ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BÖLÜNMÜŞ KUATERNİYONLAR VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Levent KULA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2003

Prof. Dr. Yusuf YAYLI danışmanlığında, Levent KULA tarafından hazırlanan bu çalışma 26 / 06 / 2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Arif SABUNCUOĞLU

Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Prof. Dr. Erdoğan ESİN

Prof. Dr. Baki KARLIĞA

Doç. Dr. M. Kemal SAĞEL

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Metin OLGUN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

BÖLÜNMÜŞ KUATERNİYONLAR VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Levent KULA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramlar, tanımlar ve gerekli teoremler verilmiştir.
Üçüncü bölümde, bölünmüş kuaterniyonlar ve Minkowski 3-uzayında dönme matisleri verilmiştir.
Dördüncü bölümde, dual bölünmüş kuaterniyonlar, Hamilton matrisleri ve özelikleri verilmiştir.
Beşinci Bölümde, Minkowski 3-uzayında vida hareketi elde edilmiştir.

2003, 116 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Yarı Öklidiyen uzay, Minkowski 3-uzayı, Lie grubu, Lie cebiri, bölünmüş kuaterniyon, dual bölünmüş kuaterniyon, Hamilton operatörü, Hamilton matrisi, özel yarı ortogonal dual matris, vida hareketi

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SPLIT QUATERNIONS AND GEOMETRICAL APPLICATIONS

Levent KULA

Ankara University
Graduate School of Natural and applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In the second chapter deal with the preliminares, definitions and necessary theorems that will be needed for later use.
In the third chapter, split quaternions and rotation matricies in Minkowski 3-space are introduced.
In the fourth chapter, dual split quaternions, Hamilton matricies and their properties are given.
In the fifth chapter, screw motion in Minkowski 3-space are studied.

2003, 116 pages

KEY WORDS: Semi Euclidean space, Minkowski 3-space, Lie group, Lie algebra, split quaternion, dual split quaternion, Hamilton operator, Hamilton matrix, special semi orthogonal matrix, screw motion.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya, Tez İzleme Komitemde bulunan, yakın ilgileriyle çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren Sayın Prof. Dr. Arif SABUNCUOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, Sayın Prof. Dr. Erdoğan ESİN (Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'e, teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden ve her konuda yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, Sayın Doç. Dr. M. Kemal SAĞEL (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e teşekkürlerimi sunarım.

Güven, anlayış ve desteklerini daima hissettiğim sevgili babam Nazmi KULA, rahmetli annem Gülay KULA, ablam Meral KULA ve kardeşim Zuhal KULA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Levent KULA
Ankara, Haziran 2003

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{E}_2^4$	Yarı Öklidiyen Uzay
$\mathbb{E}_1^3$	Minkowski 3-Uzayı
G	Lie Grubu
$\chi_l G$	G nin Lie Cebiri
l	Sol Öteleme
r	Sağ Öteleme
$\mathcal{A}$d	Adjoint Gösterimi
g	Minkowski 3-Uzayında Metrik Tensör
$\wedge$	Minkowski 3-Uzayında Vektörel Çarpım
$O_v(n)$	Yarı Ortogonal Grup
$o_v(n)$	$O_v(n)$ in Lie Cebiri
$\mathbb{D}$	Dual Sayılar Halkası
H'	Bölünmüş Kuaterniyonlar Uzayı
q, p, r	Bölünmüş Kuaterniyonlar
Q, P, R	Dual Bölünmüş Kuaterniyonlar
$\mathbb{C}$	Minkowski 3-Uzayında Antisimetrik Matris
H'_D	Dual Bölünmüş Kuaterniyonlar Uzayı
$\overset{+}{H}, \overset{-}{H}$	Hamilton Operatörleri
Φ	Dual Açı
$\mathbb{S}^*$	Dual Antisimetrik Matris
$\mathcal{A}\mathrm{d}_q$	Yarı Ortogonal Matris
$\mathcal{A}$	Yarı Ortogonal Dual Matris
W	Açısal Hız Vektörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarını içermeyen Mekaniğin bir dalıdır. Yani Kinematik, sadece bir nokta veya nokta sistemi (cisim) nin zamana bağlı olarak yer değiştirmesini inceler (Müller 1963). Kuaterniyonlar 1843 yıllarında William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından tanımlanmış ve Kinematikte hareketlerin incelenmesi bakımından önemli bir rol oynadığı bir çok çalışmada ifade edilmiştir.

Yang ve Freudenstein (1964) dual kuaterniyonların, uzay Mekaniği analizine uygulamasını ele almış ve detaylı bir çalışmayla, bir dönme çifti ve üç silindirik çift seçerek uzay 4-link Mekaniğini incelemiştir.

Veldkamp (1976) dual birim vektörler ve dual vektör çiftleri yardımıyla dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca dual hareket ve reel uzay hareketi arasındaki bağıntıyı göstermiştir.

Rooney (1977) sabit bir nokta etrafında bir cismin dönme hareketini metodlar halinde ifade etmiştir. 3×3 reel ortogonal matrisler, 2×2 üniter matrisler, Pauli spin matrisleri, 3×3 özel üniter matrisler yardımıyla bir eksen etrafında dönme matrislerini sınıflandırmıştır.

Bottema ve Roth (1979) reel ve dual kuaterniyonların uzay Kinematiğine uygulamalarını ifade etmiştir. Hareket matrislerinin formlarını vermiştir.

Hacısalihoğlu (1983) reel ve dual kuaterniyonları ve sağladıkları özelikleri ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve kayma operatörlerini ifade etmiştir. Ayrıca vida operatörünün dönme ve kayma operatörlerinin bileşkesi olarak yazılabileceğini göstermiştir. Vida hareketlerinin bileşimini ve Euler açılarının denklemlerini vermiştir.

Hiller ve Woernle (1984), bir cismin genel vida hareketlerini noktalara ve doğrulara göre formülleştirdi. Her iki durum içinde, temel bağıntıları sağlayan ani vida hareketlerinin diferensiyel denklerini vermiş ve bu diferensiyel denklemlerin çözümlerinden de sonlu vida hareketini ifade etmiştir. Bir doğrunun vida hareketi için gerekli dual vida tensörleri, dual matrisleri, vida koordinatları ve dual kuaterniyonların denklemlerini vermiştir.

Karger ve Novak (1985) reel kuaterniyonlar yardımıyla $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir eksen etrafında dönmeyi adjoint gösterimiyle ifade etmiştir.

Agrawal (1987) dual kuaterniyonları, Hamilton operatörleri ile formülleştirmiştir ve bu operatörlere karşılık gelen dual matrislerin özeliklerini ifade etmiştir. Bu özelikleri bir nokta ve bir doğrunun vida hareketinin Kinematik denklemlerini geliştirmekte kullanmıştır.

Ward (1997) 3 ve 4 boyutlu Öklid uzaylarında dönme matrislerini reel kuaterniyonları kullanarak vermiştir. Kuaterniyonların matris formlarını ifade etmiştir.

Inoguchi (1998) bölünmüş (split) kuaterniyonları tanımlamış ve Minkowski 3-uzayında sabit ortalama eğrilikli zamansı (timelike) yüzeylerin temel denklemlerini bölünmüş (split) kuaterniyonlar yardımıyla yeniden formülleştirmiştir.

Bu tezde ilk olarak Inoguchi (1998) nin H' bölünmüş (split) kuaterniyonlar cebiri esas alınmış ve özelikleri geniş bir biçimde incelenmiştir. Ayrıca zamansı birim bölünmüş (split) kuaterniyonların G Lie grubu ve onun Lie cebiri ayrıntılı olarak elde edilmiştir. H' bölünmüş (split) kuaterniyonlar uzayının $\mathbb{E}_2^4$ yarı Öklidiyen uzayına ve G Lie grubunu Lie cebirinin $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayına özdeşlenmesi, bu iki uzayda çalışma imkanına temel oluşturmaktadır. Bu özdeşleme ile Minkowski 3-uzayında dönme matrisleri, dönme ekseninin uzaysı (spacelike) ve zamansı (timelike) olmasına göre elde edilmiştir.

Sonraki bölümde, dual bölünmüş (split) kuaterniyonlar tanımlanarak, dual bölünmüş (split) kuaterniyonlara Hamilton operatörlerine göre karşılık gelen Hamilton matrislerinin özelikleri elde edilmiştir.

Son bölümde, 3×3 özel yarı ortogonal dual matris tanımlanmış ve bu matris yardımıyla Minkowski 3-uzayında uzaysı (zamansı) doğrultman vektörü ile verilen doğru etrafında, bir doğrunun vida hareketleri ifade edilmiş ve son olarak Minkowski 3-uzayında vida hareketi Hamilton matrisleri ile elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Lie grubu, Lie cebiri, adjoint gösterimi, skalar çarpım, metrik tensör ve bize gerekli olan bazı tanımlar, teoremler ve notasyonlar hatırlatılacaktır.

Tanım 2.1. Bir Lie grubu, diferensiyellenebilir grup operatörlerine sahip diferensiyellenebilir bir manifolddur; yani G deki grup operatörü olan

$$\mu : G \times G \to G, \ \ \mu(a,b) = ab$$

ve G deki inversiyon operatörü olan

$$\xi : G \to G, \ \xi(a) = a^{-1}$$

dönüşümlerinin ikisi de diferensiyellenebilirdir. G Lie grubunun bir otomorfizimi hem diffeomorfizim hem de bir grup izomorfizimi olan

$$\begin{aligned} \Phi : \ \ & G \to G \\ & a \to \Phi(a) \end{aligned}$$

dönüşümüdür. Otomorfizimler Lie grubunu üzerindeki özelikleri korur (Boothby 1975, Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.2. G Lie grubunun bir elemanı a olsun. Her $g \in G$ için $l_a(g) = ag$ olarak tanımlanan $l_a : G \to G$ dönüşümüne G *nin sol ötelemesi* (sol çarpımı) denir. l_a bir diffeomorfizimdir. Her $g \in G$ için $r_a(g) = ga$ olarak tanımlanan $r_a : G \to G$ dönüşümüne G nin sağ ötelemesi (sağ çarpımı) denir. r_a bir diffeomorfizimdir (Hacısalihoğlu 1983, Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 2.3. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} [\,,] \quad &: \quad V \times V \to V \\ (X,Y) \quad &\to \quad [\,,](X,Y) = [X,Y] \end{aligned}$$

biçimindeki bir dönüşüm her $X, Y, Z \in V$ için aşağıdaki üç önermeyi doğruluyorsa bu dönüşüme Bracket operatörü, $(V, [\,,])$ ikilisine de bir Lie cebiri denir.

(i) $[\,,]$ bilineerdir.

(ii) $[X,Y] = -[Y,X]$ (antisimetrik)

(iii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (Jakobi özdeşliği)

dir (Chevally 1946, Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.4. Eğer her $a, g \in G$ için $dl_a(X_g) = X_{ag}$ ise, G Lie grubu üzerindeki X vektör alanı sol-invaryanttır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} l_a : \; & G \to G \\ & g \to l_a(g) = ag \end{aligned}$$

sol çarpımının

$$\begin{aligned} dl_a = (l_a)_* : \; & T_G(g) \to T_G(ag) \\ & X_g \to dl_a(X_g) = X_{ag} \end{aligned}$$

türev dönüşümü X in oluşturduğu tanjant vektörleri yer değiştirir. Sol-invaryant vektör alanı diferensiyellenebilirdir.

G deki sol-invaryant vektör alanlarının cümlesi $\chi_l G$ olsun. Vektör alanlarının alışılmış toplama ve skalar ile çarpma işlemleri $\chi_l G$ yi bir vektör uzayı yapar. $\chi_l G$ de $[,]$ parantez operatörüde tanımlanarak $\chi_l G$ bir Lie cebiri olur. $\chi_l G, n = boyG$ (sonlu) boyutuna sahiptir (O'Neill 1983, Howard 1991).

Lemma 2.5. $X \in \chi_l G$ elemanını $X_e \in T_G(e)$ elemanına dönüştüren $f : \chi_l G \to T_G(e)$ fonksiyonu bir lineer izomorfizimdir. Burada e, G nin grup işlemine göre birim elemanıdır.

$\Phi : G \to G$ bir otomorfizim olsun. $X \in \chi_l G$ ise $d\Phi(X) \in \chi_l G$ dir ve $d\Phi : \chi_l G \to \chi_l G$ Lie cebiri izomorfizimine Φ nin diferensiyeli denir. $d\Phi$ diferensiyeli $d\Phi_e : T_G(e) \to T_G(e)$ dönüşümü ile ifade edilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.6. $a \in G$ olmak üzere g elemanını aga^{-1} elemanına dönüştüren

$$\begin{aligned} C_a :\ & G \to G \\ & g \to C_a(g) = aga^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda C_a bir diffeomorfizim olup onun diferensiyeli Ad_a ile gösterilir. O halde $dC_a = Ad_a$ dır. $a, b \in G$ olduğunda $C_{ab}(g) = abg(ab)^{-1} = a(bgb^{-1})a^{-1}$ dir. Böylece $C_{ab} = C_a \circ C_b$ olur. Diferensiyel alındığında ise

$$Ad_{ab} = Ad_a \circ Ad_g$$

elde edilir. $a \to Ad_a$ grup homomorfizmine G nin adjoint gösterimi denir (O'Neill 1983, Gürlebeck ve Sprössig 1997).

Tanım 2.7. V bir reel vektör uzayı üstünde, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ iki lineer fonksiyonuna iki lineer form, eğer bu iki lineer form simetrik ise g ye simetrik iki lineer form denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.8. g, V üstünde ikilineer form olsun.

$(i)\, \forall v \in V,\ v \neq 0 \Longrightarrow g(v,v) > 0$ önermesi doğru ise g ye pozitif tanımlı,

$(ii)\, \forall v \in V,\ v \neq 0 \Longrightarrow g(v,v) < 0$ önermesi doğru ise g ye negatif tanımlı,

$(iii)\, \forall v \in V,\ g(v,v) \geq 0$ ise g ye yarı pozitif tanımlı,

$(iv)\, \forall v \in V,\ g(v,v) \leq 0$ ise g ye yarı negatif tanımlı,

$(v)\, [\forall w \in V,\ g(v,w) = 0] \Longrightarrow v = 0$ oluyor ise g ye yoz olmayan (nondejenere) bir form denir (O'Neill 1983).

g, V nin bir alt uzayına indirgenebilir. Bu indirgenen simetrik bilineer form yoz (dejenere) veya yoz olmayan (nondejenere) dır.

Tanım 2.9. g, V üstünde simetrik ikilineer form olsun. g nin W alt uzayına kısıtlanması $g|_W$ negatif tanımlı olacak biçimdeki W alt uzaylarının boyutlarının en büyüğüne g nin indeksi denir ve υ ile gösterilir. $0 \leq \upsilon \leq boyV$ olduğu açıktır.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

simetrik ikilineer form olsun.

$$\begin{aligned} q :\ & V \to \mathbb{R} \\ & v \to q(v) = g(v,v) \end{aligned}$$

fonksiyonuna g den elde edilen kuadratik form denir. q kuadratik formu verildiğinde, g simetrik ikilineer formu verilmiş demektir. Gerçekten,

$$g(v,w)=\frac{1}{2}\left[q(v+w)-q(v)-q(w)\right]$$

dır. V nin bir bazı $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ olmak üzere, $g_{ij}=g(e_i,e_j)$ diyelim. $[g_{ij}]$ matrisine, g nin $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bazına göre bileşenlerinin matrisi denir. g simetrik olduğundan $[g_{ij}]$ matriside simetriktir (O'Neill 1983).

Teorem 2.10. *g simetrik ikilineer formu yoz olmayandır (nondejenere) gerek ve yeter şart V nin bir bazına göre g ye karşılık gelen matrisin determinantı sıfırdan farklıdır* (O'Neill 1983).

Tanım 2.11. V üstünde simetrik, yoz olmayan (nondejenere) bir g iki lineer formuna V üstünde bir skalar çarpım denir. g, V üstünde pozitif tanımlı bir skalar çarpım ise g ye V üstünde bir iç çarpım denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.12. V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere V üstünde bir skalar çarpım varsa V ye skalar çarpımlı vektör uzayı denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.13. V skalar çarpımlı bir uzay ve $v\in V$ olsun.

$$\|v\|=\sqrt{|g(v,v)|}$$

eşitliğiyle belirli $\|v\|$ sayısına v nin normu denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör adı verilir (O'Neill 1983).

Teorem 2.14. $V \neq \{0\}$ olmak üzere, V skalar çarpımlı bir vektör uzayı ise V nin bir ortonormal bazı vardır (O'Neill 1983).

V skalar çarpımlı vektör uzayının ortonormal bir $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazına göre g nin matrisi köşegensel bir matris dir. Çünkü, $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\,\varepsilon_j$ dir. Burada $\varepsilon_j = g(e_j, e_j)$, -1 veya 1 dir. V vektör uzayının ortonormal bir bazı sıralı olarak göz önüne alındığında, ε_j sayıları negatif olan vektörlerin ilk sırada yazıldığını varsayacağız.

Teorem 2.15. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, V nin ortonormal bir bazı olsun. V nin her v elemanı

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i)\, e_i$$

biçiminde bir ve yalnız bir türlü yazılabilir (O'Neill 1983).

Teorem 2.16. V nin ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazı için $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ deki negatif sayıların sayısı, g nin indeksine eşittir. g nin indeksine V nin indeksi denir(O'Neill 1983).

Tanım 2.17. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üstündeki yoz olmayan (nondejenere), sabit indeksli ve $(0,2)$ tipindeki g tensör alanına bir metrik tensör denir (O'Neill 1983).

g, M üstünde bir metrik tensör ise M nin herbir p noktasına, $T_M(p)$ üstünde bir g_p skalar çarpımı karşılık gelir. g_p nin indeksi her p noktasında aynıdır.

Tanım 2.18. M diferensiyellenebilir manifoldu üstünde bir g metrik tensörü varsa M ye bir yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill 1983).

g nin v indeksine (M, g) yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir. M nin boyutu

n olmak üzere, M yarı-Riemann manifoldu M_ν^n ile gösterilir.

Tanım 2.19. $(M,\ g)$ bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $n \geqslant 2$ ve $\nu = 1$ ise M_1^n yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir(O'Neill 1983).

Tanım 2.20. $\mathbb{R}^n$ üstünde

$$\langle v,\ w\rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v_i w_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} v_j w_j \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant n$$

metrik tensörünü ele alalım. Bu durumda $(\mathbb{R}^n,\ <,\ >)$ ikilisine yarı-Öklidiyen uzay denir ve $\mathbb{R}_\nu^n$ ile gösterilir. $\nu = 0$ ise $\mathbb{R}^n$ e indirgenir. Eğer $n \geqslant 2$ ve $\nu = 1$ ise $\mathbb{R}_1^n$ e Minkowski n-uzayı adı verilir. $\mathbb{R}^n$ üstündeki standart iç çarpımı "." ile göstereceğiz:

$$v.w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

$\mathbb{R}_\nu^n$ deki $\langle v,\ w\rangle$ skalar çarpımı, εv ile w nin $\mathbb{R}^n$ deki standart iç çarpımına eşit olur. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \langle v,\ w\rangle &= -v_1 w_1 - v_2 w_2 - \ldots - v_\nu w_\nu + v_{\nu+1} w_{\nu+1} + \ldots + v_n w_n \\ &= (\varepsilon v).w \end{aligned}$$

dir. Burada $\varepsilon = \begin{bmatrix} -I_\nu & 0 \\ 0 & I_{n-\nu} \end{bmatrix}$ dir ve $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$, $\varepsilon^T = \varepsilon$ dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.21. M yarı-Riemann manifoldu ve g de M üstünde bir metrik tensör olsun. Bu durumda M de bir v tanjant vektörü için

(i) $g(v,\, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne uzaysı (spacelike) vektör,

(ii) $g(v,\, v) < 0$ ise v vektörüne zamansı (timelike) vektör,

(iii) $g(v,\, v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v vektörüne boşluksu (null) vektör denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.22. İndeksi 1 ve $boyV \geqslant 2$ olan V skalar çarpım uzayına Lorentz vektör uzayı denir. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt vektör uzayı ve g, V üstündeki skalar çarpım olsun. Bu durumda

(i) $g\,|_W$ pozitif tanımlı (yani W iç çarpım uzayı) ise W ya uzaysı,

(ii) $g\,|_W$, 1 indeksine sahip yoz olmayan (nondejenere) ise W ya zamansı,

(iii) $g\,|_W$ yoz (dejenere) ise W ya boşluksu denir (Sıfır vektörüne benzer şekilde, $\left\{\vec{0}\right\}$ alt uzayı uzaysıdır.) (O'Neill 1983, Weinstein 1995).

Lemma 2.23. Z, V Lorentz vektör uzayında zamansı bir vektör ise $Sp\{Z\}^{\perp}$ alt uzayı uzaysıdır ve $V = Sp\{Z\} \oplus Sp\{Z\}^{\perp}$ dir.

W alt uzayının zamansı olması için gerek ve yeter koşul $W^{\perp}$ in uzaysı olmasıdır. W nin boşluksu (lightlike) olması için gerek ve yeter koşul $W^{\perp}$ in boşluksu (lightlike) olmasıdır.

W uzaysı alt uzayının her alt uzayıda uzaysı dır ve Schwarz eşitsizliği $|g(v,\, w)| \leqslant \|v\|\,\|w\|$ olarak elde edilir. Eşitlik olması için gerek ve yeter koşul v ve w nin lineer bağımlı olmasıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.24. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

(i) W zamansı dır. Böylece W nın kendisi de Lorentz vektör uzayıdır.

(ii) W lineer bağımsız iki boşluksu vektör içerir.

(iii) W zamansı vektör içerir (O'Neill 1983).

Lemma 2.25. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

(i) W boşluksu (lightlike) dur. Yani yoz (dejenere) olur.

(ii) W boşluksu vektör içerir fakat zamansı vektör içermez.

(iii) $W \cap \Lambda = L - \{0\}$ dır. Burada L bir boyutlu alt uzaydır ve Λ, V nin boşlukkonisi (nullkoni) dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.26. $\mathcal{F}$, V Lorentz vektör uzayındaki zamansı vektörlerin kümesi olsun. $u \in \mathcal{F}$ için

$$C(u) = \{v \in \mathcal{F} \,/\; g(u, v) < 0\}$$

kümesi u yu içeren V nin zamankoni (timecone) sidir. Karşıt zamankonisi

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathcal{F} \,/\, g(u, v) > 0\}$$

dir. $\{u\}^{\perp}$ uzaysı olduğundan, $\mathcal{F}$ bu iki zamankonisinin bileşimidir (O'Neill 1983).

