ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SABİT SIRT UZAKLIKLI HİPERYÜZEYLER

Ömer TARAKCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2002

Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU danışmanlığında, Ömer TARAKCI tarafından hazırlanan bu çalışma 12/03/2002 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. H. Hilmi HACSALİHOĞLU

Prof. Dr. Necmettin TANRIÖVER

Prof. Dr. Erdoğan ESİN

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

SABİT SIRT UZAKLIKLI HİPERYÜZEYLER

Ömer TARAKCI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Beş bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, tez için gerekli olan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, sabit sırt uzaklıklı eğriler tanıtılmış ve bazı özeliklerinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölüm, sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin bir özel hali olan paralel yüzeylere ayrılmıştır.

Dördüncü bölümde, bir M yüzeyinin M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi tanımlanmış ve M^f yüzeyinin özelikleri araştırılmıştır. Paralel yüzeyler için verilen bazı özelik ve teoremlerin, sabit sırt uzaklıklı yüzeyler için karşılıkları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeyler tanımlanıp bazı özelikleri verilmiştir.

2002, 103 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Sabit sırt uzaklıklı eğriler, paralel yüzeyler, sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeyler, eğrilikler, şekil operatörü.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

HYPERSURFACES AT A CONSTANT DISTANCE FROM THE EDGE OF REGRESSIONS ON ANOTHER HYPERSURFACE

Ömer TARAKCI

Ankara University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

This thesis consists of five chapters. In the first chapter we give the fundamental definitions and concepts which are needed for this thesis.

Chapter two deals with curves at a constant distance from the edge of regression and some properties of them.

Chapter three is denoted to parallel surfaces which are a special case of surfaces at a constant distance from the edge of regression.

In chapter four, we define a surface M^f at a constant distance from the edge of regression of a surface M and investigate some properties of M^f. The correspondance of some theorems and properties which hold for parallel surfaces are obtained for M^f.

In chapter five, we define a hypersurface M^f at a constant distance from the edge of regression of a hypersurface M and investigate some properties of M^f.

2002, 103 pages

Key Words: Curves at a constant distance from the edge of regression, parallel surfaces, hypersurfaces at a constant distance from the edge of regression, curvatures, shape operatör.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr H. Hilmi HACISALİHOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Ömer TARAKCI

Ankara, Mart 2002

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M	Manifold
$C^{\infty}(M,R)$	$\{f \mid f: M \longrightarrow R$, f *her mertebeden diferensiyellenebilir*
$V_P, X_P, \ldots$	Bir M manifoldunun P noktasındaki tanjant vektörler
$T_M(P)$	M manifoldunun P noktasındaki tanjant uzayı
F_*	F dönüşümünün türev dönüşümü
$\chi(M)$	M manifoldunun vektör alanlarının uzayı
D	Konneksiyon
[,]	Lie parantez operatörü
S	Şekil operatörü
I^q	q-yuncu temel form
K	Gauss eğriliği
H	Ortalama eğrilik
α	Eğri
k_i	i-yinci eğrilik fonksiyonu
C_v	Sabit sırt uzaklıklı eğri
λ_d	Dağılma parametresi
M_r	Paralel yüzey
K_r	Paralel yüzeyin Gauss eğriliği
H_r	Paralel yüzeyin ortalama eğriliği
M^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzey
N^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin birim normal vektör alanı
S^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin şekil operatörü
K^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin Gauss eğriliği
H^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin ortalama eğriliği
k_n	Normal eğrilik
D_P	M nin P noktasındaki Dupin göstergesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

1.1. Giriş

Bir eğri için sabit sırt uzaklıklı eğri kavramı Hans Vogler tarafından ortaya atılmış ve Vogler (1963), makalesinde bir uzay eğrisinin pseudo rektifiyan torslarına dual karşılık olan, bir tors üzerine çizilmiş sabit sırt uzaklıklı eğrilerin Frenet çatısı tarafından teşkil edilen geometrik özelikleri incelemiştir.

Hacısalihoğlu (1968), bir uzay eğrisinin Frenet çatısının eğri boyunca hareketi esnasında, rektifiyan düzlemine sıkı suretle bağlı bir doğrunun oluşturduğu açılamayan bir yüzey üzerine çizilmiş parametre eğrilerinin (sabit sırt uzaklıklı eğrilerden daha genel) özeliklerini incelemiştir.

Bu çalışma Vogler'in ileri sürdüğü problemin bir eğri yerine bir yüzey alınması halinden ibarettir. Böylece ortaya çıkacak olan yeni yüzeye, ilk yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olarak bakmak mümkün olacaktır. Söz konusu yüzeylerin aralarındaki geometrik ve diferensiyel geometrik özelikler incelenmiştir.

1.2. Diferensiyellenebilir manifoldlar

Tanım 1.2.1. Bir M topolojik uzayı için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye *n-boyutlu topolojik manifold* denir (Hacısalihoğlu 1983).

(1) M bir Hausdorff uzayıdır.

(2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(3) M sayılabilir çoklukta açık alt cümlelerle örtülebilir.

Tanım 1.2.2. M bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. Bu durumda Tanım 1.2.1 gereğince $W \subset M$ olmak üzere bir

$$\Psi : U \subset E^n \longrightarrow W \subset M$$

homeomorfizmi vardır. (Ψ, W) ikilisine M de bir *koordinat komşuluğu* veya *harita* denir (Hacısalihoğlu 1983).

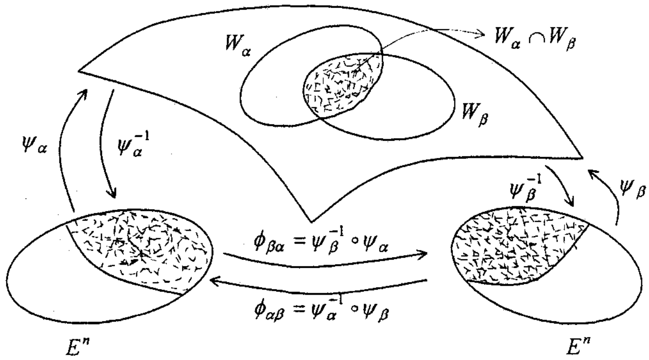
$u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in U$ için $\Psi(u) \in M$ dir ve

$$\Psi(u) = (x_1(u), ..., x_n(u)), \quad x_i(u) \in R, \quad 1 \le i \le n$$

dir. Burada $x_i(u)$ reel sayısına $\Psi(u) \in M$ noktasının *i-yinci koordinatı* ve $u_i : U \longrightarrow R$ fonksiyonuna da u nun *i-yinci Öklid koordinat fonksiyonu* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.2.3. M bir topolojik n-manifold ve α indislerinin cümlesi A olmak üzere M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ olsun. E^n de U_α ya bir Ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan M deki açık cümle V_α olsun. Bu şekildeki (Ψ_α, V_α) haritalarının $S = \{(\Psi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir *atlas* veya *koordinat komşuluğu* denir (Hacısalihoğlu 1983).

(Ψ_α, W_α) ve (Ψ_β, W_β) haritaları için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \phi$ ise



Şekil 1.1.1 Diferensiyellenebilir yapı

$$\phi_{\beta\alpha} : \Psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \longrightarrow \Psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

$$\phi_{\alpha\beta} : \Psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \longrightarrow \Psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

homeomorfizmlerini tanımlayabiliriz.

Tanım1.2.4. Bir topolojik n-manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \phi$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C^k *sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı* ve M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse, M ye C^k *sınıfından diferensiyellenebilir manifold* denir.

Bu çalışmada diferensiyellenebilir manifoldlardan bahsedileceği için diferensiyellenebilir manifold yerine sadece manifold kelimesi kullanılacaktır.

Bir M manifoldu üzerindeki bütün reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M,R)$ ile gösterilsin.

$$C^\infty(M,R) = \left\{ f \,\middle|\, f : M \longrightarrow R,\ f \ \textit{fonksiyonu diferensiyellenebilir} \right\}$$

Eğer $f,g \in C^{\infty}(M,R)$ ise $f+g$ toplama ve $f.g$ çarpma işlemlerine göre, $C^{\infty}(M,R)$ bir değişimli halkadır.

Tanım 1.2.5 M manifoldunun bir noktası P olsun.

$$V_P : C^{\infty}(M,R) \longrightarrow R$$

fonksiyonu aşağıdaki iki özeliği sağlıyorsa V_P ye M nin P noktasında bir *tanjant vektörü* denir.

(1) $V_P(af+bg) = aV_P(f)+bV_P(g),\ \forall a,b \in R\, ve\, \forall f,g \in C^{\infty}(M,R)\ (R-lineer)$

(2) $V_P(fg) = V_P(f)g(P)+f(P)V_P(g),\ \forall a,b \in R\ ve\ \forall f,g \in C^{\infty}(M,R).$

M nin bir P noktasındaki iki tanjant vektör V_P ve W_P olsun. $f \in C^{\infty}(M,R)$ ve $a \in R$ için

$$(V_P+W_P)(f) = V_P(f)+W_P(f)$$

$$(aV_P)(f) = aV_P(f)$$

işlemleri ile M nin P noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi R reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına *M nin P noktasındaki tanjant uzayı* denir ve $T_M(P)$ ile gösterilir (O' Neill 1983).

M nin bir P noktasındaki lokal koordinat sistemi $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun. R^n deki doğal koordinat fonksiyonları $u_1, u_2, \ldots, u_n$ olmak üzere

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \frac{\partial (f \circ \xi)}{\partial u_i}(\xi(P)).\ (1 \le i \le n),$$

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "f \circ \xi"'] & P = \xi(U) \in M \arrow[d, "f"] \\ & R \end{tikzcd}$$

$U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

olarak alınsın. Böylece tanımlanan $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_P : C^{\infty}(M,R) \longrightarrow R$ fonksiyonları M nin P noktasındaki tanjant vektörleridir ve $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_P, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_P, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_P \right\}$ sistemi $T_M(P)$ nin bir bazını oluşturur (O'Neill 1983).

Tanım 1.2.6. Bir M manifoldunun her bir P noktasına P de bir V_P tanjant vektörü karşılık getiren $V : M \longrightarrow \bigcup_{P \in M} T_M(P)$ fonksiyonuna *M üzerinde bir vektör alanı* denir. (O'Neill1983).

Eğer M üzerinde bir vektör alanı V ise $f \in C^\infty(M,R)$ için $V(f)$ M üzerinde,

$$(V(f))(P) = V_P(f), \; \forall P \in M$$

olarak verilen reel değerli bir fonksiyondur. M üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir. $\forall V, W \in \chi(M)$, $\forall P \in M$ ve $\forall f \in C^\infty(M,R)$ için,

$$(V+W)_P = V_P + W_P$$

$$(fV)_P = f(P)V_P$$

işlemleri ile $\chi(M)$, $C^\infty(M,R)$ üzerinde bir modül ve $C^\infty(M,R)$ yerine R reel sayılar cismi alınırsa R üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım 1.2.7. M ve N iki manifold, $F : M \longrightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $g \in C^\infty(N,R)$ için

$$F_*|_P : T_P(M) \longrightarrow T_{F(P)}(N), \; \left(F_*|_P(V_P)\right)(g) = V_P(g \circ F), \; \forall V_P \in T_M(P),$$

olarak karakterize edilen $F_*|_p$ dönüşümüne F dönüşümünün *diferensiyel (türev) dönüşümü* denir (O'Neill 1983).

1.3. Riemann Manifoldu

Tanım 1.3.1. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\langle \, , \, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M,R)$$

şeklinde simetrik , bilineer, pozitif tanımlı bir fonksiyon (iç çarpım) tanımlı ise M ye bir *Riemann manifoldu* denir. $\langle \, , \, \rangle$ fonksiyonuna M üzerinde *metrik tensör* veya *Riemann metriği* denir (Hicks 1974).

Tanım 1.3.2 M bir C^{∞} manifold olsun.

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

fonksiyonu $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $\forall f,g \in C^{\infty}(M,R)$ için

(1) $D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z,$

(2) $D_X(fY) = (Xf)Y + fD_X Y$

özelliklerini sağlıyorsa D ye M manifoldu üzerinde bir *afin konneksiyon* denir (Hicks 1974).

Tanım 1.3.3 M bir C^{∞} manifold olsun.

$$[\, , \,] : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad \forall f \in C^{\infty}(M,R)$$

olarak tanımlanan $[\, , \,]$ dönüşümüne $\chi(M)$ üzerinde *Lie parantez operatörü* denir (Hicks 1974).

Tanım 1.3.4 M bir Riemann manifoldu ve D, M üstünde bir afin konneksiyon olsun. Eğer

(1) D, C^{∞} sınıfından,

(2) $[X,Y] = D_X Y - D_Y X, \quad \forall X,Y \in \chi(M),$

(3) $X(\langle Y,Z \rangle) = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle, \quad \forall X,Y,Z \in \chi(M),$

özelikleri sağlanıyorsa, D ye *Riemann konneksiyonu* denir (Hicks 1974).

Teorem 1.3.1 Bir Riemann manifoldu üzerindeki Riemann konneksiyonu tekdir (Hacısalihoğlu 1983).

1.4. E^n de Hiperyüzeyler

Tanım 1.4.1. M bir k-boyutlu manifold ve $\overline{M}$ de bir n-boyutlu manifold olsun. $\forall P \in M$ noktası için $\overline{M}$ de bir $\overline{U}$ ve M de bir U koordinat komşuluğu mevcut ve $U = \left\{q \in \overline{U} \middle| \overline{x}_{k+1}(q) = \ldots = \overline{x}_n(q) = 0\right\}$ ise M ye $\overline{M}$ nin bir *alt manifoldu* denir. Burada $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ koordinat sistemi $\overline{U}$ de ve $\left\{x_1 = \overline{x}_1\big|_U, \ldots, x_k = \overline{x}_k\big|_U\right.$ da U daki koordinat sistemidir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.2. M n-boyutlu bir manifold olsun. M nin n-1 boyutlu bir alt manifolduna M de bir *hiperyüzey* denir (O'Neill 1983).

Tanım 1.4.3. E^n n-boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M olsun. $\chi(M)^{\perp}$ in bir ortonormal bazı $\{N$ ise N ye M nin *birim normal vektör alanı* denir. $\chi(M)^{\perp}$ in iki tane ortonormal bazı vardır, birincisi $\{N$ ise ikincisi $\{-N$ dir. M üzerinde diferensiyellenebilir bir birim normal vektör alanına *M üzerinde bir yönlendirme* ve M üzerinde bir yönlendirme seçilmiş ise M ye *yönlendirilmiş yüzey* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.4. E^n de bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

olarak tanımlanan S dönüşümüne M üzerinde *şekil operatörü* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 1.4.1. E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S ise

$$S : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

lineer bir dönüşümdür (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.5 E^n in bir M hiperyüzeyi üzerinde *q-yuncu temel form* diye, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M,R),$$
$$I^q(X,Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

olarak tanımlı I^q fonksiyonuna denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.6 E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir P noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik değerleri M nin bu noktadaki *asli eğrilikleri* olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu P noktasındaki *asli eğrilik doğrultuları* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım1.4.7 E^n de bir hiperyüzey M ve M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$K : M \longrightarrow R,$$
$$K(P)=\det S(P)$$

olarak tanımlanan fonksiyona M nin *Gauss eğrilik fonksiyonu* ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki *Gauss eğriliği* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.8 E^n de bir hiperyüzey M ve M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$H : M \longrightarrow R,$$
$$H(P)=İz(S(P))$$

olarak tanımlanan H fonksiyonuna M nin *ortalama eğrilik fonksiyonu* ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki *ortalama eğriliği* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım1.4.9 E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir *eğrilik çizgisi*dir denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.10 E^n de bir hiperyüzey M ve M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

(1) $\exists\lambda \in R$ için, $S(P) = \lambda I_{n-1}$ ise P noktasına M nin bir *umbilik* noktası denir.

(2) $S(p) = 0$ ise P noktasına M nin bir *düzlemsel (flat)* noktasıdır denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.11 $R : \chi(E^n) \times \chi(E^n) \times \chi(E^n) \longrightarrow \chi(E^n)$

$$R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]}Z$$

olarak tanımlanan R fonksiyonu $\chi(E^n)$ üzerinde üçüncü mertebeden bir kovaryant tensör alanıdır. Bu tensör alanına E^n in *eğrilik tensör alanı* ve bunun bir $P \in E^n$ noktasındaki değeri olan $R(X_P, Y_P)Z_P$ tensörüne de E^n in P noktasındaki *eğrilik tensörü* veya E^n in P *deki eğriliği* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 1.4.3 E^n in eğriliği E^n in her noktasında sıfırdır (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.12 $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir *regle yüzey* ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir. Bir regle yüzey

$$\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\alpha(t)$ regle yüzeyin dayanak eğrisi, $X(t)$ doğrultman vektörüdür (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.13 Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin *dağılma parametresi (drali)* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.14 Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye *açılabilirdir* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.4.14. Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye *açılabilirdir* denir (Hacısalihoğlu 1983).

1.5. Eğriler

Tanım 1.5.1. R nin açık bir aralığı I olmak üzere, diferensiyellenebilir bir $\alpha : I \longrightarrow E^n$ fonksiyonuna E^n de bir *eğri* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.5.2. E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha : I \longrightarrow E^n, \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$$

olmak üzere $\alpha'(t) = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{dt}\right|_t, \ldots, \left.\frac{d\alpha_n}{dt}\right|_t \right)$ dir. $\left.\alpha'(t)\right|_{\alpha(t)} \in T_{E^n}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne M nin $\alpha(t)$ noktasındaki (I, α) koordinat komşuluğuna göre *hız vektörü* ve $\forall t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise M ye *birim hızlı eğri* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.5.3. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda. $\psi = \{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k \rangle r$ için, $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, \ldots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin *Serret-Frenet r-ayaklı alanı* ve $P \in M$ için $\{V_1(P), \ldots, V_r(P)\}$ ye $P \in M$ noktasındaki *Serret-Frenet r-ayaklısı* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.5.4. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için. M nin Frenet 3- ayaklısı $\{T(t). N(t), B(t)\}$ ise

(1) $Sp\{T(s). N(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen. $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya *oskülatör düzlem*,

(2) $Sp\{N(s), B(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen. $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya *normal düzlem*,

Tanım 1.5.5. $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),\ldots,V_r(s)\}$ olsun. Buna göre $1 \le i \le r$ için,

$$k_i : I \longrightarrow R, \quad k_i(s) = \left\langle V_i'(s), V_{i+1}(s)\right\rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin *i-yinci eğriliği* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 1.5.1. $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),\ldots,V_r(s)$ ise

(1) $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$

(2) $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1\langle i \langle r,$

(3) $V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

dir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.5.6. $M \subset E^n$ eğrisinin birim teğet vektör alanı V_1 ve $X \in \chi(E^n)$ de sabit bir birim vektör alanı olsun. Eğer $P \in M$ için,

$$\langle V_1, X\rangle\big|_P = \cos\theta = sabit, \quad \theta \ne \frac{\pi}{2}$$

ise M eğrisine E^n de bir eğilim çizgisi, θ açısına M nin eğilim açısı, $Sp\{X\}$ uzayına da M nin eğilim ekseni denir. E^3 deki bir eğriyi eğilim çizgisi olarak karakterize eden özellik, eğrinin eğrilikleri k_1 ve k_2 olmak üzere

$$H = \frac{k_1}{k_2} = sabit$$

olmasıdır (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.5.7. $M, N \subset E^n$ eğrileri, sırasıyla, (I,α), (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin

$$\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}, \; \{V_1^*(s), V_2^*(s), \ldots, V_r^*(s)\}$$

Frenet r-ayaklıları verildiğinde $\forall s \in I$ için

$$\{V_2(s), V_2^*(s)\}$$

lineer bağımlı ise (M,N) eğri ikilisine bir Bertrant eğri çifti denir (Hacısalihoğlu 1983).

2. SABİT SIRT UZAKLIKLI EĞRİLER

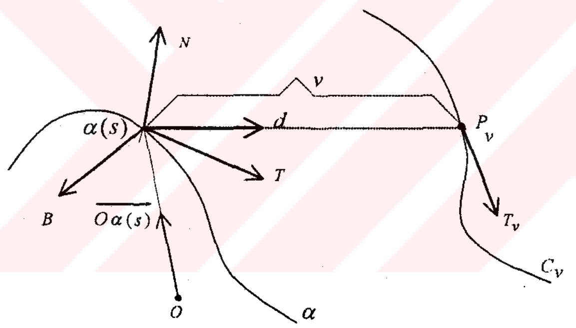
2.1. Sabit Sırt Uzaklıklı Eğri

Tanım 2.1.1. E^3 de bir eğri α ve α nın bir $P = \alpha(s)$ noktasındaki Frenet üç ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. d_1, d_2, d_3 sabit sayılar ve $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ olmak üzere

$$d = d_1 T + d_2 N + d_3 B \tag{2.1}$$

vektörüne $\{T, N, B\}$ ye *sıkı suretle bağlı vektör*, P noktasından geçen ve d doğrultusundaki k doğrusuna $\{T, N, B$ ye *sıkı suretle bağlı doğru* denir (Hacısalihoğlu 1968).

Tanım 2.1.2. $\alpha : I \longrightarrow E^3$ bir eğri ve α nın bir P noktasındaki Frenet üç ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. $\{T, N, B\}$ ye sıkı suretle bağlı k doğrusu üzerindeki, P noktasından sabit bir v uzaklığındaki nokta P_v ile gösterilsin. $\{T, N, B\}$ nin eğri boyunca hareketi esnasında P_v noktasının geometrik yeri olan C_v eğrisine α *eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi* denir (Hacısalihoğlu 1968).



Şekil 2.1.1 Sabit sırt uzaklıklı eğri

$\{T,N,B\}$ üç ayaklısının α eğrisi boyunca hareketi H ile gösterilirse, H hareketi esnasında k doğrusunun oluşturduğu regle yüzey (d) ile gösterilsin. $d = d_1T + d_2N + d_3B$ vektörü birim vektör olarak alınsın ve α eğrisinin yay parametresi s olsun. Bu durumda *(d)* regle yüzeyi

$$X(s,v) = \alpha(s) + vd(s) \tag{2.2}$$

olarak ifade edilir. *(d)* regle yüzeyinin dağılma parametresini λ_d ile gösterelim.

$$\lambda_d = \frac{\det(T,d,d')}{\|d'\|}$$

dir (Hacısalihoğlu 1983).

Buna göre

$$d = d_1T + d_2N + d_3B$$

$$d' = d_1T' + d_2N' + d_3B'$$

eşitliğinde α eğrisinin eğrilikleri k_1, k_2 olmak üzere

$$T' = k_1N$$
$$N' = -k_1T + k_2B$$
$$B' = -k_2N$$

Frenet formüllerinin kullanılmasıyla

$$d' = -d_2k_1T + (d_1k_1 - d_3k_2)N + d_2k_1B$$

olur. Diğer taraftan, $\wedge$ vektörel çarpımı göstermek üzere,

$$d \wedge d' = \begin{vmatrix} T & N & B \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ -d_2k_1 & d_1k_1 - d_3k_2 & d_2k_1 \end{vmatrix}$$

$$= \left((d_2^2 + d_3^2)k_2 - d_1d_3k_1\right)T - (d_1d_2k_2 + d_2d_3k_1)N + \left((d_1^2 + d_2^2)k_1 - d_1d_3k_2\right)B$$

ve

$$\det(T, d \wedge d') = (d_1^2 + d_3^2)k_2 - d_1d_3k_1$$

$$\|d'\|^2 = d_2^2(k_1^2 + k_2^2) + (d_1k_1 - d_3k_2)^2$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\lambda_d = \frac{(d_1^2 + d_3^2)k_2 - d_1d_3k_1}{d_2^2(k_1^2 + k_2^2) + (d_1k_1 - d_3k_2)^2} \tag{2.3}$$

bulunur.

Teorem 2.1.1 Bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 2.1.2 E^3 de bir eğri α ve α nın $\{T, N, B\}$ Frenet üç ayaklısına sıkı suretle bağlanmış k doğrusunun H hareketi esnasında oluşturduğu regle yüzey açılabilirdir. $\Leftrightarrow$ α eğrisi bir genel helistir (Hacısalihoğlu 1968).

İspat: Teorem 2.1.1 e göre (d) regle yüzeyi açılabilir ise

$$\lambda_d = 0$$

$$(d_1^2 + d_3^2)k_2 - d_1d_3k_1 = 0$$

olur ve buradan

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{d_1^2 + d_3^2}{d_1d_3} = tg\theta, \ (\theta = sabit) \tag{2.4}$$

bulunur. Bu da α nın bir genel helis olduğunu gösterir.

H hareketi esnasında, v=*sabit* değeri için, *(d)* regle yüzeyi üzerinde P_v noktasının oluşturduğu C_v parametrik eğrisinin denklemi,

$$X(s,v) = \alpha(s) + vd(s) \tag{2.5}$$

olacaktır. C_v nin P_v noktasındaki teğet vektörü,

$$\begin{aligned} T_v &= \dot{X} = \alpha'(s) + vd'(s) \\ &= T + v(d_1T' + d_2N' + d_3B') \end{aligned}$$

olur ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$T_v = (1 - vd_2k_1)T + v(d_1k_1 - d_3k_2)N + vd_2k_2B \tag{2.6}$$

olarak elde edilir.

(2.6) dan görüldüğü gibi T_v teğet vektörü T, N, ve B ye göre üç bileşene sahiptir.

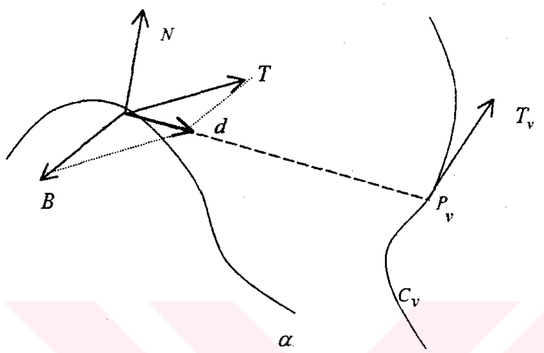
$$d_2 = 0 \tag{2.7}$$

alınırsa

$$d = d_1 T + d_3 B$$

$$T_v = T + v(d_1 k_1 - d_3 k_2)N$$

elde edilir.



