HYPEROCTAHEDRAL GRUPLARIN REPRESENTASYONLARI

Samet Yücel KADIOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
1998

ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HYPEROCTAHEDRAL GRUPLARIN REPRESENTASYONLARI

Samet Yücel KADIOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 22/06 / 1998 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Sait HALICIOĞLU (Danışman)	**Prof.Dr. Abdullah HARMANCI**	**Prof.Dr. İ. Kaya ÖZKIN**
Doç.Dr. Yücel TIRAŞ		**Doç.Dr. A. Bülent EKİN**

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
HYPEROCTAHEDRAL GRUPLARIN REPRESENTASYONLARI

Samet Yücel KADIOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Sait HALICIOĞLU
1998, Sayfa : 144
Jüri : Prof. Dr. Abdullah HARMANCI
Prof. Dr. İ. Kaya ÖZKIN
Doç. Dr. Yücel TIRAŞ
Doç. Dr. Sait HALICIOĞLU
Doç. Dr. A. Bülent EKİN

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmı verildi.

İkinci bölümde, çalışma için gerekli olan temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde, S_n simetrik grubunun tüm indirgenemez modüllerini ve indirgenemez representasyonlarını belirlemek için doğal ve kolay bir yöntem verildi.

Dördüncü bölümde, Hyperoctahedral grupların tüm indirgenemez modülleri ve indirgenemez representasyonları belirlendi.

ANAHTAR KELİMELER : Representasyon, F[G]-modül, Simetrik grup, Hyperoctahedral grup, Grup cebiri, Parçalanma, λ-tablo, λ-tabloid, λ-polytabloid, Specht modül, Garnir elemanı.

ABSTRACT

Masters Thesis
REPRESENTATIONS OF HYPEROCTAHEDRAL GROUPS

Samet Yücel KADIOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

1998, Page : 144
Jury : Prof. Dr. Abdullah HARMANCI
Prof. Dr. İ. Kaya ÖZKIN
Assoc. Prof. Dr. Yücel TIRAŞ
Assoc. Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Assoc. Prof. Dr. A. Bülent EKİN

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter deals with the preliminaries, definitions and necessary theorems that will be needed for later use.

The third chapter is mainly concerned with G. D. James' construction of all the irreducible modules of the symmetric groups over an arbitrary field.

In the final chapter, the construction of all the irreducible modules of the hyperoctahedral groups over an arbitrary field is presented.

KEY WORDS: Representation, F[G]-module, Symmetric group, Hyperoctahedral group, Group algebra, Partition, λ-tableau, λ-tabloid, λ-polytabloid, Specht module, Garnir element.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşturulmasında bana yol gösteren ve çalışmalarımı büyük bir titizlikle izleyerek beni yönlendiren Sayın Hocam Doç.Dr. Sait HALICIOĞLU'na en derin saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Z	Tamsayılar cümlesi
IR	Reel sayılar cümlesi
C	Kompleks sayılar cümlesi
D_n	Dihedral grup
S_n	Simetrik grup
O_n	Hyperoctahedral grup
T	Representasyon
T_B	B bazına göre matris representasyonu
F[G]	G nin grup cebiri
χ	T nin karakteri
Char F	F nin karakteristiği
GL(V)	V nin tersinir lineer dönüşümlerinin grubu
GL(n,F)	F üzerindeki nxn tipindeki tersinir matrislerin grubu
$\mathrm{Ker}\,\theta$	θ nın çekirdeği
x^G	x in eşlenik sınıfi
$C_G(x)$	x in merkezleyeni
İz(A)	A nın izi
$[\lambda]$	λ nın diyagramı
S_λ	Young altgurbu
R_t	t nin satır grubu
C_t	t nin sütun grubu
$\{t\}$	t nin satır denklik sınıfi
$[t]$	t nin sütun denklik sınıfi
e_t	λ -polytabloid ((λ,μ) -polytabloid)
M^λ	λ -tabloidler tarafindan gerilen vektör uzayı
$M^{\lambda,\mu}$	(λ,μ) tabloidler tarafindan gerilen vektör uzayı
S^λ	M^λ nın λ -polytabloider tarafindan gerilen altmodülü (Specht modül)

$S^{\lambda,\mu}$	$M^{\lambda,\mu}$ nün (λ,μ) -polytabloider tarafından gerilen altmodülü (Specht modül)
$G_{A,B}$	A,B kümeleri üzerindeki Garnir elemanı

1.GİRİŞ

Karakteristiği sıfır olan cisimler üzerinde simetrik grupların representasyonları teorisi oldukça hızlı ilerlemiş bir konudur. İlk orijinal yaklaşım G.Frobenius,I. Schur ve A. Young tarafindan yapılmıştır. 1930'da W.Specht [9] simetrik grupların bütün indirgenemez modüllerini veren yeni bir yaklaşım sunmuştur. Daha sonra Specht'in yöntemiyle bulunan indirgenemez modüller Specht modül olarak adlandırılmıştır.

1976 yılında G.D. James [5] keyfi cisimler üzerinde simetrik grupların indirgenemez modüllerinin inşası ile ilgili oldukça kolay ve doğal olan bir yöntem verdi. Bir yıl sonra 1977'de Al-Aamily [1] doktora tezinde bu inşa yönteminin B_n tipindeki Weyl gruplarına (hyperoctahedral grup) genişletilebileceğini gösterdi. 1981 yılında Al-Aamily, Morris ve Peel [2] bu çalışmaya alternatif bir yöntem verdiler.

Bu çalışmada G.D. James'in inşa yöntemiyle, S_n simetrik grubu için, F keyfi bir cisim ve λ, n nin bir parçalanması olmak üzere, λ verildiğinde λ ya karşılık M^λ F-vektör uzayının inşası ve bu M^λ nın nasıl $F[S_n]$ modül yapıldığı verildi. Sonra M^λ nın Specht modül adı verilen S^λ altmodülünün inşa yöntemi verildi ve Char F = 0 durumunda, λ lar değiştikçe S^λ ların S_n in tüm indirgenemez modüllerini verdiği ispatlandı.

Çalışmamızın son bölümünde yine aynı yöntemle O_n hyperoctahedral grubu için, F keyfi bir cisim ve (λ,μ) n nin bir parçalanma çifti olmak üzere, $M^{\lambda,\mu}$, $F[0_n]$- modülü ve $M^{\lambda,\mu}$ nün $S^{\lambda,\mu}$ altmodülünün inşası verildi. Sonra Char F=0 durumunda (λ,μ) ler değiştikçe $S^{\lambda,\mu}$ lerin O_n in tüm indirgenemez modüllerini verdiği ispatlandı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Sonlu Bir Grubun Representasyonları ve $F[G]$ – Modüller

Tanım 2.1.1. (Representasyon ve matris representasyonu)

G sonlu bir grup ve V; F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı, GL(V) de V nin tersinir lineer dönüşümlerinin grubu olsun.

$$\begin{aligned} T:\ & G \longrightarrow GL(V) \\ & g \longrightarrow T(g) \end{aligned}$$

homomorfizmasına G nin V/F üzerindeki veya kısaca F üzerindeki representasyonu denir.

Eğer T, G nin F üzerindeki bir representasyonu ise açıkça

$T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$, $T(1_G) = 1_V$, $T(g^{-1}) = T(g)^{-1}$ ve $m \in Z$ için $T(g^m) = T(g)^m$ dir.

Şimdi $B = \{v_1,...,v_n\}$, V/F için bir baz olsun.Eğer T; G nin F üzerindeki bir representasyonu, $g \in G$ için $T_B(g)$; T(g) lineer dönüşümüne B bazına göre karşılık gelen matris ve GL(n,F) de F üzerindeki nxn tipindeki tersinir matrislerin grubu ise bu durumda

$$\begin{aligned} T_B:\ & G \longrightarrow GL(n,F) \\ & g \longrightarrow T_B(g) \end{aligned}$$

dönüşümü bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya G nin derecesi n olan bir matris representasyonu denir.

NOT: T_B matris representasyonunu bazı kısımlarda sadece T ile göstereceğiz.

Örnek 2.1.2. G, $D_4 =< a,b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} >$ dihedral grubu olsun. A ve B matrislerini, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ olarak alırsak, $A^4=B^2=I_2$, $B^{-1}AB=A^{-1}$

dir.

$$\begin{aligned} T:\quad & G \longrightarrow GL(2,F) \\ & a^i b^j \longrightarrow A^i B^j \qquad (0\le i\le 3,\ 0\le j\le 1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak T bir homomorfizmadır. Dolayısıyla T, D_4 ün derecesi 2 olan bir matris representasyonudur.

Böylece $\forall g \in D_4$ için T(g) matrisleri aşağıdaki gibidir.

g	1	a	a^2	a^3
T(g)	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

g	b	ab	a^2b	a^3b
T(g)	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Örnek 2.1.3. G herhangi bir grup olsun.

$$\begin{aligned} T: G & \longrightarrow GL(n,F) \\ g & \longrightarrow T(g)=I_n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan T bir homomorfizmadır. Dolayısıyla T , G nin derecesi n olan bir matris representasyonudur.

Bu örnek gösteriyor ki her grup keyfi dereceden matris representasyonlarına sahiptir.

Tanım 2.1.4.(Denk representasyonlar)

G sonlu bir grup ve T, T' G nin F üzerindeki sırasıyla derecesi n,m olan matris representasyonları olsunlar.

Eğer $n = m$, $n \times n$ tipindeki tersinir bir C matrisi mevcut ve $\forall g \in G$ için,

$$T'(g) = C^{-1}T(g)C$$

oluyorsa T matris representasyonuna T' matris representasyonu ile denk olan representasyon denir.

G nin herhangi T, T', T'' matris representasyonları için aşağıdakiler söylenebilir.

(1) T, T ile denktir.

(2) Eğer T, T' ile denk ise bu durumda T' de T ile denktir.

(3) Eğer T, T' ile denk ve T', T'' ile denk ise bu durumda T, T'' ile denktir.

Diğer bir ifadeyle representasyonların denkliği bir denklik bağıntısıdır.

Örnek 2.1.5. $G = C_2 =< a : a^2 = 1 >$ ve $A = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $A^2 = I_2$ olup $T(1) = I_2$ ve $T(a) = A$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} T:\ G &\longrightarrow GL(2,F) \\ g &\longrightarrow T(g) \end{aligned}$$

G nin bir matris representasyonudur. A nın özdeğerleri yardımıyla kolayca $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ geçiş matrisi bulunabilir öyleki,

$$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

dır.

Buradan G nin bir T' matris representasyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} T': G &\longrightarrow GL(2,F)\\ g &\longrightarrow T'(g)=C^{-1}T(g)C \end{aligned}$$

$$1\in G \text{ için } T'(1)=C^{-1}T(1)C=C^{-1}I_2C=I_2$$

$$a\in G \text{ için } T'(a)=C^{-1}T(a)C=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Görüldüğü gibi T, T' ile denktir.

Tanım 2.1.6. (Sonlu bir grubun grup cebiri)

G elemanları $x_1,\ldots,x_m$ olan sonlu bir grup ve F bir cisim olsun. $a_i\in F$ ve $x_i\in G$ olmak üzere, $F[G]$ nin elemanları $x=\sum_{i=1}^{m}a_ix_i$ şeklindeki formal lineer bileşimlerden oluşur. Ayrıca,

$x_i\in G$ ve $a_i,b_i,k\in F$ için $x=\sum_{i=1}^{m}a_ix_i$, $y=\sum_{j=1}^{m}b_jx_j\in F[G]$ olmak üzere,

$$x\oplus y=\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)x_i$$

$$k\odot x=\sum_{i=1}^{m}(ka_i)x_i$$

$$x\otimes y=\sum_{i,j=1}^{m}a_ib_j(x_ix_j)$$

işlemleriyle $F[G]$, F üzerinde bir cebir olacaktır. Ayrıca $F[G]$ nin bazı $\{x_1,\dots,x_m\}$ ve dolayısıyla $[F[G]:F]=|G|$ olacaktır. Sonuç olarak $F[G]$ ye G nin F üzerindeki grup cebiri adı verilir.

Örnek 2.1.7. $G=<a : a^2=e>$ ve $F=Z_2=\{\overline{0},\overline{1}\}$ alalım. Bu durumda

$$Z_2[G]=\{r_1e+r_2a : r_1,r_2 \in Z_2\}$$

$$=\{\overline{0}e+\overline{0}a,\overline{1}e+\overline{0}a,\overline{0}e+\overline{1}a,\overline{1}e+\overline{1}a\}$$

$$=\{O,e,a,e+a\}$$

olup, $(Z_2[G],\oplus,\otimes,\Theta)$ dörtlüsü bir cebir olacaktır. $\oplus$ ve $\otimes$ işlemlerine ilişkin işlem tabloları aşağıdaki gibidir.

$\oplus$	O	e	a	e+a
O	O	e	a	e+a
e	e	O	e+a	a
a	a	e+a	O	e
e+a	e+a	a	e	O

$\otimes$	O	e	a	e+a
O	O	O	O	O
e	O	e	a	e+a
a	O	a	e	e+a
e+a	O	e+a	e+a	O

Tanım 2.1.8. (Bir representasyon tarafından belirlenen modül)

G sonlu bir grup ve T , G nin V/F üzerindeki bir representasyonu olsun. Bu durumda,

$$\Theta : F[G] \times V \longrightarrow V$$

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i, v) \longrightarrow (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)\ \Theta\, v = \sum_{i=1}^{m} a_i T(x_i)(v)$$

dış işlemiyle V bir $F[G]$-modül yapılabilir. V ye G nin T representasyonu tarafından belirlenen modülü denir.

Tersine, eğer V bir $F[G]$- modül olarak verilmiş ise bu durumda,

$$\begin{aligned} T:\ G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longrightarrow T(g):\ V \to V \\ & \qquad\qquad v \to T(g)(v) = gv \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan T , G nin V/F üzerindeki bir representasyonudur. T ye V $F[G]$-modülü tarafından belirlenen representasyon denir.

Sonuç olarak G nin bir T representasyonu verildiğinde bu representasyona karşılık bir $F[G]$-modül, bir $F[G]$-modül verildiğinde bu modüle karşılık G nin bir representasyonu bulunabilir.

Örnek 2.1.9. $G = D_4 =< a, b :\ a^4 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} >$ olsun ve G nin bir matris representasyonu

$$T(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ T(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} T:\ G &\longrightarrow GL(2, F) \\ g &\longrightarrow T(g) \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $V = F^2$ v_1, v_2 sütun vektörleri tarafından gerilen vektör uzayı olsun.

Aşağıdaki dış işlemle V bir $F[G]$ – modüldür.

$\forall v \in V$, $g \in G$ için $gv = T(g)v$ olup,

$$av_1 = T(a)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_2$$

$$av_2 = T(a)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

$$bv_1 = T(b)v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

$$bv_2 = T(b)v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_2$$

Tersine, $G = C_3 = < a : a^3 = 1 >$ olmak üzere, $V = Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ aşağıdaki dış işlemle bir $F[G]$ – modül olsun.

$1v_1 = v_1$, $1v_2 = v_2$ $1v_3 = v_3$, $av_1 = v_2$, $av_2 = v_3$, $av_3 = v_1$, $a^2v_1 = v_3$, $a^2v_2 = v_1$, $a^2v_3 = v_2$

Bu durumda,

$$1, a, a^2 \in G \text{ için } T(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ T(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ T(a^2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} T:\ G &\longrightarrow GL(3,F) \\ g &\longrightarrow T(g) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak T , G nin V/F üzerindeki derecesi 3 olan bir matris representasyonudur.

Şimdi $F[G]$ – modüller ile denk representasyonlar arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Bir $F[G]$ – modüle $g \longrightarrow T_B(g)$ formunda birçok matris representasyonu karşılık gelir. Aşağıdaki teoremle göreceğiz ki böyle bütün representasyonlar denktirler.

Teorem 2.1.10. ($F[G]$ – modüller ve denk representasyonlar)

V, B bazıyla bir $F[G]$ – modül ve $T_B : g \longrightarrow T_B(g)$ G nin bir matris representasyonu olsun.

(1) Eğer B' V nin bir başka bazı ise, bu durumda G nin

$$T' : g \longrightarrow T_{B'}(g)$$

matris representasyonu T_B ile denktir.

(2) Eğer T', G nin T_B ile denk olan bir matris representasyonu ise, bu durumda V nin bir B'' bazı vardır öyleki,

$$T' : g \longrightarrow T_{B''}(g)$$

dir.

İspat:(1) Eğer C, B den B' ye baz değişim matrisi ise, bu durumda

$$T_B(g) = C^{-1}T_{B'}(g)C$$

dir. Dolayısıyla $T_B(g) = C^{-1}T'(g)C$ olup, Tanım 2.1.4 gereğince T', T_B ile denktir.

(2) T' ile T_B G nin denk olan matris representasyonları olsunlar. Bu durumda Tanım 2.1.4 den tersinir bir C matrisi vardır öyleki,

$$T_B(g) = C^{-1}T'(g)C \tag{i}$$

Şimdi B den B'' ye baz değişim matrisi C olacak şekilde B'' V nin bir bazı olsun. Bu durumda,

$$T_{B''}(g) = CT_B(g)C^{-1} \tag{ii}$$

O halde (i) ve (ii) den $T'(g) = T_{B''}(g)$ yani $T' : g \longrightarrow T_{B''}(g)$ dir.

Bu teoremin bir uygulamasını aşağıdaki örnekte görelim.

Örnek 2.1.11. $G = C_3 =< a : a^3 = 1 >$ ve V, $B = \{v_1, v_2\}$ bazıyla aşağıdaki dişişlemle birlikte bir $C[G]$ – modül olsun.

$$1v_1 = v_1,\ av_1 = v_2,\ a^2v_1 = -v_1 - v_2$$

$$1v_2 = v_2,\ av_2 = -v_1 - v_2,\ a^2v_2 = v_1$$

Bu durumda G nin B bazına göre V $C[G]$ – modülüne karşılık gelen matris representasyonu şöyle olacaktır.

$$1, a, a^2 \in G \text{ için } T(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ T(a)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ T(a^2)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} T : G &\longrightarrow GL(2,C)\\ g &\longrightarrow T(g)\end{aligned}$$

V nin bir B' bazını $u_1 = v_1$ ve $u_2 = v_1 + v_2$ olmak üzere $B' = \{u_1, u_2\}$ olarak alalım. Bu durumda $\forall g \in G$ için $T_{B'}(g)$ matrisleri,

$$T_{B'}(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ T_{B'}(a)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ T_{B'}(a^2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} T' : G &\longrightarrow GL(2,C)\\ g &\longrightarrow T_{B'}(g)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan T' G nin bir matris representasyonudur.

Şimdi bu yolla elde ettiğimiz T' nün T_B ile denk olduğunu gösterelim. Bunun için önce B den B' ye baz değişim matrisini bulalım.

$$v_1 = t_{11}u_1 + t_{21}u_2\ ,\quad v_2 = t_{12}u_1 + t_{22}u_2$$

$$v_1 = 1v_1 + 0(v_1 + v_2)\ ,\quad v_2 = -1v_1 + 1(v_1 + v_2)$$

olup $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ dir.

Kolayca gösterilebilirki,

$$\forall g \in G \text{ için } T_B(g) = C^{-1}T_{B'}(g)C = C^{-1}T'(g)C$$

dir. Böylece T' , T_B ile denktir.

Tanım 2.1.12. (Permütasyon modülü)

G, S_n nin bir altgrubu ve V, $\{v_1,\ldots,v_n\}$ bazıyla bir $F[G]$ – modül olsun. Eğer V nin dış işlemi her i ve $g \in G$ için

$$gv_i = v_{g(i)}$$

ise bu durumda V ye bir permütasyon modülü denir.

V bir permütasyon modülü ise, $\forall g \in G$ için $T_B(g)$ matrisleri; her satır ve sütununda bir tane 1 diğer bileşenleri 0 olan matrislerdir. Böyle matrislere permütasyon matrisi denir.

Örnek 2.1.13. $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ olsun. Bu durumda G , S_3 ün (123) permütasyonu tarafindan üretilen altgrubuna izomorftur.

$V = Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ 3 boyutlu vektör uzayını alalım V aşağıdaki dışişlemle bir $F[G]$ – modül yapılabilir.

$$1v_1 = v_1,\ 1v_2 = v_2,\ 1v_3 = v_3$$

$$av_1 = v_2,\ av_2 = v_3,\ av_3 = v_1$$

$$a^2v_1 = v_3,\ a^2v_2 = v_1,\ a^2v_3 = v_2$$

Görüldüğü gibi dış işlem bazı baza götürür dolayısıyla Tanım 2.1.12 den V bir permütasyon modülüdür.

Ayrıca T_B, B bazına göre V ye karşılık gelen matris representasyonu olmak üzere, $\forall g \in G$ için $T_B(g)$ permütasyon matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$T_B(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ T_B(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ T_B(a^2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Tanım 2.1.14. ($F[G]$-altmodül) V/F bir $F[G]$-modül ve $\varnothing \neq W \subseteq V$ olsun. Eğer W, V nin bir alt uzayı ve $\forall w \in W$, $g \in G$ için $gw \in W$ ise W ya V nin bir $F[G]$-altmodülü denir.

Örnek 2.1.15. $G = C_3 =< a : a^3 = 1 >$ ve $V = Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ aşağıdaki dış işlemle bir $F[G]$-modül olsun.

$$1v_1 = v_1,\ 1v_2 = v_2,\ 1v_3 = v_3$$

$$av_1 = v_2,\ av_2 = v_3,\ av_3 = v_1$$

$$a^2v_1 = v_3,\ a^2v_2 = v_1,\ a^2v_3 = v_2$$

$W = Sp\{v_1 + v_2 + v_3\}$ alırsak W, V nin bir $F[G]$-altmodülüdür. Gerçekten

$$\forall w = c(v_1 + v_2 + v_3) \in W \text{ ve } g \in G \text{ için,}$$

$$g(c(v_1 + v_2 + v_3)) = c(gv_1 + gv_2 + gv_3) = c(v_1 + v_2 + v_3) \in W$$

dur.

Fakat $U = Sp\{v_1 + v_2\}$ alırsak U, V nin bir $F[G]$-altmodülü değildir.Çünkü $a \in G$ $u = v_1 + v_2 \in U$ için,

$$au = a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2 = v_2 + v_3 \notin U$$

dur.

Tanım 2.1.16. (İndirgenemez (İndirgenebilir) $F[G]$-modül)

V bir $F[G]$-modül olsun. V nin $\{0\}$ ve kendisinden başka $F[G]$-altmodülü yoksa V ye indirgenemez $F[G]$-modül denir.

Eğer V, $\{0\}$ ve kendisinden farklı bir W $F[G]$-altmodülüne sahip ise bu durumda V ye indirgenebilir $F[G]$-modül denir.

$T : G \longrightarrow GL(V)$ G nin bir representasyonu olsun. T ye karşılık gelen V $F[G]$-modülü indirgenemez ise T ye indirgenemez representasyon denir.

Eğer T ye karşılık gelen V $F[G]$-modülü indirgenebilir ise bu durumda T ye indirgenebilir representasyon denir.

Kabul edelim ki V bir indirgenebilir $F[G]$-modül olsun. Bu durumda 0 < dim W < dim V olacak şekilde V nin bir W $F[G]$-altmodülü vardır ve B_1 W nun bir bazı ise bu baz V nin bir B bazına genişletilebilir.

Eğer T_B, V ye karşılık gelen matris represantasyonu ise bu durumda, $\forall\ g \in G$ için $T_B(g)$ matrisi; X(g), Y(g) ve Z(g) birer matris ve X(g) $k \times k$ tipinde olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} X(g) & Y(g) \\ 0 & Z(g) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

formundadır.

n.dereceden bir matris representasyonu indirgenebilirdir. $\Leftrightarrow$ Bu matris representasyonu $(*)$ formundaki bir matris representasyonuna denk ise.

Örnek 2.1.17. V örnek 2.1.15 deki gibi tanımlanan bir $F[G]$-modül olsun. Bu durumda $W = Sp\{v_1 + v_2 + v_3\}$ V nin bir $F[G]$-altmodülüdür. W nun $v_1 + v_2 + v_3$ bazını V nin bir $B' = \{v_1 + v_2 + v_3, v_1, v_2\}$ bazına genişletirsek, $T_{B'}$, V ye karşılık gelen matris representasyonu olmak üzere, $\forall g \in G$ için $T_{B'}(g)$ matrisleri,

$$T_{B'}(1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad T_{B'}(a) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right), \quad T_{B'}(a^2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

olur. Görüldüğü gibi $\forall g \in G$ için $T_{B'}(g)$ matrisi (*) formundadır.Dolayısıyla $T_{B'}$ matris representasyonu indirgenebilirdir.

2.2. $F[G]$-Homomorfizmalar

Gruplar ve vektör uzayları için yapıyı koruyan fonksiyonlar sırasıyla, grup homomorfizmaları ve lineer dönüşümlerdir. $F[G]$- modüller için benzer fonksiyonlara $F[G]$ - homomorfizmalar denir.

Tanım 2.2.1. V ve W birer $F[G]$-modül olsunlar. V den W ya bir $\theta : V \to W$ fonksiyonu verilsin.

Eğer θ bir lineer dönüşüm ve $\forall v \in V$, $g \in G$ için $\theta(gv) = g\theta(v)$ ise bu durumda, θ ya bir $F[G]$ - homomorfizma denir.

Önerme 2.2.2. V ve W birer $F[G]$ - modül ve $\theta : V \to W$ bir $F[G]$ - homomorfizma olsun. Bu durumda $Ker\theta$, V nin ve $Im\theta$ da, W nun birer $F[G]$

altmodülüdür.

İspat: θ bir lineer dönüşüm olduğundan $\mathrm{Ker}\theta$, V nin ve $\mathrm{Im}\theta$, W nun birer altuzayıdır.

$\forall v \in \mathrm{Ker}\theta$ ve $g \in G$ için $gv \in \mathrm{Ker}\theta$ dır. Gerçekten, θ bir $F[G]$ - homomorfizma olduğundan

$$\theta(gv) = g\,\theta(v) = g0 = 0$$

olup, $gv \in \mathrm{Ker}\theta$ dır. Dolayısıyla $\mathrm{Ker}\,\theta$, V nin bir $F[G]$ - altmodülüdür.

$\forall w \in \mathrm{Im}\theta$ ve $g \in G$ için $gw \in \mathrm{Im}\theta$ dır. Gerçekten, $w \in \mathrm{Im}\theta \Rightarrow \theta(v) = w$ olacak şekilde $v \in V$ dir.

$$gw = g\,\theta(v) = \theta(gv)$$

olup, $gw \in \mathrm{Im}\theta$ dır. Dolayısıyla $\mathrm{Im}\theta$, W nun bir $F[G]$ -altmodülüdür.

Örnek 2.2.3. G, S_n nin bir altgrubu olsun. $V = \mathrm{Sp}\{v_1,\ldots,v_n\}$ permütasyon modülü ve $W = \mathrm{Sp}\{w\}$ aşikar $F[G]$ -modül olsun.

Bu durumda V den W ya bir θ $F[G]$ -homomorfizmasını şöyle kurabiliriz.

$$\begin{aligned} \theta : V &\longrightarrow W \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i &\to \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) w \end{aligned}$$

Kolayca gösterilebilirki θ bir lineer dönüşümdür. Şimdi $\forall g \in G$ ve $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ için,

$$\theta\,(gv) = \theta\left(g\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\right)$$

$$= \theta\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g v_i\right)$$

$$= \theta\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_{g(i)}\right)$$, V permütasyon modülü olduğundan $gv_i = v_{g(i)} = v_j$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)w \qquad \text{(i)}$$

$$g\,\theta\,(v) = g\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)w\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)gw$$, W aşikar $F[G]$ -modül oldudan $gw = w$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)w \qquad \text{(ii)}$$

(i) ve (ii) den $\theta\,(g\,v) = g\theta\,(v)$ dir. Dolayısıyla θ bir $F[G]$ -homomorfizmadır.

Ayrıca, $\mathrm{Ker}\theta$ ve $\mathrm{Im}\theta$ aşağıdaki gibidir.

$$\mathrm{Ker}\;\theta = \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i \;:\; \theta\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\right) = 0\right\}$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i \;:\; \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)w = 0\right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \ : \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \right\}$$

$$\mathrm{Im}\theta = \left\{ \theta\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right) \ : \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V \right\}$$

$$= \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) w \ : \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \in F \ , \ w \in W \right\}$$

$$= Sp\{w\} = W$$

Tanım 2.2.4 . (İzomorfik $F[G]$-modüller)

V , W $F[G]$-modüller olmak üzere, V den W ya bir $\theta : V \to W$ fonksiyonu verilsin.

Eğer θ bir $F[G]$-homomorfizma, birebir ve örten ise bu durumda θ ya bir $F[G]$-izomorfizma denir.

Eğer V ile W arasında bir $F[G]$ - izomorfizma mevcut ise bu durumda V ve W ya izomorfik $F[G]$ - modüller denir ve $V \cong W$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.5.Eğer V, W birer $F[G]$-modül ve $\theta : V \to W$ bir $F[G]$-izomorfizma ise bu durumda, $\theta^{-1} : W \to V$ da bir $F[G]$-izomorfizmadır.

İspat: θ birebir ve örten olduğundan θ^{-1} mevcut ve θ^{-1} de birebir ve örtendir. θ^{-1} lineerdir yani $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F$ ve $w_1 w_2 \in W$ için

$$\theta^{-1}\left(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\right) = \lambda_1 \theta^{-1}\left(w_1\right) + \lambda_2 \theta^{-1}(w_2)$$

dir. Gerçekten, θ birebir ve örten olduğundan

$$w_1=\theta(v_1), w_2=\theta(v_2),\ \theta^{-1}(w_1)=v_1\ ,\ \theta^{-1}(w_2)=v_2 \text{ ve } \theta^{-1}\theta=1_v, \theta\theta^{-1}=1_w$$

dır. Buradan

$$\theta^{-1}\left(\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2\right)=\theta^{-1}\left(\lambda_1\theta(v_1)+\lambda_2\theta(v_2)\right)$$

$$=\theta^{-1}\left(\theta(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2)\right),\ \theta \text{ lineer olduğundan}$$

$$=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2$$

$$=\lambda_1\theta^{-1}(w_1)+\lambda_2\theta^{-1}(w_2)$$

dir. Şimdi $\forall w\in W$ ve $g\in G$ için $\theta^{-1}(gw)=g\theta^{-1}(w)$ dur. Gerçekten, θ bir $F[G]$-homormofizma olduğundan ve baştaki açıklamalardan,

$$\theta(g\theta^{-1}(w))=g\theta(\theta^{-1}(w))=gw \tag{i}$$

ve

$$\theta(\theta^{-1}(gw))=gw \tag{ii}$$

dir. (i) ve (ii) den

$$\theta(\theta^{-1}(gw))=\theta(g\theta^{-1}(w))$$

ve θ birebir olduğundan

$$\theta^{-1}(gw)=g\theta^{-1}(w)$$

dur. Dolayısıyla θ^{-1} bir $F[G]$-izomorfizmadır.

Sonuç 2.2.6. Eğer V ile W izomorfik $F[G]$- modüller ise bu durumda, V indirgenemez $F[G]$ - modüldür $\Leftrightarrow$ W indirgenemez $F[G]$ -modül ise

İspat: V indirgenemez $F[G]$ -modül olsun. Eğer X, W nun bir $F[G]$ -altmodülü ise bu durumda $\theta^{-1}(X)$ de V nin bir $F[G]$ -altmodülüdür. Fakat V indirgenemez olduğundan, $\theta^{-1}(X)=\{0_V\}$ veya $\theta^{-1}(X)=V$ dir.

$$\theta^{-1}(X)=\{0_V\} \Rightarrow X=\theta(\{0_V\})=\{0_w\}$$

veya

$$\theta^{-1}(X)=V \Rightarrow X=\theta(V)=W$$

dur. Dolayısıyla W indirgenemezdir.

Tersine W indirgenemez $F[G]$ -modül olsun. Eğer U , V nin bir $F[G]$ -altmodülü ise bu durumda $\theta(U)$ da W nun bir $F[G]$ -altmodülüdür. Fakat W indirgenemez olduğundan, $\theta(U)=\{0_w\}$ veya $\theta(U)=W$ dur.

$$\theta(U)=\{0_w\} \Rightarrow U=\theta^{-1}(\{0_w\})=\operatorname{Ker}\theta=\{0_V\}$$

veya

$$\theta(U)=W \Rightarrow U=\theta^{-1}(W)=V$$

dir. Dolayısıyla V indirgenemezdir.

