83417

A. Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN BERNSTEIN POLİNOMLARI

İbrahim BÜYÜKYAZICI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
1999

83417

Doç. Dr. Ertan İBİKLİ danışmanlığında, İbrahim BÜYÜKYAZICI tarafından hazırlanan bu çalışma 28/06/1999 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mustafa BALCI *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Kerim KOCA *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Ertan İBİKLİ *İmza* :

Üye : .... *İmza* :

Üye : .... *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Esma KILIÇ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN BERNSTEIN POLİNOMLARI

İbrahim BÜYÜKYAZICI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ertan İBİKLİ

Jüri: Doç. Dr. Ertan İBİKLİ
Prof.Dr. Mustafa BALCI
Prof.Dr. Kerim KOCA

Bu çalışmada; f(x,y), $[0,1;0,1]$ birim karesinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere, f(x,y) fonksiyonuna bağlı

$$B_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right) C_n^k C_m^j x^k (1-x)^{n-k} y^j (1-y)^{m-j} \quad ; \; 0 \le x,y \le 1$$

Bernstein polinomlar dizisinin f(x,y) fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı ispat edilmiştir. Daha sonra f(x,y) fonksiyonunun tam ve kısmı süreklilik modülleri yardımıyla bu yaklaşmanın hızı değerlendirilmiştir. Burada f(x,y) fonksiyonunun tam süreklilik modülü

$$\omega(f;\delta) = \underset{\substack{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \le \delta \\ 0 \le x_1, x_2, y_1, y_2 \le 1}}{\text{Max}} \left| f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2) \right|$$

olup x ve y değişkenlerine göre kısmı süreklilik modülleri sırasıyla

$$\omega^{(1)}(f;\delta) = \underset{y \in [0,1]}{\text{Max}} \; \underset{|x_1-x_2| \le \delta}{\text{Max}} \left| f(x_1,y) - f(x_2,y) \right|$$

$$\omega^{(2)}(f;\delta) = \underset{x \in [0,1]}{\text{Max}} \; \underset{|y_1-y_2| \le \delta}{\text{Max}} \left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right|$$

dır.

1999 , 49 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Lineer pozitif operatör, süreklilik modülü

ABSTRACT

Master Thesis

BERNSTEIN POLINOMIALS OF TWO VARIABLE FOUNCTIONS

İbrahim BÜYÜKYAZICI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc.prof. Dr. Ertan İBİKLİ

Jurry : Assoc.prof. Dr. Ertan İBİKLİ
Prof.Dr. Mustafa BALCI
Prof.Dr. Kerim KOCA

In this study, f(x,y) is a continuous function which is defined in [0,1;0,1] unit square and Bernstein polynomials which is related to f(x,y) function;

$$B_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)C_n^k C_m^j x^k(1-x)^{n-k}y^j(1-y)^{m-j} \quad ;\ 0\le x,y\le 1$$

It is proven that Bernstein polynomials sequence is uniform convergent to f(x,y). Then by means of full and partial continuity moduli of function f(x,y) rate of this convergence has been evaluated. Where, full continuity modulus of function f(x,y) is

$$\omega(f;\delta)=\underset{\substack{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\le\delta\\ 0\le x_1,x_2,y_1,y_2\le 1}}{\mathrm{Max}}\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|$$

and its partial continuity moduli with respect to x and y, are

$$\omega^{(1)}(f;\delta)=\underset{y\in[0,1]}{\mathrm{Max}}\ \underset{|x_1-x_2|\le\delta}{\mathrm{Max}}\left|f(x_1,y)-f(x_2,y)\right|$$

$$\omega^{(2)}(f;\delta)=\underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Max}}\ \underset{|y_1-y_2|\le\delta}{\mathrm{Max}}\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| \quad \text{respectively.}$$

1999 , 49 pages

Key Words : Linear positive operator , continuity modulus .

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamım her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Ertan İBİKLİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye ve yardımlarını gördüğüm Sayın Prof. Dr. Akif HACIYEV (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İbrahim BÜYÜKYAZICI
Ankara , 1999

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Bernstein polinomları matematiğin belki de en çok araştırılmış objelerindendir. Oluşturulduğu 1912 yılından bu yana bu polinomlara ait binlerce makaleler ve kitaplar basılmasına rağmen, Bernstein polinomları bugüne değin matematikçilerin dikkat merkezindedir. Bu da Bernstein polinomlarının önemini göstermektedir.

Bir değişkenli Bernstein polinomlarının temel yapısı, a ve b pozitif sayılar, n bir doğal sayı olmak üzere

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

binom formülü ile bağlıdır. Bu formülde, $x \in [0,1]$ olmak üzere, $a = x$, $b = 1-x$ seçersek

$$1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{1}$$

özdeşliğini elde ederiz ve bu son özdeşlik klasik Bernstein polinomunun temelini oluşturan bir formüldür.

Kabul edelim ki f, $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun ve yine kabul edelim ki bu f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının, $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$ rasyonel noktalarındaki değerleri belli olsun. Bundan yararlanarak

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{2}$$

polinomlarını oluşturalım.

(2) formülünden görüldüğü gibi her belirli n doğal sayısı için $B_n(f;x)$ bir n mertebeli polinomdur. Bu polinomlara, $[0,1]$ aralığına bağlı Bernstein polinomları denir. Bu kadar basit bir yapısı olmasına rağmen, Bernstein polinomları çok önemli özelliklere sahiptir. Bu özelliklerden bazılarını belirtelim :

1) Bernstein polinomlarının katsayıları, verilen f fonksiyonunun rasyonel noktalardaki değerleri ile bağlıdır ve bundan dolayı f fonksiyonuna $B_n(f;x)$ Bernstein polinomlarının doğuran fonksiyonu denir.

2) Verilen f fonksiyonuna, B_nf polinomlarını karşılık getiren kurala B_n dersek ,

$$B_n : f(x) \to B_n(f;x)$$

Buradan görülür ki B_n her belirli n için bir doğrusal operatördür.

3) $C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ ifadesi $x \in [0,1]$ için pozitif olduğundan, görürüz ki $[0,1]$ aralığında $f(x) \geq 0$ olduğunda $B_n(f;x)$ de aynı aralıkta $B_n(f;x) \geq 0$ özelliğine sahiptir. Dolayısıyla B_n kuralı sürekli pozitif f fonksiyonunu pozitif bir $B_n(f;x)$ fonksiyonuna (polinomuna) dönüştürmektedir. Bu da B_n' lerin lineer pozitif operatörler olduğunu göstermektedir.

4) Olasılık teorisinden bildiğimiz gibi

$$C_n^k p^k (1-q)^{n-k}$$

Bernolli formülü ile rasgele kemiyetlerin binomial dağılımı ifade olunur. Dolayısıyla Bernstein polinomları bu tür dağılımların toplamı ile bağlı polinomlardır.

5) Bernstein'in klasik teoremine göre $n \to \infty$ iken $B_n(f;x)$ polinomları $[0,1]$ aralığında $f(x)$ 'e düzgün yakınsar. Dolayısıyla, sürekli fonksiyona yakınsayan polinomların sadece Weierstrasse teoreminde kanıtlanan varlığı değil, bu polinomların yapısı da gösterilmektedir.

6) Bernstein polinomlarının özelliklerinden yararlanarak H.Bohman ve P.P.Korovkin " Lineer pozitif operatörler ve yaklaşımlar teorisi " gibi bir büyük dalın temelini koyan teoremler ispatlamışlardır.

7) Bernstein polinomlarının yapısını kullanarak L.Kantorovich integrallenebilir (yani, hatta, sürekli olmayan) fonksiyonlara yaklaşan operatör dizileri tanımlamış ve incelemiştir.