Lemma 2.27. Lorentz vektör uzayında v ve w zamansı vektörlerinin aynı zaman konisinde olmaları için gerek ve yeter koşul $g(v,\, w) < 0$ olmasıdır (O'Neill 1983).

Teorem 2.28. Minkowski 4-uzayında zamansı iki vektör ortogonal olamaz (Das 1993).

Teorem 2.29. Minkowski 4-uzayında zamansı ve boşluksu vektörler ortogonal olamaz (Das 1993).

Teorem 2.30. Minkowski 4-uzayında iki boşluksu vektörün ortogonal olması için gerek ve yeter koşul bu iki vektörün lineer bağımlı olmasıdır (Das 1993).

Teorem 2.31. u, v ve w Minkowski 3-uzayında üç vektör olsun. O zaman

(i) $g(u \wedge v, w) = \det(u, v, w)$

(ii) $(u \wedge v) \wedge w = -g(u, w)w + g(v, w)u$

(iii) $u \wedge (v \wedge w) = -g(u, w)v + g(u, v)w$

(iv) $g(u \wedge v, u) = 0$ ve $g(u \wedge v, v) = 0$

(v) $g(u \wedge v, u \wedge v) = -\langle u, u\rangle \langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2$

dır. Burada $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u \wedge v &= \begin{vmatrix} -\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_3v_2 - u_2v_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \end{aligned}$$

ve

$$g(u,v) = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

dır (Weinstein 1995).

Lemma 2.32. v ve w Lorentz vektör uzayında iki zamansı vektör olsun. O zaman

(i) $|g(v,\, w)| \geqslant \|v\|\,\|w\|$ dir. Eşitlik olması için gerek ve yeter koşul v ve w nın lineer bağımlı olmasıdır.

(ii) v ve w, V nin aynı zamankonisinde ise

$$g(v,w) = -\|v\|\,\|w\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geqslant 0$ sayısı vardır (O'Neill 1983).

Burada φ ye hiperbolik açı denir.

Lemma 2.33. v ve w aynı zaman konisinde iki zamansı vektör ise $\|v+w\| \geqslant \|v\| + \|w\|$ dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul v ve w nin lineer bağımlı olmasıdır (O'Neill 1983).

$\mathbb{R}^n_v$ uzayının bütün lineer izometrilerine $\mathbb{R}^n_v$ nin doğal bazına göre karşılık gelen matrislerin kümesini $O_v(n)$ ile göstereceğiz. $O_v(n)$ kümesi $GL(n,\, \mathbb{R})$ nın kapalı bir alt grubudur ve bundan dolayı $O_v(n)$ bir Lie grubudur. $O_v(n)$ ye yarı ortogonal grup denir.

Teorem 2.34. $n \times n$ biçiminde bir A matrisi için aşağıdaki önermeler denktir.

(*i*) $A \in O_v(n)$

(*ii*) $A^T = \varepsilon A^{-1}\varepsilon$

(*iii*) A nın sütunlarının kümesi (satırlarının kümesi) $\mathbb{R}_v^n$ uzayı için ortonormal bir bazdır.

(*iv*) A, $\mathbb{R}_v^n$ nin ortonormal bir bazını yine ortonormal bir baza dönüştürür (O'Neill 1983).

Teorem 2.35. $O_v(n)$ in Lie cebiri, $\mathbf{C}^T = -\varepsilon\mathbf{C}\varepsilon$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{C}$ matrislerinin kümesidir. Böyle $\mathbf{C}$ matrisleri

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^T & D \end{array}\right]$$

biçimindedir. Burada $A^T = -A$, $D^T = -D$, A $v \times v$, D $(n-v) \times (n-v)$ ve B $v \times (n-v)$ biçiminde matrislerdir. $O_v(n)$ in Lie cebiri $o_v(n)$ ile gösterilir. $boy\, O_v(n) = boy\, o_v(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.36. $\mathbb{R}_1^2$ den $\mathbb{R}_1^2$ e giden bütün lineer izometrelerin grubu $O_1(2)$ dir.

$O_1(2)$ grubunun elemanlarından $\varphi > 0$ için

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix}$$

matrisini ele alalım. $u_0 = (1, 0)$, $u_1 = (0, 1)$ olsun. $\mathcal{A}_\varphi u_0 = (\cosh\varphi, \sinh\varphi)$ dir. Buradaki φ açısı

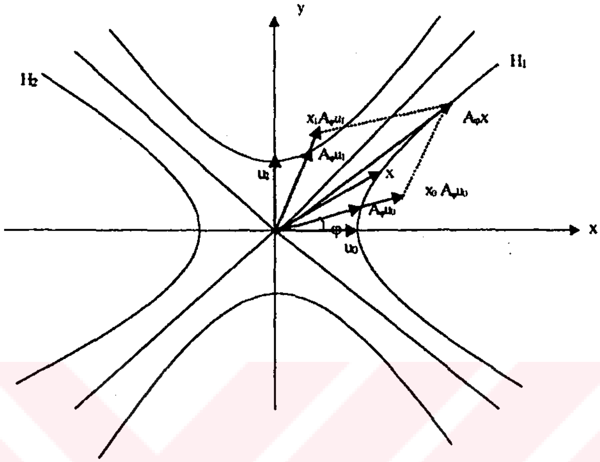
$$\frac{-\langle u_0, \mathcal{A}_\varphi u_0\rangle}{\|u_0\|\,\|\mathcal{A}_\varphi u_0\|} = \cosh\varphi$$

eşitliğiyle tanımlı hiperbolik açıdır. $\mathcal{A}_\varphi u_1 = (\sinh\varphi, \cosh\varphi)$ bulunur. Şimdi $\langle p, p\rangle = -1$ yani $-p_1^2 + p_2^2 = -1$ denklemli hiperbolün y ekseninin sağında kalan dalını H_1, y ekseninin solunda kalan dalını H_2 ile gösterelim.

$x = x_0\, u_0 + x_1\, u_1 \in H_1$ zamansı vektörünü ele alalım. Buna göre $\mathcal{A}_\varphi x$ i bulmak için x_0 reel sayısı ile $\mathcal{A}_\varphi u_0$ vektörünü, x_1 reel sayısı ile $\mathcal{A}_\varphi u_1$ vektörünü çarpıp elde ettiğimiz bu iki vektörü paralel kenar kuralına göre toplayacağız. O halde

$$\mathcal{A}_\varphi x = (x_0 \cosh\varphi + x_1 \sinh\varphi, x_0 \sinh\varphi + x_1 \cosh\varphi)$$

dir. Bu durumda x noktası H_1 dalı üzerinde boşluksu doğruya ($y = x$ doğrusu) yaklaşarak kayıyor demektir. Yani H_1 dalının noktaları yukarıya doğru kayarak yine bu hiperbolün dalına dönüşür. Bu durum şekil 2.1 de gösterilmiştir.

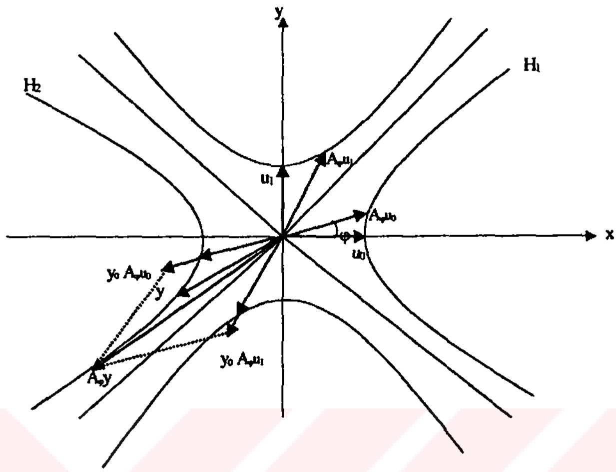


Şekil 2.1. H_1 dalında $\varphi > 0$ hiperbolik açılı dönme hareketi.

$y = y_0u_0 + y_1u_1 \in H_2$ zamansı vektörünü ele alalım.

$$A_\varphi y = (y_0 \cosh\varphi + y_1 \sinh\varphi, y_0 \sinh\varphi + y_1 \cosh\varphi)$$

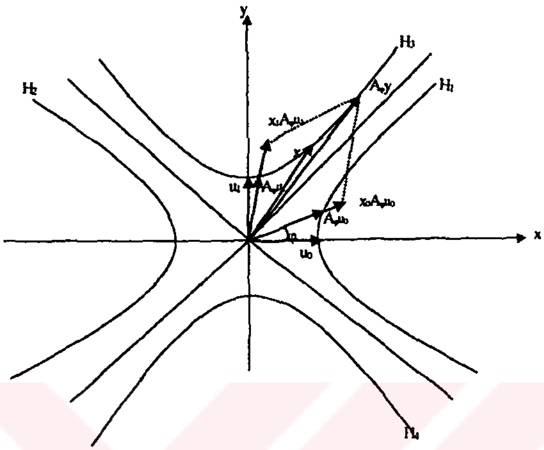
bulunur. Bu durumda y noktası H_2 dalı üzerinde boşluksu doğruya ($y = x$ doğrusuna) yaklaşarak kayıyor demektir. Yani H_2 dalının noktaları aşağıya doğru kayarak yine bu hiperbolün dalına dönüşür. Bu durum şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2. H_2 dalında $\varphi > 0$ hiperbolik açılı dönme hareketi.

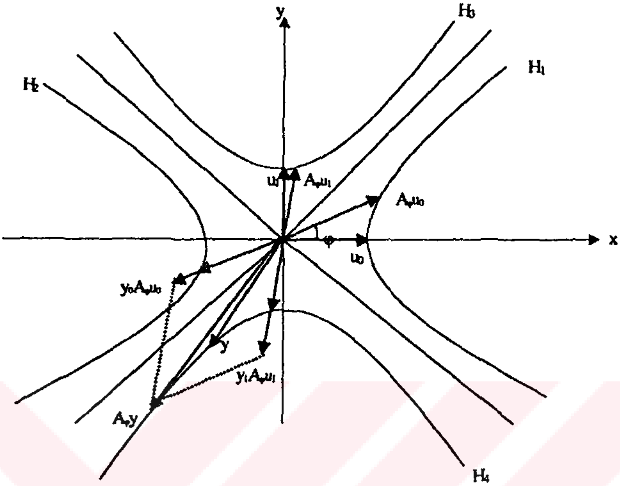
O halde $\mathcal{A}_\varphi$, $\varphi > 0$ olmak üzere $\langle p, p\rangle = -1$ denklemli hiperbolün dallarını sabit bırakmaktadır.

Şimdi $\langle p, p\rangle = 1$ yani $-p_1^2 + p_2^2 = 1$ denklemli hiperbolün x ekseninin üstünde kalan dalını H_3, x ekseninin altında kalan dalını H_4 ile gösterelim. $x = x_0\ u_0 + x_1\ u_1 \in H_3$ uzaysı vektörünü ele alalım. Yukarıdakine benzer şekilde, x noktası H_3 dalı üzerinde boşluksu doğruya ($y = x$ doğrusu) yaklaşarak kayıyor demektir. Yani H_3 dalının noktaları sağa doğru kayarak yine bu hiperbolün dalına dönüşür. Bu durum şekil 2.3 de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. H_3 dalında $\varphi > 0$ hiperbolik açılı dönme hareketi.

Ayrıca $y = y_0u_0 + y_1u_1 \in H_4$ uzaysı vektörünü ele alırsak, y noktası H_4 dalı üzerinde boşluksu doğruya ($y = x$ doğrusu) yaklaşarak kayıyor demektir. Yani H_4 dalının noktaları sola doğru kayarak yine bu hiperbolün dalına dönüşür. Bu durum şekil 2.4 de gösterilmiştir.



Şekil 2.4. H_4 dalında $\varphi > 0$ hiperbolik açılı dönme hareketi.

O halde $\mathcal{A}_\varphi$, $\varphi > 0$ olmak üzere $\langle p, p\rangle = 1$ denklemli hiperbolün dallarını sabit bırakmaktadır.

$\varphi < 0$ olması durumunda; H_1 dalının noktaları aşağıya doğru kayarak yine H_1 hiperbolünün dalına, H_2 dalının noktaları yukarıya doğru kayarak yine H_2 hiperbolünün dalına, H_3 dalının noktaları sola doğru kayarak yine H_3 hiperbolünün dalına ve H_4 dalının noktaları sağa doğru kayarak yine H_4 hiperbolünün dalına dönüşür (O'Neill 1983, Albayrak 1996).

3. BÖLÜNMÜŞ (SPLİT) KUATERNİYONLAR VE MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA DÖNME MATRİSLERİ

Bu bölümde, J. Inoguchi'nin 1998 yılındaki çalışması ele alınarak, normu 1 olan bölünmüş kuaterniyonların Lie grubu ve onun Lie cebiri yardımıyla Minkowski 3-uzayında uzaysı ve zamansı eksenli dönme matrisleri elde edilmiştir.

3.1. Bölünmüş Kuaterniyonlar

$$H' = \{q = a_0 1 + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3} \;/\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \tag{3.1.1}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ birimlerinin çarpımı aşağıdaki tabloda verilmiştir:

	1	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
1	1	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_1}$	-1	$\overrightarrow{e_3}$	$-\overrightarrow{e_2}$
$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_3}$	1	$-\overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_1}$	1

H' nün her bir elemanına bir bölünmüş kuaterniyon adı verilir (Inoguchi 1998). Burada a_0, a_1, a_2, a_3 reel sayılarına q bölünmüş kuaterniyonunun bileşenleri denir. Bundan sonraki bölümlerde, bir bölünmüş kuaterniyon için $q = a_0 + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$ gösterimi kullanılacaktır. $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Dolayısıyla bir $q = a_0 + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu S_q ile gösterilen skalar kısım ve $\overrightarrow{V_q}$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısıma ayrılır:

$$q = S_q + \overrightarrow{V_q} \tag{3.1.2}$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_q = a_0, \quad \overrightarrow{V_q} = a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$$

dır.

$q = a_0 + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$, $p = b_0 + b_1 \overrightarrow{e_1} + b_2 \overrightarrow{e_2} + b_3 \overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} q + p &= (S_q + S_p) + (\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_p}) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \overrightarrow{e_1} + (a_2 + b_2) \overrightarrow{e_2} + (a_3 + b_3) \overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $q = a_0 + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$ olmak üzere λq dış işlemi

$$\lambda q = (\lambda a_0) + (\lambda a_1) \overrightarrow{e_1} + (\lambda a_2) \overrightarrow{e_2} + (\lambda a_3) \overrightarrow{e_3}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu iki işlemle birlikte H' cümlesi reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır.

Ayrıca $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$, $p = b_0 + b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonlarının çarpımı:

$$\begin{aligned} \times :\ & H' \times H' \to H' \\ & (q,p) \to q \times p = \ qp \end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup

$$\begin{aligned} qp = \ & (a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1 - a_2b_3 + a_3b_2)\,\overrightarrow{e_1} \\ & + (a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1)\,\overrightarrow{e_2} + (a_0b_3 + a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2)\,\overrightarrow{e_3} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

veya

$$qp = S_qS_p + g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) + S_q\overrightarrow{V_p} + S_p\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p} \tag{3.1.4}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} g :\ & \operatorname{Im} H' \times \operatorname{Im} H' \to \mathbb{R} \\ & (\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) \to g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) = \ -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

ve

$\wedge : \mathrm{Im}\, H' \times \mathrm{Im}\, H' \to \mathrm{Im}\, H'$

$$(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) \to \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p} = \begin{vmatrix} -\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{3.1.6}$$

$$= (a_3 b_2 - a_2 b_3)\overrightarrow{e_1} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\overrightarrow{e_2} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\overrightarrow{e_3}$$

dır. $\mathrm{Im}\, H' = \{a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ dir. Bu çarpma işlemiyle birlikte H' ye bölünmüş kuaterniyon cebiri denir.

3.2. Bölünmüş Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

a) Eşlenik:

$$\overline{(\,,\,)} : \; H' \to H'$$
$$q = S_q + \overrightarrow{V_q} \to \overline{q} = S_q - \overrightarrow{V_q}$$

biçiminde tanımlanır ve buna göre bir $q = a_0 + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu için, q nun $\overline{q}$ eşleniği

$$\overline{q} = a_0 - a_1 \overrightarrow{e_1} - a_2 \overrightarrow{e_2} - a_3 \overrightarrow{e_3} \tag{3.2.1}$$

olur. Eşlenik işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir:

$(i)\; \overline{aq + bp} = a\overline{q} + b\overline{p}, \; \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall q, p \in H'$

$(ii)\, \overline{qp} = \overline{p}\, \overline{q}, \ \forall\, q, p \in H'$

$(iii)\, \overline{\overline{q}} = q, \forall q \in H'$

b) Norm:

$$N: \ H' \rightarrow \mathbb{R}$$
$$q \rightarrow N(q) = N_q = \ q\overline{q} = \overline{q}q$$

biçiminde tanımlanan N işlemine H' üzerinde norm denir. Bir $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu için, q nun N_q normu

$$N_q = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \tag{3.2.2}$$

reel sayısıyla tanımlıdır. Norm işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir:

$(i)\, N_{qp} = N_q N_p, \forall q, p \in H'$

$(ii)\, N_{\lambda q} = \lambda^2 N_q, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall q \in H'$

c) İnvers:

$$(,)^{-1}: \ H' \rightarrow H'$$
$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N_q} \quad , N_q \neq 0$$

biçiminde tanımlanan işleme H' de invers işlemi denir. $N_q \neq 0$ olmak üzere bir q bölünmüş kuaterniyonunun inversi

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N_q} = \frac{a_0 - a_1\overrightarrow{e_1} - a_2\overrightarrow{e_2} - a_3\overrightarrow{e_3}}{a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2} \tag{3.2.3}$$

dır. İnvers işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir:

(i) $(qp)^{-1} = p^{-1}q^{-1}$, $\forall q, p \in H'$ ve $N_q \neq 0$, $N_p \neq 0$

(ii) $(\lambda q)^{-1} = \frac{1}{\lambda}q^{-1}$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, q \in H'$ ve $N_q \neq 0$.

d) Birim bölünmüş kuaterniyon:

$N_q = 1$ olan q bölünmüş kuaterniyonuna birim bölünmüş kuaterniyon denir.

e) İki bölünmüş vektörün çarpımı:

Skalar kısmı sıfır olan bölünmüş kuaterniyona bölünmüş vektör adı verilir. $q = \overrightarrow{V_q} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$, $p = \overrightarrow{V_p} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş vektörlerinin çarpımı

$$\begin{aligned} \times :\ & H' \times H' \to H' \\ & \left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}\right) \to \overrightarrow{V_q} \times \overrightarrow{V_p} = g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) + \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p} = g(q,p) + q \wedge p \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

olarak bulunur. Bu eşitlikten görülmektedir ki bu iki bölünmüş vektör g skalar çarpımına göre dik iseler çarpımları vektörel çarpımlarına eşit olur. Eğer bu iki vektör paralel iseler çarpımları, bu iki bölünmüş vektörün skalar çarpımına eşittir. Bundan sonra H'

$$\mathbb{E}_2^4 = \{\, q = (a_0, a_1, a_2, a_3) : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},\ < q, q >= -a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \,\} \quad (3.2.5)$$

yarı Öklidiyen uzayı ile özdeşlenecektir.

Teorem 3.2.1. H' üzerinde ki metriği $\mathbb{E}_2^4$ deki $\langle\,,\rangle$ metriğiyle aynı alalım. Bu durumda aşağıdaki önermeler gerçeklenir.

(i) $\langle pq_1, pq_2\rangle = N_p \langle q_1, q_2\rangle\,,\ \forall q_2, q_1, p \in H'$

(ii) $\langle q_1 p, q_2 p\rangle = N_p \langle q_1, q_2\rangle\,,\ \forall q_2, q_1, p \in H'$

(iii) $\langle p_1 q_1, p_2 q_2\rangle + \langle p_1 q_2, p_2 q_1\rangle = -2\langle p_1, p_2\rangle \langle q_1, q_2\rangle\,,\ \forall q_2, q_1, p_1, p_2 \in H'$

(iv) $\langle p_1 q_1, q_2\rangle = \langle q_1, \overline{p}_1 q_2\rangle\,,\ \forall q_2, q_1, p_1 \in H'$

(v) $\langle p_1 q_1, q_2\rangle = \langle p_1, q_2 \overline{q_1}\rangle\,,\ \forall q_2, q_1, p_1 \in H'$

İspat. $q \in H'$ için $N_q = - < q, q >$ dir. Dolayısıyla $q, p \in H'$ bölünmüş kuaterniyonları için,

$$\begin{aligned} N_{q+p} &= - < q+p, q+p > \\ &= N_q - 2 < q, p > + N_p \end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$< q, p >= \tfrac{1}{2}\left[-N_{q+p} + N_q + N_p\right] \quad (3.2.6)$$

bulunur.

(i) Bu eşitlik yardımıyla,

$$\begin{aligned}\langle pq_1, pq_2\rangle &= \frac{1}{2}\left[-N_{(q_1+q_2)p} + N_{q_1p} + N_{q_2p}\right]\\ &= N_p\frac{1}{2}\left[-N_{(q_1+q_2)} + N_{q_1} + N_{q_2}\right]\\ &= N_p\langle q_1, q_2\rangle\end{aligned}$$

(ii) (i) dekine benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\langle q_1p, q_2p\rangle &= \frac{1}{2}\left[-N_{p(q_1+q_2)} + N_{pq_1} + N_{pq_2}\right]\\ &= N_p\frac{1}{2}\left[-N_{(q_1+q_2)} + N_{q_1} + N_{q_2}\right]\\ &= N_p\langle q_1, q_2\rangle\end{aligned}$$

bulunur.

(iii) (i) deki eşitlikten,

$$\begin{aligned}\langle p_1(q_1+q_2), p_2(q_1+q_2)\rangle &= N_{(q_1+q_2)}\langle p_1, p_2\rangle\\ \langle p_1q_1, p_2q_2\rangle + \langle p_1q_2, p_2q_1\rangle &= N_{(q_1+q_2)}\langle p_1, p_2\rangle - \langle p_1q_1, p_2q_1\rangle - \langle p_1q_2, p_2q_2\rangle\\ \langle p_1q_1, p_2q_2\rangle + \langle p_1q_2, p_2q_1\rangle &= \left(N_{(q_1+q_2)} - N_{q_1} - N_{q_2}\right)\langle p_1, p_2\rangle\\ \langle p_1q_1, p_2q_2\rangle + \langle p_1q_2, p_2q_1\rangle &= -2\langle p_1, p_2\rangle\langle q_1, q_2\rangle\end{aligned}$$

dir.