Lemma 2.2.7. V, W birer $F[G]$ -modül ve $T: G \to GL(V)$, $T': G \to GL(W)$ G nin keyfi representasyonları olsunlar. Bu durumda,

V ile W $F[G]$ -modülleri izomorfiktir. $\Leftrightarrow$ V nin bir B_1 bazı ve W nun bir B_2 bazı vardır öyleki, $\forall g \in G$ için, $T_{B_1}(g)=T'_{B_2}(g)$ ise.

İspat: θ , V den W ya bir $F[G]$ -izomorfizma ve $B_1 = \{v_1,..,v_n\}$ V nin bir bazı olsun. Bu durumda $\theta(v_1),\ldots,\theta(v_n)$ W nun bir bazıdır. Bu baza B_2 diyelim.

T representasyonu,

$$T: G \to GL(V)$$

$$g \to T(g) : V \to V$$
$$v_i \to T(g)v_i = g v_i$$

şeklindedir. $gv_i \in V$ olduğundan $a_1,\ldots,a_n \in F$ olmak üzere,

$$gv_i = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$$

dir. Buradan $T_{B_1}(g)$ matrisinin ilk i. sütununun bileşenleri $a_1,\ldots,a_n$ dir. Ayrıca

$$T' : G \to GL(W)$$

$$g \to T'(g): W \to W$$
$$\theta(v_i) \to T'(g)(\theta(v_i)) = g\theta(v_i)$$

şeklinde olup, θ bir $F[G]$ -izomorfizma olduğundan

$$T'(g)(\theta(v_i)) = g\theta(v_i) = \theta(gv_i)$$

$$= \theta(a_1v_2 + \ldots + a_nv_n)$$

$$= a_1\theta(v_1) + \ldots + a_n\theta(v_n)$$

dir. Buradan $T'_{B_2}(g)$ matrisinin ilk i. sütununun bileşenleri $a_1,\ldots,a_n$ dir.

Böylece i keyfi olduğundan her $1 \leq i \leq n$ için,

$$T_{B_1}(g) = T'_{B_2}(g)$$

dir.

Tersine kabul edelimki $B_1 = \{v_1,..,v_n\}$ V nin bir bazı ve $B_2 = \{w_1,..,w_n\}$ W nun bir bazı olsun. Öyleki, $\forall g \in G$ için, $T_{B_1}(g) = T'_{B_2}(g)$ olsun.

V den W ya θ yı her i için $\theta\,(v_i) = (w_i)$ şeklinde tanımlarsak, θ tersinir bir lineer dönüşümdür.

Şimdi her $1 \leq i \leq n$ ve $g \in G$ için $\theta\,(gv_i) = g\theta\,(v_i)$ dir.

Gerçekten, $a_1,..,a_n \in F$ olmak üzere $T_{B_1}(g) = T'_{B_2}(g)$ olduğundan,

$$T(g)(v_i) = gv_i = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$$

ve

$$T'(g)(w_i) = gw_i = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}\theta\,(gv_i) &= \theta(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n)\\ &= a_1\theta(v_1) + \ldots + a_n\theta(v_n)\\ &= a_1w_1 + \ldots + a_nw_n\\ &= g\theta\,(v_i)\end{aligned}$$

dir. Böylece $\forall v \in V$ ve $g \in G$ için $\theta\,(gv) = g\theta\,(v)$ olup, θ bir $F[G]$ - izomorfizmadır.

Aşağıdaki teoremde izomorfik $F[G]$-modüller ile denk representasyonlar arasındaki ilişkiyi vereceğiz

Teorem 2.2.8. V, B bazıyla ve W da B' bazıyla birer $F[G]$ - modül olsunlar. Bu durumda,

V ile W izomorfiktir. $\Leftrightarrow$ G nin $\begin{array}{l} T: G \to GL(V) \\ \quad\; g \to T(g) \end{array}$ ve $\begin{array}{l} T': G \to GL(W) \\ \quad\; g \to T'(g) \end{array}$

representasyonları denk ise.

İspat: V ile W izomorfik olsunlar. Bu durumda Lemma 2.2.7 den V nin bir B_1 ve W nun da bir B_2 bazı vardır öyleki,

$$T_{B_1}(g) = T'_{B_2}(g)$$

dir. G nin bir ϕ representasyonunu $\phi: g \longrightarrow T_{B_1}(g)$ şeklinde tanımlarsak Teorem 2.1.10 (1) den ϕ, T_{B_1} ile denktir. Halbuki $T_{B_1}(g) = T'_{B_2}(g)$ olduğundan ϕ, T'_{B_2} ile denktir. Representasyonların denkliği bir denklik bağıntısı olduğundan T, T' ile denktir.

Tersine T, T' ile denk olsun. Bunun anlamı T ve T' ye sırasıyla B ve B' bazına göre karşılık gelen T_B ile $T'_{B'}$ matris representasyonları denktir. Teorem 2.1.10 (2) den V nin bir B'' bazı vardır öyleki;

$$T'_{B'}(g) = T_{B''}(g)$$

dir. Böylece Lemma 2.2.7 den V ile W izomorfiktir.

2.3.Maschke Teoremi

Bu kısımda representasyon teorisinde önemli bir yeri olan Maschke teoremini vereceğiz. Bu teoremle sıfırdan farklı her $F[G]$-modülün indirgenemez $F[G]$-altmodüllerinin bir direkt toplamı olarak yazılabileceğini göstereceğiz.

Lemma 2.3.1. Eğer V bir $F[G]$-modül ve $\theta^2 = \theta$ olacak biçimde θ, V den V ye bir $F[G]$-homomorfizma ise bu durumda

$$V = \mathrm{Im}\theta \oplus \mathrm{Ker}\theta$$

dır.

Teorem 2.3.2. (Maschke teoremi) $\mathrm{Char}F \nmid |G|$ olmak üzere G bir sonlu grup ve V bir $F[G]$-modül olsun. Eğer U, V nin bir $F[G]$-altmodülü ise bu durumda V nin bir W $F[G]$-altmodülü vardır öyleki,

$$V = U \oplus W$$

dur.

İspat: U, V nin verilen bir $F[G]$-altmodülü olmak üzere V nin bir W_0 altuzayını seçelim öyleki,

$$V = U \oplus W_0$$

olsun. Aslında birçok W_0 altuzayı seçilebilir fakat burada W_0 altuzayını $v_1,\ldots,v_m$ U nun bir bazı olmak üzere bu baz V nin bir $v_1,\ldots,v_m,v_{m+1},\ldots,v_n$ bazına genişletildiğinde $W_0 = Sp\{v_{m+1},\ldots,v_n\}$ olacak şekilde seçiyoruz.

$V = U \oplus W_0$ olduğundan her $v \in V$ vektörü, $u \in U$ ve $w \in W_0$ olmak üzere bir tek şekilde $v = u + w$ olarak yazılabilir.

Buradan bir ϕ fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} \phi: V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow \phi(v) = u \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak, ϕ bir lineer dönüşümdür.Ayrıca $\mathrm{Ker}\phi = W_0$, $\mathrm{Im}\phi = U$ ve $\phi^2 = \phi$ dir.

Şimdi ϕ yardımıyla V den V ye bir $F[G]$-homomorfizma tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \theta: V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow \theta(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(g^{-1}v) \end{aligned}$$

olsun. Açıkça θ iyi tanımlıdır.

θ bir lineer dönüşümdür. Gerçekten $\lambda, \mu \in F$ ve $v_1, v_2 \in V$ için

$$\theta(\lambda v_1 + \mu v_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(g^{-1}(\lambda v_1 + \mu v_2))$$

$V = U \oplus W_0$ olduğundan $u_1, u_2 \in U$ ve $w_1, w_2 \in W_0$ olmak üzere bir tek şekilde $v_1 = u_1 + w_1$ ve $v_2 = u_2 + w_2$ olarak yazılabilir.

$$\Rightarrow \theta(\lambda v_1 + \mu v_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(g^{-1}(\lambda u_1 + \lambda w_1 + \mu u_2 + \mu w_2))$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(\lambda g^{-1}u_1 + \mu g^{-1}u_2 + \lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2)$$

U bir $F[G]$-altmodül olduğundan $\lambda g^{-1}u_1 + \mu g^{-1}u_2 \in U$ dur. W_0 ın $F[G]$-altmodül yapısı olmadığından $\lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2$ nin W_0 da olup olmadığı hakkında bir şey söylenemez. Fakat diyebiliriz ki, $\lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2 \notin U$ dur. Gerçekten, eğer $\lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2 \in U$ olsaydı U bir $F[G]$-altmodül olduğundan $g \in G$ için

$$g(\lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2) = \lambda gg^{-1}w_1 + \mu gg^{-1}w_2 = \lambda w_1 + \mu w_2 \in U$$

olurdu. Bu ise $V = U \oplus W_0$ olmasıyla dolayısıyla $U \cap W_0 = \varnothing$ olmasıyla çelişkidir.

O halde $\lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2 \notin U$ ve $V = U \oplus W_0$ olduğundan $\lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2 \in W_0$ dır.

$$\Rightarrow \theta(\lambda v_1 + \mu v_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(\lambda g^{-1}u_1 + \mu g^{-1}u_2 + \lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(\lambda g^{-1}u_1 + \mu g^{-1}u_2)$$

$$= \lambda \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u_1 + \mu \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u_2$$

$$= \lambda \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\phi(g^{-1}u_1 + g^{-1}w_1) + \mu \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\phi(g^{-1}u_2 + g^{-1}w_2)$$

$$= \lambda \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\phi(g^{-1}(u_1 + w_1)) + \mu \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\phi(g^{-1}(u_2 + w_2))$$

$$= \lambda\theta(v_1) + \mu\theta(v_2)$$

dir. Şimdi $\forall v \in V$ ve $x \in G$ için $\theta(xv) = x\theta(v)$ dir. Gerçekten,

$$\theta(xv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\phi(g^{-1}xv),$$

$h^{-1} = g^{-1}x$ dersek $g^{-1} = h^{-1}x^{-1}$ ve $g = xh$ dır.

$$\Rightarrow \theta(xv) = \frac{1}{|G|} \sum_{xh \in G} xh\phi(h^{-1}x^{-1}xv) \qquad , \; xh \in G \Rightarrow h \in (x^{-1}G = G)$$

$$= x\left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h\phi(h^{-1}v)\right)$$

$$= x\theta(v)$$

dir. Sonuç olarak θ bir $F[G]$-homomorfizmadır.

Şimdi $\theta^2 = \theta$ dır. Gerçekten, öncelikle $\forall u \in U$, $g^{-1} \in G$ için $g^{-1}u \in U$ olup ϕ nin tanımından $\phi(g^{-1}u) = g^{-1}u$ dur. Bunu kullanırsak,

$$\theta(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\phi(g^{-1}u)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}u$$

$$= \frac{1}{|G|} |G| u$$

$$= u \qquad (*)$$

dur. Şimdi $\forall v \in V$ için θ nın tanımından $\theta(v) \in U$ olup, (*) dan

$$\theta(\theta(v)) = \theta(v)$$

dolayısıyla $\theta^2 = \theta$ dır.

Nihayet,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\theta &= \{\theta(v) : v \in V\} \\ &= \{\theta(u+w) : u \in U\} \\ &= \{u : u \in U\} \\ &= U \end{aligned}$$

ve $\operatorname{Ker}\theta = W$ dersek Önerme 2.2.2 den W, V nin bir $F[G]$ - altmodülüdür.

Böylece Lemma 2.3.1 in hipotezleri sağlanmış oldu. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{Im}\theta \oplus \operatorname{Ker}\theta \\ &= U \oplus W \end{aligned}$$

dur. Bu ise ispatı tamamlar.

Örnek 2.3.3. $G = S_3$ ve $V = Sp\{v_1, v_2, v_3\}$, $U = Sp\{v_1 + v_2 + v_3\}$ altmodülüyle bir permütasyon modülü olsun.

$$V = U \oplus W$$

olacak şekilde V nin bir W $F[G]$-altmodülünü bulmak için Maschke teoremini kullanalım.

İlk olarak $W_0 = Sp\{v_1, v_2\}$ seçersek, $V = U \oplus W_0$ olacaktır. (Tabiki W_0 bir $F[G]$ - altmodül değildir.)

V den V ye bir ϕ lineer dönüşümü, $v_3 = v_1 + v_2 + v_3 - v_1 - v_2$ olduğundan,

$$\phi(v_1) = 0,\ \phi(v_2) = 0 \text{ ve } \phi(v_3) = v_1 + v_2 + v_3$$

şeklindedir.

Buradan Maschke teoreminin ispatında olduğu gibi V den V ye bir θ $F[G]$-homomorfizması, $i = 1,2,3$ için

$$\theta : v_i \longrightarrow \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3)$$

şeklindedir. Gerçekten, $i = 1$ için

$$\theta(v_1) = \frac{1}{|S_3|}\sum_{g \in S_3} g\phi(g^{-1}v_1)$$

$$= \frac{1}{6}\Big[(1)\phi((1)v_1) + (13)\phi((13)v_1) + (12)\phi((12)v_1)$$

$$+ (23)\phi((23)v_1) + (123)\phi((132)v_1) + (132)\phi((123)v_1)\Big]$$

$$= \frac{1}{6}\Big[0 + (13)(v_1 + v_2 + v_3) + 0 + 0 + (123)(v_1 + v_2 + v_3) + 0\Big]$$

$$= \frac{1}{6}(2(v_1 + v_2 + v_3))$$

$$= \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3)$$

$i = 2,3$ için de aynı yolla kolayca görülebilir.

Şimdi V nin W $F[G]$ - altmodülünü belirleyelim.

$$W = \mathrm{Ker}\theta = \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in V \ :\ \theta(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = 0\}$$

$$= \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in V \;:\; a_1\theta(v_1) + a_2\theta(v_2) + a_3\theta(v_3) = 0\}$$

$$= \left\{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in V \;:\; \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)(v_1 + v_2 + v_3) = 0\right\}$$

$$= \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in V : a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$$

$$= \{a_1v_1 - a_1v_2 - a_3v_2 + a_3v_3 \;:\; a_2 = -a_1 - a_3\}$$

$$= \{a_1(v_1 - v_2) - a_3(v_2 - v_3) : a_1, -a_3 \in F\}$$

$$= Sp\{v_1 - v_2, v_2 - v_3\}$$

Tanım 2.3.4. V bir $F[G]$ - modül ve her $1 \leq i \leq r$ için U_i, V nin indirgenemez $F[G]$ - modülü olsun. Eğer

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$$

ise bu durumda V ye tamamen indirgenebilir $F[G]$ - modül denir.

Teorem 2.3.5. Eğer Char F = 0 olmak üzere G sonlu bir grup ise, bu durumda sıfırdan farklı her $F[G]$ - modül tamamen indirgenebilirdir.

2.4. Sonlu Bir Grubun Karakterleri

Grup karakteri kavramını vermeden önce bazı temel kavramları verelim.

Tanım 2.4.1. (Eşlenik sınıfı) G sonlu bir grup ve $x, y \in G$ olsun. Eğer bir $g \in G$ için,

$$y = g^{-1}xg$$

oluyorsa x ile y eşleniktir denir.

G içinde x ile eşlenik olan bütün elemanların kümesi,

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\}$$

ile gösterilir ve bu kümeye x in eşlenik sınıfı denir.

Önerme 2.4.2. Eğer $x, y \in G$ ise bu durumda $x^G = y^G$ veya $x^G \cap y^G = \varnothing$ dır.

İspat: Kabul edelimki $x^G \cap y^G \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda bir $z \in x^G \cap y^G$ vardır. $z \in x^G$ ve $z \in y^G$ olduğundan $g, h \in G$ vardır öyleki,

$$z = g^{-1}xg = h^{-1}yh$$

dır. Buradan $k = hg^{-1}$ olmak üzere, $x = gh^{-1}yhg^{-1} = k^{-1}yk$ dır.

Şimdi $a \in x^G$ ise bir $b \in G$ için, $a = b^{-1}xb$ dir.

$$\Rightarrow a = b^{-1}xb$$

$$\Rightarrow a = b^{-1}k^{-1}ykb$$

$$\Rightarrow a = c^{-1}yc$$

$$\Rightarrow a \in y^G$$

dir. Dolayısıyla $x^G \subseteq y^G$ dir. Benzer yolla $y^G \subseteq x^G$ olduğu gösterilebilir.

O halde $x^G = y^G$ dir.

Sonuç 2.4.3. Her grup eşlenik sınıflarının bir birleşimi olarak yazılabilir ve farklı eşlenik sınıfları ayrıktır.

Tanım 2.4.4. $x_1^G, \ldots, x_r^G$ farklı eşlenik sınıfları olmak üzere, eğer $G = x_1^G \mathrm{U} \ldots \mathrm{U} x_r^G$ ise bu durumda $x_1, \ldots, x_r$ elemanlarına G nin eşlenik sınıf temsilcileri denir.

Örnek 2.4.5. $G = D_3 = \langle\, a, b : a^3 = b^2 = 1 \,,\; b^{-1}ab = a^{-1} \,\rangle$ olsun. Bu durumda

G nin elemanları $1, a, a^2, b, ab, a^2b$ dir.

Her $g \in G$ için $g^{-1}ag$ elemanı a veya a^2 ye eşit olduğundan,

$$a^G = \{a, a^2\}$$

dir. Ayrıca her $i \in Z$ için $a^{-i}ba^i = a^{-2i}b$ olduğundan,

$$b^G = \{b, ab, a^2b\}$$

dir. Böylece G nin eşlenik sınıfları;

$$\{1\}, \{a, a^2\}, \{b, ab, a^2b\}$$

dir.

Tanım 2.4.6. G sonlu bir grup ve $x \in G$ olsun. Bu durumda

$$C_G(x) = \{g \in G : \ xg = gx\}$$

kümesine x in merkezleyeni denir.

Kolayca görülebilirki $C_G(x)$, G nin bir alt grubudur.

Teorem 2.4.7. G sonlu bir grup ve $x \in G$ olsun. x^G eşlenik sınıfındaki eleman sayısı,

$$|x^G| = [G: C_G(x)] = \frac{|G|}{|C_G(x)|}$$

dir.

Şimdi S_n simetrik grubunun eşlenik sınıflarına bakalım.

Önerme 2.4.8. $\tau \in S_n$ permütasyonu için,

$$\tau(i_1 i_2 \ldots i_r)\tau^{-1} = (\tau(i_1)\tau(i_2)\ldots\tau(i_r))$$

dir.

Teorem 2.4.9. $\sigma \in S_n$ için σ^{S_n} eşlenik sınıfı, S_n deki devir tipi, σ nın devir tipiyle aynı olan bütün permütasyonlardan oluşur.

Örnek 2.4.10. S_3 ün eşlenik sınıfları aşağıdaki gibidir.

Sınıf	devir tipi
$\{(1)\}$	(1)
$\{(12),(13),(23)\}$	(2)
$\{(123),(132)\}$	(3)

Tanım 2.4.11. (Bir matrisin izi) $A = (a_{ij})$ $n \times n$ tipinde bir matris olsun. A nın izi

$$\text{İz}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.4.12. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ $n \times n$ tipindeki matrisler olsunlar. Bu durumda

$$\text{İz}(A+B) = \text{İz}A + \text{İz}B$$

ve

$$\text{İz}(AB) = \text{İz}(BA)$$

dır. Ayrıca C $n \times n$ tipinde tersinir bir matris olmak üzere,

$$\text{İz}(C^{-1}AC) = \text{İz}A$$

dır.

Tanım 2.4.13. (Sonlu bir grubun karakteri) G sonlu bir grup, V B bazıyla bir $F[G]$ - modül ve T , G nin V/F üzerindeki bir representasyonu olsun.

$$\begin{aligned} \chi: G &\longrightarrow F \\ g &\longrightarrow \chi(g) = \text{İz}T_B(g) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan χ fonksiyonuna T nin bir karakteri denir.

V nin karakteri, V ye karşılık gelen T representasyonunun karakteri ve G nin karakteri ise, V nin karakteri olarak tanımlanır.

Eğer χ bir indirgenemez $F[G]$ -modülün karakteri ise bu durumda χ ye G nin bir indirgenemez karakteri denir. Yine eğer χ bir indirgenebilir $F[G]$ -modülün karakteri ise bu durumda χ ye G nin bir indirgenebilir karakteri denir.

Önerme 2.4.14. T, χ karakteriyle G nin derecesi n olan bir matris representasyonu olsun. Bu durumda,

(1) $\chi(1) = n$

(2) Eğer $x \in G$ için x^G,x in bir eşlenik sınıfı olmak üzere, $g, h \in x^G$ ise bu durumda

$$\chi(g) = \chi(h)$$

dır.

(3) Eğer T' , Ψ karakteriyle G nin bir matris representasyonu ise bu durumda T ile T' denk ise her $g \in G$ için $\chi(g) = \Psi(g)$ dir.

İspat:(1) T, G nin derecesi n olan bir matris representasyonu olduğundan $1 \in G$ için $T(1) = I_n$ dir.

$$\Rightarrow \chi(1) = \text{İz}T(1) = \text{İz}I_n = n$$

olur.

(2) $g, h \in \chi^G$ ise bir $k \in G$ için $g = k^{-1}hk$ dır.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \chi(g) &= \text{İz}T(g)\\ &= \text{İz}T(k^{-1}hk)\\ &= \text{İz}\left(T(k)^{-1}T(h)T(k) \right)\\ &= \text{İz}(T(h)T(k)T(k)^{-1})\\ &= \text{İz}T(h)\\ &= \chi(h)\end{aligned}$$

dır.

(3) Eğer T ile T' denk ise, bu durumda bir $C \in GL(n, F)$ ve her $g \in G$ için,

$$T(g) = C^{-1}T'(g)C$$

dir.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \chi(g) &= \text{İz}T(g)\\ &= \text{İz}(C^{-1}T'(g)C)\\ &= \text{İz}T'(g)\\ &= \psi(g)\end{aligned}$$

dır.

Örnek 2.4.15. $G = D_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ ve G nin bir T matris representasyonu aşağıdaki gibi olsun.

$$T : G \longrightarrow GL(2,C),\ T(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ T(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bu durumda G nin elemanlarına karşılık gelen T(g) matrisleri ve $\chi(g)$ karakterleri aşağıdaki gibi olacaktır.

g	1	a	a^2	a^3
T(g)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	2	0	-2	0

g	b	ab	a^2b	a^3b
T(g)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	0	0	0	0

Örnek 2.4.16. $G = S_3$ ve V $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ bazıyla bir permütasyon modülü olsun. Bu durumda V ye karşılık gelen representasyon,

$$\begin{aligned} T : G &\to GL(V) \\ g &\to T(g): V \longrightarrow V \\ &\qquad\qquad v_i \to T(g)(v_i) = v_{g(i)} \end{aligned}$$

şeklindedir. Önerme 2.4.14 den biliyoruzki aynı eşlenik sınıfında yer alan elemanların karakterleri aynıdır. Bu yüzden sadece sınıf temsilcilerinin karakterlerine bakmak yeterlidir.

S_3ün sınıf temsilcilerini (1), (12) ve (123) olarak alırsak B bazına göre bu temsilci elemanlara karşılık gelen matrisler;

$$T_B((1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_B((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_B((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Dolayısıyla χ, S_3 ün T ye karşılık gelen karakteri olmak üzere S_3 ün χ ye göre karakter tablosu şöyle olacaktır.

	(1)	(12)	(123)
χ	3	1	0

3. SİMETRİK GRUPLARIN REPRESENTASYONLARI

Bu bölümde S_n simetrik grubunun tüm indirgenemez $F[S_n]$-modülleri ve S_n nin bilinen tüm indirgenemez representasyonlarını belirleyeceğiz ve bu $F[S_n]$-modüller için bir standart baz vereceğiz.

3.1. Diyagram, Tablo ve Tabloidler

Tanım 3.1.1. A boş olmayan bir küme ve S_A da A dan A ya birebir ve örten fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda S_A fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba A üzerindeki simetrik grup adı verilir.

Eğer $A = \{1,2,\ldots,n\}$ ise S_A yı S_n ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.2. $m,n \in N$ ve $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m)$ pozitif tamsayıların $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_m$ şeklindeki bir dizisi olsun. Eğer

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_m$$

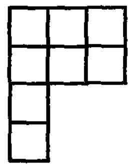
oluyorsa λ ya n nin bir parçalanması denir.

Örneğin; (3), (2,1), (1,1,1) $n = 3$ ün birer parçalanmalarıdır.

Not: S_n in eşlenik sınıflarının sayısı, n nin parçalanmalarının sayısına eşittir.

Tanım 3.1.3. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m)$, n nin bir parçalanması olsun. Her bir satırı $1 \leq i \leq m$ için, soldan başlayan λ_i kutucuktan oluşan şekle λ nın diyagramı denir ve $[\lambda]$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.4. $n = 8$ sayısının bir $\lambda = (3,3,1,1) = (3^2,1^2)$ parçalanmasının diyagramı,

$[\lambda] =$ 

şeklindedir.

Tanım 3.1.5. λ, n nin bir parçalanması olsun. λ ya karşılık elde edilen

$$S_\lambda = S_{\{1,2,\ldots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,\ldots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \ldots \times S_{\{n-\lambda_m+1,n-\lambda_m+2,\ldots,n\}}$$

grubuna S_n nin Young alt grubu adı verilir.

Örneğin;

$$S_{(2,2,1)} = S_{\{1,2\}} \times S_{\{3,4\}} \times S_{\{5\}}$$

$$\cong S_2 \times S_2 \times S_1$$

dir.

Tanım 3.1.6. λ, n nin bir parçalanması olsun. λ nın diyagramındaki kutucuklara 1,2,…,n sayılarının keyfi sırayla yerleştirilmesiyle elde edilen ifadelere λ -tablo adı verilir.

Örnek 3.1.7. $n = 5$ in $\lambda = (3,2)$ parçalanması için

1 3 4
2 5 bir (3,2)-tablo ve

$n = 7$ nin $\lambda = (3,2,2)$ parçalanması için,

1 3 5
2 6
4 7 bir (3,2,2)-tablodur.

Tanım 3.1.8. λ, n nin bir parçalanması ve t bir λ-tablo olsun.

$R_t = \{\pi \in S_n :$ her $1 \le i \le n$ için, i ile $\pi(i)$ t nin aynı satırına aitse $\}$

$C_t = \{\pi \in S_n :$ her $1 \le i \le n$ için, i ile $\pi(i)$ t nin aynı sütununa aitse $\}$

gruplarına sırasıyla t nin satır ve sütun grupları adı verilir.

Örnek 3.1.9. $t = \begin{matrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5 \end{matrix}$ (3,2) - tablosu için

$$R_t = S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5\}}$$

$$\cong S_3 \times S_2$$

$$C_t = S_{\{1,4\}} \times S_{\{2,5\}} \times S_{\{3\}}$$

$$\cong S_2 \times S_2 \times S_1$$

dir.

Lemma 3.1.10. t bir λ - tablo ve $\pi \in S_n$ olsun. Bu durumda

(i) $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$

(ii) $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$

dir.

İspat: (i)

$R_{\pi t} = \{\sigma \in S_n :$ her $1 \le i \le n$ için i ile $\sigma(i)$ πt nin aynı satırına aitse $\}$

$\pi R_t \pi^{-1} = \{\pi \tau \pi^{-1} : \tau \in R_t,$ her $1 \le j \le n$ için j ile $\tau(j)$ t nin aynı satırına aitse $\}$

şeklindedir.

$x \in R_{\pi t}$ olsun. Bu durumda her $1 \leq i \leq n$ için, i ile $x(i)$ πt nin aynı satırına aittir.

$\Rightarrow \pi^{-1}(i)$ ile $\pi^{-1}x(i)$ t nin aynı satırına aittir.

$\Rightarrow \pi^{-1}(i)$ ile $\pi^{-1}x\pi(\pi^{-1}(i))$ t nin aynı satırına aittir. $\pi^{-1}(i) = j$ dersek,

$\Rightarrow$ j ile $\pi^{-1}x\pi(j)$ t nin aynı satırına aittir.

$\Rightarrow \pi^{-1}x\pi \in R_t$

$\Rightarrow x \in \pi R_t \pi^{-1}$

$\Rightarrow R_{\pi t} \subseteq \pi R_t \pi^{-1}$ (1)

dir.

Tersine, $y \in \pi R_t \pi^{-1}$ olsun. Bu durumda $y = \pi\tau\pi^{-1}$ olacak şekilde $\tau \in R_t$ vardır. Dolayısıyla her $1 \leq i \leq n$ için, i ile $\tau(i)$ t nin aynı satırına aittir.

$\Rightarrow \pi(i)$ ile $\pi\tau(i)$ πt nin aynı satırına aittir.

$\Rightarrow \pi(i)$ ile $\pi\tau\pi^{-1}(\pi(i))$ πt nin aynı satırına aittir. $\pi(i) = j$ dersek,

$\Rightarrow$ j ile $\pi\tau\pi^{-1}(j)$ πt nin aynı satırına aittir.

$\Rightarrow \pi\tau\pi^{-1} \in R_{\pi t}$

$\Rightarrow y \in R_{\pi t}$

$\Rightarrow \pi R_t \pi^{-1} \subseteq R_{\pi t}$ (2)

dir. Böylece (1) ve (2) den

$$R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$$

dir.

(ii) (i) nin ispatına benzer yolla kolayca gösterilebilir.

Şimdi λ -tabloların kümesi üzerinde bir bağıntı tanımlayalım: t_1 ve t_2 herhangi λ -tablolar olmak üzere,

$t_1 \approx t_2 \Leftrightarrow \pi t_1 = t_2$ olacak şekilde bir $\pi \in R_{t_1}$ varsa.

Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten,

(i) Yansıma özelliği : t bir λ - tablo ise $(1) \in R_t$ ve $(1)t = t$ olduğundan $t \approx t$ dir.

(ii) Simetri özelliği : $t_1 \approx t_2 \Rightarrow \pi t_1 = t_2,\ \exists \pi \in R_{t_1}$ dir.

$$\Rightarrow R_{\pi t_1} = R_{t_2}$$

$$\Rightarrow \pi R_{t_1} \pi^{-1} = R_{t_2}, \quad \text{(Lemma 3.1.10 dan)}$$

$$\Rightarrow R_{t_1} = \pi^{-1} R_{t_2} \pi$$

Diğer taraftan $\pi \in R_{t_1}$ olduğundan,

$$\Rightarrow \pi \in \pi^{-1} R_{t_2} \pi$$

$$\Rightarrow (1) \in \pi^{-1} R_{t_2}$$

$$\Rightarrow \pi \in R_{t_2}$$

dir. R_{t_2} bir grup olduğundan $\pi^{-1} \in R_{t_2}$ ve $\pi t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = \pi^{-1} t_2$ ve $\pi^{-1} \in R_{t_2}$ olur.

Böylece $t_2 \approx t_1$ dir.

(iii) Geçişme özelliği: $t_1 \approx t_2$ ve $t_2 \approx t_3$ olsun. Bu durumda $\pi_1 t_1 = t_2$ ve $\pi_2 t_2 = t_3$ olacak şekilde $\pi_1 \in R_{t_1}$ ve $\pi_2 \in R_{t_2}$ vardır. Buradan $t_3 = \pi_2 \pi_1 t_1$ olur.

$$\pi_2 \in R_{t_2} \Rightarrow \pi_2 \in \left(R_{\pi_1 t_1} = \pi_1 R_{t_1} \pi_1^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \pi_2 \pi_1 \in \left(\pi_1 R_{t_1} = R_{t_1}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 \approx t_3$$

dır.

Tanım 3.1.11. Yukarıda tanımlanan "$\approx$" denklik bağıntısı sonucunda ortaya çıkan denklik sınıflarına λ-tabloid adı verilir ve bir t λ-tablosunun denklik sınıfı $\{t\}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.12. $\lambda = (2,1)$, n = 3 ün bir parçalanması olsun. Bu durumda bütün λ-tablolar;

$$\begin{matrix}12\\3\end{matrix},\ \begin{matrix}21\\3\end{matrix},\ \begin{matrix}13\\2\end{matrix},\ \begin{matrix}31\\2\end{matrix},\ \begin{matrix}23\\1\end{matrix},\ \begin{matrix}32\\1\end{matrix}$$

ve bütün λ-tabloidler;

$$\left\{\begin{matrix}12\\3\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}12\\3\end{matrix},\begin{matrix}21\\3\end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix}31\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}13\\2\end{matrix},\begin{matrix}31\\2\end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix}23\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}23\\1\end{matrix},\begin{matrix}32\\1\end{matrix}\right\}$$

olur.