Tabii ki Bernstein polinomlarının özellikleri söylediğimiz 1 – 7 özelliklerle bitmez. Fakat sadece bu özellikler de $B_n(f;x)$ polinomlarının araştırılmasının önemli olduğunu göstermektedir.

Bu çalışmada, $D = [0,1;0,1]$ karesinde sürekli $f(x,y)$ fonksiyonlarına bağlı Bernstein polinomlarının bazı özellikleri incelenmektedir. Tezde bu polinomların D karesinde $f(x,y)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması ve bu yakınsamanın hızı araştırılacaktır. Yakınsama hızı f fonksiyonunun süreklilik modüllerinin yardımıyla verilmektedir.

2. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR SINIFINDA YAKLAŞIM PROBLEMİ

2.1 C(D) Uzayı ve Süreklilik Modülleri

Önce sürekli iki değişkenli fonksiyonlar uzayını tanımlayalım.

Tanım2.1.1: $D = [0,1;0,1]$ olmak üzere bu karede tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar uzayını C(D) ile gösterelim.

Lemma2.1.2: C(D) lineer normlu uzaydır ve bu uzayda norm

$$\|f\|_{C(D)} = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)| \tag{3}$$

olarak tanımlanabilir.

İspat: f_1 , $f_2 \in C(D)$ olduğunda her reel α , β sayıları için $\alpha f_1 + \beta f_2 \in C(D)$ olduğu açıktır. Yani C(D) lineer uzaydır. (3)' den görüldüğü gibi bu ifadenin sağ tarafı pozitiftir ve $\max_{(x,y)\in D} |f(x,y)| = 0$ ise her $(x,y)\in D$ için $f(x,y) = 0$ olduğu görülmektedir. Ayrıca , her $(x,y) \in D$ için $f(x,y) = 0$ ise $\max_{(x,y)\in D} |f(x,y)| = 0$ dır ve dolayısıyla

$$\|f\|_{C(D)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0$$

dır.

α bir reel sabit sayısı olmak üzere

$$\underset{(x,y)\in D}{\text{Max}}|\alpha f(x,y)| = |\alpha| \underset{(x,y)\in D}{\text{Max}}|f(x,y)|$$

eşitliği gösteriyor ki

$$\|\alpha f\|_{C(D)} = |\alpha| \|f\|_{C(D)}$$

dır.

Ayrıca , üçgen eşitsizliğine göre

$$\underset{(x,y)\in D}{\text{Max}}|f_1(x,y)+f_2(x,y)| \le \underset{(x,y)\in D}{\text{Max}}|f_1(x,y)| + \underset{(x,y)\in D}{\text{Max}}|f_2(x,y)|$$

dır ve bu da

$$\|f_1+f_2\|_{C(D)} \le \|f_1\|_{C(D)} + \|f_2\|_{C(D)}$$

olduğunu göstermektedir.
Dolayısıyla (3) ifadesi normun tüm özelliklerini sağlar ve bu da ispatı tamamlar.

Tanım2.1.3: n,m doğal sayılar olmak üzere $\{f_{n,m}\}$, C(D) uzayında bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer $f \in C(D)$ olmak üzere

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_{n,m}-f\|_{C(D)} = 0 \qquad (4)$$

ise, bu durumda $\{f_{n,m}\}$, fonksiyon dizisi f fonksiyonuna C(D) uzayında yakınsar denir.

Lemma2.1.4: C(D) uzayının elemanlarından oluşturulmuş $\{f_{n,m}\}$, dizisinin C(D) uzayında bir f fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter koşul bu dizinin aynı fonksiyona D karesinde düzgün yakınsamasıdır.

İspat: Tanıma göre, her pozitif ε sayısı verildiğinde, $n,m > N$ olmak üzere D' de olan tüm (x,y) noktaları için

$$\left|f_{n,m}(x,y) - f(x,y)\right| < \varepsilon \qquad (5)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunursa, $\{f_{n,m}\}$ dizisi f fonksiyonuna D' de düzgün yakınsaktır.

Kabul edelim ki (5) sağlansın. Bu durumda, (5) tüm $(x,y) \in D$ için sağlandığından dolayı, $n,m > N$ olduğunda

$$\max_{(x,y)\in D}\left|f_{n,m}(x,y) - f(x,y)\right| < \varepsilon$$

dır. Bu ise (3) formülüne göre $n,m > N$ için

$$\left\|f_{n,m} - f\right\|_{C(D)} < \varepsilon \qquad (6)$$

olduğunu göstermektedir.

Dolayısıyla, $\{f_{n,m}\}$ dizisi D karesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunda, her pozitif ε' na göre öyle bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunur ki $n,m > N$ için (6) sağlanır. Bu ise (4) eşitliğinin sağlandığını göstermektedir ve lemmanın yeterlilik kısmı ispatlanmış olur.

Şimdi kabul edelim ki (4) sağlansın. Bu durumda, limitin tanımına göre her $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunur ki $n,m > N$ için

$$\max_{(x,y)\in D}\left|f_{n,m}(x,y) - f(x,y)\right| < \varepsilon$$

dır. Bu taktirde D' de olan tüm (x,y) noktaları için (5) sağlanır ve bu da $\{f_{n,m}\}$ dizisinin D karesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığını gösterir. Yani lemmanın gereklilik kısmı da ispatlanmış oldu.

Sonuç2.1.5: C(D) uzayının normuna göre yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır.

Sonuç2.1.6: C(D) uzayının elemanlarından oluşturulmuş bir $\{f_{n,m}\}$ dizisi C(D) uzayında bir f fonksiyonuna yakınsadığı taktirde her belirli $(x_0, y_0) \in D$ için

$$\lim_{n,m\to\infty} f_{n,m}(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$$

dır.

İspat: Sonuç2.1.5'e göre (4) sağlanır. Yani $n,m \to \infty$ iken

$$\max_{(x,y)\in D}\left|f_{n,m}(x,y) - f(x,y)\right| \to 0$$

dır ve $(x_0, y_0) \in D$ için

$$\left|f_{n,m}(x_0,y_0) - f(x_0,y_0)\right| \le \max_{(x,y)\in D}\left|f_{n,m}(x,y) - f(x,y)\right|$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Şimdi de C(D)'de olan iki değişkenli fonksiyonların süreklilik modüllerini tanımlayalım. Kısalık için aşağıdaki işaretleri kabul edelim ve bu işaretleri diğer bölümlerde de kullanacağımızı bildirelim.

İşaretler: $D = [0,1;0,1]$ karesinin farklı noktalarını $M_k = (x_k, y_k)$, $k = 1,2,3,...$ ve iki M_k ve M_j noktaları arasındaki uzaklığı $\rho(M_k, M_j)$ olarak gösterelim:

$$\rho(M_k, M_j) = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}\ .$$

Tanım2.1.7: f fonksiyonu D karesinde sürekli bir fonksiyon, δ pozitif bir sayı olmak üzere

$$\omega(f;\delta) = \max_{\substack{\rho(M_1,M_2)\le\delta \\ M_1,M_2\in D}} \left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right| \qquad (7)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun <u>tam süreklilik modülü</u> denir.

Şimdi bu süreklilik modülünün bazı özelliklerini inceleyelim.

Lemma2.1.8: $\omega(f;\delta)$, δ değişkenine göre

a) Negatif olmayan , monoton artan bir fonksiyondur.

b) $\omega(f;\delta)=0$ olması için gerek ve yeter koşul f nin sabit olmasıdır.

c) $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega(f;\delta)=0$ dır.