(iv) (iii) eşitliğinde p_1 yerine $\overrightarrow{V}_{p_1}$, p_2 yerine e alalım. Burada e bölünmüş kuaterniyonların çarpma işleminin birim elemanıdır.

$$\left\langle \left(\overrightarrow{V}_{p_1}\right) q_1, q_2 \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{V}_{p_1} q_2, q_1 \right\rangle = 0$$

dır. S_{p_1} skalar olduğundan,

$$\langle S_{p_1} q_1, q_2 \rangle - \langle S_{p_1} q_2, q_1 \rangle = 0$$

yazabiliriz. Bu son iki eşitlikten,

$$\left\langle \left(S_{p_1} + \overrightarrow{V}_{p_1}\right) q_1, q_2 \right\rangle - \left\langle \left(S_{p_1} - \overrightarrow{V}_{p_1}\right) q_2, q_1 \right\rangle = 0$$

$$\langle p_1 q_1, q_2 \rangle = \langle q_1, \overline{p}_1 q_2 \rangle$$

elde edilir.

(v) (iv) dekine benzer şekilde, q_1 yerine $\overrightarrow{V}_{q_1}$, q_2 yerine e alırsak,

$$\langle p_1 q_1, q_2 \rangle = \langle p_1, q_2 \overline{q_1} \rangle$$

bulunur.

3.3. Birim Bölünmüş Kuaterniyonların Lie Grubu ve Lie Cebiri

$G = \{q \in H' : N_q = 1\}$ cümlesini ele alalım.

Teorem 3.3.1. G cümlesi Lie grubudur.

İspat.

(*i*) G cümlesi bölünmüş kuaterniyonların çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu grubun birim elemanı $e = 1$ dir.

(*ii*) G, $\mathbb{E}_2^4$ de 3-boyutlu bir manifold dur. f fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{E}_2^4 \to \mathbb{R} \\ & q \to f(q) = \langle q, q \rangle = \ -a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{aligned}$$

olarak tanımlansın ve $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, $\mathbb{E}_2^4$ uzayının koordinat sistemi olsun. f fonksiyonu koordinat fonksiyonları cinsinden $f = -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ olarak yazılabilir. f fonksiyonu diferensiyellebilir dir ve f nin jakobiyan matrisi

$$J(f) = [-2x_0 \quad -2x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3]$$

dir. $J(f)$ matrisinin rankı 1 dir. $f^{-1}\{-1\} = G$ dir. -1 değeri f nin bir regüler değeri olduğundan G, $\mathbb{E}_2^4$ de 3 boyutlu bir manifold olur.

(*iii*)

$$\begin{aligned} \mu_1 :\ & \mathbb{E}_2^4 \times \mathbb{E}_2^4 \to \mathbb{E}_2^4 \\ & (q, p) \to \mu_1(q, p) = \ qp \end{aligned}$$

dönüşümü diferensiyellebilir olduğundan G ye indirgenmişi de diferensiyellebilir olur.

[illegible] $\xi : G \to G$, $\xi(q) = q^{-1} = \bar{q}$

fonksiyonu da diferensiyellebilirdir. Dolayısıyla G bir Lie grubudur. G ye zamansı birim bölünmüş kuaterniyonların çarpımsal grubu denir. G nin Lie cebirini bulmak için $T_G(e)$ yi bulmak yeterlidir.

Teorem 3.3.2. G nin Lie cebiri H' nün imajiner kısmına eşittir.

İspat.

$v_e \in T_G(e)$ olsun. G içinde v_e yi hız vektörü kabul eden bir α eğrisi alalım. Yani $\alpha(0) = 1$ ve $\alpha'(0) = v_e$ olacak biçimde G içinde en az bir

$$\alpha : I \to G, \alpha(s) = a_0(s) + a_1(s)\overrightarrow{e_1} + a_2(s)\overrightarrow{e_2} + a_3(s)\overrightarrow{e_3}$$

eğrisi vardır. $\alpha(s) \in G$ olduğundan,

$$a_0^2(s) + a_1^2(s) - a_2^2(s) - a_3^2(s) = 1$$

dir. Bu eşitliğin $s = 0$ noktasında türevi alınırsa,

$$a_0'(0)a_0(0) + a_1'(0)a_1(0) - a_2'(0)a_2(0) - a_3'(0)a_3(0) = 0$$

eşitliği elde edilir. $a_0(0) = 1, a_1(0) = 0, a_2(0) = 0, a_3(0) = 0$ olduğundan $a_0'(0) = 0$ olur. $T_G(e)$, e noktasından geçen eğrilerin hız vektörlerinin kümesidir. $T_G(e)$ deki her vektörü, $\mathbf{E}_2^4$ nin e noktasındaki teğet uzayının $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_e, \frac{\partial}{\partial x_2}|_e, \frac{\partial}{\partial x_3}|_e\}$ bazındaki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazabiliriz. Buna göre $\alpha'(0)$ hız vektörü

$$a_0'(0) = a_0'(0)\frac{\partial}{\partial x_0}\mid_e + a_1(0)\frac{\partial}{\partial x_1}\mid_e + a_2(0)\frac{\partial}{\partial x_2}\mid_e + a_3(0)\frac{\partial}{\partial x_3}\mid_e$$

biçimindedir. $a_0'(0) = 0$ olduğundan $T_G(e) \subset Sp\{\frac{\partial}{\partial x_1}\mid_e, \frac{\partial}{\partial x_2}\mid_e, \frac{\partial}{\partial x_3}\mid_e\}$ dir. $boyG = boyT_G(e) = 3$ olduğundan $T_G(e) = Sp\{\frac{\partial}{\partial x_1}\mid_e, \frac{\partial}{\partial x_2}\mid_e, \frac{\partial}{\partial x_3}\mid_e\}$ bulunur. Öyleyse G nin Lie cebiri H' nün imajiner kısmıdır:

$$T_G(e) = \operatorname{Im} H' = \{a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}. \qquad (3.3.1)$$

$T_G(e)$, $\mathbb{E}_1^3 = \{q = (a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},\ g(q,q) = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\}$ deki çatının e noktasına taşınmış halidir. $\chi_l G$ Lie cebiri $\mathbb{E}_1^3$ ile özdeşlenebilir.

Teorem 3.3.3. $q \in G$ için Ad_q dönüşümüne karşılık gelen yarı ortogonal matris

$$Ad_q = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & 2(a_0a_3 - a_1a_2) & -2(a_0a_2 + a_1a_3) \\ 2(a_0a_3 + a_1a_2) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & -2(a_0a_1 + a_2a_3) \\ 2(-a_0a_2 + a_1a_3) & 2(a_0a_1 - a_2a_3) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \end{bmatrix} \qquad (3.3.2)$$

dir.

İspat. $q \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned} C_q :\ & G \to G \\ & p \to C_q(p) = qpq^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. C_q bir diffeomorfizim olup onun diferensiyeli lineer izomorfizimdir ve Ad_q ile gösterilir. O halde

$$
\begin{aligned}
Ad_q = (dC_q)_e : \ T_G(e) &\rightarrow \ T_G(e) \\
v_e &\rightarrow \ Ad_q(v_e) = (dC_q)_e(v_e)
\end{aligned}
$$

dir. Teorem 3.3. 2 nin ispatından G içinde $v_e = \alpha'(0)$ ve $\alpha'(0) = 1$ olacak biçimde en az bir α eğrisi vardır ve $v_e = \alpha'(0) = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$ formundadır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
Ad_q(v_e) &= (dC_q)_e\left(\alpha'(0)\right) \\
&= (dC_q)_e\left((d\alpha)\left(\frac{d}{ds}|_0\right)\right) \\
&= \left((dC_q)_e o\,(d\alpha)|_0\right)\left(\frac{d}{ds}|_0\right) \\
&= d\left(C_q o \alpha\right)|_0\left(\frac{d}{ds}|_0\right) \\
&= d\left(q\alpha q^{-1}\right)|_0\left(\frac{d}{ds}|_0\right) \\
&= q\,(d\alpha)|_0\left(\frac{d}{ds}|_0\right)q^{-1} \\
&= q\alpha'(0)\,q^{-1}
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla Ad_q lineer izomorfizimine karşılık gelen yarı ortogonal matris $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ bazına göre

$$Ad_q(\overrightarrow{e_1}) = qiq^{-1} = \begin{array}{l}(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)\overrightarrow{e_1}+2(a_0a_3+a_1a_2)\overrightarrow{e_2}\\ +2(a_1a_3-a_0a_2)\overrightarrow{e_3}\end{array}$$

$$Ad_q(\overrightarrow{e_2}) = qjq^{-1} = \begin{array}{l}2(a_0a_3-a_1a_2)\overrightarrow{e_1}+(a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2)\overrightarrow{e_2}\\ +2(a_0a_1-a_2a_3)\overrightarrow{e_3}\end{array}$$

$$Ad_q(\overrightarrow{e_3}) = qkq^{-1} = \begin{array}{l}-2(a_0a_2+a_1a_3)\overrightarrow{e_1}-2(a_0a_1+a_2a_3)\overrightarrow{e_2}\\ +(a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2)\overrightarrow{e_3}\end{array}$$

eşitliklerinden,

$$Ad_q = \begin{bmatrix} a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2 & 2(a_0a_3-a_1a_2) & -2(a_0a_2+a_1a_3) \\ 2(a_0a_3+a_1a_2) & a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2 & -2(a_0a_1+a_2a_3) \\ 2(-a_0a_2+a_1a_3) & 2(a_0a_1-a_2a_3) & a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.3.3}$$

olarak elde edilir. $Ad_q \in SO(3,1)$ dir. Gerçekten

$$Ad_q\varepsilon = \begin{bmatrix} a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2 & 2\,(a_0a_3-a_1a_2) & -2\,(a_0a_2+a_1a_3) \\ 2\,(a_0a_3+a_1a_2) & a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2 & -2\,(a_0a_1+a_2a_3) \\ 2\,(-a_0a_2+a_1a_3) & 2\,(a_0a_1-a_2a_3) & a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2 & 2a_0a_3-2a_1a_2 & -2a_0a_2-2a_1a_3 \\ -2a_0a_3-2a_1a_2 & a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2 & -2a_0a_1-2a_2a_3 \\ 2a_0a_2-2a_1a_3 & 2a_0a_1-2a_2a_3 & a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathcal{A}d_q^T\varepsilon = \begin{bmatrix} a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2 & 2a_0a_3+2a_1a_2 & -2a_0a_2+2a_1a_3 \\ 2a_0a_3-2a_1a_2 & a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2 & 2a_0a_1-2a_2a_3 \\ -2a_0a_2-2a_1a_3 & -2a_0a_1-2a_2a_3 & a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2 & 2a_0a_3+2a_1a_2 & -2a_0a_2+2a_1a_3 \\ -2a_0a_3+2a_1a_2 & a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2 & 2a_0a_1-2a_2a_3 \\ 2a_0a_2+2a_1a_3 & -2a_0a_1-2a_2a_3 & a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2 \end{bmatrix}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathcal{A}d_q\varepsilon\left(\mathcal{A}d_q\right)^T\varepsilon &= \begin{bmatrix} (a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2)^2 \end{bmatrix} \\ &= \left(N_q\right)^2 I_3 \\ &= I_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{A}d_q\right)^T\varepsilon\mathcal{A}d_q\varepsilon &= \begin{bmatrix} (a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2)^2 \end{bmatrix} \\ &= \left(N_q\right)^2 I_3 \\ &= I_3 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\det(Ad_q) &= 3a_0^4a_1^2 + 3a_0^2a_1^4 + 3a_0^2a_2^4 + 3a_0^2a_3^4 + 3a_1^2a_2^4 + 3a_1^2a_3^4 \\
&-3a_2^2a_0^4 - 3a_2^2a_1^4 - 3a_2^4a_3^2 - 3a_2^2a_3^4 - 3a_3^2a_0^4 - 3a_3^2a_1^4 \\
&+a_0^6 + a_1^6 - a_2^6 - a_3^6 + 6a_0^2a_2^2a_3^2 + 6a_1^2a_2^2a_3^2 - 6a_2^2a_0^2a_1^2 - 6a_3^2a_0^2a_1^2 \\
&= (a_0^2 + a_1^2 - a_3^2 - a_2^2)^3 = 1
\end{aligned}
$$

bulunur.

3.4. Birim Bölünmüş Kuaterniyonların Özel Yarı Ortogonal Matris Gösterimi

(a) $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \in G$ ve $g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}) = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ olsun. $N_q = 1$ ve $\overrightarrow{V_q}$ uzaysı bir vektör olduğundan q yu

$$
\begin{aligned}
q &= a_0 + \sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \\
&= \cosh\tfrac{\varphi}{2} + \sinh\tfrac{\varphi}{2}C
\end{aligned}
\tag{3.4.1}
$$

yazabiliriz. Burada

$$
\begin{aligned}
&\cosh\frac{\varphi}{2} = a_0,\ \sinh\frac{\varphi}{2} = \sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\
&c_1 = \frac{a_1}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},\ c_2 = \frac{a_2}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},\ c_3 = \frac{a_3}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \\
&C = c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} + c_3\overrightarrow{e_3} \\
&g(C, C) = C^2 = 1
\end{aligned}
\tag{3.4.2}
$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
Ad_q(C) &= qCq^{-1} && (3.4.3)\\
&= \left(\cosh\frac{\varphi}{2}+\sinh\frac{\varphi}{2}C\right)C\left(\cosh\frac{\varphi}{2}-\sinh\frac{\varphi}{2}C\right)\\
&= \left(\sinh\frac{\varphi}{2}+\cosh\frac{\varphi}{2}C\right)\left(\cosh\frac{\varphi}{2}-\sinh\frac{\varphi}{2}C\right)\\
&= \left(\sinh\frac{\varphi}{2}\cosh\frac{\varphi}{2}-\sinh\frac{\varphi}{2}\cosh\frac{\varphi}{2}\right)+\left(\cosh^2\frac{\varphi}{2}-\sinh^2\frac{\varphi}{2}\right)C\\
&= C
\end{aligned}$$

dir. D ve E, $CD=-DC=E$, $DE=-ED=C$, $EC=-CE=-D$, $D^2=-1$, $E^2=1$ olacak şekilde iki bölünmüş vektör olsun. Böylece C , D ve E bölünmüş vektörleriyle ortonormal bir baz elde etmiş oluruz. Şimdi Ad_q dönüşümü altında D ve E bölünmüş vektörlerinin görüntülerini bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
Ad_q(D) &= qDq^{-1} && (3.4.4)\\
&= \left(\cosh\frac{\varphi}{2}+\sinh\frac{\varphi}{2}C\right)D\left(\cosh\frac{\varphi}{2}-\sinh\frac{\varphi}{2}C\right)\\
&= \left(\sinh\frac{\varphi}{2}E+\cosh\frac{\varphi}{2}D\right)\left(\cosh\frac{\varphi}{2}-\sinh\frac{\varphi}{2}C\right)\\
&= \left(\cosh^2\frac{\varphi}{2}+\sinh^2\frac{\varphi}{2}\right)D+\left(\sinh\frac{\varphi}{2}\cosh\frac{\varphi}{2}+\sinh\frac{\varphi}{2}\cosh\frac{\varphi}{2}\right)E\\
&= \cosh\varphi D+\sinh\varphi E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ad_q(E) &= qEq^{-1} && (3.4.5)\\
&= \left(\cosh\frac{\varphi}{2}+\sinh\frac{\varphi}{2}C\right)E\left(\cosh\frac{\varphi}{2}-\sinh\frac{\varphi}{2}C\right)\\
&= \left(\sinh\frac{\varphi}{2}D+\cosh\frac{\varphi}{2}E\right)\left(\cosh\frac{\varphi}{2}-\sinh\frac{\varphi}{2}C\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\cosh^2\frac{\varphi}{2}+\sinh^2\frac{\varphi}{2}\right)D+\left(\sinh\frac{\varphi}{2}\cosh\frac{\varphi}{2}+\sinh\frac{\varphi}{2}\cosh\frac{\varphi}{2}\right)E \\
&= \sinh\varphi D+\cosh\varphi E.
\end{aligned}
$$

Böylece, $q=\cosh\frac{\varphi}{2}+\sinh\frac{\varphi}{2}C$ birim bölünmüş kuaterniyonu ile ifade edilen Ad_q dönüşümü φ açısı kadar C uzaysı bölünmüş vektörü tarafından belirtilen eksen etrafında dönmedir. Bununla birlikte,

$$
\begin{aligned}
(Ad_qC)(Ad_qD) &= -(Ad_qD)(Ad_qC)=Ad_qE, \\
(Ad_qD)(Ad_qE) &= -(Ad_qE)(Ad_qD)=Ad_qC, \\
(Ad_qE)(Ad_qC) &= -(Ad_qC)(Ad_qE)=-Ad_qD, \\
(Ad_qC)^2 &= 1,\ (Ad_qD)^2=-1,\ (Ad_qE)^2=1
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlandığından Ad_q dönüşümü $\{C,D,E\}$ sistemini $\{Ad_qC,Ad_qD,Ad_qE\}$ sistemine dönüştürür. Bu bağıntılar, verilen bir açı kadar, verilen eksen etrafında dönme matrisinin elemanlarını elde edebileceğimiz Ad_q ları üretir. Ad_q matrisinde (3.4.2) eşitliğini kullanılırsak,

$$
\begin{aligned}
a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 + (-1+\cosh\varphi)\,(c_2^2+c_3^2) \\
a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 &= 1 + (-1+\cosh\varphi)\,(-c_1^2+c_3^2) \\
a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 &= 1 + (-1+\cosh\varphi)\,(-c_1^2+c_2^2) \\
2(a_0a_3 + a_1a_2) &= \sinh c_3 + (-1+\cosh\varphi)\,c_1c_2 \\
2(a_0a_3 - a_1a_2) &= \sinh c_3 - (-1+\cosh\varphi)\,c_1c_2 \\
2(-a_0a_2 + a_1a_3) &= -\sinh c_2 + (-1+\cosh\varphi)\,c_1c_3 \\
-2(a_0a_2 + a_1a_3) &= -\sinh c_2 - (-1+\cosh\varphi)\,c_1c_3 \\
2(a_0a_1 - a_2a_3) &= \sinh c_1 - (-1+\cosh\varphi)\,c_2c_3 \\
-2(a_0a_1 + a_2a_3) &= -\sinh c_1 - (-1+\cosh\varphi)\,c_2c_3
\end{aligned}
\tag{3.4.6}
$$

bulunur. Burada hiperbolik fonksiyonların, $\cosh^2\frac{\varphi}{2} - \sinh^2\frac{\varphi}{2} = 1$, $\cosh^2\frac{\varphi}{2} + \sinh^2\frac{\varphi}{2} = \cosh\varphi$, $\cosh^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cosh\varphi}{2}$, $\sinh^2\frac{\varphi}{2} = \frac{-1+\cosh\varphi}{2}$ ve $\sinh 2\varphi = 2\sinh\varphi\cosh\varphi$ eşitlikleri kullanıldı. O halde

$$
Ad_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sinh\varphi \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+ (-1+\cosh\varphi) \begin{bmatrix} c_2^2+c_3^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3 \\ c_1c_2 & -c_1^2+c_3^2 & -c_2c_3 \\ c_1c_3 & -c_2c_3 & -c_1^2+c_2^2 \end{bmatrix}
$$

$$
Ad_q = I + \sinh\varphi\mathbf{C} + (-1+\cosh\varphi)\,\mathbf{C}^2 \tag{3.4.7}
$$

$$Ad_q = I + \sinh\varphi\mathbb{C} + 2\sinh^2\frac{\varphi}{2}\mathbb{C}^2$$

$$Ad_q = I + \sinh\varphi\mathbb{C} + 2\left(\sinh\frac{\varphi}{2}\mathbb{C}\right)^2$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}, \ \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.8}$$

olmak üzere

$$\mathbb{C}^T = -\varepsilon\mathbb{C}\varepsilon$$

dir. Yani $\mathbb{C}$ matrisi Minkowski 3-uzayında antisimetrik bir matristir. Ayrıca $\mathbb{C}^{2n-1} = \mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^2$ dir. Ad_q dönüşümü altında bir x bölünmüş vektörünün görüntüsü vektörel formda,

$$\begin{aligned} Ad_q x &= x + \sinh\varphi\,(C \wedge x) + (-1 + \cosh\varphi)\,(C \wedge (C \wedge x)) \\ &= x + \sinh\varphi\,(C \wedge x) + (-1 + \cosh\varphi)\,(-g(C,x)\,C + g(C,C)x) \\ &= (\cosh\varphi)\,x + \sinh\varphi\,(C \wedge x) + (1 - \cosh\varphi)\,g(C,x)C \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\mathbb{C}$ antisimetrik matrisine Minkowski 3- uzayında karşılık gelen bölünmüş vektör C dir.

Örnek.

(*i*) $C = (0,0,1)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (1,0,0)$ zamansı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

$$Ad_q\,(1,0,0) = (\cosh\varphi, \sinh\varphi, 0)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.1 den görülebilir.

(*ii*) $C = (0,0,1)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (-1,0,0)$ zamansı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

$$Ad_q\,(-1,0,0) = (-\cosh\varphi, -\sinh\varphi, 0)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.1 den görülebilir.

(*iii*) $C = (0,0,1)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (0,1,0)$ uzaysı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

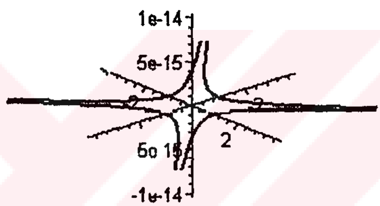
$$Ad_q\,(0,0,1) = (\sinh\varphi, \cosh\varphi, 0)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.1 den görülebilir.

(*iv*) $C = (0,0,1)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (0,-1,0)$ uzaysı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

$$Ad_q(1,0,0) = (-\sinh\varphi, -\cosh\varphi, 0)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.1 den görülebilir.

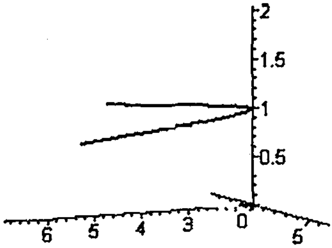


Şekil 3.1. $C = (0,0,1)$ uzaysı ekseni etrafında, $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$ vektörlerinin φ hiperbolik açısı kadar dönmesi.

(v) $C = (0,0,1)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (2,1,1)$ zamansı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

$$Ad_q(2,1,1) = (2\cosh\varphi + \sinh\varphi, \cosh\varphi + 2\sinh\varphi, 1)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.2 den görülebilir.

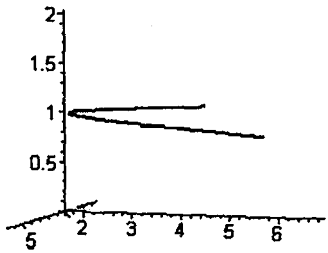


Şekil 3.2. $C = (0,0,1)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (2,1,1)$ zamansı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi.