Eğer $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ n nin bir parçalanması ise bu durumda $|S_n| = n!$ olduğundan, n!-tane λ-tablo vardır. Ayrıca her bir denklik sınıfında $\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_m!$ eleman vardır. λ-tabloidlerin sayısıda $\dfrac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_m!}$ dir.

Şimdi S_n simetrik grubunun λ-tabloidler üzerinde nasıl etki yaptığını tanımlayalım. Bu etki $\sigma \in S_n$ ve $\{t\}$ bir λ-tabloid olmak üzere,

$$\sigma\{t\} = \{\sigma t\}$$

şeklindedir.

Örneğin,

$$(1\,2\,3)\left\{\begin{matrix} 1\,2 \\ 3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 2\,3 \\ 1 \end{matrix}\right\}$$

dir.

Bu etki iyi tanımlıdır. Gerçekten, t_1 ve t_2 herhangi iki λ - tablo olmak üzere,

$$\{t_1\} = \{t_2\}$$

olsun. Bu durumda $\sigma t_1 = t_2$ olacak şekilde $\sigma \in R_{t_1}$ vardır. Fakat lemma 3.1.10 dan $\pi\sigma\pi^{-1} \in \left(\pi R_{t_1}\pi^{-1} = R_{\pi t_1}\right)$ olduğundan $\pi t_2 = \pi\sigma t_1 = (\pi\sigma\pi^{-1})(\pi t_1)$ olacak şekilde $\pi\sigma\pi^{-1} \in R_{\pi t_1}$ vardır. Böylece $\{\pi t_1\} = \{\pi t_2\}$ olup, bu etki iyi tanımlıdır.

Tanım 3.1.13. F keyfi bir cisim ve $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ n nin bir parçalanması olsun. M^λ, baz elemanları farklı λ-tabloidler olan, F üzerindeki bir vektör uzayı olarak tanımlanır.

Örneğin, $\lambda = (2,1)$ parçalanması için,

$$M^\lambda = Sp\left\{\left\{\begin{matrix} 1\,2 \\ 3 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 1\,3 \\ 2 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 2\,3 \\ 1 \end{matrix}\right\}\right\}$$

şeklindedir.

F - vektör uzayı olan M^λ,

$$\begin{aligned} \Theta : F[S_n] \times M^\lambda &\longrightarrow M^\lambda \\ (\sum_{i=1}^{n!} a_i\sigma_i, \{t\}) &\longrightarrow (\sum_{i=1}^{n!} a_i\sigma_i)\ \Theta\ \{t\} = \sum_{i=1}^{n!} a_i\sigma_i \{t\} \end{aligned}$$

dış işlemiyle bir $F[S_n]$-modül yapılabilir.

Teorem 3.1.14. M^λ, $S_\lambda = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \ldots \times S_{\lambda_m}$ Young altgrubu üzerinde S_n nin bir permütasyon modülüdür. M^λ, herhangi bir λ-tabloid tarafından üretilen devirli bir $F[S_n]$-modüldür ve

$$\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_m!}$$

dir.

İspat: $A = \{\{t\} : t \text{ bir } \lambda - \text{tablo}\}$ olmak üzere, S_n nin A üzerindeki etkisinin,

$$\begin{aligned} S_n \times A &\longrightarrow A \\ (\sigma, \{t\}) &\longrightarrow \sigma\{t\} = \{\sigma t\} \end{aligned}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu etki iyi tanımlı olduğundan $\forall \sigma \in S_n$ ve $\{t_i\} \in M^\lambda$ baz elemanı için $\sigma\{t_i\} = \{\sigma t_i\} \in A$ olup bir $\{t_j\} \in A$ için $\sigma\{t_i\} = \{t_j\}$ dir. Dolayısıyla Tanım 2.1.12 den M^λ S_n nin bir permütasyon modülüdür.

Şimdi M^λ nın devirli bir $F[S_n]$ – modül olduğunu gösterelim. Öncelikle kolayca gösterilebilir ki bu etki örtendir.

Şimdi herhangi $v \in M^\lambda = Sp\{\{t_1\}, \{t_2\}, \ldots, \{t_k\}\}$ olsun. Bu durumda $\alpha_i \in F$ olmak üzere,

$$v = \alpha_1\{t_1\} + \alpha_2\{t_2\} + \ldots + \alpha_k\{t_k\}$$

dır.

İddia ediyoruzki; $\forall\{t_i\} \in A$ için, $\{t_i\} = \sigma_i\{t\}$ olacak şekilde $\exists\sigma_i \in S_n$ ve bir $\{t\} \in A$ vardır. Gerçekten, $\{t_i\} \in A$ için etki örten olduğundan,

$$\sigma_1\{t_{i_1}\} = \{t_i\}$$

olacak şekilde $\exists\sigma_1 \in S_n$ ve $\{t_{i_1}\} \in A$ vardır.

Yine $\{t_{i_1}\} \in A$ için örtenlikten;

$$\sigma_2\{t_{i_2}\} = \{t_{i_1}\}$$

olacak şekilde $\exists\sigma_2 \in S_n$ ve $\{t_{i_2}\} \in A$ vardır. Böyle devam edersek tabloidlerin sayısı sonlu olduğundan sonlu adımdan sonra,

$$\sigma_k\{t_{i_k}\} = \{t_{i_{k-1}}\} \text{ ve } \sigma_{k+1}\{t\} = \{t_{i_k}\}$$

olacak şekilde $\exists\sigma_k, \sigma_{k+1} \in S_n$ ve $\{t_{i_{k-1}}\}, \{t_{i_k}\}$ ve $\{t\} \in A$ vardır.

Böylece,

$$\begin{aligned} \sigma_1\{t_{i_1}\} &= \{t_i\} \\ \sigma_2\{t_{i_2}\} &= \{t_{i_1}\} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \sigma_k\{t_{i_k}\} &= \{t_{i_{k-1}}\} \\ \sigma_{k+1}\{t\} &= \{t_{i_k}\} \end{aligned}$$

olup, $\{t_i\} = (\sigma_1\sigma_2...\sigma_k\sigma_{k+1})\{t\}$ dir. $\sigma_i = \sigma_1\sigma_2...\sigma_k\sigma_{k+1}$ dersek $\{t_i\} = \sigma_i\{t\}$ elde ederiz.

O halde $\forall v \in M^\lambda$ için,

$$v = \alpha_1\{t_1\} + \alpha_2\{t_2\} + ... + \alpha_k\{t_k\}$$

$$= \alpha_1\sigma_1\{t\} + \alpha_2\sigma_2\{t\} + ... + \alpha_k\sigma_k\{t\}$$

$$= (\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + ... + \alpha_k\sigma_k)\{t\}$$

$\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + ... + \alpha_k\sigma_k \in F[S_n]$ olup, $v \in <\{t\}>$ dir.

$$\Rightarrow M^\lambda \subseteq <\{t\}>$$

dir. Her zaman $<\{t\}> \subseteq M^\lambda$ sağlanacağından,

$$M^\lambda = <\{t\}>$$

dir. Son olarak M^λ $\lambda-$tabloidler tarafından gerilen bir vektör uzayı ve $\lambda-$tabloidlerin sayısı; $\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!...\lambda_m!}$ olduğundan, $\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!...\lambda_m!}$ dir.

3.2. Parçalanmalar İçin Kısmi ve Tam Sıralamalar

Bu kısımda n nin parçalanmaları üzerinde kısmi ve tam sıralama tanımını vereceğiz. Fakat çoğunlukla kısmi sıralamayı gözönünde bulunduracağız.

Tanım 3.2.1. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\ell)$ n nin iki parçalanması olsun. Eğer her $i \geq 1$ için,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_i$$

oluyorsa λ büyüktür μ dür denir ve $\lambda \trianglerighteq \mu$ ile gösterilir.

Eğer $i > m$ veya $i > \ell$ ise bu durumda sırasıyla λ_i ve μ_i ler yerine sıfır alınız.

Örnek 3.2.2. $\lambda_1 = (3^2)$, $\lambda_2 = (2^2,1^2)$ ve $\lambda_3 = (4,1^2)$ 6 nın parçalanmaları olsunlar.

$$3 \geq 2\,,\ 3+3 \geq 2+2\,,\ 3+3+0 \geq 2+2+1\,,\ 3+3+0+0 \geq 2+2+1+1$$

olduğundan $\lambda_1 \trianglerighteq \lambda_2$ dir. Buna rağmen $3 \leq 4$ fakat $3+3 \geq 4+1$ olduğundan λ_1 ile λ_3 karşılaştırılamaz.

Böylece 6 nın bütün parçalanmalarını gözönünde bulundurduğumuzda aşağıdaki dallanmayı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd}
 & (6) & \\
 & (5,1) \arrow[u] & \\
 & (4,2) \arrow[u] & \\
(3^2) \arrow[ur] & & (4,1^2) \arrow[ul] \\
 & (3,2,1) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
(3,1^3) \arrow[ur] & & (2^3) \arrow[ul] \\
 & (2^2,1^2) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & (2^2,1^4) \arrow[u] & \\
 & (1^6) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

S_n nin representasyonlarına yapılacak her yaklaşım, aşağıda vereceğimiz lemma ile ilgili olacaktır.

Lemma 3.2.3. (Temel Kombinatoriyel Lemma)

λ ve μ n nin parçalanmaları olmak üzere, t_1 bir λ tablo ve t_2 de bir μ- tablo olsun. Eğer her i için t_2 nin i. satırındaki elemanlar t_1 in farklı sütunlarına ait ise bu durumda $\lambda \trianglerighteq \mu$ dür.

İspat: t_2 nin 1. satırındaki elemanların sayısı μ_1 olsun. Hipotezden bu μ_1- tane eleman t_1 in farklı sütunlarında yeralacağından t_1 in en az μ_1- tane sütunu bulunmalıdır. Dolayısıyla t_1 in 1. satırında en az μ_1-tane eleman vardır. Böylece t_1 in 1. satırındaki elemanların sayısına λ_1 dersek,

$$\lambda_1 \geq \mu_1$$

olur.

t_2 nin i. satırından aldığımız elemanları t_1 in 1. satırından itibaren yerleştirmemizin bir sakıncası olmaz çünkü bu elemanları yerleştirirken dikkat edeceğimiz husus farklı sütunlara gelmeleridir satırların önemi yoktur.

Şimdi t_2 nin 2. satırındaki elemanların sayısı μ_2 olsun.

I. Durum: $\lambda_1 = \mu_1$ ise, hipotezden t_1 in 2. satırında en az μ_2-tane kutucuk bulunmalıdır. t_1 in 2. satırındaki elemanların sayısına λ_2 dersek $\lambda_2 \geq \mu_2$ olur.

Dolayısıyla,

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$$

dir.

II. Durum: $\lambda_1 > \mu_1$ ise, t_1 in 1. satırındaki $\lambda_1 - \mu_1$ tane kutucuk boştur.

(a) $\mu_2 < \lambda_1 - \mu_1$ ise, μ_2-tane elemanda t_1 in 1. satırına yerleştirilebilir ve bu elemanların hepside farklı sütunlarda yer almış olur. Bu durumda t_1 in 2. satırındaki elemanların sayısı ne olursa olsun $\lambda_1 > \mu_1 + \mu_2$ olduğundan,

$$\lambda_1 + \lambda_2 > \mu_1 + \mu_2$$

dir.

(b) $\mu_2 = \lambda_1 - \mu_1$ ise (a) daki düşünceyle,

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$$

dir.

(c) $\mu_2 > \lambda_1 - \mu_1$ ise, μ_2-tane elemanın $\lambda_1 - \mu_1$ tanesi t_1 in 1. satırına yerleştirilebilir. Diğerlerinin farklı sütunlara yerleşebilmesi için t_1 in 2. satırında en az $\mu_2 - \lambda_1 + \mu_1$ tane kutucuk bulunmalıdır. Yani $\lambda_2 \geq \mu_2 - \lambda_1 + \mu_1$ olup,

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$$

dir.

O halde her iki durum gösteriyorki; $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$ dir. Böyle devam edersek sonlu adımdan sonra

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i$$

elde ederiz. Bu ise $\lambda \trianglerighteq \mu$ demektir.

Sonuç 3.2.4. λ ve μ n nin parçalanmaları olmak üzere, t_1 bir λ-tablo ve t_2 bir μ-tablo olsun. Eğer $\lambda \not\trianglerighteq \mu$ ise bu durumda her i için a,b t_1 in aynı sütununa ait olacak şekilde t_2 nin i. satırına ait olan a,b elemanları mevcuttur.

Tanım 3.2.5. λ ve μ n nin parçalanmaları olsunlar.

$\lambda > \mu$ dür. $\Leftrightarrow$ Bir i indisi için $j < i$ iken $\lambda_j = \mu_j$ ve $\lambda_i > \mu_i$ ise.

Bu sıralama parçalanmalar üzerinde bir tam sıralamadır.

Örnek 3.2.6. $n = 6$ nın (3,3), (3,2,1) parçalanmaları için, (3,3) > (3,2,1) dir. Gerçekten, $i = 2$ seçersek $j = 1 < 2$ için $3 = 3$ ve $i = 2$ için $3 > 2$ dir.

n = 6 nın bütün parçalanmalarının sıralanışı aşağıdaki gibidir.

$$(1^6) < (2,1^4) < (2^2,1^2) < (2^3) < (3,1^3) < (3,2,1) < (3^2) < (4,1^2) < (4,2) < (5,1) < (6)$$

Önerme 3.2.7. λ ve μ n nin parçalanmaları olsunlar. Eğer $\lambda \trianglerighteq \mu$ ise bu durumda $\lambda \geq \mu$ dür.

İspat: Eğer $\lambda \neq \mu$ ise bu durumda farklılığın ilk olduğu bir i indisi vardır öyle ki $j < i$ için $\lambda_j = \mu_j$ dir. Dolayısıyla,

$$\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j = \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j$$

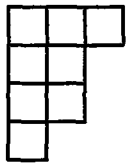
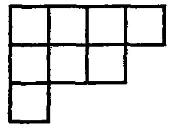
dir. Fakat $\lambda \trianglerighteq \mu$ olduğundan,

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda_j > \sum_{j=1}^{i} \mu_j$$

olmalıdır. Buradan $\lambda_i > \mu_i$ olup, $\lambda \geq \mu$ dür.

Tanım 3.2.8. λ n nin bir parçalanması olmak üzere $[\lambda]$, λ nın diyagramı olsun. Bu durumda $[\lambda']$ eşlenik diyagramı, $[\lambda]$ daki satırlar ve sütunlar yerdeğiştirilerek elde edilir. λ' ye n nin λ ya göre eşlenik parçalanması denir.

Örnek 3.2.9. $\lambda = (3,2^2,1)$ $n = 8$ in bir parçalanması olsun. Bu durumda,

$[\lambda] =$  ve $[\lambda'] =$ 

olup $\lambda' = (4,3,1)$ dir.

3.3. Tobloidler İçin Tam ve Kısmi Sıralamalar

Tanım 3.3.1. λ, n nin bir parçalanması olmak üzere, $\{t_1\}$ ve $\{t_2\}$ herhangi iki λ - tabloid olsun.

$\{t_1\} < \{t_2\}$ dir. $\Leftrightarrow$ Bir i sayısı için aşağıdakiler sağlanıyorsa.

(i) $j > i$ iken j, $\{t_1\}$ ve $\{t_2\}$ nin aynı satırına aittir.

(ii) i nin $\{t_1\}$ de ait olduğu satır $\{t_2\}$ de ait olduğu satırdan daha üsttedir.

Bu λ - tabloidler üzerinde bir tam sıralamadır.

Örnek 3.3.2. $\lambda = (3,2)$ $n = 5$ in bir parçalanması olmak üzere,

$$\begin{Bmatrix} 345 \\ 12 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 245 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

λ - tabloidleri için,

$$\begin{Bmatrix} 345 \\ 12 \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} 245 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

dir. Gerçekten $i = 3$ alırsak $j = 4,5$ dir.

(i) 4 ve 5 $\begin{Bmatrix} 345 \\ 12 \end{Bmatrix}$ ve $\begin{Bmatrix} 245 \\ 13 \end{Bmatrix}$ in aynı satırlarına aitdirler.

(ii) 3 ün $\begin{Bmatrix} 345 \\ 12 \end{Bmatrix}$ de yer aldığı satır $\begin{Bmatrix} 245 \\ 13 \end{Bmatrix}$ de yer aldığı satırdan daha üsttedir.

Böylece bütün (3,2)-tabloidlerin sıralanışı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} 345 \\ 12 \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} 245 \\ 13 \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} 145 \\ 23 \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} 235 \\ 14 \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} 135 \\ 24 \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} 125 \\ 34 \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} 234 \\ 15 \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} 234 \\ 25 \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} 124 \\ 35 \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} 123 \\ 45 \end{Bmatrix}$$

Tanım 3.3.3. λ n nin bir parçalanması olmak üzere, herhangi bir t λ- tablosu için,

$m_{ir}(t)$; t nin ilk r satırındaki i ye eşit veya i den küçük olan elemanların sayısını göstersin.

Bu durumda herhangi $\{t_1\}$ ve $\{t_2\}$ λ-tabloidleri için,

$\{t_1\} \trianglelefteq \{t_2\}$ dir. $\Leftrightarrow$ Her i ve r için $m_{ir}(t_1) \le m_{ir}(t_2)$ ise,

Bu λ- tabloidler üzerinde bir kısmi sıralamadır.

Örnek 3.3.4. (i) Eğer $t_1 = \begin{array}{l} 136 \\ 257 \\ 4 \end{array}$ ve $t_2 = \begin{array}{l} 124 \\ 356 \\ 7 \end{array}$ ise, bu durumda 7 satır ve 3 sütunlu $(m_{ir}(t_1))$ ve $(m_{ir}(t_2))$ matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$(m_{ir}(t_1)) = \begin{array}{c} 111 \\ 122 \\ 233 \\ 234 \\ 245 \\ 356 \\ 367 \end{array} \quad \text{ve} \quad (m_{ir}(t_2)) = \begin{array}{c} 111 \\ 222 \\ 233 \\ 344 \\ 355 \\ 366 \\ 367 \end{array}$$

Görüldüğü gibi her i ve r için $m_{ir}(t_1) \le m_{ir}(t_2)$ olduğundan, $\{t_1\} \trianglelefteq \{t_2\}$ dir.

(ii) Eğer $t_1 = \begin{array}{l} 145 \\ 23 \end{array}$ ve $t_2 = \begin{array}{l} 135 \\ 24 \end{array}$ ise, bu durumda 5 satır ve 2 sütunlu $(m_{ir}(t_1))$ ve $(m_{ir}(t_2))$ matrisleri;

$$(m_{ir}(t_1)) = \begin{array}{c} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 24 \\ 35 \end{array} \quad \text{ve} \quad (m_{ir}(t_2)) = \begin{array}{c} 11 \\ 12 \\ 23 \\ 24 \\ 35 \end{array}$$

şeklinde olup, her i ve r için $m_{ir}(t_1) \le m_{ir}(t_2)$ dir. Dolayısıyla $\{t_1\} \trianglelefteq \{t_2\}$dir. Fakat,

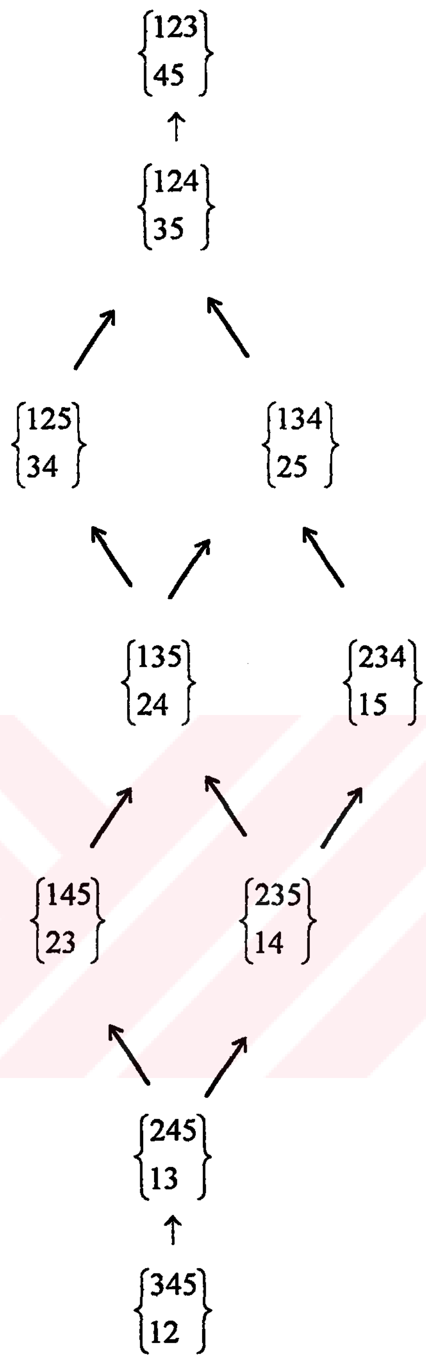
$$t_1' = \begin{array}{l} 145 \\ 23 \end{array} \quad \text{ve} \quad t_2' = \begin{array}{l} 235 \\ 14 \end{array}$$

(3,2) - tabloları için ,

$$(m_{ir}(t_1')) = \begin{array}{c} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 24 \\ 35 \end{array} \quad \text{ve} \quad (m_{ir}(t_2')) = \begin{array}{c} 01 \\ 12 \\ 23 \\ 24 \\ 35 \end{array}$$

şeklindedir. $m_{11}(t_1') > m_{11}(t_2')$, $m_{31}(t_1') < m_{31}(t_2')$ olduğundan, $\{t_1'\}$ ile $\{t_2'\}$ karşılaştırılamaz.

Böylece n = 5 için bütün (3,2) -tabloidleri gözönünde bulundurduğumuzda aşağıdaki dallanmayı elde ederiz.



Önerme 3.3.5. $\{t_1\}$ ve $\{t_2\}$ herhangi λ - tabloidler olsunlar. Bu durumda

$$\{t_1\} \lhd \{t_2\} \Rightarrow \{t_1\} < \{t_2\}$$

dir.

Şimdi kabul edelimki bir t λ-tablosunun, w a. satırına ve x de b. satırına ait olsun ve w < x olsun. Bu durumda $m_{ir}(t)$ nin tanımı aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 3.3.6.

$$m_{ir}((wx)t) - m_{ir}(t) = \begin{cases} 1, & b \le r < a \text{ ve } w \le i < x \text{ ise} \\ -1, & a \le r < b \text{ ve } w \le i < x \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

Örnek 3.3.7. $t = \begin{matrix} 136 \\ 257 \\ 4 \end{matrix}$ (3,3,1)-tablosu için x = 4, w = 1 alırsak x = 4, t nin b = 3. satırında, w = 1, t nin 1.satırında ve w < x dir. Buradan, $(14)t = \begin{matrix} 436 \\ 257 \\ 1 \end{matrix}$ olup matrisler,

$$(m_{ir}((14)t)) = \begin{matrix} 001 \\ 012 \\ 123 \\ 234 \\ 245 \\ 356 \\ 367 \end{matrix} \quad \text{ve} \quad (m_{ir}(t)) = \begin{matrix} 111 \\ 122 \\ 233 \\ 234 \\ 245 \\ 356 \\ 367 \end{matrix}$$

şeklindedir. $1 \le r < 3$ ve $1 \le i < 4$ olmak üzere,

$$r = 1, i = 1 \Rightarrow m_{11}((14)t) - m_{11}(t) = 0 - 1 = -1$$

$$r = 1, i = 2 \Rightarrow m_{21}((14)t) - m_{21}(t) = 0 - 1 = -1$$

$$r = 1, i = 3 \Rightarrow m_{31}((14)t) - m_{31}(t) = 1 - 2 = -1$$

$$r = 2, i = 1 \Rightarrow m_{12}((14)t) - m_{12}(t) = 0 - 1 = -1$$

$$r = 2,\ i = 2 \Rightarrow m_{22}((14)t) - m_{22}(t) = 1 - 2 = -1$$

$$r = 2,\ i = 3 \Rightarrow m_{32}((14)t) - m_{32}(t) = 2 - 3 = -1$$

Diğer tüm i ve r ler için matrislerden yararlanarak, $m_{ir}((14)t) - m_{ir}(t) = 0$ olduğu kolayca görülebilir.

Lemma 3.3.8. Eğer w < x ve t de w nun ait olduğu satır x in ait olduğu satırdan daha altta ise bu durumda,

$$\{t\} \lhd (wx)\{t\}$$

dir.

İspat: w, t nin a. satırına ve x de t nin b. satırına ait olsun. Bu durumda hipotezden b < a dır.

$b \le r < a$ ve $w \le i < x$ sağlayan i,r ler için Sonuç 3.3.6 dan $m_{ir}((wx)t) - m_{ir}(t) = 1$ dir.

$$\Rightarrow m_{ir}((wx)t) = m_{ir}(t) + 1$$

$$\Rightarrow m_{ir}(t) < m_{ir}((wx)t) \qquad \text{(i)}$$

Diğer i , r ler için yine Sonuç 3.3.6 dan, $m_{ir}((wx)t) - m_{ir}(t) = 0$ dır.

$$\Rightarrow m_{ir}((wx)t) = m_{ir}(t) \qquad \text{(ii)}$$

Böylece (i) ve (ii) den her i,r için $m_{ir}(t) \le m_{ir}((wx)t)$ olup Tanım 3.3.3 den $\{t\} \lhd (wx)\{t\}$ dir.

Lemma 3.3.9. Eğer t bir λ - tablo ve t de x-1 in ait olduğu satır x in ait olduğu satırdan daha altta ise bu durumda $\{t\} \lhd \{t_1\} \lhd (x-1x)\{t\}$ olacak şekilde bir $\{t_1\}$

λ -tabloidi mevcut değildir.

İspat: Önce t_i^*, r^*. ıncı satırında i^* olan herhangi bir λ - tablo olmak üzere,

$m_{i^*r}(t^*) - m_{i^*-1r}(t^*) = \begin{cases} 0, & r < r^* \text{ ise} \\ 1, & r \geq r^* \text{ ise} \end{cases}$ = "t* ın ilk r satırında i^* a eşit olan elemanların sayısı"

eşitliğini ispatlayalım.

$$\begin{array}{rcccc} & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t^* = r^* & \bullet & \bullet & i^* \ldots & \bullet \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}$$

şeklinde bir tablodur.

(1^0) $r < r^*$ olsun. $m_{i^*-1r}(t^*) = \ell$ dersek, $r < r^*$ olduğundan $m_{i^*r}(t^*) = \ell$ dir. Buradan, $m_{i^*r}(t^*) - m_{i^*-1r}(t^*) = \ell - \ell = 0$ dır.

(2^0) $r = r^*$ olsun. $m_{i^*r}(t^*) = k$ dersek, $r = r^*$ olduğundan i^* da bu "k" sayısına dahildir. Dolayısıyla $m_{i^*-1r}(t^*) = k - 1$ olup, $m_{i^*r}(t^*) - m_{i^*-1r}(t^*) = k - (k-1) = 1$

(3^0) $r > r^*$ olsun. $m_{i^*-1r}(t^*) = p$ dersek, $r > r^*$ ve i^*, r^*. satırda yer aldığından $m_{i^*r}(t^*) = p + 1$ olur. Buradan $m_{i^*r}(t^*) - m_{i^*-1r}(t^*) = p + 1 - p = 1$ dir.

Böylece her üç durum gösteriyorki;

$$m_{i^*r}(t^*) - m_{i^*-1r}(t^*) = \begin{cases} 0, & r < r^* \text{ ise} \\ 1, & r \geq r^* \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

Diğer taraftan açık olarak,

$$\begin{cases} 0\ , & r < r^* \text{ ise} \\ 1\ , & r \geq r^* \text{ ise} \end{cases} = \text{“ } t^* \text{ın ilk } r \text{ satırında } i^* \text{ a eşit olan elemanların sayısı”}$$

dır.

Şimdi bu eşitliği kullanarak esas ispatımıza geçelim. Kabul edelimki t de x-1 x den daha alt satırda yer alsın ve $\{t\} \triangleleft \{t_1\} \triangleleft (x-1x)\{t\}$ olsun.

x-1,t nin a. satırına ve x de t nin b. satırına ait ise hipotezden b < a dır.

(i) i < x-1 olsun. Bu durumda Sonuç 3.3.6 dan $m_{ir}((x-1x)t) - m_{ir}(t) = 0$ dır.

$$\Rightarrow m_{ir}((x-1x)t) = m_{ir}(t) \qquad (1)$$

Kabulümüzden, $\{t\} \triangleleft \{t_1\}$ ve $\{t_1\} \triangleleft (x-1x)\{t\}$ olduğundan ,

$$\{t\} \triangleleft \{t_1\} \Rightarrow \forall i, r \text{ için } m_{ir}(t) \leq m_{ir}(t_1)$$

$$\{t_1\} \triangleleft (x-1x)\{t\} \Rightarrow \forall i, r \text{ için } m_{ir}(t_1) \leq m_{ir}((x-1x)t)$$

$$\Rightarrow m_{ir}(t) \leq m_{ir}(t_1) \leq m_{ir}((x-1x)t)$$

$$\Rightarrow m_{ir}(t) \leq m_{ir}(t_1) \leq m_{ir}(t), \quad \text{(1) den}$$

$$\Rightarrow m_{ir}(t) = m_{ir}(t_1) \qquad (2)$$

dir.

Aynı şekilde $i < x-1 \Rightarrow i-1 < x-1$ olup, yine Sonuç 3.3.6 dan

$$m_{i-1r}((x-1x)t)-m_{i-1r}(t)=0$$

$$m_{i-1r}((x-1x)t)=m_{i-1r}(t) \qquad (3)$$

dür.

Yine kabülümüzden i - 1 , r için,

$$\Rightarrow m_{i-1r}(t)\leq m_{i-1r}(t_1)\leq m_{i-1r}((x-1x)t)$$

$$\Rightarrow m_{i-1r}(t)\leq m_{i-1r}(t_1)\leq m_{i-1r}r(t), \qquad (3) \text{ den}$$

$$\Rightarrow m_{i-1r}(t)=m_{i-1r}(t_1) \qquad (4)$$

dür.

(2) ve (4) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak,

$$m_{ir}(t)-m_{i-1r}(t)=m_{ir}(t_1)-m_{i-1r}(t_1) \qquad (5)$$

elde ederiz.

Şimdi i t nin r'. satırına ait olsun. Bu durumda baştaki paragraftaki müzakere ile ve (5) i kullanarak,

"t nin ilk r satırında i ye eşit olan elemanların sayısı"=

$$=m_{ir}(t)-m_{i-1r}(t)=m_{ir}(t_1)-m_{i-1r}(t_1)$$

= "t_1 in ilk r satırında i ye eşit olan elemanların sayısı"

dır. Dolayısıyla i t_1 in r'. üncü satırına aittir.

Böylece i < x - 1 sağlayan bütün i ler t ve t_1 in aynı satırına aittir.

(ii) i > x olsun. Bu durumda Sonuç 3.3.6 dan,

$$m_{ir}((x-1x)t) = m_{ir}(t) \qquad (6)$$

dir. $\{t\} \lhd \{t_1\} \lhd (x-1x)\{t\}$ kabülümüz ve (6) dan,

$$m_{ir}(t) = m_{ir}(t_1) \qquad (7)$$

dir.

$i > x \Rightarrow i-1 \geq x$ olup Sonuç 3.3.6 dan,

$$m_{i-1r}((x-1x)t) = m_{i-1r}(t) \qquad (8)$$

dir. Yine kabülümüz ve (8) den

$$m_{i-1r}(t) = m_{i-1r}(t_1) \qquad (9)$$

dir.

(7) ve (9) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak,

$$m_{ir}(t) - m_{i-1r}(t) = m_{ir}(t_1) - m_{i-1r}(t_1) \qquad (10)$$

dir.

(5) den sonraki benzer muhakeme ile i > x sağlayan bütün i ler t ve t_1 in aynı satırına aittir.

Sonuç olarak x ve x - 1 dışındaki bütün elemanlar t ve t_1 in aynı satırına aittir.

O halde x ve x - 1 için iki ihtimal vardır.

1. Durum: t_1 in x b. satırına ve x - 1 a. satırına aittir.

2. Durum : t_1 in x a. Satırına ve x - 1 b. satırına aittir.

1. Durum : $\Rightarrow \{t\} = \{t_1\}$ dir.

2. Durum : $\Rightarrow \{t_1\} = (x - 1x)\{t\}$ dir.

Böylece ispat bitmiş olur.

