

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

H_N YÖNTEMİNİN DÜZLEM GEOMETRİDEKİ POLARİZASYON
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Menekşe KARAHASANOĞLU

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2004

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

H_N YÖNTEMİNİN DÜZLEM GEOMETRİDEKİ POLARİZASYON PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Menekşe KARAHASANOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ayşe KAŞKAŞ

Vektör transfer denkleminin fiziksel uygulamaları çeşitli saçılma durumları için H -fonksiyonları, P yaklaşımı, Sobolev yöntemi ve Case yöntemi kullanılarak yapılmaktadır. Bu çözüm teknikleri kullanılarak albedo, geçirgenlik katsayısı, difüzyon katsayısı, ekstrapolasyon uzaklığı, ışık şiddeti gibi fiziksel parametreler hesaplanabilir. Ekstrapolasyon uzaklığı Milne problemi kullanılarak bulunabilir.

Vektör transfer denkleminin fiziksel uygulamalardan birisi olan Milne problemi H -fonksiyonları yardımıyla ve Case' in singüler- özfonksiyon- yöntemiyle çözülmüştür. Bu çalışmada, Milne problemi, nötron transport denkleminin fiziksel uygulamaları için geliştirilen H_N yöntemi kullanılarak çözülmüş ve ω ' nın bazı değerleri için ekstrapolasyon uzaklığı bulunmuştur. Bulunan bu nümerik sonuçlar literatürdeki sonuçlarla uyum içerisindedir.

2004, 51 sayfa

ANAHTAR KELİMELEER : H_N yöntemi, Milne problemi, Rayleigh saçılması, vektör transfer denklemi

ABSTRACT

Master Thesis

THE APPLICATION OF H_N METHOD FOR POLARIZATION PROBLEMS IN PLANE GEOMETRY

Menekşe KARAHASANOĞLU

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Physics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ayşe KAŞKAŞ

In the physical applications of vector equation of transfer for various scattering processes H- functions, P_n approximation, Sobolev and Case methods are used. Using these different solution techniques physical parameters including albedo, extrapolation distance, radiation intensity, transmission and diffusion coefficients can be calculated. Extrapolation distance is found by Milne problem.

Milne problem, one of the physical application of polarized radiative transfer equation, is solved with H- functions and singular- eigenfunction- method. In this work, Milne problem is solved with H_N method developed for the physical applications of neutron transport equation and calculated extrapolation distance for some values of ω . Our numerical results are in good agreement with the numerical results of literature.

2004, 51 pages

Key Words : H_N method, Milne problem, Rayleigh scattering, vector equation of transfer

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması sırasında her aŐamada çalıŐmalarımı titizlikle takip ederek beni yönlendiren ve bilgisayar programlama konusunda yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ayşe KAŞKAŞ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)' a teşekkür ederim.

Ayrıca, yardımını gördüğüm Sayın Yrd. Doç. Mustafa etin GÜLEÇYÜZ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) ve Sayın ArŐ. Gör. R. Gökhan TÜRECİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)' ye teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Menekşe KARAHASANOĞLU

Ankara, Ađustos 2004

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KUTUPLANMA.....	4
2.1. Kutuplanma Çeşitleri.....	5
2.1.1. Çizgisel kutuplanma.....	5
2.1.2. Dairesel kutuplanma.....	7
2.1.3. Eliptik kutuplanma.....	8
2.2. Kutuplanmamış Işıktan Kutuplanmış Işık Elde Edilmesi.....	9
2.2.1. Seçici soğurma ile kutuplanma.....	9
2.2.2. Yansıma ile kutuplanma.....	10
2.2.3. Çift kırılma ile kutuplanma.....	11
2.2.4. Saçılma ile kutuplanma.....	13
3. STOKES PARAMETRELERİ ve POINCARE KÜRESİ.....	16
4. KUTUPLANMIŞ IŞIK İÇİN VEKTÖR TRANSFER DENKLEMİ.....	20
5. VEKTÖR TRANSFER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ.....	28
6. TAM- BÖLGE DİKLİK BAĞINTILARI.....	35
7. H_N YÖNTEMİNİN VEKTÖR TRANSFER DENKLEMİNE	
UYGULANMASI.....	38
7.1. H_N Yöntemi ile Milne Problemi.....	39
8. SONUÇ	48
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	51