(vi) $C = (0,0,1)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (1,2,1)$ uzaysı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

$$Ad_q\,(1,2,1) = (\cosh\varphi + 2\sinh\varphi, 2\cosh\varphi + \sinh\varphi, 1)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.3 den görülebilir.



Şekil 3.3. $C = (0, 0, 1)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (1, 2, 1)$ uzaysı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi.

(vii) $C = (0, 1, 0)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (1, 0, 0)$ zamansı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

$$Ad_q\,(1, 0, 0) = (\cosh\varphi, 0, -\sinh\varphi)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.4 den görülebilir.

$(viii)$ $C = (0, 1, 0)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (-1, 0, 0)$ zamansı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

$$Ad_q\,(-1, 0, 0) = (-\cosh\varphi, 0, \sinh\varphi) \quad .$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.4 den görülebilir.

(ix) $C = (0,1,0)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (0,0,1)$ uzaysı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

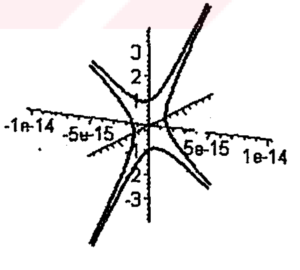
$$Ad_q\,(0,0,1) = (-\sinh\varphi, 0, \cosh\varphi)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.4 den görülebilir.

(x) $C = (0,1,0)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (0,0,-1)$ uzaysı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

$$Ad_q\,(0,0,-1) = (\sinh\varphi, 0, -\cosh\varphi)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.4 den görülebilir.

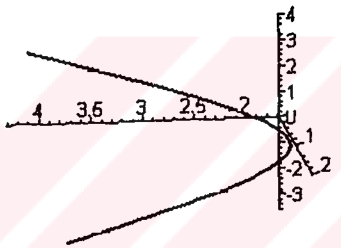


Şekil 3.4. $C = (0,1,0)$ uzaysı ekseni etrafında,$(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ vektörlerinin φ hiperbolik açısı kadar dönmesi.

(xi) $C = (0,1,0)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (2,1,1)$ zamansı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

$$Ad_q\,(2,1,1) = (2\cosh\varphi - \sinh\varphi, 1, \cosh\varphi - 2\sinh\varphi)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.5 den görülebilir.

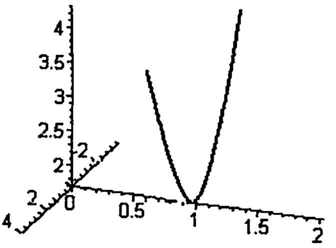


Şekil 3.5. $C = (0,1,0)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (2,1,1)$ zamansı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi.

(xii) $C = (0,1,0)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (1,1,2)$ uzaysı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi, (3.4.9) eşitliğinden,

$$Ad_q\,(1,1,2) = (\cosh\varphi - 2\sinh\varphi, 1, 2\cosh\varphi - \sinh\varphi)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.6 dan görülebilir.



Şekil 3.6. $C = (0,1,0)$ uzaysı ekseni etrafında, $x = (1,1,2)$ uzaysı vektörünün φ hiperbolik açısı kadar dönmesi.

(*b*) $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \in G$ ve $g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}) = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 0$ olsun. $N_q = 1$ ve $\overrightarrow{V_q}$ zamansı bir vektör olduğundan q yu

$$\begin{aligned} q &= a_0 + \sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}\,\frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} \\ &= \cos\tfrac{\varphi}{2} + \sin\tfrac{\varphi}{2} C \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} &\cos\frac{\varphi}{2} = a_0,\ \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2} \\ &c_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}},\ c_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}},\ c_3 = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} \\ &C = c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} + c_3\overrightarrow{e_3} \\ &g(C,C) = C^2 = -1 \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
Ad_q(C) &= qCq^{-1} \\
&= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}C\right) C \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}C\right) \\
&= \left(-\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}C\right) \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}C\right) \\
&= \left(\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) + \left(\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) C \\
&= C
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

dir. D ve E, $CD = -DC = E$, $DE = -ED = -C$, $EC = -CE = D$, $D^2 = 1$, $E^2 = 1$ olacak şekilde iki bölünmüş vektör olsun. Böylece C , D ve E bölünmüş vektörleriyle ortonormal bir baz elde etmiş oluruz. Şimdi Ad_q dönüşümü altında D ve E bölünmüş vektörlerinin görüntülerini bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
Ad_q(D) &= qDq^{-1} \\
&= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}C\right) D \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}C\right) \\
&= \left(\sin\frac{\varphi}{2}E + \cos\frac{\varphi}{2}D\right) \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}C\right) \\
&= \left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) D + \left(\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) E \\
&= \cos\varphi D + \sin\varphi E
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

$$\begin{aligned}
Ad_q(E) &= qEq^{-1} \\
&= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}C\right) E \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}C\right) \\
&= \left(-\sin\frac{\varphi}{2}D + \cos\frac{\varphi}{2}E\right) \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}C\right)
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)E-\left(\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)E \\
&= -\sin\varphi D+\cos\varphi E.
\end{aligned}$$

Böylece, $q = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}C$ birim bölünmüş kuaterniyonu ile ifade edilen Ad_q dönüşümü φ açısı kadar C zamansı bölünmüş vektörü tarafından belirtilen eksen etrafında dönmedir. Bununla birlikte,

$$\begin{aligned}
(Ad_qC)(Ad_qD) &= -(Ad_qD)(Ad_qC) = Ad_qE \\
(Ad_q D)(Ad_qE) &= -(Ad_qE)(Ad_qD) = -Ad_qC \\
(Ad_qE)(Ad_qC) &= -(Ad_qC)(Ad_qE) = Ad_qD \\
(Ad_qC)^2 &= -1, (Ad_qD)^2 = 1, (Ad_qE)^2 = 1
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından Ad_q dönüşümü $\{C, D, E\}$ sistemini $\{Ad_qC, Ad_qD, Ad_qE\}$ sistemine dönüştürür. Üstelik $Ad : q \to Ad_q$ dönüşümü birebir değildir: q ve $-q$ bölünmüş kuaterniyonlarına aynı dönme karşılık gelir. Bu bağıntılar, verilen bir açı kadar, verilen eksen etrafında dönme matrisinin elemanlarını elde edebileceğimiz Ad_q ları üretir. Ad_q matrisinde (3.4.11) eşitliğini kullanılırsak,

$$Ad_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\varphi \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+(1-\cos\varphi)\begin{bmatrix} c_2^2+c_3^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3 \\ c_1c_2 & -c_1^2+c_3^2 & -c_2c_3 \\ c_1c_3 & -c_2c_3 & -c_1^2+c_2^2 \end{bmatrix}$$

$$Ad_q = I + \sin\varphi \mathbb{C} + (1-\cos\varphi)\,\mathbb{C}^2 \tag{3.4.15}$$

$$Ad_q = I + \sin\varphi \mathbb{C} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\mathbb{C}^2$$

$$Ad_q = I + \sin\varphi \mathbb{C} + 2\left(\sin\frac{\varphi}{2}\mathbb{C}\right)^2$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada $\mathbb{C}^{2n-1} = (-1)^{n+1}\mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}^{2n} = (-1)^{n+1}\mathbb{C}^2$ dir. Ad_q dönüşümü altında bir x bölünmüş vektörünün görüntüsü vektörel form da,

$$\begin{aligned} Ad_q x &= x + \sin\varphi\,(C\wedge x) + (1-\cos\varphi)\,(C\wedge(C\wedge x)) \\ &= x + \sin\varphi\,(C\wedge x) + (1-\cos\varphi)\,(-g(C,x)\,C + g(C,C)x) \\ &= (\cos\varphi)\,x + \sin\varphi\,(C\wedge x) - (1-\cos\varphi)\,g(C,x)C \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

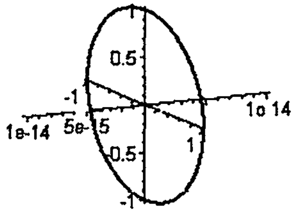
şeklinde elde edilir. Burada $\mathbb{C}$ antisimetrik matrisine Minkowski 3- uzayında karşılık gelen bölünmüş vektör C dir.

Örnek.

(i) $C = (1,0,0)$ zamansı ekseni etrafında, $x = (0,1,0)$ uzaysı vektörünün φ açısı kadar dönmesi, (3.4.16) eşitliğinden,

$$Ad_q\,(0,1,0) = (0,\cos\varphi,\sin\varphi)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.7 den görülebilir.

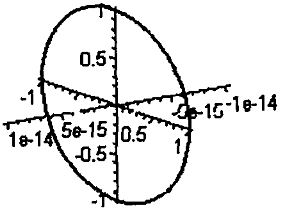


Şekil 3.7. $C = (1, 0, 0)$ zamansı ekseni etrafında, $x = (0, 1, 0)$ uzaysı vektörünün φ açısı kadar dönmesi.

(*ii*) $C = (1, 0, 0)$ zamansı ekseni etrafında, $x = (0, 0, 1)$ uzaysı vektörünün φ açısı kadar dönmesi, (3.4.16) eşitliğinden,

$$Ad_q\,(0, 0, 1) = (0, \sin\varphi, \cos\varphi)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.8 den görülebilir.

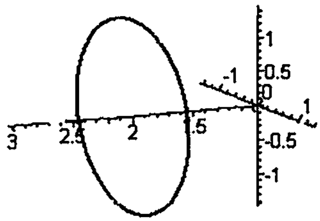


Şekil 3.8. $C = (1,0,0)$ zamansı ekseni etrafında, $x = (0,0,1)$ uzaysı vektörünün φ açısı kadar dönmesi.

(iii) $C = (1,0,0)$ zamansı ekseni etrafında, $x = (2,1,1)$ zamansı vektörünün φ açısı kadar dönmesi, (3.4.16) eşitliğinden,

$$Ad_q(2,1,1) = (2, \cos\varphi - \sin\varphi, \cos\varphi + \sin\varphi)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.9 dan görülebilir.

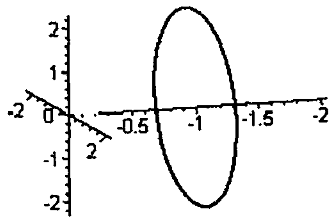


Şekil 3.9. $C = (1,0,0)$ zamansı ekseni etrafında, $x = (2,1,1)$ zamansı vektörünün φ açısı kadar dönmesi.

(iv) $C = (1,0,0)$ zamansı ekseni etrafında, $x = (-1,-1,-2)$ uzaysı vektörünün φ açısı kadar dönmesi, (3.4.16) eşitliğinden,

$$Ad_q(-1,-1,-2) = (-1, -\cos\varphi + 2\sin\varphi, -2\cos\varphi - \sin\varphi)$$

olarak ifade edilebilir. Bu şekil 3.10 dan görülebilir.



Şekil 3.10. $C = (1,0,0)$ zamansı ekseni etrafında, $x = (-1,-1,-2)$ uzaysı vektörünün φ açısı kadar dönmesi.

(3.4.7) ve (3.4.15) denklemlerinden, x ekseni etrafında, sonra y ekseni ve daha sonra z ekseni etrafında, sırası ile, α, β, γ açılı dönmeler

$$\mathcal{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(\beta) = \begin{bmatrix} \cosh\beta & 0 & -\sinh\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\beta & 0 & \cosh\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cosh\gamma & \sinh\gamma & 0 \\ \sinh\gamma & \cosh\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Ohalde

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{A}(\alpha)\,\mathcal{A}(\beta)\,\mathcal{A}(\gamma)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cosh\beta\cosh\gamma & \cosh\beta\sinh\gamma & -\sinh\beta \\ \sin\alpha\sinh\beta\cosh\gamma + \cos\alpha\sinh\gamma & \sin\alpha\sinh\beta\sinh\gamma + \cos\alpha\cosh\gamma & -\sin\alpha\cosh\beta \\ -\cos\alpha\sinh\beta\cosh\gamma + \sin\alpha\sinh\gamma & -\cos\alpha\sinh\beta\sinh\gamma + \sin\alpha\cosh\gamma & \cos\alpha\cosh\beta \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $\mathcal{A}$ Minkowski 3 uzayında matrisi $O\,(0,0,0)$ noktasını sabit bırakan dönme hareketidir.

4. DUAL BÖLÜNMÜŞ (SPLİT) KUATERNİYONLAR VE HAMİLTON MATRİSLERİ

Bu bölümde, dual bölünmüş kuaterniyonlar ve dual bölünmüş kuaterniyonlara karşılık gelen Hamilton matrislerinin özelikleri incelenmiş ve (Yaylı 1988, Yaylı 1992, Yaylı 1997) tarafından yapılan çalışmalar temel alınmıştır.

4.1. Dual Bölünmüş Kuaterniyonlar

Bir A dual sayısı $A = a + \epsilon a^*$ ifade edilir. Burada a ve a^* reel sayılar ve ϵ bir reel sayı olmayıp

$$\epsilon \neq 0, \quad 0\epsilon = \epsilon 0 = 0, \quad 1\epsilon = \epsilon 1 = \epsilon, \quad \epsilon^2 = 0 \tag{4.1.1}$$

kurallarıyla belli olan bir sayıdır. Dual sayılar cümlesi bir halkadır. Dual sayılar halkası $\mathbb{D}$ ile gösterilecektir.

$$H'_{\mathbb{D}} = \quad \{Q = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} \;/\; A_0, A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{D}\} \tag{4.1.2}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ birimlerinin çarpımı aşağıdaki tabloda verilmiştir:

	1	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
1	1	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_1}$	-1	$\overrightarrow{e_3}$	$-\overrightarrow{e_2}$
$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_3}$	1	$-\overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_1}$	1

H'_D nin her bir elemanına bir dual bölünmüş kuaterniyon adı verilir. A_0, A_1, A_2, A_3 dual sayılarına $\mathbf{Q}$ bölünmüş kuaterniyonunun bileşenleri denir. Dolayısıyla bir

$$\mathbf{Q} = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$$

dual bölünmüş kuaterniyonu, $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ ve $q^* = a_0^* + a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyon olmak üzere

$$\mathbf{Q} = q + \epsilon q^* = (a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}) + \epsilon\,(a_0^* + a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3}) \quad (4.1.3)$$

olarak verilebilir. Burada q ve q^*, sırasıyla, $\mathbf{Q}$ nun reel ve dual bölünmüş kuaterniyon bileşenleridir. $1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ ile ϵ değişmelidir. $\mathbf{Q}$ dual bölünmüş kuaterniyonu $S_{\mathbf{Q}}$ ile gösterilen dual kısım ve $\overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}}$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısıma ayrılır:

$$\mathbf{Q} = S_{\mathbf{Q}} + \overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}} \quad (4.1.4)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_{\mathbf{Q}} = A_0, \quad \overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}} = A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$$

dır.

$\mathbf{Q} = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$, $\mathbf{P} = B_0 + B_1\overrightarrow{e_1} + B_2\overrightarrow{e_2} + B_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonlarının toplamı

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}+\mathbf{P} &= (S_{\mathbf{Q}}+S_{\mathbf{P}})+(\overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}}+\overrightarrow{V_{\mathbf{P}}}) \\
&= (A_0+B_0)+(A_1+B_1)\,\overrightarrow{e_1}+(A_2+B_2)\,\overrightarrow{e_2}+(A_3+B_3)\,\overrightarrow{e_3}
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{Q}=a_0+a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere $\lambda\mathbf{Q}$ dış işlemi

$$
\lambda\mathbf{Q}=(\lambda A_0)+(\lambda A_1)\,\overrightarrow{e_1}+(\lambda A_2)\,\overrightarrow{e_2}+(\lambda A_3)\,\overrightarrow{e_3}
$$

şeklinde tanımlanır.

Bu iki işlemle birlikte $H'_{\mathbb{D}}$ cümlesi reel sayılar cismi üzerinde 8-boyutlu bir vektör uzayıdır. Ayrıca $H'_{\mathbb{D}}$, dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür.

Ayrıca $\mathbf{Q}=A_0+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}$, $\mathbf{P}=B_0+B_1\overrightarrow{e_1}+B_2\overrightarrow{e_2}+B_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonlarının çarpımı:

$$
\begin{aligned}
\times :\ & H'_{\mathbb{D}}\times H'_{\mathbb{D}} \rightarrow H'_{\mathbb{D}} \\
& (\mathbf{Q},\mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{Q}\times\mathbf{P} = \ \mathbf{QP}
\end{aligned}
$$

biçiminde bir işlem olup

$$
\begin{aligned}
\mathbf{QP} &= (A_0B_0-A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)+(A_0B_1+A_1B_0+A_3B_2-A_2B_3)\,\overrightarrow{e_1}\\
&+(A_0B_2+A_2B_0+A_3B_1-A_1B_3)\,\overrightarrow{e_2}+(A_0B_3+A_3B_0+A_1B_2-A_2B_1)\,\overrightarrow{e_3} \qquad (4.1.5)\\
&= qp+\epsilon\,(qp^{*}+p^{*}q)
\end{aligned}
$$

veya

$$
\mathbf{QP} = S_{\mathbf{Q}}S_{\mathbf{P}}+g\left(\overrightarrow{V}_{\mathbf{Q}},\overrightarrow{V}_{\mathbf{P}}\right)+S_{\mathbf{Q}}\overrightarrow{V}_{\mathbf{P}}+S_{\mathbf{P}}\overrightarrow{V}_{\mathbf{Q}}+\overrightarrow{V}_{\mathbf{Q}}\wedge\overrightarrow{V}_{\mathbf{P}} \qquad (4.1.6)
$$

olarak tanımlanır. Burada

$$
\begin{aligned}
g:\ & \operatorname{Im} H'_{\mathbb{D}}\times\operatorname{Im} H'_{\mathbb{D}}\to\mathbb{D}\\
& (\overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}},\overrightarrow{V_{\mathbf{P}}})\to g(\overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}},\overrightarrow{V_{\mathbf{P}}})= \ g(\overrightarrow{V_{\mathbf{P}}},\overrightarrow{V}_{\mathbf{Q}})=-A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3
\end{aligned}
\qquad (4.1.7)
$$

ve

$$
\wedge:\operatorname{Im} H'_{\mathbb{D}}\times\operatorname{Im} H'_{\mathbb{D}}\to\operatorname{Im} H'_{\mathbb{D}}
$$

$$
(\overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}},\overrightarrow{V_{\mathbf{P}}})\to\overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}}\wedge\overrightarrow{V_{\mathbf{P}}}=\begin{vmatrix}-\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} \qquad (4.1.8)
$$

$$
=(A_3B_2-A_2B_3)\overrightarrow{e_1}+(A_3B_1-A_1B_3)\overrightarrow{e_2}+(A_1B_2-A_2B_1)\overrightarrow{e_3}
$$

dır. $\operatorname{Im} H'_{\mathbb{D}}=\{A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}:A_1,A_2,A_3\in\mathbb{D}\}$ dir.

4.2. Dual Bölünmüş Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

a) Eşlenik:

$$\overline{(\,,)}:\; H'_{\mathbb{D}} \to H'_{\mathbb{D}}$$
$$\mathbf{Q} = S_{\mathbf{Q}} + \overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}} \to \overline{\mathbf{Q}} = S_{\mathbf{Q}} - \overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}}$$

biçiminde tanımlanır ve buna göre bir $\mathbf{Q} = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonu için, $\mathbf{Q}$ nun $\overline{\mathbf{Q}}$ eşleniği

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{Q}} &= A_0 - A_1\overrightarrow{e_1} - A_2\overrightarrow{e_2} - A_3\overrightarrow{e_3} \\ &= \overline{q} + \epsilon\overline{q}^*\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

olur. Eşlenik işlemi aşağıdaki özcliklere sahiptir:

(i) $\overline{a\mathbf{Q} + b\mathbf{P}} = a\overline{\mathbf{Q}} + b\overline{\mathbf{P}},\ \forall a, b \in \mathbb{D},\ \forall \mathbf{Q}, \mathbf{P} \in H'_{\mathbb{D}}$

(ii) $\overline{\mathbf{QP}} = \overline{\mathbf{P}}\,\overline{\mathbf{Q}},\ \forall \mathbf{Q}, \mathbf{P} \in H'_{\mathbb{D}}$

(iii) $\overline{\overline{\mathbf{Q}}} = \mathbf{Q},\ \forall \mathbf{Q} \in H'_{\mathbb{D}}$

b) Norm:

$$N:\; H'_{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$$
$$\mathbf{Q} \to N(\mathbf{Q}) = N_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}$$

biçiminde tanımlanan N işlemine $H'_{\mathbb{D}}$ üzerinde norm denir.