İspat: a) Şıkkının ispatı açıktır. Çünkü (7)' den görüldüğü gibi $\omega(f;\delta)$ negatif olamaz, ayrıca $\delta_1 < \delta_2$ olduğunda

$$\{(M_1,M_2)\in D:\ \ \rho(M_1,M_2)\le\delta_1\}\subset\{(M_1,M_2)\in D:\ \ \rho(M_1,M_2)\le\delta_2\}$$

olduğundan ve küme genişledikçe maksimum artacağından dolayı

$$\omega(f;\delta_1)\le\omega(f;\delta_2)$$

dır.

b) şıkkını ispatlamak için (7) formülünü ele alalım. C sabit bir sayı olmak üzere $f(x,y)\equiv C$ ise $\omega(C;\delta)=0$ olduğu açıktır.

Ayrıca $\omega(f;\delta)\equiv 0$ ise

$$\max_{\rho(M_1,M_2)\le\delta} |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \equiv 0$$

dır, buradan da $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=0$ ve $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$ olduğunu görürüz. (x_k,y_k) , D karesinin keyfi noktaları olduğundan f sabit fonksiyondur.

c) şıkkını ispatlayalım. f, D' de sürekli ve D kapalı bir bölge olduğundan f, D' de düzgün süreklidir. Yani her $\varepsilon>0$' a göre sadece bu ε' na bağlı δ_1 sayısı bulunur öyle ki $\rho(M_1,M_2)<\delta_1$ olduğunda

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| < \varepsilon \tag{8}$$

dur.

$\delta \to +0$ olduğu için, $\delta<\delta_1$ alabiliriz ve bu durumda $\rho(M_1,M_2)<\delta$ eşitsizliği $\rho(M_1,M_2)<\delta_1$ eşitsizliğini gerektirir ve (8) sağlanır. Bundan dolayı

$$\max_{\substack{\rho(M_1,M_2)\le\delta \\ M_1,M_2\in D}} |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| < \varepsilon$$

olur ve bu da $\omega(f;\delta)<\varepsilon$ anlamına gelir.

Lemma2.1.9: n bir doğal sayı olmak üzere

$$\omega(f;n\delta) \le n\,\omega(f;\delta)$$

dır.

İspat: h pozitif bir sayı olmak üzere $x_2=x$, $x_1=x+h$, $y_2=y$, $y_1=y+h$ alınırsa $M_1=(x+h,y+h)$, $M_2=(x,y)$ ve

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{2}\,h$$

olduğunu görürüz.

Bu durumda tam süreklilik modülünün tanımı olan (7) formülüne göre

$$\omega(f;\delta) = \max_{h \le \frac{\delta}{\sqrt{2}},(x,y)\in D} \left| f(x+h, y+h) - f(x,y) \right| \tag{9}$$

olduğu açıktır ve buradan da

$$\omega(f;n\delta) = \max_{h \le \frac{n\delta}{\sqrt{2}},(x,y)\in D} \left| f(x+h, y+h) - f(x,y) \right|$$

elde ederiz. Bu ise (h' ı nh ile dönüştürürsek)

$$\omega(f;n\delta) = \max_{h \le \frac{\delta}{\sqrt{2}},(x,y)\in D} \left| f(x+nh, y+nh) - f(x,y) \right| \tag{10}$$

anlamına gelir. Sağ taraftaki fark ifadesini şu şekilde yazalım,

$$f(x + nh,y +nh) - f(x,y) = f(x + nh,y +nh) - f(x + (n-1)h,y +(n-1)h) +$$

$$f(x + (n-1)h,y + (n-1)h)- f(x + (n-2)h,y +(n-2)h) + f(x + (n-2)h,y +(n-2)h) - \ldots$$

$$+ \; f(x +h,y+h) - f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x+kh, y+kh) - f(x+(k-1)h, y+(k-1)h) \right].$$

Bu taktirde

$$\left| f(x+nh, y+nh) - f(x,y) \right| \le \sum_{k=1}^{n} \left| f(x+kh, y+kh) - f(x+(k-1)h, y+(k-1)h) \right|$$

eşitsizliğini elde ederiz ve her iki taraftan tüm D karesinde olan (x,y) noktalarına göre ve $h \leq \frac{\delta}{2}$ olan h' lara göre maksimum alınırsa (9) ve (10) formüllerinden dolayı

$$\omega(f;n\delta) \leq \sum_{k=1}^{n} \omega(f;\delta) = n\,\omega(f;\delta)$$

elde ederiz.

Sonuç2.1.10: λ keyfi pozitif sayı olmak üzere

$$\omega(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\,\omega(f;\delta)$$

dır.

İspat: $[\![\lambda]\!]$ ile λ sayısının tam kısmını gösterirsek

$$[\![\lambda]\!] \leq \lambda \leq [\![\lambda]\!]+1$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu durumda $\omega(f;\delta)$ fonksiyonu monoton olduğuna göre

$$\omega(f;\lambda\delta) \leq \omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta)$$

dır ve ($[\![\lambda]\!]$ + 1) tam sayı olduğu için **lemma2.1.9'** dan dolayı

$$\omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta) \leq ([\![\lambda]\!]+1)\,\omega(f;\delta)$$

dır ve buna göre

$$\omega(f;\lambda\delta) \leq ([\lambda] + 1)\omega(f;\delta).$$

Son olarak $[\lambda] < \lambda$ olduğu kullanılırsa ispat tamamlanır.

Tanım2.1.11: f fonksiyonu $D = [0,1;0,1]$ karesinde sürekli bir fonksiyon δ pozitif bir sayı olmak üzere

$$\omega^{(1)}(f;\delta) = \max_{(x_1,y),(x_2,y)\in D} \max_{|x_1-x_2|\leq\delta} |f(x_1,y) - f(x_2,y)| \tag{11}$$

ve

$$\omega^{(2)}(f;\delta) = \max_{(x,y_1),(x,y_2)\in D} \max_{|y_1-y_2|\leq\delta} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \tag{12}$$

fonksiyonlarına sırasıyla f fonksiyonunun x değişkenine ve y değişkenine göre <u>kısmi süreklilik modülleri</u> denir.

Tam süreklilik modülünün özelliklerinin ispatlarını tekrarlayarak kolayca gösterilebilir ki kısmi süreklilik modülleri **Lemma2.1.9** ve **Lemma2.1.10'** daki özelliklere sahiptirler.

Tanım2.1.12: Eğer $D = [0,1;0,1]$ karesinde tanımlı f fonksiyonu, M_1 ve M_2 bu karenin keyfi noktaları olmak üzere,

$$|f(M_1) - f(M_2)| \leq C\rho^{\alpha}(M_1,M_2) \quad , 0<\alpha<1 \tag{13}$$

koşulunu sağlarsa, f fonksiyonu D karesinde Lipschitz koşulunu sağlar veya Lipα sınıfındandır denir. Burada C Lipschitz sabiti denilen bir sabit sayıdır.

Tanım2.1.13: Eğer $D = [0,1;0,1]$ karesinde tanımlı f fonksiyonu (x_1,y) ve (x_2,y) bu karenin keyfi noktaları olmak üzere

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| \leq C|x_1 - x_2|^{\alpha} \quad , \quad 0<\alpha<1 \qquad (14)$$

koşulunu sağlarsa, o zaman f fonksiyonu D karesinde x değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar veya x değişkenine göre Lipα sınıfındandır denir ve bu $f \in Lip_y \alpha$ biçiminde yazılır. Benzer şekilde (x,y_1) ve (x,y_2) D karesinin keyfi noktaları olmak üzere

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq C|y_1 - y_2|^{\alpha} \quad , \quad 0<\alpha<1 \qquad (15)$$

koşulunu sağlarsa, f fonksiyonu y değişkenine Lipα sınıfındandır denir ve bu $f \in Lip_x \alpha$ olarak gösterilir. (13) formülünden görüldüğü gibi

$$\lim_{M_1 \to M_2} |f(M_1) - f(M_2)| = 0$$

dır ve dolayısıyla D karesinde $f \in lip\alpha$ ise, her M_1 , $M_2 \in D$ için

$$\lim_{M_1 \to M_2} f(M_1) = f(M_2)$$

dır ve f, D karesinde süreklidir.