3.4. Specht Modüller

Bu kısımda S_n nin tüm indirgenemez modüllerini inşa edeceğiz ve bunları Specht modüller olarak adlandıracağız.

Tanım 3.4.1. t bir λ -tablo olsun. $K_t \in F[S_n]$ elemanı,

$$K_t = \sum_{\sigma \in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$$

şeklinde tanımlanır ve

$$e_t = K_t\{t\}$$

ye λ -polytabloid adı verilir.

Örnek 3.4.2. $\lambda = (2^2)$, $n = 4$ ün bir parçalanması ve $t = \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}$ bir λ -tablo olsun.

Bu durumda,

$$K_t = (1) - (12) - (34) + (12)(34)$$

$$e_t = \begin{Bmatrix} 13 \\ 24 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 23 \\ 14 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 14 \\ 23 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 24 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

Lemma 3.4.3. t bir λ - tablo ve $\pi \in S_n$ olsun. Bu durumda

(i) $K_{\pi t} = \pi K_t \pi^{-1}$

(ii) $e_{\pi t} = \pi e_t$

(iii) Eğer $\pi \in C_t$ ise bu durumda $\pi e_t = \mathrm{sgn}(\pi) e_t$ dir.

İspat: (i) $K_{\pi t} = \sum_{\sigma \in C_{\pi t}} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$

Lemma 3.1.10 dan $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ olup, $\sigma \in C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ ise $\sigma = \pi\tau\pi^{-1}$ olacak şekilde $\tau \in C_t$ vardır. Böylece

$$
\begin{aligned}
K_{\pi t} &= \sum_{\pi\tau\pi^{-1} \in \pi C_t \pi^{-1}} \mathrm{sgn}(\pi\tau\pi^{-1})\pi\tau\pi^{-1} \\
&= \sum_{\tau \in C_t} \mathrm{sgn}(\pi)\,\mathrm{sgn}(\pi^{-1})\,\mathrm{sgn}(\tau)\pi\tau\pi^{-1} \ , \ \mathrm{sgn}(\pi)\,\mathrm{sgn}(\pi^{-1}) = 1 \\
&= \pi\left(\sum_{\tau \in C_t} \mathrm{sgn}(\tau)\tau\right)\pi^{-1} \\
&= \pi K_t \pi^{-1}
\end{aligned}
$$

(ii) $e_{\pi t} = K_{\pi t}\{\pi t\}$, (i) den $K_{\pi t} = \pi K_t \pi^{-1}$ dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
e_{\pi t} &= \pi K_t \pi^{-1}\{\pi t\} \\
&= \pi K_t\{t\} \\
&= \pi e_t
\end{aligned}
$$

(iii) $\pi \in C_t$ olsun. (ii) den $\pi e_t = e_{\pi t}$ dir. Böylece

$$\pi e_t = e_{\pi t}$$

$$= K_{\pi t}\{\pi t\}$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in C_{\pi t}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\right)\{\pi t\}$$

$\sigma \in C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ ise $\sigma = \pi\tau\pi^{-1}$ olacak şekilde $\tau \in C_t$ dir. Bu durumda

$$\pi e_t = \left(\sum_{\pi\tau\pi^{-1} \in \pi C_t \pi^{-1}} \operatorname{sgn}(\pi\tau\pi^{-1})\pi\tau\pi^{-1}\right)\{\pi t\}$$

$$= \left(\sum_{\tau \in C_t} \operatorname{sgn}(\pi\tau)\operatorname{sgn}(\pi^{-1})\pi\tau\right)\pi^{-1}\{\pi t\}$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi^{-1})\left(\sum_{\tau \in C_t} \operatorname{sgn}(\pi\tau)\pi\tau\right)\{t\}, \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi)\left(\sum_{\pi^{-1}x \in C_t} \operatorname{sgn}(x)x\right)\{t\},\ \pi\tau = x$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi)\left(\sum_{x \in \pi C_t} \operatorname{sgn}(x)x\right)\{t\}, (\pi \in C_t \text{ ise } \pi C_t = C_t)$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi)\left(\sum_{x \in C_t} \operatorname{sgn}(x)x\right)\{t\}$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi)K_t\{t\}$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi)e_t$$

Tanım 3.4.4. λ, n nin bir parçalanması olmak üzere, M^λ nın λ-polytabloidler tarafından gerilen alt modülüne Specht modül adı verilir ve bu modül S^{λ} ile gösterilir.

Lemma 3.4.5. λ n nin bir parçalanması olmak üzere, S^{λ} Specht modülü herhangi bir λ -polytabloid tarafından üretilen devirli bir $F[S_n]$-modüldür.

İspat: $S^{\lambda} = Sp\{e_{\sigma t} : \sigma \in S_n\}$ olmak üzere $s \in S^{\lambda}$ olsun. Bu durumda $\lambda_{\sigma} \in F$ olmak üzere

$$s = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma} e_{\sigma t}$$

dir.Lemma 3.4.3. (ii) den $e_{\sigma t} = \sigma e_t$ olup, $s = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma} \sigma e_t$ dir. $\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma} \sigma \in F[S_n]$ olduğundan,

$$s \in < e_t > \text{ ve}$$

$$S^{\lambda} \subseteq < e_t >$$

dir. Açık olarak $< e_t > \subseteq S^{\lambda}$ olduğundan,

$$S^{\lambda} = < e_t >$$

dir.

Lemma 3.4.6. t ve t^* herhangi iki λ - tablo olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) $\{t^*\}$, e_t de gözükür.

(ii) $\rho \in R_{t^*}$ ve $\gamma \in C_t$ mevcuttur öyleki, $\rho t^* = \gamma t$ dir.

(iii) Herhangi a,b nin t^* ın aynı satırına ait olması a,b nin t nin farklı sütunlarına ait olmasını gerektirir.

İspat: (i) $\Rightarrow$(ii): $\{t^*\}$, e_t de gözükür ise $\{t^*\} = \sigma\{t\}$ olacak şekilde $\sigma \in C_t$ vardır.

$$\Rightarrow \{t^*\} = \sigma\{t\} = \{\sigma t\}$$

$$\Rightarrow t^* \approx \sigma t$$

$$\Rightarrow \pi \in R_{t^*} \text{ için } \sigma t = \pi t^* \text{ dır.}$$

$\pi = \rho, \sigma = \gamma$ dersek $\rho t^* = \gamma t$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\rho \in R_{t^*}, \gamma \in C_t$ olmak üzere, $\rho t^* = \gamma t$ olsun. Bu durumda $\rho \in R_{t^*}$ olduğundan $\{\rho t^*\} = \{t^*\}$ dır. Buradan

$$\Rightarrow \{\rho t^*\} = \{\gamma t^*\}$$

$$\Rightarrow \{t^*\} = \gamma\{t\}, \gamma \in C_t$$

Bu ise $\{t^*\}$, e_t de gözükür demektir.

(i) $\Rightarrow$ (iii): (i) ise $\{t^*\} = \sigma\{t\}$ olacak şekilde $\sigma \in C_t$ dir.a,b t^* ın aynı satırına ait olsun. Bu durumda $\{t^*\} = \{\sigma t\}$ olduğundan a,b σt nin aynı satırına aittir. Bu ise a,b nin σt nin farklı sütunlarına ait olmasını gerektirir.

a,b σt nin farklı sütunlarına ait ise $\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b)$ de t nin farklı sütunlarına aittir.

$\sigma \in C_t$ olduğundan, a ile $\sigma^{-1}(a)$ t nin aynı sütununa ve b ile $\sigma^{-1}(b)$ t nin aynı sütununa aittir. Dolayısıyla $\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b)$ t nin farklı sütunlarına ait olduğundan a,b de t nin farklı sütunlarına ait olmak zorundadır. Bu da istenilendir.

(iii) $\Rightarrow$(i): a,b t^* ın aynı satırına ait ise a,b t nin farklı sütunlarına ait olsun.

a,b t^* ın r. satırına ait olsun yani,

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
t^* = r. & \bullet & a & \cdots & b\bullet \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}
$$

olsun.

(1^0) Eğer a,b t nin r. satırına ait ise yani,

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
t = r. & \bullet & a & \cdots & b\bullet \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}
$$

bu durumda a,b t nin farklı sütunlarına ait olup, $\sigma = (1) \in C_t$ için $\{t^*\} = (1)\{t\}$ dir.

(2^0) Eğer a,t nin r. satırına ait fakat b r. satırına ait değilse bu durumda hipotezden b a ile aynı sütunda bulunamaz. b nin bulunduğu sütun k olsun. Yani

$$
\begin{array}{lcccc}
 & & & k & \\
 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
 & & & \vdots & \\
 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
t = r. & \bullet & a & \cdots & \bullet \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & \bullet & \bullet & \cdots b \cdots & \bullet \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}
$$

ise bu durumda r. satır ve k. sütundaki bir i sayısı için, $\{t^*\} = (bi)\{t\}$, $(bi) \in C_t$ dir.

(3^0) Eğer b, t nin r. satırına ait fakat a r. satırına ait değilse bu durumda a nın bulunduğu sütuna ℓ dersek r. satır ve ℓ. sütundaki bir j sayısı için, $\{t^*\} = (aj)\{t\}, (aj) \in C_t$ dir.

(4^0) Eğer hem a hemde b t nin r. satırına ait değilse bu durumda a nın bulunduğu sütuna m ve b nin bulunduğu sütuna n dersek,

r. satır ve m. sütundaki bir j ve r. satır ve n. sütundaki bir i sayısı için,

$\{t^*\} = (aj)(bi)\{t\}$, $(aj)(bi) \in C_t$ dır.

Böylece a,b keyfi olduğundan her durumda $\{t^*\} = \sigma\{t\}$ olacak şekilde $\sigma \in C_t$ vardır. Bu ise ispatı bitirir.

Lemma 3.4.7. λ ve μ n nin parçalanmaları olsunlar. Kabul edelimki, t bir λ-tablo, t^* bir μ- tablo ve $K_t\{t^*\} \neq 0$ olsun. Bu durumda $\lambda \trianglerighteq \mu$ dür. Ayrıca, eğer $\lambda = \mu$ ise bu durumda $K_t\{t^*\} = \mp K_t\{t\} = \mp e_t$ dir.

İspat: a,b t^* ın aynı satırına ait olan herhangi iki sayı olsun. Bu durumda $(ab) \in R_{t^*}$ olup,

$$\begin{aligned}((1)-(ab))\{t^*\} &= \{t^*\} - (ab)\{t^*\} \\ &= \{t^*\} - \{t^*\} \\ &= 0 \qquad \text{(i)}\end{aligned}$$

Şimdi iddia ediyoruzki a,b t nin aynı sütununa ait olamaz. Kabul edelimki a,b t nin aynı sütununa ait olsun. Bu durumda (1) ve $(ab) \in C_t$ olup, $H = \{(1),(ab)\}$ C_t nin mertebesi 2 olan bir altgrubudur.

Eğer $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ ları H nın C_t içindeki koset temsilcileri olarak seçersek,

$$C_t = \sigma_1 H \cup \sigma_2 H \cup \ldots \cup \sigma_k H$$

$$= \sigma_1\{(1),(ab)\} \cup \sigma_2\{(1),(ab)\} \cup \ldots \cup \sigma_k\{(1),(ab)\}$$

$$= \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \sigma_1(ab), \sigma_2(ab), \ldots, \sigma_k(ab)\}$$

olur. Buradan,

$$K_t = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1 + \ldots + \mathrm{sgn}(\sigma_k)\sigma_k - \mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1(ab) - \ldots - \mathrm{sgn}(\sigma_k)\sigma_k(ab)$$

$$= \mathrm{sgn}(\sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_1(ab)) + \ldots + \mathrm{sgn}(\sigma_k)(\sigma_k - \sigma_k(ab))$$

$$= \mathrm{sgn}(\sigma_1)(\sigma_1((1) - (ab))) + \ldots + \mathrm{sgn}(\sigma_k)(\sigma_k((1) - (ab)))$$

$$= (\mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1 + \ldots + \mathrm{sgn}(\sigma_k)\sigma_k)((1) - (ab))$$

$$\Rightarrow K_t\{t^*\} = (\mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1 + \ldots + \mathrm{sgn}(\sigma_k)\sigma_k)((1) - (ab))\{t^*\}$$

$$= 0 \quad , \text{(i) den}$$

olurki, bu hipoteze çelişkidir. Bu çelişkiden dolayı iddiamız doğrudur. a,b keyfi olduğundan t^* ın keyfi r. satırına ait olan bütün elemanlar t nın farklı sütunlarına aittir.

Böylece Lemma 3.2.3 (temel kombinatoriyel lemma) gereğince $\lambda \trianglerighteq \mu$ dür.

Şimdi eğer $\lambda = \mu$ ise t ve t^* aynı λ - tablodurlar ve a,b t^* ın aynı satırına ait ise bu durumda a,b t nin farklı sütunlarına aittir. Buradan Lemma 3.4.6 (iii) $\Rightarrow$(i) gerektirmesinden dolayı $\{t^*\}, e_t$ de gözükür. Yani $\{t^*\} = \pi\{t\}$ olacak şekilde $\pi \in C_t$ vardır.

$$K_t\{t^*\} = K_t\pi\{t\}$$

$$= \sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\pi\{t\}$$

$$= \sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\pi^{-1})\,\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\pi)\sigma\pi\{t\}$$

$$= \mathrm{sgn}(\pi)\sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma\pi)\sigma\pi\{t\}$$

$\sigma\pi = \tau$ dersek $\sigma = \tau\pi^{-1} \in C_t \Rightarrow \tau \in C_t\pi = C_t$ dir. Bu durumda

$$K_t\{t^*\} = \mathrm{sgn}(\pi) \sum_{\tau\pi^{-1}\in C_t} \mathrm{sgn}(\tau)\tau\{t\}$$

$$= \mathrm{sgn}(\pi)\sum_{\tau\in C_t} \mathrm{sgn}(\tau)\tau\{t\}\,, \quad \mathrm{sgn}(\pi) = \mp 1$$

$$= \mp K_t\{t\}$$

$$= \mp e_t \text{ dir.}$$

Sonuç 3.4.8. Eğer u, M^λ nın bir elemanı ve t bir λ-tablo ise bu durumda $K_t u$, e_t nin bir katıdır.

İspat: $M^\lambda = Sp\{\{t_1^*\},\ldots,\{t_k^*\}\}$ ve $u \in M^\lambda$ olsun. Bu durumda u, $\{t_i^*\}$ $\lambda-$ tabloidlerin bir lineer kombinasyonudur. Yani her $a_i \in F$ olmak üzere, $u = a_1\{t_1^*\}+\ldots+a_k\{t_k^*\}$ dır.

$$\Rightarrow K_t u = K_t\left(a_1\{t_1^*\}+\ldots+a_k\{t_k^*\}\right)$$

M^λ bir $F[S_n]$- modül olduğundan,

$$K_t u = a_1 K_t\{t_1^*\} + \ldots + a_k K_t\{t_k^*\}$$

$$= a_1(\mp e_t) + \ldots + a_k(\mp e_t), \quad \text{lemma 3.4.7 den}$$

$$= (\mp a_1 + \ldots + \mp a_k)e_t$$

$$= \lambda e_t, \qquad \lambda = \mp a_1 + \ldots + \mp a_k \in F$$

olur.

Şimdi aşağıdaki şekilde tanımlanan <,> , M^λ üzerinde bir bilineer form olsun.

$$\langle\{t_1\},\{t_2\}\rangle = \begin{cases} 1, & \{t_1\} = \{t_2\} \text{ ise} \\ 0, & \{t_1\} \neq \{t_2\} \text{ ise} \end{cases}$$

Bu bilineer form cisim ne olursa olsun M^λ üzerinde simetrik, S_n- *invaryant* ve non-singülerdir.

Eğer $F = Q$ ise bu bilineer form bir iççarpımdır.

Simetriklik:

$$\langle\{t_1\},\{t_2\}\rangle = \begin{cases} 1, & \{t_1\} = \{t_2\} \\ 0, & \{t_1\} \neq \{t_2\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \{t_2\} = \{t_1\} \\ 0, & \{t_2\} \neq \{t_1\} \end{cases} = \langle\{t_2\},\{t_1\}\rangle$$

S_n-Invaryantlık: $\forall \pi \in S_n$ için,

$$\langle \pi\{t_1\}, \pi\{t_2\} \rangle = \langle \{\pi t_1\}, \{\pi t_2\} \rangle = \begin{cases} 1, & \{\pi t_1\} = \{\pi t_2\} \\ 0, & \{\pi t_1\} \neq \{\pi t_2\} \end{cases}$$

S_n nin λ-tabloidlerin kümesi üzerindeki etkisi iyi tanımlı olduğundan, $\pi^{-1} \in S_n$ için,

$$\{\pi t_1\} = \{\pi t_2\} \Rightarrow \pi^{-1}(\{\pi t_1\}) = \pi^{-1}(\{\pi t_2\}) \Rightarrow \{t_1\} = \{t_2\}$$

ve

$$\{\pi t_1\} \neq \{\pi t_2\} \Rightarrow \pi(\{t_1\}) \neq \pi(\{t_2\}) \Rightarrow \{t_1\} \neq \{t_2\}$$

dir.

Buradan,

$$\langle \pi\{t_1\}, \pi\{t_2\} \rangle = \begin{cases} 1, & \{\pi t_1\} = \{\pi t_2\} \\ 0, & \{\pi t_1\} \neq \{\pi t_2\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \{t_1\} = \{t_2\} \\ 0, & \{t_1\} \neq \{t_2\} \end{cases} = \langle \{t_1\}, \{t_2\} \rangle$$

olup $<,>$ S_n - invaryanttır.

Non-Singülerlik: Sıfırdan farklı her $m \in M^\lambda$ için, $< m, m' > \neq 0$ olacak şekilde $\exists m' \in M^\lambda$ varmıdır? $0 \neq m \in M^\lambda$ olsun. Bu durumda $m = a_1\{t_1\} + \ldots + a_k\{t_k\} \neq 0 \Rightarrow \exists i$ için $a_i \neq 0$ dır. $< m, \{t_i\} > = a_i \neq 0$ olduğundan her zaman $m' = \{t_i\}$ olacak şekilde $m' \in M^\lambda$ vardır. Dolayısıyla $<,>$ non-singüler dir.

Şimdi eğer $F = Q$ ise $\forall m, n \in M^\lambda$ için, $< m, n > \geq 0$ olduğu $<,>$ nın tanımından açıktır.

$<m\,,\,m> = 0$ olsun. Bu durumda

$$< a_1\{t_1\}+\ldots+a_k\{t_k\}, a_1\{t_1\}+\ldots+a_k\{t_k\} >= 0$$

$$\Rightarrow a_1^2+\ldots+a_k^2 = 0$$

Char $Q = 0$ olduğundan, $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ dolayısıyla m=0 dır.

İççarpımın diğer şartlarıda bilineer formun tanımında vardır. O halde F=Q iken $<,>$ bir iççarpımdır.

Şimdi bu özelliklerden yararlanarak $\forall u, v \in M^\lambda$ için,

$$< K_t u, v >=< u, K_t v >$$

eşitliğini ispatlayalım.

$$< K_t u, v >=< \sum_{\pi\in C_t} \mathrm{sgn}(\pi)\pi u, v >$$

$$= \sum_{\pi\in C_t} \mathrm{sgn}(\pi) < \pi u, v >, \quad (<,> \text{ bilineer form olduğundan})$$

$$= \sum_{\pi\in C_t} \mathrm{sgn}(\pi) < u, \pi^{-1} v >, \quad (<,> S_n\text{-invaryant olduğundan})$$

$$=< u, \sum_{\pi\in C_t} \mathrm{sgn}(\pi)\pi^{-1} v >, \quad (<,> \text{ bilineer form olduğundan})$$

$$=< u, \sum_{\tau\in C_t} \mathrm{sgn}(\tau)\tau v > , \quad (\tau = \pi^{-1})$$

$$=< u, K_t v >$$

olur.

Teorem 3.4.9. (James Altmodül Teoremi) Eğer U, M^{λ} nın bir alt modülü ise bu durumda $U \supseteq S^{\lambda}$ veya $U \subseteq S^{\lambda\perp}$ dir.

İspat: Kabul edelimki $u \in U$ ve t bir λ – tablo olsun.Bu durumda Sonuç 3.4.8 den $K_t u$, e_t nin bir katı olup, bir $\lambda \in F$ için $K_t u = \lambda e_t$ dir.

Eğer en az bir $u \in U$ için $\lambda \neq 0$ ise bu durumda $\lambda^{-1} K_t u = e_t$ ve U bir $F[S_n]$- altmodül olduğundan $e_t = \lambda^{-1} K_t u \in U$ dur.Buradan her $s \in S^{\lambda} = \langle e_t \rangle$ için, $s \in U$ olup, $S^{\lambda} \subseteq U$ dur.

Eğer her $u \in U$ için $\lambda = 0$ ise bu durumda $K_t u = 0$ dır. Dolayısıyla her $u \in U$ için, $\langle u, e_t \rangle = \langle u, K_t\{t\} \rangle = \langle K_t u, \{t\} \rangle = 0$ dır. Buradan her $s \in S^{\lambda} = \langle e_t \rangle$ için, $\langle u,s \rangle = 0$ olup, $u \in S^{\lambda\perp}$ dolayısıyla $U \subseteq S^{\lambda\perp}$ dir.

Sonuç 3.4.10. S^{λ} ile $S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp}$ arasında bir başka altmodül yoktur.

İspat: Kabul edelimki, $S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp} \subseteq U \subseteq S^{\lambda}$ olacak şekilde M^{λ} nın bir U altmodülü mevcut olsun. Bu durumda Teorem 3.4.9 dan $U \supseteq S^{\lambda}$ veya $U \subseteq S^{\lambda\perp}$ dir.

(1^0) $S^{\lambda} \subseteq U$ ise kabulümüzden $U \subseteq S^{\lambda}$ olup, $U = S^{\lambda}$ dir

(2^0) $U \subseteq S^{\lambda\perp}$ ise bu durumda, $U \cap S^{\lambda} \subseteq S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp}$ dolayısıyla $U \subseteq S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp}$ dir.

Ayrıca kabülümüzden $S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp} \subseteq U$ olup $S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp} = U$ dur.

Teorem 3.4.11: $\dfrac{S^{\lambda}}{(S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp})}$ bölüm modülü sıfır yada indirgenemezdir.

İspat: Kabul edelimki, $\dfrac{S^{\lambda}}{(S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp})} \neq \{0\}$ olsun. Gösterelimki, $\dfrac{S^{\lambda}}{(S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp})}$ indirgenemezdir.

Bunun için, $\frac{U}{(S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp})}$, $\frac{S^{\lambda}}{(S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp})}$ nın bir altmodülü olsun. Bu durumda $S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp} \subseteq U \subseteq S^{\lambda}$ olup, Sonuç 3.3.10 dan $U = S^{\lambda}$ veya $U = S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp}$ dir.

$U = S^{\lambda} \Rightarrow \frac{U}{(S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp})} = \frac{S^{\lambda}}{(S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp})}$ veya

$U = S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp} \Rightarrow \frac{U}{S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp}} = \{0\}$ dır.

O halde $\frac{S^{\lambda}}{(S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp})}$ indirgenemezdir.

Sonuç 3.4.12. Char F = 0 ise $S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp} = \{0\}$ olup S^{λ} indirgenemezdir.

İspat: Herhangi $x \in S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp}$ olsun. Bu durumda $x \in S^{\lambda}$ ve $x \in S^{\lambda\perp}$ olup $< x, x >= 0$ dır. Buradan $x = a_1\{t_1\} + ... + a_k\{t_k\}$ olmak üzere,

$$< a_1\{t_1\} + ... + a_k\{t_k\}, a_1\{t_1\} + ... + a_k\{t_k\} >= 0$$

$$a_1^2 + ... + a_k^2 = 0, \ (F = C \ \text{ise} \ |a_1|^2 + ... + |a_k|^2 = 0)$$

dır.Char F = 0 olduğundan, $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$ olup, $x = 0$ dır. Dolayısıyla,

$S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp} = \{0\}$ dır.

Buradan, $\frac{S^{\lambda}}{(S^{\lambda} \cap S^{\lambda\perp})} = \frac{S^{\lambda}}{\{0\}} = S^{\lambda} \neq \{0\}$ olur ve Teorem 3.4.11 gereğince S^{λ} indirgenemezdir.

Böylece λ lar n nin farklı parçalanmaları olmak üzere, S^{λ} lar S_n nin tüm indirgenemez modüllerini verir. S^{λ} lara karşılık gelen representasyonlarda S_n nin tüm indirgenemez representasyonları olacaktır.

3.5. Specht Modüller İçin Bir Baz

Tanım 3.5.1. Bir t tablosunun satırları ve sütunları artan bir dizi ise t tablosuna standart tablo denir.

Eğer $\{t\}$ denklik sınıfı içinde standart bir tablo mevcut ise bu durumda $\{t\}$ tabloidine standart dır denir.

Eğer t standart tablo ise e_t polytabloidine standartdır denir.

Örnek 3.5.2. $t_1 = \begin{matrix} 1\,2 \\ 3 \end{matrix}$ ve $t_2 = \begin{matrix} 1\,3 \\ 2 \end{matrix}$ standart tablolardır.

Fakat $t_3 = \begin{matrix} 2\,3 \\ 1 \end{matrix}$ standart tablo değildir.

Örnek 3.5.3. S_5 simetrik grubunda $\lambda = (3,2)$ parçalanması için,

$$\begin{Bmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1\,2\,4 \\ 3\,5 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1\,2\,5 \\ 3\,4 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1\,3\,4 \\ 2\,5 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1\,3\,5 \\ 2\,4 \end{Bmatrix}$$

tabloidleri standart tabloidlerdir.

Teorem 3.5.4. $\{e_t \mid t \text{ standart bir } \lambda-\text{tablo}\}$ kümesi S^λ için bir bazdır. S^λ nın boyutu, standart λ-tabloların sayısına eşittir.

Bu teoremin ispatını iki aşamada yapacağız. Önce bu kısımda bu kümenin lineer bağımsızlığını ve kısım 3.6 da ise bu kümenin S^λ yı gerdiğini ispatlayacağız.

Lemma 3.5.5. Eğer t standart bir tablo ve $\{s\}, e_t$ de gözüken bir tabloid ise bu durumda $\{s\} \trianglelefteq \{t\}$ dir.

İspat: $\pi \in C_t$ olmak üzere $s = \pi t$ olsun. Bu durumda $\{s\} = \pi\{t\}$ olduğundan $\{s\}, e_t$ de gözükür. Eğer $\pi = (1)$ ise ispat açıktır. $\pi \neq (1)$ ise s sütun olarak standart olmadığından s tablosunun bir sütununda, $w < x$ olmak üzere, w x den daha aşağıda olacak şekilde w,x sayıları vardır. Buradan Lemma 3.3.8 gereğince $\{s\} \lhd (wx)\{s\}$ dir.

Şimdi $\{(wx)s\}$, e_t de gözükür. Gerçekten, $(wx)\{s\} = (wx)\{\pi t\} = (wx)\pi\{t\}$ ve $(wx) \in C_s$ olup $(wx) \in C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ dir.

$$\Rightarrow (wx)\pi \in \pi C_t = C_t, \quad (\pi \in C_t)$$

$$\Rightarrow (wx)\pi \in C_t$$

O halde $\{(wx)s\}$, e_t de gözükür. Buradaki amacımız tümevarım yoluyla $\{t\}$ yi e_t de gözüken tabloidlerden büyük bırakmaktır.

Eğer $(wx)\{s\} = \{t\}$ ise ispat bitmiştir. $(wx)\{s\} \neq \{t\}$ ise aynı düşünceyle $(wx)\{s\}$ nin bir sütununda $y < z$ olmak üzere, y z den daha aşağıda olacak şekilde y, z sayıları vardır. Yine Lemma 3.3.8 gereğince, $(wx)\{s\} \lhd (yz)(wx)\{s\}$ dir.

Eğer $(yz)(wx)\{s\} = \{t\}$ ise ispat bitmiştir. $(yz)(wx)\{s\} \neq \{t\}$ ise, yine aynı düşünceyle devam edersek sonlu adımdan sonra $\sigma_1\sigma_2...\sigma_r\{s\} = \{t\}$ elde ederiz. Buradan,

$$\{s\} \lhd (wx)\{s\} \lhd (yz)(wx)\{s\} \lhd ... \lhd \sigma_1\sigma_2...\sigma_r\{s\} = \{t\}$$

dir. Böylece sonuç olarak, $\{s\} \unlhd \{t\}$ dir.

Sonuç 3.5.6. Eğer t standart bir tablo ise bu durumda $\{t\}$, e_t de gözüken maksimum tabloiddir.

Lemma 3.5.7. $v_1, v_2, ..., v_m$,M^λ nın elemanları olsunlar. Herbir v_i için v_i de gözüken bir $\{t_i\}$ tabloidi seçebileceğimizi kabul edelim. Öyleki;

(i) $\{t_i\}$, v_i de gözüken maksimum tabloid olsun.

(ii) Bütün $\{t_i\}$ ler birbirinden farklı olsunlar.Bu durumda $v_1, v_2, \dots, v_m$ ler F üzerinde lineer bağımsızdırlar.

İspat: Tabloidler üzerinde tam sıralama olduğundan, kabul edebilirizki;

$$\{t_1\} < \{t_2\} < \dots < \{t_m\} \tag{1}$$

dir. Şimdi her $a_i \in F$ için,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0 \tag{2}$$

olsun.

(i) ve (ii) hipotezlerinden $\{t_m\}$ tabloidi yalnız v_m de gözükür. Aksi takdirde eğer bir $k < m$ için $\{t_m\}$ v_k da gözükseydi (i) ve (ii) den $\{t_m\} < \{t_k\}$ olurdu ki bu (1) kabülümüzle çelişir. $\{t_m\}$ yalnız v_m de gözüktüğünden ve $\{t_i\}$ lerin hepsi birbirinden farklı olduğundan (2) yazılışının mümkün olabilmesi için $a_m = 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla (2) yazılışı $a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1} = 0$ şeklini alır. Aynı düşünceyle $\{t_{m-1}\}$ yalnız v_{m-1} de gözükür dolayısıyla (2) yazılışında $a_{m-1} = 0$ olmak zorundadır. Böyle devam edersek $a_{m-2} = \dots = a_1 = 0$ elde ederiz.

Böylece (2) yazılışında $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$ olup, $v_1, v_2, \dots, v_m$ ler F üzerinde lineer bağımsızdırlar.

Önerme 3.5.8. $\{e_t \mid t \text{ standart bir } \lambda - \text{tablo}\}$ kümesi F üzerinde lineer bağımsızdır.

İspat: t ler değiştikçe e_t ler M^λ nın elemanlarıdır. t standart olduğundan $\{t\}$, e_t

de gözüken maksimum tabloiddir. Ayrıca t ler farklı standart tabloları tararken $\{t\}$ lerde birbirinden farklı tabloidlerdir.

Böylece Lemma 3.5.7 den $\{e_t | \text{ t standart bir } \lambda-\text{tablo}\}$ kümesi F üzerinde lineer bağımsızdır.

3.6. Garnir Bağıntıları

Bu kısımda standart λ- polytabloidlerin S^λ yı gerdiğini göstereceğiz. Yani t herhangi bir λ-tablo ise, e_t standart λ- polytabloidlerin bir lineer kombinasyonudur.

Tanım 3.6.1. λ, n nin bir parçalanması olmak üzere, t bir λ- tablo ve A, t nin i. sütununun ve B de t nin (i+1). sütununun bir alt kümesi olsun. $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k$ permütasyonları $S_A \times S_B$ nin $S_{A\cup B}$ içindeki koset temsilcilerini göstermek üzere,

$$G_{A,B} = \sum_{j=1}^{k} sgn(\sigma_j)\sigma_j$$

toplamına Garnir elemanı denir.

t nin sütunlarının artan olduğunu kabul edebiliriz. Aksi takdirde öyle bir $\sigma \in C_t$ vardırki, $s=\sigma t$ artan sütunlara sahiptir. $\sigma \in C_t$ olduğundan ve Lemma 3.4.3 den $e_s = e_{\sigma t} = \sigma e_t = sgn(\sigma)e_t$ dir.

Böylece e_s polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olduğunda e_t de işaret farkıyla polytabloidlerin bir lineer kombinasyonudur.