SİMGELER DİZİNİ

E	Elektrik alan vektörü
E_{ox}, E_{oy}	Genlik
k	Yayıma sabiti
w	Açısal frekans
δ	İki dalga arasındaki faz farkı
I	Işık şiddeti, Stokes vektörü
r	Konum vektörü
λ	Dalgaboyu
d	Molekül çapı
I	Toplam ışık şiddeti
Q	Çizgisel olarak kutuplanmış ışığın yatay ve düşey bileşenleri arasındaki şiddet farkı
U	Çizgisel olarak kutuplanmış ışığın $+45^\circ$ ve -45° 'de yönelen bileşenleri arasındaki şiddet farkı
V	Sağa ve sola dairesel olarak kutuplanmış bileşenler arasındaki şiddet farkı
$f(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t)$	Dağılım fonksiyonu
ν	Frekans
$\boldsymbol{\Omega}$	Fotonun hareket doğrultusundaki birim vektör
t	Zaman
μ	Yayılan ışımının $\boldsymbol{\Omega}$ eksenine yaptığı açının kosinüsü
V	Hacim
σ_a	Soğurum katsayısı
σ_s	Saçılma katsayısı
c	Fotonun hızı
τ	Optiksel değişken
$K(\mu, \mu')$	Saçılma faz matrisi
ω	Single scattering albedo (saçılma olasılığı)
$\mathbf{M}(\eta)$	Normalizasyon vektörü

$\Phi(\eta_0, \mu)$	Kesikli çözümler
$\Phi(\eta, \mu)$	Sürekli çözümler
$\pm\eta_0$	$\Phi(\eta_0, \mu)$ özfonksiyonlarına karşı gelen özdeğerler
$\pm\eta$	$\Phi(\eta, \mu)$ özfonksiyonlarına karşı gelen özdeğerler
$\Lambda(\eta_0)$	Dağılım bağıntısı
$\Psi(\mu)$	Karakteristik matris
$\mathbf{M}_\alpha(\eta)$	Sürekli durum normalizasyon vektörleri
$A(\pm\eta_0)$	Açılım katsayıları
$A_\alpha(\eta)$	Açılım katsayıları
$N(\pm\eta_0)$	Normalizasyon sabiti
ρ_{as}	Yoğunluk bileşeni
τ_0	Ekstrapolasyon uzaklığı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	z-doğrultusunda yayılan elektromanyetik dalga.....	4
Şekil 2.2.	Yayıma yönünde gözlenen kutuplanmamış bir ışık demeti.....	5
Şekil 2.3	x eksenine θ açısı yapan çizgisel olarak kutuplanmış bir E alanı.....	5
Şekil 2.4	Çizgisel kutuplanma.....	7
Şekil 2.5	Dairesel kutuplanma.....	8
Şekil 2.6	Eliptik kutuplanma.....	9
Şekil 2.7	Kutuplanmamış ışığın kutuplayıcıya gelişi.....	10
Şekil 2.8	(a) Kutuplanmamış bir ışık yansıtıcı bir yüzeye geldiğinde, yansıyan .ve kırılan demetler (b) Geliş açısı, θ_p , kutuplanma açısına eşit olduğunda, yansımış demetin tamamen kutuplanması.....	11
Şekil 2.9.	Kalsit kristaline giren kutuplanmamış ışığın olağan (O) ışını ve olağandışı (E) ışını olmak üzere ikiye ayrılması.....	12
Şekil 2.10.	İçerisinde bir S kaynağı olan çift kırılma yapan bir kristal.....	13
Şekil 2.11.	Kutuplanmamış güneş ışığın hava molekülleri tarafından saçılması...	14
Şekil 3.1.	Poincare küresi.....	16
Şekil 3.2.	χ açısı elektrik alan genliğinin periyodik olarak değişimi olan çizgi boyunca yönelimini temsil eder.....	18
Şekil 4.1.	Özgül (spesifik) ışınım şiddetinin tanımı.....	27
Şekil 7.1.	Paralel ışının pürüzsüz ve pürüzlü yüzeyden yansımaları.....	39

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 7.1.	$\omega = 0.3$ için kesikli özdeğer ve ekstrapolasyon uzaklığı.....	46
Çizelge 7.2.	$\omega = 0.6$ için kesikli özdeğer ve ekstrapolasyon uzaklığı.....	46
Çizelge 7.3.	$\omega = 0.9$ için kesikli özdeğer ve ekstrapolasyon uzaklığı.....	47