Bir $\mathbf{Q} = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonu için, $\mathbf{Q}$ nun $N_{\mathbf{Q}}$

normu

$$
\begin{aligned}
N_{\mathbf{Q}} &= A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 \\
&= \left(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right) + 2\epsilon\left(a_0 a_0^* + a_1 a_1^* - a_2 a_2^* - a_3 a_3^*\right) \\
&= q\overline{q} + \epsilon\left(q\overline{q}^* + q^*\overline{q}\right) \\
&= N_q - 2\epsilon\langle q, q^*\rangle = -\langle q, q\rangle - 2\epsilon\langle q, q^*\rangle
\end{aligned}
\tag{4.2.2}
$$

dual sayısıyla tanımlıdır. Norm işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir:

(i) $N_{\mathbf{QP}} = N_{\mathbf{Q}} N_{\mathbf{P}}$, $\forall \mathbf{Q}, \mathbf{P} \in H'_{\mathbb{D}}$

(ii) $N_{\lambda\mathbf{Q}} = \lambda^2 N_{\mathbf{Q}}$, $\forall \lambda \in \mathbb{D}$, $\forall \mathbf{Q} \in H'_{\mathbb{D}}$

c) **İnvers:**

$$
\begin{aligned}
(\ ,)^{-1} :\ & H'_{\mathbb{D}} \to H'_{\mathbb{D}} \\
& \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{Q}}}{N_{\mathbf{Q}}} \quad , (N_{\mathbf{Q}})^2 \neq 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanan işleme $H'_{\mathbb{D}}$ de invers işlemi denir. $(N_{\mathbf{Q}})^2 \neq 0$ olmak üzere bir $\mathbf{Q}$ dual bölünmüş kuaterniyonunun inversi

$$
\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{Q}}}{N_{\mathbf{Q}}} = \frac{A_0 - A_1\overrightarrow{e_1} - A_2\overrightarrow{e_2} - A_3\overrightarrow{e_3}}{A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2} = q^{-1} - \epsilon\left(q^{-1}q^*q^{-1}\right), \ N_q \neq 0 \tag{4.2.3}
$$

dır. İnvers işlemi aşağıdaki özeliklere sahiptir:

(i) $(\mathbf{QP})^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}$, $\forall \mathbf{Q}, \mathbf{P} \in H'_{\mathbb{D}}$ ve $(N_{\mathbf{Q}})^2 \neq 0$, $(N_{\mathbf{P}})^2 \neq 0$

(*ii*) $(\lambda\mathbf{Q})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{Q}^{-1}$, $(0 + s\epsilon) \neq \lambda \in \mathbb{D}$, $\forall\mathbf{Q} \in H'_{\mathbb{D}}$ ve $(N_{\mathbf{Q}})^2 \neq 0$.

d) Birim bölünmüş kuaterniyon:

$N_{\mathbf{Q}} = 1$ olan $\mathbf{Q}$ dual bölünmüş kuaterniyonuna birim bölünmüş kuaterniyon denir. $\mathbf{Q}$ birim dual bölünmüş kuaterniyonu için, q ve q^* ın skalar çarpımı sıfır olmalıdır.

e) İki dual bölünmüş vektörün vektörel çarpımı:

Skalar kısmı sıfır olan bölünmüş kuaterniyona bölünmüş vektör adı verilir. $\mathbf{Q} = \overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}} = A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$, $\mathbf{P} = \overrightarrow{V_{\mathbf{P}}} = B_1\overrightarrow{e_1} + B_2\overrightarrow{e_2} + B_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş vektörlerinin vektörel çarpımı,

$$\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{QP} - \mathbf{PQ}) \tag{4.2.4}$$

olarak bulunur.

f) Q ve P dual bölünmüş kuaterniyonlarının skalar çarpımı:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{Q}, \mathbf{P} \rangle &= \langle \mathbf{Q}, \mathbf{P} \rangle \\
&= -A_0B_0 - A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{P} + \overline{\mathbf{P}}\mathbf{Q}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{Q}\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{P}\overline{\mathbf{Q}}\right) \\
&= \langle q, p \rangle + \epsilon\left(\langle q, p^* \rangle + \langle q^*, p \rangle\right)
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

şeklindedir.

Bundan sonraki hesaplamalar matrisler kullanılarak yapılacaktır. Bir dual bölünmüş kuaterniyon dual sayı dörtlüsüdür, bu dörtlüyü aşağıdaki gibi bir sütun matrisi formunda yazabiliriz

$$\mathbf{Q} = [A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3]^T. \tag{4.2.6}$$

Böylece

$$\mathbf{Q} = q + \epsilon q^* \tag{4.2.7}$$

olarak gösterilir. Burada q ve q^*, 4×1 reel sütun vektörleridir.

4.3. Hamilton Operatörleri ve Özelikleri

Bu bölümde $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ Hamilton operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrisleri tanımlanacak ve özelikleri ifade edilecektir.

q bir bölünmüş kuaterniyon olsun.

$$\begin{aligned} \overset{+}{h}_q\colon \ & H' \to H' \\ & p \to f_q(p) = qp \end{aligned}$$

lineer dönüşümüne $\{1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ bazına göre karşılık gelen matris,

$$\begin{aligned} \overset{+}{h}_q(1) &= (a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3})\,1 = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \\ \overset{+}{h}_q(\overrightarrow{e_1}) &= (a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3})\,\overrightarrow{e_1} = -a_1 + a_0\overrightarrow{e_1} + a_3\overrightarrow{e_2} - a_2\overrightarrow{e_3} \\ \overset{+}{h}_q(\overrightarrow{e_2}) &= (a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3})\,\overrightarrow{e_2} = a_2 + a_3\overrightarrow{e_1} + a_0\overrightarrow{e_2} + a_1\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

$$\overset{+}{h}_q(\overrightarrow{e_3}) = (a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3})\,\overrightarrow{e_3} = a_3 - a_2\overrightarrow{e_1} - a_1\overrightarrow{e_2} + a_0\overrightarrow{e_3}$$

eşitliklerinden,

$$\overset{+}{H}(q) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

ve

$$\begin{aligned} \overset{-}{h}_q :\ & H' \to H' \\ & p \to h_q(p) = pq \end{aligned}$$

lineer dönüşümüne $\{1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ bazına göre karşılık gelen matris,

$$\begin{aligned}
\overset{-}{h}_q(1) &= 1\,(a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}) = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \\
\overset{-}{h}_q(\overrightarrow{e_1}) &= \overrightarrow{e_1}\,(a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}) = -a_1 + a_0\overrightarrow{e_1} - a_3\overrightarrow{e_2} + a_2\overrightarrow{e_3} \\
\overset{-}{h}_q(\overrightarrow{e_2}) &= \overrightarrow{e_2}\,(a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}) = a_2 - a_3\overrightarrow{e_1} + a_0\overrightarrow{e_2} - a_1\overrightarrow{e_3} \\
\overset{-}{h}_q(\overrightarrow{e_3}) &= \overrightarrow{e_3}\,(a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}) = a_3 + a_2\overrightarrow{e_1} + a_1\overrightarrow{e_2} + a_0\overrightarrow{e_3}
\end{aligned}$$

eşitliklerinden,

$$\bar{H}(q) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} \qquad (4.3.2)$$

olarak bulunur. Burada $\overset{+}{H}(q)$ ve $\bar{H}(q)$ matrislerine q bölünmüş kuaterniyonuna karşılık gelen Hamilton matrisleri denir. Yukarıdaki şekilde tanımlı iki lineer dönüşüme Hamilton operatörleri adı verilir ve $\overset{+}{H}$, $\bar{H}$ ile gösterilir. M ve N, sırasıyla,

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} / a_0, a_1, a_2, a_3 \in R \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} / a_0, a_1, a_2, a_3 \in R \right.$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \overset{+}{H}:\ & H' \to M \\ & q \to \overset{+}{H}(q) \end{aligned}$$

dönüşümü lineer izomorfizimdir. Ayrıca $\overset{+}{H}(qp) = \overset{+}{H}(q)\,\overset{+}{H}(p)$ eşitliği sağlanır. O halde $\overset{+}{H}$ homomorfizimdir (cebir homomorfizimidir).

$$\begin{aligned} \bar{H}:\ & H' \to N \\ & q \to \bar{H}(q) \end{aligned}$$

dönüşümü lineer izomorfizimdir. Ayrıca $\bar{H}(qp) = \bar{H}(p)\,\bar{H}(q)$ eşitliği sağlanır.

O halde $\bar{H}$ anti-homomorfizimdir.

$\overset{+}{H}$ ve $\bar{H}$ operatörlerinin tanımından aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz.

$$\overset{+}{H}(1) = \bar{H}(1) = I \tag{4.3.3}$$

$$\overset{+}{H}(\overrightarrow{e_1}) = E_1;\ \overset{+}{H}(\overrightarrow{e_2}) = E_2;\ \overset{+}{H}(\overrightarrow{e_3}) = E_3 \tag{4.3.4}$$

$$\bar{H}(\overrightarrow{e_1}) = F_1;\ \bar{H}(\overrightarrow{e_2}) = F_2;\ \bar{H}(\overrightarrow{e_3}) = F_3. \tag{4.3.5}$$

Burada I, 4×4 birim matris ve

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.6}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.7}$$

matrisleri 4×4 reel matrislerdir. Ayrıca

$$E_1E_1 = -I, \quad E_2E_2 = E_3E_3 = I \tag{4.3.8}$$

$$\begin{aligned} E_1E_2 &= -E_2E_1 = E_3 \\ E_2E_3 &= -E_3E_2 = -E_1 \\ E_3E_1 &= -E_1E_3 = E_2 \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

$$F_1F_1 = -I, \quad F_2F_2 = F_3F_3 = I \tag{4.3.10}$$

$$\begin{aligned} F_1F_2 &= -F_2F_1 = -F_3 \\ F_2F_3 &= -F_3F_2 = F_1 \\ F_3F_1 &= -F_1F_3 = -F_2 \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla E_n ve F_n $(n = 1, 2, 3)$ matrislerinin özelikleri $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ ve $\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyon birimleri ile özdeştir. $\overset{+}{H}$ lineer olduğundan,

$$\begin{aligned} \overset{+}{H}(q) &= a_0 \overset{+}{H}(1) + a_1 \overset{+}{H}(\overrightarrow{e_1}) + a_2 \overset{+}{H}(\overrightarrow{e_2}) + a_3 \overset{+}{H}(\overrightarrow{e_3}) \\ &= a_0 I + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

$$\begin{aligned} \overset{-}{H}(q) &= a_0 \overset{-}{H}(1) + a_1 \overset{-}{H}(\overrightarrow{e_1}) + a_2 \overset{-}{H}(\overrightarrow{e_2}) + a_3 \overset{-}{H}(\overrightarrow{e_3}) \\ &= a_0 I + a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3 \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

yazabiliriz.

Benzer şekilde $\mathbf{Q} = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} = q + \epsilon q^*$ dual bölünmüş kuaterniyonu için $\overset{+}{H}(\mathbf{Q})$ ve $\overset{-}{H}(\mathbf{Q})$ Hamilton matrisleri, sırasıyla.

$$\overset{+}{H}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \tag{4.3.14}$$

ve

$$\overset{-}{H}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & -A_3 & A_0 & A_1 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & A_0 \end{bmatrix} \tag{4.3.15}$$

dır. Ayrıca bu iki dual matris q ve q^* bölünmüş kuaterniyonlarına karşılık gelen $\overset{+}{H}$ (q),
$\overset{+}{H}(q^*)$, $\overset{-}{H}(q)$ ve $\overset{-}{H}(q^*)$ Hamilton matrisleri cinsinden, sırasıyla,

$$\overset{+}{H}(\mathbf{Q}) = \overset{+}{H}(q) + \epsilon\,\overset{+}{H}(q^*) \tag{4.3.16}$$

$$\overset{-}{H}(\mathbf{Q}) = \overset{-}{H}(q) + \epsilon\,\overset{-}{H}(q^*) \tag{4.3.17}$$

olarak ifade edilebilir.

$\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ nin tanımını kullanarak $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{P}$ dual bölünmüş kuaterniyonlarının $\mathbf{R} = \mathbf{QP}$ çarpımını

$$
\mathbf{R} = \overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} A_0B_0 - A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\ A_0B_1 + A_1B_0 + A_3B_2 - A_2B_3 \\ A_0B_2 + A_2B_0 + A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_0B_3 + A_3B_0 + A_1B_2 - A_2B_1 \end{bmatrix} \tag{4.3.18}
$$

veya

$$
\mathbf{R} = \overset{-}{H}(\mathbf{P})\,\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} B_0 & -B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_0 & -B_3 & B_2 \\ B_2 & -B_3 & B_0 & B_1 \\ B_3 & B_2 & -B_1 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} A_0B_0 - A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\ A_0B_1 + A_1B_0 + A_3B_2 - A_2B_3 \\ A_0B_2 + A_2B_0 + A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_0B_3 + A_3B_0 + A_1B_2 - A_2B_1 \end{bmatrix} \tag{4.3.19}
$$

eşitlikleriyle verebiliriz. Son iki eşitlikten

$$
\mathbf{R} = \overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\mathbf{P} = \overset{-}{H}(\mathbf{P})\,\mathbf{Q} \tag{4.3.20}
$$

dır.

Teorem 4.3.1. $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{P}$ dual bölünmüş kuaterniyon ve λ bir dual sayı olsun. $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörleri aşağıdaki önermeleri sağlar.

(i) $\mathbf{P}=\mathbf{Q} \Leftrightarrow \overset{+}{H}(\mathbf{P})=\overset{+}{H}(\mathbf{Q}) \Leftrightarrow \overset{-}{H}(\mathbf{P})=\overset{-}{H}(\mathbf{Q})$

(ii) $\overset{+}{H}(\mathbf{P}+\mathbf{Q})=\overset{+}{H}(\mathbf{P})+\overset{+}{H}(\mathbf{Q}),\ \overset{-}{H}(\mathbf{P}+\mathbf{Q})=\overset{-}{H}(\mathbf{P})+\overset{-}{H}(\mathbf{Q})$

(iii) $\overset{+}{H}(\lambda\mathbf{P})=\lambda\,\overset{+}{H}(\mathbf{P}),\ \overset{-}{H}(\lambda\mathbf{P})=\lambda\,\overset{-}{H}(\mathbf{P})$

(iv) $\overset{+}{H}(\mathbf{QP})=\overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\overset{+}{H}(\mathbf{P}),\ \overset{-}{H}(\mathbf{QP})=\overset{-}{H}(\mathbf{P})\,\overset{-}{H}(\mathbf{Q})$

(v) $\overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}})=\varepsilon\,\overset{+}{H}(\mathbf{Q})^{T}\varepsilon,\ \overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}})=\varepsilon\,\overset{-}{H}(\mathbf{Q})^{T}\varepsilon,\ \varepsilon=\begin{bmatrix}-I_2 & 0\\ 0 & I_2\end{bmatrix}$

(vi) $\overset{+}{H}(\mathbf{Q}^{-1})=\overset{+}{H}(\mathbf{Q})^{-1},\ \overset{-}{H}(\mathbf{Q}^{-1})=\overset{-}{H}(\mathbf{Q})^{-1},\ (N_{\mathbf{Q}})^2\neq 0$

(vii) $\det\left[\overset{+}{H}(\mathbf{Q})\right]=(N_{\mathbf{Q}})^2=\langle\mathbf{Q},\mathbf{Q}\rangle^2,\ \det\left[\overset{-}{H}(\mathbf{Q})\right]=(N_{\mathbf{Q}})^2=\langle\mathbf{Q},\mathbf{Q}\rangle^2$

$(viii)$ $\text{İz}\left[\overset{+}{H}(\mathbf{Q})\right]=4A_0,\ \ \text{İz}\left[\overset{-}{H}(\mathbf{Q})\right]=4A_0$

(ix) $\overset{+}{H}(\mathbf{Q})=L\,\overset{-}{H}(\mathbf{Q})^{T}L,\ L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \ L^{-1}=L^{T}=L,\ L^{2}=I_4.$

İspat.

$(i),(ii),(iii),(viii)$ (4.3.14) ve (4.3.15) eşitliklerinden gösterilebilir.

(iv)

$$\overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\overset{+}{H}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 & -B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_0 & B_3 & -B_2 \\ B_2 & B_3 & B_0 & -B_1 \\ B_3 & -B_2 & B_1 & B_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & C_0 & C_3 & -C_2 \\ C_2 & C_3 & C_0 & -C_1 \\ C_3 & -C_2 & C_1 & C_0 \end{bmatrix} \tag{4.3.21}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} C_0 &= A_0B_0 - A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\ C_1 &= A_1B_0 + A_0B_1 + A_3B_2 - A_2B_3 \\ C_2 &= A_0B_2 - A_1B_3 + A_2B_0 + A_3B_1 \\ C_3 &= A_0B_3 + A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_0 \end{aligned}$$

dır. (4.3.21) eşitliği

$$\begin{aligned} \mathbf{QP} &= (A_0B_0 - A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + (A_0B_1 + A_1B_0 + A_3B_2 - A_2B_3)\,\overrightarrow{e_1} \\ &+ (A_0B_2 + A_2B_0 + A_3B_1 - A_1B_3)\,\overrightarrow{e_2} + (A_0B_3 + A_3B_0 + A_1B_2 - A_2B_1)\,\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

dual bölünmüş kuaterniyonuna karşılık gelen $\overset{+}{H}(\mathbf{QP})$ Hamilton matrisidir. Dolayısıyla,

$$\overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\overset{+}{H}(\mathbf{P})=\overset{+}{H}(\mathbf{QP}) \tag{4.3.22}$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\overset{-}{H}(\mathbf{P})\,\overset{-}{H}(\mathbf{Q}) &= \begin{bmatrix} B_0 & -B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_0 & -B_3 & B_2 \\ B_2 & -B_3 & B_0 & B_1 \\ B_3 & B_2 & -B_1 & B_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & -A_3 & A_0 & A_1 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & A_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & C_0 & -C_3 & C_2 \\ C_2 & -C_3 & C_0 & C_1 \\ C_3 & C_2 & -C_1 & C_0 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

eşitliğinden

$$\overset{-}{H}(\mathbf{QP})=\overset{-}{H}(\mathbf{P})\,\overset{-}{H}(\mathbf{Q}) \tag{4.3.24}$$

denklemi elde edilir.

(v) (4.3.14) eşitliğinden

$$\varepsilon \overset{+}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ -A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & A_1 \\ A_3 & -A_2 & -A_1 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & -A_2 & -A_3 \\ -A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ -A_2 & -A_3 & A_0 & A_1 \\ -A_3 & A_2 & -A_1 & A_0 \end{bmatrix} \tag{4.3.25}$$

dir. Buradan

$$\overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}}) = \varepsilon \overset{+}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon \tag{4.3.26}$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde

$$\varepsilon \overset{-}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ -A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & -A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & -A_2 & -A_3 \\ -A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ -A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ -A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \tag{4.3.27}$$

eşitliğinden,

$$\overset{-}{H}\left(\overline{\mathbf{Q}}\right) = \varepsilon \, \overset{-}{H}\left(\mathbf{Q}\right)^{T} \varepsilon \tag{4.3.28}$$

bulunur.

$(vi)\ (N_{\mathbf{Q}})^2 \neq 0$ olmak üzere

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q} = 1 \tag{4.3.29}$$

eşitliğinde (4.3.22) denklemini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \overset{+}{H}\left(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1}\right) &= \overset{+}{H}\left(\mathbf{Q}\right) \overset{+}{H}\left(\mathbf{Q}^{-1}\right) &= \overset{+}{H}\left(1\right) &= I \\ \overset{+}{H}\left(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\right) &= \overset{+}{H}\left(\mathbf{Q}^{-1}\right) \overset{+}{H}\left(\mathbf{Q}\right) &= \overset{+}{H}\left(1\right) &= I \end{aligned} \tag{4.3.30}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\overset{+}{H}\left(\mathbf{Q}^{-1}\right) = \overset{+}{H}\left(\mathbf{Q}\right)^{-1} \tag{4.3.31}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$\overset{-}{H}\left(\mathbf{Q}^{-1}\right) = \overset{-}{H}\left(\mathbf{Q}\right)^{-1} \tag{4.3.32}$$

dir.

(vi)

$$\begin{vmatrix} A_0 & -A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{vmatrix} = (-A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^2 \tag{4.3.33}$$

dır. O halde

$$\det\left[\overset{+}{H}(\mathbf{Q})\right] = (N_{\mathbf{Q}})^2 = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}\rangle^2 \tag{4.3.34}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{vmatrix} A_0 & -A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & -A_3 & A_0 & A_1 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & A_0 \end{vmatrix} = (-A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^2 \tag{4.3.35}$$

eşitliğinden

$$\det\left[\bar{H}(\mathbf{Q})\right] = (N_{\mathbf{Q}})^2 = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}\rangle^2 \tag{4.3.36}$$

bulunur.

(ix)

$$L\,\bar{H}\,(\mathbf{Q})^{T}L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ -A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & -A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix}$$

$$= \overset{+}{H}\,(\mathbf{Q})\,.$$

Teorem 4.3.2. $\overset{+}{H}$ ve $\bar{H}$ operatörlerinden üretilen matrisler değişimlidir. Yani

$$\overset{+}{H}\,(\mathbf{Q})\ \bar{H}\,(\mathbf{P}) = \bar{H}\,(\mathbf{P})\ \overset{+}{H}\,(\mathbf{Q})\,,\ \forall \mathbf{Q},\mathbf{P} \in H'_{\mathbb{D}}$$

dır.

İspat. Herhangi **P**, **Q**, **R** dual bölünmüş kuaterniyonlarını ele alalım. (4.3.20) ve (4.3.22) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} (\mathbf{PR})\,\mathbf{Q} &= \overset{+}{H}\,(\mathbf{PR})\,\mathbf{Q} \\ &= \overset{+}{H}\,(\mathbf{P})\ \overset{+}{H}\,(\mathbf{R})\,\mathbf{Q} \\ &= \overset{+}{H}\,(\mathbf{P})\ \bar{H}\,(\mathbf{Q})\,\mathbf{R} \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{RQ}) &= \bar{H}(\mathbf{RQ})\,\mathbf{P} \\
&= \bar{H}(\mathbf{Q})\,\bar{H}(\mathbf{R})\,\mathbf{P} \\
&= \bar{H}(\mathbf{Q})\,\overset{+}{H}(\mathbf{P})\,\mathbf{R}
\end{aligned}
$$

bulunur. Dual bölünmüş kuaterniyonların çarpma işleminin birleşme özeliğinden

$$
(\mathbf{PR})\,\mathbf{Q} = \mathbf{P}(\mathbf{RQ})
$$

dir. **R** keyfi olduğundan,

$$
\overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\bar{H}(\mathbf{P}) = \bar{H}(\mathbf{P})\,\overset{+}{H}(\mathbf{Q}) \qquad (4.3.37)
$$

eşitliği elde edilir.

$\overset{+}{H}(\mathbf{Q})$ ve $\bar{H}(\mathbf{Q})$, 4×4 dual matrislerdir. $\widehat{A}^T\varepsilon\widehat{A}\varepsilon = \widehat{A}\varepsilon\widehat{A}^T\varepsilon = AI$ $(A \neq 0 + \epsilon a^*)$ ise $\widehat{A}$ matrisine yarı ortogonal dual matris denir. Burada $\varepsilon = \begin{bmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$, A bir dual sayı ve I birim matristir. Eğer $A = 1$ ise $\widehat{A}$ matrisine özel yarı ortogonal dual matris denir.

Teorem 4.3.3. $\overset{+}{H}$ ve $\bar{H}$ operatörlerinden üretilen matrisler yarı ortogonal dual matrislerdir. Yani

$$
\begin{aligned}
\overset{+}{H}(\mathbf{Q})^T\varepsilon\,\overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\varepsilon &= \overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\varepsilon\,\overset{+}{H}(\mathbf{Q})^T\varepsilon = N_{\mathbf{Q}}I \\
\bar{H}(\mathbf{Q})^T\varepsilon\,\bar{H}(\mathbf{Q})\,\varepsilon &= \bar{H}(\mathbf{Q})\,\varepsilon\,\bar{H}(\mathbf{Q})^T\varepsilon = N_{\mathbf{Q}}I
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (4.3.26) eşitliğini kullanırsak,

$$\overset{+}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon \overset{+}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon = \left(\varepsilon \overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}}) \varepsilon\right) \varepsilon \overset{+}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon = N_{\mathbf{Q}} I$$
$$\overset{+}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon \overset{+}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon = \overset{+}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon \left(\varepsilon \overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}}) \varepsilon\right) \varepsilon = N_{\mathbf{Q}} I$$

denklemleri elde edilir. Ohalde

$$\overset{+}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon \overset{+}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon = \overset{+}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon \overset{+}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon = N_{\mathbf{Q}} I \tag{4.3.38}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\overset{-}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon \overset{-}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon = \left(\varepsilon \overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}}) \varepsilon\right) \varepsilon \overset{-}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon = N_{\mathbf{Q}} I$$
$$\overset{-}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon \overset{-}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon = \overset{-}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon \left(\varepsilon \overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}}) \varepsilon\right) \varepsilon = N_{\mathbf{Q}} I$$

eşitliklerinden,

$$\overset{-}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon \overset{-}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon = \overset{-}{H}(\mathbf{Q}) \varepsilon \overset{-}{H}(\mathbf{Q})^T \varepsilon = N_{\mathbf{Q}} I \tag{4.3.39}$$

bulunur.