Bütün uygulamalarda A, t nin i. sütununun sonundan ve B de t nin (i+1). sütununun başlangıcından itibaren alınır. S_Ax S_B nin S_{AUB} içindeki koset temsilcileri tek değildir. Bu koset temsilcileri $\sigma_1 t,\sigma_2 t,\ldots,\sigma_k t$ lerin sütunları artan olacak şekilde seçilmelidir.

Örnek 3.6.2. $t = \begin{array}{l} 12 \\ 43 \\ 5 \end{array}$ bir (2,2,1)-tablo olsun. Eğer $A = \{4,5\}$ ve $B = \{2,3\}$

alırsak, $S_A x\ S_B$ nin $S_{A \cup B}$ içindeki koset temsilcileri

$$\sigma_1 = (1), \sigma_2 = (34), \sigma_3 = (354), \sigma_4 = (234), \sigma_5 = (2354), \sigma_6 = (24)(35)$$

olarak seçilebilir öyleki,

$$\sigma_1 t = \begin{array}{l} 12 \\ 43 \\ 5 \end{array},\ \sigma_2 t = \begin{array}{l} 12 \\ 34 \\ 5 \end{array},\ \sigma_3 t = \begin{array}{l} 12 \\ 35 \\ 4 \end{array},\ \sigma_4 t = \begin{array}{l} 13 \\ 24 \\ 5 \end{array},\ \sigma_5 t = \begin{array}{l} 13 \\ 25 \\ 4 \end{array},\ \sigma_6 t = \begin{array}{l} 14 \\ 25 \\ 3 \end{array}$$

olur. Böylece,

$$G_{A,B} = (1) - (34) + (354) + (234) - (2354) + (24)(35)$$

dir

Önerme 3.6.3. t bir λ - tablo, A ve B de Garnir elemanının tanımındaki şartları sağlasın. Eğer $|A \cup B|$, t nin i. sütunundaki eleman sayısından büyük ise bu durumda

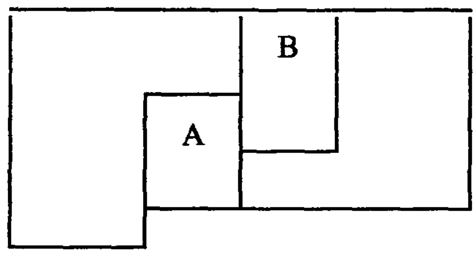
$$G_{A,B} e_t = 0$$

dır.

İspat: $\overline{S_A \times S_B} = \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} sgn(\sigma)\sigma$ ve $\overline{S_{A \cup B}} = \sum_{\sigma \in S_{A \cup B}} sgn(\sigma)\sigma$ olsun. $|A \cup B|$, t nin i. sütunundaki eleman sayısından büyük olduğundan her $\tau \in C_t$ için τt nin aynı satırında yer alan $a, b \in A \cup B$ elemanları vardır öyleki, $(ab) \in S_{A \cup B}$ dir.

Gerçekten,

i (i+1)

t = 

olmak üzere t nin i. sütunundaki eleman sayısı, k ve $|A| = t$ olsun. Bu durumda A nın üstünde k-t tane eleman vardır. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan ve hipotezden $|A \cup B| > k$ olduğundan

$$\Rightarrow |A \cup B| > k$$

$$\Rightarrow |A| + |B| > k$$

$$\Rightarrow |B| > k - t$$

olur. Bu yüzden A ile B nin mutlaka kesiştiği en az bir satır vardır ve bu satırda $i \in A$ ve $j \in B$ olacak şekilde $i, j \in A \cup B$ elemanları vardır. Dolayısıyla her $\tau \in C_t$ için τ, i veya j yi yerdeğiştirse bile τt nin aynı satırında yer alan $a, b \in A \cup B$ elemanları vardır ve $(ab) \in S_{A \cup B}$ dir.

$(ab) \in S_{A \cup B}$ olduğundan $H = \{(1), (ab)\}$, $S_{A \cup B}$ nin bir altgrubudur. Dolayısıyla H nın $S_{A \cup B}$ içinde öyle $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ koset temsilcileri vardırki;

$$S_{A \cup B} = \sigma_1 H \cup \sigma_2 H \cup \ldots \cup \sigma_s H$$

dır. Buradan,

$$\overline{S_{A\cup B}}\{\tau t\} = \sum_{\sigma\in S_{A\cup B}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{\tau t\}$$

$$= \sum_{\sigma\in\sigma_1 H\cup\ldots\cup\sigma_s H} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{\tau t\}$$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma_1)\sigma_1\{\tau t\} - \operatorname{sgn}(\sigma_1)\sigma_1(ab)\{\tau t\} + \ldots + \operatorname{sgn}(\sigma_s)\sigma_s\{\tau t\} - \operatorname{sgn}(\sigma_s)\sigma_s(ab)\{\tau t\}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn}(\sigma_i)\sigma_i\right)\big((1)-(ab)\big)\{\tau t\}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn}(\sigma_i)\sigma_i\right)\big(\{\tau t\}-(ab)\{\tau t\}\big), \quad a,b \ \ \tau t \text{ nin aynı satırında olduğundan}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn}(\sigma_i)\sigma_i\right)\big(\{\tau t\}-\{\tau t\}\big)$$

$$=0$$

Bu herbir $\tau \in C_t$ için geçerli ve $K_t = \sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$ da gözüken herbir σ içinde doğru olacağından ,

$$\overline{S_{A\cup B}}e_t = \left(\sum_{\sigma\in S_{A\cup B}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\right)\left(\sum_{\tau\in C_t} \operatorname{sgn}(\tau)\tau\{t\}\right)$$

$$= \sum_{\sigma\in S_{A\cup B}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \operatorname{sgn}(\tau_1)\tau_1\{t\} + \ldots + \sum_{\sigma\in S_{A\cup B}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \operatorname{sgn}(\tau_r)\tau_r\{t\}$$

$$= \operatorname{sgn}(\tau_1)\left(\sum_{\sigma\in S_{A\cup B}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{\tau_1 t\}\right) + \ldots + \operatorname{sgn}(\tau_r)\left(\sum_{\sigma\in S_{A\cup B}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{\tau_r t\}\right)$$

$$= 0 + \ldots + 0$$

$$=0$$

$S_A x S_B \subseteq C_t$ ve $\overline{S_A x S_B}$, K_t nin bir çarpanı olduğundan,

$$\overline{S_{AUB}} = G_{A,B}\overline{S_A x S_B}$$

dir. Gerçekten, $S_A x S_B$, S_{AUB} nin bir altgrubu olduğundan öyle $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ koset temsilcileri vardırki,

$$S_{AUB} = \sigma_1(S_A x\ S_B) \cup \sigma_2(S_A x\ S_B) \cup \ldots \cup \sigma_k(S_A x\ S_B)$$

yazabiliriz. Böylece,

$$\overline{S_{AUB}} = \sum_{\sigma \in S_{AUB}} sgn(\sigma)\sigma = \left(\sum_{i=1}^{k} sgn(\sigma_i)\sigma_i\right)\overline{S_A x S_B} = G_{A,B}\overline{S_A x S_B}$$

bulunur. Diğer taraftan, $S_A x S_B \subseteq C_t$ ve $|S_A x S_B| = |S_A||S_B| = |A|!|B|!$ olduğundan,

$$\overline{S_A x S_B} e_t = |A|!|B|!\, e_t$$

dir. Gerçekten,

$$\overline{S_A x S_B} e_t = \left(\sum_{\tau \in S_A x S_B} sgn(\tau)\tau\right) e_t$$

$$= \left(sgn(\tau_1)\tau_1 + \ldots + sgn(\tau_\ell)\tau_\ell\right) e_t$$

$$= sgn(\tau_1)\tau_1 e_t + \ldots + sgn(\tau_\ell)\tau_\ell e_t, \text{ (lemma 3.4.3 (iii) den)}$$

$$= sgn(\tau_1)\, sgn(\tau_1) e_t + \ldots + sgn(\tau_\ell)\, sgn(\tau_\ell) e_t,$$

$$= e_t + \ldots + e_t$$

$$= |A|!|B|!\, e_t$$

Nihayet, $\overline{S_{AUB}} = G_{A,B}\overline{S_A x S_B}$ ve $\overline{S_{AUB}}e_t = 0$ olduğundan,

$$0 = \overline{S_{AUB}}e_t = G_{A,B}\overline{S_A x S_B}e_t = G_{A,B}|A|!|B|!\,e_t = |A|!|B|!\,G_{A,B}e_t$$

$$\Rightarrow G_{A,B}e_t = 0 \text{ dır.}$$

Örnek 3.6.4. $t = \begin{matrix} 43 \\ 21 \\ 5 \end{matrix}$ bir $(2^2,1)-$tablo olsun. e_t nin standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğini gösterelim.

$$e_{\substack{43\\21\\5}} = e_{(24)(13)\substack{21\\43\\5}} = \mathrm{sgn}((24)(13))e_{\substack{21\\43\\5}} = e_{\substack{21\\43\\5}}$$

olduğundan $t_1 = \begin{matrix} 21 \\ 43 \\ 5 \end{matrix}$ alalım.

$A = \{4,5\}$ ve $B = \{1,3\}$ olsun. Bu durumda

$$H = S_A x S_B = \{(1),(45),(13),(13)(45)\}$$

$$S_{AUB} = S_{\{1,3,4,5\}}\{(1),(1345),(3145),(1354),(3154),(1435),(4153),(13),(14),(15),(34),$$

$$(35),(45),(134),(143),(135),(153),(145),(154)(345),(354),(13)(45),(14)(35),(15)(34)\}$$

$$(1)H = \{(1),(45),(13),(13)(45)\}$$

$$(1345)H = \{(1345),(134),(145),(14)\}$$

$$(3145)H = \{(3145),(143),(345),(34)\}$$

$$(1354)H = \{(1354),(135),(154),(15)\}$$

$$(3154)H=\{(3154),(153),(354),(35)\}$$

$$(1435)H=\{(1435),(14)(35),(15)(34),(4153)\}$$

Böylece $S_A x S_B$ nin S_{AUB} içindeki koset temsilcileri,

$$(1),(1345),(3145),(1354),(3154),(1435)$$

olur. Buradan Garnir elemanı,

$$G_{A,B}=\sum \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma=(1)-(1345)-(3145)-(1354)-(3154)-(1435)$$

Önerme 3.6.3. den $G_{A,B}e_t=0$ dır

$$\Rightarrow e_{\substack{21\\43\\5}}-e_{\substack{(1345)21\\43\\5}}-e_{\substack{(3145)21\\43\\5}}-e_{\substack{(1354)21\\43\\5}}-e_{\substack{(3154)21\\43\\5}}-e_{\substack{(1435)21\\43\\5}}=0$$

$$\Rightarrow e_{\substack{21\\43\\5}}=e_{\substack{23\\54\\1}}+e_{\substack{24\\51\\3}}+e_{\substack{23\\15\\4}}+e_{\substack{25\\31\\4}}+e_{\substack{24\\35\\1}}$$

Burada;

$$e_{\substack{23\\54\\1}}=e_{\substack{(125)13\\24\\5}}=\mathrm{sgn}((125))e_{\substack{13\\24\\5}}=e_{\substack{13\\24\\5}} \qquad \text{(standart)}$$

$$e_{\substack{23\\15\\4}}=e_{\substack{(12)13\\25\\4}}=\mathrm{sgn}((12))e_{\substack{13\\25\\4}}=-e_{\substack{13\\25\\4}} \qquad \text{(standart)}$$

$$e_{\substack{24\\35\\1}}=e_{\substack{(231)14\\25\\3}}=\mathrm{sgn}((231))e_{\substack{14\\25\\3}}=e_{\substack{14\\25\\3}} \qquad \text{(standart)}$$

$$e_{\substack{24\\51\\3}}=e_{\substack{(35)(14)21\\34\\5}}=\mathrm{sgn}((35)(14))e_{\substack{21\\34\\5}}=e_{\substack{21\\34\\5}} \qquad \text{(standart değil)}$$

$$e_{\substack{25\\31\\4}}=e_{\substack{(15)21\\35\\4}}=\mathrm{sgn}((15))e_{\substack{21\\35\\4}}=-e_{\substack{21\\35\\4}} \qquad \text{(standart değil)}$$

olur. Böylece,

$$e_{\substack{21\\43\\5}} = e_{\substack{13\\24\\5}} + e_{\substack{21\\34\\5}} - e_{\substack{13\\25\\4}} - e_{\substack{21\\35\\4}} + e_{\substack{14\\25\\3}} \qquad (1)$$

dir. Standart olmayan $\begin{smallmatrix}21\\34\\5\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}21\\35\\4\end{smallmatrix}$ tabloları için aynı yöntem uygulanırsa,

$$e_{\substack{21\\34\\5}} = e_{\substack{12\\34\\5}} - e_{\substack{13\\24\\5}} - e_{\substack{14\\25\\3}}$$

ve

$$e_{\substack{21\\35\\4}} = e_{\substack{12\\35\\4}} - e_{\substack{13\\25\\4}} + e_{\substack{14\\25\\3}}$$

Bu değerler (1) de yerlerine yazılır ve $e_{\substack{43\\21\\5}} = e_{\substack{21\\43\\5}}$ eşitliği kullanılırsa,

$$e_{\substack{43\\21\\5}} = e_{\substack{21\\43\\5}} = e_{\substack{12\\34\\5}} - e_{\substack{14\\25\\3}} - e_{\substack{12\\35\\4}}$$

olur.

Tanım 3.6.5. t_1 ve t_2 iki λ-tablo olsun. Bu durumda,

$$t_1 \approx t_2 \Leftrightarrow \pi t_1 = t_2 \text{ olacak şekilde bir } \pi \in C_{t_1} \text{ varsa.}$$

şeklinde tanımlanan "$\approx$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Bu denklik bağıntısı sonucu ortaya çıkan denklik sınıflarına sütun λ-tabloid adı verilir ve bir t λ-tablosunun sütun denklik sınıfı $[t]$ ile gösterilir. Yani,

$$[t] = \{ s \mid \text{bir } \pi \in C_t \text{ için } s = \pi t \}$$

şeklindedir.

Örnek 3.6.6. $\lambda = (2,1)$ 3 ün bir parçalanması olsun. Bu durumda mümkün olan bütün sütun λ - tabloidler,

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 3 \end{matrix} , \begin{matrix} 32 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 2 \end{matrix} , \begin{matrix} 23 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \begin{bmatrix} 21 \\ 3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 3 \end{matrix} , \begin{matrix} 31 \\ 2 \end{matrix} \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 3.6.7. (Sütun λ - tabloidler için tam sıralama)

λ n nin bir parçalanması olmak üzere, $[t_1]$ ve $[t_2]$ herhangi sütun λ -tabloidler olsunlar,

$[t_1] < [t_2]$ dır. $\Leftrightarrow$ Bir i sayısı için aşağıdakiler sağlanıyorsa,

(i) $j > i$ iken j, $[t_1]$ ve $[t_2]$ nin aynı sütununa aittir.

(ii) i nin $[t_1]$ de ait olduğu sütun $[t_2]$ de ait olduğu sütundan daha soldadır.

Örnek 3.6.8. $\lambda = (2,2,1)$ n=5 in bir parçalanması olmak üzere, $\begin{bmatrix} 12 \\ 43 \\ 5 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 5 \end{bmatrix}$ sütun λ -tabloidleri için,

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 43 \\ 5 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 5 \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten $i = 4$ alırsak $j = 5$ dir.

(i) $5, \begin{bmatrix} 12 \\ 43 \\ 5 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 5 \end{bmatrix}$ in aynı sütununa aittir.

(ii) $4, \begin{bmatrix} 12 \\ 43 \\ 5 \end{bmatrix}$ de yer aldığı sütun $\begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 5 \end{bmatrix}$ de yeraldığı sütundan daha soldadır.

Teorem 3.6.9. $\{e_t | t \text{ standart bir } \lambda-\text{tablo}\}$ kümesi S^{λ} yı gerer.

İspat: Bu kısmın başlangıcında verilen hatırlatmalardan dolayı t yi sütun sıralı olarak alabiliriz. Kabul edelimki t standart olmasın. İspatı tümevarımla yapacağız onun için tümevarım hipotezi olarak kabul edelimki, $[s] > [t]$ iken e_s standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilsin. Sonra aynı şeyi e_t için gösterelim.

t standart olmadığından t nin bileşenleri,

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_p \text{ ve } b_1 < b_2 < \ldots < b_q$$

olan öyle ardışık j.ve (j+1). sütunları vardırki, en az bir i için $a_i > b_i$ dir. Yani,

$$\begin{array}{ccc}
a_1 & & b_1 \\
\wedge & & \wedge \\
a_2 & & b_2 \\
\wedge & & \wedge \\
\vdots & & \vdots \\
\wedge & & \wedge \\
a_i & > & b_i \\
\wedge & & \\
a_{i+1} & & \wedge \\
\vdots & & \vdots \\
\wedge & & \wedge \\
a_p & & b_q
\end{array}$$

$A = \{a_i, .., a_p\}$ ve $B = \{b_1, .., b_i\}$ alalım ve bunlara karşılık gelen Garnir elemanını gözönünde bulunduralım.

$$G_{A,B} = \sum_{\pi} sgn(\pi)\pi$$

Önerme 3.6.3. den $G_{A,B}e_t = 0$ dır. Böylece,

$$e_t = -\sum_{\pi \neq (1)} sgn(\pi)\pi e_t = -\sum_{\pi \neq (1)} sgn(\pi)e_{\pi t}$$

olur. Şimdi $\pi \neq (1)$ ve π ler $S_A x S_B$ nin $S_{A \cup B}$ içindeki koset temsilcileri olduğundan $\pi \notin S_A x S_B$ dir. Bu yüzden π nin $\pi = \pi_1 \ldots \pi_r$ transpozisyonların çarpımı olarak yazılışında mutlaka enaz bir $\pi_k = (a_k b_\ell)$ $(i \leq k \leq p, 1 \leq \ell \leq i)$ formunda olmalıdır.

$b_1 < \ldots < b_i < a_i \ldots < a_p$ olduğundan $[(a_k b_\ell)t] > [t]$ dir. Gerçekten $i = a_k$ seçersek $j > i$ iken j ler $[(a_k b_\ell)t]$ ve $[t]$ nin aynı sütunlarına aittirler ve $i = a_k$ $[t]$ de $[(a_k b_\ell)t]$ den daha soldaki sütuna aittir.

Fakat $\pi = \pi_1 \ldots \pi_r$ yazılışındaki bazı transpozisyonlar S_A veya S_B nin elemanı olabilirler bu durumda örneğin π_m böyle bir transpozisyon ise $[\pi_m t] = [t]$ olacağından bir sıkıntımız olmaz. Böylece,

$$\begin{aligned}
&[\pi_r t] \geq [t] \\
&[\pi_{r-1}\pi_r t] \geq [\pi_{r-1} t] \geq [t] \\
&\quad \vdots \\
&[\pi_k \pi_{k+1} \ldots \pi_r t] \geq \ldots \geq [\pi_k t] > [t] \\
&\quad \vdots \\
&[\pi_1 \ldots \pi_r t] > [t] \\
&[\pi t > [t]
\end{aligned}$$

olur. Başlangıçdaki tümevarım hipotezinden dolayı $e_{\pi t}$ standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$e_t = -\sum_{\pi \neq (1)} \mathrm{sgn}(\pi) e_{\pi t}$$

olduğundan e_t de standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonudur. t standart değilken e_t yi standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazdık. O halde S^{λ} daki herhangi bir eleman standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Dolayısıyla $\{e_t | t \text{ standart bir } \lambda - \text{tablo}\}$ kümesi S^{λ} yı gerer.

Örnek 3.6.10. n=4 için S_4 simetrik grubunu gözönüne alalım. S_4 ün eşlenik sınıfları:

$$C_1 = \{(1)\},\ C_2 = \{2'\text{li devirler}\}, C_3 = \{3'\text{lü devirler}\}$$

$$C_4 = \{4'\text{lü devirler}\} \text{ ve } C_5 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

dür. F, karakteri sıfır olan keyfi bir cisim olsun. $i = 1,2,3,4,5$ için M^{λ_i} $F[S_4]$-modül olduğundan karakteri χ_i olan T_i matris representasyonları vardır.

$T_i^{(1)}$ i=1,2,3,4,5 için $\chi_i^{(1)}$ karakteriyle S^{λ_i} Specht modülüne karşılık gelen matris representasyonu olsun.

(i) $\lambda_1 = (4)$ ise $\mathrm{Boy}_F^{M^{\lambda_1}} = \frac{4!}{4!} = 1$ dir.

Böylece $M^{\lambda_1} = \mathrm{Sp}\{\{1234\}\}$ ve $S^{\lambda_1} \cong M^{\lambda_1}$ dir.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_1^{(1)}$	1	1	1	1	1

(ii) $\lambda_2 = (3,1)$ ise $\mathrm{Boy}_F^{M^{\lambda_2}} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ dir. Böylece

$$M^{\lambda_2} = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{Bmatrix} 123 \\ 4 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 134 \\ 2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 124 \\ 3 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 234 \\ 1 \end{Bmatrix} \right\}$$

$$S^{\lambda_2} = Sp\left\{ e_{\substack{123\\4}},\quad e_{\substack{134\\2}},\quad e_{\substack{124\\3}} \right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_2^{(1)}$	3	1	0	-1	-1

(iii) $\lambda_3 = (2,2)$ ise $Boy_F^{M^{\lambda_3}} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ dır. Böylece

$$M^{\lambda_3} = Sp\left\{ \begin{Bmatrix}12\\34\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}34\\12\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}13\\24\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}24\\13\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}14\\23\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}23\\14\end{Bmatrix} \right\}$$

$$S^{\lambda_3} = Sp\left\{ e_{\substack{12\\34}} \quad , \quad e_{\substack{13\\24}} \right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_3^{(1)}$	2	0	-1	0	2

(iv) $\lambda_4 = (2,1^2)$ ise $Boy_F^{M^{\lambda_4}} = \dfrac{4!}{2!1!1!} = 12$ dir. Böylece

$$M^{\lambda_4} = Sp\left\{ \begin{Bmatrix}12\\3\\4\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}12\\4\\3\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}13\\2\\4\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}13\\4\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}14\\2\\3\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}14\\3\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}23\\1\\4\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}23\\4\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}24\\1\\3\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}24\\3\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}34\\1\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}34\\2\\1\end{Bmatrix} \right\}$$

$$S^{\lambda_4} = Sp\left\{ e_{\substack{12\\3\\4}},\quad e_{\substack{13\\2\\4}},\quad e_{\substack{14\\2\\3}} \right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_4^{(1)}$	3	-1	0	1	-1

(V) $\lambda_5 = (1^4)$ ise $Boy_F^{M^{\lambda_5}} = \dfrac{4!}{1!1!1!1!} = 24$ dür. Böylece

$$M^{\lambda 5} = Sp\left\{ \begin{Bmatrix}1\\2\\3\\4\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}1\\2\\4\\3\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}1\\3\\2\\4\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}1\\3\\4\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}1\\4\\2\\3\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}1\\4\\3\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}2\\1\\3\\4\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}2\\1\\4\\3\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}2\\3\\1\\4\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}2\\3\\4\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}2\\4\\1\\3\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}2\\4\\3\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}3\\1\\2\\4\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}3\\1\\4\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}3\\2\\1\\4\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}3\\2\\4\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}3\\4\\1\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}3\\4\\2\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}4\\1\\2\\3\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}4\\1\\3\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}4\\2\\1\\3\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}4\\2\\3\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}4\\3\\1\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}4\\3\\2\\1\end{Bmatrix} \right\}$$

$$S^{\lambda_5} = Sp\left\{ e_{\substack{1\\2\\3\\4}} \right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_5^{(1)}$	1	−1	1	−1	1

4. HYPEROCTAHEDRAL GRUPLARIN REPRESENTASYONLARI

Bu bölümde O_n hyperoctahedral grubunun tüm indirgenemez $F[O_n]$-modüllerini ve O_n nin bilinen tüm indirgenemez representasyonlarını belirleyeceğiz ve bu $F[O_n]$-modüller için bir standart baz vereceğiz.

4.1. Diyagram, Tablo ve Tabloidler

Tanım 4.1.1. O_n hyperoctahedral grubu, $\{\mp 1, \mp 2, \ldots, \mp n\}$ kümesinin bütün σ permütasyonlarının grubudur öyleki,

$$i = 1,2,\ldots,n \text{ için } \sigma(-i) = -\sigma(i)$$

dir. O_n nin mertebesi $2^n n!$ dir.

Bu tanıma denk olarak O_n hyperoctahedral grubu aşağıdaki gösterime sahiptir.

$$r_i = (i, i+1)(-i, -(i+1)) \text{ ve } w_j = (j, -j)$$

olmak üzere,

$$O_n =< r_i \ (i = 1,2,\ldots,n-1),\ w_j \ (j = 1,\ldots,n) \mid (|j-i| \geq 2) \text{ iken}$$

$$r_i^2 = (r_i, r_{i+1})^3 = (r_i r_j)^2 = e,\ (i \neq j) \text{ iken}$$

$$w_j^2 = e,\ w_i w_j = w_j w_i$$

$$\text{ve } (j \neq i, i+1) \text{ iken } r_i w_i = w_{i+1} r_i, r_i w_j = w_j r_i >$$

Örnek 4.1.2. $n = 2$ için,

$$O_2 = < r_1, w_1, w_2 > = < (1,2)(-1,-2), (1,-1), (2,-2) >$$

$$= \{(1), (1,2)(-1,-2), (1,-1), (2,-2), (2,1,-2,-1), (1,2,-1,-2), (1,-1)(2,-2), (1,-2)(-1,2)\}$$

dir.

Tanım 4.1.3. Bir pozitif ℓ - devir O_n nin

$$\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_\ell)(-a_1, -a_2, \ldots, -a_\ell)$$

şeklindeki bir elemanıdır.

Bir negatif ℓ -devir O_n nin

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\ell, -a_1, -a_2, \ldots, -a_\ell) = (a_1, -a_1)\sigma$$

şeklindeki bir elemanıdır.

O_n nin her elemanı ayrık pozitif ve negatif devirlerin bir çarpımı olarak bir tek şekilde yazılabilir.

O_n nin bir elemanı pozitif α_i i-devirlerine ve negatif β_i i-devirlerine sahip ise bu durumda o elemanın devir tipi,

$$T = ((\alpha_i); (\beta_i))$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1.4. O_7 de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -5 & 6 & -4 & -3 & 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ elemanını gözönüne alalım.

$\sigma(-1) = -\sigma(1) = 5$, $\sigma(-2) = -\sigma(2) = -6$, $\sigma(-3) = -\sigma(3) = 4$, $\sigma(-4) = -\sigma(4) = 3$,

$\sigma(-5) = -\sigma(5) = -7$, $\sigma(-6) = -\sigma(6) = 1$, $\sigma(-7) = -\sigma(7) = -2$ olup,

$$\sigma = (1,-5,-7,-2,-6)\,(-1,5,7,2,6)\,(3,-4)(-3,4)$$

dür.

Görüldüğü gibi σ ayrık pozitif devirlerin bir çarpımıdır ve σ nın devir tipi, $T = (5,2;0)$ dır.

Lemma 4.1.5. O_n nin iki elemanı eşleniktir ancak ve ancak aynı devir tipine sahip iseler.

İspat: [4]

Bir pozitif ℓ - devirin mertebesi ℓ ve bir negatif ℓ - devirin mertebesi 2ℓ dir.

Bir pozitif transpozisyon (a,b)(-a,-b) şeklindedir. Böyle transpozisyonlar O_n nin S_n e izomorfik olan bir altgrubunu üretirler.

Bir negatif transpozisyon (a,-a) şeklindedir. Bunlar O_n nin $C_2xC_2x\ldots xC_2$ (n-çarpan) ye izomorfik olan bir normal altgrubunu üretirler.

Örneğin,

$$O_2 = <(1,2)(-1,-2),(1,-1),(2,-2)>$$

grubunda pozitif transpozisyonlar,

$$(1,2)(-1,-2),\ (1,-2)(-1,2)$$

ve negatif transpozisyonlar,

$$(1,-1),(2,-2)$$

dir. Böylece

$$<(1,2)(-1,-2)> = \{(1),(1,2)(-1,-2)\} \cong S_2$$

$$<(1,-2)(-1,2)>=\{(1),(1,-2)(-1,2)\}\cong S_2$$

$$<(1,-1),(2,-2)>=\{(1),(1,-1),(2,-2),(1,-1)(2,-2)\}\cong C_2xC_2$$

olur.

Eğer $\sigma \in O_n$ ise bu durumda $j = 1,\ldots,k$ için $\sigma_i(j) \in \{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, w_1, \ldots w_n\}$

olmak üzere, σ yı $\sigma = \sigma_{i(1)}\sigma_{i(2)}\ldots\sigma_{i(k)}$ şeklinde yazabiliriz.

σ nın işatreti, $\ell(\sigma)$, σ nın ifadesindeki k nın en küçük değeri olmak üzere,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin,

O_4 de $\sigma = (1,2,3,4)(-1,-2,-3,-4)$, $\tau = (3,-4)(-3,4)$ elemanlarını gözönüne alalım.

$\sigma = (1,2,3,4)(-1,-2,-3,-4) = (1,2)(-1,-2)(2,3)(-2,-3)(34)(-3,-4) = r_1r_2r_3$

$$\tau = (3,-4)(-3,4) = (3,-3)(4,-4)(3,4)(-3,-4) = w_3w_4r_3$$

olup, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^3 = -1$ ve $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^3 = -1$ dir.

O_n grubu, karakteristiği 2 den farklı olan herhangi bir cisim üzerinde derecesi bir olan dört tane matris representasyonuna sahiptir. Bunlar,

$$T_1 : O_n \to GL(1,F)$$
$$\sigma \to T_1(\sigma) = (1)$$

$$T_2 : O_n \to GL(1,F)$$
$$\sigma \to T_2(\sigma) = (\operatorname{sgn}(\sigma))$$

$$T_3 : O_n \to GL(1,F)$$

$$\sigma_i \to T_3(\sigma_i) = \begin{cases} (1), \sigma_i \text{ pozitif transpozisyon ise} \\ (-1), \sigma_i \text{ negatif transpozisyon ise} \end{cases}$$

$$\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_r \to T_3(\sigma) = T_3(\sigma_1) \ldots T_3(\sigma_r)$$

$$T_4 : O_n \to GL(1,F)$$

$$\sigma \to T_4(\sigma) = T_2(\sigma) T_3(\sigma)$$

dır.

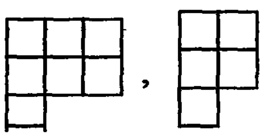
Tanım 4.1.6. $|\lambda| + |\mu| = n$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ $|\lambda|$ nın bir parçalanması ve $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ $|\mu|$ nün bir parçalanması olmak üzere, (λ, μ) çiftine n nin bir parçalanma çifti denir.

Not: $|\lambda|$ veya $|\mu|$ sıfır olabilir. O_n nin eşlenik sınıfları ile $|\lambda| + |\mu| = n$ olmak üzere n nin (λ, μ) parçalanma çiftleri arasında birebir eşleme vardır. Bundan dolayı O_n nin bilinen indirgenemez representasyonlarının sayısı, n nin (λ, μ) parçalanma çiftlerinin sayısına eşittir.

Tanım 4.1.7. (λ, μ) n nin bir parçalanma çifti olsun. $[\lambda]$, λ nın bir Young diyagramı ve $[\mu]$ de μ nün bir Young diyagramı olmak üzere, (λ, μ) nün ikiliYoung diyagramı $([\lambda], [\mu])$ şeklinde tanımlanır.

Eğer $|\lambda|$ (veya $|\mu|$) sıfır ise bu durumda $[\lambda]$ (veya $[\mu]$) $\varnothing$ olarak alınır.

Örnek 4.1.8. $(\lambda, \mu) = (3^2 1, 2^2 1)$ olsun. Bu durumda (λ, μ) nün ikili Young diyagramı aşağıdaki gibidir .

$([\lambda],[\mu]) = \Big($  $\Big)$

Tanım 4.1.9. (λ,μ) n nin bir parçalanma çifti olsun. Bir t (λ,μ)-tablosu, $([\lambda],[\mu])$ deki her bir kutucuğa i ve -i (i=1,2,...,n) aynı anda gözükmeyecek şekilde $\mp 1, \mp 2, \ldots, \mp n$ tamsayılarının keyfi sırayla yerleştirilmesiyle elde edilen düzenlemedir.