Şekil 2.1.2 $d_2 = 0$ için C_v eğrisi ve teğeti.

Böylece H hareketi esnasında, rektifiyan düzlemde bulunan bir noktanın yörüngesinin (C_v eğrisi) teğetleri, her anda , α nın oskülatör düzlemine paraleldir.

Teorem 2.1.2 bu özel durum için şu şekilde düzenlenebilir:

Teorem 2.1.3 $\tan\beta = \dfrac{d_3}{d_1}$ bağıntısını sağlayacak şekilde α eğrisinin rektifiyan düzlemine bağlı k doğrusunun H hareketi esnasında oluşturduğu regle yüzey açılabilirdir. $\Leftrightarrow$ α, eğilim açısı β ya eşit olan bir genel helistir.

İspat: T ile d arasındaki açı β olsun.

$$\langle d,T\rangle = \cos\beta = d_1$$

$$\langle d,B\rangle = \sin\beta = d_3$$

(d) açılabilir ise (2.4) den

$$\frac{k_1}{k_2} = \tan\theta = \frac{d_3^2}{d_1 d_3} = \frac{d_3}{d_1} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \tan\beta$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \tan\theta = \frac{d_3}{d_1} = \tan\beta \Rightarrow \theta = \beta$$

bulunur.

α eğrisinin $\{T,N,B\}$ Frenet üç ayaklısının H hareketi esnasında, α nın rektifiyan düzleminde yatan ve $\{T,N,B\}$ nin orijininden sıkı suretle bağlı k doğrusunun oluşturduğu regle yüzey $(d)_0$ ile gösterilsin. v=*sabit* olmak üzere $(d)_0$ üzerindeki parametrik eğri C_v olsun. $(d)_0$ ve onun C_v parametrik eğrisi incelenecektir.

$d_2 = 0$ şartının yanında $d_3 = 0$ şartı da eklenirse, k doğrusu α nın T teğet vektörü doğrultusunda olacak ve $(d)_0$, α eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu tors yüzeyi olacaktır. Bu özel durumda C_v parametrik eğrisi, teğetler tarafından oluşturulan yüzeyin üzerinde α nın sabit sırt uzaklıklı eğrisidir.

2.2 C_v Eğrilerinin T_v Teğetleri

(2.7) şartını sağlayan k doğrusu, H hareketi esnasında, $(d)_0$ regle yüzeyini oluşturur ve k üzerindeki bir P_v noktası $(d)_0$ üzerinde bir C_v eğrisini çizer. C_v nin P_v noktasındaki teğeti (2.6) ve (2.7) de

$$T_v = T + v(d_1 k_1 - d_3 k_2)N$$

olarak bulunur

T_v ile d arasındaki açı β ise

$$\tan\beta = \frac{\sqrt{1+v^2(d_1k_1-d_3k_2)-d_1^2}}{d_1}$$

dir.

$a = d_1k_1 - d_3k_2$ ile gösterilsin. Özel olarak α yı Bertrant eğrisi olarak alırsak, *a=sabit* olur.

Teorem 2.2.1 α bir Bertrant eğrisi ise $(d)_0$ yüzeyinin C_v parametrik eğrilerinin T_v teğetleri $\{T,N,B\}$ ye sıkı suretle bağlıdır.

İspat:

$$\begin{aligned} T_v &= T + v(d_1k_1 - d_3k_2)N \\ &= T + vaN \end{aligned}$$

a sabit olduğundan T_v, $\{T,N,B\}$ ye sıkı suretle bağlıdır.

Teorem 2.2.2 C_v parametrik eğrilerinin T_v teğetleri $\{T,N,B\}$ ye sıkı suretle bağlı ise α bir Bertrant eğrisidir.

İspat: $T_v = T + vaN$

dir. Hipotezden $a = d_1k_1 - d_3k_2$ sabittir ve dolayısıyla α bir Bertrant eğrisidir.

Teorem 2.2.3 α bir Bertrant eğrisi ise $(d)_0$ yüzeyinin dağılma parametresi sabittir ve değeri her k anadoğrusu için

$$\lambda_d = -\frac{d_3}{a}$$

dır.

İspat: (2.3) ve (2.7) den

$$\lambda_d = \frac{d_3^2k_2 - d_1d_3k_1}{(d_1k_1 - d_3k_2)^2} = -\frac{d_3(d_1k_1 - d_3k_2)}{(d_1k_1 - d_3k_2)^2} = -\frac{d_3}{a}$$

olur.

3. PARALEL HİPERYÜZEYLER

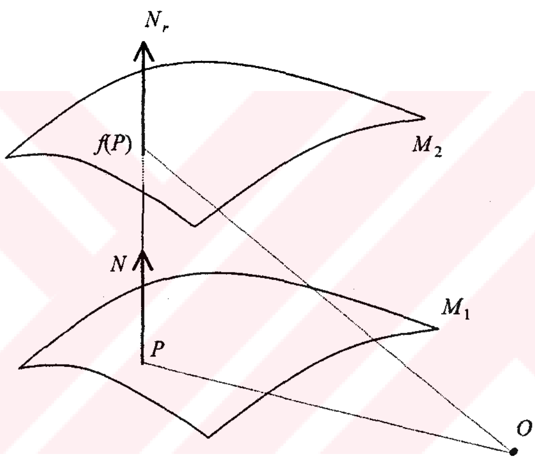
3.1. Paralel Hiperyüzeylerin Tanımı ve Özelikleri

Tanım 3.1.1 M_1 ve M_2, E^n de iki hiperyüzey ve M_1 in birim normal vektör alanı N olsun. r sabit bir sayı olmak üzere,

$$f : M_1 \longrightarrow M_2, \qquad f(p) = p + rN_p$$

olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa M_1 ve M_2 hiperyüzeylerine *paralel hiperyüzeyler* denir (Hacısalihoğlu 1983).

E^n in hiperyüzeylerinin cümlesinde paralel hiperyüzey olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.



Şekil 3.1.1 Paralel Hiperyüzey

M hiperyüzeyi verildiğinde,

$$M_r = \{P + rN_P : P \in M, r \in R \ ve \ r = sabit\}$$

eşitliği ile verilen M_r cümlesi, M ye paralel bir hiperyüzeydir. Sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeyler arasından (M, M_r) çiftini örnek verebiliriz. Bundan sonra E^n in bir M hiperyüzeyine paralel bir hiperyüzey M_r ile gösterilecektir. M nin birim normal vektör alanı N, şekil operatörü S ve M_r nin birim normal vektör alanı N_r, şekil operatörü de S_r ile gösterilecektir. Burada

$N = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, a_i \in C^\infty(M, R)$ için $\bar{a}_i(f(P)) = a_i(P)$ olmak üzere $\overline{N} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ise

$N_r = \overline{N}$ dir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 3.1.1 E^n in M hiperyüzeyine paralel M_r hiperyüzeyi verilsin. E^n in $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre, $X \in \chi(M)$, $\overline{X} \in \chi(M_r)$ vektör alanları $\forall P \in M$ için, $b_i(P) = \bar{b}_i(f(P))$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$X = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olarak verilsin. Bu durumda,

(1) $f_*(X) = \overline{X} + r\overline{S(X)}$

(2) $S_r(f_*(X)) = \overline{S(X)}$

dir (Hacısalihoğlu 1983).

M ve M_r arasındaki özellikler diferensiyel geometri açısından aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.1.2 E^n de, $f : M \longrightarrow M_r$ olmak üzere, M nin bir paralel hiperyüzeyi M_r olsun. Bu durumda,

(1) f, üçüncü temel form olma özeliğini korur.

(2) f, umbilik nokta olma özeliğini korur.

(3) f, asli eğrilik doğrultusu olma özeliğini korur.

(4) M nin temel formları, sırasıyla I, II ve III ile gösterilmek üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall P \in M$ için,

$$\langle f_*(X), f_*(Y)\rangle\big|_{f(P)} = I(X_P, Y_P) + 2rII(X_P, Y_P) + r^2 III(X_P, Y_P)$$

dir (Hacısalihoğlu 1983).

İspat: (1) M nin üçüncü temel formu III ve M_r nin üçüncü temel formu III' olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall P \in M$ için,

$$\begin{aligned} III'\langle f_*(X_P), f_*(Y_P)\rangle &= \langle S_r(f_*(X_P)), S_r(f_*(Y_P))\rangle \\ &= \langle \overline{S(X)}, \overline{S(Y)}\rangle\big|_{f(P)} \\ &= \langle S(X), S(Y)\rangle\big|_P \\ &= III(X_P, Y_P) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2). $P \in M$, M nin bir umbilik noktası olsun. O zaman, $\forall X_P \in T_M(P)$ ve bir tek $\lambda \in R$ için $S(X_P) = \lambda X_P$ dir. Teorem 3.1.1 gereğince,

$$f_*(X_P) = \overline{X}\big|_{f(P)} + r\overline{S(X)}\big|_{f(P)}$$

olacağından,

$$f_*(X_P) = (1 + r\lambda)\overline{X}_{f(P)}$$

yazılabilir. Buna göre, $\forall f_*(X_P) \in T_{M_r}(f(P))$ için,

$$\begin{aligned} S_r(f_*(X_P)) &= \overline{S(X_P)} \\ &= \lambda\overline{X}\big|_{f(P)} \\ &= \lambda\frac{1}{1 + r\lambda} f_*(X_P) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$S_r(f_*(X_P)) = \frac{\lambda}{1 + r\lambda} f_*(X_P)$$

elde edilir. Bu ise, $f(P) \in M_r$ noktasında S_r, M_r nin özdeşlik dönüşümünün bir katı demektir. Böylece $P \in M$ umbilik nokta ise $f(P) \in M_r$ de M_r nin bir umbilik noktasıdır.

(3). M nin bir P noktasındaki asli eğrilik doğrultu vektörü X_P ve bu X_P ye karşılık gelen asli eğrilik $k(P)$ olsun. Bu durumda $S(X_P)=k(P)X_P$ dir. İspat (2) deki benzer hesapların sonucunda

$$S_r(f_*(X_P))=\frac{k(P)}{1+rk(P)}f_*(X_P)$$

elde edilir. Bu da $X_P\in T_M(P)$ asli eğrilik doğrultusuna karşılık $f_*(X_P)$ nin M_r üzerinde bir asli eğrilik doğrultu vektörü olduğunu gösterir.

(4). $\forall X,Y\in\chi(M)$ ve $\forall P\in M$ için,

$$\begin{aligned}\langle f_*(X),f_*(Y)\rangle\big|_{f(P)}&=\langle\overline{X}+r\overline{S(X)},\overline{Y}+r\overline{S(Y)}\rangle\big|_{f(P)}\\&=\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle\big|_{f(P)}+2r\langle\overline{S(X)},\overline{Y}\rangle\big|_{f(P)}+r^2\langle\overline{S(X)},\overline{S(Y)}\rangle\big|_{f(P)}\\&=\langle X,Y\rangle\big|_P+2r\langle S(X),Y\rangle\big|_P+r^2\langle S(X),S(Y)\rangle\big|_P\end{aligned}$$

olur ve buradan da

$$\langle f_*(X),f_*(Y)\rangle\big|_{f(P)}=I(X_P,Y_P)+2rII(X_P,Y_P)+r^2III(X_P,Y_P)$$

elde edilir.

3.2. Paralel Yüzeyler

$n=3$ özel halinde, M ve M_r paralel yüzeylerinin Gauss eğrilikleri ile ortalama eğrilikleri arasındaki bağıntı aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.2.1. E^3 de bir M yüzeyinin bir paralel yüzeyi M_r olsun. $P\in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla, K ve H, $f(P)\in M_r$ noktasında M_r nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de K_r ve H_r olsun. Bu durumda,

$$K_r=\frac{K}{1+rH+r^2K}$$

$$H_r=\frac{H+2rK}{1+rH+r^2K}$$

dır (Hacısalihoğlu 1983).

İspat: $P \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri, k_1 , k_2 ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da , sırasıyla, X_1, X_2 olsun. Bu durumda Teorem 3.1.2 gereğince, M_r nin $f(P)$ noktasındaki asli eğrilik doğrultuları da $f_*(X_1)$ ve $f_*(X_2)$ olur ve

$$S_r(f_*(X_1)) = \frac{k_1}{1+rk_1} f_*(X_1)$$

$$S_r(f_*(X_2)) = \frac{k_2}{1+rk_2} f_*(X_2)$$

dır. Dolayısıyla $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ bazına göre S_r nin matrisi

$$\begin{bmatrix} \frac{k_1}{1+rk_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1+rk_2} \end{bmatrix}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} H_r &= \dot{I}zS_r \\ &= \frac{k_1}{1+rk_1} + \frac{k_2}{1+rk_2} \\ &= \frac{(k_1+k_2)+2r(k_1k_2)}{1+r(k_1+k_2)+r^2(k_1k_2)} \\ &= \frac{H+2rK}{1+rH+r^2K} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K_r = \det S_r &= \frac{k_1}{1+rk_1} \cdot \frac{k_2}{1+rk_2} \\ &= \frac{k_1k_2}{1+r(k_1+k_2)+r^2(k_1k_2)} \\ &= \frac{K}{1+rH+r^2K} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3 Paralel Hiperyüzeyler için Euler Teoremi ve Dupin Göstergesi

Tanım 3.3.1 E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin şekil operatörü S olsun. Bu durumda

$$k_n(X_P)=\frac{1}{\|X_P\|}\langle S(X_P,X_P\rangle,\quad X_P\in T_M(P)$$

Şeklinde tanımlı k_n dönüşümüne k nın normal eğrilik fonksiyonu ve $k_n(X_P)$ ye de M nin P noktasında ve X_P doğrultusundaki *normal eğriliği* denir (Kılıç ve Hacısalihoğlu 1984).

Teorem 3.3.1 E^n in bir hiperyüzeyi M ve M_r de M nin paralel hiperyüzeyi olsun. $k_i\,(1\le i\le n)$ ler farklı asli eğrilik fonksiyonları olmak üzere asli vektörlerden elde edilen ortonormal çatı $\{X_1,X_2,...,X_{n-1}\}$ olsun. Bir $X_P\in T_M(P)$ tanjant vektörü ile $X_i\ \ (1\le i\le n)$ ler arasındaki açılar, sırası ile, $\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1}$ olsun. Eğer M_r nin $f_*(X)$ doğrultusundaki normal eğriliği $\bar{k}_n(f_*(X_P))$ ile gösterilirse o zaman

$$\bar{k}_n(f_*(X_P))=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}k_i(1+rk_i)\cos^2\theta_i}{\sum_{i=1}^{n-1}(1+rk_i)^2\cos^2\theta_i}$$

dir (Kılıç ve Hacısalihoğlu 1984).

İspat: $f_*(X)\in T_{M_r}(f(P))$ olsun. O zaman

$$\bar{k}_n\big(f_*(X_P)\big)=\frac{1}{\|f_*(X_P)\|}\langle S_r(f_*(X_P)),f_*(X_P)\rangle \tag{3.1}$$

olur. Şimdi $f_*(X_P)$ ve $S_r\big(f_*(X_P)\big)$ leri hesaplayalım:

$X_i\ (1\le i\le n-1)$ ler ortonormal olduğundan,

$$X_P=\sum_{i=1}^{n-1}\langle X_P,X_i\rangle X_i$$

olarak ifade edilir. X_P birim vektör olarak alınırsa,

$$X_P=\sum_{i=1}^{n-1}\cos\theta_i X_i$$

ve böylece

$$f_*(X_P)=\sum_{i=1}^{n-1}\cos\theta_i f_*(X_i) \tag{3.2}$$

elde edilir. Buradan,

$$S_r(f_*(X_P))=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+rk_i}\cos\theta_i f_*(X_i) \tag{3.3}$$

bulunur. Eğer (3.2) ve (3.3), (3.1) de gözönüne alınırsa

$$\bar{k}_n(f_*(X_P))=\frac{1}{\|f_*(X_P)\|}\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{k_i}{1+rk_i}\cos\theta_i\cos\theta_j\langle f_*(X_i),f_*(X_j)\rangle$$

olur. $f_*(X_i)=X_i+rS(X_i)$, $S(X_i)=k_iX_i$ olduğundan

$$\bar{k}_n(f_*(X_P))=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}k_i(1+rk_i)\cos^2\theta_i}{\sum_{i=1}^{n-1}(1+rk_i)^2\cos^2\theta_i}$$

bulunur.

Tanım 3.3.2 E^n de bir hiperyüzey M olsun. $T_M(P)$ nin

$$D_P=\{X_P\,|\,\langle S(X_P),X_P\rangle=\mp 1,\ X_P\in T_M(P)\}$$

olarak tanımlanan D_P altcümlesine *M* nin *P* noktasındaki *Dupin göstergesi* denir (Kılıç ve Hacısalihoğlu 1984).

X_i $(1\le i\le n-1)$ ler *M* nin *P* noktasındaki asli vektörler olsunlar. Bu durumda

$$X_P=\sum_{i=1}^{n-1}x_iX_i \quad , \qquad x_i\in C^\infty(M,R)$$

olur. Buradan

$$S(X_P)=\sum_{i=1}^{n-1}x_iS(X_i)=\sum_{i=1}^{n-1}k_ix_iX_i$$

ve böylece,

$$\langle S(X_P),X_P\rangle=\sum_{i=1}^{n-1}k_iX_i^2$$

olur. $D_P = \{X_P | \langle S(X_P), X_P\rangle = \mp 1,\ X_P \in T_M(P)\}$ olduğundan

$$D_P = \left\{ X_P = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \Big| \sum_{i=1}^{n-1} k_i x_i^2 = \mp 1,\ X_P \in T_M(P) \right\}$$

bulunur.

Teorem 3.3.2 E^n de, $f : M \longrightarrow M_r$ olmak üzere, M nin bir paralel hiperyüzeyi M_r olsun. M_r nin $F(P)$ noktasındaki Dupin göstergesi $\overline{D}_{f(P)}$ ile gösterilirse , bu durumda

$$\overline{D}_{f(P)} = \left\{ f_*(X_P) = (x_1(1+rk_1), \ldots, x_{n-1}(1+rk_{n-1})) \Big| \sum_{i=1}^{n-1} k_i(1+rk_i)x_i^2 = \mp 1, f_*(X_P) \in T_{M_r}(f(P)) \right\}$$

dir.

İspat: $f_*(X_P) \in T_{M_r}(f(P))$ için

$$\overline{D}_{f(P)} = \{ f_*(X_P) | \langle S_r(f_*(X_P)), f_*(X_P)\rangle = \mp 1 \} \tag{3.4}$$

dır. Şimdi $f_*(X_P)$ ve $S_r(f_*(X_P))$ yi hesaplayalım:

X_i $(1 \le i \le n-1)$ ler asli vektörler olduğundan $\forall X \in \chi(M)$ için $X = \sum_{i=1}^{n-1} x_i X_i$ yazılır.

Burada her x_i, M üzerinde C^∞ sınıfından bir fonksiyondur. Böylece

$$f_*(X) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i f_*(X_i) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i (1 + rk_i) X_i \tag{3.5}$$

ve buradan

$$S_r(f_*(X)) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i S_r(f_*(X_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i x_i}{(1 + rk_i)} f_*(X_i) \tag{3.6}$$

bulunur. Eğer (3.5)ve (3.6), (3.4) de gözönüne alınırsa,

$$\overline{D}_{f(P)} = \left\{ f_*(X_P) = (x_1(1+rk_1), \ldots, x_{n-1}(1+rk_{n-1})) \Big| \sum_{i=1}^{n-1} k_i(1+rk_i)x_i^2 = \mp 1, f_*(X_P) \in T_{M_r}(f(P)) \right\}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3.3 E^n de, $f: M \longrightarrow M_r$ olmak üzere, M nin bir paralel hiperyüzeyi M_r olsun. $f: M \longrightarrow M_r$ dönüşümü altında ikinci temel form korunuyorsa M bir hiperdüzlemdir (Kılıç ve Hacısalihoğlu 1984).

İspat:

$$\langle S(X_i), X_j \rangle = \langle S_r(f_*(X_i)), f_*(X_j) \rangle = \langle S(X_i), X_j + rS(X_j) \rangle$$

olduğundan $rS^2 = 0$ ve bütün X_i asli vektörleri için $S(X_i) = kX_i$ dir. O zaman $S^2(X_i) = k_i^2 = 0$ ve $k_i = 0$ olur. Buradan $S = 0$ veya $\forall X$ için $\overline{D}_{X_i} N = 0$ olur ve böylece N, M üzerinde bir sabit vektör olacağından M bir hiperdüzlemdir.

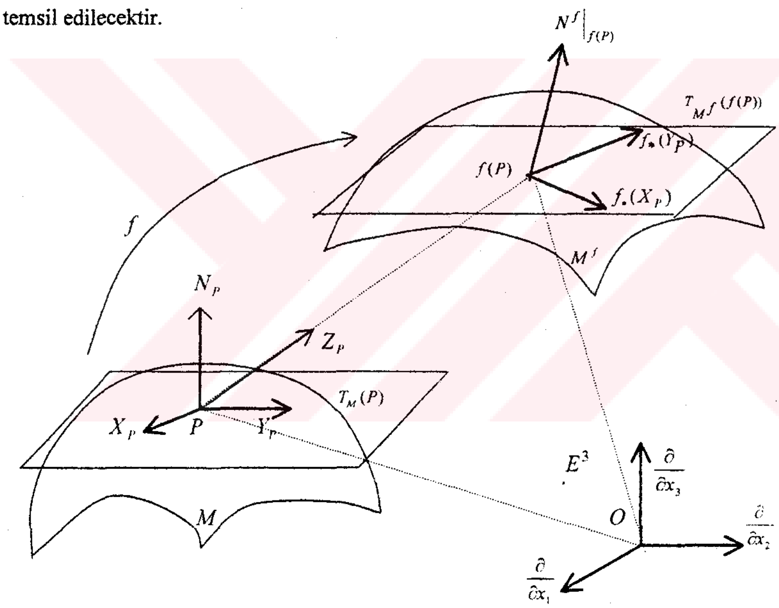
4. SABİT SIRT UZAKLIKLI YÜZEYLER ve PARALEL YÜZEYLER İÇİN KARAKTERİZASYONLAR

4.1. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyin Tanımı

Tanım 4.1.1. M ve M_1, E^3 de iki yüzey, M nin bir P noktasındaki birim normal vektörü N_P ve tanjant uzayı $T_M(P)$, $T_M(P)$ nin ortonormal bir bazı $\{X_P, Y_P\}$ olsun. $d_1, d_2, d_3 \in R$ sabit sayılar ve $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ olmak üzere $Z_P = d_1 X_P + d_2 Y_P + d_3 N_P$ şeklinde X_P, Y_P, N_P ye sıkı suretle bağlı Z_P birim vektörünü alalım. r sabit bir sayı olmak üzere,

$$f : M \longrightarrow M_1, \quad f(P) = P + rZ_P \tag{4.1}$$

olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa M_1 yüzeyine M yüzeyinin *sabit sırt uzaklıklı yüzeyi* denir. M_1 yüzeyi f fonksiyonu yardımı ile tanımlandığı için M^f ile gösterilecektir. (M, M^f) çifti ile M yüzeyi ve onun M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi temsil edilecektir.



Şekil 3.1.1. Sabit sırt uzaklıklı yüzey

Özel olarak $d_1 = d_2 = 0$ alınması halinde $Z_P = N_P$ ve $f(P) = P + rN_P$ elde edilir. Bu durumda M ve M^f paralel yüzeyler olur.

Teorem 4.1.1. E^3 de M ve M^f yüzeyleri verilsin. E^3 ün, $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat sistemine göre, $W \in \chi(M)$ için

$$f_*(W) = \overline{W} + r\overline{D_W Z} \tag{4.2}$$

dir. Burada $W = \sum_{i=1}^{3} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\overline{W} = \sum_{i=1}^{3} \overline{w}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, öyle ki $\forall P \in M$ için $w_i(P) = \overline{w}_i(f(P))$, $1 \le i \le 3$, özeliği ile verilsin.

İspat: $f : M \longrightarrow M^f$ dönüşümü, E^3 e,

$$f : E^3 \longrightarrow E^3,\ f(P) = \left(p_1 + rz_1(P), p_2 + rz_2(P), p_3 + rz_3(P)\right)$$

olarak genişletilsin. Burada, $Z = \sum_{i=1}^{3} z_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ vektör alanının bileşenleri de E^3 e

$$z_i(P) = \begin{cases} z_i(P), & P \in M \\ 0, & P \notin M \end{cases}$$

olarak genişletiliyor. E^3 deki $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat sistemine göre f dönüşümünün koordinat fonksiyonları

$$f_i = x_i + rz_i : E^3 \longrightarrow R, \quad 1 \le i \le 3,$$

olacağından f_* dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\left[\frac{\partial(x_i + rz_i)}{\partial x_j}\right] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_j} + r\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right] + r\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right]$$

$$= I_3 + r\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right]$$

olur. $W_P = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_P \in T_M(P)$ için

$$f_*|_P(W_P) = I_3\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_P + r\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right]_P \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_P$$

$$= \begin{bmatrix} w_1(P) \\ w_2(P) \\ w_3(P) \end{bmatrix} + r\left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial z_i}{\partial x_j}\bigg|_P w_j(P)\right]$$

bulunur. Burada ikinci taraftaki matris formu, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$ bazı cinsinden yazılırsa

$$f_*|_P(W_P) = \sum_{i=1}^{3} w_i(P)\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)} + r\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial z_i}{\partial x_j}\bigg|_P w_j(P)\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}$$

ve $w_i(P) = \overline{w_i}(f(P))$ eşitliği kullanılırsa,

$$f_*|_P(W_P) = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \overline{w_i}(f(P))\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}}_{\overline{W}|_{f(P)}} + r\underbrace{\sum_{i=1}^{3} W_P[z_i]\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}}_{\overline{(D_W Z)}|_{f(P)}}$$

yazılır. Bu eşitliğin sağındaki ilk terim $\overline{W}\big|_{f(P)}$, ve ikinci terim ise $r\overline{D_W Z}\big|_{f(P)}$ dir.