Sonuç olarak, $\mathbf{Q}$ birim dual bölünmüş kuaterniyon ise $\overset{+}{H}(\mathbf{Q})$ ve $\overset{-}{H}(\mathbf{Q})$ özel yarı ortogonal dual matrisler olur .

Teorem 4.3.4. $\widehat{A}$ matrisi

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + \epsilon a_{11}^{*} & a_{12} + \epsilon a_{12}^{*} & a_{13} + \epsilon a_{13}^{*} & a_{14} + \epsilon a_{14}^{*} \\ a_{21} + \epsilon a_{21}^{*} & a_{22} + \epsilon a_{22}^{*} & a_{23} + \epsilon a_{23}^{*} & a_{24} + \epsilon a_{241}^{*} \\ a_{31} + \epsilon a_{31}^{*} & a_{32} + \epsilon a_{32}^{*} & a_{33} + \epsilon a_{33}^{*} & a_{34} + \epsilon a_{34}^{*} \\ a_{41} + \epsilon a_{41}^{*} & a_{42} + \epsilon a_{42}^{*} & a_{43} + \epsilon a_{43}^{*} & a_{44} + \epsilon a_{44}^{*} \end{bmatrix}$$

4×4 özel yarı ortogonal dual matris olsun. $\widehat{A}$ dual matrisinin k-ıncı sütun vektörünü

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A}_k &= (A_{1k}, A_{2k}, A_{3k}, A_{4k}) \\ &= A_{1k} + A_{2k}\overrightarrow{e_1} + A_{3k}\overrightarrow{e_2} + A_{4k}\overrightarrow{e_3} \\ &= (a_{1k} + a_{2k}\overrightarrow{e_1} + a_{3k}\overrightarrow{e_2} + a_{4k}\overrightarrow{e_3}) + \epsilon\,(a_{1k}^{*} + a_{2k}^{*}\overrightarrow{e_1} + a_{3k}^{*}\overrightarrow{e_2} + a_{4k}^{*}\overrightarrow{e_3}) \\ &= q_k + \epsilon q_k^{*}, \;\; k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

olarak gösterebiliriz. Bu durumda,

$$q_k^{*} = u q_k + q_k v, \;\; (k = 1, 2, 3, 4) \tag{4.3.40}$$

olacak şekilde iki u ve v bölünmüş vektörü vardır ve tekdir.

İspat. $\widehat{A}$ özel yarı ortogonal dual matrisi

$$\widehat{A} = A + \epsilon A^{*} \qquad (4.3.41)$$

olarak yazılabilir. $\widehat{A}^{T}\varepsilon\widehat{A}\varepsilon = \widehat{A}\varepsilon\widehat{A}^{T}\varepsilon = I$ eşitliğinden,

$$A\varepsilon A^{T}\varepsilon = A^{T}\varepsilon A\varepsilon = I \qquad (4.3.42)$$

$$A\varepsilon A^{*T}\varepsilon + A^{*}\varepsilon A^{T}\varepsilon = 0 \qquad (4.3.43)$$

olur.

$$A^{*}\varepsilon A^{T}\varepsilon = B \qquad (4.3.44)$$

olarak tanımlayalım. (4.3.44) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \varepsilon B^{T}\varepsilon &= \varepsilon\left(\varepsilon A\varepsilon A^{*T}\right)\varepsilon \\ &= A\varepsilon A^{*T}\varepsilon \end{aligned}$$

olup, (4.3.43) denkleminden $B^{T} = -\varepsilon B\varepsilon$ elde edilir. Ohalde B matrisi antisimetrik bir matristir. (4.3.44) denklemini sağdan A matrisi ile çarpar ve (4.3.42) eşitliğini kullanırsak,

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{A} \tag{4.3.45}$$

bulunur. (4.3.45) eşitliğindeki $\mathcal{B}$ matrisi tekdir. Tek olmadığını kabul edelim. Bu durumda (4.3.45) eşitliğini sağlayan bir diğer matris $\mathcal{B}_1$ olsun. O zaman

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B}_1\mathcal{A}$$

veya

$$(\mathcal{B} - \mathcal{B}_1)\,\mathcal{A} = 0$$

dır. $\mathcal{A}$ özel yarı ortogonal dual matris olduğundan $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$, yani $\mathcal{B}$ tekdir. $\mathcal{B}$ matrisi tek şekilde

$$\mathcal{B} = \overset{+}{H}(u) + \overset{-}{H}(v) \tag{4.3.46}$$

olarak yazılabilir. Burada u ve v , iki bölünmüş vektör ve

$$\overset{+}{H}(u) = \begin{bmatrix} 0 & -u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_3 & -u_2 \\ u_2 & u_3 & 0 & -u_1 \\ u_3 & -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.47}$$

ve

$$\bar{H}(v) = \begin{bmatrix} 0 & -v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 0 & -v_3 & v_2 \\ v_2 & -v_3 & 0 & v_1 \\ v_3 & v_2 & -v_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.48}$$

dir. Gerçekten 4×4 $\mathcal{B}$ antisimetrik matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & -b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ b_2 & c_1 & 0 & -c_3 \\ b_3 & c_2 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.49}$$

formunda olup $\mathcal{B} = \overset{+}{H}(u) + \bar{H}(v)$ eşitliğinden $\mathcal{B}$ tek şekilde yazılabilir. (4.3.45) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^* &= \mathcal{B}\mathcal{A} = \left(\overset{+}{H}(u) + \bar{H}(v)\right)\mathcal{A} \\ &= \overset{+}{H}(u)\,\mathcal{A} + \bar{H}(v)\,\mathcal{A} \end{aligned} \tag{4.3.50}$$

dir. Burada,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A^{*}=\begin{bmatrix} a^{*}_{11} & a^{*}_{12} & a^{*}_{13} & a^{*}_{14} \\ a^{*}_{21} & a^{*}_{22} & a^{*}_{23} & a^{*}_{24} \\ a^{*}_{31} & a^{*}_{32} & a^{*}_{33} & a^{*}_{34} \\ a^{*}_{41} & a^{*}_{42} & a^{*}_{43} & a^{*}_{44} \end{bmatrix}$$

ve $\overset{+}{H}(u)\,A$ ve $\overset{-}{H}(v)\,A$ matrisleri, sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} -u_1a_{21}+u_2a_{31}+u_3a_{41} & -u_1a_{22}+u_2a_{32}+u_3a_{42} & -u_1a_{23}+u_2a_{33}+u_3a_{43} & -u_1a_{24}+u_2a_{34}+u_3a_{44} \\ u_1a_{11}+u_3a_{31}-u_2a_{41} & u_1a_{12}+u_3a_{32}-u_2a_{42} & u_1a_{13}+u_3a_{33}-u_2a_{43} & u_1a_{14}+u_3a_{34}-u_2a_{44} \\ u_2a_{11}+u_3a_{21}-u_1a_{41} & u_2a_{12}+u_3a_{22}-u_1a_{42} & u_2a_{13}+u_3a_{23}-u_1a_{43} & u_2a_{14}+u_3a_{24}-u_1a_{44} \\ u_3a_{11}-u_2a_{21}+u_1a_{31} & u_3a_{12}-u_2a_{22}+u_1a_{32} & u_3a_{13}-u_2a_{23}+u_1a_{33} & u_3a_{14}-u_2a_{24}+u_1a_{34} \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} -v_1a_{21}+v_2a_{31}+v_3a_{41} & -v_1a_{22}+v_2a_{32}+v_3a_{42} & -v_1a_{23}+v_2a_{33}+v_3a_{43} & -v_1a_{24}+v_2a_{34}+v_3a_{44} \\ v_1a_{11}-v_3a_{31}+v_2a_{41} & v_1a_{12}-v_3a_{32}+v_2a_{42} & v_1a_{13}-v_3a_{33}+v_2a_{43} & v_1a_{14}-v_3a_{34}+v_2a_{44} \\ v_2a_{11}-v_3a_{21}+v_1a_{41} & v_2a_{12}-v_3a_{22}+v_1a_{42} & v_2a_{13}-v_3a_{23}+v_1a_{43} & v_2a_{14}-v_3a_{24}+v_1a_{44} \\ v_3a_{11}+v_2a_{21}-v_1a_{31} & v_3a_{12}+v_2a_{22}-v_1a_{32} & v_3a_{13}+v_2a_{23}-v_1a_{33} & v_3a_{14}+v_2a_{24}-v_1a_{34} \end{bmatrix}$$

dır. Ayrıca $q^{*}_{k}=uq_k+q_kv$, çarpımları $k=1,2,3,4$ için, sırasıyla,

$$\begin{aligned} uq_1+q_1v &= (-u_1a_{21}+u_2a_{31}+u_3a_{41}-v_1a_{21}+v_2a_{31}+v_3a_{41}) \\ &\quad+(u_1a_{11}+u_3a_{31}-u_2a_{41}+v_1a_{11}-v_3a_{31}+v_2a_{41})\,\overrightarrow{e_1} \\ &\quad+(u_2a_{11}+u_3a_{21}-u_1a_{41}+v_2a_{11}-v_3a_{21}+v_1a_{41})\,\overrightarrow{e_2} \\ &\quad+(u_3a_{11}-u_2a_{21}+u_1a_{31}+v_3a_{11}+v_2a_{21}-v_1a_{31})\,\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
uq_2 + q_2 v &= (-u_1 a_{22} + u_2 a_{32} + u_3 a_{42} - v_1 a_{22} + v_2 a_{32} + v_3 a_{42}) \\
&+ (u_1 a_{12} + u_3 a_{32} - u_2 a_{42} + v_1 a_{12} - v_3 a_{32} + v_2 a_{42})\, \overrightarrow{e_1} \\
&+ (u_2 a_{12} + u_3 a_{22} - u_1 a_{42} + v_2 a_{12} - v_3 a_{22} + v_1 a_{42})\, \overrightarrow{e_2} \\
&+ (u_3 a_{12} - u_2 a_{22} + u_1 a_{32} + v_3 a_{12} + v_2 a_{22} - v_1 a_{32})\, \overrightarrow{e_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
uq_3 + q_3 v &= (-u_1 a_{23} + u_2 a_{33} + u_3 a_{43} - v_1 a_{23} + v_2 a_{33} + v_3 a_{43}) \\
&+ (u_1 a_{13} + u_3 a_{33} - u_2 a_{43} + v_1 a_{13} - v_3 a_{33} + v_2 a_{43})\, \overrightarrow{e_1} \\
&+ (u_2 a_{13} + u_3 a_{23} - u_1 a_{43} + v_2 a_{13} - v_3 a_{23} + v_1 a_{43})\, \overrightarrow{e_2} \\
&+ (u_3 a_{13} - u_2 a_{23} + u_1 a_{33} + v_3 a_{13} + v_2 a_{23} - v_1 a_{33})\, \overrightarrow{e_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
uq_4 + q_4 v &= (-u_1 a_{24} + u_2 a_{34} + u_3 a_{44} - v_1 a_{24} + v_2 a_{34} + v_3 a_{44}) \\
&+ (u_1 a_{14} + u_3 a_{34} - u_2 a_{44} + v_1 a_{14} - v_3 a_{34} + v_2 a_{44})\, \overrightarrow{e_1} \\
&+ (u_2 a_{14} + u_3 a_{24} - u_1 a_{44} + v_2 a_{14} - v_3 a_{24} + v_1 a_{44})\, \overrightarrow{e_2} \\
&+ (u_3 a_{14} - u_2 a_{24} + u_1 a_{34} + v_3 a_{14} + v_2 a_{24} - v_1 a_{34})\, \overrightarrow{e_3}
\end{aligned}
$$

dır. O halde $q_k^* = uq_k + q_k v$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ olacak şekilde iki u ve v vektörü vardır ve tekdir. Bu durumda aşağıdaki teorem açıktır.

Teorem 4.3.5. Herhangibir 4×4 özel yarı ortogonal dual matris

$$\widehat{A} = [q_1 + \epsilon(uq_1 + q_1v) \quad q_2 + \epsilon(uq_2 + q_2v) \quad q_3 + \epsilon(uq_3 + q_3v) \quad q_4 + \epsilon(uq_4 + q_4v)] \tag{4.3.51}$$

olarak verilebilir. Burada $A = (a_{jk})$ reel yarı ortogonal matris , u ve v iki bölünmüş vektördür. A matrisi ile u ve v bölünmüş vektörleri $\widehat{A}$ matrisi tarafından tam olarak bellidir.

Bir U dual bölünmüş vektörü için $\overset{+}{H}$ (U) ve $\overset{-}{H}$ (U) matrisleri antisimetrik matrislerdir. Bu iki matris bir dual bölünmüş kuaterniyonun vektör kısmından üretildiği için, sırasıyla, $\overset{+}{V}$ (U) ve $\overset{-}{V}$ (U) ile gösterilir. $\overset{+}{V}$ (U) ve $\overset{-}{V}$ (U) matrisleri, sırasıyla,

$$\overset{+}{V}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -U_1 & U_2 & U_3 \\ U_1 & 0 & U_3 & -U_2 \\ U_2 & U_3 & 0 & -U_1 \\ U_3 & -U_2 & U_1 & 0 \end{bmatrix} = \overset{+}{H}(V_{\mathbf{U}}) \tag{4.3.52}$$

ve

$$\overset{-}{V}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -U_1 & U_2 & U_3 \\ U_1 & 0 & -U_3 & U_2 \\ U_2 & -U_3 & 0 & U_1 \\ U_3 & U_2 & -U_1 & 0 \end{bmatrix} = \overset{-}{H}(V_{\mathbf{U}}) \tag{4.3.53}$$

olarak yazılır.

$\overset{+}{V}(\mathbf{U})$ ve $\overset{-}{V}(\mathbf{U})$ matrisleri aşağıdaki özdeşlikleri sağlar:

(*i*) **antisimetrik**

$$\overset{+}{V}(\mathbf{U})^T = -\varepsilon \overset{+}{V}(\mathbf{U})\varepsilon, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \tag{4.3.54}$$

$$\overset{-}{V}(\mathbf{U})^T = -\varepsilon \overset{-}{V}(\mathbf{U})\varepsilon, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}. \tag{4.3.55}$$

(*ii*) **yarı ortogonal**

$$\begin{aligned} \overset{+}{V}(\mathbf{U})^T\varepsilon \overset{+}{V}(\mathbf{U})\varepsilon = \overset{+}{V}(\mathbf{U})\varepsilon \overset{+}{V}(\mathbf{U})^T\varepsilon = N_{V(\mathbf{U})}I \\ \overset{-}{V}(\mathbf{U})^T\varepsilon \overset{-}{V}(\mathbf{U})\varepsilon = \overset{-}{V}(\mathbf{U})\varepsilon \overset{-}{V}(\mathbf{U})^T\varepsilon = N_{V(\mathbf{U})}I. \end{aligned} \tag{4.3.56}$$

(*iii*)

$$(\overset{+}{V}(\mathbf{U}))^{2n} = (-N_{V(\mathbf{U})})^n I = (\overset{-}{V}(\mathbf{U}))^{2n}. \tag{4.3.57}$$

(*iv*)

$$\begin{aligned} (\overset{+}{V}(\mathbf{U}))^{2n+1} = (-N_{V(\mathbf{U})})^n \overset{+}{V}(\mathbf{U}) \\ (\overset{-}{V}(\mathbf{U}))^{2n+1} = (-N_{V(\mathbf{U})})^n \overset{-}{V}(\mathbf{U}) \end{aligned} \tag{4.3.58}$$

dir.

5. MINKOWSKİ 3-UZAYINDA VİDA HAREKETİ

Bu bölümde Minkowski 3-uzayında vida hareketi, özel yarı ortogonal dual matrisler ve Hamilton matrisleri ile ifade edildi.

5.1. Minkowski 3-Uzayında Özel Yarı Ortogonal Dual Matrisler ve Vida Hareketi

Teorem 5.1.1.(E. Study Teoremi)

Minkowski 3-uzayında doğrultmanı zamansı (uzaysı) vektör olan yönlü doğrular ile (x, x^*) sıralı dual vektör çiftleri arasında birebir tekabül vardır. Burada $g(x,x) = -1$ $(g(x,x) = 1)$ ve $g(x,x^*) = 0$ dır. Bu birebir tekabülde doğrunun doğrultman vektörü x ve x vektörünün orjine göre momenti x^* dır (Yaylı, Çalışkan, Uğurlu 2002).

Teorem 5.1.2. $\mathbf{Q} = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ birim dual bölünmüş kuaterniyon olsun.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 & 2(A_0A_3 - A_1A_2) & -2(A_0A_2 + A_1A_3) \\ 2(A_0A_3 + A_1A_2) & A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 & -2(A_0A_1 + A_2A_3) \\ 2(-A_0A_2 + A_1A_3) & 2(A_0A_1 - A_2A_3) & A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 \end{bmatrix} \tag{5.1.1}$$

dual matrisi özel yarı ortogonal dual matristir. Yani $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\mathcal{A}\varepsilon\mathcal{A}^T\varepsilon = \mathcal{A}^T\varepsilon\mathcal{A}\varepsilon = I_3,$$

ve

$$\det \mathcal{A} = 1$$

dir.

İspat: $\mathcal{A}\varepsilon$ ve $\mathcal{A}^T\varepsilon$ matrislerinin çarpımları, sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} A_0{}^2+A_1{}^2+A_2{}^2+A_3{}^2 & 2\,(A_0A_3 - A_1A_2) & -2\,(A_0A_2 + A_1A_3) \\ 2\,(A_0A_3 + A_1A_2) & A_0{}^2-A_1{}^2-A_2{}^2+A_3{}^2 & -2\,(A_0A_1+A_2A_3) \\ 2\,(-A_0A_2 + A_1A_3) & 2\,(A_0A_1 - A_2A_3) & A_0{}^2-A_1{}^2+A_2{}^2-A_3{}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -A_0{}^2-A_1{}^2-A_2{}^2-A_3{}^2 & 2A_0A_3 - 2A_1A_2 & -2A_0A_2 - 2A_1A_3 \\ -2A_0A_3 - 2A_1A_2 & A_0{}^2-A_1{}^2-A_2{}^2+A_3{}^2 & -2A_0A_1 - 2A_2A_3 \\ 2A_0A_2 - 2A_1A_3 & 2A_0A_1 - 2A_2A_3 & A_0{}^2-A_1{}^2+A_2{}^2-A_3{}^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} A_0{}^2+A_1{}^2+A_2{}^2+A_3{}^2 & 2A_0A_3 + 2A_1A_2 & -2A_0A_2 + 2A_1A_3 \\ 2A_0A_3 - 2A_1A_2 & A_0{}^2-A_1{}^2-A_2{}^2+A_3{}^2 & 2A_0A_1 - 2A_2A_3 \\ -2A_0A_2 - 2A_1A_3 & -2A_0A_1 - 2A_2A_3 & A_0{}^2-A_1{}^2+A_2{}^2-A_3{}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -A_0{}^2-A_1{}^2-A_2{}^2-A_3{}^2 & 2A_0A_3 + 2A_1A_2 & -2A_0A_2 + 2A_1A_3 \\ -2A_0A_3 + 2A_1A_2 & A_0{}^2-A_1{}^2-A_2{}^2+A_3{}^2 & 2A_0A_1 - 2A_2A_3 \\ 2A_0A_2 + 2A_1A_3 & -2A_0A_1 - 2A_2A_3 & A_0{}^2-A_1{}^2+A_2{}^2-A_3{}^2 \end{bmatrix}$$

dir. O halde

$$\mathcal{A}\varepsilon\mathcal{A}^T\varepsilon = \left(A_0^2+A_1^2-A_2^2-A_3^2\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

olarak bulunur ve $\det \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} &= -3A_2^4A_3^2 - 6A_2^2A_0^2A_1^2 - 6A_3^2A_0^2A_1^2 + 6A_0^2A_2^2A_3^2 + 6A_1^2A_2^2A_3^2 \\ &-3A_2^2A_3^4 + A_0^6 + A_1^6 - A_2^6 - A_3^6 + 3A_0^4A_1^2 + 3A_0^2A_1^4 + 3A_0^2A_2^4 \\ &+3A_0^2A_3^4 + 3A_1^2A_2^4 + 3A_1^2A_3^4 - 3A_2^2A_0^4 - 3A_2^2A_1^4 - 3A_3^2A_0^4 - 3A_3^2A_1^4 \\ &= (A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2)^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir.

Şimdi, bileşenleri birim dual bölünmüş kuaterniyonun bileşenleri cinsinden ifade edilen (5.1.1) özel yarı ortogonal matrisi yardımıyla vida hareketi ifade edilecektir.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} \\ &= (a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) + \epsilon\left(a_0^* + a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3}\right) \end{aligned}$$

birim dual bölünmüş kuaterniyonunu ele alalım. $\mathbf{Q}$ birim olduğundan,

$$
\begin{aligned}
N_{\mathbf{Q}} &= A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 \\
&= a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 2\epsilon\left(a_0 a_0^* + a_1 a_1^* - a_2 a_2^* - a_3 a_3^*\right) \\
&= 1 + \epsilon 0
\end{aligned}
$$

dir.