Benzer şekilde D karesinde $f \in Lip_y \alpha$ veya $f \in Lip_x \alpha$ olduğu durumda f sırasıyla x ve y değişkenlerine göre süreklidir.

Kabul edelim ki $f \in lip\alpha$ olsun. Bu durumda (7) formülünden görüldüğü gibi

$$\omega(f;\delta) = \max_{\substack{\rho(M_1,M_2)\le\delta \\ M_1,M_2\in D}} \left|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\right|$$

$$\le C \max_{\rho(M_1,M_2)\le\delta} \rho^{\alpha}(M_1,M_2) \le C\delta^{\alpha} \qquad (16)$$

dolayısıyla $f \in lip\alpha$ ise (16)' dan dolayı

$$\omega(f;\delta) \le C\delta^{\alpha} \qquad (17)$$

dır.

Benzer şekilde (11) ve (12) formüllerinden görüldüğü gibi $f \in Lip_y\alpha$ olduğunda

$$\omega^{(1)}(f;\delta) \le C\delta^{\alpha} \qquad (18)$$

ve $f \in Lip_x\alpha$ olduğunda

$$\omega^{(2)}(f;\delta) \le C\delta^{\alpha} \qquad (19)$$

dır.

Kabul edelim ki $f \in Lip_y\alpha$ ve $f \in Lip_x\beta$ dır, $0<\alpha,\beta<1$. Bu durumda (14) ve (15) formüllerine göre

$$\left|f(x_1,y) - f(x_2,y)\right| \le C_1\left|x_1 - x_2\right|^{\alpha}$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le C_2|y_1-y_2|^{\beta}$$

yazabiliriz. Bundan dolayı

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \le |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)|+|f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)|$$

$$\le C_1|x_1-x_2|^{\alpha}+C_2|y_1-y_2|^{\beta} \qquad (20)$$

elde edilir.

$\rho(M_1,M_2)\le\delta$ iken $|x_1-x_2|\le\delta$ ve $|y_1-y_2|\le\delta$ olması açıkça görüldüğü için (20) formülünün her iki tarafından maksimum alarak tam süreklilik modülü için

$$\omega(f;\delta)\le C_1\delta^{\alpha}+C_2\delta^{\beta} \qquad (21)$$

elde edilir.

Son olarak belirtelim ki süreklilik modüllerinin tanımlarından görüldüğü gibi D karesinin noktalarında

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \le \omega(f;\rho(M_1,M_2)) \qquad (22)$$

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)| \le \omega^{(1)}(f;|x_1-x_2|) \qquad (23)$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le \omega^{(2)}(f;|y_1-y_2|) \qquad (24)$$

eşitsizliklerinin sağlandığı açıktır. Çünkü (22)' yi elde etmek için (7) formülünde $\delta=\rho(M_1,M_2)$, (23) ve (24) için ise (11) ve (12) formüllerinde sırasıyla $\delta=|x_1-x_2|$ ve $\delta=|y_1-y_2|$ olarak almak yeterlidir.

(22) , (23) ve (24) formülleri süreklilik modüllerinin en çok kullanılan özellikleridir.

2.2.C(D) Uzayında Karleson Probleminin Çözümü

Aşağıdaki problem Karleson tarafından önerilmiş ve Bohman tarafından çözülmüştür.

$[0,1]$ aralığının n ardışık arakesiti olmayan parçaya bölündüğünü kabul edelim ve $0 = \alpha_{0,n} < \alpha_{1,n} < \alpha_{2,n} < \dots < \alpha_{n,n} = 1$ parçaların uç noktaları olsun. Ayrıca, $(P_{k,n}(x))$ $k = 0,1,2,\dots,n$; $n = 1,2,\dots$ bu aralıkta tanımlı sürekli ve negatif olmayan fonksiyonlar matrisi olsun. f, $[0,1]$ aralığında verilen sürekli bir fonksiyon olmak üzere şöyle bir toplam oluşturalım:

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x) \qquad (25)$$

burada $0 \le x \le 1$, $n = 1,2,3,\dots$ dır.

Tanım2.2.1: Eğer $\{L_n(f;x)\}$ dizisi $n \to \infty$ iken f(x) fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak ise, o zaman $\{L_n(f;x)\}$ dizisi f(x) fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümüdür denir. Düzgün yakınsama

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \quad , \quad n \to \infty$$

olarak gösterilir.

Karleson Problemi: $\alpha_{k,n}$ ve $P_{k,n}(x)$ hangi koşulları sağladığı taktirde $\{L_n(f;x)\}$ dizisi verilen sürekli f(x) fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümüdür?

(25) ve (2) formüllerinin karşılaştırılması gösteriyor ki

$$\alpha_{k,n} = \frac{k}{n} \quad , \quad P_{k,n}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

özel durumunda $L_n(f;x) = B_n(f;x)$ dır, yani $L_n(f;x)$ Bernstein polinomlarıdır. Bernstein teoremine göre $[0,1]$ aralığında

$$B_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \quad , \quad n \to \infty$$

olduğu için, bu özel durumda $\{B_n(f;x)\}$ dizisi sürekli $f(x)$ fonksiyonu için Karleson probleminin çözümüdür diyebiliriz.

Genel durumda Karleson probleminin çözümünü aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem2.2.2(Bohman): (25) formülü ile tanımlanmış $\{L_n(f;x)\}$ dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul bu dizinin

$$f_1(t) = 1 \ , \ f_2(t) = t \ \text{ ve } \ f_3(t) = t^2$$

üç fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümü olmasıdır.

(25) formülünde f fonksiyonu yerine üç fonksiyonu yazarsak

$$f_1(\alpha_{k,n}) = 1, \quad f_2(\alpha_{k,n}) = \alpha_{k,n}, \quad f_3(\alpha_{k,n}) = \alpha_{k,n}^2$$

olduğu göz önüne alınmalı ve dolayısıyla Bohman teoremine göre $[0,1]$ aralığında

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \quad , \quad n \to \infty$$

olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır,

$$\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x) \rightrightarrows 1 \quad , \quad n \to \infty$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n} P_{k,n}(x) \rightrightarrows x \quad , \quad n \to \infty$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n}^2 P_{k,n}(x) \rightrightarrows x^2 \quad , \quad n \to \infty .$$

Şimdi $D = [0,1;0,1]$ olmak üzere $C(D)$ uzayında (yani iki değişkenli sürekli fonksiyonlar uzayında) Karleson problemini ifade edelim.

n ve m belirlenmiş doğal sayılar olmak üzere ox- ekseninde $[0,1]$ aralığını yukarda ki gibi $\alpha_{k,n}$, $k = 0,1,2,...,n$ noktalarıyla

$$0 = \alpha_{0,n} < \alpha_{1,n} < \alpha_{2,n} < \ldots < \alpha_{n,n} = 1$$

parçalara bölelim ve ayrıca oy- ekseninde $[0,1]$ aralığını $\beta_{j,m}$, $j = 0,1,2,...,m$

$$0 = \beta_{0,m} < \beta_{1,m} < \beta_{2,m} < \ldots < \beta_{m,m} = 1$$

parçalara bölelim.