Çünkü,

$$D_W Z = \sum_{i=1}^{3} W[z_i]\frac{\partial}{\partial x_i}$$

olduğundan

$$\overline{D_W Z} = \sum_{i=1}^{3} \overline{W[z_i]}\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad W[z_i](P) = \overline{W[z_i]}(f(P))$$

$$\overline{D_W Z}\big|_{f(P)} = \sum_{i=1}^{3} \overline{W[z_i]}(f(P))\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} W[z_i](P)\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} W_P[z_i]\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}$$

olur. Buna göre

$$f_*|_P(W_P) = \overline{W}\big|_{f(P)} + r(\overline{D_W Z})\big|_{f(P)}$$

elde edilir.

4.2. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyin Parametrik ifadesi

M yüzeyi için bir parametrizasyon (ϕ, U) ve

$$\begin{array}{ll}\phi : U \subset E^3 \longrightarrow M \\ \quad (u,v) \qquad\qquad P = \phi(u,v)\end{array}$$

olsun. Bu durumda $T_M(P)$ nin bir bazı $\{\phi_u|_P, \phi_v|_P\}$, $P \in M$ deki birim normal vektör alanı N_P, d_1, d_2, d_3 sabit sayılar, $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ ve $Z_P = d_1\phi_u|_P + d_2\phi_v|_P + d_3 N_P$ olmak üzere

$$M^f = \{f(P) \mid f(P) = P + rZ_P\}$$

olarak verildiğinden M^f yüzeyi için bir parametrizasyon

$$\psi(u,v) = \phi(u,v) + rZ(u,v)$$

olur. Buna göre

$$M^f = \{\psi(u,v) | \psi(u,v) = \phi(u,v) + r(d_1\phi_u(u,v) + d_2\phi_v(u,v) + d_3 N(u,v)),\ d_1 = sabit,\ d_2 = sabit,$$
$$d_3 = sabit,\ d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1,\ r = sabit\}$$

olarak ifade edilir. Burada, $rd_1 = \lambda_1$, $rd_2 = \lambda_2$, $rd_3 = \lambda_3$ alınırsa,

$$M^f = \{\psi(u,v) | \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1\phi_u(u,v) + \lambda_2\phi_v(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = sabit,\ \lambda_1^2 + \lambda_1^2 + \lambda_1^2 = r^2\}$$

olur.

$$\psi_u = \phi_u + \lambda_1\phi_{uu} + \lambda_2\phi_{vu} + \lambda_3 N_u \tag{4.3}$$

$$\psi_v = \phi_v + \lambda_1\phi_{uv} + \lambda_2\phi_{vv} + \lambda_3 N_v \tag{4.4}$$

şeklindedir. Burada M yüzeyi için $\phi_{uu}, \phi_{uv}, \phi_{vu}, \phi_{vv}, N_u, N_v$ değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Hacısalihoğlu 1983).

$$\phi_{uu} = \frac{\langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2}\phi_u + \frac{\langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2}\phi_v + \frac{1}{\|\phi_u\|\|\phi_v\|}\det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v)N \tag{4.5}$$

$$\phi_{uv} = \phi_{vu} = \frac{\langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2}\phi_u + \frac{\langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2}\phi_v + \frac{1}{\|\phi_u\|\|\phi_v\|}\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v)N \tag{4.6}$$

$$\phi_{vv} = \frac{\langle \phi_{vv}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2}\phi_u + \frac{\langle \phi_{vv}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2}\phi_v + \frac{1}{\|\phi_u\|\|\phi_v\|}\det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v)N \tag{4.7}$$

$$N_u = -\frac{1}{\|\phi_u\|^2\|\phi_v\|^2}\det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v)\phi_u - \frac{1}{\|\phi_u\|^2\|\phi_v\|^2}\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v)\phi_v \tag{4.8}$$

$$N_v = -\frac{1}{\|\phi_u\|^2\|\phi_v\|^2}\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v)\phi_u - \frac{1}{\|\phi_u\|^2\|\phi_v\|^2}\det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v)\phi_v \tag{4.9}$$

dir.

M nin parametre eğrileri eğrilik çizgileri ve u ile v de bu çizgilerin yay parametreleri olarak seçilmesi halinde $\|\phi_u\| = 1$, $\|\phi_v\| = 1$ olarak alınabilir. Bu durumda

$$\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) = 0 \tag{4.10}$$

ve ϕ_u ve ϕ_v de M üzerinde asli eğrilik doğrultuları olduğundan

$$\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0 \tag{4.11}$$

dır. Ayrıca M yüzeyinin asli eğrilik fonksiyonları k_1 ve k_2 ise kabullerimiz altında

$$k_1 = -\det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v)$$

$$k_2 = -\det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v)$$

dir (Hacısalihoğlu 1983). Yine bu kabullere göre.

$$\begin{aligned} \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1 &\Rightarrow \phi_u[\langle \phi_u, \phi_u \rangle] = \phi_u[1] \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle + \langle \phi_u, \phi_{uu} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle = 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1 \Rightarrow \langle \phi_{vv}, \phi_v \rangle = 0 \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1 &\Rightarrow \phi_v[\langle \phi_u, \phi_u \rangle] = \phi_v[1] \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle + \langle \phi_u, \phi_{uv} \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle = 0 \tag{4.14}$$

$$\langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1 \Rightarrow \phi_u [\langle \phi_v, \phi_v \rangle] = \phi_u [1]$$

$$\Rightarrow \langle \phi_{vu}, \phi_v \rangle + \langle \phi_v, \phi_{vu} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \phi_{vu}, \phi_v \rangle = 0 \tag{4.15}$$

$$\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0 \Rightarrow \phi_u [\langle \phi_u, \phi_v \rangle] = \phi_u [0]$$

$$\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle + \langle \phi_u, \phi_{vu} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle = -\langle \phi_u, \phi_{vu} \rangle$$

olur. Bu son eşitlikte $\phi_{uv} = \phi_{vu}$ ve (4.14) eşitliği kullanılırsa

$$\langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle = 0 \tag{4.16}$$

bulunur.

$$\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0 \Rightarrow \phi_v [\langle \phi_u, \phi_v \rangle] = \phi_v [0]$$

$$\Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle + \langle \phi_u, \phi_{vv} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle = -\langle \phi_u, \phi_{vv} \rangle$$

ve burada $\phi_{uv} = \phi_{vu}$ ile (4.15) eşitliği kullanılırsa

$$\langle \phi_{vv}, \phi_u \rangle = 0$$

bulunur.

Bu hesaplamaların sonucunda

$$\left.\begin{aligned} \phi_{uu} &= -k_1 N \\ \phi_{vv} &= -k_2 N \\ \phi_{uv} &= \phi_{vu} = 0 \\ N_u &= k_1 \phi_u \\ N_v &= k_2 \phi_v \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

elde edilir.

$$\psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1\phi_u(u,v) + \lambda_2\phi_v(u,v) + \lambda_3 N(u,v)$$

için

$$\psi_u = \phi_u + \lambda_1\phi_{uu} + \lambda_2\phi_{vu} + \lambda_3 N_u$$

$$\psi_v = \phi_v + \lambda_1\phi_{uv} + \lambda_2\phi_{vv} + \lambda_3 N_v$$

şeklindedir. Burada (4.17) eşitlikleri kullanılarak ψ_u ve ψ_v değerleri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\psi_u &= \phi_u + \lambda_1\phi_{uu} + \lambda_2\phi_{vu} + \lambda_3 N_u \\ &= \phi_u + \lambda_1(-k_1 N) + \lambda_3 k_1 \phi_u \\ \psi_u &= (1+\lambda_3 k_1)\phi_u - \lambda_1 k_1 N \qquad (4.18)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\psi_v &= \phi_v + \lambda_1\phi_{uv} + \lambda_2\phi_{vv} + \lambda_3 N_v \\ &= \phi_v + \lambda_2(-k_2 N) + \lambda_3 k_2 \phi_v \\ \psi_v &= (1+\lambda_3 k_2)\phi_v - \lambda_2 k_2 N \qquad (4.19)\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\{\psi_u, \psi_v\}$, $\chi(M^f)$ için bir bazdır. M^f yüzeyinin normal vektör alanı,

ϕ_u, ϕ_v, N cinsinden

$$\begin{aligned}\psi_u \wedge \psi_v &= \{(1+\lambda_3 k_1)\phi_u - \lambda_1 k_1 N\} \wedge \{(1+\lambda_3 k_2)\phi_v - \lambda_2 k_2 N\} \\ &= (1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)\underbrace{\phi_u \wedge \phi_v}_{N} - \lambda_2 k_2 (1+\lambda_3 k_1)\underbrace{\phi_u \wedge N}_{-\phi_v} - \lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)\underbrace{N \wedge \phi_v}_{-\phi_u} + \lambda_1 k_1 \lambda_2 k_2 \underbrace{N \wedge N}_{0} \\ &= \lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)\phi_u + \lambda_2 k_2 (1+\lambda_3 k_1)\phi_v + (1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2) N\end{aligned}$$

olur. M^f yüzeyinin birim normal vektör alanı N^f ile gösterilirse,

$$\begin{aligned}N^f &= \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{\|\psi_u \wedge \psi_v\|} \\ &= \frac{\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)\phi_u + \lambda_2 k_2 (1+\lambda_3 k_1)\phi_v + (1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2) N}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1)^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2 (1+\lambda_3 k_2)^2}}\end{aligned}$$

ve burada

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1)^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2 (1+\lambda_3 k_2)^2}$$

veya

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3(\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2)K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3^2 K^2 + (1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2}$$

denilirse

$$N^f = \frac{\lambda_1 k_1(1+\lambda_3 k_2)}{A}\phi_u + \frac{\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A}\phi_v + \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}N \tag{4.20}$$

veya

$$N^f = \frac{\lambda_1(k_1+\lambda_3 K)}{A}\phi_u + \frac{\lambda_2(k_2+\lambda_3 K)}{A}\phi_v + \frac{1+\lambda_3 H+\lambda_3^2 K}{A}N \tag{4.21}$$

olarak bulunur.

Böylece bir M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi M^f ise M^f yüzeyinin birim normal vektör alanı N^f ve $\chi(M^f)$ in $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazı, M yüzeyinin birim normal vektör alanı N ve $\chi(M)$ nin $\{\phi_u, \phi_v\}$ bazı (ortonormal, asli eğrilik doğrultuları) ve M nin asli eğrilikleri k_1, k_2 cinsinden bulunmuş oldu.

Eğer $k_1 = k_2$ ve $\lambda_3 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{k_2}$ ise ψ_u ile ψ_v lineer bağımlı olacağından M^f regüler bir yüzey olmaz. Bu sebeple bu durum gözönüne alınmayacaktır.

Sonuç: (M, M^f) çifti bir paralel yüzeydir $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ dır.

İspat: (4.20) den $1+\lambda_3 k_1 \neq 0$ ve $1+\lambda_3 k_2 \neq 0$ olacağından $N^f \in Sp\{N\}$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olmasıdır. Bu da (M, M^f) çiftinin paralel yüzeyler olmasını gerektirir. Ayrıca $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olması halinde $A = 1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K$ olacağından $N^f = N$ olur.

4.3. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyin Şekil Operatörü

M yüzeyinin şekil operatörü S ve M^f yüzeyinin şekil operatörü S^f ile gösterilsin. Şimdi S^f şekil operatörünü $\chi(M^f)$ in

$$\{\psi_u = (1+\lambda_3 k_1)\phi_u - \lambda_1 k_1 N, \psi_v = (1+\lambda_3 k_2)\phi_v - \lambda_2 k_2 N\}$$

bazına göre hesaplayalım.

$$S^f(\psi_u) = D_{\psi_u} N^f = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_1 k_1(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)\phi_u + \frac{\lambda_1 k_1(1+\lambda_3 k_2)}{A}\underbrace{\phi_{uu}}_{-k_1 N}$$

$$+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A}\right)\phi_v + \frac{\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A}\underbrace{\phi_{vu}}_{0}$$

$$+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)N + \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\underbrace{N_u}_{k_1\phi_u}$$

$$S^f(\psi_u) = \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_1 k_1(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right) + \frac{k_1(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right\}\phi_u$$

$$+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A}\right)\phi_v \tag{4.22}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right) - \frac{\lambda_1 k_1^2(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right\}N$$

Bu hesabı yapmak için eşitliğin sağ tarafındaki ϕ_u, ϕ_v ve N nin katsayılarını ayrı ayrı hesaplayalım:

M yüzeyinin birim normal vektör alanı N ve $\chi(M)$ nin $\{\phi_u, \phi_v\}$ bazı (ortonormal, asli eğrilik doğrultuları) ve M nin asli eğrilikleri k_1, k_2 olarak alınmıştı. $\{\phi_u, \phi_v, N\}$, $\chi(E^3)$ için bir baz oluşturur. Teorem 1.4.3 e göre E^3 ün eğriliği sıfırdır. Buna göre,

$$R(\phi_u,\phi_v)N = 0$$

$$D_{\phi_u}(D_{\phi_v}N) - D_{\phi_v}(D_{\phi_u}N) - D_{[\phi_u,\phi_v]}N = 0$$

$$D_{\phi_u}(k_2\phi_v) - D_{\phi_v}(k_1\phi_u) - D_{(D_{\phi_u}\phi_v - D_{\phi_v}\phi_u)}N = 0$$

(4.17) den $D_{\phi_u}\phi_v - D_{\phi_v}\phi_u = \phi_{vu} - \phi_{uv} = 0$ dır.

$$D_{\phi_u}(k_2\phi_v) - D_{\phi_v}(k_1\phi_u) = 0$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial u}\phi_v + k_2\underbrace{\phi_{vu}}_{0} - \frac{\partial k_1}{\partial v}\phi_u - k_1\underbrace{\phi_{uv}}_{0} = 0$$

$$-\frac{\partial k_1}{\partial v}\phi_u + \frac{\partial k_2}{\partial u}\phi_v = 0$$

ve $\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\frac{\partial k_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial k_2}{\partial u} = 0 \tag{4.23}$$

bulunur. Bu eşitlikler aşağıdaki hesaplamalarda kullanılacaktır.

$A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1)^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2 (1+\lambda_3 k_2)^2}$ için (4.23) ifadesi de gözönüne alınırsa

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{2\lambda_1^2 k_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_2)^2 + 2\lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1)\lambda_3 \frac{\partial k_1}{\partial u} + 2(1+\lambda_3 k_1)\lambda_3 \frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_2)^2}{2A}$$

$$= \frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial u}\left\{\lambda_1^2 k_1 (1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 \lambda_3 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1) + \lambda_3 (1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)^2\right\}$$

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial u}\left\{\lambda_1^2 k_1 (1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_3 (1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)\right\} \tag{4.24}$$

olur.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{A}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)\right)A - \frac{\partial A}{\partial u}\left(\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)\right)}{A^2}$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_2)A^2 - \lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)\frac{\partial k_1}{\partial u}\left\{\lambda_1^2 k_1 (1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_3 (1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)\right\}}{A}}{A^2}$$

$$= \frac{1}{A^3}\frac{\partial k_1}{\partial u}\lambda_1 (1+\lambda_3 k_2)\left\{\lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1)^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2 (1+\lambda_3 k_2)^2 \right.$$
$$\left. - k_1\left(\lambda_1^2 k_1 (1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_3 (1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)\right)\right\}$$

ve burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{A}\right) = \frac{\lambda_1}{A^3}\frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{A}\right) + \frac{k_1 (1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A} = \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A^3}\left\{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right) + k_1 A^2\right\} \tag{4.25}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A}\right)=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)\right)A-\frac{\partial A}{\partial u}\left(\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)\right)}{A^2}$$

$$=\frac{\dfrac{\lambda_2\lambda_3 k_2\frac{\partial k_1}{\partial u}A^2-\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)\frac{\partial k_1}{\partial u}\left\{\lambda_1^2 k_1(1+\lambda_3 k_2)^2+\lambda_3(1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_2^2 k_2^2+(1+\lambda_3 k_2)^2\right)\right\}}{A}}{A^2}$$

$$=\frac{\lambda_2 k_2}{A^3}\frac{\partial k_1}{\partial u}\Big\{\lambda_1^2\lambda_3 k_1^2(1+\lambda_3 k_2)^2+\lambda_3\lambda_2^2 k_2^2(1+\lambda_3 k_1)^2+\lambda_3(1+\lambda_3 k_1)^2(1+\lambda_3 k_2)^2$$
$$-\lambda_1^2 k_1(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)^2-\lambda_3(1+\lambda_3 k_1)^2\left(\lambda_2^2 k_2^2+(1+\lambda_3 k_2)^2\right)\Big\}$$

ve burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A}\right)=-\frac{\lambda_1^2\lambda_2 k_1 k_2\frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_2)^2}{A^3} \tag{4.26}$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)=\frac{1}{A^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left((1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)\right)A-\frac{\partial A}{\partial u}(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)\right\}$$

$$=\frac{1}{A^3}\Big\{\lambda_3\frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_2)A^2-\frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)\Big(\lambda_1^2 k_1(1+\lambda_3 k_2)^2$$
$$+\lambda_2^2\lambda_3 k_2^2(1+\lambda_3 k_1)+\lambda_3(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)^2\Big)\Big\}$$

$$=\frac{\frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_2)}{A^3}\Big\{\lambda_1^2\lambda_3 k_1^2(1+\lambda_3 k_2)^2+\lambda_3\lambda_2^2 k_2^2(1+\lambda_3 k_1)^2+\lambda_3(1+\lambda_3 k_1)^2(1+\lambda_3 k_2)^2$$
$$-(1+\lambda_3 k_1)\lambda_1^2 k_1(1+\lambda_3 k_2)^2-\lambda_2^2\lambda_3 k_2^2(1+\lambda_3 k_1)^2-\lambda_3(1+\lambda_3 k_1)^2(1+\lambda_3 k_2)^2\Big\}$$

ve gerekli kısaltmalardan sonra

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)=-\frac{\lambda_1^2}{A^3}\frac{\partial k_1}{\partial u}k_1(1+\lambda_3 k_2)^2$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)-\frac{\lambda_1 k_1^2(1+\lambda_3 k_2)}{A}=-\frac{\lambda_1 k_1\left(1+\lambda_3 k_2\right)}{A^3}\left\{\lambda_1\frac{\partial k_1}{\partial u}\left(1+\lambda_3 k_2\right)^2+k_1 A^2\right\} \tag{4.27}$$

elde edilir.

(4.25), (4.26) ve (4.27) eşitliklerinin (4.22) de kullanılmasıyla

$$
\begin{aligned}
S^f(\psi_u) &= \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A^3}\left\{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right) + k_1 A^2\right\}\phi_u \\
&- \frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{A^3}\frac{\partial k_1}{\partial u} k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_2)^2 \phi_v \\
&- \frac{\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{A^3}\left\{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_2)^2 + k_1 A^2\right\} N
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

olarak elde edilir.

$$
\begin{aligned}
S^f(\psi_v) = D_{\phi_v} N^f &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)\phi_u + \frac{\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{A}\underbrace{\phi_{uv}}_{0} \\
&+ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_2 k_2 (1+\lambda_3 k_1)}{A}\right)\phi_v + \frac{\lambda_2 k_2 (1+\lambda_3 k_1)}{A}\underbrace{\phi_{vv}}_{-k_2 N} \\
&+ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)N + \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\underbrace{N_v}_{k_2 \phi_v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^f(\psi_v) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)\phi_u \\
&+ \left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_2 k_2 (1+\lambda_3 k_1)}{A}\right) + \frac{k_2 (1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right\}\phi_v \\
&+ \left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right) - \frac{\lambda_2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1)}{A}\right\}N
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

şeklini alır. Bu hesabı yapmak için eşitliğin sağ tarafındaki ϕ_u, ϕ_v ve N nin katsayılarını ayrı ayrı hesaplayalım:

$A=\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1)^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2 (1+\lambda_3 k_2)^2}$ için (4.23) ifadesi de gözönüne alınırsa

$$
\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{2\lambda_1^2 k_1^2 \lambda_3 \frac{\partial k_2}{\partial v}(1+\lambda_3 k_2) + 2\lambda_2^2 k_2 (1+\lambda_3 k_1)^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2(1+\lambda_3 k_1)^2 \lambda_3 \frac{\partial k_2}{\partial v}(1+\lambda_3 k_2)}{2A}
$$

$$
\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{1}{A}\frac{\partial k_2}{\partial v}\left\{\lambda_3 \lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2) + \lambda_2^2 k_2 (1+\lambda_3 k_1)^2 + \lambda_3 (1+\lambda_3 k_1)^2 (1+\lambda_3 k_2)\right\}
$$

olur.

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_1 k_1(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)=\frac{\frac{\partial}{\partial v}(\lambda_1 k_1(1+\lambda_3 k_2))A-\frac{\partial A}{\partial v}\lambda_1 k_1(1+\lambda_3 k_2)}{A^2}$$

$$=\frac{1}{A^3}\left\{\lambda_3\lambda_1 k_1\frac{\partial k_2}{\partial v}A^2-\frac{\partial k_2}{\partial v}\lambda_1 k_1(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_3\lambda_1^2 k_1^2(1+\lambda_3 k_2)+\lambda_2^2 k_2(1+\lambda_3 k_1)^2+\lambda_3(1+\lambda_3 k_1)^2(1+\lambda_3 k_2)\right)\right\}$$

$$=\frac{\lambda_1 k_1}{A^3}\frac{\partial k_2}{\partial v}\{\lambda_3\lambda_1^2 k_1^2(1+\lambda_3 k_2)^2+\lambda_3\lambda_2^2 k_2^2(1+\lambda_3 k_1)^2+\lambda_3(1+\lambda_3 k_1)^2(1+\lambda_3 k_2)^2$$
$$-\lambda_3\lambda_1^2 k_1^2(1+\lambda_3 k_2)^2-\lambda_2^2 k_2(1+\lambda_3 k_1)^2(1+\lambda_3 k_2)-\lambda_3(1+\lambda_3 k_1)^2(1+\lambda_3 k_2)^2\}$$

gerekli sadeleştirmelerin yapılmasıyla

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_1 k_1(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)=-\frac{1}{A^3}\frac{\partial k_2}{\partial v}\lambda_1\lambda_2^2 k_1 k_2(1+\lambda_3 k_1)^2 \tag{4.30}$$

bulunur.

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_1 k_1(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)=\frac{\frac{\partial}{\partial v}(\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1))A-\frac{\partial A}{\partial v}\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A^2}$$

$$=\frac{1}{A^3}\left\{\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}(1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_1^2 k_1^2(1+\lambda_3 k_2)^2+\lambda_2^2 k_2^2(1+\lambda_3 k_1)^2+(1+\lambda_3 k_1)^2(1+\lambda_3 k_2)^2\right)\right.$$
$$\left.-\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}k_2(1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_3\lambda_1^2 k_1^2(1+\lambda_3 k_2)+\lambda_2^2 k_2(1+\lambda_3 k_1)^2+\lambda_3(1+\lambda_3 k_1)^2(1+\lambda_3 k_2)\right)\right\}$$

ve burada parantez içerisindeki işlemlerin ve gerekli kısaltmaların yapılmasıyla

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A}\right)=\frac{\lambda_2}{A^3}\frac{\partial k_2}{\partial v}(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_1^2 k_1^2+(1+\lambda_3 k_1)^2\right)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A}\right)+\frac{k_2(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}=\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A^3}\left\{\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 k_1^2+(1+\lambda_3 k_1)^2\right)+k_2 A^2\right\} \tag{4.31}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)=\frac{1}{A^2}\left\{\frac{\partial}{\partial v}((1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2))A-\frac{\partial A}{\partial v}(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)\right\}$$

ve gerekli işlemlerden sonra

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)=-\frac{1}{A^3}\frac{\partial k_2}{\partial v}\lambda_2^2 k_2(1+\lambda_3 k_1)^3$$

bulunur ve buradan

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A}\right)-\frac{\lambda_2 k_2^2(1+\lambda_3 k_1)}{A}=-\frac{\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A^3}\left\{\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}(1+\lambda_3 k_1)^2+k_2 A^2\right\} \tag{4.32}$$

olur. (4.30), (4.31) ve (4.32) ifadelerinin (4.29) de kullanılması sonucu

$$\begin{aligned} S^f(\psi_v) &= -\frac{1}{A^3}\frac{\partial k_2}{\partial v}\lambda_1\lambda_2^2 k_1 k_2(1+\lambda_3 k_1)^2\phi_u \\ &+\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A^3}\left\{\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 k_1^2+(1+\lambda_3 k_1)^2\right)+k_2 A^2\right\}\phi_v \\ &-\frac{\lambda_2 k_2(1+\lambda_3 k_1)}{A^3}\left\{\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}(1+\lambda_3 k_1)^2+k_2 A^2\right\}N \end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir.