$-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} &= \sqrt{(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2\epsilon\left(-a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + a_3 a_3^*\right)} \\
&= \sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \epsilon\, \frac{-a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + a_3 a_3^*}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}
\end{aligned}
$$

olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde $a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 > 0$ olmak üzere

$$
\sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2} = \sqrt{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2} + \epsilon\, \frac{a_1 a_1^* - a_2 a_2^* - a_3 a_3^*}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
g\left(\overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}}, \overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}}\right) &= -A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \\
&= (-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2\epsilon\left(-a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + a_3 a_3^*\right) \\
&= g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}\right) + 2\epsilon g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_{q^*}}\right)
\end{aligned}
$$

eşitliğinde,

$g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}\right) = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ veya $\overrightarrow{V_q} = \overrightarrow{0}$ ise $\overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}}$ ya uzaysı dual bölünmüş vektör,

$g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}\right) < 0$ ise $\overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}}$ ya zamansı dual bölünmüş vektör,

$\overrightarrow{V_q} \neq \overrightarrow{0}$ olmak üzere $g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}\right) = 0$ ise $\overrightarrow{V_Q}$ ya boşluksu dual bölünmüş vektör diyeceğiz.

i) $\overrightarrow{V_Q} \neq \overrightarrow{0}$ uzaysı dual bölünmüş vektör olsun. Bu durumda **Q** dual bölünmüş kuaterniyonu

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= A_0 + \sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\,\frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \\ &= \cosh\frac{\Phi}{2} + \sinh\frac{\Phi}{2}\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

formunda ifade edilebilir. Burada

$$\begin{aligned} &\cosh\frac{\Phi}{2} = A_0, \ \sinh\frac{\Phi}{2} = \sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \\ &\overrightarrow{\mathbb{S}^*} = \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-A_1{}^2 + A_2{}^2 + A_3{}^2}} = S_1\overrightarrow{e_1} + S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} \\ &g\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*}, \overrightarrow{\mathbb{S}^*}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*}\right)^2 = \overrightarrow{\mathbb{S}^*}\overrightarrow{\mathbb{S}^*} = 1 \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

dir Ayrıca $\frac{\Phi}{2} = \frac{\varphi}{2} + \epsilon\frac{\varphi^*}{2}$ dual açısı ve **Q** birim dual bölünmüş kuaterniyonunun $\overrightarrow{\mathbb{S}^*}$ ekseni, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{2} &= \arg\cosh(a_0) \\ \frac{\varphi^*}{2} &= \frac{a_0^*}{\sqrt{a_0^2 - 1}} \\ \overrightarrow{S_0} &= \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \\ \overrightarrow{S_0^*} &= \frac{a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} - \frac{a_0 a_0^*\left(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}\right)}{\sqrt{\left(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^3}} \end{aligned}$$

biçimindedir ve

$$\overrightarrow{\mathbb{S}^*} = \overrightarrow{S_0} + \epsilon\overrightarrow{S_0^*} \tag{5.1.4}$$

dir. Teorem 5.1.2 deki $\mathcal{A}$ matrisinin bileşenleri (5.1.3) ile verilen eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}
A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 &= 1 + (-1 + \cosh\Phi)(S_2^2 + S_3^2) \\
A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 &= 1 + (-1 + \cosh\Phi)(-S_1^2 + S_3^2) \\
A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 &= 1 + (-1 + \cosh\Phi)(-S_1^2 + S_2^2) \\
2(A_0A_3 + A_1A_2) &= \sinh\Phi S_3 + (-1 + \cosh\Phi) S_1S_2 \\
2(A_0A_3 - A_1A_2) &= \sinh\Phi S_3 - (-1 + \cosh\Phi) S_1S_2 \\
2(-A_0A_2 + A_1A_3) &= -\sinh\Phi S_2 + (-1 + \cosh\Phi) S_1S_3 \\
-2(A_0A_2 + A_1A_3) &= -\sinh\Phi S_2 - (-1 + \cosh\Phi) S_1S_3 \\
2(A_0A_1 - A_2A_3) &= \sinh\Phi S_1 - (-1 + \cosh\Phi) S_2S_3 \\
-2(A_0A_1 + A_2A_3) &= -\sinh\Phi S_1 - (-1 + \cosh\Phi) S_2S_3
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\cosh^2\frac{\Phi}{2} - \sinh^2\frac{\Phi}{2} = 1$, $\cosh^2\frac{\Phi}{2} + \sinh^2\frac{\Phi}{2} = \cosh\Phi$, $\cosh^2\frac{\Phi}{2} = \frac{1+\cosh\Phi}{2}$, $\sinh^2\frac{\Phi}{2} = \frac{-1+\cosh\Phi}{2}$ ve $\sinh\Phi = 2\sinh\frac{\Phi}{2}\cosh\frac{\Phi}{2}$ eşitlikleri kullanılmıştır. O halde

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sinh\Phi \begin{bmatrix} 0 & S_3 & -S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ (-1+\cosh\Phi) \begin{bmatrix} S_2^2+S_3^2 & -S_1S_2 & -S_1S_3 \\ S_1S_2 & -S_1^2+S_3^2 & -S_2S_3 \\ S_1S_3 & -S_2S_3 & -S_1^2+S_2^2 \end{bmatrix} \\
\mathcal{A} = &\, I + \sinh\Phi \mathbb{S}^* + (-1+\cosh\Phi)\mathbb{S}^{*2}
\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

olarak bulunur. Burada

$$\mathbb{S}^* = \begin{bmatrix} 0 & S_3 & -S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1.6}$$

olmak üzere

$$\mathbb{S}^{*T} = -\varepsilon \mathbb{S}^* \varepsilon$$

dir. Yani $\mathbb{S}^*$ matrisi dual antisimetrik matristir. Ayrıca $(\mathbb{S}^*)^{2n-1} = \mathbb{S}^*$ ve $(\mathbb{S}^*)^{2n} = (\mathbb{S}^*)^2$ dir.

$\mathcal{A}$ matrisinin $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ dual bölünmüş vektöründe ki görüntüsü vektörel formda

$$\begin{aligned} \mathcal{A}X &= X + \sinh\Phi\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \wedge X\right) + (-1+\cosh\Phi)\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \wedge \left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \wedge X\right)\right) \\ &= X + \sinh\Phi\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \wedge X\right) + (-1+\cosh\Phi)\left(-g\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*}, X\right)\overrightarrow{\mathbb{S}^*} + g\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*}, \overrightarrow{\mathbb{S}^*}\right)X\right) \\ &= \cosh\Phi X + \sinh\Phi\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \wedge X\right) + (1-\cosh\Phi)\, g\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*}, X\right)\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

şeklinde elde edilir. X yerine $\overrightarrow{\mathbb{S}^*} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$ birim dual bölünmüş vektörünü alırsak

$$\mathcal{A}\overrightarrow{\mathbb{S}^*} = \overrightarrow{\mathbb{S}^*}$$

dir. O halde $\overrightarrow{\mathbf{S}^*}$ (5.1.5) ile verilen $\mathcal{A}$ özel yarı ortogonal matrisin eksenidir. Ayrıca $\mathcal{A}$ matrisini $\sinh\Phi = \sinh\varphi + \epsilon\varphi^*\cosh\varphi$ ve $\cosh\Phi = \cosh\varphi + \epsilon\varphi^*\sinh\varphi$ eşitlikleri yardımıyla

$$\mathcal{A} = \left(I_3 + \sinh\varphi\mathbf{S}^* + (-1+\cosh\varphi)\,\mathbf{S}^{*2}\right) + \epsilon\varphi^*\left(\cosh\varphi\mathbf{S}^* + \sinh\varphi\mathbf{S}^{*2}\right) \qquad (5.1.8)$$

olarak ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} G &= (I_3 + \sinh\varphi\mathbf{S}^* + (-1+\cosh\varphi)\,\mathbf{S}^{*2}) \\ H &= (\cosh\varphi\mathbf{S}^* + \sinh\varphi\mathbf{S}^{*2}) \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^*G &= \mathbf{S}^*\,(I_3 + \sinh\varphi\mathbf{S}^* + (-1+\cosh\varphi)\,\mathbf{S}^{*2}) \\ &= \cosh\varphi\mathbf{S}^* + \sinh\varphi\mathbf{S}^{*2} \\ &= H \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G\mathbf{S}^* &= (I_3 + \sinh\varphi\mathbf{S}^* + (-1+\cosh\varphi)\,\mathbf{S}^{*2})\,\mathbf{S}^* \\ &= \cosh\varphi\mathbf{S}^* + \sinh\varphi\mathbf{S}^{*2} \\ &= H \end{aligned}$$

dir. O halde (5.1.8) eşitliği

$$\begin{aligned} A &= (I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbb{S}^*)\, G \\ &= G\,(I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbb{S}^*) \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

olarak verilebilir. (5.1.9) denkleminde $\varphi = 0$ alınırsa

$$A = I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbb{S}^* \tag{5.1.10}$$

dır. Ayrıca $\varphi^* = 0$ alınırsa

$$A = G$$

bulunur. Bir $X = x + \epsilon x^*$ birim dual bölünmüş vektörünün $(I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbb{S}^*)$ matrisi altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned} Y &= (I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbb{S}^*)\,(X) = (I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbb{S}^*)\,(x + \epsilon x^*) \\ &= x + \epsilon\,(x^* + \varphi^* \mathbb{S}^* x) \\ &= \overrightarrow{x} + \epsilon\left(\overrightarrow{x^*} + \varphi^*\left(\overrightarrow{S_0} \wedge \overrightarrow{x}\right)\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$\epsilon\overrightarrow{\mathbb{S}^*} = \epsilon\left(\overrightarrow{S_0} + \epsilon\overrightarrow{S_0^*}\right) = \epsilon\overrightarrow{S_0}$$

dir ve Y birim dual vektör olur.

Yani $(I_3+\epsilon\varphi^*\mathbb{S}^*)$ matrisi $\overrightarrow{x}$ vektörünü sabit bırakırken, $\overrightarrow{x^*}$ vektörünü $\overrightarrow{x^*}+\varphi^*\left(\overrightarrow{S_0}\wedge\overrightarrow{x}\right)$ vektörüne dönüştürmektedir.

O halde $(I_3+\epsilon\varphi^*\mathbb{S}^*)$ matrisi X birim dual bölünmüş vektörüne karşılık gelen yönlü doğruyu kendisine paralel diğer bir doğruya dönüştürmektedir. $(I_3+\epsilon\varphi^*\mathbb{S}^*)$matrisine Kayma matrisi (operatörü) diyeceğiz.

Bir $X=x+\epsilon x^*$ birim dual bölünmüş vektörünün

$$
\begin{aligned}
G &= \left(I_3+\sinh\varphi\mathbb{S}^*+(-1+\cosh\varphi)\,\mathbb{S}^{*2}\right)\\
&= \left(I_3+\sinh\varphi S_0+(-1+\cosh\varphi)\,S_0^2\right)+\epsilon\left(\sinh\varphi S_0^*+(-1+\cosh\varphi)\,(S_0S_0^*+S_0^*S_0)\right)\\
&= \mathcal{A}d_q+\epsilon\mathcal{J}
\end{aligned}
$$

matrisi altındaki görüntüsü

$$GX=\mathcal{A}d_qx+\epsilon\left(\mathcal{A}d_qx^*+\mathcal{J}x\right)$$

dir. Burada $\mathcal{A}d_q$ (3.4.7) eşitliği ile verilen matris formundadır ve $\mathcal{J}=\sinh\varphi S_0^*+(-1+\cosh\varphi)\,(S_0S_0^*+S_0^*S_0)$ dir.

Yani G matrisi x vektörünü $\mathcal{A}d_qx$ vektörüne ve x^* vektörünü $(\mathcal{A}d_qx^*+\mathcal{J}x)$ vektörüne dönüştürmektedir.

O halde G matrisi X birim dual bölünmüş vektörüne karşılık gelen doğruyu φ hiperbolik açısı kadar döndürmektedir. G matrisine Dönme matrisi (operatörü) diyeceğiz.

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
G\varepsilon G^T\varepsilon &= (I_3+\sinh\varphi\mathbb{S}^* + (-1+\cosh\varphi)\,\mathbb{S}^{*2})\,\varepsilon\,(I_3-\sinh\varphi\varepsilon\mathbb{S}^*\varepsilon + (-1+\cosh\varphi)\,\varepsilon\mathbb{S}^{*2}\varepsilon)\,\varepsilon \\
&= (\varepsilon+\sinh\varphi\mathbb{S}^*\varepsilon + (-1+\cosh\varphi)\,\mathbb{S}^{*2}\varepsilon)\,(\varepsilon-\sinh\varphi\varepsilon\mathbb{S}^* + (-1+\cosh\varphi)\,\varepsilon\mathbb{S}^{*2}) \\
&= I_3 + \left(2\,(-1+\cosh\varphi) - \sinh^2\varphi + (-1+\cosh\varphi)^2\right)\mathbb{S}^{*2} \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
G^T\varepsilon G\varepsilon &= (\varepsilon-\sinh\varphi\varepsilon\mathbb{S}^* + (-1+\cosh\varphi)\,\varepsilon\mathbb{S}^{*2})\,(\varepsilon+\sinh\varphi\mathbb{S}^*\varepsilon + (-1+\cosh\varphi)\,\mathbb{S}^{*2}\varepsilon) \\
&= I_3 + \left(2\,(-1+\cosh\varphi) + \sinh^2\varphi + (-1+\cosh\varphi)^2\right)\varepsilon\mathbb{S}^{*2}\varepsilon \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

dir. G matrisinin determinantı

$$
\begin{aligned}
\det G &= 1 - 2\,(-S_1^2+S_2^2+S_3^2) + (-S_1^2+S_2^2+S_3^2)^2 \\
&\quad +2\cosh\varphi\,(-S_1^2+S_2^2+S_3^2) - \sinh^2\varphi\,(-S_1^2+S_2^2+S_3^2) \\
&\quad -2\cosh\varphi\,(-S_1^2+S_2^2+S_3^2)^2 + \cosh^2\varphi\,(-S_1^2+S_2^2+S_3^2)^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Yani G matrisi $\overrightarrow{\mathbb{S}^*}$ dual eksenli yarı dual ortogonal matristir.

Şimdi

$$
F = I_3 + \epsilon\varphi^*\mathbb{S}^* \tag{5.1.11}
$$

matrisini ele alalım.

$$\begin{aligned} F\varepsilon F^T\varepsilon &= (I_3+\epsilon\varphi^*\mathbf{S}^*)\,\varepsilon\,(I_3-\epsilon\varphi^*\varepsilon\mathbf{S}^*\varepsilon)\,\varepsilon \\ &= (\varepsilon+\epsilon\varphi^*\mathbf{S}^*\varepsilon)\,(\varepsilon-\epsilon\varphi^*\varepsilon\mathbf{S}^*) \\ &= I_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F^T\varepsilon F\varepsilon &= (I_3-\epsilon\varphi^*\varepsilon\mathbf{S}^*\varepsilon)\,\varepsilon\,(I_3+\epsilon\varphi^*\mathbf{S}^*)\,\varepsilon \\ &= (\varepsilon-\epsilon\varphi^*\varepsilon\mathbf{S}^*)\,(\varepsilon+\epsilon\varphi^*\mathbf{S}^*\varepsilon) \\ &= I_3 \end{aligned}$$

dir. F matrisinin determinantı

$$\det F = \begin{vmatrix} 1 & \epsilon\varphi^* S_3 & -\epsilon\varphi^* S_2 \\ \epsilon\varphi^* S_3 & 1 & -\epsilon\varphi^* S_1 \\ -\epsilon\varphi^* S_2 & \epsilon\varphi^* S_1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

dir. Yani F matrisi yarı ortogonal matristir. Ayrıca $\overrightarrow{\mathbb{S}^*} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$F\overrightarrow{\mathbb{S}^*} = \overrightarrow{\mathbb{S}^*}$$

dir.

Teorem 5.1.3. $\mathcal{A}(\Phi_1, \mathbb{S}^*)$ve $\mathcal{A}(\Phi_2, \mathbb{S}^*)$, sırasıyla, Φ_1, Φ_2 açılı ve $\mathbb{S}^*$ (uzaysı) eksenli iki yarı ortogonal dual matris olsun. Bu durumda $\mathcal{A}(\Phi_1, \mathbb{S}^*)\, \mathcal{A}(\Phi_2, \mathbb{S}^*)$ çarpım matrisi $(\Phi_1 + \Phi_2)$ açılı ve $\mathbb{S}^*$ eksenli yarı ortogonal dual matristir.

İspat. Hipotezden

$$\mathcal{A}_{\Phi_1} = \mathcal{A}(\Phi_1, \mathbb{S}^*) \quad = (I + \sinh \Phi_1 \mathbb{S}^* + (-1 + \cosh \Phi_1)\, \mathbb{S}^{*2})$$

ve

$$\mathcal{A}_{\Phi_2} = \mathcal{A}(\Phi_2, \mathbb{S}^*) \quad = (I + \sinh \Phi_2 \mathbb{S}^* + (-1 + \cosh \Phi_2)\, \mathbb{S}^{*2})$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\Phi_1}\mathcal{A}_{\Phi_2} &= (I + \sinh \Phi_1 S^* + (-1 + \cosh \Phi_1)\, S^{*2})\, (I + \sinh \Phi_2 S^* + (-1 + \cosh \Phi_2)\, S^{*2}) \\
&= I + (\sinh \Phi_1 \cosh \Phi_2 + \cosh \Phi_1 \sinh \Phi_2)\, S^* \\
&+ (-1 + (\cosh \Phi_1 \cosh \Phi_2 + \sinh \Phi_1 \sinh \Phi_2))\, S^{*2} \\
&= I + \sinh(\Phi_1 + \Phi_2)\, S^* + (-1 + \cosh(\Phi_1 + \Phi_2))\, S^{*2}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $\mathcal{A}(\Phi_1, \mathbb{S}^*)\, \mathcal{A}(\Phi_2, \mathbb{S}^*)$, $(\Phi_1 + \Phi_2)$ açılı ve $\mathbb{S}^*$ eksenli yarı ortogonal dual matristir.

ii) $\overrightarrow{V_{\mathbf{Q}}}$ **zamansı dual bölünmüş vektör olsun. Bu durumda Q dual bölünmüş kuaterniyonu**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= A_0 + \sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}\,\frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}} \\
&= \cos\frac{\Phi}{2} + \sin\frac{\Phi}{2}\overrightarrow{\mathbf{S}^*}
\end{aligned} \tag{5.1.12}
$$

formunda ifade edilebilir. Burada

$$
\begin{aligned}
&\cos\frac{\Phi}{2} = A_0, \ \sin\frac{\Phi}{2} = \sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2} \\
&\overrightarrow{\mathbf{S}^*} = \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}} = S_1\overrightarrow{e_1} + S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} \\
&g\left(\overrightarrow{\mathbf{S}^*}, \overrightarrow{\mathbf{S}^*}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{S}^*}\right)^2 = \overrightarrow{\mathbf{S}^*}\,\overrightarrow{\mathbf{S}^*} = -1
\end{aligned} \tag{5.1.13}
$$

dir. Ayrıca $\frac{\Phi}{2} = \frac{\varphi}{2} + \epsilon\frac{\varphi^*}{2}$ dual açısı ve $\mathbf{Q}$ birim dual bölünmüş kuaterniyonunun $\overrightarrow{\mathbf{S}^*}$ ekseni, sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
\frac{\varphi}{2} &= \arccos(a_0) \\
\frac{\varphi^*}{2} &= -\frac{a_0^*}{\sqrt{1 - a_0^2}} \\
\overrightarrow{S_0} &= \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} \\
\overrightarrow{S_0^*} &= \frac{a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} + \frac{a_0 a_0^*\left(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}\right)}{\sqrt{\left(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right)^3}}
\end{aligned}
$$

biçimindedir ve

$$
\overrightarrow{\mathbf{S}^*} = \overrightarrow{S_0} + \epsilon\overrightarrow{S_0^*} \tag{5.1.14}
$$

dir. Teorem 5.1 deki $\mathcal{A}$ matrisinin bileşenleri (5.1.13) ile verilen eşitlikler yardımıyla

$$
\begin{aligned}
A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2 &= 1+(1-\cos\Phi)\,(S_2^2+S_3^2)\\
A_0^2-A_1^2-A_2^2+A_3^2 &= 1+(1-\cos\Phi)\,(-S_1^2+S_3^2)\\
A_0^2-A_1^2+A_2^2-A_3^2 &= 1+(1-\cos\Phi)\,(-S_1^2+S_2^2)\\
2\,(A_0A_3+A_1A_2) &= \sin\Phi S_3+(1-\cos\Phi)\,S_1S_2\\
2\,(A_0A_3-A_1A_2) &= \sin\Phi S_3-(1-\cos\Phi)\,S_1S_2\\
2\,(-A_0A_2+A_1A_3) &= -\sin\Phi S_2+(1-\cos\Phi)\,S_1S_3\\
-2\,(A_0A_2+A_1A_3) &= -\sin\Phi S_2-(1-\cos\Phi)\,S_1S_3\\
2\,(A_0A_1-A_2A_3) &= \sin\Phi S_1-(1-\cos\Phi)\,S_2S_3\\
-2\,(A_0A_1+A_2A_3) &= -\sin\Phi S_1-(1-\cos\Phi)\,S_2S_3
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $\cos^2\dfrac{\Phi}{2}+\sin^2\dfrac{\Phi}{2}=1$, $\cos^2\dfrac{\Phi}{2}-\sin^2\dfrac{\Phi}{2}=\cos\Phi$, $\cos^2\dfrac{\Phi}{2}=\dfrac{1+\cos\Phi}{2}$, $\sin^2\dfrac{\Phi}{2}=\dfrac{1-\cos\Phi}{2}$ ve $\sin\Phi=2\sin\dfrac{\Phi}{2}\cos\dfrac{\Phi}{2}$ eşitlikleri kullanıldı. O halde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} = &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \sin\Phi \begin{bmatrix} 0 & S_3 & -S_2\\ S_3 & 0 & -S_1\\ -S_2 & S_1 & 0\end{bmatrix}\\
&+(-1+\cos\Phi)\begin{bmatrix} S_2^2+S_3^2 & -S_1S_2 & -S_1S_3\\ S_1S_2 & -S_1^2+S_3^2 & -S_2S_3\\ S_1S_3 & -S_2S_3 & -S_1^2+S_2^2\end{bmatrix} \qquad (5.1.15)\\
\mathcal{A} = &\; I+\sin\Phi\mathbb{S}^{*}+(-1+\cos\Phi)\,\mathbb{S}^{*2}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Burada

$$\mathbb{S}^* = \begin{bmatrix} 0 & S_3 & -S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.1.16)$$

olmak üzere

$$\mathbb{S}^{*T} = -\varepsilon \mathbb{S}^* \varepsilon$$

dir. Yani $\mathbb{S}^*$ matrisi dual antisimetrik matris, $(\mathbb{S}^*)^{2n-1} = (-1)^{n+1} \mathbb{S}^*$ ve $(\mathbb{S}^*)^{2n} = (-1)^{n+1} (\mathbb{S}^*)^2$ dir.