Bir t (λ,μ)-tablosu bazan (t_λ, t_μ) olarak yazılır. Açıkça (λ,μ) nün herhangi bir ikili Young diyagramı için $2^n n!$ -tane (λ,μ)-tablo vardır.

$t_\lambda(i,j)$ ve $t_\mu(i,j)$ sırasıyla t_λ ve t_μ nün (i,j). inci bileşenleri olmak üzere,

$$t(i,j,k) = \begin{cases} t_\lambda(i,j) \ , & k=1 \text{ ise} \\ t_\mu(i,j) \ , & k=2 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Örneğin; $(\lambda,\mu) = (21,2^2)$ 7 nin bir parçalanma çifti olmak üzere,

$$t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & , & -5 & 6 \\ 7 & & & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$(21,2^2)$-tablosu için $t(1,1,1)=2$, $t(1,2,1)=-1$, $t(2,1,1)=7$, $t(1,1,2)=-5$, $t(1,2,2)=6$, $t(2,1,2)=3$ ve $t(2,2,2)=-4$ dür.

Bir $\sigma \in O_n$ elemanının bir $t(\lambda,\mu)$-tablosu üzerindeki etkisi aşağıdaki gibidir.

$$\sigma t = (\sigma t(i,j,k)) = (\sigma t_\lambda(i,j), \sigma t_\mu(i,j))$$

Örneğin, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -5 & 6 & -4 & -3 & 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in O_7$ ve $t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & , & -5 & 6 \\ 7 & & & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$(21,2^2)$-tablosu için,

$$\sigma \begin{pmatrix} 2 & -1 & , & -5 & 6 \\ 7 & & & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & , & -7 & -1 \\ 2 & & & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 4.1.10. t bir (λ,μ)-tablo olsun. t nin bir satır permütasyonu O_n nin bir σ elemanıdır öyle ki; σ t nin her bir satırındaki bileşenlerin yerlerini değiştirir ve t_μ deki bileşenlerin işaretlerini değiştirebilir.

t nin bir sütun permütasyonu, t nin herbir sütunundaki bileşenlerin yerlerini değiştirir ve t_λ daki bileşenlerin işaretlerini değiştirebilir.

Şimdi t nin satır ve sütun gruplarını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

t nin satır permütasyonlarının grubu R_t ile gösterilir. Yani

$$R_t = \left\{\sigma \in O_n \;\middle|\; \sigma \text{ t nin bir satır permütasyonudur} \right\}$$

Böylece R_t, O_n nin $S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \ldots \times S_{\lambda_r} \times O_{\mu_1} \times O_{\mu_2} \times \ldots \times O_{\mu_s}$ ' e izomorfik olan bir altgrubudur.

t nin sütun permütasyonlarının grubu C_t ile gösterilir. Yani

$$C_t = \left\{\sigma \in O_n \;\middle|\; \sigma \text{ t nin bir sütun permütasyonudur} \right\}$$

Böylece $(\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots,\lambda'_r)$, $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ nin ve $(\mu'_1,\mu'_2,\ldots,\mu'_s)$ de $(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s)$ in eşlenik parçalanmaları olmak üzere C_t, O_n nin

$$O_{\lambda'_1} \times O_{\lambda'_2} \times \ldots \times O_{\lambda'_r} \times S_{\mu'_1} \times S_{\mu'_2} \times \ldots \times S_{\mu'_s}$$

grubuna izomorfik olan bir altgrubudur.

Örnek 4.1.11. $t = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 & 7 \\ 3 & , & 2 & 6 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$R_t = S_{\{-1,4\}} \times S_{\{3\}} \times O_{\{\mp 5,\mp 7\}} \times O_{\{\mp 2,\mp 6\}}$$

$$\cong S_2 \times S_1 \times O_2 \times O_2$$

ve

$$C_t = O_{\{\mp 1,\mp 3\}} \times O_{\{\mp 4\}} \times S_{\{-5,2\}} \times S_{\{7,6\}}$$

$$\cong O_2 \times O_1 \times S_2 \times S_2$$

dir.

Şimdi (λ,μ) - tabloların kümesi üzerinde bir $\approx$ denklik bağıntısı tanımlıyalım.

Tanım 4.1.12. t_1 ve t_2 (λ,μ) - tablo olsunlar.

$t_1 \approx t_2 \Leftrightarrow t_2 = \sigma t_1$ olacak şekilde bir $\sigma \in R_{t_1}$ varsa.

Bu denklik bağıntısına göre t nin denklik sınıfi olan $\{t\}$ ye bir (λ,μ) - tabloid denir. Biz burada $\{t\}$ yi t nin satırları arasına çizgi çekerek göstereceğiz.

Örnek 4.1.13. $(0,2^2)$ 4 ün bir parçalanma çifti olsun.Bu durumda bütün $(0,2^2)$ tabloidler aşağıdaki gibidir.

$$\left(\overline{\varnothing},\frac{\overline{12}}{34}\right),\left(\overline{\varnothing},\frac{\overline{13}}{24}\right),\left(\overline{\varnothing},\frac{\overline{23}}{14}\right),\left(\overline{\varnothing},\frac{\overline{14}}{23}\right),\left(\overline{\varnothing},\frac{\overline{24}}{13}\right),\left(\overline{\varnothing},\frac{\overline{34}}{12}\right)$$

dir.

$(\lambda_1,\ldots,\lambda_r,\mu_1,\ldots,\mu_s)$ n nin bir parçalanma çifti olsun. Bu durumda (λ,μ)-tabloidlerin sayısı.

$$2^{|\lambda|}\frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_r!\mu_1!\ldots\mu_s!}$$

dir. Ayrıca $\{t\} = \left\{t' \mid \text{bir } \sigma \in R_t \text{ için } t' = \sigma t\right\}$ olduğundan verilen herhangi bir denklik sınıfindaki (λ,μ) - tabloların sayısı,

$$|R_t| = \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i!\right)\left(\prod_{i=1}^{s} 2^{\mu_i}\mu_i!\right)$$

olacaktır.

O_n nin (λ,μ)-tabloidler üzerindeki etkisi $\forall\sigma \in O_n$ için,

$$\sigma\{t\} = \{\sigma t\}$$

şeklinde tanımlanır. Kolayca görülebilirki bu etki iyi tanımlıdır.

Tanım 4.1.14. F keyfi bir cisim ve (λ,μ) n nin bir parçalanma çifti olsun. $M^{\lambda,\mu}$, baz elemanları farklı (λ,μ)- tabloidler olan, F üzerindeki bir vektör uzayı olarak tanımlanır.

O_n nin (λ,μ) - tabloidler üzerindeki etkisi, $F[O_n]$ için lineer olarak genişletilirse $M^{\lambda,\mu}$ bir $F[O_n]$-modül yapılabilir.

Eğer $0 \neq \alpha_i \in F$ olmak üzere, $v = \sum_i \alpha_i\{t_i\} \in M^{\lambda,\mu}$ ise bu durumda $\{t_i\}$ v de gözükür denir.

Teorem 4.1.15. $M^{\lambda,\mu}$, $S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \ldots \times S_{\lambda_r} \times O_{\mu_1} \times O_{\mu_2} \times \ldots \times O_{\mu_s}$ altgrubu üzerinde O_n nin bir permütasyon modülüdür. $M^{\lambda,\mu}$ herhangi bir (λ,μ)- tabloid tarafından üretilen devirli bir $F[O_n]$-modüldür ve

$$\dim M^{\lambda,\mu} = 2^{|\lambda|}\frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_r!\,\mu_1!\ldots\mu_s!}$$

dir.

İspat: Teoremin ispatı üçüncü bölümdeki Teorem 3.1.14 dekine benzer yöntemle kolayca yapılabilir.

4.2. Parçalanmalar İçin Kısmi Sıralamalar

Bu kısımda n nin parçalanma çiftleri üzerinde bir kısmi sıralama tanımlayacağız.

Tanım 4.2.1. (λ,μ) ve (λ',μ') n nin parçalanma çiftleri olsunlar. Eğer

$$|\lambda|>|\lambda'| \text{ veya } |\lambda|=|\lambda'|\ ,\ |\mu|=|\mu'|,\ \lambda\trianglerighteq\lambda' \text{ ve } \mu\trianglerighteq\mu'$$

oluyorsa (λ,μ) büyüktür (λ',μ') dür denir ve $(\lambda,\mu)\trianglerighteq(\lambda',\mu')$ ile gösterilir.

Örnek 4.2.2. $(1^3,1),(2,2),(2,1^2)$ ve $(1^2,2)$ 4 ün parçalanma çiftleri olsunlar.

$(1^3,1)\trianglerighteq(2,2)$ dir. Çünkü, $|\lambda|=1+1+1=3, |\lambda'|=2$ olup $|\lambda|>|\lambda'|$ dür.

$(2,1^2)$ ile $(1^2,2)$ karşılaştırılamaz. Gerçekten, $|\lambda|=2$, $|\lambda'|=2$ olup $|\lambda|=|\lambda'|$ dür. Fakat $|\mu|=|\mu'|=2$ ve $\lambda\trianglerighteq\lambda'$ olmasına rağmen $\mu\not\trianglerighteq\mu'$ yada $|\mu|=|\mu'|=2$ ve $\mu'\trianglerighteq\mu$ olmasına rağmen $\lambda'\not\trianglerighteq\lambda$ dır.

Böylece 4 ün bütün parçalanma çiftlerini gözönünde bulundurduğumuzda aşağıdaki dallanmayı elde ederiz.

$$\begin{array}{c}
(4,0)\\ \uparrow \\ (31,0)\\ \uparrow \\ (2^2,0)\\ \uparrow \\ (21^2,0)\\ \uparrow \\ (1^4,0)\\ \uparrow \\ (3,1)\\ \uparrow \\ (21,1)\\ \uparrow \\ (1^3,1)
\end{array}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & {} & \\
 & (2,2) \arrow[u] & \\
(2,1^2) \arrow[ur] & & (1^2,2) \arrow[ul] \\
 & (1^2,1^2) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & (1,3) \arrow[u] & \\
 & (1,21) \arrow[u] & \\
 & (1,1^3) \arrow[u] & \\
 & (0,4) \arrow[u] & \\
 & (0,31) \arrow[u] & \\
 & (0,2^2) \arrow[u] & \\
 & (0,21^2) \arrow[u] & \\
 & (0,1^4) \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Lemma 4.2.3. (Temel Kombinatoriyel Lemma) (λ,μ) ve (λ',μ') n nin parçalanma çiftleri olmak üzere, t bir (λ,μ) - tablo ve t' de bir (λ',μ') - tablo olsun. Öyleki; her a için $a\,t_\lambda$ da gözükür ise $\mp a$ da $t'_{\lambda'}$ de gözüksün. $c=\mp a$, $d=\mp b$ ve $\gamma=\lambda$ (veya μ) olmak üzere kabul edelimki a,b $t'_{\gamma'}$ nün aynı satırına ait ise c,d t_γ nın farklı sütunlarına ait olsun.

Bu durumda $(\lambda,\mu)\trianglerighteq(\lambda',\mu')$ dür.

İspat: t_λ da gözüken her a sayısı $t'_{\lambda'}$ de $\mp a$ olarak gözüktüğünden ve $t'_{\lambda'}$ nün aynı satırına ait olan herhangi a,b sayıları için c,d t_λ nın farklı sütunlarına ait olduğundan $|\lambda|=|\lambda'|$ dür. Buradan, $|\lambda|+|\mu|=n$ ve $|\lambda'|+|\mu'|=n$ olduğundan $|\mu|=|\mu'|$ dür.

Kabülümüzden ve Lemma 3.2.3. den $\gamma=\lambda$ ise $\lambda \trianglerighteq \lambda'$ $\gamma=\mu$ ise $\mu \trianglerighteq \mu'$ dür. Böylece Tanım 4.2.1 gereğince $(\lambda,\mu) \trianglerighteq (\lambda',\mu')$ dür.

Sonuç 4.2.4. $|\lambda|=|\lambda'|$ ve $(\lambda,\mu) \ntrianglerighteq (\lambda',\mu')$ olmak üzere t bir (λ,μ)-tablo ve t' de bir (λ',μ')-tablo olsun. Öyleki; her a için a t_λ da gözükür ise $\mp$a da $t'_{\lambda'}$ de gözüksün. Bu durumda c=$\mp$a, d=$\mp$b ve $\gamma=\lambda$ (veya μ) olmak üzere, c,d t_γ nın aynı sütununa ait olacak şekilde $t'_{\gamma'}$ nün aynı satırına ait olan en az iki a,b sayıları mevcuttur.

4.3. Specht Modüller

Bu kısımda O_n nin tüm indirgenemez modüllerini inşa edeceğiz ve bunları Specht modüller olarak adlandıracağız.

Tanım 4.3.1. t bir (λ,μ)-tablo olsun. $K_t \in F[O_n]$ elemanı

$$K_t = \sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$$

şeklinde tanımlanır.

$$e_t = K_t\{t\}$$

ye bir (λ,μ)-polytabloid adı verilir.

Örnek 4.3.2. (λ,μ)=(21,2) 5 in bir parçalanma çifti ve $t=\begin{pmatrix} 1-4 & & -25 \\ 3 & , & \end{pmatrix}$

olsun. Bu durumda

$$K_t = \sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma = (1)-(1,-1)-(3,-3)-(4,-4)+(1,-1)(3,-3)-(1,3)(-1,-3)+(1,3)(-1,-3)(1,-1)$$

$$+(1,3)(-1,-3)(3,-3)-(1,3)(-1,-3)(1,-1)(3,-3)+(1,-1)(4,-4)+(3,-3)(4,-4)-(1,-1)(3,-3)(4,-4)$$

+(1,3)(-1,-3)(4,-4)-(1,3)(-1,-3)(3,-3)(4,-4)-(1,3)(-1,-3)(1,-1)(4,-4)

+(1,3)(-1,-3)(1,-1)(3,-3)(4,-4)

$$e_t=\begin{pmatrix}\overline{1\;-4} & , & \overline{-25}\\ \overline{3} & & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{-1\;-4} & , & \overline{-25}\\ \overline{3} & & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{1\;-4} & , & \overline{-25}\\ \overline{-3} & & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{14} & , & \overline{-25}\\ \overline{3} & & \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\overline{-1\;-4} & , & \overline{-25}\\ \overline{-3} & & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{3-4} & , & \overline{-25}\\ \overline{1} & & \end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\overline{-3-4} & , & \overline{-25}\\ \overline{1} & & \end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\overline{3\;-4} & , & \overline{-25}\\ \overline{-1} & & \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}\overline{-3-4} & , & \overline{-25}\\ \overline{-1} & & \end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\overline{-14} & , & \overline{-25}\\ \overline{3} & & \end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\overline{14} & , & \overline{-25}\\ \overline{-3} & & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{-1\;4} & , & \overline{-25}\\ \overline{-3} & & \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\overline{34} & , & \overline{-25}\\ \overline{1} & & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{3\;4} & , & \overline{-25}\\ \overline{-1} & & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{-3\;4} & , & \overline{-25}\\ \overline{1} & & \end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\overline{-34} & , & \overline{-25}\\ \overline{-1} & & \end{pmatrix}$$

olur.

Lemma 4.3.3. t bir (λ,μ)-tablo ve $\sigma\in O_n$ olsun. Bu durumda

(i) $R_{\sigma t}=\sigma R_t\sigma^{-1}$

(ii) $C_{\sigma t}=\sigma C_t\sigma^{-1}$

(iii) $K_{\sigma t}=\sigma K_t\sigma^{-1}$

(iv) $e_{\sigma t}=\sigma e_t$

(v) Eğer $\sigma\in C_t$ ise bu durumda $\sigma e_t=\mathrm{sgn}(\sigma)e_t$ dir.

İspat: **(i)** $x\in R_{\sigma t}$ olsun. Bu durumda $x,\sigma t$ nin bir satır permütasyonudur.

$\Rightarrow$ Her i,j için,

$$\begin{cases}\text{i ile } x(i)\ \sigma t_\lambda \text{ nın aynı satırına aittir.}\\ \text{j ile } x(j)\ \sigma t_\mu \text{ nün aynı satırına ait ve } x(j)=-j \text{ olabilir.}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma^{-1}(i) \text{ ile } \sigma^{-1}x(i)\ t_\lambda \text{ nın aynı satırına aittir.}\\ \sigma^{-1}(j) \text{ ile } \sigma^{-1}x(j)\ t_\mu \text{ nün aynı satırına ait ve } \sigma^{-1}x(j)=\sigma^{-1}(-j)=-\sigma^{-1}(j) \text{ olabilir.}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma^{-1}(i) \text{ ile } \sigma^{-1}x\sigma(\sigma^{-1}(i)) \ t_\lambda \text{ nın aynı satırına aittir.} \\ \sigma^{-1}(j) \text{ ile } \sigma^{-1}x\sigma(\sigma^{-1}(j)) \ t_\mu \text{ nün aynı satırına ait ve } \sigma^{-1}x\sigma(\sigma^{-1}(j)) = -\sigma^{-1}(j) \text{ olabilir.} \end{cases}$$

$$\sigma^{-1}(i) = k,\ \sigma^{-1}(j) = p \text{ dersek.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k \text{ ile } \sigma^{-1}x\sigma(k) \ t_\lambda \text{ nın aynı satırına aittir.} \\ p \text{ ile } \sigma^{-1}x\sigma(p) \ t_\mu \text{ nün aynı satırına ait ve } \sigma^{-1}x\sigma(p) = -p \text{ olabilir.} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sigma^{-1}x\sigma$ t nin bir satır permütasyonudur.

$\Rightarrow \sigma^{-1}x\sigma \in R_t$

$\Rightarrow x \in \sigma R_t \sigma^{-1}$

$$\Rightarrow R_{\sigma t} \subset \sigma R_t \sigma^{-1} \qquad (1)$$

Şimdi $y \in \sigma R_t \sigma^{-1}$ olsun.

$\Rightarrow \sigma^{-1}y\sigma \in R_t$

$\Rightarrow \sigma^{-1}y\sigma$ t nin bir satır permütasyonudur.

$\Rightarrow$ Her i,j için

$$\begin{cases} i \text{ ile } \sigma^{-1}y\sigma(i) \ t_\lambda \text{ nın aynı satırına aittir.} \\ j \text{ ile } \sigma^{-1}y\sigma(j) \ t_\mu \text{ nün aynı satırına ait ve } \sigma^{-1}y\sigma(j) = -j \text{ olabilir.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma(i) \text{ ile } y\sigma(i) \ \sigma t_\lambda \text{ nın aynı satırına aittir.} \\ \sigma(j) \text{ ile } y\sigma(j) \ \sigma t_\mu \text{ nün aynı satırına ait ve } y\sigma(j) = \sigma(-j) = -\sigma(j) \text{ olabilir.} \end{cases}$$

$$\sigma(i) = k \text{ ve } \sigma(j) = p$$

dersek

$$\Rightarrow \begin{cases} k \text{ ile } y(k)\ \sigma t_{\lambda} \text{ nın aynı satırına aittir.} \\ p \text{ ile } y(p)\ \sigma t_{\mu} \text{ nün aynı satırına ait ve } y(p)=-p \text{ olabilir.} \end{cases}$$

$\Rightarrow y, \sigma t$ nın bir satır permütasyonudur.

$\Rightarrow y \in R_{\sigma t}$

$$\Rightarrow \sigma R_t \sigma^{-1} \subset R_{\sigma t} \qquad (2)$$

Böylece (1) ve (2) den $R_{\sigma t} = \sigma R_t \sigma^{-1}$ dir.

Aynı düşünceyle (ii),(iii),(iv) ve (v) in ispatlarıda kolayca yapılabilir.

Tanım 4.3.4 (λ,μ) n nin bir parçalanma çifti olsun. $M^{\lambda,\mu}$ nün (λ,μ) - polytabloidler tarafindan gerilen altmodülüne Specht modül adı verilir ve bu modül $S^{\lambda,\mu}$ ile gösterilir.

Teorem 4.3.5 $S^{\lambda,\mu}$ herhangi bir polytabloid tarafindan üretilen devirli bir $F[O_n]$-modüldür.

İspat: $S^{\lambda,\mu} = Sp\{e_{\sigma t} : \sigma \in O_n\}$ olmak üzere $s \in S^{\lambda,\mu}$ olsun. Bu durumda $\lambda_\sigma \in F$ olmak üzere

$$s = \sum_{\sigma \in O_n} \lambda_\sigma e_{\sigma t}$$

dir. Lemma 4.3.3 (iv) den $e_{\sigma t} = \sigma e_t$ olup,

$$s = \sum_{\sigma \in O_n} \lambda_\sigma \sigma e_t$$

dır. $\sum_{\sigma \in O_n} \lambda_\sigma \sigma \in F[O_n]$ olduğundan.

$$s \in < e_t >$$

$$\Rightarrow S^{\lambda,\mu} \subseteq < e_t >$$

dir. Açık olarak $< e_t > \subseteq S^{\lambda,\mu}$ olduğundan $S^{\lambda,\mu} = < e_t >$ dir.

Lemma 4.3.6. t ve t' (λ,μ)-tablolar olsunlar. Bu durumda aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

(i) $\{t'\}$, e_t de gözükür.

(ii) $\rho t' = \pi t$ olacak şekilde $\rho \in R_{t'}, \pi \in C_t$ mevcutdur.

(iii) $c = \mp a$, $d = \mp b$ ve $\gamma = \lambda(\text{veya } \mu)$ olmak üzere herhangi a,b nin t'_γ nın aynı satırına ait olması c,d nin t_γ nın farklı sütunlarına ait olmasını gerektirir.

İspat: $\{t'\}$ e_t de gözükür $\Leftrightarrow$ bir $\pi \in C_t$ için $\{t'\} = \pi\{t\}$

$$\Leftrightarrow \{t'\} = \{\pi t\}$$

$$\Leftrightarrow \text{bir } \rho \in R_{t'} \text{ için } \rho t' = \pi t$$

Dolayısıyla (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ispatlanmış olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\rho \in R_{t'}, \pi \in C_t$ için $\rho t' = \pi t$ olsun. Kabul edelimki a,b t'_γ nın aynı satırına ait olsun. $\rho \in R_{t'}$ olduğundan a,b $\rho t'_\gamma$ nında aynı satırına aittir. Fakat γ nın durumuna göre örneğin $\gamma = \mu$ olması durumunda $R_{t'}$ tanımından a,b nin işaretleri değişebilir. Bundan dolayı diyebilirizki $\gamma = \lambda$ veya μ iken $c = \mp a$, $d = \mp b$ $\rho t'_\gamma$ nın aynı satırına aittir. $\rho t' = \pi t$ olduğundan c,d πt_γ nın aynı satırına aittir. Dolayısıyla c,d πt_γ nın farklı sütunlarına aittir. Fakat $\pi \in C_t$ olduğundan c,d aynı zamanda t_γ nında farklı sütunlarına aittir. Bu ise istenilendir.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): $\gamma = \lambda$ olsun.

(1^0) a,b t'_λ nın sırasıyla r. satır, i. sütun ve r.satır, j.sütununa ait iken -a,-b t_λ nın sırayla i' ve j'. sütununa ait olsun. Hipotezden -a ile -b t_λ da aynı sütuna ait olamazlar.

t_λ nın r.satır, i'. sütunundaki bir x ve r. satır j'. sütunundaki bir y sayısı için

$$\pi = (a,-a)(x,-a)(-x,a)(b,-b)(y,-b)(-y,b) \in C_t$$

t'_λ nın r.satır, i'. sütunundaki bir k ve r.satır, j'. sütunundaki bir ℓ sayısı için

$$\rho = (a,k)(-a,-k)(b,\ell)(-b,-\ell) \in R_{t'}$$

olarak alırsak a, b, r, i, j, i' ve j' keyfi olduğundan $\rho t' = \pi t$ dir.

(2^0) a,b nin t'_λ daki ve -a,b nin t_λ daki yerleri yine (1^0) deki gibi olsun. Bu durumda

$$\pi = (a,-a)(x,-a)(-x,a)(y,b)(-y,-b) \in C_t \text{ ve } \rho = (a,k)(-a,-k)(b,\ell)(-b,-\ell) \in R_{t'}$$

için $\rho t' = \pi t$ dir.

(3^0) a,b nin t'_λ daki ve a,-b nin t_λ daki yerleri (1^0) deki gibi olsun. Bu durumda

$$\pi = (a,x)(-a,-x)(b,-b)(-b,y)(b,-y) \in C_t \text{ ve } \rho = (a,k)(-a,-k)(b,\ell)(-b,-\ell) \in R_{t'}$$

için $\rho t' = \pi t$ dir.

(4^0) a,b nin t'_λ daki ve a,b nin t_λ daki yerleri (1^0) deki gibi olsun. Bu durumda

$$\pi = (a,x)(-a,-x)(b,y)(-b,-y) \in C_t \text{ ve } \rho = (a,k)(-a,-k)(b,\ell)(-b,-\ell) \in R_{t'}$$

için $\rho t' = \pi t$ dir.

$\gamma = \mu$ olsun.

(5^0) a,b t'_μ nün sırısıyla r. satır,i. sütun ve r. satır, j.sütununa ait iken -a,-b t_μ nün sırasıyla i' ve j'. sütununa ait olsun. Hipotezden -a ile -b t_μ de aynı sütuna ait olamazlar. t_μ nün r.satır, i'. sütunundaki bir x ve r.satır, j'. sütunundaki bir y sayısı için.

$$\pi = (x,-a)(-x,a)(y,-b)(-y,b) \in C_t$$

t'_μ nün r.satır. i'. sütunundaki bir k ve r. satır, j'. sütunundaki bir ℓ sayısı için

$$\rho = (a,-a)(a,k)(-a,-k)(b,-b)(b,\ell)(-b,-\ell) \in R_{t'}$$

olarak alırsak a, b, r, i, j, i', j' keyfi olduğundan $\rho t' = \pi t$ dir. $(6^0), (7^0)$ ve (8^0) durumlarıda $(2^0), (3^0)$ ve (4^0) 'e benzer durumlardır.

Bu durumlarda yine (5^0) deki yöntemle $\pi \in C_t, \rho \in R_{t'}$ buluruz öyleki, $\rho t' = \pi t$ olur.

Lemma 4.3.7 t bir (γ, μ) - tablo ve t' de bir (λ', μ')-tablo olsun.Kabul edelimki, $c = \mp a$, $d = \mp b$ ve $\gamma = \lambda$ (veya μ) olmak üzere c,d t_γ nın aynı sütununa ait olacak şekilde $t'_{\gamma'}$ nün aynı satırına ait olan a,b sayıları mevcut olsun. Bu durumda $C_t \cap R_{t'}$ bir transpozisyon ihtiva eder.

İspat: I. Durum: $\gamma = \lambda$ olsun. Eğer c=a,d=b veya c= -a, d= -b ise, bu durumda

$(a,b)(-a,-b) \in C_t$, $(a,b)(-a,-b) \in R_{t'}$ veya $(-a,-b)(a,b) \in C_t$, $(a,b)(-a,-b) \in R_{t'}$.

Buradan (a,b)(-a,-b)=(c,d)(-c,-d) $\in C_t \cap R_{t'}$ dür.

Eğer c = a , d = -b veya c = -a, d = b ise bu durumda

C_t nin tanımından t_λ nın sütun permütasyonlarında işaret değişikliği olabileceğinden,

$$(a,b)(-a,-b) \in C_t \ , \ (a,b)(-a,-b) \in R_{t'}$$

veya

$$(a,b)(-a,-b) \in C_t \, , (a,b)(-a,-b) \in R_{t'}$$

olur. Buradan

$$(a,b)(-a,-b) = (c,-d)(-c,d) \in C_t \cap R_{t'}$$

dür.

II. Durum: $\gamma = \mu$ olsun. Eğer c = a, d = b veya c = -a, d = -b ise bu durumda

$$(a,b)(-a,-b) \in C_t \, , (a,b)(-a,-b) \in R_{t'}$$

veya

$$(-a,-b)(a,b) \in C_t \, ,(a,b)(-a,-b) \in R_{t'}$$

olur. Buradan

$$(c,d)(-c,-d) = (a,b)(-a,-b) \in C_t \cap R_{t'}$$

dür.

Eğer c = a , d = -b veya c = -a , d = b ise bu durumda $R_{t'}$ nün tanımından $t'_{\mu'}$ nün satır permütasyonlarında işaret değişikliği olabileceğinden,

$$(c,d)(-c,-d) \in C_t \, , (c,d)(-c,-d) \in R_{t'}$$

veya

$$(c,d)(-c-d) \in C_t \, , \ (c,d)(-c,-d) \in R_{t'}$$

olur. Buradan

$$(c,d)(-c,-d) = (a,-b)(-a,-b) \in C_t n R_{t'}$$

dür

Lemma 4.3.8. t bir (λ,μ)-tablo ve t' de bir (λ',μ')-tablo olsun. Eğer $c = \mp a$, $d = \mp b$ ve $\gamma = \lambda$ (veya μ) olmak üzere c, d t_γ nın aynı sütununa ait olacak şekilde $t'_{\gamma'}$ nün aynı satırına ait olan a,b sayıları mevcut ise bu durumda $K_t\{t'\} = 0$ dır.

İspat: I. Durum $\gamma = \lambda$ olsun. Lemma 4.3.7 den biliyoruzki $(a,b)(-a,-b) \in C_t \cap R_{t'}$ dür. $(a,b)(-a,-b) \in R_{t'}$ olduğundan,

$$\big((1) - (a,b)(-a,-b)\big)\{t'\} = \{t'\} - (a,b)(-a,-b)\{t'\} = 0$$

dır.

$(a,b)(-a,-b) \in C_t$ olduğundan $(a,b)(-a,-b)$ C_t nin mertebesi 2 olan bir altgrubunu üretir. Bu altgrubun C_t içindeki koset temsilcilerini $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ olarak seçersek,

$$C_t = \sigma_1\{(1),(a,b)(-a,-b)\} \cup \ldots \cup \sigma_k\{(1),(a,b)(-a,-b)\}$$

olur. Buradan,

$$K_t\{t'\} = \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\}$$

$$= \big(\operatorname{sgn}(\sigma_1)\sigma_1 + \ldots + \operatorname{sgn}(\sigma_k)\sigma_k - \operatorname{sgn}(\sigma_1)\sigma_1(a,b)(-a,-b) - \ldots - \operatorname{sgn}(\sigma_k)\sigma_k(a,b)(-a,-b)\big)\{t'\}$$

$$= \big((\operatorname{sgn}(\sigma_1)\sigma_1 + \ldots + \operatorname{sgn}(\sigma_k)\sigma_k)\big)\big((1) - (a,b)(-a,-b)\big)\{t'\}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}(\sigma_i)\sigma_i\right)\big((1)-(a,b)(-a,-b)\big)\{t'\}=0$$

dır.

II. Durum $\gamma=\mu$ olsun. lemma 4.3.7 den $(c,d)(-c,-d)\in C_t\cap R_{t'}$ dür.

$(c,d)(-c,-d)\in R_{t'}$ olduğundan,

$$\big((1)-(c,d)(-c,-d)\big)\{t'\}=\{t'\}-(c,d)(-c,-d)\{t'\}=0$$

dır.

$(c,d)(-c,-d)\in C_t$ olduğundan $(c,d)(-c,-d)$ C_t nin mertebesi 2 olan bir altgrubunu üretir. Bu altgrubun C_t içindeki koset temsilcilerini $\sigma_1,\ldots,\sigma_\ell$ olarak seçersek, yukarıdaki gibi

$$K_t\{t'\}=\left(\sum_{i=1}^{\ell}\operatorname{sgn}(\sigma_i)\sigma_i\right)\big((1)-(c,d)(-c,-d)\big)\{t'\}=0$$

elde ederiz.

Lemma 4.3.9. Eğer $|\lambda|=|\lambda'|$ ve $(\lambda,\mu)\not\trianglerighteq(\lambda',\mu')$ ise bu durumda herhangi bir t (λ,μ)-tablosu ve herhangi bir t' (λ',μ')-tablosu için $K_t\{t'\}=0$ dır.

İspat: Eğer her a sayısı için a t_λ da gözüktüğünde $\mp a$ da $t'_{\lambda'}$ de gözüküyorsa Sonuç 4.2.4 ve Lemma 4.3.8 den $K_t\{t'\}=0$ dır. Eğer a t_λ dagözüktüğünde $\mp a$ $t'_{\lambda'}$ de gözükmüyorsa bu durumda (λ,μ) ve (λ',μ') aynı n nin parçalanma çiftleri olduğundan $\mp a$ $t'_{\mu'}$ de gözükür. Bundan dolayı $(a,-a)\in C_t\cap R_{t'}$ dür.