$S^f(\psi_u)$ ve $S^f(\psi_v)$ değerleri ϕ_u, ϕ_v, ve N cinsinden bulundu. Şimdi bunları ψ_u ve ψ_v cinsinden bulalım:

$$S^f(\psi_u)=\mu_1\psi_u+\mu_2\psi_v$$

Burada (4.18) ve (4.19) dan ψ_u ve ψ_v nin değerleri yerlerine yazılırsa

$$S^f(\psi_u)=\mu_1\{(1+\lambda_3 k_1)\phi_u-\lambda_1 k_1 N\}+\mu_2\{(1+\lambda_3 k_2)\phi_v-\lambda_2 k_2 N\}$$

$$S^f(\psi_u)=\mu_1(1+\lambda_3 k_1)\phi_u+\mu_2(1+\lambda_3 k_2)\phi_v-(\mu_1\lambda_1 k_1+\mu_2\lambda_2 k_2)N \tag{4.34}$$

olarak bulunur. (4.28) ile (4.34) karşılaştırılırsa

$$\mu_1=\frac{(1+\lambda_3 k_2)}{A^3}\left\{\lambda_1\frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2+(1+\lambda_3 k_2)^2\right)+k_1 A^2\right\} \tag{4.35}$$

$$\mu_2=-\frac{1}{A^3}\frac{\partial k_1}{\partial u}\lambda_1^2\lambda_2 k_1 k_2(1+\lambda_3 k_2) \tag{4.36}$$

elde edilir.

$$S^f(\psi_v)=\mu_3\psi_u+\mu_4\psi_v$$

Burada (4.18) ve (4.19) dan ψ_u ve ψ_v nin değerleri yerlerine yazılırsa

$$S^f(\psi_v) = \mu_3\{(1+\lambda_3 k_1)\phi_u - \lambda_1 k_1 N\} + \mu_4\{(1+\lambda_3 k_2)\phi_v - \lambda_2 k_2 N\}$$

$$S^f(\psi_v) = \mu_3(1+\lambda_3 k_1)\phi_u + \mu_4(1+\lambda_3 k_2)\phi_v - (\mu_3\lambda_1 k_1 + \mu_4\lambda_2 k_2)N \tag{4.37}$$

olarak bulunur. (4.29) ile (4.37) karşılaştırılırsa

$$\mu_3 = -\frac{1}{A^3}\frac{\partial k_2}{\partial v}\lambda_1\lambda_2^2 k_1 k_2(1+\lambda_3 k_1) \tag{4.38}$$

$$\mu_4 = \frac{1+\lambda_3 k_1}{A^3}\left\{\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2) + k_2 A^2\right\} \tag{4.39}$$

elde edilir.

$$S^f(\psi_u) = \mu_1\psi_u + \mu_2\psi_v$$

$$S^f(\psi_v) = \mu_3\psi_u + \mu_4\psi_v$$

Bu durumda $\chi(M^f)$ in $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazına göre M^f yüzeyinin şekil operatörünün matrisi

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2(1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2(1+\lambda_3 k_1)^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2(1+\lambda_3 k_2)^2}$$

veya farklı bir ifadeyle

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3(\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2)K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3^2 K^2 + (1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2}$$

olmak üzere,

$$S^f = \frac{1}{A^3}\begin{bmatrix} (1+\lambda_3 k_2)\left\{\lambda_1\frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right) + k_1 A^2\right\} & -\frac{\partial k_1}{\partial u}\lambda_1^2\lambda_2 k_1 k_2(1+\lambda_3 k_2) \\ -\frac{\partial k_2}{\partial v}\lambda_1\lambda_2^2 k_1 k_2(1+\lambda_3 k_1) & (1+\lambda_3 k_1)\left\{\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2) + k_2 A^2\right\} \end{bmatrix}$$

olur.

Bu hesapların bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3.1. E^3 de bir M yüzeyi için parametrizasyon (ϕ, U) ve $\chi(M)$ nin asli eğrilik doğrultularından oluşan ortonormal bazı $\{\phi_u, \phi_v\}$, M nin asli eğrilikleri k_1, k_2 ve M nin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi M^f olsun. $\chi(M^f)$ in $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazı

$$\psi_u = (1+\lambda_3 k_1)\phi_u - \lambda_1 k_1 N$$

$$\psi_v = (1+\lambda_3 k_2)\phi_v - \lambda_2 k_2 N$$

alındığında M^f yüzeyinin S^f şekil operatörüne karşılık gelen matris, alınan bu baza göre

$$S^f = \frac{1}{A^3}\begin{bmatrix} (1+\lambda_3 k_2)\left\{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right) + k_1 A^2\right\} & -\frac{\partial k_1}{\partial u}\lambda_1^2 \lambda_2 k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_2) \\ -\frac{\partial k_2}{\partial v}\lambda_1 \lambda_2^2 k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_1) & (1+\lambda_3 k_1)\left\{\lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2) + k_2 A^2\right\} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

dir.

Teorem 4.3.2. E^3 de bir M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi M^f ve M^f in Gauss eğriliği K^f, ortalama eğriliği H^f ise

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1)^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2 (1+\lambda_3 k_2)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3(\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2)K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3^2 K^2 + (1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2}$$

olmak üzere,

$$K^f = \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A^4}\left(\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial k_1}{\partial u}\frac{\partial k_2}{\partial v} + k_1 \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right) + k_2 \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right) + k_1 k_2 A^2\right) \tag{4.41}$$

veya burada A nın değeri ve $k_1 k_2 = K$, $k_1 + k_2 = H$ olduğu kullanılırsa

$$K^f = \left(1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K\right)\left\{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial k_1}{\partial u}\frac{\partial k_2}{\partial v} + \lambda_1 k_2 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right) + \lambda_2 k_1 \frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3(\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2)K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3^2 K^2 + (1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2\right)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{K}{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3(\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2)K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3^2 K^2 + (1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2}\right\}$$

dır ve

$$H^f = \frac{1}{A^3}\left\{(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right) + k_1 A^2\right)\right.$$
$$\left. + (1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2) + k_2 A^2\right)\right\} \tag{4.42}$$

veya burada A nın değeri ve $k_1 k_2 = K$, $k_1 + k_2 = H$ olduğu kullanılırsa

$$H^f = \frac{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right) + \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}(1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3(\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2)K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3^2 K^2 + (1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \frac{H + 2\lambda_3 K}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3(\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2)K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3^2 K^2 + (1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2}}$$

dır.

İspat: $K^f = \det S^f$ dir. (4.40) ifadesindeki S^f ye karşılık gelen matrisin determinantı alınırsa

$$K^f = \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A^6}\left\{\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial k_1}{\partial u}\frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 \lambda_2^2 k_1^2 k_2^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1)^2 + \lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2)^2\right.\right.$$
$$\left. + (1+\lambda_3 k_1)^2 (1+\lambda_3 k_2)^2\right) + A^2 k_1 \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)$$
$$\left. + A^2 k_2 \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right) + k_1 k_2 A^4 - \frac{\partial k_1}{\partial u}\frac{\partial k_2}{\partial v}\lambda_1^3 \lambda_2^3 k_1^2 k_2^2\right\}$$

$$= \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A^6}\left\{\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial k_1}{\partial u}\frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1)^2 + \lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2)^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2 (1+\lambda_3 k_2)^2\right)\right.$$
$$\left. + A^2\left(k_1 \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right) + k_2 \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)\right) + k_1 k_2 A^4\right\}$$

$$= \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A^6}\left\{A^2\left(\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial k_1}{\partial u}\frac{\partial k_2}{\partial v} + k_1 \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right) + k_2 \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)\right) + k_1 k_2 A^4\right\}$$

$$
=\frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)}{A^4}\left(\lambda_1\lambda_2\frac{\partial k_1}{\partial u}\frac{\partial k_2}{\partial v}+k_1\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2k_1^2+(1+\lambda_3k_1)^2\right)+k_2\lambda_1\frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2\right)+k_1k_2A^2\right)
$$

olur. Burada A nın değeri ve $k_1k_2=K$, $k_1+k_2=H$ olduğu kullanılırsa

$$
K^f=\left(1+\lambda_3H+\lambda_3^2K\right)\left\{\frac{\lambda_1\lambda_2\frac{\partial k_1}{\partial u}\frac{\partial k_2}{\partial v}+\lambda_1k_2\frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2\right)+\lambda_2k_1\frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2k_1^2+(1+\lambda_3k_1)^2\right)}{\left(\lambda_1^2k_1^2+\lambda_2^2k_2^2+2\lambda_3(\lambda_1^2k_1+\lambda_2^2k_2)K+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\lambda_3^2K^2+(1+\lambda_3H+\lambda_3^2K)^2\right)^2}\right.
$$
$$
\left.+\frac{K}{\lambda_1^2k_1^2+\lambda_2^2k_2^2+2\lambda_3(\lambda_1^2k_1+\lambda_2^2k_2)K+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\lambda_3^2K^2+(1+\lambda_3H+\lambda_3^2K)^2}\right\}
\tag{4.43}
$$

olarak bulunur.

$H^f=İzS^f$ dir. (4.38) ifadesindeki S^f ye karşılık gelen matrisin izi hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
H^f&=İzS^f\\
&=\frac{1}{A^3}\left\{(1+\lambda_3k_2)\left(\lambda_1\frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2\right)+k_1A^2\right)\right.\\
&\qquad\left.+(1+\lambda_3k_1)\left(\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}(\lambda_1^2k_1^2+(1+\lambda_3k_1)^2)+k_2A^2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

olur. Burada A nın değeri ve $k_1k_2=K$, $k_1+k_2=H$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
H^f=&\frac{\lambda_1\frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3k_2)\left(\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2\right)+\lambda_2\frac{\partial k_2}{\partial v}(1+\lambda_3k_1)\left(\lambda_1^2k_1^2+(1+\lambda_3k_1)^2\right)}{\left(\lambda_1^2k_1^2+\lambda_2^2k_2^2+2\lambda_3(\lambda_1^2k_1+\lambda_2^2k_2)K+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\lambda_3^2K^2+(1+\lambda_3H+\lambda_3^2K)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&+\frac{H+2\lambda_3K}{\sqrt{\lambda_1^2k_1^2+\lambda_2^2k_2^2+2\lambda_3(\lambda_1^2k_1+\lambda_2^2k_2)K+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\lambda_3^2K^2+(1+\lambda_3H+\lambda_3^2K)^2}}
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

olarak bulunur.

Özel olarak $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=r=sabit$ alınırsa,

$$
\psi(u,v)=\phi(u,v)+rN\big|_{\phi(u,v)}
$$

şeklini alır ve bu durumda M nin M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, M nin M_r paralel yüzeyi olur. M nin asli eğrilikleri k_1, k_2, Gauss eğriliği $K = k_1 k_2$, ortalama eğriliği $H = k_1 + k_2$ ve bu özel durumda $M^f = M_r$ yüzeyinin Gauss eğriliği K^f, ortalama eğriliği H^f olsun. Buna göre (4.41) ifadesinde $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = r = sabit$ için

$$A = (1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2) = (1+rk_1)(1+rk_2) = 1 + rH + r^2 K$$

halini alır ve

$$\begin{aligned} K^f &= \frac{(1+rk_1)(1+rk_2)}{A^6} k_1 k_2 A^4 \\ &= \frac{k_1 k_2}{(1+rk_1)(1+rk_2)} \\ &= \frac{K}{1 + r(k_1+k_2) + r^2 k_1 k_2} \\ K^f &= \frac{K}{1 + rH + r^2 K} \end{aligned}$$

bulunur.

Yine bu özel durumda (4.42) ifadesinde $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = r = sabit$ için

$$\begin{aligned} H^f &= \frac{1}{A^3}\left\{(1+rk_2)k_1 A^2 + (1+rk_1)k_2 A^2\right\} \\ &= \frac{k_1(1+rk_2) + k_2(1+rk_1)}{(1+rk_1)(1+rk_2)} \\ &= \frac{k_1 + k_2 + 2rk_1 k_2}{1 + r(k_1+k_2) + r^2 k_1 k_2} \\ &= \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2 K} \end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. $\lambda_3 = r = sabit$ hali M_r nin M ye paralel olması halidir. Bu halde $K^f = \dfrac{K}{1+rH+r^2K}$ ve $H^f = \dfrac{H+2rK}{1+rH+r^2K}$ olduğu 3. Bölümde ayrıntılı olarak ele alınmıştı. O halde hesaplamalarımız özel halde beklenen sonuçları vermektedir.

Tersine, $K^f = K_r$ ve $H^f = H_r$ olabilmesi için (4.43) ve (4.44) ifadelerinden $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ve $\lambda_3 = r$ sonuçlarına varılır. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.3. E^3 de (M, M^f) sabit sırt uzaklıklı yüzey çiftinin paralel yüzeyler çifti olması için gerek ve yeter koşul

$$K^f = \frac{K}{1 + rH + r^2 K}$$

ve

$$H^f = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2 K}$$

olmasıdır; burada K ile H, M nin ve K^f ile H^f de M^f nin Gauss ve ortalama eğrilikleridir.

Paralel yüzeyler bahsinde Teorem 4.3.3 ün gerekliliği gösterilmiş idi. Fakat bu teoremin yeterliliği ancak sabit sırt uzaklıklı yüzeylere ait sonuçlardan elde edilebilmiştir. Bu da sabit sırt uzaklıklı yüzeyler teorisinin önemini göstermektedir.

4.4. $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = sabit$ ve $\lambda_3 = sabit$ Özel Hali İçin Sabit Sırt uzaklıklı Yüzeyler

Bu kısımda E^3 deki bir

$$\begin{aligned} \phi : U \subset E^2 &\longrightarrow M \\ (u,v) &\quad\;\; P = \phi(u,v) \end{aligned}$$

ile verilen M yüzeyi için, $T_M(P)$ nin asli eğrilik doğrultularından oluşan ortonormal bazı $\{\phi_u|_P, \phi_v|_P\}$, $P \in M$ deki birim normal vektör alanı N_P olmak üzere,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v) + \lambda_2 \phi_v(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = sabit\}$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinde $\lambda_2 = 0$ alınarak elde edilen

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_1 \text{ ve } \lambda_3 = sabit\} \qquad (4.45)$$

özel hali incelenecektir.

Bu durumda (4.18) ve (4.19) ifadelerinde $\lambda_2 = 0$ alınırsa $\chi(M^f)$ için $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazı

$$\psi_u = (1+\lambda_3 k_1)\phi_u - \lambda_1 k_1 N \tag{4.46}$$

$$\psi_v = (1+\lambda_3 k_2)\phi_v \tag{4.47}$$

olarak elde edilir. M^f yüzeyinin birim normal vektör alanı ise

$$\begin{aligned} N^f &= \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{\|\psi_u \wedge \psi_v\|} \\ &= \frac{\lambda_1 k_1 (1+\lambda_3 k_2)\phi_u + (1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2) N}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2)^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2 (1+\lambda_3 k_2)^2}} \\ &= \frac{(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_1 k_1 \phi_u + (1+\lambda_3 k_1) N\right)}{|1+\lambda_3 k_2| \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \end{aligned}$$

ve burada seçeceğimiz yönlendirmeye göre

$$N^f = \frac{\lambda_1 k_1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \phi_u + \frac{(1+\lambda_3 k_1)}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} N \tag{4.48}$$

elde edilir.

N^f in ifadesinden görülüyor ki, $N^f\big|_{f(P)}$ vektörü, $\phi_u|_P$ ile N_P nin belirttiği düzlemde bulunuyor.

E^3 deki bir

$$\begin{aligned} \phi : U \subset E^2 &\longrightarrow M \\ (u,v) \quad &\quad P = \phi(u,v) \end{aligned}$$

ile verilen M yüzeyi için, $T_M(P)$ nin ortonormal ve asli eğrilik doğrultu vektörlerinden oluşan bazı $\{\phi_u|_P, \phi_v|_P\}$, $P \in M$ deki birim normal vektör alanı N_P olmak üzere,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_1, \lambda_3 = sabit\}$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin şekil operatörü, $\chi(M^f)$ in

$$\psi_u = (1+\lambda_3 k_1)\phi_u - \lambda_1 k_1 N$$

$$\psi_v = (1+\lambda_3 k_2)\phi_v$$

bazına göre (4.40) de $\lambda_2 = 0$ alınmasıyla

$$S^f = \frac{1}{A^3}\begin{bmatrix} (1+\lambda_3 k_2)\left\{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}(1+\lambda_3 k_2)^2 + k_1 A^2\right\} & 0 \\ 0 & (1+\lambda_3 k_1)k_2 A^2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada $A = (1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}$ olduğu kullanılırsa

$$S^f = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}}\left\{\frac{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}}{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} + k_1\right\} & 0 \\ 0 & \frac{(1+\lambda_3 k_1)k_2}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

elde edilir.

Bu durumda M yüzeyinin (4.45) de tanımlandığı gibi elde edilen

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_1, \lambda_3 = sabit\}$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin asli eğrilikleri k_1^f ve k_2^f, Gauss eğriliği K^f, ortalama eğriliği H^f ve $\chi(M^f)$ in bazı $\{\psi_u, \psi_v\}$ olmak üzere, (4.49) dan

$$S^f(\psi_u) = \left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}}\left(\frac{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}}{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} + k_1\right)\right\}\psi_u \quad (4.50)$$

ve

$$S^f(\psi_v) = \left\{\frac{(1+\lambda_3 k_1)k_2}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}}\right\}\psi_v \quad (4.51)$$

olur. Buradan da

$$k_1^f = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \left(\frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u}}{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} + k_1 \right) \tag{4.52}$$

ve

$$k_2^f = \frac{(1+\lambda_3 k_1) k_2}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \tag{4.53}$$

elde edilir. Buradan

$$K^f = k_1^f k_2^f = \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u} k_2 (1+\lambda_3 k_1)}{(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)^2} + \frac{k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_1)}{(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)}$$

$$= \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u} k_2 (1+\lambda_3 k_1)}{(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)^2} + \frac{k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_1)}{\lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2) + (1+\lambda_3 k_2)(1+\lambda_3 k_1)^2}$$

$$= \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u} k_2 (1+\lambda_3 k_1)}{(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)^2} + \frac{k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_1)}{\lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2) + (1+\lambda_3 k_1)\left(1+\lambda_3 (k_1 + k_2) + \lambda_3^2 k_1 k_2\right)}$$

$$K^f = \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u} k_2 (1+\lambda_3 k_1)}{(1+\lambda_3 k_2)\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)^2} + \frac{(1+\lambda_3 k_1) K}{\lambda_1^2 k_1^2 (1+\lambda_3 k_2) + (1+\lambda_3 k_1)\left(1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K\right)}$$

bulunur.

Özel olarak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = r$ alınırsa

$$M^f = M_r = \left\{ f(P) \in E^3 \,\middle|\, f(P) = P + rN_P,\ P \in M \right\}$$

yüzeyi M nin paralel yüzeyi olur ve yukarıdaki ifadeden

$$K^f = K_r = \frac{K}{1 + rH + r^2 K}$$

elde edilir.

(4.52) ve (4.53) dan M^f yüzeyinin H^f ortalama eğriliği

$$H^f = k_1^f + k_2^f$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \left(\frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u}}{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} + k_1 \right) + \frac{(1+\lambda_3 k_1)k_2}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}}$$

$$= \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u}}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)^{3/2}} + \frac{k_1(1+\lambda_3 k_2) + (1+\lambda_3 k_1)k_2}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}}$$

$$= \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u}}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)^{3/2}} + \frac{k_1 + k_2 + 2\lambda_3 k_1 k_2}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}}$$

$$= \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u}}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)^{3/2}} + \frac{H + 2\lambda_3 K}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}}$$

veya

$$H^f = \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u}}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right)^{3/2}} + \frac{H + 2\lambda_3 K}{\sqrt{\lambda_1^2 (k_1 + \lambda_3 K)^2 + \left(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K\right)^2}}$$

olarak bulunur.

Yine özel olarak $\lambda_1 = 0,\ \lambda_3 = r$ alınırsa $\lambda_2 = 0$ seçildiğinden

$$M^f = M_r = \left\{ f(P) \in E^3 \,\middle|\, f(P) = P + rN_P, P \in M \right\}$$

yüzeyi M nin paralel yüzeyi olur ve

$$H^f = H_r = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2 K}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.1. E^3 de $\begin{array}{ccc}\phi : U \subset E^2 & \longrightarrow & M \\ (u,v) & & P = \phi(u,v)\end{array}$ ile verilen M yüzeyi için,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \left\{ \psi(u,v) \,\middle|\, \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_1 \text{ ve } \lambda_3 = sabit \right\}$$

olsun. f asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.

İspat: M yüzeyi için, ϕ_u, ϕ_v asli eğrilik doğrultuları ve bunlara karşılık gelen asli eğrilikler k_1, k_2 ise

$$S(\phi_u) = k_1\phi_u$$
$$S(\phi_v) = k_2\phi_v$$

dir.

$$\begin{array}{ccc} f : M & \longrightarrow & M^f \\ \phi(u,v) & & f(\phi(u,v)) = \psi(u,v) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} f_* : \chi(M) & \longrightarrow & \chi(M^f) \\ \phi_u & & f_*(\phi_u) = \psi_u \\ \phi_v & & f_*(\phi_v) = \psi_v \end{array}$$

şeklindedir. (4.50) ve (4.51) den

$$S^f(f_*(\phi_u)) = S^f(\psi_u) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \left(\frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u}}{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} + k_1 \right) \right\} \psi_u$$

$$S^f(f_*(\phi_v)) = S^f(\psi_v) = \left\{ \frac{(1+\lambda_3 k_1)k_2}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \right\} \psi_v$$

yazılır ve bu da $f_*(\phi_u)$ ve $f_*(\phi_v)$ nin M^f üzerinde asli eğrilik doğrultuları olması demektir.

Teorem 4.4.2. E^3 de $\begin{array}{ccc} \phi : U \subset E^2 & \longrightarrow & M \\ (u,v) & & P = \phi(u,v) \end{array}$ ile verilen M yüzeyi için,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_1 \text{ ve } \lambda_3 = sabit\ \}$$

olsun. f umbilik nokta olma özelliğini korur $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 0$ veya $\dfrac{\partial k_1}{\partial u} = 0$ dır.

İspat: $\Rightarrow$: $P \in M$, M nin bir umbilik noktası olsun. O zaman $k_1(P) = k_2(P)$ olur. Bu durumda (4.52) ve (4.53) da $k_1(P) = k_2(P)$ alındığından

$$k_1^f(f(P)) = \frac{\lambda_1 \left.\frac{\partial k_1}{\partial u}\right|_P}{\left(\lambda_1^2 k_1^2(P) + (1+\lambda_3 k_1(P))^2\right)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2(P) + (1+\lambda_3 k_1(P))^2}} + \frac{k_1(P)}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2(P) + (1+\lambda_3 k_1(P))^2}}$$

ve

$$k_2^f(f(P)) = \frac{(1+\lambda_3 k_1(P))k_1(P)}{(1+\lambda_3 k_1(P))\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2(P) + (1+\lambda_3 k_1(P))^2}}$$

$$= \frac{k_1(P)}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2(P) + (1+\lambda_3 k_1(P))^2}}$$

elde edilir. Buradan $k_1^f(f(P)) = k_2^f(f(P))$ olması için

$$\lambda_1 \left.\frac{\partial k_1}{\partial u}\right|_P = 0$$

ve buradan da $\lambda_1 = 0$ veya $\left.\frac{\partial k_1}{\partial u}\right|_P = 0$ olması gerekir.

$\Leftarrow$: $P \in M$, M nin bir umbilik noktası ve $\lambda_1 = 0$ veya $\left.\frac{\partial k_1}{\partial u}\right|_P = 0$ olsun. Bu durumda $k_1(P) = k_2(P)$ ve ispatın birinci kısmından $k_1^f(f(P)) = k_2^f(f(P))$ olur. Bu da istenendir.

4.5. $\lambda_2 = 0$ Alındığında M^f Yüzeyi için Dupin Göstergesi ve Euler Teoremi

Teorem 4.5.1 E^3 de bir yüzey M, k_1 ve k_2 M nin farklı asli eğrilik fonksiyonları olmak üzere asli vektörlerden elde edilen ortonormal çatı $\{X_1, X_2\}$ olsun. Bir $X_P \in T_M(P)$ tanjant vektörü ile $X_1|_P$, $X_2|_P$ ler arasındaki açılar, sırası ile, θ_1, θ_2 olsun. M nin

$$M^f = \{f(P) \mid f(P) = P + \lambda_1 X_1|_P + \lambda_3 N_P,\ P \in M, \lambda_2 = 0,\ \lambda_1 \text{ ve } \lambda_3 = sabit\}$$

olarak alınan sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin $f_*(X_P)$ doğrultusundaki normal eğriliği $\bar{k}_n(f_*(X_P))$ ile gösterilirse, bu durumda

$$\bar{k}_n(f_*(X_P))=\frac{\cos^2\theta_1\left(\dfrac{\lambda_1 X_1[k_1]}{\sqrt{\lambda_1^2k_1^2+(1+\lambda_3k_1)^2}}+k_1\sqrt{\lambda_1^2k_1^2+(1+\lambda_3k_1)^2}\right)+\cos^2\theta_2\dfrac{(1+\lambda_3k_1)(1+\lambda_3k_2)k_2}{\sqrt{\lambda_1^2k_1^2+(1+\lambda_3k_1)^2}}}{\cos^2\theta_1\left(\lambda_1^2k_1^2+(1+\lambda_3k_1)^2\right)+\cos^2\theta_2(1+\lambda_3k_2)^2}$$

dir.

İspat: $f_*(X_P)\in T_{M^f}\left(f(P)\right)$ için

$$\bar{k}_n(f_*(X_P))=\frac{1}{\|f_*(X_P)\|^2}\left\langle S^f\left(f_*(X_P)\right),f_*(X_P)\right\rangle$$

olur. Şimdi $f_*(X_P)$ ve $S^f\left(f_*(X_P)\right)$ leri ayrı ayrı hesaplayalım:

$\{X_1,X_2\}$ ortonormal olduğundan,

$$X_P=\sum_{i=1}^{2}\langle X_P,X_i\rangle X_i=\langle X_P,X_1\rangle X_1+\langle X_P,X_2\rangle X_2$$

dir. X_P yi birim vektör olarak alırsak,

$$X_P=\sum_{i=1}^{2}\cos\theta_i X_i=\cos\theta_1X_1+\cos\theta_2X_2$$

olur ve böylece,

$$f_*(X_P)=\sum_{i=1}^{2}\cos\theta_i f_*(X_i)=\cos\theta_1 f_*(X_1)+\cos\theta_2 f_*(X_2)$$

elde edilir. $\{X_1,X_2\}$ M üzerinde ortonormal asli eğrilik doğrultuları olduğundan (4.46) ve (4.47) ifadelerinde ϕ_u yerine X_1, ϕ_v yerine X_2, ψ_u yerine $f_*(X_1)$ ve ψ_v yerine $f_*(X_2)$ alınırsa,

$$f_*(X_1)=(1+\lambda_3k_1)X_1-\lambda_1k_1N$$

$$f_*(X_2)=(1+\lambda_3k_2)X_2$$

olur. (4.50) ve (4.51) den

$$S^f\left(f_*(X_1)\right)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2k_1^2+(1+\lambda_3k_1)^2}}\left(\frac{\lambda_1X_1[k_1]}{\lambda_1^2k_1^2+(1+\lambda_3k_1)^2}+k_1\right)f_*(X_1)$$

$$S^f(f_*(X_2)) = \frac{(1+\lambda_3 k_1)k_2}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} f_*(X_2)$$

yazılır. Buna göre S^f in lineerliği de gözönüne alındığında,

$$S^f(f_*(X_P)) = \sum_{i=1}^{n-1} \cos\theta_i S^f(f_*(X_i)) = \cos\theta_1 S^f(f_*(X_1)) + \cos\theta_2 S^f(f_*(X_2))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \left\{ \cos\theta_1 \left(\frac{\lambda_1 X_1[k_1]}{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} + k_1 \right) f_*(X_1) + \cos\theta_2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)k_2}{1+\lambda_3 k_2} f_*(X_2) \right\}$$

olarak hesaplanır.

$$\|f_*(X_P)\| = \|\cos\theta_1 (1+\lambda_3 k_1) X_1 + \cos\theta_2 (1+\lambda_3 k_2) X_2 - \cos\theta_1 \lambda_1 k_1 N\|$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta_1 (1+\lambda_3 k_1)^2 + \cos^2\theta_2 (1+\lambda_3 k_2)^2 - \cos^2\theta_1 \lambda_1^2 k_1^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta_1 \left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right) + \cos^2\theta_2 (1+\lambda_3 k_2)^2}$$

ve

$$\left\langle S^f(f_*(X_P)), f_*(X_P) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \left\{ \cos^2\theta_1 \left(\frac{\lambda_1 X_1[k_1]}{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} + k_1 \right) \left((1+\lambda_3 k_1)^2 + \lambda_1^2 k_1^2 \right) \right.$$
$$\left. + \cos^2\theta_2 \frac{(1+\lambda_3 k_1) k_2 (1+\lambda_3 k_2)^2}{1+\lambda_3 k_2} \right\}$$

$$= \cos^2\theta_1 \left(\frac{\lambda_1 X_1[k_1]}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} + k_1 \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} \right) + \cos^2\theta_2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2) k_2}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}}$$

elde edilir. Bu hesaplamaların sonucunda

$$\bar{k}_n(f_*(X_P)) = \frac{\cos^2\theta_1 \left(\frac{\lambda_1 X_1[k_1]}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} + k_1 \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} \right) + \cos^2\theta_2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2) k_2}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}}}{\cos^2\theta_1 \left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2\right) + \cos^2\theta_2 (1+\lambda_3 k_2)^2} \tag{4.54}$$

olarak bulunur.

