \{f(z_n)\}$ uygun bir dönüşümdür. Belirtelim ki,

$$B_n = |z_n| B + (B_n - |z_n| B)$$

ve

$$(|z_n| B, B_n - |z_n| B) = |z_n| (B, B_n) - |z_n|^2 (B, B)$$

$$= |z_n| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{z}_n}{|z_n|} \frac{z_n - e^{it}}{1 - \overline{z}_n e^{it}} dt - |z_n|^2$$

$$= |z_n|^2 - |z_n|^2$$

$$= 0$$

Fakat $BH^2 = S$, böylece $B_n - |z_n| B \in S^{\perp}$.

Şimdi $B_n / B_n(z_n)$, δ^n dizisini interpole eder, böylece $f_n = \dfrac{B_n - |z_n| B}{B_n(z_n)} \in S^{\perp}$;

f_n, δ^n dizisini interpole eder.

Bundan dolayı,

$$\|\delta^n\|^2 = \|f_n\|_2^2 = (f_n, f_n) = \frac{(B_n, B_n - |z_n| B)}{|B_n(z_n)|^2}$$

$$= \frac{(B_n, B_n) - |z_n| (B_n, B)}{|B_n(z_n)|^2}$$

$$= \frac{1 - |z_n|^2}{|B_n(z_n)|^2}$$

Daha sonra, $f \in H^2$ ve $z \in D$ sabiti için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{C_z(t)} dt$$

ve

$$C_z \in H^2$$

elde edilir.

Dolayısıyla, $f \to f(z)$ dönüşümü $\|C_z\|_2$ normuna sahiptir. Fakat,

$$C_z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} e^{ikt}$$

olmak üzere

$$\|C_z\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|^{2k} = \frac{1}{1-|z_k|^2}$$

Aynı zamanda her bir n için $f_n \to f(z_n)$ S üzerinde sıfırdır, böylece $H^p(w)*$ de

$$\|\pi_n\| = \frac{1}{(1-|z_n|^2)^{1/2}}$$

(iv) ispatı için, belirtelim ki bir önceki ispatta olduğu gibi

$$\|\pi_n\| = \|C_{z_n}\|_q .$$

$f \in H^p$ ve $f(z_n) = 1$ ise bu durumda

$$1 = |f(z_n)| \le \|f\|_p \|C_z\|_q$$

$$= \|f\|_p \|\pi_n\|.$$

Dolayısıyla,

$$\left\| \frac{fB_n}{|B_n(z_n)|} \right\|_p = \frac{\|f\|_p}{B_n(z_n)}$$

$$\ge \frac{1}{|B_n(z_n)| \|\pi_n\|}$$

dir. Fakat, Teorem 4.1.1 (i) den

$$\|\delta^n\| = \inf\left\{\|g\|_p : g \in H^p \text{ ve } g, \delta^n \text{ interpole eder}\right\}$$

Böylece herhangi bir $g \in H^p$ için, δ^n, $f \in H^p$ ve $f(z_n) = 1$ olmak üzere $\dfrac{f B_n}{B_n(z_n)}$ formunda yazılabilmesinden dolayı

$$\|\delta^n\| \geq \frac{1}{|B_n(z_n)| \|\pi_n\|}$$

dir.

4.2. FK-Uzaylarındaki Bazı Teoremlerin $H^p(w)$ Dizi Uzayına Uygulanması

Bu kısımda FK-uzayları teorisinden bilinen bazı teoremler $H^p(w)$ uzayları için ispatsız olarak ifade edilecektir.

Şimdi bazı notasyonlar hatırlatılacaktır.

s : bütün kompleks dizilerin uzayı

$$\ell^\infty := \left\{x \in s : \{x_n\} \text{ sınırlı}\right\}$$

$$c := \left\{x \in s : \lim_n x_n \text{ mevcut}\right\}$$

$$bv := \left\{x \in s : \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| < \infty\right\}$$

$$\psi^n := e - \sum_{k=1}^{n} \delta^k$$

$A := (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere bir $x = \{x_n\}$ dizisinin A dönüşümü $\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\right\}$ dizisidir ve bu dizi Ax ile gösterilecektir.