$(a,-a)\in R_{t'}$ olduğundan

$$\big((1)-(a,a)\big)\{t'\}=\{t'\}-(a,-a)\{t'\}=0$$

dır.

$(a,-a)\in C_t$ olduğundan $(a,-a), C_t$ nin mertebesi 2 olan bir altgrubunu üretir. Bu altgrubun C_t içindeki koset temsilcilerini $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ olarak seçersek,

$$K_t\{t'\}=\left(\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}(\sigma_i)\sigma_i\right)\big((1)-(a,-a)\big)\{t'\}=0$$

dır.

Lemma 4.3.10. t bir (λ,μ)-tablo ve t' de bir (λ',μ') -tablo olsun öyleki, her a sayısı için a t_λ da gözüküyorsa $\mp a$ da $t'_{\lambda'}$ de gözüksün. Kabul edelimki $K_t\{t'\}\neq 0$ olsun. Bu durumda $(\lambda,\mu)\trianglerighteq(\lambda',\mu')$ dür.

İspat: $c=\mp a$, $d=\mp b$ ve $\gamma=\lambda$ (veya μ) olmak üzere kabul edelimki c,d t_γ nın aynı sütununa ait olacak şekilde $t'_{\gamma'}$ nün aynı satırına ait olan a,b sayıları mevcut olsun. Bu durumda Lemma 4.3.8 den $K_t\{t'\}=0$ olurki bu durum hipotezimize çelişkidir. Bu çelişkiden dolayı $c=\mp a$, $d=\mp b$ ve $\gamma=\lambda$ (veya μ) olmak üzere $t'_{\gamma'}$ nün aynı satırına ait olan her a,b sayıları için c,d t_γ nın farklı sütunlarına aittir. Böylece Lemma 4.2.3 den

$$(\lambda,\mu)\trianglerighteq(\lambda',\mu')$$

dür

Lemma 4.3.11. t ve t' (λ,μ) - tablolar olsunlar. Bu durumda.

(i) Eğer $\{t'\}$ e_t de gözükmüyorsa $K_t\{t'\}=0$ dır.

(ii) Eğer $\{t'\}$ e_t de gözüküyorsa $K_t\{t'\}=\mp e_t$ dir

İspat: (i) $\{t'\}$ e_t de gözükmüyorsa Lemma 4.3.6 den $c=\mp a$, $d=\mp b$ ve $\gamma=\lambda$ (veya μ) olmak üzere c,d t_γ nın aynı sütununa ait olacak şekilde t'_γ nın aynı satırına ait olan a,b sayıları mevcuttur. Böylece Lemma 4.3.8 den $K_t\{t'\}=0$ dır.

(ii) $\{t'\}$ e_t de gözüküyorsa yine Lemma 4.3.6 dan $\rho t'=\pi t$ olacak şekilde $\rho\in R_{t'}$ ve $\pi\in C_t$ mevcutdur. $\rho\in R_{t'}$ olduğundan $\{\rho t'\}=\{t'\}$ dür.

Böylece $K_t\{t'\}=K_t\{\rho t'\}=K_t\{\pi t\}=K_t\pi\{t\}=\sum_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\pi\{t\}$ olup,

$$
\begin{aligned}
K_t\{t'\} &= \sum_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\pi^{-1})\sigma\pi\{t\}\\
&= \operatorname{sgn}(\pi^{-1})\sum_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma\pi)\sigma\pi\{t\}, \quad (\sigma\pi=\tau\in C_t \text{ dersek})\\
&= \mp\sum_{\tau\in C_t}\operatorname{sgn}(\tau)\tau\{t\}\\
&= \mp K_t\{t\}\\
&= \mp e_t
\end{aligned}
$$

olur.

Sonuç 4.3.12. Eğer $u\in M^{\lambda,\mu}$ ve t bir (λ,μ)-tablo ise bu durumda $K_t u$, e_t nin bir katıdır.

İspat: $u\in M^{\lambda,\mu}$ ise $\alpha_i\in F$ ve $\{t_i\}$ (λ,μ)- tablo olmak üzere $u=\sum_i \alpha_i\{t_i\}$ yazabiliriz.

Böylece $K_t u=K_t\sum_i\alpha_i\{t_i\}=\sum_i\alpha_i K_t\{t_i\}$ olup Lemma 4.3.11 den $\alpha\in F$ olmak üzere $K_t u=\alpha e_t$ dir.

Şimdi simetrik gruplarda olduğu gibi, $M^{\lambda,\mu}$ üzerinde aşağıdaki şekilde bir bilineer form tanımlayalım.

$$<\{t\},\{t'\}>=\begin{cases}1 \text{ , } \{t\}=\{t'\} \text{ ise} \\ 0 \text{ , } \{t\}\neq\{t'\} \text{ ise}\end{cases}$$

Bu bilineer form $M^{\lambda,\mu}$ üzerinde simetrik, non-singüler ve O_n - invaryantdır. Bu özellikler yardımıyla kolayca görebilirizki, her $u \in M^{\lambda,\mu}$ için,

$$<u,e_t>=<u,K_t\{t\}>=<K_t u,\{t\}>$$

dir.

Teorem 4.3.13. (James Altmodül Teoremi) Eğer U, $M^{\lambda,\mu}$ nün bir altmodülü ise bu durumda $U \supseteq S^{\lambda,\mu}$ veya $U \subseteq (S^{\lambda,\mu})^{\perp}$ dir.

İspat: Kabul edelimki $u \in U$ ve t bir (λ,μ)-tablo olsun. Bu durumda Sonuç 4.3.12 den $K_t u$, e_t nin bir katı olup bir $\alpha \in F$ için $K_t u = \alpha e_t$ dir.

Eğer enaz bir $u \in U$ için $\alpha \neq 0$ ise bu durumda $\alpha^{-1}K_t u = e_t$ ve U bir $F[O_n]$-altmodül olduğundan $e_t = \alpha^{-1}K_t u \in U$ dur. Buradan her $s \in S^{\lambda,\mu} =<e_t>$ için $s \in U$ olup $S^{\lambda,\mu} \subseteq U$ dur.

Eğer her $u \in U$ için $\alpha = 0$ ise bu durumda $K_t u = 0$ dolayısıyla her $u \in U$ için

$$<u,e_t>=<u,K_t\{t\}>=<K_t u,\{t\}>=0$$

dır. Böylece her $s \in S^{\lambda,\mu} =<e_t>$ için $<u,s>=0$ olup $u \in (S^{\lambda,\mu})^{\perp}$ dir. Bu ise $U \subseteq (S^{\lambda,\mu})^{\perp}$ demektir.

Bu teoremin bir sonucu olarak diyebilirizki, $S^{\lambda,\mu}$ ile $S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp}$ arasında bir başka altmodül yoktur.

Teorem 4.3.14 $\dfrac{S^{\lambda,\mu}}{\left(S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp}\right)}$ bölüm modülü sıfır veya indirgenemezdir.

İspat: Kabul edelimki $\dfrac{S^{\lambda,\mu}}{\left(S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp}\right)} \neq \{0\}$ ve $\dfrac{U}{\left(S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp}\right)}$,

$\dfrac{S^{\lambda,\mu}}{\left(S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp}\right)}$ in bir altmodülü olsun. Bu durumda $S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp} \subseteq U \subseteq S^{\lambda,\mu}$ dür.

Halbuki yukarıdaki teoremin sonucu olarak biliyoruzki $U = S^{\lambda,\mu}$ veya $U = S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp}$ dir.

$$U = S^{\lambda,\mu} \Rightarrow \frac{U}{\left(S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp}\right)} = \frac{S^{\lambda,\mu}}{\left(S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp}\right)}$$

$$U = S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp} \Rightarrow \frac{U}{\left(S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp}\right)} = \{0\}$$

dır. Dolayısıyla, $\dfrac{S^{\lambda,\mu}}{\left(S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp}\right)}$ indirgenemezdir.

Lemma 4.3.15. t bir (λ, μ)-tablo olsun. Bu durumda

(i) $K_t K_t = |C_t| K_t$

(ii) $K_t e_t = |C_t| e_t$

dir.

İspat: (i)

$$K_t K_t = \left(\sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\right)\left(\sum_{\pi \in C_t} \operatorname{sgn}(\pi)\pi\right)$$

$$= \sum_{\sigma,\pi \in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\pi)\sigma\pi\,,\ \sigma\pi = \tau \text{ dersek}$$

$$= \sum_{\sigma,\tau \in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\tau)\tau$$

$$= \sum_{\sigma \in C_t} \sum_{\tau \in C_t} \mathrm{sgn}(\tau)\tau$$

$$= |C_t| K_t$$

dir.

(ii) $K_t e_t = K_t K_t \{t\} = |C_t| K_t \{t\} = |C_t| e_t$ dir.

Lemma 4.3.16. t bir (λ,μ) - tablo ve t' de bir (λ',μ') -tablo olmak üzere kabul edelimki $|\lambda| > |\lambda'|$ olsun. Bu durumda

(i) $K_t\{t'\} = 0$

(ii) $K_t e_{t'} = 0$

dır.

İspat: (i) $|\lambda| > |\lambda'|$ ise bu durumda t_λ da gözüken enaz bir a sayısı vardır öyleki, $\mp a$ da $t'_{\mu'}$ de gözükür. Buradan $(a,-a) \in C_t \cap R_{t'}$ dür. Böylece lemma 4.3.9 un ispatında olduğu gibi $K_t\{t'\} = 0$ elde ederiz.

(ii) $$K_t e_{t'} = K_t K_{t'}\{t'\} = \left(\sum_{\sigma \in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\right)\left(\sum_{\tau \in C_{t'}} \mathrm{sgn}(\tau)\tau\right)\{t'\}$$

(i) den $(a,-a) \in C_t$ olduğundan $\{(1),(a,-a)\}$ altgrubunun C_t içindeki koset temsilcilerini $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ olarak seçersek,

$$C_t = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \sigma_1(a,-a), \ldots, \sigma_k(a,-a)\},$$

$$K_t e_{t'} = \left(\text{sgn}(\sigma_1)\sigma_1 + \ldots + \text{sgn}(\sigma_k)\sigma_k - \text{sgn}(\sigma_1)\sigma_1(a,-a) - \ldots - \text{sgn}(\sigma_k)\sigma_k(a,-a)\right) \sum_{\tau \in C_{t'}} \text{sgn}(\tau)\tau\{t'\}$$

$$= \left(\text{sgn}(\sigma_1)\sigma_1 + \ldots + \text{sgn}(\sigma_k)\sigma_k\right)\left((1) - (a,-a)\right) \sum_{\tau \in C_{t'}} \text{sgn}(\tau)\tau\{t'\}$$

(i) den (a,-a) $\in R_{t'}$ olduğundan $\{(a,-a)\tau t'\} = \{\tau t'\}$ dolayısıyla $K_t e_{t'} = 0$ dır.

Lemma 4.3.17. $|\lambda| > |\lambda'|$ olmak üzere kabul edelimki skalarların cismi Q ve $\theta \in \text{Hom}(S^{\lambda,\mu}, S^{\lambda',\mu'})$ olsun. Bu durumda $\theta = 0$ dır.

İspat: t bir (λ,μ)-tablo ve t' de bir (λ',μ')-tablo olsun. Bu durumda $\alpha_{t'} \in Q$ olmak üzere $\theta(e_t) = \sum \alpha_{t'} e_{t'} \in S^{\lambda',\mu'}$ dür. Lemma 4.3.15 ve 4.3.16 yı kullanırsak,

$$|C_t|\theta(e_t) = \theta(|C_t|e_t) = \theta(K_t e_t) = K_t\theta(e_t) = K_t \sum \alpha_{t'} e_{t'} = \sum \alpha_{t'} K_t e_{t'} = 0$$

$|C_t| \neq 0$ ve $\text{Char}\, Q = 0$ olduğundan $\theta(e_t) = 0$ dır. θ bir $Q[O_n]$- homomorfizma olduğundan her $s \in S^{\lambda,\mu}$ için $\theta(s) = 0$ dolayısyla $\theta = 0$ dır.

Bu lemmadan şu sonucu çıkarabiliriz, $|\lambda| > |\lambda'|$ iken $\theta = 0$ olup θ birebir değildir dolayısıyla $S^{\lambda,\mu}$ ile $S^{\lambda',\mu'}$ izomorfik değildirler.

Önerme 4.3.18. $|\lambda| = |\lambda'|$ olmak üzere kabul edelimki, skalarların cismi Q ve $\theta \in (S^{\lambda,\mu}, M^{\lambda',\mu'})$ elemanı sıfırdan farklı olsun. Bu durumda $(\lambda,\mu) \trianglerighteq (\lambda',\mu')$ ve eğer $(\lambda,\mu) = (\lambda',\mu')$ ise θ birimin bir skalar katıdır.

İspat: $\theta \neq 0$ olduğundan bir e_t baz vektörü vardır öyleki $\theta(e_t) \neq 0$ dır.

Rasyonel sayılarla birlikte <,> bilineer formu bir iççarpım olduğundan, $M^{\lambda,\mu} = S^{\lambda,\mu} \oplus (S^{\lambda,\mu})^{\perp}$ dir. Bundan dolayı $\theta((S^{\lambda,\mu})^{\perp})$=0 alarak θ yı Hom $(M^{\lambda,\mu}, M^{\lambda',\mu'})$ nün bir elemanına genişletebiliriz. Böylece θ (λ,μ)- tabloidler üzerinde lineer olmuş olur.

$$\Rightarrow 0 \neq \theta(e_t) = \theta(K_t\{t\}) = K_t\theta\{t\}$$

$\theta\{t\} \in M^{\lambda',\mu'}$ olduğundan $\alpha_i \in Q$ ve $\{t'_i\}$ ler (λ',μ')-tabloidler olmak üzere $\theta(\{t\}) = \sum_i \alpha_i \{t_i'\}$ dir.

$$\Rightarrow 0 \neq \theta(e_t) = K_t\left(\sum_i \alpha_i \{t_i'\}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_i \alpha_i K_t \{t_i'\} \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ i için } K_t\{t_i'\} \neq 0 \qquad (1)$$

Şimdi iddia ediyoruzki, her a sayısı için a t_λ da gözükür ise $\mp a$ da $t'_{i\lambda'}$ de gözükür. Eğer bu olmazsa t_λ gözüken enaz bir a sayısı için $\mp a$ $t'_{i\mu'}$ de gözükür. Dolayısıyla Lemma 4.3.9 un ispatında olduğu gibi her i için $K_t\{t_i'\}$=0 elde ederizki bu (1) ile çelişir. O halde iddiamız doğrudur. Böylece Lemma 4.3.10 gereğince $(\lambda,\mu) \trianglerighteq (\lambda',\mu')$ dür.

Eğer $(\lambda,\mu) = (\lambda',\mu')$ ise bu durumda $\sum_i \alpha_i \{t_i'\} \in M^{\lambda',\mu'} = M^{\lambda,\mu}$ ve Sonuç 4.3.12 den $K_t\left(\sum_i \alpha_i \{t_i'\}\right)$, e_t nin bir katıdır. Yani bir α skaları için

$$\theta(e_t) = K_t\left(\sum_i \alpha_i \{t_i'\}\right) = \alpha e_t$$

dir. Şimdi θ nın $S^{\lambda,\mu}$ deki keyfi baz elemanları üzerindeki etkisine bakalım. Her $\sigma \in O_n$ için,

$$\theta(e_{\sigma t}) = \theta(\sigma e_t) = \sigma\theta(e_t) = \sigma(\alpha e_t) = \alpha\sigma e_t = \alpha e_{\sigma t}$$

Böylece $\alpha \in Q$ olmak üzere $\theta = \alpha I$ dır.

Teorem 4.3.19 (λ,μ) n nin bir parçalanma çifti ve F=Q olsun. Bu durumda $S^{\lambda,\mu}$ ler bütün indirgenemez $F[O_n]$- modülleri verir.

İspat: F=Q ise kolayca gösterilebilirki $S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp} = \{0\}$ dır Buradan $\frac{S^{\lambda,\mu}}{(S^{\lambda,\mu} \cap (S^{\lambda,\mu})^{\perp})} = S^{\lambda,\mu} \neq \{0\}$ ve Teorem 4.3.14 den $S^{\lambda,\mu}$ indirgenemezdir. O halde (λ,μ) n üzerinde değiştikçe $S^{\lambda,\mu}$ ler tüm indirgenemez $F[O_n]$-modülleri verir. Fakat bunların bazıları izomorf olabilir onun için hangi durumlarda izomorf olup olmadıklarını inceleyelim.

Eğer $|\lambda| > |\lambda'|$ ise bu durumda Lemma 4.3.17 den $S^{\lambda,\mu}$ ile $S^{\lambda',\mu'}$ izomorfik değildirler.

Eğer $|\lambda| = |\lambda'|$ ve $S^{\lambda,\mu} \cong S^{\lambda',\mu'}$ ise bu durumda $S^{\lambda',\mu'} \subseteq M^{\lambda',\mu'}$ olmak üzere sıfırdan farklı bir $\theta \in Hom(S^{\lambda,\mu}, M^{\lambda',\mu'})$ mevcutdur ve Önerme 4.3.18 den $(\lambda,\mu) \trianglerighteq (\lambda',\mu')$ dir.

Aynı düşünceyle $|\lambda'| = |\lambda|$ ve $S^{\lambda',\mu'} \cong S^{\lambda,\mu}$ alırsak $S^{\lambda,\mu} \subseteq M^{\lambda,\mu}$ olmak üzere sıfırdan farklı bir $\theta' \in Hom(S^{\lambda',\mu'}, M^{\lambda,\mu})$ mevcutdur ve yine Önerme 4.3.18 den $(\lambda',\mu') \trianglerighteq (\lambda,\mu)$ dür.

Böylece $|\lambda| = |\lambda'|$ ve $S^{\lambda,\mu} \cong S^{\lambda',\mu'} \Rightarrow (\lambda,\mu) = (\lambda',\mu')$ elde ederiz.

4.4. Specht Modüller İçin Bir Baz

Tanım 4.4.1. t bir (λ,μ)-tablo olsun. Eğer t nin bileşenlerinin herbirisi pozitif tamsayı, t_λ ve t_μ nün ikisi birden standart tablo ise, t ye standart bir tablo denir.

Eğer $\{t\}$ denklik sınıfı içinde standart bir (λ,μ)- tablo mevcut ise $\{t\}$ tabloidine standartdır denir.

Eğer t standart (λ,μ) - tablo ise e_t polytabloidine standartdır denir.

Örneğin, eğer $(2^2,21)$,7 nin bir parçalanma çifti ise bu durumda

$$t_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & & 1 & 3 \\ 5 & 6 & , & 7 & \end{pmatrix}$$

standart bir $(2^2,21)$ - tablo, fakat

$$t_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & & -3 & 5 \\ 6 & 4 & , & 7 & \end{pmatrix}$$

standart değildir.

Teorem 4.4.2. $\{e_t |$ standart bir $(\lambda,\mu)-$tablo$\}$ kümesi $S^{\lambda,\mu}$ için bir bazdır. $S^{\lambda,\mu}$ nün boyutu, standart (λ,μ) - tabloların sayısına eşittir.

Bu teoremin ispatını iki aşamada yapacağız. Önce bu kısımda bu kümenin lineer bağımsızlığını ve kısım 4.5 de ise bu kümenin $S^{\lambda,\mu}$ yü gerdiğini göstereceğiz.

$t=(t_\lambda,t_\mu)$ bir (λ,μ) - tablo olsun. $|t_\mu|$ ye t_μ nün modülü diyeceğiz yani, eğer $t_\mu=(t_\mu(i,j))$ ise bu durumda $|t_\mu| = (|t_\mu(i,j)|)$ dir.

Örneğin;

$$t_\mu = \begin{matrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -6 & \\ -3 & & \end{matrix} \quad \text{ise} \quad |t_\mu| = \begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & \\ 3 & & \end{matrix}$$

dir.

Verilen herhangi bir $t=(t_\lambda,t_\mu)$- tablosu için $m_{ir}(t_\lambda)$ ile t_λ nın ilk r satırındaki $i(i=\mp 1,\ldots,\mp n)$ ye eşit veya i den küçük olan elemanların sayısını ve

$n_{ir}(t_\mu)$ ilede $|t_\mu|$ nün ilk r satırındaki $i(i = 1,\ldots,n)$ ye eşit veya i den küçük olan elemanların sayısını göstereceğiz.

Tanım 4.4.3. (λ,μ) n nin bir parçalanma çifti olmak üzere $\{t\}$ ve $\{s\}$ herhangi (λ,μ)-tabloidler olsunlar. Bu durumda,

(a) Eğer aşağıdaki şartlardan herhangi birisi gerçekleniyorsa bu durumda $\{t_\lambda\} \trianglelefteq \{s_\lambda\}$ dır.

(I) Eğer t_λ nın bazı bileşenleri negatif fakat s_λ nın bütün bileşenleri pozitif ise (Bu halde $\{t_\lambda\} \triangleleft \{s_\lambda\}$ dır.)

(II) Eğer her $i(i = \mp 1,\ldots,\mp n)$ ve r için $m_{ir}(t_\lambda) \le m_{ir}(s_\lambda)$ ise.

(b) Eğer her $i(1 \le i \le n)$ ve r için $n_{ir}(t_\mu) \le n_{ir}(s_\mu)$ ise bu durumda $\{t_\mu\} \trianglelefteq \{s_\mu\}$ dür.

Böylece $\{t_\lambda\} \trianglelefteq \{s_\lambda\}$ ve $\{t_\mu\} \trianglelefteq \{s_\mu\}$ ise $\{s\}$ büyüktür $\{t\}$ denir ve $\{t\} \trianglelefteq \{s\}$ ile gösterilir.

Örnek 4.4.4. (i) $t = \begin{pmatrix} -14 & , & 37 \\ 52 & , & 6 \end{pmatrix}$ ve $s = \begin{pmatrix} -73 & , & -51 \\ -62 & , & 4 \end{pmatrix}$

$(2^2,21)$ tablolar olsunlar. t_λ ve s_λ negatif bileşenlere sahip olduğundan $(m_{ir}(t_\lambda))$ ve $(m_{ir}(s_\lambda))$ matrislerine bakmalıyız. Böylece 14 satır ve 2 sütunlu $(m_{ir}(t_\lambda))$ ve $(m_{ir}(s_\lambda))$ matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$(m_{ir}(t_\lambda)) = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{matrix} \qquad (m_{ir}(s_\lambda)) = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

Dolayısıyla her $i(i = \mp 1, \ldots, \mp 7)$ ve r için $m_{ir}(t_\lambda) \leq m_{ir}(s_\lambda)$ olduğundan Tanım 4.4.3. (a), (II) geregince $\{t_\lambda\} \lhd \{s_\lambda\}$ dır.

Şimdi 7 satır ve 2 sütunlu $(n_{ir}(t_\mu))$ ve $(n_{ir}(s_\mu))$ matrislerini yazalım.

$$(n_{ir}(t_\mu)) = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix} \qquad (n_{ir}(s_\mu)) = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

Buradan her $i(1 \leq i \leq 7)$ ve r için $n_{ir}(t_\mu) \leq n_{ir}(s_\mu)$ olduğundan Tanım 4.4.3 (b) gereğince $\{t_\mu\} \lhd \{s_\mu\}$ dür.

Böylece $\{t_\lambda\} \lhd \{s_\lambda\}$ ve $\{t_\mu\} \lhd \{s_\mu\}$ olup Tanım 4.4.3 gereğince $\{t\} \lhd \{s\}$ dir.

(ii) $(0,2^2)$ 4 ün bir parçalanma çifti olsun. Bu durumda bütün $(0,2^2)$-tabloidleri gözönünde bulundurduğumuzda aşağıdaki dallanmayı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd}
 & \left(\bar{\phi},\frac{\overline{12}}{34}\right) & \\
 & \left(\bar{\phi},\frac{\overline{13}}{24}\right) \arrow[u] & \\
\left(\bar{\phi},\frac{\overline{23}}{14}\right) \arrow[ur] & & \left(\bar{\phi},\frac{\overline{14}}{23}\right) \arrow[ul] \\
 & \left(\bar{\phi},\frac{\overline{24}}{13}\right) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & \left(\bar{\phi},\frac{\overline{34}}{12}\right) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

t bir (λ,μ)- tablo olsun. Kabul edelimki $a=\mp k$, $b=\mp\ell$ $(1\le k,\ell\le n)$ ve $\gamma=\lambda$ (veya μ) olmak üzere, t_γ nın a p.satırına ve b de q. satırına ait olsun.

Eğer $\gamma=\lambda$ ve $a<b$ ise bu durumda $m_{ir}(t_\lambda)$ nın tanımından aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$m_{ir}\big((a,b)(-a,-b)t_\lambda\big)-m_{ir}(t_\lambda)=\begin{cases}1, & q\le r<p \text{ ve } a\le i<b \text{ ise}\\ -1, & p\le r<q \text{ ve } a\le i<b \text{ ise}\\ 0, & \text{diğer hallerde}\end{cases}$$

Eğer $\gamma=\mu$ ve $k<\ell$ ise bu durumda $n_{ir}(t_\mu)$ nün tanımından aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$n_{ir}\Big((a,b)(-a,-b)t_\mu\Big) - n_{ir}(t_\mu) = \begin{cases} 1, & q \le r < p \text{ ve } k \le i < \ell \text{ ise} \\ -1, & p \le r < q \text{ ve } k \le i < \ell \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

Lemma 4.4.5. $\{t\}$ bir (λ,μ)- tabloid olsun. Kabul edelimki, $a = \mp k,\ b = \mp \ell\ (1 \le k, \ell \le n)$ olmak üzere t_γ da a b den daha alt satıra ait olacak şekilde a,b sayıları gözüksün. Eğer aşağıdaki şartlardan birisi gerçekleniyorsa bu durumda $\{t\} \lhd (a,b)(-a,-b)\ \{t\}$ dir.

(i) $\gamma = \lambda$ ve $a < b$

(ii) $\gamma = \mu$ ve $k < \ell$

İspat: t_γ nın a p.satırına ve b de q.satırına ait olsun. Bu durumda hipotezden $q < p$ dir.

Eğer (i) gerçekleniyorsa bu durumda yukarıdaki eşitlikten her $i(i = \mp 1, \ldots, \mp n)$ ve r için $m_{ir}(t_\lambda) \le m_{ir}\Big((a,b)(-a,-b)t_\lambda\Big)$ olup Tanım 4.4.3 gereğince $\{t_\lambda\} \lhd (a,b)(-a,-b)\{t_\lambda\}$ dır. Diğer taraftan (i)durumunda t_μ de herhangibir değişiklik olmayacağından $\{t\} \lhd (a,b)(-a,-b)\{t\}$ dir.

Eğer (ii) gerçekleniyorsa bu durumda yine yukarıdaki ikinci eşitlikten her $i(i = 1, \ldots, n)$ ve r için $n_{ir}(t_\mu) \le n_{ir}((a,b)(-a,-b)t_\mu)$ olup Tanım 4.4.3 geregince $\{t_\mu\} \lhd (a,b)(-a,-b)\{t_\mu\}$ dür. Ayrıca (ii) durumunda t_λ da herhangi bir değişiklik olmayacağından $\{t\} \lhd (a,b)(-a,-b)\{t\}$ dir.

Sonuç 4.4.6. Eğer t standart bir tablo ve $\{s\}$ e_t de gözüken bir tabloid ise, bu durumda $\{s\} \unlhd \{t\}$ dir.

İspat: $\pi \in C_t$ olmak üzere $s = \pi t$ olsun. Bu durumda $\{s\} = \pi\{t\}$ olduğundan

$\{s\}$ e_t de gözükür. Eğer $\pi = (1)$ ise ispat açıktır. $\pi \neq (1)$ ise bu durumda C_t nin tanımından $\tau \in S_n$ ve t_λ da gözüken her i için $\sigma = \prod_i w_i \in C_2^n$ olmak üzere, $\pi = \sigma\tau$ dur.

(i) Eğer $\tau = (1)$ ise $\pi = \sigma$ ve $s = \sigma t$ dir. σ tanımı gereği t_λ daki bazı bileşenlerin işaretlerini değiştirir dolayısıyla s_λ da bazı negatif bileşenler vardır. Halbuki t_λ standart olduğundan Tanım 4.4.3 (a), (I) gereğince $\{s_\lambda\} \trianglelefteq \{t_\lambda\}$ dır. Diğer taraftan σ t_μ de herhangi bir değişiklik yapmayacağından $\{s_\mu\} = \{t_\mu\}$ dür. Böylece Tanım 4.4.3 den $\{s\} \trianglelefteq \{t\}$ dir.

(ii) Eğer $\sigma = (1)$ ise $\pi = \tau$ ve $s = \tau t$ dir. Buradan s standart değildir. Bundan dolayı $\gamma = \lambda$ (veya μ) olmak üzere s_λ nın aynı sütununda a,b den daha alt satırda ve a<b olacak şekilde a,b pozitif tamsayıları vardır. Lemma 4.4.5 gereğince $\{s\} \triangleleft (a,b)(-a,-b)\{s\}$ dir. Gösterilebilirki $(a,b)(-a,-b)\{s\}$ e_t de gözükür. Böylece 3.bölümdeki Lemma 3.5.5 in ispatında olduğu gibi tümevarım yoluyla $\{s\} \triangleleft \{t\}$ elde ederiz.

(iii) Eğer $\tau, \sigma \neq (1)$ ise $\pi = \sigma\tau$ ve $s = \pi t$ dir. Böylece σ nın tanımından (i) de olduğu gibi s_λ nın bazı bileşenleri negatifdir. Dolayısıyla Tanım 4.4.3 (a) (I) den $\{s_\lambda\} \triangleleft \{t_\lambda\}$ dır. Ayrıca τ nun tanımından (ii) de olduğu gibi $\{s_\mu\} \triangleleft \{t_\mu\}$ olup tanım 4.4.3 den $\{s\} \triangleleft \{t\}$ dir.

Tanım 4.4.7. $(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer her $c \in A$ için $b \geq c$ olacak şekilde bir $b \in A$ varsa bu b elemanına maksimum eleman denir. Eğer $c > b$ olacak şekilde bir $c \in A$ mevcut değilse b ye maksimal eleman denir.

Not: t standart ise $\{t\}$ e_t de gözüken maksimum tabloiddir. Gerçekten e_t de gözüken her $\{t_i\}$ tabloidi için Sonuç 4.4.6 dan $\{t_i\} \trianglelefteq \{t\}$ dir.

Lemma 4.4.8. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ $M^{\lambda,\mu}$ nün elemanları olsunlar. Herbir v_i için v_i de gözüken bir $\{t_i\}$ tabloidini seçebileceğimizi kabul edelim. Öyleki;

(i) $\{t_i\}$, v_i de gözüken maksimum tabloid ve

(ii) Bütün $\{t_i\}$ ler bibirinden farklı olsunlar.

Bu durumda $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lar F üzerinde lineer bağımsızdırlar.

İspat: $\{t_i\}$ ler arasında maksimal tabloidi $\{t_k\}$ olarak seçelim. Bu durumda (i) ve (ii) şartları $\{t_k\}$nın sadece v_k da gözüktüğünü garanti eder. Gerçekten eğer $\exists i < k$ için $\{t_k\}$ v_i de gözükseydi bu durumda (i) ve (ii) den $\{t_k\} \trianglelefteq \{t_i\}$ olurdu bu ise $\{t_k\}$ nın maksimalliğine çelişkidir.

Şimdi $c_1, c_2, \ldots, c_k \in F$ olmak üzere,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k = 0$$

olsun. İspatı k üzerinden tümevarımla yapacağız.

k=1 için $c_1 v_1 = 0$ olsun. (i) den $\{t_1\}$kesinlikle v_1 de gözükür fakat $\{t_k\}$ hariç diğer tabloidlerde v_1 de gözükebilir. Yani $a_1 \neq 0$ olmak üzere

$$v_1 = a_1\{t_1\} + a_2\{t_2\} + \ldots + a_{k-1}\{t_{k-1}\}$$

dir. Böylece $c_1 a_1\{t_1\} + c_1 a_2\{t_2\} + \ldots + c_1 a_{k-1}\{t_{k-1}\} = 0$ ve $\{t_i\}$ ler birbirinden farklı lineer bağımsız tabloidler olduğundan ve $a_1 \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ dır. O halde $k = 1$ hali doğrudur.

k=m-1 için v_i lerin lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. Yani $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_{m-1} v_{m-1} = 0$ iken $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$ olsun.

k=m için v_i lerin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. Yani $c_1v_1+c_2v_2+...+c_mv_m=0$ iken $c_1=c_2=...=c_m=0$ olduğunu gösterelim. Baştaki seçimimizden $\{t_m\}$ nin sadece v_m de gözüktüğünü biliyoruz. Dolayısıyla $c_1v_1+c_2v_2+...+c_mv_m=0$ yazılışında $\{t_m\}$ yi yok etmenin tekyolu $c_m=0$ olmasıdır. Buradan $c_1v_1+...+c_{m-1}v_{m-1}+c_mv_m=0$ iken $c_m=0$ olup k=m durumundaki yazılış $c_1v_1+...+c_{m-1}v_{m-1}=0$ formuna gelir.