Özel olarak yukarıda $\lambda_1 = 0$ alınırsa, ($\lambda_2 = 0$ alınmıştı) $\lambda_3 = r$ dersek

$$M^f = M_r = \{ f(P) \mid f(P) = P + rN_P, P \in M \}$$

paralel yüzeyi elde edilir.

$$\bar{k}_n(f_*(X_P)) = \frac{k_1(1+rk_1)\cos^2\theta_1 + k_2(1+rk_2)\cos^2\theta_2}{(1+rk_1)^2\cos^2\theta_1 + (1+rk_2)^2\cos^2\theta_2} = \frac{\sum_{i=1}^{2} k_i(1+rk_i)\cos^2\theta_i}{\sum_{i=1}^{2}(1+rk_i)^2\cos^2\theta_i}$$

elde edilir ki bu da 3. Bölümde paralel hiperyüzeylerde verilmiştir.

Tersine; $M^f = \{f(P) \mid f(P) = P + \lambda_1 X_1\big|_P + \lambda_3 N_P,\ P \in M, \lambda_2 = 0,\ \lambda_1\ ve\ \lambda_3 = sabit\}$ için

$\lambda_1 = 0$ alındığında (4.54) den $\bar{k}_n(f_*(X_P)) = \dfrac{\sum_{i=1}^{2} k_i(1+rk_i)\cos^2\theta_i}{\sum_{i=1}^{2}(1+rk_i)^2\cos^2\theta_i}$ olur. Buna göre şu teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5.2. Bir (M, M^f) sabit sırt uzaklıklı yüzey çifti bir paralel yüzey çiftidir $\Leftrightarrow$

$$\bar{k}_n(f_*(X_P)) = \frac{\sum_{i=1}^{2} k_i(1+rk_i)\cos^2\theta_i}{\sum_{i=1}^{2}(1+rk_i)^2\cos^2\theta_i}$$

dır. Burada $\bar{k}_n$ M^f in normal eğriliği, X_1, X_2 M nin asli eğrilik doğrultuları ve $X_P \in T_M(P)$ tanjant vektörü ile $X_1\big|_P$, $X_2\big|_P$ ler arasındaki açılar, sırası ile, θ_1, θ_2 dir.

Tanım 3.3.2 de bir M yüzeyinin P noktasındaki *Dupin göstergesi* $T_M(P)$ nin

$$D_P = \{X_P \mid \langle S(X_P), X_P\rangle = \mp 1,\ X_P \in T_M(P)\}$$

altcümlesi olarak verilmişti.

X_1, X_2 M nin P noktasındaki ortonormal asli vektörler olsunlar. Bu durumda

$$X_P = \sum_{i=1}^{2} x_i X_i \quad , \quad x_i \in C^\infty(M, R)$$

olur. Buradan

$$S(X_P) = \sum_{i=1}^{2} x_i S(X_i) = \sum_{i=1}^{2} k_i x_i X_i$$

ve böylece,

$$\langle S(X_P), X_P\rangle = \sum_{i=1}^{2} k_i X_i^2$$

olur. $D_P = \{X_P | \langle S(X_P), X_P\rangle = \mp 1,\ X_P \in T_M(P)\}$ olduğundan

$$D_P = \left\{ X_P = (x_1, x_2) \mid \sum_{i=1}^{2} k_i x_i^2 = \mp 1,\ X_P \in T_M(P) \right\}$$

bulunur.

Teorem 4.5.3. E^3 de bir yüzey M ve M nin ortonormal asli eğrilik vektör alanları X_1, X_2 ve birim normal vektör alanı N olsun.

$M^f = \{f(P) | f(P) = P + \lambda_1 X_1|_P + \lambda_3 N_P,\ P \in M, \lambda_2 = 0,\ \lambda_1 \text{ ve } \lambda_3 = sabit\}$ olarak tanımlanan sabit sırt uzaklıklı yüzeyin *f(P)* noktasındaki Dupin göstergesi $\overline{D}_{f(P)}$ ile gösterilirse, bu durumda $X_P = \sum_{i=1}^{2} x_i X_i|_P$ olmak üzere

$$\overline{D}_{f(P)} = \left\{ f_*(X_P) = x_1 f_*(X_1) + x_2 f_*(X_2) \mid x_1^2 \left(\frac{\lambda_1 X_1[k_1]}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} + k_1 \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} \right) \right.$$
$$\left. + x_2^2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2) k_2}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} = \mp 1,\ f_*(X_P) \in T_{M^f}(f(P)) \right\}$$

dir.

İspat: $f_*(X_P) \in T_{M^f}(f(P))$ için

$$\overline{D}_{f(P)} = \{f_*(X_P) | \langle S^f(f_*(X_P)), f_*(X_P)\rangle = \mp 1\}$$

dir. Şimdi $f_*(X_P)$ ve $S^f(f_*(X_P))$ yi ayrı ayrı hesaplayalım:

X_1, X_2 M nin asli eğrilik vektör alanları olduğundan $\forall X \in \chi(M)$ için $X = \sum_{i=1}^{2} x_i X_i$ yazılır. Burada x_i ler M üzerinde C^∞ fonksiyonlardır. Böylece

$$\begin{aligned} f_*(X) &= x_1 f_*(X_1) + x_2 f_*(X_2) \\ &= x_1((1+\lambda_3 k_1)X_1 - \lambda_1 k_1 N) + x_2(1+\lambda_3 k_2) X_2 \end{aligned}$$

$$= x_1(1+\lambda_3 k_1)X_1 + x_2(1+\lambda_3 k_2)X_2 - x_1\lambda_1 k_1 N$$

ve

$$S^f(f_*(X)) = x_1 S^f(f_*(X_1)) + x_2 S^f(f_*(X_2))$$

$$= x_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \left(\frac{\lambda_1 X_1[k_1]}{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} + k_1 \right) f_*(X_1) + x_2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)k_2}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} f_*(X_2)$$

olur.

$$\left\langle S^f(f_*(X)), f_*(X) \right\rangle = x_1^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \left(\frac{\lambda_1 X_1[k_1]}{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} + k_1 \right) \langle f_*(X_1), f_*(X_1) \rangle$$
$$+ x_2^2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)k_2}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} \langle f_*(X_2), f_*(X_2) \rangle$$

ve burada

$$f_*(X_1) = (1+\lambda_3 k_1)X_1 - \lambda_1 k_1 N$$
$$f_*(X_2) = (1+\lambda_3 k_2)X_2$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\left\langle S^f(f_*(X)), f_*(X) \right\rangle = x_1^2 \left(\frac{\lambda_1 X_1[k_1]}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} + k_1 \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} \right) + x_2^2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)k_2}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\overline{D}_{f(P)} = \left\{ f_*(X_P) = x_1 f_*(X_1) + x_2 f_*(X_2) \mid x_1^2 \left(\frac{\lambda_1 X_1[k_1]}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} + k_1 \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2} \right) \right.$$
$$\left. + x_2^2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)k_2}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2}} = \mp 1,\ f_*(X_P) \in T_{M^f}(f(P)) \right\} \tag{4.55}$$

bulunur.

Burada $\lambda_1 = 0$ alıp, $\lambda_3 = r$ dersek $M^f = M_r = \{ f(P) \mid f(P) = P + rN_P, P \in M \}$ paralel yüzeyi elde edilir ve 3. Bölümde verilen

$$\overline{D}_{f(P)} = \{ f_*(X_P) = x_1 f_*(X_1) + x_2 f_*(X_2) \mid x_1^2 k_1 (1+\lambda_3 k_1) + x_2^2 k_2 (1+\lambda_3 k_2) = \mp 1, f_*(X_P) \in T_{M_r}(f(P)) \}$$

elde edilir. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5.4. E^3 de bir (M, M^f) sabit sırt uzaklıklı yüzey çifti bir paralel yüzey çiftidir $\Leftrightarrow$ M^f nin dupin göstergesi

$$\bar{D}_{f(P)} = \left\{ f_*(X_P) = x_1 f_*(X_1) + x_2 f_*(X_2) \,\middle|\, x_1^2 k_1 (1+\lambda_3 k_1) + x_2^2 k_2 (1+\lambda_3 k_2) = \mp 1, f_*(X_P) \in T_{M_f}(f(P)) \right\} = D_P$$

dir.

4.6. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = sabit$ ve $\lambda_3 = sabit$ Olması Durumunda Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyler

Bu kısımda E^3 deki bir

$$\begin{aligned} \phi : U \subset E^2 &\longrightarrow M \\ (u,v) \quad & \quad P = \phi(u,v) \end{aligned}$$

ile verilen M yüzeyi için, $T_M(P)$ nin asli eğrilik doğrultularından oluşan ortonormal bazı $\left\{ \phi_u|_P, \phi_v|_P \right\}$, $P \in M$ deki birim normal vektör alanı N_P olmak üzere,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \left\{ \psi(u,v) \,|\, \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v) + \lambda_2 \phi_v(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = sabit \right\}$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinde $\lambda_1 = 0$ alınarak elde edilen

$$M^f = \left\{ \psi(u,v) \,|\, \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_2 \phi_v(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_2, \lambda_3 = sabit \right\} \quad (4.56)$$

özel hali incelenecektir.

Bu durumda (4.18) ve (4.19) ifadelerinde $\lambda_1 = 0$ alınırsa $\chi(M^f)$ için $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazı

$$\psi_u = (1 + \lambda_3 k_1)\phi_u \quad (4.57)$$

$$\psi_v = (1 + \lambda_3 k_2)\phi_v - \lambda_2 k_2 N \quad (4.58)$$

olarak elde edilir. M^f yüzeyinin birim normal vektör alanı ise

$$\begin{aligned} N^f &= \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{\|\psi_u \wedge \psi_v\|} \\ &= \frac{\lambda_2 k_2 (1 + \lambda_3 k_1)\phi_v + (1 + \lambda_3 k_1)(1 + \lambda_3 k_2) N}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2}} \\ &= \frac{(1 + \lambda_3 k_1)\left(\lambda_2 k_2 \phi_v + (1 + \lambda_3 k_2) N\right)}{|1 + \lambda_3 k_1| \sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2}} \end{aligned}$$

ve burada seçeceğimiz yönlendirmeye göre

$$N^f = \frac{\lambda_2 k_2}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}}\phi_v + \frac{1+\lambda_3 k_2}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}}N \tag{4.59}$$

elde edilir.

N^f in ifadesinden görülüyor ki, $N^f\big|_{f(P)}$ vektörü, $\phi_v\big|_P$ ile N_P nin belirttiği düzlemde bulunuyor.

Teorem 4.6.1. E^3 de $\phi = \phi(u,v)$ parametrik ifadesiyle verilen bir M yüzeyinin $Sp\{\phi_u, N\}$ düzleminde yatan Z doğrultuları boyunca oluşan bütün sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin, bir $P \in M$ noktasına karşılık gelen $f(P)$ noktalarındaki normalleri, tepesi P deki birinci asli eğrilik merkezi $\left(C_1 = P - \frac{1}{k_1(P)}N_P\right)$ olan uzaysal bir doğru demeti oluşturur.

İspat: M yüzeyi için, $i = 1,2,...$ olmak üzere,

$$f_i : M \longrightarrow M^{f_i}$$

$$P = \phi(u,v) \qquad f_i(P) = P + \lambda_{1_i}\phi_u(P) + \lambda_{3_i}N_P$$

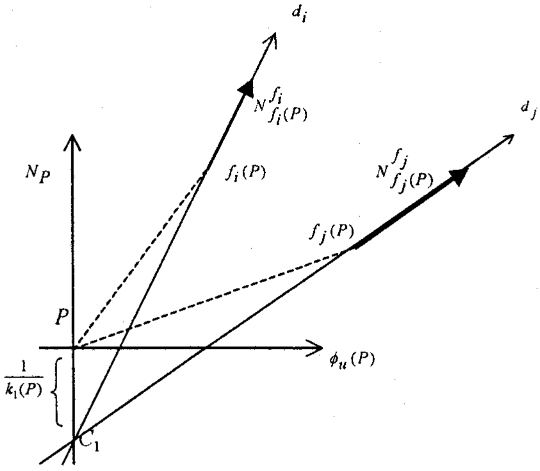
olarak tanımlanan M^{f_i} yüzeyleri ve bu yüzeylere ait $N^{f_i}\big|_{f_i(P)}$ birim normal vektör alanları gözönüne alınsın. $f_i(P)$ noktasından geçen ve $N^{f_i}\big|_{f_i(P)}$ doğrultusundaki doğruların arakesit noktası $C_1 = P - \frac{1}{k_1(P)}N_P$ olduğunu göstereceğiz.

$$M^{f_i} = \left\{f_i(P) = P + \lambda_{1_i}\phi_u(P) + \lambda_{3_i}N_P : \mathrm{P} \in \mathrm{M}\right\}$$

yüzeyinin $f_i(P)$ noktasındaki normal vektörü

$$N^{f_i}\big|_{f_i(P)} = \lambda_{1_i}k_1(P)\phi_u(P) + (1 + \lambda_{3_i}k_1(P))N_P$$

dir. Yani $\phi_u(P)$ ve N_P nin düzlemindedir. $f_i(P)$ noktasından geçen ve $N^{f_i}\big|_{f_i(P)}$ doğrultusundaki doğru d_i ve temsilci bir noktası $Q = (x,y) = x\phi_u(p) + yN_P$ ise d_i nin denklemi



Şekil 4.6.1 $Sp\{\phi_u(P), N_P\}$ düzlemindeki Z_P vektörlerinin oluşturduğu farklı sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin normal doğrultuları.

$$d_i ....\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Pf_i(P)} + \mu_1 N^{f_i}\Big|_{f_i(P)}$$

olur. Ayrıca $j = 1,2,...$ olmak üzere

$$M^{f_j} = \left\{ f_j(P) = P + \lambda_{1_j}\phi_u(P) + \lambda_{3_j}N_P : \mathrm{P} \in \mathrm{M} \right\}$$

yüzeyinin $f_j(P)$ noktasından geçen ve $N^{f_j}\Big|_{f_j(P)}$ doğrultusundaki doğru d_j ve temsilci bir noktası $R = (x, y)$ ise d_j nin denklemi

$$d_j ....\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{Pf_j(P)} + \mu_2 N^{f_j}\Big|_{f_j(P)}$$

dir. Şimdi bu iki doğrunun arakesit noktasını arayalım. $\{\phi_u(P), N_P\}$ vektörlerinin düzleminde çalışıldığı için P noktası başlangıç noktası alınsın.

$$d_i ....(x, y) = (\lambda_{1_i}, \lambda_{3_i}) + \mu_1(\lambda_{1_i}k_1, 1 + \lambda_{3_i}k_1)$$

ve düzenlenirse

$$d_i ....y = \frac{1 + \lambda_{3_i}k_1}{\lambda_{1_i}k_1}x - \frac{1}{k_1}$$

bulunur.

$$d_j..........(x,y)=(\lambda_{1_j},\lambda_{3_j})+\mu_2(\lambda_{1_j}k_1.1+\lambda_{3_j}k_1)$$

ve düzenlenirse

$$d_j..........y=\frac{1+\lambda_{3_j}k_1}{\lambda_{1_j}k_1}x-\frac{1}{k_1}$$

olur. d_i ve d_j nin arakesit noktası arandığında $x=0$ için $y=-\frac{1}{k_1}$ bulunur.

Yani d_i ve d_j doğrularının arakesit noktası $\{\phi_u(P),N_P\}$ düzleminde $C_1=P-\frac{1}{k_1(P)}N_P$ noktasıdır.

Özel olarak bir $P\in M$ noktasına karşılık M^{f_i} nin $N^{f_i}_{f_i(P)}$ ve M^{f_j} nin $N^{f_j}_{f_j(P)}$ normal vektörlerinin aynı doğrultuda olması durumunu araştıralım:

Bu iki vektörü üzerinde bulunduran doğrular bir önceki teoremin ispatından

$$d_i..........y=\frac{1+\lambda_{3_i}k_1}{\lambda_{1_i}k_1}x-\frac{1}{k_1} \quad \text{ve} \quad d_j..........y=\frac{1+\lambda_{3_j}k_1}{\lambda_{1_j}k_1}x-\frac{1}{k_1}$$

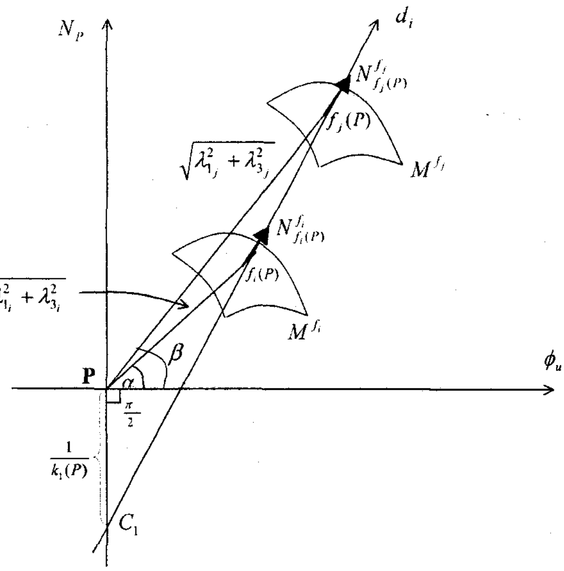
doğrulardır ve bu doğrular $C_1=P-\frac{1}{k_1(P)}N_P$ noktasından geçerler. $N^{f_i}_{f_i(P)}$ ve $N^{f_j}_{f_j(P)}$ nin aynı doğrultuda olması için d_i ve d_j doğrularının eğimleri aynı olmalıdır. Bu iki doğru eğimleri aynı alındığında, ortak bir noktaları da olduğundan çakışırlar.

Buna göre $\frac{1+\lambda_{3_i}k_1}{\lambda_{1_i}k_1}=\frac{1+\lambda_{3_j}k_1}{\lambda_{1_j}k_1}$ ise buradan

$$(1+\lambda_{3_i}k_1)\lambda_{1_j}k_1=(1+\lambda_{3_j}k_1)\lambda_{1_i}k_1$$

$$k_1(\lambda_{3_i}\lambda_{1_j}-\lambda_{3_j}\lambda_{1_i})=\lambda_{1_i}-\lambda_{1_j}$$

$$k_1=\frac{\lambda_{1_i}-\lambda_{1_j}}{\lambda_{3_i}\lambda_{1_j}-\lambda_{3_j}\lambda_{1_i}} \tag{4.60}$$



Şekil4.6.2 Aynı doğrultudaki normal vektöre sahip sabit sırt uzaklıklı yüzeyler

elde edilir. $\lambda_{1_i}, \lambda_{1_j}, \lambda_{3_i}, \lambda_{1_j}$ sabit olduklarından k_1 de sabit olmak durumundadır. M nin (4.60) şartına uyan M^{f_i} ve M^{f_j} sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin $f_i(P)$ ve $f_j(P)$ noktalarındaki normallerinin doğrultuları aynıdır. Bu bilgiler doğrultusunda $f_i(P)$ ile $f_j(P)$ arasındaki uzaklığı hesaplayalım. Yukarıdaki şeklin de gözönüne alınmasıyla,

$$\left\|\overline{Pf_i(P)}\right\| = \sqrt{\lambda_{1_i}^2 + \lambda_{3_i}^2}\,, \quad \left\|\overline{Pf_j(P)}\right\| = \sqrt{\lambda_{1_j}^2 + \lambda_{3_j}^2}$$

dir ve α ile β açıları sabittir. $\left\|\overline{C_1 f_i(P)}\right\| = r_1$ ve $\left\|\overline{C_1 f_j(P)}\right\| = r_2$ denirse $\left\|\overline{f_i(P) f_j(P)}\right\| = r_2 - r_1$ olur. Buna göre,

$$r_1 = \lambda_{1_i}^2 + \lambda_{3_i}^2 + \frac{1}{k_1^2} - 2\frac{1}{k_1}\sqrt{\lambda_{1_i}^2 + \lambda_{3_i}^2}\,\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}_{-\sin\alpha}$$

$$r_2 = \lambda_{1_j}^2 + \lambda_{3_j}^2 + \frac{1}{k_1^2} - 2\frac{1}{k_1}\sqrt{\lambda_{1_j}^2 + \lambda_{3_j}^2}\,\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} + \beta)}_{-\sin\beta}$$

olarak yazılır. Bu iki eşitlikteki ifadeler sabit olduğundan,

$$r_2 - r_1 = \lambda_{1_j}^2 + \lambda_{3_j}^2 - \lambda_{1_i}^2 - \lambda_{3_i}^2 + \frac{2}{k_1}\left(\sqrt{\lambda_{1_j}^2 + \lambda_{3_j}^2}\,\sin\beta - \sqrt{\lambda_{1_i}^2 + \lambda_{3_i}^2}\,\sin\alpha\right) = sabit = c$$

elde edilir. Böylece (4.60) eşitliğine uyan M^{f_i} ve M^{f_j} yüzeyleri için

$$f_j(P) = f_i(P) + cN_{f_i(P)}^{f_i}$$

yazılabildiğinden, bu iki yüzey paralel yüzeylerdir. Böylece şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.6.2. E^3 de $\phi = \phi(u, v)$ parametrik ifadesiyle verilen bir M yüzeyi için ϕ_u birinci asli eğrilik çizgisi ve N de normal vektör alanı olsun. Buna göre,

$$M^{f_i} = \left\{f_i(P) = P + \lambda_{1_i}\phi_u(P) + \lambda_{3_i}N_P : \mathrm{P} \in \mathrm{M}\right\}$$

$$M^{f_j} = \left\{f_j(P) = P + \lambda_{1_j}\phi_u(P) + \lambda_{3_j}N_P : \mathrm{P} \in \mathrm{M}\right\}$$

olarak alınan sabit sırt uzaklıklı yüzeyler için

$$k_1 = \frac{\lambda_{1_i} - \lambda_{1_j}}{\lambda_{3_i}\lambda_{1_j} - \lambda_{3_j}\lambda_{1_i}}$$

özelliği sağlanıyorsa, M^{f_i} ve M^{f_j} yüzeyleri paralel yüzeylerdir.

Teorem 4.6.3. E^3 de $\phi = \phi(u, v)$ parametrik ifadesiyle verilen bir M yüzeyinin $Sp\{\phi_v, N\}$ düzleminde yatan Z doğrultuları boyunca oluşan bütün sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin, bir $P \in M$ noktasına karşılık gelen $f(P)$ noktalarındaki normalleri, tepesi P deki ikinci asli eğrilik merkezi $\left(C_2 = P - \frac{1}{k_2(P)}N_P\right)$ olan uzaysal bir doğru demeti oluşturur.

İspat: M yüzeyi için , $i = 1, 2, \ldots$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f_i : M &\longrightarrow M^{f_i} \\ P = \phi(u, v) &\quad f_i(P) = P + \lambda_{2_i}\phi_v(P) + \lambda_{3_i}N_P \end{aligned}$$

olarak tanımlanan M^{f_i} yüzeyleri ve bu yüzeylere ait $N^{f_i}\Big|_{f_i(P)}$ birim normal vektör alanları gözönüne alınsın. $f_i(P)$ noktasından geçen ve $N^{f_i}\Big|_{f_i(P)}$ doğrultusundaki doğrular $C_2 = P - \dfrac{1}{k_2(P)} N_P$ noktasından geçerler.

$$M^{f_i} = \{f_i(P) = P + \lambda_{2_i}\phi_v(P) + \lambda_{3_i} N_P : \mathrm{P} \in \mathrm{M}\}$$

yüzeyinin $f_i(P)$ noktasındaki normal vektörü

$$N^{f_i}\Big|_{f_i(P)} = \lambda_{2_i} k_2(P)\phi_v(P) + (1 + \lambda_{3_i} k_2(P))N_P$$

dir. Yani $\phi_v(P)$ ve N_P nin düzlemindedir. $f_i(P)$ noktasından geçen ve $N^{f_i}\Big|_{f_i(P)}$ doğrultusundaki doğru d_i ve temsilci bir noktası $Q = (x, y) = x\phi_v(p) + yN_P$ ise d_i nin denklemi

$$d_i \ldots\ldots\ldots\ldots \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Pf_i(P)} + \mu_1 N^{f_i}\Big|_{f_i(P)}$$

olur. Ayrıca $j = 1,2,\ldots$ olmak üzere,

$$M^{f_j} = \{f_j(P) = P + \lambda_{2_j}\phi_v(P) + \lambda_{3_j} N_P : \mathrm{P} \in \mathrm{M}\}$$

yüzeyinin $f_j(P)$ noktasından geçen ve $N^{f_j}\Big|_{f_j(P)}$ doğrultusundaki doğru d_j ve temsilci bir noktası $R = (x, y)$ ise d_j nin denklemi

$$d_j \ldots\ldots\ldots\ldots \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{Pf_j(P)} + \mu_2 N^{f_j}\Big|_{f_j(P)}$$

dir. Şimdi bu iki doğrunun arakesit noktasını arayalım. $\{\phi_v(P), N_P\}$ vektörlerinin düzleminde çalışıldığı için P noktası başlangıç noktası alınsın.