$\left(P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right)$, D karesinde sürekli pozitif fonksiyonlar matrisi olduğunu kabul edelim. f, D karesinde sürekli fonksiyon olmak üzere şöyle bir toplam oluşturalım:

$$T_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \qquad (26)$$

Problem(iki değişkenli Karleson problemi) : $\alpha_{k,n}$, $\beta_{j,m}$ sayıları ve $P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$ fonksiyonları hangi koşulları sağlamalıdır ki

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|T_{n,m}f-f\right\|_{C(D)}=0 \qquad (27)$$

olsun?

Bu problemin çözümü aşağıdaki teorem biçiminde verilir.

Teorem2.2.3: (26) dizisi C(D) de olan f fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümü olması için, yani (27) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşullar

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(D)}=0 \qquad (28)$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(D)}=0 \qquad (29)$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(D)}=0 \qquad (30)$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\alpha_{k,n}^{2}+\beta_{j,m}^{2})P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-(x^{2}+y^{2})\right\|_{C(D)}=0 \qquad (31)$$

dır.

İspat: C(D) uzayında olan f fonksiyonu için (27)'nin ispatlandığını kabul edelim. Bu taktirde

$$f_1(x,y) = 1 \ , \ f_2(x,y) = x \ , \ f_3(x,y) = y \ , \ f_4(x,y) = x^2 + y^2$$

fonksiyonlarından her biri C(D) uzayının elemanı olduğu için (27) bu fonksiyonlar için de geçerlidir. Dolayısıyla bu durumda (28) , (29) , (30) ve (31) koşulları sağlanır ve bu da bu koşulların gerekli olduğunu ispatlar. Şimdi koşulların yeterli olduğunu ispatlayalım.

Kabul edelim ki $T_{n,m}(f;x,y)$, (26) formülü ile tanımlanmış olmak üzere (28) , (29) , (30) ve (31) koşulları sağlansın ve f, C(D) uzayının elemanı olsun.

f, kapalı D karesinde sürekli olduğundan, öyle bir M sabit sayısı bulunabilir ki D de olan tüm (x,y) noktaları için

$$|f(x,y)| \leq M$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda her $k = 0,1,2,...,n$ ve $j = 0,1,2,...m$ için $(\alpha_{k,n} , \beta_{j,m})$ noktaları D karesinde olduğu için

$$|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}) - f(x,y)| \leq 2M \tag{32}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Kısalık için $M_{k,j} = (\alpha_{k,n} , \beta_{j,m})$, $M = (x,y)$ işaretlerini kabul edelim.

Bu durumda yine f in düzgün sürekliliğinden dolayı her pozitif ε sayısına karşılık sadece bu ε'na bağlı bir δ sayısı bulunabilir öyle ki $\rho(M_{k,j} , M) < \delta$ olduğunda

$$\left|f(M_{k,j})-f(M)\right|<\varepsilon \tag{33}$$

sağlanır.

$\rho(M_{k,j}, M) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $M_{k,j}$ noktalarının dışında kalan D karesinin noktaları $\rho(M_{k,j}, M) \geq \delta$ eşitsizliğini sağlar. Bu durumda

$$M \leq M\frac{\rho^2(M_{k,j},M)}{\delta^2}$$

eşitsizliği sağlandığından (32) eşitsizliğini

$$\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y)\right| \leq 2M\frac{\rho^2(M_{k,j},M)}{\delta^2} \tag{34}$$

Dolayısıyla, $\rho(M_{k,j}, M) < \delta$ olduğunda (33) , $\rho(M_{k,j}, M) \geq \delta$ olduğunda ise (34) sağlandığı için D karesinde olan tüm $M_{k,j}$ noktaları için

$$\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y)\right| < \varepsilon + 2M\frac{\rho^2(M_{k,j},M)}{\delta^2} \tag{35}$$

eşitsizliği sağlanır.

Gerçekten de $\rho(M_{k,j}, M) < \delta$ olduğunda (35) eşitsizliği (33) den $2M\frac{\rho^2(M_{k,j},M)}{\delta^2} > 0$ olduğu için elde edilir. $\rho(M_{k,j}, M) \geq \delta$ olduğunda ise (35) eşitsizliği (34) den $\varepsilon > 0$ olduğu için elde edilir.

Şimdi de şöyle bir toplamı ele alalım

$$I_{n,m} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}) - f(x,y)\right| P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \tag{36}$$

(35)'i kullanırsak $P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$ fonksiyonlarının negatif olmadığından dolayı

$$I_{n,m} < \varepsilon \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) + \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\rho^2(M_{k,j},M) P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$= \varepsilon\, I'_{n,m} + \frac{2M}{\delta^2} I''_{n,m} \tag{37}$$

burada

$$I'_{n,m} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$I''_{n,m} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\rho^2(M_{k,j},M) P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \tag{38}$$

dır.

Açıkça görülüyor ki

$$\varepsilon I'_{n,m} = \varepsilon + \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1\right]\varepsilon$$

dır. Ayrıca,

$$\rho^2(M_{k,j},M) = (\alpha_{k,n} - x)^2 + (\beta_{j,m} - y)^2$$

$$=(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2)-2\alpha_{k,n}x-2\beta_{j,m}y+(x^2+y^2)$$

olduğundan dolayı

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\rho^2(M_{k,j},M)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-$$

$$-2x\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-2y\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)+(x^2+y^2)$$

dır. Buradan da sağ tarafa $2x^2+2y^2$ ekleyip çıkarırsak

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\rho^2(M_{k,j},M)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)=\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-(x^2+y^2)\right]+$$

$$+2x\left[x-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right]+2y\left[y-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right]$$

formülünü elde ederiz.

Bu eşitliğin her iki tarafında mutlak değere geçip $(x,y)\in D$ lere göre maksimum alınıp ve $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ olduğunu kullanırsak (38) eşitliğinden dolayı

$$I''_{n,m}\le\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{C(D)}+$$

$$+2\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(D)}+2\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(D)} \quad (39)$$

(38) eşitliğini ve (39) eşitsizliğini, (36) ve (37) formülleri ile karşılaştırırsak son olarak şu esas eşitsizliği yazabiliriz

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y)\right|P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right\|_{C(D)}\le\varepsilon+\varepsilon\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(D)}+$$

$$+\frac{2M}{\delta^2}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{C(D)}+$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(D)}+$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(D)}$$

Her iki tarafta $n,m\to\infty$ iken limite geçersek (28) , (29), (30) ve (31) formüllerine göre

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y)\right|P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right\|_{C(D)}\le\varepsilon$$

elde ederiz. Bu ise $\varepsilon>0$ keyfi olduğu için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y)\right|P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right\|_{C(D)}=0 \qquad (40)$$

olduğunu göstermektedir.

Şimdi $\{T_{n,m}(f;x,y)\}$ dizisini tanımlayan (26) formülünü ele alalım. Bu formülün her iki tarafından f(x,y)'ı çıkarırsak

$$T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y)\right]P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)+$$

$$+f(x,y)\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right]$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da mutlak değerlere geçersek, $P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\geq 0$ olduğuna göre

$$\left|T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y)\right|P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)+$$

$$+\left|f(x,y)\right|\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right|$$

elde ederiz.

Yukarda belirttiğimiz gibi f, tüm D karesinde bir *M* sabit sayısı ile sınırlıdır. Buna göre her iki taraftan tüm D' de olan (x,y) noktalarına göre maksimum alınırsa

$$\left\|T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right\|_{C(D)} \le \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left| f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y) \right| P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \right\|_{C(D)} +$$

$$+M \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1 \right\|_{C(D)}$$

olduğunu görürüz.