Halbuki tümevarım kabülümüzden biliyoruzki $c_1v_1+...+c_{m-1}v_{m-1}=0$ iken $c_1=...=c_{m-1}=0$ dır.

Böylece $c_1v_1+...+c_mv_m=0$ iken $c_1=...=c_m=0$ olup $v_1,...,v_m$ lineer bağımsızdır.

Önerme 4.4.9. $\{e_t | t \text{ standart bir } (\lambda,\mu)-\text{tablo}\}$ kümesi F üzerinde lineer bağımsızdır.

İspat: t ler değiştikçe e_t ler $M^{\lambda,\mu}$ nün elemanlarıdır. t standart olduğundan $\{t\}$ e_t de gözüken maksimum tabloiddir. Ayrıca t ler farklı standart tabloları tararken $\{t\}$ 'lerde birbirinden farklı tabloidlerdir. Böylece Lemma 4.4.8 den $\{e_t | t \text{ standart bir } (\lambda,\mu)-\text{tablo}\}$ kümesi F üzerinde lineer bağımsızdır.

4.5. Garnir Bağıntıları

Bu kısımda standart (λ,μ)- polytabloidlerin $S^{\lambda,\mu}$ yü gerdiğini göstereceğiz. Yani eğer t herhangi bir (λ,μ)-tablo ise, bu durumda e_t standart (λ,μ)-polytabloidlerin bir lineer kombinasyonudur.

Şimdi t nin Garnir elemanını belirlemek için aşağıdaki bağıntıları verelim.

Lemma 4.5.1. t bir (λ,μ)- tablo olsun.

(i) t nin aynı sütununa ait olan a ve b sayıları için, (a,b)(-a,-b) , C_t nin mertebesi 2 olan bir altgrubunu üretir. Böylece,

$$\big((1)+(a,b)(-a,-b)\big)e_t = 0 \text{ (alterne bağıntısı)}$$

dır.

(ii) t tabloidindeki bir a sayısı için, a t_λ ya ait ise $\beta = 1$ ve a t_μ ye ait ise $\beta = -1$ olmak üzere,

$$\big((1)+\beta(a,-a)\big)e_t = 0 \text{ (işaret değişim bağıntısı)}$$

dır.

İspat (i) $(a,b)(-a,-b) \in C_t$ olduğundan ve Lemma 4.3.3 (v) den $(a,b)(-a,-b)e_t = \operatorname{sgn}((a,b)(-a,-b))e_t = -e_t$ dir. Buradan

$$((1)+(a,b)(-a,-b))e_t = e_t - e_t = 0$$

dır.

(ii) Eğer a, t_λ ya ait ise bu durumda $\beta = 1$ ve $(a,-a) \in C_t$ olduğundan Lemma 4.3.3(v) gereğince

$$((1)+(a,b))e_t = e_t + \operatorname{sgn}((a,-a))e_t = e_t - e_t = 0$$

dır.

a t_μ ye ait olsun. öncelikle $\pi \in C_t$ olmak üzere $\pi^{-1}(a,-a)\pi = (\pi^{-1}a,-\pi^{-1}a)$ olup $(a,-a)\pi = \pi(\pi^{-1}a,-\pi^{-1}a)$ dır. Ayrıca $\pi \in C_t$ olmak üzere $\pi^{-1}a$ t_μ ye ait olduğundan $(\pi^{-1}a,-\pi^{-1}a) \in R_t$ dir. Bunu ve bir üst satırdaki eşitliği kullanırsak her $\sigma_i \in C_t$ için

$$
\begin{aligned}
(a,-a)e_t &= (a,-a)\sum_{i=1}^{r} \operatorname{sgn}(\sigma_i)\sigma_i\{t\} \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma_1)(a,-a)\sigma_1\{t\}+\ldots+\operatorname{sgn}(\sigma_r)(a,-a)\sigma_r\{t\} \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma_1)\sigma_1(\sigma_1^{-1}a,-\sigma_1^{-1}a)\{t\}+\ldots+\operatorname{sgn}(\sigma_r)\sigma_r(\sigma_r^{-1}a,-\sigma_r^{-1}a)\{t\} \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma_1)\sigma_1\{t\}+\ldots+\operatorname{sgn}(\sigma_r)\sigma_r\{t\} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sgn}(\sigma_i)\sigma_i\{t\} \\
&= e_t
\end{aligned}
$$

olup buradan

$$((1)-(a,-a))e_t = e_t - (a,-a)e_t = e_t - e_t = 0$$

dır.

Hatırlatma 4.5.2. Yukarıdaki lemmadan dolayı O_n de işaret değişim bağıntısıyla t nin herhangi bir negatif bileşenini pozitif yapan ve alterne bağıntısıyla t nin sütunlarını standart yapan elemanlar bulabiliriz. Böylece t de negatif bileşen kalmaz ve t nin bütün sütunları standart olur.

Örnek 4.5.3. Eğer $t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & 5 & 6 \\ 4 & -2 & , & 7 & \end{pmatrix}$ olarak alırsak bu durumda işaret değişim bağıntısıyla, $\big((1)+(2,-2)\big)e_t = 0$ olup

$$e_t = -(2,-2)e_t = -e_{(2,-2)\begin{pmatrix} 1 & 3 & & 5 & 6 \\ 4 & -2 & , & & 7 \end{pmatrix}} = -e_{\begin{pmatrix} 13 & & 56 \\ 42 & , & 7 \end{pmatrix}}$$

ve alterne bağıntısıyla

$$\big((1)+(2,3)(-2,-3)\big)e_{\left(\begin{smallmatrix}13 & & 56\\ 42 & \cdot & 7\end{smallmatrix}\right)}=0$$

olup,

$$e_{\left(\begin{smallmatrix}13 & & 56\\ 42 & \cdot & 7\end{smallmatrix}\right)}=-e_{(2,3)(-2,-3)\left(\begin{smallmatrix}13 & & 56\\ 42 & \cdot & 7\end{smallmatrix}\right)}=-e_{\left(\begin{smallmatrix}12 & & 56\\ 43 & \cdot & 7\end{smallmatrix}\right)}$$

dır. Böylece

$$e_t=-\left(-e_{\left(\begin{smallmatrix}12 & & 56\\ 43 & \cdot & 7\end{smallmatrix}\right)}\right)=e_{\left(\begin{smallmatrix}12 & & 56\\ 43 & \cdot & 7\end{smallmatrix}\right)}$$

dır.

Şimdi O_n nin grup cebirinde, verilen herhangi bir e_t polytabloidini sıfırlayan elemanları bulmak istiyoruz.Bunun için t bir (λ,μ) -tablo olsun öyleki; t nin bileşenleri işaret değişim ve alterne bağıntılarıyla yeniden düzenlenmiş olsun. Kabul edelimki, k=1 veya 2 olmak üzere t, t(i,j,k) ve t(i,j+1,k) bileşenlerine sahip olsun.

A,t nin j. sütunundaki t(i,j,k) da dahil olmak üzere t(i,j,k) dan itibaren aşağıdaki bileşenlerin kümesi olsun.

B,t nin (j+ı). sütunundaki t(i,j+1,k) da dahil olmak üzere t(i,j+1,k) dan itibaren yukarıdaki bileşenlerin kümesi olsun.

Yani I ve J indis kümeleri olmak üzere $A=\{a_i | i\in I\}$ ve $B=\{b_j : j\in J\}$ olsunlar. Bu durumda $S_A, S_B, S_{A\cup B}$ O_n nin altgruplarıdır. Son olarak $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r$ 'ler $S_A x S_B$ nin $S_{A\cup B}$ içindeki koset temsilcilerini göstermek üzere,

$$S_{A\cup B}=\bigcup_{j=1}^{r}\sigma_j(S_A x S_B) \text{ ve } G_{A,B}=\sum_{j=1}^{r}\mathrm{sgn}(\sigma_j)\sigma_j$$

olsun.

Tanım 4.5.4. $G_{A,B}$ elemanına t nin bir Garnir elemanı denir.

Hatırlatma 4.5.5. (i) Eğer A ve B nin elemanları t_λ ya ait ise bu durumda S_A, S_B ve S_{AUB} O_n nin sırasıyla A,B ve AUB üzerindeki permütasyonları tarafından üretilen altgruplarıdır. Ayrıca S_{AUB} nin bütün nagatif permütasyonlar tarafından üretilen altgrubu aynı zamanda $S_A x S_B$ ninde bir altgrubu olduğundan negatif permütasyonlar $S_A x S_B$ nin S_{AUB} içindeki koset temsilcileri olamazlar. Böylece bütün $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ koset temsilcileri pozitif permütasyonlardır.

(ii) Eğer A ve B nin elemanları t_μ ye ait ise bu durumda S_A, S_B ve S_{AUB} O_n nin sırasıyla A,B ve AUB üzerindeki pozitif permütasyonları tarafından üretilen altgruplarıdır.

(iii) $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ koset temsilcileri tek değildir. Fakat bu koset temsilcileri $\sigma_1 t,\ldots,\sigma_r t$ lerin sütunları aşağı doğru artan olacak şekilde seçilmelidir.

Örnek 4.5.6. $t=\begin{pmatrix}1 & 3 & & 56\\ 4 & -2 & , & 7\end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda Örnek 4.5.3 den biliyoruzki $e_t = e_{\begin{pmatrix}12 & & 56\\ 43 & , & 7\end{pmatrix}}$ dir.

Eğer $A=\{4\}, B=\{2,3\}$ ve $S_A x S_B$ nin S_{AUB} içindeki koset temsilcilerini (1),(3,4)(-3,-4),(2,3,4)(-2,-3,-4) olarak seçersek bu durumda,

$$G_{A,B} = (1)\text{-}(3,4)(-3,-4)+(2,3,4)(-2,-3,-4)$$

olur.

Şimdi H, O_n nin herhangi bir altkümesi olsun. Bu durumda $\overline{H}$

$$\overline{H} = \sum_{\sigma\in H} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $H=\{\sigma\}$ ise bu durumda $\overline{H}$ yerine $\overline{\sigma}=\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$ yazarız.

Lemma 4.5.7. H, O_n nin bir altgrubu olsun.

(i) Eğer (a,b)(-a,-b) pozitif transpozisyonu için (a,b)(-a,-b) $\in H$ ise bu durumda $k\in F[O_n]$ olmak üzere $\overline{H}=k((1)-(a,b)(-a,-b))$ dir.

(ii) Eğer $\gamma=\lambda$ (veya μ) olmak üzere a,b t_γ nın aynı satırına ait olacak şekilde t bir $(\lambda,\mu)-$ tablo ve (a,b)(-a,-b) $\in H$ ise bu durumda $\overline{H}\{t\}=0$ dır.

İspat (i) H nın $K=\{(1),(a,b)(-a,-b)\}$ altgrubunu gözönüne alalım. K nın H içindeki koset temsilcilerini $\sigma_1,\ldots,\sigma_s$ olarak seçersek,

$$H=\bigcup_{i=1}^{s}\sigma_i K$$

dır. Fakat $H=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_s,\sigma_1(a,b)(-a,-b),\ldots,\sigma_s(a,b)(-a,-b)\}$, olup

$$\overline{H}=\sum_{\sigma\in H}\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$$

$$=\mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1+\ldots+\mathrm{sgn}(\sigma_s)\sigma_s-\mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1(a,b)(-a,-b)-,\ldots,-\mathrm{sgn}(\sigma_s)\sigma_s(a,b)(-a,-b)$$

$$=\mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1((1)-(a,b)(-a,-b))+\ldots+\mathrm{sgn}(\sigma_s)\sigma_s((1)-(a,b)(-a,-b))$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\mathrm{sgn}(\sigma_i)\sigma_i((1)-(a,b)(-a,-b))$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\overline{\sigma}_i((1)-(a,b)(-a,-b))$$

$$= k\big((1) - (a,b)(-a,-b)\big)\,, \quad k = \sum_{i=1}^{s} \overline{\sigma}_i \in F[O_n]$$

dir.

(ii) Hipotezden (a,b)(-a,-b) $\in R_t$ olup (a,b)(-a,-b) $\{t\} = \{t\}$ dir. Diğer taraftan (a,b)(-a,-b) $\in H$ ise $\overline{H} = k\big((1) - (a,b)(-a,-b)\big)$ dir. Böylece,

$$\overline{H}\{t\} = k\big((1) - (a,b)(-a,-b)\big)\{t\} = k\big(\{t\} - \{t\}\big) = 0$$

dır.

Önerme 4.5.8. t bir $(\lambda,\mu)-$tablo ve A,B kümeleri t nin Garnir elemanının tanımındaki gibi olsunlar. Eğer $|A \cup B|$ t nin j. sütunundaki elemanların sayısından büyük ise bu durumda $G_{A,B}e_t = 0$ dır.

İspat : $\overline{S_A \times S_B} = \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} sgn(\sigma)\sigma$ ve $\overline{S_{A\cup B}} = \sum_{\sigma \in S_{A\cup B}} sgn(\sigma)\sigma$ olsun.

Herhangi $\sigma \in C_t$ elemanını gözönüne alalım. Eğer A ve B nin elemanları t_λ ya ait ise bu durumda hipotezden a,b $\in A \cup B$ pozitif tamsayıları mevcuttur öyleki, $c=\mp a$, $d=\mp b$ olmak üzere c,d σt_λ nın aynı satırına aittir. Böylece Hatırlatma 4.5.5.(i) den (c,d)(-c,-d) $\in S_{A\cup B}$ dir.

Eğer A ve B nin elemanları t_μ ye ait ise bu durumda hipotezden a,b $\in A \cup B$ pozitif tamsayıları mevcuttur öyleki, a,b σt_μ nün aynı satırına aittir. Böylece Hatırlatma 4.5.5(ii) den (a,b)(-a,-b) $\in S_{A\cup B}$ dir.

$\gamma = \lambda$ (veya μ) olmak üzere A ve B nin t_γ da gözüken elemanlarına göre (c,d)(-c,-d) veya (a,b)(-a,-b) aynı $S_{A\cup B}$ grubuna aittir.Dolayısıyla Lemma 4.5.7 de H yerine $S_{A\cup B}$ ve t yerine σt alırsak, $\overline{S_{A\cup B}}\{\sigma t\} = 0$ dır. Bu K_t de gözüken her σ için geçerli olduğundan $\overline{S_{A\cup B}}e_t = 0$ dır.

Şimdi $S_A x S_B$ nin $S_{A\cup B}$ içindeki koset temsilcilerini $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ olarak seçersek bu durumda $S_{A\cup B} = \bigcup_{j=1}^{r} \sigma_j(S_A x S_B)$ dolayısıyla, $\overline{S_{A\cup B}} = G_{A,B}\overline{S_A x S_B}$ dir.

$S_A x S_B \subset C_t$ olduğundan $\overline{S_A x S_B}$ K_t nin bir bileşenidir. Bundan dolayı

$$\overline{S_A x S_B}e_t = |S_A x S_B|e_t$$

dir. Gerçekten,

$$\overline{S_A x S_B}e_t = \sum_{\sigma\in S_A x S_B} sgn(\sigma)\sigma e_t\,,\ \sigma\in C_t \text{ lemma 4.3.3.(v) den}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_A x S_B} sgn(\sigma)\, sgn(\sigma) e_t$$

$$= |S_A x S_B| e_t$$

Böylece

$$0 = \overline{S_{A\cup B}}e_t = G_{A,B}\overline{S_A x S_B}e_t = G_{A,B}|S_A x S_B|e_t = |S_A x S_B|G_{A,B}e_t$$

$$\Rightarrow G_{A,B}e_t = 0$$

dır.

Örnek 4.5.9. $t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & 56 \\ 4-2 & & , & 7 \end{pmatrix}$ olsun. Örnek 4.5.3 den $e_t = e_{\begin{pmatrix} 12 & & 56 \\ 43 & \cdot & 7 \end{pmatrix}}$ dır.

$t' = \begin{pmatrix} 12 & & 56 \\ 43 & , & 7 \end{pmatrix}$ dersek Örnek 4.5.6 dan t' için Garnir elemanı

$$G_{A,B} = (1) - (3,4)(-3,-4) + (2,3,4)(-2,-3,-4)$$

olup, Önerme 4.5.8 den $G_{A,B}e_{t'} = 0$ dır. Böylece,

$$e_t = e_{t'} = e_{(3,4)(-3,-4)t'} - e_{(2,3,4)(-2,-3,-4)t'}$$

$$= e_{\begin{pmatrix}12 & 56\\34 & 7\end{pmatrix}} - e_{\begin{pmatrix}13 & 56\\24 & 7\end{pmatrix}}$$

dır.

Tanım 4.5.10. t_1 ve t_2 herhangi iki (λ,μ)-tablo olsun.Bu durumda,

$t_1 \approx t_2 \Leftrightarrow \pi t_1 = t_2$ olacak şekilde bir $\pi \in C_{t_1}$ varsa.

Şeklinde tanımlanan "$\approx$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Bu denklik bağıntısı sonucu ortaya çıkan denklik sınıflarına sütun (λ,μ)-tabloid adı verilir ve bir t (λ,μ)-tablosunun sütun denklik sınıfi $[t]$ ile gösterilir. Yani,

$$[t] = \{s \mid \text{bir } \pi \in C_t \text{ için } s = \pi t\}$$

şeklindedir.

Verilen herhangi bir $t = (t_\lambda, t_\mu)$ tablosu için $m'_{ir}(t_\lambda)$ ve $n'_{ir}(t_\mu)$ yü şöyle tanımlıyoruz.

$m'_{ir}(t_\lambda) =$"$|t_\lambda|$ nın ilk r sütunundaki i(i=1,2,..., n) ye eşit veya i den küçük olan elemanların sayısı."

$n'_{ir}(t_\mu) =$"t_μ nün ilk r sütunundaki i(i=$\mp$1, $\mp$2,... $\mp$n) ye eşit veya i den küçük olan elemanların sayısı."

Tanım 4.5.11. (λ,μ),n nin bir parçalanma çifti olmak üzere $[t]$ ve $[s]$ herhangi sütun (λ,μ)-tabloidler olsunlar. Bu dururumda

(a) Eğer her i $(1 \le i \le n)$ ve r için $m'_{ir}(t_\lambda) \le m'_{ir}(s_\lambda)$ ise bu durumda $[t_\lambda] \trianglelefteq [s_\lambda]$ dır.

(b) Eğer aşağıdaki şartlardan herhangi birisi gerçekleniyorsa bu durumda $[t_\mu] \trianglelefteq [s_\mu]$ dür.

(I) Eğer t_μ nün bazı bileşenleri negatif fakat s_μ nün bütün bileşenleri pozitif ise (Bu halde $[t_\mu] \triangleleft [s_\mu]$ dür.)

(II) Eğer her $i(i = \mp 1, \ldots, \mp n)$ ve r için $n'_{ir}(t_\mu) \le n'_{ir}(s_\mu)$ ise.

Böylece $[t_\lambda] \trianglelefteq [s_\lambda]$ ve $[t_\mu] \trianglelefteq [s_\mu]$ ise $[s]$ büyüktür $[t]$ denir ve $[t] \trianglelefteq [s]$ ile gösterilir.

Örnek 4.5.12. $t = \begin{pmatrix} 3\ 4 & , & -15 \\ -2 & & \end{pmatrix}$ ve $s = \begin{pmatrix} 1-3 & , & -45 \\ 2 & & \end{pmatrix}$ (21,2)-tablolar olsunlar. Bu durumda 5 satır ve 2 sütunlu $(m'_{ir}(t_\lambda))$ ve $(m'_{ir}(s_\lambda))$ matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$(m'_{ir}(t_\lambda)) = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{matrix} \qquad (m'_{ir}(s_\lambda)) = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

Dolayısıyla her $i(1 \le i \le 5)$ ve r için $m'_{ir}(t_\lambda) \le m'_{ir}(s_\lambda)$ olduğundan tanım 4.5.11.(a) gereğince $[t_\lambda] \triangleleft [s_\lambda]$ dır.

Şimdi t_μ ve s_μ negatif bileşenlere sahip olduğundan $(n'_{ir}(t_\mu))$ ve $(n'_{ir}(s_\mu))$ matrislerine bakmalıyız. Böylece 10 satır ve 2 sütunlu $n'_{ir}(t_\mu)$ ve $(n'_{ir}(s_\mu))$ matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$(n'_{ir}(t_\mu)) = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \qquad (n'_{ir}(s_\mu)) = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Dolayısıyla her $i(i=\mp 1,\ldots,\mp 5)$ ve r için $n'_{ir}(t_\mu) \leq n'_{ir}(s_\mu)$ olduğundan Tanım 4.5.11 (b).II gereğince $[t_\mu] \lhd [s_\mu]$ dür.

Böylece $[t_\lambda] \lhd [s_\lambda]$ ve $[t_\mu] \lhd [s_\mu]$ olup Tanım 4.5.11 den $[t] \lhd [s]$ dir.

Lemma 4.5.13. $[t]$ bir sütun (λ,μ)-tabloid olsun. Kabul edelimki, $a=\mp k$, $b=\mp \ell$ $(1 \leq k, \ell \leq n)$ olmak üzere t_γ da a b den daha soldaki sütuna ait olacak şekilde a,b sayıları gözüksün. Eğer aşağıdaki şartlardan birisi gerçekleniyorsa bu durumda $[t] \lhd$ (a,b)(-a,-b,)$[t]$ dir.

(i) $\gamma = \lambda$ ve $k > \ell$

(ii) $\gamma = \mu$ ve $a > b$

İspat: t_γ nın a p. sütununa ve b de q.sütununa ait olsun. Bu durumda hipotezden $p < q$ dur.

$$m'_{ir}((a,b)(-a,-b)t_\lambda) - m'_{ir}(t_\lambda) = \begin{cases} 1, & p \leq r < q \text{ ve } \ell \leq i < k \\ -1, & q \leq r < p \text{ ve } \ell \leq i < k \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$$n'_{ir}\left((a,b)(-a,-b)t_{\mu}\right) - n'_{ir}(t_{\mu}) = \begin{cases} 1, p \le r < q \text{ ve } b \le i < a \\ -1, q \le r < p \text{ ve } b \le i < a \\ 0, \text{ diğer hallerde} \end{cases}$$

eşitliklerini kullanarak Lemma 4.4.5 in ispatındaki yöntemle bu lemmayıda kolayca ispatlayabiliriz.

Teorem 4.5.14. $\{e_t | t \text{ standart bir } (\lambda,\mu)-\text{tablo}\}$ kümesi $S^{\lambda,\mu}$ yü gerer.

İspat: t herhangi bir (λ,μ)- tablo olsun. Bu durumda Lemma 4.5.1 ve Hatırlatma 4.5.2 den dolayı t yi daima bütün bileşenleri pozitif ve artan sütunlara sahip olarak kabul edebiliriz.

Kabul edelimki t standart olmasın. Bunun anlamı $\gamma = \lambda$ (veya μ) iken t_γ standart değildir. Tümevarım hipotezi olarak kabul edelimki $[s] \trianglerighteq [t]$ iken e_s standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilsin. Sonra aynı şeyi e_t için gösterelim.

Eğer t nin t_λ kısmi standart değilse bu durumda t_λ da enaz komşu iki j ve (j+1) sütunları vardır öyleki, bu sütunların bileşenleri sırasıyla $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ ve $b_1 < b_2 < \ldots < b_q$ olmak üzere bir i için $a_i > b_i$ dir. Böylece t_λ için aşağıdaki durum sözkonusudur.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & b_1 \\ \wedge & & \wedge \\ a_2 & & b_2 \\ \wedge & & \wedge \\ \vdots & & \vdots \\ \wedge & & \wedge \\ a_i & > & b_i \\ & & \wedge \\ \wedge & & \vdots \\ a_{i+1} & & \wedge \\ & & b_q \\ \wedge & & \\ \vdots & & \\ \wedge & & \\ a_p & & \end{array}$$

$A=\{a_i,a_{i+1},\ldots,a_p\}$ ve $B=\{b_1,\ldots,b_i\}$ olarak alalım ve bunlara karşılık gelen Garnir elemanını gözönünde bulunduralım.

Garnir elemanı $G_{A,B}=\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$ olup Önerme 4.5.8 den $G_{A,B}e_t=0$ dır. Böylece,

$$e_t=-\sum_{\sigma\neq(1)}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma e_t=-\sum_{\sigma\neq(1)}\operatorname{sgn}(\sigma)e_{\sigma t}$$

olur. $\sigma\neq(1)$ ve σ lar $S_A x S_B$ nin $S_{A\cup B}$ içindeki koset temsilcileri olduğundan $\sigma\notin S_A x S_B$ dir. Dolayısıyla σ nın $\sigma=\sigma_1\ldots\sigma_r$ transpozisyonların çarpımı olarak yazılışında kesinlikle enaz bir σ_j elemanı $\sigma_j=(a_j,b_k)(-a_j,-b_k)$ $(i\leq j\leq p, 1\leq k\leq i)$ formundadır. $b_1<b_2<\ldots<b_i<a_i<\ldots<a_p$ olduğundan ve Lemma 4.5.13 den $(a_j,b_k)(-a_j,-b_k)\,[t]\rhd[t]$ dir. Fakat $\sigma=\sigma_1\ldots\sigma_r$ yazılışında bazı σ_i ler S_A veya S_B de olabilir bu halde $\sigma_i[t]=[t]$ olduğundan bir sıkıntımız olmaz. O halde $[\sigma t]\trianglerighteq[t]$ dir. Buradan tümevarım hipotezinden dolayı $e_{\sigma t}$ standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$e_t=-\sum_{\sigma\neq(1)}\operatorname{sgn}(\sigma)e_{\sigma t}$$

olduğundan e_t de standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Eğer t nin t_μ kısmi standart değilse aynı yolla e_t yi standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazabiliriz.

Böylece herhangi bir t için e_t standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğinden $S^{\lambda,\mu}$ deki herhangi bir eleman standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Sonuç olarak $\{e_t \mid t \text{ standart bir } (\lambda,\mu)-\text{tablo}\}$ kümesi $S^{\lambda,\mu}$ yü gerer.

Örnek 4.5.15. $n = 2$ için O_2 hyperoctahedral grubunu gözönüne alalım. O_2 nin eşlenik sınıfları;

$$C_1 = \{(1)\},\ C_2 = \{(1,-1)(2,-2)\},\ C_3 = \{(1,-1),(2,-2)\},$$

$$C_4 = \{(1,2)(-1,-2),(1,-2)(-1,2)\},\ C_5 = \{(1,2,-1,-2),(2,1,-2,-1)\}$$

dir.

F, karakteri sıfır olan keyfi bir cisim olsun. i=1,2,3,4,5 için M^{λ_i,μ_i}, $F[O_2]$-modül olduğundan karakteri χ_i olan T_i matris representasyonları vardır.

$T_i^{(1)}$, $i = 1,2,3,4,5$ için $\chi_i^{(1)}$ karakteriyle S^{λ_i,μ_i} Specht modülüne karşılık gelen matris representasyonu olsun.

(i) $(\lambda_1,\mu_1)=(2,0)$ ise $\text{Boy}_F^{M^{\lambda_1,\mu_1}} = 2^2 \dfrac{2!}{2!} = 4$ dür. Böylece,

$$M^{\lambda_1,\mu_1} = Sp\{(\overline{12},\overline{\phi}),(\overline{1-2},\overline{\phi}),(\overline{-12},\overline{\phi}),(\overline{-1-2},\overline{\phi})\}$$

$$S^{\lambda_1,\mu_1} = S_p\{e_{(12,\phi)}\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_1^{(1)}$	1	1	1	1	1

(ii) $(\lambda_2,\mu_2) = (1^2,0)$ ise $\text{Boy}_F^{M^{\lambda_2,\mu_2}} = 2^2 \dfrac{2!}{1!1!} = 8$ dir. Böylece

$$M^{\lambda_2,\mu_2} = S_p\left\{\left(\overline{\tfrac{1}{2}},\overline{\phi}\right),\left(\overline{\tfrac{1}{-2}},\overline{\phi}\right),\left(\overline{\tfrac{-1}{2}},\overline{\theta}\right),\left(\overline{\tfrac{-1}{-2}},\overline{\theta}\right),\left(\overline{\tfrac{2}{1}},\overline{\theta}\right),\left(\overline{\tfrac{2}{-1}},\overline{\theta}\right),\left(\overline{\tfrac{-2}{1}},\overline{\theta}\right)\left(\overline{\tfrac{-2}{-1}},\overline{\theta}\right)\right\}$$

$$S^{\lambda_2,\mu_2} = S_p\left\{e_{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix},\ \phi\right)}\right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_2^{(1)}$	1	1	−1	−1	1

(iii) $(\lambda_3, \mu_3) = (1,1)$ ise $\text{Boy}_F M^{\lambda_3,\mu_3} = 2^1 . \dfrac{2!}{1!1!} = 4$ dür. Böylece

$$M^{\lambda_3,\mu_3} = \text{Sp}\left\{(\bar{1},\bar{2}),(\overline{-1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{1}),(\overline{-2},\bar{1})\right\}$$

$$S^{\lambda_3,\mu_3} = \text{Sp}\left\{e_{(1,2)}, e_{(2,1)}\right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_3^{(1)}$	2	−2	0	0	0

(iv) $(\lambda_4, \mu_4) = (0,1^2)$ ise $\text{Boy}_F M^{\lambda_4,\mu_4} = 2^0 . \dfrac{2!}{1!1!} = 2$ dir. Böylece

$$M^{\lambda_4,\mu_4} = \text{Sp}\left\{\left(\bar{\phi}, \frac{\bar{1}}{2}\right), \left(\bar{\phi}, \frac{\bar{2}}{1}\right)\right\}$$

$$S^{\lambda_4,\mu_4} = \text{Sp}\left\{e_{(\phi,\frac{1}{2})}\right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_4^{(1)}$	1	1	−1	1	−1

(v) $(\lambda_5, \mu_5) = (0,2)$ ise $\text{Boy}_F M^{\lambda_5,\mu_5} = 2^0 . \dfrac{2!}{2!} = 1$ dir. Böylece

$$M^{\lambda_5,\mu_5} = \text{Sp}\left\{(\bar{\phi}, \overline{12})\right\}$$

$$S^{\lambda_5,\mu_5} = \text{Sp}\left\{e_{(\phi,12)}\right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_5^{(1)}$	1	1	1	−1	−1

KAYNAKLAR

[1]Al-Aamily, E., Representation theory of Weyl groups of type B_n, Doktora Tezi, Wales Universitesi, Aberystwyth (1977)

[2]Al-Aamily, E., Morris, A.O., and Peel, M.H., The representations of the Weyl groups of type B_n, Journal of Algebra 68(1981), 298-305

[3]Can, H., The Representations of Complex Reflection Groups, Doktora Tezi, Wales Üniversitesi, Aberystwyth, 1995

[4]Carter, R.W., Conjugacy classes in the Weyl group, Comp. Math., 25 (1972)

[5]James, G.D., The irreducible representations of the symmetric groups, Bull. Lond. Math. Soc. (1976), 229-232

[6]James, G.D., The representation theory of the symmetric groups, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 632, Springer-Verlag Berlin. 1978

[7]James, G.D. and Leibeck, Martin., Representations and Characters of Groups. Cambridge University press, 1993

[8]Sagan, B.E., The symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions, Wadsworth and Brooks California, 1991

[9]Specht, W., Die irreduziblen darstellngen der symmetrichen gruppe, Math Z. 39 (1935), 679-711

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Kars'ın Selim ilçesinin Baykara köyünde doğdu. İlk öğrenimini doğduğu köyde orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1992 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 1996 yılında aynı bölümden dönem birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 1997 yılının Şubat ayında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Dekanlığının Araştırma Görevlisi kadrosuna atandı. Halen aynı fakültede Yüksek Lisans öğrenimine devam etmekte ve Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.