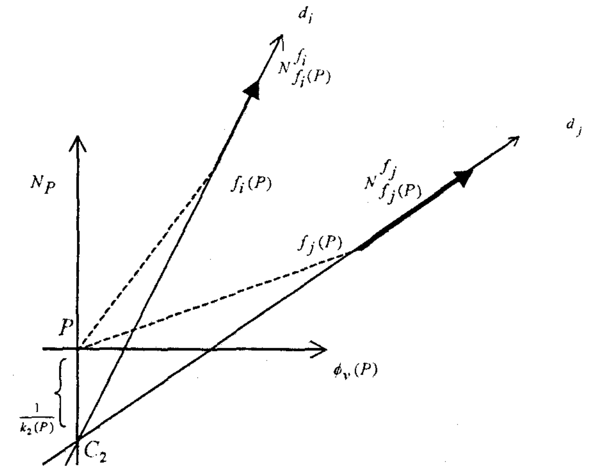
$$d_i \ldots\ldots\ldots (x, y) = (\lambda_{2_i}, \lambda_{3_i}) + \mu_1(\lambda_{2_i} k_2, 1 + \lambda_{3_i} k_2)$$

ve düzenlenirse

$$d_i \ldots\ldots\ldots y = \frac{1 + \lambda_{3_i} k_2}{\lambda_{2_i} k_2} x - \frac{1}{k_2}$$

bulunur.

$$d_j \ldots\ldots\ldots (x, y) = (\lambda_{2_j}, \lambda_{3_j}) + \mu_2(\lambda_{2_j} k_2, 1 + \lambda_{3_j} k_2)$$



Şekil 4.6.3 $Sp\{\phi_v(P), N_P\}$ düzlemindeki Z_P vektörlerinin oluşturduğu farklı sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin normal doğrultuları

ve düzenlenirse

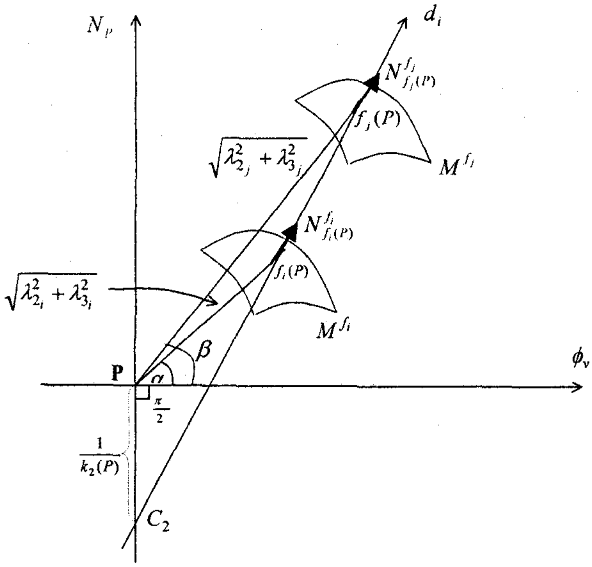
$$d_j ....y = \frac{1+\lambda_{3_j} k_2}{\lambda_{2_j} k_2} x - \frac{1}{k_2}$$

olur. d_i ve d_j doğrularının denklemlerinde $x = 0$ için $y = -\frac{1}{k_2}$ bulunur. Yani arakesit noktası $\{\phi_v(P), N_P\}$ düzleminde $C_2 = P - \frac{1}{k_2(P)} N_P$ noktasıdır.

Özel olarak bir $P \in M$ noktasına karşılık M^{f_i} nin $N^{f_i}_{f_i(P)}$ ve M^{f_j} nin $N^{f_j}_{f_j(P)}$ normal vektörlerinin aynı doğrultuda olması durumunu araştıralım:

Bu iki vektörü üzerinde bulunduran doğrular bir önceki teoremin ispatından

$$d_i ....y = \frac{1+\lambda_{3_i} k_2}{\lambda_{2_i} k_2} x - \frac{1}{k_2} \quad \text{ve} \quad d_j ....y = \frac{1+\lambda_{3_j} k_2}{\lambda_{2_j} k_2} x - \frac{1}{k_2}$$



Şekil4.6.4 Aynı doğrultudaki normal vektöre sahip sabit sırt uzaklıklı yüzeyler

doğrularıdır ve bu doğrular $C_2 = P - \dfrac{1}{k_2(P)} N_P$ noktasından geçerler. $N^{f_i}_{f_i(P)}$ ve $N^{f_j}_{f_j(P)}$ nin aynı doğrultuda olması için d_i ve d_j doğrularının eğimleri aynı olmalıdır. Bu iki doğru eğimleri aynı alındığında, ortak bir noktaları da olduğundan çakışırlar.

Buna göre $\dfrac{1+\lambda_{3_i}k_2}{\lambda_{1_i}k_2} = \dfrac{1+\lambda_{3_j}k_2}{\lambda_{2_j}k_2}$ ise buradan

$$(1+\lambda_{3_i}k_2)\lambda_{2_j}k_2 = (1+\lambda_{3_j}k_2)\lambda_{2_i}k_2$$

$$k_2(\lambda_{3_i}\lambda_{2_j} - \lambda_{3_j}\lambda_{2_i}) = \lambda_{2_i} - \lambda_{2_j}$$

$$k_2 = \frac{\lambda_{2_i} - \lambda_{2_j}}{\lambda_{3_i}\lambda_{2_j} - \lambda_{3_j}\lambda_{2_i}} \qquad (4.61)$$

elde edilir. $\lambda_{2_i}, \lambda_{2_j}, \lambda_{3_i}, \lambda_{3_j}$ sabit olduklarından k_2 de sabit olmak durumundadır. M nin (4.61) şartına uyan M^{f_i} ve M^{f_j} sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin $f_i(P)$ ve $f_j(P)$ noktalarındaki normallerinin doğrultuları aynıdır. Bu bilgiler doğrultusunda $f_i(P)$ ile $f_j(P)$ arasındaki uzaklığı hesaplayalım. Yukarıdaki şeklin de gözönüne alınmasıyla,

$$\left\|\overline{Pf_i(P)}\right\| = \sqrt{\lambda_{2_i}^2 + \lambda_{3_i}^2}\,, \quad \left\|\overline{Pf_j(P)}\right\| = \sqrt{\lambda_{2_j}^2 + \lambda_{3_j}^2}$$

dir ve α ile β açıları sabittir. $\left\|\overline{C_2 f_i(P)}\right\| = r_1$ ve $\left\|\overline{C_2 f_j(P)}\right\| = r_2$ denirse $\left\|\overline{f_i(P) f_j(P)}\right\| = r_2 - r_1$ olur. Buna göre,

$$r_1 = \lambda_{2_i}^2 + \lambda_{3_i}^2 + \frac{1}{k_2^2} - 2\frac{1}{k_2}\sqrt{\lambda_{2_i}^2 + \lambda_{3_i}^2}\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$$

$$r_2 = \lambda_{2_j}^2 + \lambda_{3_j}^2 + \frac{1}{k_2^2} - 2\frac{1}{k_2}\sqrt{\lambda_{2_j}^2 + \lambda_{3_j}^2}\cos(\frac{\pi}{2} + \beta)$$

olarak yazılır. Bu iki eşitlikteki ifadeler sabit olduğundan,

$$r_2 - r_1 = \lambda_{2_j}^2 + \lambda_{3_j}^2 - \lambda_{2_i}^2 - \lambda_{3_i}^2 + \frac{2}{k_2}\left(\sqrt{\lambda_{2_j}^2 + \lambda_{3_j}^2}\sin\beta - \sqrt{\lambda_{2_i}^2 + \lambda_{3_i}^2}\sin\alpha\right) = sabit = c$$

elde edilir. Böylece (4.61) eşitliğine uyan M^{f_i} ve M^{f_j} yüzeyleri için

$$f_j(P) = f_i(P) + cN_{f_i(P)}^{f_i}$$

yazılabildiğinden, bu iki yüzey paralel yüzeylerdir. Böylece şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.6.4. E^3 de $\phi = \phi(u,v)$ parametrik ifadesiyle verilen bir M yüzeyi için ϕ_v ikinci asli eğrilik çizgisi ve N de normal vektör alanı olsun. Buna göre,

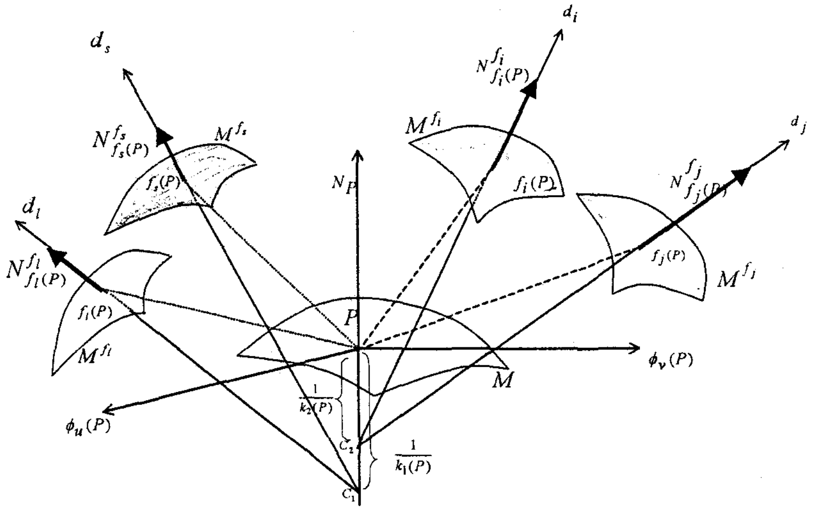
$$M^{f_i} = \left\{f_i(P) = P + \lambda_{2_i}\phi_v(P) + \lambda_{3_i}N_P : \mathrm{P} \in \mathrm{M}\right\}$$

$$M^{f_j} = \left\{f_j(P) = P + \lambda_{2_j}\phi_v(P) + \lambda_{3_j}N_P : \mathrm{P} \in \mathrm{M}\right\}$$

olarak alınan sabit sırt uzaklıklı yüzeyler için

$$k_1 = \frac{\lambda_{2_i} - \lambda_{2_j}}{\lambda_{3_i}\lambda_{2_j} - \lambda_{3_j}\lambda_{2_i}}$$

özelliği sağlanıyorsa, M^{f_i} ve M^{f_j} yüzeyleri paralel yüzeylerdir.



Şekil 4.6.5 $Sp\{\phi_u(P), N_P\}$ ve $Sp\{\phi_v(P), N_P\}$ düzlemlerindeki Z_P vektörlerinin oluşturduğu farklı sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin normal doğrultularının arakesit noktaları

Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.6.5. E^3 de $\phi = \phi(u,v)$ parametrik ifadesiyle verilen M yüzeyinin bir P noktası ile, $Sp\{\phi_u(P), N_P\}$ ve $Sp\{\phi_v(P), N_P\}$ düzlemlerindeki Z_P vektörlerinin oluşturduğu farklı sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin normal doğrultularının arakesit noktaları (C_1 ve C_2) kolineerdir.

E^3 deki bir

$$\begin{array}{ccc} \phi : U \subset E^2 & \longrightarrow & M \\ (u,v) & & P = \phi(u,v) \end{array}$$

ile verilen M yüzeyi için, $T_M(P)$ nin ortonormal ve asli eğrilik doğrultu vektörlerinden oluşan bazı $\left\{\phi_u|_P, \phi_v|_P\right\}$, $P \in M$ deki birim normal vektör alanı N_P olmak üzere,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_2 \phi_v(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_2, \lambda_3 = sabit\ \}$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin şekil operatörü, $\chi(M^f)$ in

$$\psi_u = (1+\lambda_3 k_1)\phi_u$$

$$\psi_v = (1+\lambda_3 k_2)\phi_v - \lambda_2 k_2 N$$

bazına göre (4.40) de $\lambda_1 = 0$ alınmasıyla

$$S^f = \frac{1}{A^3}\begin{bmatrix} (1+\lambda_3 k_2)k_1 A^2 & 0 \\ 0 & (1+\lambda_3 k_1)\left\{\lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}(1+\lambda_3 k_1)^2 + k_2 A^2\right\} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada $A = (1+\lambda_3 k_1)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}$ olduğu kullanılırsa

$$S^f = \begin{bmatrix} \dfrac{(1+\lambda_3 k_2)k_1}{(1+\lambda_3 k_1)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}}\left\{\dfrac{\lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}}{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2} + k_2\right\} \end{bmatrix}$$

(4.62)

elde edilir.

Bu durumda M yüzeyinin (4.56) de tanımlandığı gibi elde edilen

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_2\phi_v(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_2 = sabit, \lambda_3 = sabit\ \}$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin asli eğrilikleri k_1^f ve k_2^f, Gauss eğriliği K^f, ortalama eğriliği H^f ve $\chi(M^f)$ in bazı $\{\psi_u, \psi_v\}$ olmak üzere, (4.62) den

$$S^f(\psi_u) = \left\{\frac{(1+\lambda_3 k_2)k_1}{(1+\lambda_3 k_1)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}}\right\}\psi_u \tag{4.63}$$

ve

$$S^f(\psi_v) = \left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}}\left(\frac{\lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}}{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2} + k_2\right)\right\}\psi_v \tag{4.64}$$

olur. Buradan da

$$k_1^f = \frac{(1+\lambda_3 k_2)k_1}{(1+\lambda_3 k_1)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} \tag{4.65}$$

ve

$$k_2^f = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}}\left(\frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v}}{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2} + k_2\right) \tag{4.66}$$

elde edilir. Buna göre

$$K^f = k_1^f k_2^f = \frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v} k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{(1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)^2} + \frac{k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_2)}{(1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)}$$

$$= \frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v} k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{(1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)^2} + \frac{k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_2)}{\lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1) + (1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)^2}$$

$$= \frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v} k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{(1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)^2} + \frac{k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_2)}{\lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1) + (1+\lambda_3 k_2)\left(1+\lambda_3 (k_1+k_2) + \lambda_3^2 k_1 k_2\right)}$$

$$K^f = \frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v} k_1 (1+\lambda_3 k_2)}{(1+\lambda_3 k_1)\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)^2} + \frac{(1+\lambda_3 k_2)K}{\lambda_2^2 k_2^2 (1+\lambda_3 k_1) + (1+\lambda_3 k_2)\left(1+\lambda_3 H + \lambda_3^2 K\right)}$$

bulunur.

Özel olarak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = r = sabit$ alınırsa

$$M^f = M_r = \left\{ f(P) \in E^3 \,\middle|\, f(P) = P + rN_P, P \in M \right\}$$

yüzeyi M nin paralel yüzeyi olur ve

$$K^f = K_r = \frac{K}{1 + rH + r^2 K}$$

elde edilir.

(4.65) ve (4.66) dan sadece $\lambda_1 = 0$, λ_2 ve λ_3 ün sabit olması durumunda M^f yüzeyinin

H^f ortalama eğriliği

$$H^f = k_1^f + k_2^f$$

$$= \frac{(1+\lambda_3 k_2)k_1}{(1+\lambda_3 k_1)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}}\left(\frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v}}{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2} + k_2\right)$$

$$= \frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v}}{\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)^{3/2}} + \frac{k_1(1+\lambda_3 k_2) + (1+\lambda_3 k_1)k_2}{(1+\lambda_3 k_1)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}}$$

$$= \frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v}}{\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)^{3/2}} + \frac{k_1 + k_2 + 2\lambda_3 k_1 k_2}{(1+\lambda_3 k_1)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}}$$

$$= \frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v}}{\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)^{3/2}} + \frac{H + 2\lambda_3 K}{(1+\lambda_3 k_1)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}}$$

veya

$$H^f = \frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v}}{\left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2\right)^{3/2}} + \frac{H + 2\lambda_3 K}{\sqrt{\lambda_2^2 (k_2 + \lambda_3 K)^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2}}$$

olarak bulunur.

Yine özel olarak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = r = sabit$ alınırsa

$$M^f = M_r = \left\{ f(P) \in E^3 \,\middle|\, f(P) = P + rN_P, P \in M \right\}$$

yüzeyi M nin paralel yüzeyi olur ve

$$H^f = H_r = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2 K}$$

elde edilir.

Teorem 4.6.6. E^3 de $\begin{array}{ccc} \phi : U \subset E^2 & \longrightarrow & M \\ (u,v) & & P = \phi(u,v) \end{array}$ ile verilen M yüzeyi için,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_2 \phi_v(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_2, \lambda_3 = sabit\ \}$$

olsun. f asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.

İspat: M yüzeyi için, ϕ_u, ϕ_v asli eğrilik doğrultuları ve bunlara karşılık gelen asli eğrilikler k_1, k_2 ise

$$S(\phi_u) = k_1 \phi_u$$

$$S(\phi_v) = k_2 \phi_v$$

dir.

$$\begin{array}{ccc} f : M & \longrightarrow & M^f \\ \phi(u,v) & & f(\phi(u,v)) = \psi(u,v) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} f_* : \chi(M) & \longrightarrow & \chi(M^f) \\ \phi_u & & f_*(\phi_u) = \psi_u \\ \phi_v & & f_*(\phi_v) = \psi_v \end{array}$$

şeklindedir. (4.63) ve (4.64) den

$$S^f(f_*(\phi_u)) = S^f(\psi_u) = \left\{ \frac{(1+\lambda_3 k_2) k_1}{(1+\lambda_3 k_1)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} \right\} \psi_u$$

$$S^f(f_*(\phi_v)) = S^f(\psi_v) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} \left(\frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v}}{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2} + k_2 \right) \right\} \psi_v$$

yazılır ve bu da $f_*(\phi_u)$ ve $f_*(\phi_v)$ nin M^f üzerinde asli eğrilik doğrultuları olması demektir.

Teorem 4.6.7. E^3 de $\begin{array}{ccc} \phi : U \subset E^2 & \longrightarrow & M \\ (u,v) & & P = \phi(u,v) \end{array}$ ile verilen M yüzeyi için,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_2 \phi_v(u,v) + \lambda_3 N(u,v),\ \lambda_2, \lambda_3 = sabit\ \}$$

olsun. f umbilik nokta olma özelliğini korur $\Leftrightarrow \lambda_2 = 0$ veya $\dfrac{\partial k_2}{\partial v} = 0$ dır.

İspat: $\Rightarrow$: $P \in M$, M nin bir umbilik noktası olsun. O zaman $k_1(P) = k_2(P)$ olur . Bu durumda (4.65) ve (4.66) de $k_1(P) = k_2(P)$ alındığından

$$k_1^f(f(P)) = \frac{(1+\lambda_3 k_2(P))k_2(P)}{(1+\lambda_3 k_2(P))\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2(P) + (1+\lambda_3 k_2(P))^2}}$$

$$= \frac{k_2(P)}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2(P) + (1+\lambda_3 k_2(P))^2}}$$

ve

$$k_2^f(f(P)) = \frac{\lambda_2 \left.\dfrac{\partial k_2}{\partial v}\right|_P}{\left(\lambda_2^2 k_2^2(P) + (1+\lambda_3 k_2(P))^2\right)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2(P) + (1+\lambda_3 k_2(P))^2}} + \frac{k_2(P)}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2(P) + (1+\lambda_3 k_2(P))^2}}$$

elde edilir. Buradan $k_1^f(f(P)) = k_2^f(f(P))$ olması için

$$\lambda_2 \left.\frac{\partial k_2}{\partial v}\right|_P = 0$$

ve buradan da $\lambda_2 = 0$ veya $\left.\dfrac{\partial k_2}{\partial v}\right|_P = 0$ olması gerekir.

$\Leftarrow$: $P \in M$, M nin bir umbilik noktası ve $\lambda_2 = 0$ veya $\left.\dfrac{\partial k_2}{\partial v}\right|_P = 0$ olsun. Bu durumda $k_1(P) = k_2(P)$ ve ispatın birinci kısmından $k_1^f(f(P)) = k_2^f(f(P))$ olur. Bu da istenendir.

4.7. $\lambda_1 = 0$ Alındığında M^f Yüzeyi için Dupin Göstergesi ve Euler Teoremi

Teorem 4.7.1 E^3 de bir yüzey M, k_1 ve k_2 M nin farklı asli eğrilik fonksiyonları olmak üzere asli vektörlerden elde edilen ortonormal çatı $\{X_1, X_2\}$ olsun. Bir

$X_P \in T_M(P)$ tanjant vektörü ile $X_1|_P$, $X_2|_P$ ler arasındaki açılar, sırası ile, θ_1, θ_2 olsun. M nin

$$M^f = \left\{ f(P) \mid f(P) = P + \lambda_2 X_2\big|_P + \lambda_3 N_P,\ P \in M, \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \ ve\ \lambda_3 = sabit \right\}$$

olarak alınan sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin $f_*(X_P)$ doğrultusundaki normal eğriliği $\bar{k}_n(f_*(X_P))$ ile gösterilirse, bu durumda

$$\bar{k}_n(f_*(X_P)) = \frac{\cos^2\theta_1 \dfrac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)k_1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} + \cos^2\theta_2 \left(\dfrac{\lambda_2 X_2[k_2]}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} + k_2 \sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2} \right)}{\cos^2\theta_1 (1+\lambda_3 k_1)^2 + \cos^2\theta_2 \left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2 \right)}$$

dir.

İspat: $f_*(X_P) \in T_{M^f}(f(P))$ için

$$\bar{k}_n(f_*(X_P)) = \frac{1}{\|f_*(X_P)\|^2} \left\langle S^f(f_*(X_P)), f_*(X_P) \right\rangle$$

olur. Şimdi $f_*(X_P)$ ve $S^f(f_*(X_P))$ leri ayrı ayrı hesaplayalım:

$\{X_1, X_2\}$ ortonormal olduğundan,

$$X_P = \sum_{i=1}^{2} \langle X_P, X_i \rangle X_i = \langle X_P, X_1 \rangle X_1 + \langle X_P, X_2 \rangle X_2$$

dir. X_P yi birim vektör olarak alırsak,

$$X_P = \sum_{i=1}^{2} \cos\theta_i X_i = \cos\theta_1 X_1 + \cos\theta_2 X_2$$

olur ve böylece,

$$f_*(X_P) = \sum_{i=1}^{2} \cos\theta_i f_*(X_i) = \cos\theta_1 f_*(X_1) + \cos\theta_2 f_*(X_2)$$

elde edilir. $\{X_1, X_2\}$ M üzerinde ortonormal asli eğrilik doğrultuları olduğundan (4.46) ve (4.47) ifadelerinde ϕ_u yerine X_1, ϕ_v yerine X_2, ψ_u yerine $f_*(X_1)$ ve ψ_v yerine $f_*(X_2)$ alınırsa,

$$f_*(X_1) = (1 + \lambda_3 k_1) X_1$$

$$f_*(X_2) = (1 + \lambda_3 k_2) X_2 - \lambda_2 k_2 N$$

olur. (4.63) ve (4.64) den

$$S^f\left(f_*(X_1)\right)=\frac{(1+\lambda_3k_2)k_1}{(1+\lambda_3k_1)\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}}f_*(X_1)$$

$$S^f\left(f_*(X_2)\right)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}}\left(\frac{\lambda_2X_2[k_2]}{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}+k_2\right)f_*(X_2)$$

yazılır. Buna göre S^f in lineerliği de gözönüne alındığında,

$$S^f\left(f_*(X_P)\right)=\sum_{i=1}^{2}\cos\theta_iS^f\left(f_*(X_i)\right)=\cos\theta_1S^f\left(f_*(X_1)\right)+\cos\theta_2S^f\left(f_*(X_2)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}}\left\{\cos\theta_1\frac{(1+\lambda_3k_2)k_1}{1+\lambda_3k_1}f_*(X_1)+\cos\theta_2\left(\frac{\lambda_2X_2[k_2]}{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}+k_2\right)f_*(X_2)\right\}$$

olarak hesaplanır.

$$\left\|f_*(X_P)\right\|^2=\left\|\cos\theta_1f_*(X_1)+\cos\theta_2f_*(X_2)\right\|^2$$

$$=\left\|\cos\theta_1(1+\lambda_3k_1)X_1+\cos\theta_2\left((1+\lambda_3k_2)X_2-\lambda_2k_2N\right)\right\|^2$$

$$=\cos^2\theta_1(1+\lambda_3k_1)^2+\cos^2\theta_2(1+\lambda_3k_2)^2+\cos^2\theta_2\lambda_2^2k_2^2$$

$$=\cos^2\theta_1(1+\lambda_3k_1)^2+\cos^2\theta_2\left((1+\lambda_3k_2)^2+\lambda_2^2k_2^2\right)$$

ve

$$\left\langle S^f\left(f_*(X_P)\right),f_*(X_P)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}}\left\{\cos^2\theta_1\frac{k_1(1+\lambda_3k_2)}{1+\lambda_3k_1}\left\langle f_*(X_1),f_*(X_1)\right\rangle\right.$$

$$\left.+\cos^2\theta_2\left(\frac{\lambda_2X_2[k_2]}{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}+k_2\right)\left\langle f_*(X_2),f_*(X_2)\right\rangle\right\}$$

$$\left\langle S^f\left(f_*(X_P)\right),f_*(X_P)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}}\left\{\cos^2\theta_1\frac{(1+\lambda_3k_2)k_1(1+\lambda_3k_1)^2}{1+\lambda_3k_1}\right.$$

$$\left.+\cos^2\theta_2\left(\frac{\lambda_2X_2[k_2]}{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}+k_2\right)\left((1+\lambda_3k_2)^2+\lambda_2^2k_2^2\right)\right\}$$

$$=\cos^2\theta_1\frac{(1+\lambda_3k_1)(1+\lambda_3k_2)k_1}{\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}}+\cos^2\theta_2\left(\frac{\lambda_2X_2[k_2]}{\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}}+k_2\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}\right)$$

elde edilir. Bu hesaplamaların sonucunda

$$\bar{k}_n(f_*(X_P))=\frac{\cos^2\theta_1\frac{(1+\lambda_3k_1)(1+\lambda_3k_2)k_1}{\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}}+\cos^2\theta_2\left(\frac{\lambda_2X_2[k_2]}{\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}}+k_2\sqrt{\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2}\right)}{\cos^2\theta_1(1+\lambda_3k_1)^2+\cos^2\theta_2\left(\lambda_2^2k_2^2+(1+\lambda_3k_2)^2\right)} \tag{4.67}$$

olarak bulunur.