$n,m \to \infty$ iken limite geçerek birinci terim için (40), ikinci terim için ise (28) formüllerini uygularsak

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\|T_{n,m}f-f\right\|_{C(D)} = 0$$

elde ederiz ve dolayısıyla (27) formülünü ispatlamış oluruz. Bu ise (28) – (31) koşullarının yeterli koşullar olduğunu ispatlar ve teoremin ispatı tamamlanır.

3.C(D) UZAYINDA BERNSTEIN POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

3.1.İki Değişkenli Bernstein Polinomları

$(x,y) \in D = [0,1;0,1]$ olmak üzere ,

$$1^n = (1-x+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$1^m = (1-y+y)^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j y^j (1-y)^{m-j}$$

özdeşliklerinden

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} C_n^k C_m^j x^k (1-x)^{n-k} y^j (1-y)^{m-j}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$$P_{k,n}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{41}$$

işaretini kabul edersek

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) = 1 \tag{42}$$

olduğu

$$\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x) = 1 \quad , \quad \sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y) = 1 \tag{43}$$

formüllerinden görülmektedir.

(42) eşitliğinden yararlanarak, D karesinde sürekli bir f fonksiyonunun Bernstein polinomlarını oluşturalım,

$$B_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y) \qquad (44)$$

Teorem3.1.1: f, D karesinde sürekli bir fonksiyon olduğunda

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|B_{n,m}f-f\right\|_{C(D)}=0$$

dır.

İspat: (44) formülündeki $B_{n,m}(f;x,y)$ polinomlarını (26) formülünde tanımlanmış $T_{n,m}(f;x,y)$ toplamı ile karşılaştırırsak,

$$\alpha_{k,n}=\frac{k}{n}\ ,\ \beta_{j,m}=\frac{j}{m}$$

$$P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)=P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)$$

olarak seçildiği durumda $T_{n,m}(f;x,y) = B_{n,m}(f;x,y)$ dır. Bundan dolayı $\{B_{n,m}f\}$ dizisinin $n,m \to \infty$ iken sürekli f fonksiyonuna C(D) normunda yakınsaması için (28) – (31) koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

Şimdi bunu gösterelim. (42) formülüne göre

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)-1\right\|_{C(D)}=0$$

olduğunu görürüz ve bu da (28) formülünün sağlandığını göstermektedir.

$\alpha_{k,n} = \frac{k}{n}$ olmak üzere (29) formülünün sağlandığını gösterelim. (41) ve (43) formüllerine göre

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k}{n}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}P_{k,n}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^{k+1}(1-x)^{n-1-k}$$

son eşitliği elde etmek için k' yı k+1 ile dönüştürmek yeterlidir. Yine (43) formülünü göre

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} = x\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-1-k} = x$$

dır ve bundan dolayı

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{k}{n} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) - x \right\|_{C(D)} = 0$$

dır ve böylece (29) formülü de sağlanır. Benzer şekilde

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{j}{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) - y \right\|_{C(D)} = 0$$

ve (30) formülü de sağlanmaktadır.

Son olarak (31) formülünün sağlandığını gösterelim. (43) formülüne göre

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{j^2}{m^2}\right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{k^2}{n^2} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} P_{k,n}(x) + \sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} P_{j,m}(y) \quad (45)$$

dır ve sağ taraftaki toplamlardan birini hesaplamak yeterlidir. Birinci toplamı hesaplayalım.

Yukarıda ki hesaplamalar gösteriyor ki

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} P_{k,n}(x) = x$$

dır. Buna göre $k^2 = k(k-1) + k$ yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}P_{k,n}(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{n^2}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}$$

$$=\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}$$

$$=\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}x^{k+2}(1-x)^{n-2-k}+\frac{x}{n}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}x^k(1-x)^{n-2-k}+\frac{x}{n}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2+\frac{x}{n}=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$$

elde edilir. Yani

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}P_{k,n}(x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$$

ve benzer şekilde

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{j^2}{m^2}P_{k,n}(x)=y^2+\frac{y(1-y)}{m}$$

yazabiliriz. Bunları (45) eşitliğinde kullanalım. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{j^2}{m^2}\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)=x^2+y^2+\frac{x(1-x)}{n}+\frac{y(1-y)}{m}$$

ve buradan da

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{j^2}{m^2}\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)-(x^2+y^2)=\frac{x(1-x)}{n}+\frac{y(1-y)}{m}$$

elde ederiz. Her iki tarafın, $(x,y)\in D$ olmak üzere, maksimum alınırsa

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{j^2}{m^2}\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)-(x^2+y^2)\right\|_{C(D)}\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$$

olduğunu görürüz ve $n,m\to\infty$ iken limite geçilirse (31) formülü sağlanır. Dolayısıyla **Teorem2.2.3'** ün tüm koşulları sağlanır ve bu teoreme göre **Teorem3.1.1** ispatlanmış olur.

Şimdi b>a olmak üzere D_{ab} ile $D_{ab}=[a,b;a,b]$ karesini gösterelim.

D_{ab} karesinde sürekli fonksiyonlar uzayını $C(D_{ab})$ ile gösterelim ve uygun olarak

$$\|f\|_{C(D_{ab})}=\max_{(x,y)\in D_{ab}}|f(x,y)|$$

olsun.

$f\in C(D_{ab})$ olduğunu kabul edelim. Açıkça görülüyor ki D_{ab} karesinin her bir (x,y) noktasının bileşenlerini

$$x=a+(b-a)t\ ,\quad 0\leq t\leq 1$$
$$y=a+(b-a)\tau\ ,\quad 0\leq \tau\leq 1$$

biçiminde gösterebiliriz.

$f \in C(D_{ab})$ olmak üzere $(t,\tau) \in D$ noktalarına bağlı bir φ fonksiyonunu ele alalım

$$\varphi(t,\tau) = f(a+(b-a)t, a+(b-a)\tau) \tag{46}$$

$f \in C(D_{ab})$ olduğundan $\varphi \in C(D)$ dır ve biz φ fonksiyonunun Bernstein polinomunu yazabiliriz. (44) formülüne göre bu polinom

$$B_{n,m}(\varphi;t,\tau) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \varphi\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right) P_{k,n}(t) P_{j,m}(\tau) \tag{47}$$

biçimindedir ve teorem3.1.1 den dolayı

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| B_{n,m}(\varphi;t,\tau) - \varphi(t,\tau) \right\|_{C(D)} = 0 \tag{48}$$

Açıkça görülüyor ki

$$t = \frac{x-a}{b-a}, \quad \tau = \frac{y-a}{b-a} \qquad a \le x,y \le b$$

formüllerine göre $(x,y) \in D_{ab}$ iken $(t,\tau) \in D$ olur. Bu durumda (46) formülünden

$$\varphi\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{y-a}{b-a}\right) = f(x,y)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (47) formülündeki φ fonksiyonunun Bernstein polinomlarını şu şekilde yazabiliriz,

$$B_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}, a+(b-a)\frac{j}{m}\right) P_{k,n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) P_{j,m}\left(\frac{y-a}{b-a}\right) \tag{49}$$

ve bu, D_{ab} karesinde tanımlı f fonksiyonunun Bernstein polinomlarıdır.

(48) göre aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem3.1.2: $f \in C(D_{ab})$ fonksiyonunun Bernstein polinomları (49) olmak üzere

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| B_{n,m} f - f \right\|_{C(D_{ab})} = 0$$

dır.

Benzer şekilde $D_{a,b;c,d}$ dikdörtgenini $D_{a,b;c,d} = [a,b;c,d]$ ele alarak ve $C(D_{a,b;c,d})$ uzayını tanımlayarak bir $f \in C(D_{a,b;c,d})$ fonksiyonunun

$$B_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}, c+(d-c)\frac{j}{m}\right) P_{k,n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) P_{j,m}\left(\frac{y-c}{d-c}\right) \tag{50}$$

Bernstein polinomları için aşağıdaki sonucu ispatlayabiliriz.