E bir FK-uzayı olmak üzere, E de $\psi^n \to 0$ (zayıf) ise conull, aksi durumda da coregüler denir. $c \subset E$ ise, E uzayına konservatif; $m \subset E$ ise E uzayına zorlayıcı (coercive) denir. Konservatif bir A matrisinin conull olması için gerek ve yeter şart c_A FK-uzayının conull olmasıdır (bkz. Wilansky (1984)).Ayrıca $\|\delta^n\| \to 0$ olması durumunda bir BK-uzayına kama (wedge) uzay denir.

TEOREM 4.2.1: Bir E FK- uzayı üzerinde aşağıdaki koşulları gözönüne alalım.

i) E conull

ii) $\{\psi^n\}$, E de sınırlı

iii) $bv \subset E$

O halde (i), (ii)' i gerektirir ve (ii), (iii)' e denktir. E bir BK-uzayı ve $\{\pi_n\}$, E^* de temel ise bu durumda (ii), (i)' i gerektirir. Böylece, $H^p(w)$ $(1 < p < \infty)$ için (i), (ii), (iii) şartları denktir. $p = 1$ için $c \subset H^1(w)$, (i) şartını gerektirir (Snyder (1971)).

TEOREM 4.2.2: E ayrılabilir, zorlayıcı olan bir BK- uzayı ve her $x \in m$ için E de $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta^k$ zayıf yakınsak olsun. Bu durumda E bir kama uzayıdır (Snyder (1971)).

TEOREM 4.2.3: E konservatif olan zayıf dizisel tam bir FK-uzayı olsun. O halde E zorlayıcı ve her $x \in m$ için E de $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta^k$ (zayıf) (Snyder (1971)).

SONUÇ 4.2.4: $1 < p < \infty$ için $H^p(w)$ konservatif ise bu durumda $H^p(w)$ zorlayıcı ve kama uzayıdır (Snyder (1971)).

İSPAT: Teorem 4.1.1 den $H^p(w)$ yansımalı olduğundan zayıf dizisel tamdır. Teorem 4.1.2 den de $H^p(w)$ ayrılabilirdir. Böylece Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.3 den sonuç elde edilir.

4.3. $H^p(w)$ nin Baz Özellikleri

Her bir $x \in E$ için, E de $x = \sum t_k x^k$ serisi yakınsak (şartsız yakınsak) olacak şekilde skalarlerin bir tek $\{t_n\}$ dizisi mevcut ise E Fréchet uzayındaki bir $\{x^n\}$ dizisine baz (şartsız baz) denir.

Bu kısımda $H^p(w)$ dizi uzayının baz özellikleri incelenecektir.

TEOREM 4.3.1: $H^p(w)$ için aşağıdaki şartlar denktir.

(i) $\{\delta^n\}$, $H^p(w)$ için şartsız bazdır,

(ii) $\{\delta^n\}$, $H^p(w)$ için bir bazdır,

(iii) $w = \{w_n\}$, bir interpolasyon dizisidir,

(iv) $\left\{\{(1-|z_k|)^{1/p} x_k\} : x \in H^p(w)\right\} = \ell^p$,

(v) $\ell^1 \subset H^\infty(w)$ (Snyder (1971)).

İSPAT: $\{\delta^n\}$ dizisinin bir baz olduğunu kabul edelim. Her bir n için $\|\delta^n\| \le \dfrac{M}{\|\pi_n\|}$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır (Wilansky (1967)). Teorem 4.1.2 (iv) den

$$B_n(z) = \prod_{k=n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}$$

olmak üzere

$$\|\delta^n\| \ge \frac{1}{|B_n(z_n)| \|\pi_n\|}$$

Böylece her n için $|B_n(z_n)| \ge \dfrac{1}{M}$ olup Teorem 3.2.1 den (iii) şartı elde edilir. (iii) ve (iv) şartlarının denkliği Teorem 3.2.1 den biliniyor. (v) şartının sağlandığını kabul edelim. $\{\delta^n\}$, ℓ^1 de sınırlı olduğundan, δ^n dizisi her n için $\|f_n\|_\infty < M$ olacak şekilde $f_n \in H^\infty$ fonksiyonu tarafından interpole edilebilir. O halde her bir n için $g_n \in H^\infty$ ve B_n bir Blaschke çarpımı olmak üzere $f_n = B_n g_n$ diyelim. Böylece,