Özel olarak yukarıda $\lambda_2=0$ alınırsa, ($\lambda_1=0$ alınmıştı) $\lambda_3=r$ dersek

$$M^f=M_r=\{f(P)\ |f(P)=P+rN_P, P\in M\}$$

paralel yüzeyi elde edilir.

$$\bar{k}_n(f_*(X_P))=\frac{k_1(1+rk_1)\cos^2\theta_1+k_2(1+rk_2)\cos^2\theta_2}{(1+rk_1)^2\cos^2\theta_1+(1+rk_2)^2\cos^2\theta_2}=\frac{\sum_{i=1}^{2}k_i(1+rk_i)\cos^2\theta_i}{\sum_{i=1}^{2}(1+rk_i)^2\cos^2\theta_i}$$

elde edilir ki bu da 3. Bölümde paralel hiperyüzeylerden iyi bilinir.

Tersine; $M^f=\{f(P)|\,f(P)=P+\lambda_2X_2\big|_P+\lambda_3N_P,\ P\in M,\lambda_1=0,\ \lambda_2\ ve\ \lambda_3=sabit\ \}$ için

$\lambda_2=0$ alındığında (4.67) den $\bar{k}_n(f_*(X_P))=\dfrac{\sum_{i=1}^{2}k_i(1+rk_i)\cos^2\theta_i}{\sum_{i=1}^{2}(1+rk_i)^2\cos^2\theta_i}$ olur. Buna göre şu teoremi verebiliriz.

Teorem 4.7.2. Bir (M,M^f) sabit sırt uzaklıklı yüzey çifti bir paralel yüzey

çiftidir $\Leftrightarrow$ $\bar{k}_n(f_*(X_P))=\dfrac{\sum_{i=1}^{2}k_i(1+rk_i)\cos^2\theta_i}{\sum_{i=1}^{2}(1+rk_i)^2\cos^2\theta_i}$

dır. Burada M^f nin normal eğriliği $\bar{k}_n$, M nin asli eğrilik doğrultuları X_1, X_2 ve $X_P\in T_M(P)$ tanjant vektörü ile $X_1|_P$, $X_2|_P$ ortonormal asli vektörler arasındaki açılar, sırası ile, θ_1,θ_2 dir.

Tanım 3.3.2 de bir M yüzeyinin P noktasındaki *Dupin göstergesi* $T_M(P)$ nin

$$D_P = \{X_P | \langle S(X_P), X_P \rangle = \mp 1, \ X_P \in T_M(P)\}$$

altcümlesi olarak verilmişti.

X_1, X_2 M nin P noktasındaki ortonormal asli vektörler olsunlar. Bu durumda $X_P = \sum_{i=1}^{2} x_i X_i$, $x_i \in C^\infty(M, R)$, yazılır. Buradan $S(X_P) = \sum_{i=1}^{2} x_i S(X_i) = \sum_{i=1}^{2} k_i x_i X_i$ ve

böylece, $\langle S(X_P), X_P \rangle = \sum_{i=1}^{2} k_i X_i^2$ olur.

$$D_P = \{X_P | \langle S(X_P), X_P \rangle = \mp 1, \ X_P \in T_M(P)\}$$

olduğundan

$$D_P = \left\{ X_P = (x_1, x_2) \, | \, \sum_{i=1}^{2} k_i x_i^2 = \mp 1, \ X_P \in T_M(P) \right\}$$

bulunur.

Teorem 4.7.3. E^3 de bir yüzey M ve M nin ortonormal asli eğrilik vektör alanları X_1, X_2 ve birim normal vektör alanı N olsun.

$M^f = \{f(P) | f(P) = P + \lambda_2 X_2|_P + \lambda_3 N_P, \ P \in M, \ \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 \text{ ve } \lambda_3 = sabit \}$ olarak

tanımlanan sabit sırt uzaklıklı yüzeyin *f(P)* noktasındaki Dupin göstergesi $\overline{D}_{f(P)}$ ile

gösterilirse, bu durumda $X_P = \sum_{i=1}^{2} x_i X_i|_P$ olmak üzere

$$\overline{D}_{f(P)} = \left\{ f_*(X_P) = x_1 f_*(X_1) + x_2 f_*(X_2) \, \middle| \, x_1^2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2) k_1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} \right.$$
$$\left. + x_2^2 \left(\frac{\lambda_2 X_2[k_2]}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} + k_2 \sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2} \right) = \mp 1, \ f_*(X_P) \in T_{M^f}(f(P)) \right\}$$

dir.

İspat: $f_*(X_P) \in T_{M^f}(f(P))$ için

$$\overline{D}_{f(P)} = \left\{ f_*(X_P) \,|\, \langle S^f(f_*(X_P)), f_*(X_P) \rangle = \mp 1 \right\}$$

dir. Şimdi $f_*(X_P)$ ve $S^f(f_*(X_P))$ yi ayrı ayrı hesaplayalım:

X_1, X_2 M nin asli eğrilik vektör alanları olduğundan $\forall X \in \chi(M)$ için $X = \sum_{i=1}^{2} x_i X_i$

yazılır. Burada x_i ler M üzerinde C^∞ fonksiyonlardır. Böylece

$$\begin{aligned} f_*(X) &= x_1 f_*(X_1) + x_2 f_*(X_2) \\ &= x_1(1+\lambda_3 k_1)X_1 + x_2\left((1+\lambda_3 k_2)X_2 - \lambda_2 k_2 N\right) \\ &= x_1(1+\lambda_3 k_1)X_1 + x_2(1+\lambda_3 k_2)X_2 - x_2 \lambda_2 k_2 N \end{aligned}$$

ve

$$S^f(f_*(X)) = x_1 S^f(f_*(X_1)) + x_2 S^f(f_*(X_2))$$

$$= x_1 \frac{(1+\lambda_3 k_2)k_1}{(1+\lambda_3 k_2)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} f_*(X_1) + x_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} \left(\frac{\lambda_2 X_2[k_2]}{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2} + k_2 \right) f_*(X_2)$$

olur.

$$\left\langle S^f(f_*(X)), f_*(X) \right\rangle = x_1^2 \frac{(1+\lambda_3 k_2)k_1}{(1+\lambda_3 k_1)\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} \langle f_*(X_1), f_*(X_1) \rangle$$

$$+ x_2^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} \left(\frac{\lambda_2 X_2[k_2]}{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2} + k_2 \right) \langle f_*(X_2), f_*(X_2) \rangle$$

ve burada

$$f_*(X_1) = (1+\lambda_3 k_1)X_1$$

$$f_*(X_2) = (1+\lambda_3 k_2)X_2 - \lambda_2 k_2 N$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\left\langle S^f(f_*(X)), f_*(X) \right\rangle = x_1^2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)k_1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} + x_2^2 \left(\frac{\lambda_2 X_2[k_2]}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2}} + k_2 \sqrt{\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2} \right)$$

elde edilir. Buna göre,

$$\overline{D}_{f(P)}=\left\{ f_*(X_P)=x_1 f_*(X_1)+x_2 f_*(X_2) \mid x_1^2 \frac{(1+\lambda_3 k_1)(1+\lambda_3 k_2)k_1}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2+(1+\lambda_3 k_2)^2}} \right.$$

$$\left. +x_2^2\left(\frac{\lambda_2 X_2[k_2]}{\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2+(1+\lambda_3 k_2)^2}}+k_2\sqrt{\lambda_2^2 k_2^2+(1+\lambda_3 k_2)^2}\right)=\mp 1,\ f_*(X_P)\in T_{M^f}\left(f(P)\right)\right\}$$

bulunur.

Burada $\lambda_2=0$ alıp, $\lambda_3=r$ dersek $M^f=M_r=\{f(P)\ |f(P)=P+rN_P, P\in M\}$ paralel yüzeyi elde edilir ve 3. Bölümde verilen

$$\overline{D}_{f(P)}=\{f_*(X_P)=x_1 f_*(X_1)+x_2 f_*(X_2) | x_1^2 k_1(1+\lambda_3 k_1)+x_2^2 k_2(1+\lambda_3 k_2)=\mp 1, f_*(X_P)\in T_{M_r}(f(P))\}$$

elde edilir. Böylece buradan şu teoreme ulaşırız.

Teorem 4.7.4. E^3 de bir (M,M^f) sabit sırt uzaklıklı yüzey çifti bir paralel yüzey çiftidir $\Leftrightarrow$ M^f nin dupin göstergesi

$$\overline{D}_{f(P)}=\{f_*(X_P)=x_1 f_*(X_1)+x_2 f_*(X_2) | x_1^2 k_1(1+\lambda_3 k_1)+x_2^2 k_2(1+\lambda_3 k_2)=\mp 1, f_*(X_P)\in T_{M_r}(f(P))\} = D_P$$

dir.

4.8 $\lambda_1=sabit,\ \lambda_2=sabit\ ve\ \lambda_3=0$ Olması Durumunda Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyler

Bu kısımda E^3 deki bir

$$\begin{array}{lcl}\phi: U\subset E^2 & \longrightarrow & M\\ (u,v) & & P=\phi(u,v)\end{array}$$

ile verilen M yüzeyi için, $T_M(P)$ nin asli eğrilik doğrultularından oluşan ortonormal bazı $\{\phi_u|_P, \phi_v|_P\}$, $P\in M$ deki birim normal vektör alanı N_P olmak üzere,

$$M^f=\{\psi(u,v)\,|\,\psi(u,v)=\phi(u,v)+\lambda_1\phi_u(u,v)+\lambda_2\phi_v(u,v)+\lambda_3 N(u,v),\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=sabit\}$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinde $\lambda_3=0$ alınarak elde edilen

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1\phi(u,v) + \lambda_2\phi_v(u,v),\ \lambda_1 = sabit,\ \lambda_2 = sabit\ \} \tag{4.68}$$

özel hali incelenecektir.

Bu durumda (4.18) ve (4.19) ifadelerinde $\lambda_3 = 0$ alınırsa $\chi(M^f)$ için $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazı

$$\psi_u = \phi_u - \lambda_1 k_1 N \tag{4.69}$$

$$\psi_v = \phi_v - \lambda_2 k_2 N \tag{4.70}$$

olarak elde edilir. M^f yüzeyinin birim normal vektör alanı ise

$$\begin{aligned} N^f &= \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{\|\psi_u \wedge \psi_v\|} \\ &= \frac{\lambda_1 k_1 \phi_u + \lambda_2 k_2 \phi_v + N}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1}} \end{aligned}$$

bulunur.

E^3 deki M yüzeyi için, $T_M(P)$ nin ortonormal ve asli eğrilik doğrultu vektörlerinden oluşan bazı $\{\phi_u|_P, \phi_v|_P\}$, $P \in M$ deki birim normal vektör alanı N_P olmak üzere,

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1\phi_u(u,v) + \lambda_2\phi_v(u,v),\ \lambda_1 = sabit,\ \lambda_2 = sabit\ \}$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin şekil operatörü, $\chi(M^f)$ in $\{\psi_u = \phi_u - \lambda_1 k_1 N, \psi_v = \phi_v - \lambda_2 k_2 N\}$ bazına göre (4.38) de $\lambda_3 = 0$ alınmasıyla, $A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1}$ için,

$$S^f = \frac{1}{A^3}\begin{bmatrix} \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + 1\right) + k_1 A^2 & -\frac{\partial k_1}{\partial u}\lambda_1^2 \lambda_2 k_1 k_2 \\ -\frac{\partial k_2}{\partial v}\lambda_1 \lambda_2^2 k_1 k_2 & \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 k_1^2 + 1\right) + k_2 A^2 \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

olarak bulunur. Bu durumda M yüzeyinin (4.68) de tanımlandığı gibi elde edilen

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1\phi_u(u,v) + \lambda_2\phi_v(u,v),\ \lambda_1 = sabit,\ \lambda_2 = sabit\ \}$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin Gauss eğriliği K^f, ortalama eğriliği H^f olmak üzere, (4.41) ve (4.42) da $\lambda_3 = 0$ alınarak

$$K^f = \frac{\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial k_1}{\partial u}\frac{\partial k_2}{\partial v} + \lambda_1 k_2 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + 1\right) + \lambda_2 k_1 \frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 k_1^2 + 1\right)}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1\right)^2} + \frac{K}{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1} \tag{4.72}$$

ve

$$H^f = \frac{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u}\left(\lambda_2^2 k_2^2 + 1\right) + \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v}\left(\lambda_1^2 k_1^2 + 1\right)}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{H}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1}} \tag{4.73}$$

bulunur.

Teorem 4.8.1 E^3 de $\underset{(u,v)}{\phi : U \subset E^2} \longrightarrow \underset{P=\phi(u,v)}{M}$ ile verilen M yüzeyi için, $\chi(M)$ in asli eğrilik vektör alanlarından oluşan ortonormal bir bazı $\{\phi_u, \phi_v\}$ olmak üzere,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v) + \lambda_2 \phi_v(u,v),\ \lambda_1 = sabit,\ \lambda_2 = sabit\ \}$$

olsun. Bu durumda eğer M nin k_1 ve k_2 eğrilikleri sabit ise,

a) f noktaların karakterini korur.

b) f asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.

c) $\frac{K}{K^f} = \lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1 = sabit$ dir.

d) $\frac{H}{H^f} = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1} = sabit$ dir.

İspat a): Hipotezde verilenlere göre k_1 ve k_2 eğrilikleri sabit olduğunda (4.72) den

$$K^f = \frac{K}{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1}$$

elde edilir. Buna göre $P \in M$ için $K(P)$ ve $K^f(f(P))$ aynı işaretli olduğundan f noktaların karakterini korur.

b) İspat: M yüzeyi için, ϕ_u, ϕ_v ortonormal asli eğrilik doğrultuları ve bunlara karşılık gelen asli eğrilikler k_1, k_2 ise

$$S(\phi_u) = k_1\phi_u$$

$$S(\phi_v) = k_2\phi_v$$

dir.

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow M^f \\ \phi(u,v) &\quad f(\phi(u,v)) = \psi(u,v) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_* : \chi(M) &\longrightarrow \chi(M^f) \\ \phi_u &\quad f_*(\phi_u) = \psi_u \\ \phi_v &\quad f_*(\phi_v) = \psi_v \end{aligned}$$

şeklindedir. k_1 ve k_2 eğrilikleri sabit olduğundan, M^f in şekil operatörünün matrisi $\chi(M^f)$ in $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazına göre (4.71) den

$$S^f = \begin{bmatrix} \dfrac{k_1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_2}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1}} \end{bmatrix}$$

dir. Buna göre

$$S^f(f_*(\phi_u)) = S^f(\psi_u) = \frac{k_1}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1}}\psi_u$$

$$S^f(f_*(\phi_v)) = S^f(\psi_v) = \frac{k_2}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1}}\psi_v$$

yazılır ve bu da $f_*(\phi_u)$ ve $f_*(\phi_v)$ nin M^f üzerinde asli eğrilik doğrultuları olması demektir.

c) Hipotezde verilen M ve M^f yüzeyleri için, k_1 ve k_2 eğrilikleri sabit alındığında (4.72) den

$$K^f = \frac{K}{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1}$$

olur. Buna göre

$$\frac{K}{K^f} = \lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1 = sabit$$

elde edilir.

c) Hipotezde verilen M ve M^f yüzeyleri için k_1 ve k_2 eğrilikleri sabit alındığında (4.73) den

$$H^f = \frac{H}{\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1}}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{H}{H^f} = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 1} = sabit$$

olur.

Özel olarak $\lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_1 = sabit$ alınırsa M^f yüzeyi,

$$M^f = \left\{ \psi(u,v) \,|\, \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v),\ \lambda_1 = sabit \right\}$$

olur. Bu durumda,

$$\psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v)$$

$$\psi_u = \phi_u - \lambda_1 k_1 N$$

$$\psi_v = \phi_v$$

$$A = \sqrt{1 + \lambda_1^2 k_1^2}$$

$$N^f = \frac{\lambda_1 k_1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 k_1^2}} \phi_u + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 k_1^2}} N$$

elde edilir. Bu halde şekil operatörü (4.40) den

$$S^f = \frac{1}{A^3} \begin{bmatrix} \lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u} + k_1 A^2 & 0 \\ 0 & k_2 A^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u}}{\left(1 + \lambda_1^2 k_1^2\right)^{3/2}} + \dfrac{k_1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 k_1^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_2}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 k_1^2}} \end{bmatrix} \qquad (4.74)$$

olarak bulunur. Buna göre

$$K^f = \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u} k_2}{\left(1+\lambda_1^2 k_1^2\right)^2} + \frac{K}{1+\lambda_1^2 k_1^2}$$

$$H^f = \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial k_1}{\partial u}}{\left(1+\lambda_1^2 k_1^2\right)^{3/2}} + \frac{H}{\sqrt{1+\lambda_1^2 k_1^2}}$$

dir.

Teorem 4.8.2. E^3 de $\underset{(u,v)}{\phi : U \subset E^2} \longrightarrow \underset{P=\phi(u,v)}{M}$ ile verilen M yüzeyi için,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \left\{ \psi(u,v) \,\middle|\, \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_1 \phi_u(u,v),\ \lambda_1 = sabit \right\}$$

olsun. Bu durumda eğer $k_1 = sabit$ ise, f umbilik noktaları umbilik noktalara dönüştürür.

İspat: $P \in M$, M nin bir umbilik noktası olsun. O zaman $k_1(P) = k_2(P)$ olur. $k_1 = sabit$ olduğundan $\dfrac{\partial k_1}{\partial u} = 0$ dır. Hipotezde verilen M^f yüzeyinin *f(P)* noktasındaki eğrilikleri $k_1^f(f(P))$ ve $k_2^f(f(P))$ ise, bu durumda hipotezin de gözönüne alınmasıyla (4.74) den

$$S^f\Big|_{f(P)} = \begin{bmatrix} \dfrac{k_1(P)}{\sqrt{1+\lambda_1^2 k_1^2(P)}} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_1(P)}{\sqrt{1+\lambda_1^2 k_1^2(P)}} \end{bmatrix}$$

elde edilir ve buna göre

$$k_1^f(f(P)) = \frac{k_1(P)}{\sqrt{1+\lambda_1^2 k_1^2(P)}} = k_2^f(f(P))$$

olur. Bu da M üzerinde P umbilik nokta ise M^f üzerinde *f(P)* noktasının umbilik nokta olduğunu gösterir.

Özel olarak $\lambda_1 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_2 = sabit$ alınırsa M^f yüzeyi,

$$M^f = \left\{\psi(u,v) \,\middle|\, \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_2 \phi_v(u,v),\ \lambda_2 = sabit\right\}$$

olur. Bu durumda,

$$\psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_2 \phi_v(u,v)$$

$$\psi_u = \phi_u$$

$$\psi_v = \phi_v - \lambda_2 k_2 N$$

$$A = \sqrt{1 + \lambda_2^2 k_2^2}$$

$$N^f = \frac{\lambda_2 k_2}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 k_2^2}} \phi_v + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 k_2^2}} N$$

elde edilir. Bu halde şekil operatörü (4.40) dan

$$S^f = \frac{1}{A^3} \begin{bmatrix} k_1 A^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v} + k_2 A^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{k_1}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 k_2^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v}}{\left(1 + \lambda_2^2 k_2^2\right)^{3/2}} + \dfrac{k_2}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 k_2^2}} \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

olarak bulunur. Buna göre

$$K^f = \frac{\lambda_2 k_1 \dfrac{\partial k_2}{\partial v}}{\left(1 + \lambda_2^2 k_2^2\right)^2} + \frac{K}{1 + \lambda_2^2 k_2^2}$$

$$H^f = \frac{\lambda_2 \dfrac{\partial k_2}{\partial v}}{\left(1 + \lambda_2^2 k_2^2\right)^{3/2}} + \frac{H}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 k_2^2}}$$

dir.

Teorem 4.8.3. E^3 de $\underset{(u,v)}{\phi : U \subset E^2} \longrightarrow \underset{P = \phi(u,v)}{M}$ ile verilen M yüzeyi için,

$$f : M \longrightarrow M^f$$

$$M^f = \{\psi(u,v) \mid \psi(u,v) = \phi(u,v) + \lambda_2 \phi_v(u,v),\ \lambda_2 = sabit\ \}$$

olsun. Bu durumda eğer $k_2 = sabit$ ise, f umbilik noktaları umbilik noktalara dönüştürür.

İspat: $P \in M$, M nin bir umbilik noktası olsun. O zaman $k_1(P) = k_2(P)$ olur. $k_2 = sabit$ olduğundan $\frac{\partial k_2}{\partial v} = 0$ dır. Hipotezde verilen M^f yüzeyinin $f(P)$ noktasındaki eğrilikleri $k_1^f(f(P))$ ve $k_2^f(f(P))$ ise, bu durumda hipotezin de gözönüne alınmasıyla (4.75) den

$$S^f\Big|_{f(P)} = \begin{bmatrix} \dfrac{k_2(P)}{\sqrt{1+\lambda_2^2 k_2^2(P)}} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_1(P)}{\sqrt{1+\lambda_2^2 k_2^2(P)}} \end{bmatrix}$$

elde edilir ve buna göre

$$k_1^f(f(P)) = \frac{k_2(P)}{\sqrt{1+\lambda_2^2 k_2^2(P)}} = k_2^f(f(P))$$

olur. Bu da, M üzerinde P umbilik nokta ise M^f üzerinde $f(P)$ noktasının da umbilik nokta olduğunu gösterir.

5. SABİT SIRT UZAKLIKLI HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde E^n deki bir M hiperyüzeyinin sabit sırt uzaklıklı M^f hiperyüzeylerleri tanımlanıp M ile M^f arasındaki ilişkiler diferensiyel geometri açısından ele alınacaktır.

5.1. Sabit Sırt Uzaklıklı Hiperyüzeyin Tanımı

Tanım 5.1. M ve M_1, E^nde iki hiperyüzey, M nin bir P noktasındaki birim normal vektörü N_P ve tanjant uzayı $T_M(p)$, $T_M(p)$ nin ortonormal bir bazı $\{X_1|_P, X_2|_P, ..., X_{n-1}|_P\}$ olsun. $d_1^2 + d_2^2 + ... + d_n^2 = 1$ olmak üzere $Z_P = d_1 X_1|_P + d_2 X_2|_P + ... + d_{n-1} X_{n-1}|_P + d_n N_P$ şeklinde $X_1|_P, X_2|_P, \ldots, X_{n-1}|_P, N_P$ vektörlerine sıkı suretle bağlı ($d_1, d_2, ..., d_n \in R$ sabit sayılar) Z_P birim vektörünü alalım. $r \in R$ sabit bir sayı olmak üzere

$$\begin{array}{ll} f: M \longrightarrow M_1 \\ \quad P \qquad\qquad f(P) = P + rZ_P \end{array}$$

olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa M_1 hiperyüzeyine M hiperyüzeyinin **sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeyi** denir. Bundan sonra, M_1 hiperyüzeyi f fonksiyonu yardımıyla tanımlandığı için M^f ile gösterilecektir.

Özel olarak $d_1 = d_2 = ... = d_{n-1} = 0$ alınması halinde $Z_P = N_P$ ve $f(P) = P + rN_P$ elde edilir. Bu durumda M ve M^f paralel hiperyüzeyler olur.

$$f(P) = P + rZ_P = P + r\left(d_1 X_1|_P + d_2 X_2|_P + ... + d_{n-1} X_{n-1}|_P + d_n N_P\right)$$

ifadesinde $rd_1 = \lambda_1$, $rd_2 = \lambda_2$, ..., $rd_n = \lambda_n$ alınırsa

$$f(P) = P + \lambda_1 X_1|_P + \lambda_2 X_2|_P + ... + \lambda_{n-1} X_{n-1}|_P + \lambda_n N_P$$

olur. Ayrıca

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_{n-1} X_{n-1} = Z_T$$

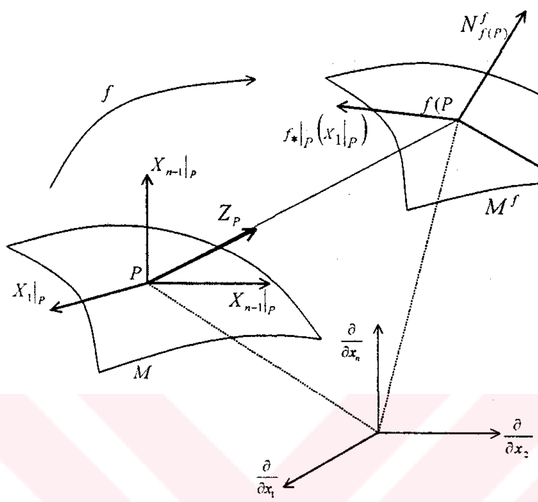
ve

$$\lambda_n N = Z_N$$

alındığında Z vektör alanını, $Z_T \in \chi(M)$ teğetsel ve $Z_N \in \chi(M)^{\perp}$ normal bileşenleriyle

$$Z = Z_T + Z_N$$

olarak ifade edebiliriz.



Şekil 5.1 Sabit sırt uzaklıklı hiperyüzey

E^n in koneksiyonunu D, M nin koneksiyonunu D' ve M nin şekil operatörünü S ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} S : \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ X &\quad\; S(X) = D_X N \end{aligned}$$

ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için Gauss denklemi

$$D_X Y = D'_X Y - \langle S(X), Y \rangle N$$

olarak verilir.

Teorem 5.1. $f: M \longrightarrow M^f$, $f(P) = P + rZ_P$, $Z = Z_T + Z_N$ olmak üzere E^n de M ve M^f hiperyüzeyleri verilsin. E^n in $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre, $\forall P \in M$ için $w_i(P) = \overline{w}_i(f(P))$, $1 \le i \le n$, özeliği alındığında $W \in \chi(M)$ için $W = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ olarak alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f_*(W) &= \overline{W} + r\overline{D_W Z} \\ &= \overline{W} + r\overline{D_W Z_T} + rd_n\overline{S(W)} \end{aligned}$$

dır.