Sonuç3.1.3: $f \in C(D_{a,b;c,d})$ fonksiyonunun Bernstein polinomları (50) olmak üzere

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| B_{n,m} f - f \right\|_{C(D_{a,b;c,d})} = 0$$

dır.

3.2.Bernstein Polinomlarının Yaklaşma Hızı

Şimdi (44) formülü ile tanımlı Bernstein polinomları için

$$\left| B_{n,m}(f;x,y) - f(x,y) \right|$$

farkının f fonksiyonunun tam ve kısmi süreklilik modülleri ile değerlendirilmesini verelim.

Teorem3.2.1: $f \in C[0,1;0,1]$ olsun. $\{B_{n,m}f\}$ f fonksiyonunun Bernstein polinomlar dizisi ve ω, $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ f fonksiyonunun tam ve kısmı süreklilik modülleri olmak üzere, her $(x,y) \in D$ için

i) $$\left|B_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)\right| \le \frac{3}{2}\left[\omega^{(1)}(f;\frac{1}{\sqrt{n}}) + \omega^{(2)}(f;\frac{1}{\sqrt{m}})\right]$$

ii) $$\left|B_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)\right| \le \frac{3}{2}\omega(f;\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}})$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: i) $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} P_{k,n}(x)P_{j,m} = 1$ olduğundan

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(x,y)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)$$

yazılabilir. Bu eşitliği (44) den taraf tarafa çıkarırsak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$B_{n,m}(f;x,y) - f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(\frac{k}{n},\frac{j}{m})P_{k,n}(x)P_{j,m}(y) - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(x,y)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) - f(x,y) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right) + f\left(\frac{k}{n}, y\right) - f(x,y) \right\}$$

her iki taraftan mutlak değer alınır ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| B_{n,m}(f;x,y) - f(x,y) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right) + f\left(\frac{k}{n}, y\right) - f(x,y) \right\} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right) \right\} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k}{n}, y\right) - f(x,y) \right\} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left| f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right) \right|$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left| f\left(\frac{k}{n}, y\right) - f(x,y) \right|$$

eşitsizliği elde edilir. Sağ taraftaki toplamları sırasıyla I_1 ve I_2 olarak göstererek

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \leq I_1 + I_2 \tag{51}$$

yazalım.

Şimdi I_1'ı ele alalım. Kabulümüze göre

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\left|f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)-f\left(\frac{k}{n},y\right)\right|.$$

Buradan (24) formülüne göre

$$I_1 \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\omega^{(2)}\left(f;\left|\frac{j}{m}-y\right|\right)$$

$$I_1 \leq \sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x)\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\omega^{(2)}\left(f;\left|\frac{j}{m}-y\right|\right) = \sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\omega^{(2)}\left(f;\left|\frac{j}{m}-y\right|\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Süreklilik modülünün özelliklerine göre keyfi pozitif δ_m dizisi için

$$\omega^{(2)}\left(f;\left|\frac{j}{m}-y\right|\right) = \omega^{(2)}\left(f;\frac{\left|\frac{j}{m}-y\right|}{\delta_m}\delta_m\right) \leq \left\{\frac{\left|\frac{j}{m}-y\right|}{\delta_m}+1\right\}\omega^{(2)}(f;\delta_m)$$

dır. Bundan dolayı

$$I_1 \le \sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\left\{\frac{\left|\frac{j}{m}-y\right|}{\delta_m}+1\right\}\omega^{(2)}(f;\delta_m) = \omega^{(2)}(f;\delta_m)\left\{\frac{1}{\delta_m}\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\left|\frac{j}{m}-y\right|+1\right\}$$

yazılabilir. Parantezdeki toplamı

$$\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\left|\frac{j}{m}-y\right| = \sum_{j=0}^{m}\left(P_{j,m}(y)\right)^{1/2}\left(P_{j,m}(y)\right)^{1/2}\left|\frac{j}{m}-y\right|$$

biçiminde yazarsak, Cauchy - Schwartz eşitsizliğinden,

$$\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\left|\frac{j}{m}-y\right| \le \left(\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\right)^{1/2}\left(\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\left(\frac{j}{m}-y\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\left(\frac{j}{m}-y\right)^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla,

$$I_1 \le \omega^{(2)}(f;\delta_m)\left\{\frac{1}{\delta_m}\left(\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\left(\frac{j}{m}-y\right)^2\right)^{1/2}+1\right\} \tag{52}$$

Teoram3.1.1' in ispatında olduğu gibi

$$\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\left(\frac{j}{m}-y\right)^2 = \sum_{j=0}^{m}\frac{j^2}{m^2}P_{j,m}(y) - 2y\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}P_{j,m}(y) + y^2\sum_{j=0}^{m}P_{j,m}(y)$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\left(\frac{j}{m}-y\right)^2 = y^2+\frac{y-y^2}{m}-2y^2+y^2=\frac{y-y^2}{m}$$

eşitliği bulunur. $f(y)=y-y^2$ fonksiyonu $y_0=\frac{1}{2}$ noktasında maksimuma sahip olduğundan,

$$\sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)\left(\frac{j}{m}-y\right)^2 \le \frac{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2}{m}=\frac{1}{4m}$$

eşitsizliği (52)'de yerine yazılırsa

$$I_1 \le \omega^{(2)}(f;\delta_m)\left\{\frac{1}{\delta_m}\left(\frac{1}{4m}\right)^{1/2}+1\right\}=\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left(\frac{1}{\delta_m 2\sqrt{m}}+1\right)$$

$\left(\frac{1}{\delta_m 2\sqrt{m}}+1\right)$ ifadesi m den bağımsız olacak şekilde $\delta_m=\frac{1}{\sqrt{m}}$ seçimi yapıldığı taktirde,

$$I_1 \le \omega^{(2)}(f;\tfrac{1}{\sqrt{m}})\left(\tfrac{1}{2}+1\right)=\tfrac{3}{2}\omega^{(2)}(f;\tfrac{1}{\sqrt{m}}) \tag{53}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdide I_2 terimini ele alalım. Tanıma göre

$$I_2 = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left| f\left(\frac{k}{n}, y\right) - f(x,y) \right|$$

dır ve süreklilik modülünün (23) özelliğinden dolayı,

$$I_2 \le \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \omega^{(1)}\left(f; \left|\frac{k}{n} - x\right|\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x) \omega^{(1)}\left(f; \left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \sum_{j=0}^{m} P_{j,m}(y)$$

dır. Yani

$$I_2 \le \sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x) \omega^{(1)}\left(f; \left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \tag{54}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\omega^{(1)}\left(f; \left|\frac{k}{n} - x\right|\right) = \omega^{(1)}\left(f; \frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta_n} \delta_n\right) \le \left(\frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta_n} + 1 \right) \omega^{(1)}(f; \delta_n)$$

eşitsizliği (54)' da yerine yazılırsa,

$$I_2 \le \sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x) \left\{ \left(\frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta_n} + 1 \right) \omega^{(1)}(f; \delta_n) \right\}$$

$$= \omega^{(1)}(f;\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x)\left|\frac{k}{n}-x\right|+1\right\} \qquad (55)$$

eşitsizliği elde edilir. Parantez içindeki

$$\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x)\left|\frac{k}{n}-x\right|$$

ifadesini

$$\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x)\left|\frac{k}{n}-x\right| = \sum_{k=0}^{n}\left(P_{k,n}(x)\right)^{1/2}\left(P_{k,n}(x)\right)^{1/2}\left|\frac{k}{n}-x\right|$$