$$\begin{aligned} 1 &= |f_n(z_n)| = |B_n(z_n)||g_n(z_n)| \\ &\le |B_n(z_n)| \|g_n(z_n)\|_\infty \end{aligned}$$

$$< M|B_n(z_n)|$$

Bu da $\{w_k\}$ nın interpolasyon dizisi olduğunu gösterir. $x \in \ell^\infty$ olsun. H^∞ uzayının bir f elemanı, x dizisini interpole edecek şekilde seçilsin. Herhangi bir $g \in H^p$ için, $fg \in H^p$ ve $(fg)(z_n) = f(z_n)g(z_n)$ olduğunu gösterir. O halde her $y = \{y_n\} \in H^p(w)$ için $\{x_n y_n\} \in H^p(w)$. Biliniyor ki en son durum $H^p(w)$ için $\{\delta^n\}$ nin şartsız bir baz olduğunu gösterir (Garling (1967)).

SONUÇ 4.3.2: (i) $\{\delta^n\}$, $H^p(w)$ için bir baz ise bu durumda $H^p(w)$ zorlayıcıdır

(ii) $H^p(w)$ zorlayıcı ise bu durumda $p < \infty$ için conulldır (Snyder (1971)).

İSPAT: Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.2.1 den elde edilir.

KAYNAKLAR

AHLFORS, Complex Analysis, Newyork 1966.

BENNETT, G.,Some inclusion theorems for sequence spaces, Pacific J. Math. 46 (1973), 17-30.

BENNETT, G. and KALTON, N. J., Inclusion theorems for K-spaces Canada. J. Math. 25 (1973), 511-524.

BANACH, S., Théoriedes opérations linéaires, Warsaw, 1932.

DAY., M. M. The spaces L^p with $0 < p < 1$, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 46 (1940) pp. 816-823.

DUREN, P. L., ROMBERG B. W. and SHIELDS A. L., Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$, J. Reine Angew Math. 238 (1969), 32-60.

DUREN, P. L. and SHIELDS A. L., Properties of H^p $0 < p < 1$ and its containing Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 141 (1969), 255-262.

DUREN, P. L. and SHIELDS A. L., Coefficent multipliers of H^p spaces and B^p spaces, Pacific J. Math. 32 (1970), 69-78.

DUREN, P. L. and TAYLOR G. D., Mean growth and coefficients of H^p spaces. Illinois J. Math. 32 (1970), 419-423.

DUREN, P. L., Theory of H^p spaces, Academic Press 1970.

EVGRAFOV, M. A., Behavior of power series for functions of class H_δ on the boundary of the circle of convergece, izv. Akad. Navk. SSSR. ser. Math. 16 (1952), 481-492 (Russian).

GARLING, D. J. H., On topological sequence spaces, Math. Proc. Cambrige Phil. soc. 63 (1967), 997-1019.

HARDY, G. H. and LITTLEWOOD J. E., Some properties of fractional integrals II., Math. Z. 34 (1932), 403-439.

HOFFMAN, K., Banach spaces of Analytic functions, Englewood Cliffs, N. J. 1962.

RIESZ, F., Uber die Randvete Einer Analytiescher Funktion Math. Zeit. vol. 18 (1923), pp. 87-95.

SHAPIRO, H. S. and SHIELDS, A. L., On some interpolartion problems for analytic functions, Amer. J. Math. 83. (1961), 513-532.

SNYDER, A. K., Sequence spaces and interpolation problems for analytic functions, Studio Math. 39 (1971), 137-153.

TAYLOR, A. E., New proofs of some Theorems of Hardy by Banach spaces Methods, Mathematics Magazine (1950), pp. 115-124.

WALTERS, S. S., The spaces H^p with $0 < p < 1$, Proc. Amer. Math. soc. 1 (1950), 800-805.

WILANSKY, A., Topics in Functional Analysis, Lecture notes. No 45. Berlin 1967.

WILANSKY, A., Summability Through Functional Analysis, North-Holland, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1990 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde üniversite öğrenimine başladı.

1996 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı.

Halen aynı üniversitede Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.