İspat: $f: M \longrightarrow M^f$ dönüşümü, E^n e,

$$f: E^n \longrightarrow E^n, \quad f(P) = \left(p_1 + rz_1(P), p_2 + rz_2(P), \ldots, p_n + rz_n(P)\right)$$

olarak genişletilsin. Burada, $Z = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ vektör alanının bileşenleri de E^n e

$$z_i(P) = \begin{cases} z_i(P), & P \in M \\ 0, & P \notin M \end{cases}$$

olarak genişletiliyor. E^n deki $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f dönüşümünün koordinat fonksiyonları

$$f_i = x_i + rz_i : E^n \longrightarrow R, \quad 1 \le i \le n,$$

olacağından f_* dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(x_i + rz_i)}{\partial x_j}\right] &= \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_j} + r\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right] \\ &= \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right] + r\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right] \\ &= I_n + r\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right] \end{aligned}$$

olur. $W_P = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_P \in T_M(P)$ için

$$f_*\big|_P(W_P) = I_n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_P + r\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right]_P \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_P$$

$$= \begin{bmatrix} w_1(P) \\ w_2(P) \\ \vdots \\ w_n(P) \end{bmatrix} + r\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_j}\bigg|_P w_j(P)\right]$$

bulunur. Burada ikinci taraftaki matris formu, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ bazı cinsinden

yazılırsa

$$f_*\big|_P(W_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i(P)\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)} + r\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_j}\bigg|_P w_j(P)\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}$$

ve $w_i(P) = \overline{w_i}(f(P))$ eşitliği kullanılırsa,

$$f_*\big|_P(W_P) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i(f(P))\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}}_{\overline{W}_{f(P)}} + r\underbrace{\sum_{i=1}^{n} W_P[z_i]\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}}_{\left(\overline{D_W Z}\right)_{f(P)}}$$

yazılır. Bu eşitliğin sağındaki ilk terim $\overline{W}\big|_{f(P)}$, ve ikinci terim ise $r\overline{D_W Z}\big|_{f(P)}$ dir.

Çünkü,

$$D_W Z = \sum_{i=1}^{n} W[z_i]\frac{\partial}{\partial x_i}$$

olduğundan

$$\overline{D_W Z} = \sum_{i=1}^{n} \overline{W}[z_i]\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad W[z_i](P) = \overline{W}[z_i](f(P))$$

$$\overline{D_W Z}\big|_{f(P)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{W}[z_i](f(P))\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} W[z_i](P)\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} W_P[z_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}$$

olur. Buna göre

$$f_*|_P(W_P) = \overline{W}\Big|_{f(P)} + r(\overline{D_W Z})\Big|_{f(P)}$$

elde edilir.

Burada $Z = \underbrace{Z_T}_{\in \chi(M)} + \underbrace{Z_N}_{d_n N}$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$D_W Z = D_W(Z_T + Z_N)$$

$$= D_W Z_T + D_W Z_N$$

$$= D_W Z_T + d_n D_W N$$

ve

$$\overline{D_W Z} = \overline{D_W Z_T} + d_n \overline{S(W)}$$

olur. Böylece

$$f_*|_P(W_P) = \overline{W}\Big|_{f(P)} + r\left(\overline{D_W Z_T}\right)\Big|_{f(P)} + r d_n \overline{S(W)}\Big|_{f(P)}$$

Bulunur. Buradan da

$$f_*(W) = \overline{W} + r\overline{D_W Z_T} + r d_n \overline{S(W)}$$

elde edilir.

Özel hal: $Z = N$ olması durumu:

Bu durumda $f(P) = P + rZ_P$ olur ve M^f hiperyüzeyi M nin paralel hiperyüzeyidir. $Z_T = 0$ ve $d_n = 1$ olacağından

$$f_*(W) = \overline{W} + r\overline{S(W)}$$

elde edilir ki bu da paralel hiperyüzeyler için iyi bilinen bir ifadedir.

5.2. $T_M(P)$ nin bazının asli eğrilik vektörleri alınması durumu

E^n deki bir hiperyüzey M ve $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere M üzerindeki i-yinci asli eğrilik fonksiyonu k_i, i-yinci asli vektör alanı X_i olsun. $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ olsun. Bu durumda

$$S(X_i) = k_i X_i$$

dir. M nin şekil operatörü S, koneksiyonu D' ve E^n in koneksiyonu D olsun. $\{X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}\}$, $\chi(M)$ için bir bazdır ve D' tanımı gereğince

$$D'_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^k X_k$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$X_j = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{kj} X_k$$

olup

$$D'_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n-1} X_i[\delta_{kj}] X_k = \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^k X_k$$

dır. O halde

$$\Gamma_{ij}^k = X_i[\delta_{kj}] = 0$$

olur. Böylece

$$D'_{X_i} X_j = 0$$

bulunur. Gauss denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} D_{X_i} X_j &= \underbrace{D'_{X_i} X_j}_{0} - \langle S(X_i), X_j \rangle N \\ &= -\langle k_i X_i, X_j \rangle N \\ &= -k_i \delta_{ij} N \end{aligned}$$

elde edilir. $W \in \chi(M)$ için $W = \sum_{i=1}^{n-1} w_i X_i$ ve $Z_T = \sum_{i=1}^{n-1} d_i X_i$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} D_W Z_T &= D_{\sum_{i=1}^{n-1} w_i X_i} \sum_{j=1}^{n-1} d_j X_j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} w_i D_{X_i} \left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j X_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} w_i \sum_{j=1}^{n-1} d_j D_{X_i} X_j \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} w_i \sum_{j=1}^{n-1} -d_j \delta_{ij} k_i N$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} d_i w_i k_i N$$

bulunur. $W = X_i$ için

$$D_{X_i} Z_T = -d_i k_i N$$

olur.

$$f_*(W) = \overline{W} + r\overline{D_W Z_T} + rd_n \overline{S(W)}$$

den $W = X_i$ için yukarıdaki hesaplamalar da gözönüne alınırsa,

$$f_*(X_i) = \overline{X}_i + r\overline{D_{X_i} Z_T} + rd_n \overline{S(X_i)}$$

$$= \overline{X}_i - rd_i k_i \overline{N} + rd_n k_i \overline{X}_i$$

$$= (1 + rd_n k_i)\overline{X}_i - rd_i k_i \overline{N}$$

bulunur. Burada $rd_i = \lambda_i$ denilirse

$$f_*(X_i) = (1 + \lambda_n k_i)\overline{X}_i - \lambda_i k_i \overline{N}$$

olur.

5.3. M^f Hiperyüzeyinin Normal Vektör Alanı

M üzerindeki i-yinci asli eğrilik fonksiyonu k_i, i-yinci asli vektör alanı X_i ve normal vektör alanını N_1 ile gösterelim. Bu durumda M^f nin normal vektör alanı

$$N_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i k_i \prod_{i \neq j=1}^{n-1} (1 + \lambda_n k_j)\overline{X}_i + \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \lambda_n k_i)\overline{N} \qquad (5.1)$$

dir.

İspat: $1 \leq i \leq n-1$ için $\langle f_*(\overline{X}_i), N_1 \rangle = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_{n-1}, \overline{N}\}$ sisteminin ortonormal olduğu gözönüne alınırsa

$$\left\langle f_*(\overline{X}_i), N_1 \right\rangle = \left\langle (1+\lambda_n k_i)\overline{X}_i - \lambda_i k_i \overline{N}, \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j k_j \prod_{j\neq s=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_s)\overline{X}_j + \prod_{j=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_s)\overline{N} \right\rangle$$

$$= (1+\lambda_n k_i)\left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j k_j \prod_{j\neq s=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_s) \right)\left\langle \overline{X}_i, \overline{X}_j \right\rangle + (1+\lambda_n k_i)\prod_{j=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_j)\left\langle \overline{X}_i, \overline{N} \right\rangle$$

$$- \lambda_i k_i \left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j k_j \prod_{j\neq s=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_s) \right)\left\langle \overline{N}, \overline{X}_j \right\rangle - \lambda_i k_i)\prod_{j=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_j)\left\langle \overline{N}, \overline{N} \right\rangle$$

burada $\left\langle \overline{X}_i, \overline{X}_j \right\rangle = \delta_{ij}$, $\left\langle \overline{X}_i, \overline{N} \right\rangle = 0$, $\left\langle \overline{N}, \overline{X}_j \right\rangle = 0$ ve $\left\langle \overline{N}, \overline{N} \right\rangle = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\left\langle f_*(X_i), N_1 \right\rangle = (1+\lambda_n k_i)\lambda_i k_i \prod_{i\neq s=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_s) - \lambda_i k_i \prod_{j=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_j)$$

$$= \lambda_i k_i \prod_{j=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_j) - \lambda_i k_i \prod_{j=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_j)$$

$$=0$$

bulunur. Burada M^f in birim normal vektör alanını N^f ile gösterirsek

$$N^f = \frac{N_1}{\|N_1\|}$$

olur.

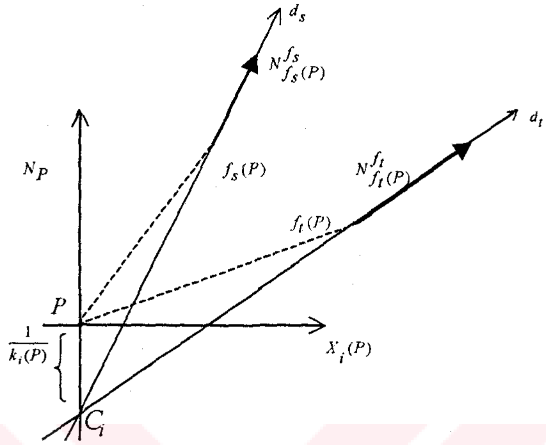
Teorem 5.3.1. E^n de bir M hiperyüzeyi üzerindeki, $1 \le i \le n-1$ olmak üzere, i-yinci asli eğrilik fonksiyonu k_i, i-yinci asli vektör alanı X_i ve normal vektör alanı N olsun. M hiperyüzeyinin $Sp\{X_i, N\}$ düzleminde yatan Z doğrultuları boyunca oluşan bütün sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeylerin, bir $P \in M$ noktasına karşılık gelen $f(P)$ noktalarındaki normalleri, tepesi P deki i-yinci asli eğrilik merkezi $\left(C_i = P - \dfrac{1}{k_i(P)} N_P \right)$ olan uzaysal bir doğru demeti oluşturur.

İspat: M hiperyüzeyi için, $s = 1,2,\ldots$ olmak üzere,

$$f_s : M \longrightarrow M^{f_s}$$

$$P \qquad f_i(P) = P + \lambda_{i_s} \overline{X}_i(P) + \lambda_{n_s} \overline{N}_P$$

olarak tanımlanan M^{f_s} hiperyüzeyleri ve bu hiperyüzeylere ait $N^{f_s}\Big|_{f_s(P)}$ birim normal vektör alanları gözönüne alınsın. $f_s(P)$ noktasından geçen ve $N^{f_s}\Big|_{f_s(P)}$ doğrultusundaki doğruların arakesit noktası $C_i = P - \frac{1}{k_i(P)} N_P$ olduğunu göstereceğiz.



Şekil 5.3.1 $Sp\{X_i(P), N_P\}$ düzlemindeki Z_P vektörlerinin oluşturduğu farklı sabit sırt uzaklıklı hireryüzeylerin normal doğrultuları

(5.1) den $$N^f = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i k_i \prod_{i \neq j=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_j) \overline{X}_i + \prod_{i=1}^{n-1} (1+\lambda_n k_i) \overline{N}$$ eşitliğinde

$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{i-1} = 0,\ \lambda_i = sabit,\ \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{n-1} = 0,\ \lambda_n = sabit$ alınırsa

$$N^f\Big|_{f(P)} = \lambda_i k_i(P) \overline{X}_i(P) + (1+\lambda_n k_i(P)) \overline{N}_P$$

elde edilir. Buna göre

$$M^{f_s} = \{ f_s(P) = P + \lambda_{i_s} \overline{X}_i(P) + \lambda_{n_s} \overline{N}_P : \mathrm{P} \in \mathrm{M}$$

hiperyüzeyinin $f_s(P)$ noktasındaki normal vektörünü

$$N^{f_s}\Big|_{f_s(P)} = \lambda_{i_s} k_i(P) \overline{X}_i(P) + (1+\lambda_{n_s} k_i(P)) \overline{N}_P$$

olur. Yani $X_i(P)$ ve N_P nin düzlemindedir. $f_s(P)$ noktasından geçen ve $N^{f_s}\Big|_{f_s(P)}$ doğrultusundaki doğru d_s ve temsilci bir noktası $Q=(x,y)=xX_i(p)+yN_P$ ise d_s nin denklemi

$$d_s \ldots\ldots\ldots \overline{PQ}=\overline{Pf_s(P)}+\mu_1 N^{f_s}\Big|_{f_s(P)}$$

olur. Ayrıca $t=1,2,...$ olmak üzere

$$M^{f_t}=\left\{f_t(P)=P+\lambda_{i_t}\overline{X}_i(P)+\lambda_{n_t}\overline{N}_P : \mathrm{P}\in \mathrm{M}\right\}$$

hiperyüzeyinin $f_t(P)$ noktasından geçen ve $N^{f_t}\Big|_{f_t(P)}$ doğrultusundaki doğru d_t ve temsilci bir noktası $R=(x,y)$ ise d_t nin denklemi

$$d_t \ldots\ldots\ldots \overline{PR}=\overline{Pf_t(P)}+\mu_2 N^{f_t}\Big|_{f_t(P)}$$

dir. Şimdi bu iki doğrunun arakesit noktasını arayalım. $\{X_i(P),N_P\}$ vektörlerinin düzleminde çalışıldığı için P noktası başlangıç noktası alınsın.

$$d_s \ldots\ldots\ldots (x,y)=(\lambda_{i_s},\lambda_{n_s})+\mu_1(\lambda_{i_s}k_i, 1+\lambda_{n_s}k_i)$$

ve düzenlenirse

$$d_s \ldots\ldots\ldots y=\frac{1+\lambda_{n_s}k_i}{\lambda_{i_s}k_i}x-\frac{1}{k_i}$$

bulunur.

$$d_t \ldots\ldots\ldots (x,y)=(\lambda_{i_t},\lambda_{n_t})+\mu_2(\lambda_{i_t}k_i, 1+\lambda_{n_t}k_i)$$

ve düzenlenirse

$$d_t \ldots\ldots\ldots y=\frac{1+\lambda_{n_t}k_i}{\lambda_{i_t}k_i}x-\frac{1}{k_i}$$

olur. d_s ve d_t nin arakesit noktası arandığında $x=0$ için $y=-\frac{1}{k_i}$ bulunur.

Yani d_s ve d_t doğrularının arakesit noktası $\{X_i(P),N_P\}$ düzleminde $C_i=P-\frac{1}{k_i(P)}N_P$ noktasıdır.

E^n de bir M hiperyüzeyi üzerindeki, $1 \le i \le n-1$ olmak üzere, i-yinci asli eğrilik fonksiyonu k_i, i-yinci asli vektör alanı X_i ve normal vektör alanı N olsun. M hiperyüzeyinin bir $P \in M$ noktasına karşılık $Sp\{X_i|_P, N_P\}$ düzleminde yatan Z doğrultuları boyunca oluşan

$$M^f = \{f(P) \mid f(P) = P + \lambda_i \overline{X}_i(P) + \lambda_n \overline{N}_P, 1 \le i \le n-1, P \in M\} \qquad (5.2)$$

sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeyleri gözönüne alalım. $s,t = 1,2,...$ olmak üzere, bir $P \in M$ noktasına karşılık (5.2) deki gibi alınan M^{f_s} nin $N^{f_s}_{f_s(P)}$ ve M^{f_t} nin $N^{f_t}_{f_t(P)}$ normal vektörlerinin aynı doğrultuda olması durumunu araştıralım:

Bu iki vektörü üzerinde bulunduran doğrular bir önceki teoremin ispatından

$$d_s ....y = \frac{1+\lambda_{n_s} k_i}{\lambda_{i_s} k_i} x - \frac{1}{k_i} \quad \text{ve} \quad d_j ....y = \frac{1+\lambda_{n_t} k_i}{\lambda_{i_t} k_i} x - \frac{1}{k_i}$$

doğrularıdır ve bu doğrular $C_i = P - \frac{1}{k_i(P)} N_P$ noktasından geçerler. $N^{f_s}_{f_s(P)}$ ve $N^{f_t}_{f_t(P)}$ nin aynı doğrultuda olması için d_s ve d_t doğrularının eğimleri aynı olmalıdır. Bu iki doğru eğimleri aynı alındığında, ortak bir noktaları da olduğundan çakışırlar.

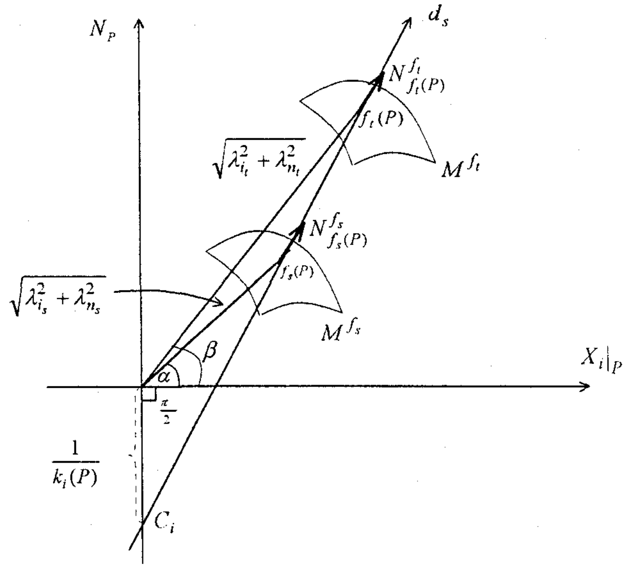
Buna göre $\frac{1+\lambda_{n_s} k_i}{\lambda_{i_s} k_i} = \frac{1+\lambda_{n_t} k_i}{\lambda_{i_t} k_i}$ ise buradan

$$(1+\lambda_{n_s} k_i)\lambda_{i_t} k_i = (1+\lambda_{n_t} k_i)\lambda_{i_s} k_i$$

$$k_i(\lambda_{n_s}\lambda_{i_t} - \lambda_{n_t}\lambda_{i_s}) = \lambda_{i_s} - \lambda_{i_t}$$

$$k_i = \frac{\lambda_{i_s} - \lambda_{i_t}}{\lambda_{n_s}\lambda_{i_t} - \lambda_{n_t}\lambda_{i_s}} \qquad (5.3)$$

elde edilir. $\lambda_{i_s}, \lambda_{i_t}, \lambda_{n_s}, \lambda_{n_t}$ sabit olduklarından k_i de sabit olmak durumundadır. M nin (5.3) şartına uyan M^{f_s} ve M^{f_t} sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeylerinin $f_s(P)$ ve $f_t(P)$ noktalarındaki normallerinin doğrultuları aynıdır. Bu bilgiler doğrultusunda $f_s(P)$ ile $f_t(P)$ arasındaki uzaklığı hesaplayalım.



Şekil 5.3.2 Aynı doğrultudaki normal vektöre sahip sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeyler

Yukarıdaki şeklin de gözönüne alınmasıyla,

$$\left\|\overrightarrow{Pf_s(P)}\right\| = \sqrt{\lambda_{i_s}^2+\lambda_{n_s}^2}\ ,\quad \left\|\overrightarrow{Pf_t(P)}\right\| = \sqrt{\lambda_{i_t}^2+\lambda_{n_t}^2}$$

dir ve α ile β açıları sabittir. $\left\|\overrightarrow{C_if_s(P)}\right\| = r_1$ ve $\left\|\overrightarrow{C_if_t(P)}\right\| = r_2$ denirse $\left\|\overrightarrow{f_s(P)f_t(P)}\right\| = r_2 - r_1$ olur. Buna göre,

$$r_1 = \lambda_{i_s}^2+\lambda_{n_s}^2+\frac{1}{k_i^2}-2\frac{1}{k_1}\sqrt{\lambda_{i_s}^2+\lambda_{n_s}^2}\,\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}_{-\sin\alpha}$$

$$r_2 = \lambda_{1_j}^2+\lambda_{3_j}^2+\frac{1}{k_1^2}-2\frac{1}{k_1}\sqrt{\lambda_{1_j}^2+\lambda_{3_j}^2}\,\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2}+\beta)}_{-\sin\beta}$$

olarak yazılır. Bu iki eşitlikteki ifadeler sabit olduğundan,

$$r_2 - r_1 = \lambda_{i_t}^2 + \lambda_{n_t}^2 - \lambda_{i_s}^2 - \lambda_{n_s}^2 + \frac{2}{k_i}\left(\sqrt{\lambda_{i_t}^2 + \lambda_{n_t}^2}\sin\beta - \sqrt{\lambda_{i_s}^2 + \lambda_{n_s}^2}\sin\alpha\right)$$

$$= sabit = c$$

elde edilir. Böylece (5.3) eşitliğine uyan M^{f_s} ve M^{f_t} hiperyüzeyleri için

$$f_t(P) = f_s(P) + cN_{f_s(P)}^{f_s}$$

yazılabildiğinden, bu iki hiperyüzey paralel hiperyüzeylerdir. Böylece şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 5.3.2. E^n de bir M hiperyüzeyi üzerindeki, $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere, i-yinci asli eğrilik fonksiyonu k_i, i-yinci asli vektör alanı X_i ve normal vektör alanı N olsun. Buna göre,

$$M^{f_s} = \left\{f_s(P) \,|\, f_s(P) = P + \lambda_{i_s}\overline{X}_i(P) + \lambda_{n_s}\overline{N}_P, 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}-1, \mathrm{P} \in \mathrm{M}\right\}$$

$$M^{f_t} = \left\{f_t(P) \,|\, f_t(P) = P + \lambda_{i_t}\overline{X}_i(P) + \lambda_{n_t}\overline{N}_P, 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}-1, \mathrm{P} \in \mathrm{M}\right\}$$

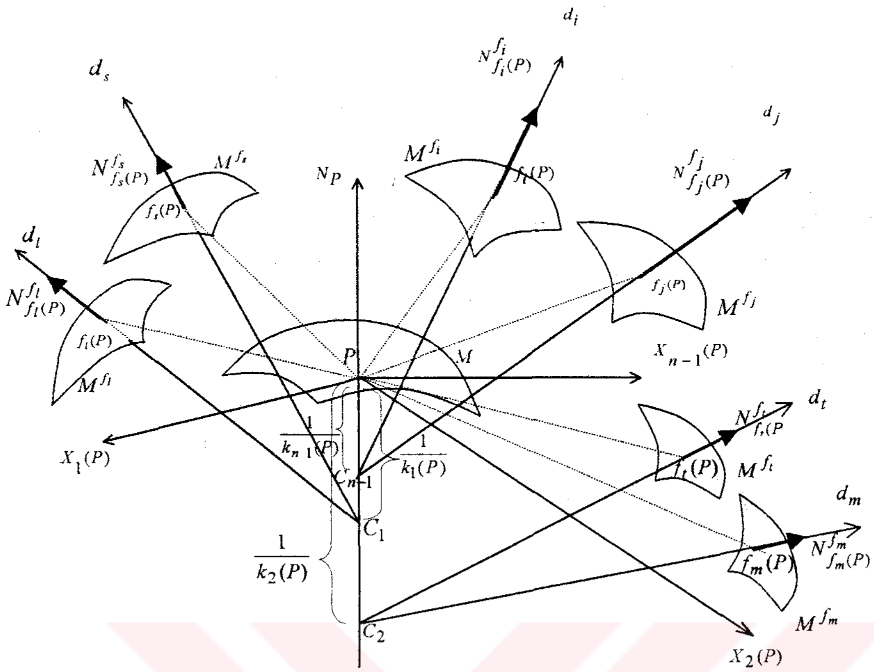
olarak alınan sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeyler için

$$k_i = \frac{\lambda_{i_s} - \lambda_{i_t}}{\lambda_{n_s}\lambda_{i_t} - \lambda_{n_t}\lambda_{i_s}}$$

özeliği sağlanıyorsa, M^{f_s} ve M^{f_t} hiperyüzeyleri paralel hiperyüzeylerdir.

Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 5.3.3. $Sp\{X_i(P), N_P\}$ düzlemleri üzerindeki Z_P lerin oluşturduğu farklı sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeylerin normallerinin oluşturdukları uzaysal doğru demetlerinin tepe noktası olan $C_i = P - \dfrac{1}{k_i(P)}N_P$, $1 \leq i \leq n-1$ noktaları (eğrilik merkezleri), M nin P noktasındaki normali üzerindedirler.



Şekil 5.3.3 Aynı $Sp\{X_i(P), N_P\}$ düzlemlerindeki Z_P vektörlerinin oluşturduğu farklı sabit sırt uzaklıklı hiperyüzeylerin normal doğrultularının arakesit noktaları

KAYNAKLAR

Hacısalihoğlu, H. H. 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No: 2, 895s., Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. 1968. On The Motion of The Frenet Thrihedron of a Space Curve. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara. pp: 33-55.

Hicks, N. J. 1971. Nots On Differential Geometry. Van Nostrand Reinhold Company. London.

Nirmala, K. And Agashe S. 1974. Curves Associated with an M-Vector Field On a Hypersurface M of a Riemannian Manifold $\overline{M}$. Tensor, N. S. 28. 117-122.

O' Neil, B. 1983. Semi Riemannian Geometry. Academic Press, New York, London.

Kılıç A. ve Hacısalihoğlu H. 1984. Paralel Hiperyüzeyler için Euler Teoremi ve Dupin Göstergesi. Gazi Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik İstatistik Dergisi, Cilt 1, Sayı 1, 21-26, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Amasya'da 1967 yılında doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Amasya'da tamamladı. 1985 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi K. Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1989 yılında mezun oldu. Şubat 1991-Ekim 1993 yılları arasında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 1994 yılında aynı Enstitüde doktora öğrenimine başladı.

1990-1999 yılları arasında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'nde, 1999 yılından bu yana da Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.