şeklinde yazalım. Cauchy - Schwartz eşitsizliğinden,

$$\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x)\left|\frac{k}{n}-x\right| \le \left(\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x)\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x)\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 P_{k,n}(x)\right)^{1/2}$$

buluruz. Bu eşitsizlik (55)' de yerine yazılırsa,

$$I_2 \le \omega^{(1)}(f;\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 P_{k,n}(x)\right)^{1/2}+1\right\} \qquad (56)$$

eşitsizliği bulunur. Yine Teorem3.1.1 in ispatında olduğu gibi

$$\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{k}{n}-x)^2P_{k,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}P_{k,n}(x)-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}P_{k,n}(x)+x^2\sum_{k=0}^{n}P_{k,n}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{k}{n}-x)^2P_{k,n}(x)=x^2+\frac{x-x^2}{n}-2x^2+x^2=\frac{x-x^2}{n} \tag{57}$$

$f(x)=x-x^2$ fonksiyonu $x_0=\frac{1}{2}$ noktasında maksimum değere sahiptir. Bu değer (57) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{k}{n}-x)^2P_{k,n}(x)\le\frac{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2}{n}=\frac{1}{4n}$$

eşitsizliği bulunur. Bu değer (56)' da yerine yazıldığı taktirde

$$I_2\le\omega^{(1)}(f;\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{1}{4n}\right)^{1/2}+1\right\}=\omega^{(1)}(f;\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n 2\sqrt{n}}+1\right\}$$

$\dfrac{1}{\delta_n 2\sqrt{n}}$ ifadesi n den bağımsız olacak şekilde $\delta_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ seçimi yapılırsa,

$$I_2\le\omega^{(1)}(f;\tfrac{1}{\sqrt{n}})\left(\tfrac{1}{2}+1\right)=\tfrac{3}{2}\omega^{(1)}(f;\tfrac{1}{\sqrt{n}}) \tag{58}$$

eşitsizliği elde edilir. (53) ve (58) eşitsizlikleri (51) eşitsizliğinde yazıldığı takdirde,

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \leq \frac{3}{2}\left\{\omega^{(1)}(f;\frac{1}{\sqrt{n}})+\omega^{(2)}(f;\frac{1}{\sqrt{m}})\right\} \tag{59}$$

eşitsizliği elde edilir ve i) şıkkı ispatlanmış olur. Şimdi de ii) şıkkını ispatlayalım. i) şıkkının ispatında olduğu gibi

$$B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(\frac{k}{n},\frac{j}{m})P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(x,y)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\left\{f(\frac{k}{n},\frac{j}{m})-f(x,y)\right\}$$

yazabiliriz ve buradan

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\left\{f(\frac{k}{n},\frac{j}{m})-f(x,y)\right\}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\left|f(\frac{k}{n},\frac{j}{m})-f(x,y)\right|$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\delta=\sqrt{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2}$ seçimi yapılıp ω tam süreklilik modülünün (22) özelliği göz önüne alındığı taktirde

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|\le\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\omega(f;\sqrt{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2})\qquad(60)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\omega(f;\sqrt{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2})=\omega(f;\frac{\sqrt{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2}}{\delta_{n,m}}\delta_{n,m})$$

$$\le\left(\frac{\sqrt{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2}}{\delta_{n,m}}+1\right)\omega(f;\delta_{n,m})$$

eşitsizliği (60)' da yerine yazıldığı taktirde

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|\le\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{\sqrt{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2}}{\delta_{n,m}}+1\right)\omega(f;\delta_{n,m})P_{k,n(x)}P_{j,m}(y)$$

$$=\omega(f;\delta_{n,m})\left\{\frac{1}{\delta_{n,m}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\right\}$$

$$= \omega(f;\delta_{n,m})\left\{\frac{1}{\delta_{n,m}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)+1\right\} \tag{61}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Parantezdeki toplamı ele alalım. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2}\,(P_{k,n}(x)P_{j,m}(y))^{1/2}$$

$$(P_{k,n}(x)P_{j,m}(y))^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left\{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2\right\}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,n}(x)P_{j,m}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left\{(\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2\right\}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\right)^{1/2}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik (61)' de yerine yazıldığında

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \leq \omega(f;\delta_{n,m})\left\{\frac{1}{\delta_{n,m}}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left((\frac{k}{n}-x)^2+(\frac{j}{m}-y)^2\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\right)^{1/2}+1\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left((\tfrac{k}{n}-x)^2+(\tfrac{j}{m}-y)^2\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\tfrac{k}{n}-x)^2P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\tfrac{j}{m}-y)^2P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{k}{n}-x)^2P_{k,n}(x)+\sum_{j=0}^{m}(\tfrac{j}{m}-y)^2P_{j,m}(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}P_{k,n}(x)-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}P_{k,n}(x)+x^2\sum_{k=0}^{n}P_{k,n}(x)$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\frac{j^2}{m^2}P_{j,m}(y)-2y\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}P_{j,m}(y)+y^2\sum_{j=0}^{m}P_{j,m}(y)$$

$$=x^2+\frac{x-x^2}{n}-2x^2+x^2+y^2+\frac{y-y^2}{m}-2y^2+y^2$$

$$=\frac{x-x^2}{n}+\frac{y-y^2}{m}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left((\tfrac{k}{n}-x)^2+(\tfrac{j}{m}-y)^2\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)\le\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}\right)$$

eşitsizliğini buluruz. Dolayısıyla,

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \le \omega(f;\delta_{n,m})\left(\frac{1}{\delta_{n,m}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}+1\right)$$

dır ve $\delta_{n,m}=\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ olarak seçilirse,

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \le \frac{3}{2}\omega(f;\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}})$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispati tamamlar.

Bu teoremden f fonksiyonunun Lipschitz koşullarını sağladığı taktirde bazı sonuçlar elde edelim.

Sonuç3.2.2: Eğer f fonksiyonu (13) Lipschitz koşulunu sağlarsa, bu taktirde

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \le C'\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)^{\alpha/2}$$

dır.

Bu sonucun ispatı (17) eşitsizliğinden elde edilir ($C'=\frac{3}{2}C$).

Sonuç3.2.3: Eğer f fonksiyonu (14) ve (15) Lipschitz koşullarını sağlarsa bu taktirde

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \le C'\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}+\frac{1}{m^{\alpha/2}}\right)$$ dır.

Bu sonucun ispatı süreklilik modüllerinin (18) ve (19) özelliklerinden elde edilir.

Sonuç3.2.4: Eğer $f \in Lip_y\alpha \cap Lip_x\beta$ ise bu taktirde

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \le C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha/2}+C_2\left(\frac{1}{m}\right)^{\beta/2}$$

dır.

Bu sonucun ispatı süreklilik modülünün (21) özelliğinden elde edilir.

KAYNAKLAR

Korovkin, P.P. 1960. Linear operators and approximation theory, Delhi

Hacıyev, A. and Hacısalihoğlu , H.H. 1995. Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı. , Ankara.

Lorenz, G.G. 1953. Bernstein polynomials , Toronto.

Cheney, E.W. and Sharma , A. 1964. Bernstein power series . Canadian journal of mathematics,16; 241- 252.

Bohman, H. 1952. On approximation of continuous and of analytic functions. Ark. Mat,2; 43-52.

Butzer, P.L. 1954. On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval. Proc. Amer. Math. Soc, 5; 547-553.

Stancu, D.D. 1964. The remainder of certain linear approximation formulas in the variables , Journ. SIAM Numer. Anal. Ser B, 1; 137-163.

ÖZGEÇMİŞ

25.06.1971 yılında Rize'nin Pazar ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise tahsilini Ankara'da tamamladı. 1996 yılında Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans yapmaya başladı.