$\mathcal{A}$ matrisinin $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ dual bölünmüş vektöründe ki görüntüsü vektörel formda

$$\begin{aligned} \mathcal{A}X &= X + \sin\Phi \left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \wedge X\right) + (1-\cos\Phi)\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \wedge \left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \wedge X\right)\right) \\ &= X + \sin\Phi \left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \wedge X\right) + (1-\cos\Phi)\left(-g\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*}, X\right)\overrightarrow{\mathbb{S}^*} + g\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*}, \overrightarrow{\mathbb{S}^*}\right) X\right) \\ &= \cos\Phi X + \sin\Phi \left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \wedge X\right) - (1-\cos\Phi)\, g\left(\overrightarrow{\mathbb{S}^*}, X\right)\overrightarrow{\mathbb{S}^*} \end{aligned} \qquad (5.1.17)$$

olarak elde edilir. X yerine $\overrightarrow{\mathbb{S}^*} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$ birim dual bölünmüş vektörünü alırsak

$$\mathcal{A}\overrightarrow{\mathbb{S}^*} = \overrightarrow{\mathbb{S}^*}$$

dir. O halde $\overrightarrow{\mathbb{S}^*}$ (5.1.15) ile verilen $\mathcal{A}$ özel yarı ortogonal matrisinin eksenidir. Ayrıca $\mathcal{A}$ matrisini $\sin\Phi = \sin\varphi + \epsilon\varphi^*\cos\varphi$ ve $\cos\Phi = \cos\varphi - \epsilon\varphi^*\sin\varphi$ eşitlikleri yardımıyla

$$\mathcal{A} = \left(I_3 + \sin\varphi\mathbb{S}^* + (1-\cos\varphi)\,\mathbb{S}^{*2}\right) + \epsilon\varphi^*\left(\cos\varphi\mathbb{S}^* + \sin\varphi\mathbb{S}^{*2}\right) \qquad (5.1.18)$$

olarak ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} G &= (I_3 + \sin\varphi\mathbb{S}^* + (1-\cos\varphi)\,\mathbb{S}^{*2}) \\ H &= (\cos\varphi\mathbb{S}^* + \sin\varphi\mathbb{S}^{*2}) \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^*G &= \mathbb{S}^*\,(I_3 + \sin\varphi\mathbb{S}^* + (1-\cos\varphi)\,\mathbb{S}^{*2}) \\ &= \cos\varphi\mathbb{S}^* + \sin\varphi\mathbb{S}^{*2} \\ &= H \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G\mathbb{S}^* &= (I_3 + \sin\varphi\mathbb{S}^* + (1-\cos\varphi)\,\mathbb{S}^{*2})\,\mathbb{S}^* \\ &= \cos\varphi\mathbb{S}^* + \sin\varphi\mathbb{S}^{*2} \\ &= H \end{aligned}$$

dir. O halde (5.1.18) eşitliği

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbf{S}^*)\, G \\ &= G\, (I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbf{S}^*) \end{aligned} \qquad (5.1.19)$$

olarak verilebilir. (5.1.19) denkleminde $\varphi = 0$ alınırsa

$$\mathcal{A} = I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbf{S}^* \qquad (5.1.20)$$

dır. Ayrıca $\varphi^* = 0$ alınırsa

$$\mathcal{A} = G$$

dir. Bir $X = x + \epsilon x^*$ birim dual bölünmüş vektörünün $(I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbf{S}^*)$ matrisi altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned} Y &= (I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbf{S}^*)\, (X) \\ &= (I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbf{S}^*)\, (x + \epsilon x^*) \\ &= x + \epsilon\, (x^* + \varphi^* \mathbf{S}^* x) \\ &= \overrightarrow{x} + \epsilon \left(\overrightarrow{x^*} + \varphi^* \left(\overrightarrow{S_0} \wedge \overrightarrow{x} \right) \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$\epsilon \overrightarrow{\mathbf{S}^*} = \epsilon \left(\overrightarrow{S_0} + \epsilon \overrightarrow{S_0^*} \right) = \epsilon \overrightarrow{S_0}$$

dir ve Y birim dual vektör olur.

Yani $(I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbf{S}^*)$ matrisi $\overrightarrow{x}$ vektörünü sabit bırakırken, $\overrightarrow{x^*}$ vektörünü $\overrightarrow{x^*} + \varphi^* \left(\overrightarrow{S_0} \wedge \overrightarrow{x}\right)$ vektörüne dönüştürmektedir.

O halde $(I_3 + \epsilon\varphi^* \mathbf{S}^*)$ matrisi X birim dual bölünmüş vektörüne karşılık gelen yönlü doğruyu kendisine paralel diğer bir doğruya dönüştürmektedir.

Bir $X = x + \epsilon x^*$ birim dual bölünmüş vektörünün

$$\begin{aligned} G &= \left(I_3 + \sin\varphi \mathbf{S}^* + (1 - \cos\varphi)\, \mathbf{S}^{*2}\right) \\ &= \left(I_3 + \sin\varphi S_0 + (1 - \cos\varphi)\, S_0^2\right) + \epsilon \left(\sin\varphi S_0^* + (1 - \cos\varphi)\left(S_0 S_0^* + S_0^* S_0\right)\right) \\ &= Ad_q + \epsilon \mathcal{J} \end{aligned}$$

matrisi altındaki görüntüsü

$$GX = Ad_q x + \epsilon \left(Ad_q x^* + \mathcal{J} x\right)$$

dir. Burada Ad_q (3.4.15) eşitliği ile verilen matris formundadır ve $\mathcal{J} = \sin\varphi S_0^* + (1 - \cos\varphi)\left(S_0 S_0^* + S_0^* S_0\right)$ dir.

Yani G matrisi x vektörünü $Ad_q x$ vektörüne ve x^* vektörünü $\left(Ad_q x^* + \mathcal{J}\right) x$ vektörüne dönüştürmektedir.

O halde G matrisi X birim dual bölünmüş vektörüne karşılık gelen doğruyu φ açısı kadar döndürmektedir. G matrisine Dönme matrisi (operatörü) diyeceğiz.

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
G\varepsilon G^T\varepsilon &= \left(I_3+\sin\varphi\mathbf{S}^*+(1-\cos\varphi)\,\mathbf{S}^{*2}\right)\varepsilon\left(I_3-\sin\varphi\varepsilon\mathbf{S}^*\varepsilon+(1-\cos\varphi)\,\varepsilon\mathbf{S}^*\varepsilon\right)\varepsilon \\
&= \left(\varepsilon+\sin\varphi\mathbf{S}^*\varepsilon+(1-\cos\varphi)\,\mathbf{S}^{*2}\varepsilon\right)\left(\varepsilon-\sin\varphi\varepsilon\mathbf{S}^*+(1-\cos\varphi)\,\varepsilon\mathbf{S}^{*2}\right) \\
&= I_3+\left(2\,(1-\cos\varphi)-\sin^2\varphi+(1-\cos\varphi)^2\right)\mathbf{S}^{*2} \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
G^T\varepsilon G\varepsilon &= \left(\varepsilon-\sin\varphi\varepsilon\mathbf{S}^*+(1-\cos\varphi)\,\varepsilon\mathbf{S}^{*2}\right)\left(\varepsilon+\sin\varphi\mathbf{S}^*\varepsilon+(1-\cos\varphi)\,\mathbf{S}^{*2}\varepsilon\right) \\
&= I_3+\left(2\,(1-\cos\varphi)+\sin^2\varphi+(1-\cos\varphi)^2\right)\varepsilon\mathbf{S}^{*2}\varepsilon \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

dir. G matrisinin determinantı

$$
\begin{vmatrix}
1+(1-\cos\varphi)\left(S_2^2+S_3^2\right) & \sin\varphi S_3-(1-\cos\varphi)\,S_1S_2 & -\sin\varphi S_2-(1-\cos\varphi)\,S_1S_3 \\
\sin\varphi S_3+(1-\cos\varphi)\,S_1S_2 & 1+(1-\cos\varphi)\left(-S_1^2+S_3^2\right) & -\sin\varphi S_1-(1-\cos\varphi)\,S_2S_3 \\
-\sin\varphi S_2+(1-\cos\varphi)\,S_1S_3 & \sin\varphi S_1-(1-\cos\varphi)\,S_2S_3 & 1+(1-\cos\varphi)\left(-S_1^2+S_2^2\right)
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+2\left(-S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)+\left(-S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)^2 \\
&-2\left(\cos\varphi\right)\left(-S_1^2+S_3^2+S_2^2\right)-\left(\sin^2\varphi\right)\left(-S_1^2+S_3^2+S_2^2\right) \\
&-2\left(\cos\varphi\right)\left(-S_1^2+S_3^2+S_2^2\right)^2+\left(\cos^2\varphi\right)\left(-S_1^2+S_3^2+S_2^2\right)^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Yani G matrisi $\overrightarrow{\mathbf{S}^*}$ dual eksenli yarı ortogonal bir matristir. F matrisi (i) deki ile aynıdır.

Teorem 5.1.4. $\mathcal{A}(\Phi_1, \mathbb{S}^*)$ve $\mathcal{A}(\Phi_2, \mathbb{S}^*)$, sırasıyla, Φ_1, Φ_2 açılı ve $\mathbb{S}^*$ (zamansı) eksenli iki yarı ortogonal dual matris olsun. Bu durumda $\mathcal{A}(\Phi_1, \mathbb{S}^*)\,\mathcal{A}(\Phi_2, \mathbb{S}^*)$ çarpım matrisi, $(\Phi_1 + \Phi_2)$ açılı ve $\mathbb{S}^*$ eksenli yarı ortogonal dual matristir.

İspat. Hipotezden

$$\mathcal{A}_{\Phi_1} = \mathcal{A}(\Phi_1, \mathbb{S}^*) \quad = I + \sin\Phi_1 \mathbb{S}^* + (1 - \cos\Phi_1)\,\mathbb{S}^{*2}$$

ve

$$\mathcal{A}_{\Phi_2} = \mathcal{A}(\Phi_2, \mathbb{S}^*) \quad = I + \sin\Phi_2 \mathbb{S}^* + (1 - \cos\Phi_2)\,\mathbb{S}^{*2}$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\Phi_1}\mathcal{A}_{\Phi_2} &= (I + \sin\Phi_1 \mathbb{S}^* + (1 - \cos\Phi_1)\,\mathbb{S}^{*2})\,(I + \sin\Phi_2 \mathbb{S}^* + (1 - \cos\Phi_2)\,\mathbb{S}^{*2}) \\
&= I + (\sin\Phi_1 \cos\Phi_2 + \cos\Phi_1 \sin\Phi_2)\,\mathbb{S}^* \\
&\quad + (1 - (\cos\Phi_1 \cos\Phi_2 - \sin\Phi_1 \sin\Phi_2))\,\mathbb{S}^{*2} \\
&= I + \sin(\Phi_1 + \Phi_2)\,\mathbb{S}^* + (1 - \cos(\Phi_1 + \Phi_2))\,\mathbb{S}^{*2}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $\mathcal{A}(\Phi_1, \mathbb{S}^*)\,\mathcal{A}(\Phi_2, \mathbb{S}^*)$, $(\Phi_1 + \Phi_2)$ açılı ve $\mathbb{S}^*$ eksenli yarı ortogonal dual matristir.

5.2. Hamilton Operatörleri ile Minkowski 3-Uzayında Vida Hareketinin Gösterimi

Bu bölümde, dual bölünmüş kuaterniyonlara karşılık gelen Hamilton matrisleri yardımıyla Minkowski 3-uzayında vida hareketi ifade edildi.

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} R_f \overline{\mathbf{Q}} \tag{5.2.1}$$

dönüşümünü ele alalım. Burada $\mathbf{R}$ ve R_f dual bölünmüş vektörler ve $\mathbf{Q}$ birim dual bölünmüş kuaterniyondur.

$\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ Hamilton operatörleri kullanılırsa (5.2.1) eşitliği

$$\mathbf{R} = \overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}}) R_f = \overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\,\overset{+}{H}(\mathbf{Q}) R_f \tag{5.2.2}$$

şeklinde yazabilir. $\mathbf{Q} = A_0 + A_1 \overrightarrow{e_1} + A_2 \overrightarrow{e_2} + A_3 \overrightarrow{e_3} = q + \epsilon q^*$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}}) \\
&= \overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\,\overset{+}{H}(\mathbf{Q}) \\
&= \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & -A_2 & -A_3 \\ -A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ -A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ -A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 & -2A_1A_2 + 2A_0A_3 & -2A_1A_3 - 2A_0A_2 \\ 0 & 2A_1A_2 + 2A_0A_3 & A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 & -2A_2A_3 - 2A_0A_1 \\ 0 & 2A_1A_3 - 2A_0A_2 & -2A_2A_3 + 2A_0A_1 & A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{A} \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

dir. Burada $\mathcal{A}$ matrisi (5.1.1) eşitliğiyle verilen 3×3 özel yarı ortogonal dual matristir. Teorem 4.3.3. den $\overset{+}{H}$ (**Q**) ve $\overset{-}{H}$ ($\overline{\mathbf{Q}}$) özel yarı ortogonal matrisler olduğu için $\overset{+}{H}$ (**Q**) $\overset{-}{H}$ ($\overline{\mathbf{Q}}$) çarpım matriside özel yarı ortogonal matristir. Dolayısıyla (5.2.1)

dönüşümü $R_f = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{f1} \\ R_{f2} \\ R_{f3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \vec{R_f} \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathcal{D} R_f \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{A} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \vec{R_f} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \mathcal{A}\vec{R_f} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

olarak verilebilir. O halde (5.2.1) eşitliğiyle verilen dönüşüm Minkowski 3-uzayında vida hareketi ifade eder.

(5.2.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} R_f &= \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{R}\mathbf{Q} \\ &= \overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\ \overset{-}{H}(\mathbf{Q})\mathbf{R} \\ &= \overset{-}{H}(\mathbf{Q})\ \overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\mathbf{R} \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

olarak bulunur. $\mathbf{Q}\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{Q} = 1$ eşitliğinin zamana göre türevi ("." ile gösterilecek)

$$\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}\,\dot{\overline{\mathbf{Q}}} = \dot{\overline{\mathbf{Q}}}\,\mathbf{Q} + \overline{\mathbf{Q}}\,\dot{\mathbf{Q}} = 0$$

dır. Buradan

$$\dot{\overline{\mathbf{Q}}}\,\mathbf{Q} = -\overline{\mathbf{Q}}\,\dot{\mathbf{Q}}$$

$$\overset{-}{H}(\mathbf{Q})\,\overset{-}{H}(\dot{\overline{\mathbf{Q}}}) = -\,\overset{-}{H}(\dot{\mathbf{Q}})\,\overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}})$$

ve

$$\mathbf{Q}\,\dot{\overline{\mathbf{Q}}} = -\,\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}}$$

$$\overset{-}{H}(\dot{\overline{\mathbf{Q}}})\,\overset{-}{H}(\mathbf{Q}) = -\,\overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\,\overset{-}{H}(\dot{\mathbf{Q}})$$

dır. Dolayısıyla **R** nin zamana göre türevi, kendisi cinsinden

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}} &= \overset{+}{H}(\dot{\mathbf{Q}})\,\overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}})R_f + \overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\overset{-}{H}(\dot{\overline{\mathbf{Q}}})R_f \\
&= \overset{+}{H}(\dot{\mathbf{Q}})\,\overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\,\overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\,\overset{-}{H}(\mathbf{Q})\mathbf{R} + \overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\overset{-}{H}(\dot{\overline{\mathbf{Q}}})\,\overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\,\overset{-}{H}(\mathbf{Q})\mathbf{R} \\
&= \left(\overset{+}{H}(\dot{\mathbf{Q}})\,\overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\right)\left(\overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\,\overset{-}{H}(\mathbf{Q})\right)\mathbf{R} + \left(\overset{+}{H}(\mathbf{Q})\,\overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\right)\left(\overset{-}{H}(\dot{\overline{\mathbf{Q}}})\,\overset{-}{H}(\mathbf{Q})\right)\mathbf{R} \\
&= \overset{+}{H}(\dot{\mathbf{Q}})\,\overset{+}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\mathbf{R} - \overset{-}{H}(\overline{\mathbf{Q}})\,\overset{-}{H}(\dot{\mathbf{Q}})\mathbf{R} \\
&= \overset{+}{H}(\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}})\mathbf{R} - \overset{-}{H}(\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}})\mathbf{R} \\
&= \left(\overset{+}{H}(\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}}) - \overset{-}{H}(\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}})\right)\mathbf{R} \\
&= \Omega\mathbf{R}
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

olarak bulunur.

Q birim dual bölünmüş kuaterniyon olduğundan $\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{U} = \mathbf{U}_1\overrightarrow{e_1} + \mathbf{U}_2\overrightarrow{e_2} + \mathbf{U}_3\overrightarrow{e_3}$ formunda bir dual bölünmüş vektördür. (4.3.52) ve (4.3.53) eşitliklerinden Ω matrisi

$$\Omega = \overset{+}{H}(\mathbf{U}) - \overset{-}{H}(\mathbf{U})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -U_1 & U_2 & U_3 \\ U_1 & 0 & U_3 & -U_2 \\ U_2 & U_3 & 0 & -U_1 \\ U_3 & -U_2 & U_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -U_1 & U_2 & U_3 \\ U_1 & 0 & -U_3 & U_2 \\ U_2 & -U_3 & 0 & U_1 \\ U_3 & U_2 & -U_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 & -U_2 \\ 0 & U_3 & 0 & -U_1 \\ 0 & -U_2 & U_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{K} \end{array} \right]$$

bulunur. Burada $\mathcal{K}$ matrisi (5.1.16) eşitliğinde verilen $\mathbb{S}^*$ matrisi formunda 3×3 dual antisimetrik matristir. Ayrıca Ω matrisi 4×4 dual antisimetrik matristir.

Dual bölünmüş kuaterniyon çarpımına göre (5.2.6) denklemi

$$\dot{\mathbf{R}} = (\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}})\mathbf{R} - \mathbf{R}(\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}}) \tag{5.2.7}$$

yazılabilir.

Böylece, (5.2.6) eşitliğini vektörel çarpım formunda

$$\dot{\mathbf{R}} = 2(\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}}) \wedge \mathbf{R} \tag{5.2.8}$$

olarak yazabiliriz.

Ayrıca **R** nin zamana göre türevi

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{W} \wedge \mathbf{R} \tag{5.2.9}$$

şeklinde verilebilir. Burada **W** ya bir doğrunun hız vidasının dual vektörü veya açısal hız vektörü denir. (5.2.9) diferensiyel denkleminin çözümü (5.2.4) ile verilen denklemdir ve vida hareketinin tanımlanmasında sıklıkla kullanılır. **R** keyfi bir vektör olduğundan, (5.2.8) ve (5.2.9) denklemlerinden

$$\mathbf{W} = 2\,\dot{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{Q}} \tag{5.2.10}$$

veya denk olarak,

$$\mathbf{W} = 2\,\overset{+}{H}\left(\dot{\mathbf{Q}}\right)\overline{\mathbf{Q}} = 2\,\overset{-}{H}\left(\overline{\mathbf{Q}}\right)\dot{\mathbf{Q}} \tag{5.2.11}$$

dir.

Üstelik

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2}\mathbf{W}\mathbf{Q} \tag{5.2.12}$$

veya denk olarak,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2}\overset{+}{H}(\mathbf{W})\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\overset{-}{H}(\mathbf{Q})\mathbf{W} \tag{5.2.13}$$

dır.

W nin reel ve dual bileşenleri, sırasıyla,

$$w = 2\,\dot{q}\,\overline{q} \tag{5.2.14}$$

ve

$$v_0 = 2(\dot{q}\,\overline{q}^{*} + \dot{q}^{*}\,\overline{q}) \tag{5.2.15}$$

veya

$$v_0 = 2\left[\overset{+}{H}(\dot{q})\overline{q}^{*} + \overset{+}{H}(\dot{q}^{*})\overline{q}\right] \tag{5.2.16}$$

dır.

$\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ özel yarı ortogonal operatörler olduğundan, burada verilen formül **W**, **Q** ve onun zamana göre türevi arasındaki bağıntının tekliğini sağlar.

KAYNAKLAR

Agrawal, O.P. 1987. Hamilton Operators and Dual-Number-Quaternions in Spatial Kinematics. Mech. Mach. Theory 22(6), 569-575.

Albayrak, N. 1996. Yarı Riemann Manifoldlarının İzometrileri. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ankara.

Boothby, W.M. 1975. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Acedemic Press. London.

Bottema, O. and Roth, B. 1979. Theoretical Kinematics. North Holland. Publ. Company New York.

Chevally, C. 1946. Theory of Lie Groups. Princeton University. Press. New Jersey.

Das, A. 1993. The Special Theory of Relativity. Springer- Verlag New York, Inc.

Gürlebeck, K. and Sprössig. W. 1997. Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers. John Wiley and Sons. Toronto.

Hacısalihoğlu, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No.2.

Hiller, M.and Woernle, C. 1984. A Unified Representation of Spatial Displacement. Mech. Mach. Theory. Vol. 19, No.6, 477-486.

Howard, D. F. 1991. İntroduction to Compact Lie Groups. World Scientific Publishing. Co. Ltd.

Inoguchi, J. 1998. Timelike Surfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski 3-Space. Tokyo J. Math. Vol. 21. No.1. 140-152

Karger, A. and Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breache Science Publishers. Switzerland.

Müller, H.R.1963. Kinematik dersleri. Ankara Üniversitesi Basımevi. Ankara.

O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry. Acedemic Press. New York.

Rooney, J. 1977. A Survey of Representations of Spatial Rotation About a Fixed Point. Environment and Planning B. Vol.4, 185-210.

Veldkamp, G.R. 1976. On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous, Spatial Kinematics. Mech. Mach. Theory. Vol. 11, No.2-E, 141-156.

Yang, A.T and Freudenstein, F. 1964. Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanism. Trans. ASME. Journal of

Applied Mechanics. 86E. 300-308.

Yaylı, Y. 1988. Hamilton Hareketleri ve Lie Grupları. Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Yaylı, Y. 1992. Homothetic Motions at E^4. Mech. Mach. Theory. Vol. 27, No.3, 303-305.

Yaylı, Y. 1997. Unit Octanions and Some Geometrical Interpretations. Int. J. Math. Sci. Technol. Vol. 29, No. 5, 749-789.

Yaylı, Y., Çalışkan, A.and Uğurlu, H.H. 2000. The E. Study Maps of Circles on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres H_0^2 and S_1^2. Math. Proc. R. Ir. Acad. 102 A, No.1, 37-47

Ward, J.P. 1997. Quaternions and Cayley Numbers. Kluwer Academic Publishers. London.

Weinstein, T. 1995. Lorentz Surfaces. Rutgers University, New Brunswick. New Jersey.

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sakarya'da tamamladı. 1990 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1994 yılında Matematikçi ünvanıyla mezun oldu. 1994 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 1998 yılında Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Aynı yıl, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Doktora öğrenimine başladı.

Mart 1997'de Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.