1. GİRİŞ

1960'lı yıllarda Chandrasekhar'ın katkıları ile başlayan radyatif transfer teori konusundaki çalışmalar Mihalas (1978) ve Van de Hulst (1981) in katkıları ile büyük bir gelişme kaydetmiştir. Radyatif transfer, güneş ve gezegenlerin atmosferinde, deniz bilimlerinde, yüzeylerin yansıma özelliklerinin incelenmesi gibi fiziksel problemlerde, doku ve kan hücrelerinden yansıma ve saçılma gibi biofizik konularında geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Radyatif transfer denklemleri ışığın kutuplanması göz önüne alınarak da incelenebilir. Başlangıçta kutuplanmamış bir ışın, atmosfer içerisine girdiğinde saçılma düzlemine dik ve paralel olarak kısmen kutuplanabilir. Bu durumda transfer denklemi, kutuplanma derecesi, kutuplanma düzlemi, şiddet ve verilen herhangi bir doğrultuda ve her bir noktada ışının eliptikliği durumları belirtilecek şekilde tanımlanabilir. Ancak bu kadar çeşitli faktörün transfer denkleminde analitik olarak belirtilmesi mümkün değildir. Bu nedenle radyatif transfer problemleri bazı özel şartlar altında incelenerek çeşitli saçılma durumları için albedo, geçirgenlik katsayısı, difüzyon katsayısı, ekstrapolasyon uzaklığı, ışık şiddeti gibi fiziksel parametreler hesaplanabilir. Bu tür problemler astrofizikte, gezegenlerin atmosferinin veya bir yıldızın dış tabakasındaki ısı dağılımının incelenmesinde, ortamın kutuplanma derecesinin ölçülmesinde önemli rol oynar.

Radyatif transferdeki kutuplanma olayının etkisi hem astrofizikçiler ve hem de nötron fizikçilerinin ilgi alanı olmuştur. Kutuplanmış ışın için transfer denklemleri Chandrasekhar (1946) ve Sobolev (1949) tarafından geliştirilmiştir. Rayleigh 1871 yılında kutuplanmamış ışığın saçılması ile ilgili çalışmaları yapmıştır. Daha sonra Chandrasekhar bu analizi, I (toplam ışın şiddeti), Q, U, ve V Stokes parametrelerini kullanarak kutuplanmanın durumunu belirten vektörel bir ifade geliştirmiş ve Rayleigh saçılması için radyatif transfer denklemini vektörel biçimde oluşturmuştur. Radyatif transfer denklemiyle elde edilmesi amaçlanan kutuplanmış ışın şiddeti Chandrasekhar tarafından H fonksiyonları, Sobolev tarafından ise lineer integral denklemleri kullanılarak bulunmuştur. Siewert (1967) ise radyatif transfer denklemini yarı-sonsuz ortam için kutuplanma durumunda, Case yöntemini kullanarak çözmüştür.

Domke (1975), bir yarı-sonsuz düzlem paralel ortamda korunumlu Rayleigh saçılması için radyatif transfer denklemini vektörel formda kullanmış ve skaler integral denklemlerini bir birincil kaynak dağılımı için Sobolev yöntemiyle çözmüştür.

Pompraning (1970), izotropik faz fonksiyonu için yarı-uzay albedo problemini asimptotik deneme fonksiyonuna bağlı olarak incelemiştir.

Saad (1983), Rayleigh kutuplu faz fonksiyonu ve kutuplanma üzerinden ortalaması alınan Rayleigh faz fonksiyonu için düzlem paralel ortamda yansıma ve geçirgenlik katsayılarını hesaplamıştır.

Viik (1993), korunumlu düzlem-paralel atmosferde farklı yansıma sınırlarının kutuplanmış ışığa alanına etkisini incelemiştir.

Wigner (1961) nötron kutuplanmasının kuantum mekaniksel etkilerini göz önüne alan nötron teorisini açıklamıştır. Bell ve Goad (1965), kutuplanmamış çekirdekle hızlı nötronların saçılmasında nötron kutuplanmasının etkisini P_1 yaklaşımıyla çözmüştür (Schnatz ve Siewert 1970).

Kutuplanmış ışığın saçılmasını içeren pek çok çalışma Chandrasekhar' ın korunumlu modeline dayanmasına rağmen günümüzde homojen ve homojen olmayan atmosfer için doğru soğurum etkilerini içeren single- scattering albedo (ω) dikkate alınır. Siewert ve Fraley (1967), Milne problemi ve diğer yarı- uzay problemlerini bulmak için ortamın içinde her yerde geçerli olan analitik çözümleri elde etmede, Case tarafından geliştirilen singüler- özfonksiyon- yöntemi kullanmışlardır. Bu son yöntem genel vektör transfer denkleminin tam-bölge tamlık ve diklik teoremlerinin bulunmasında kullanılmıştır.

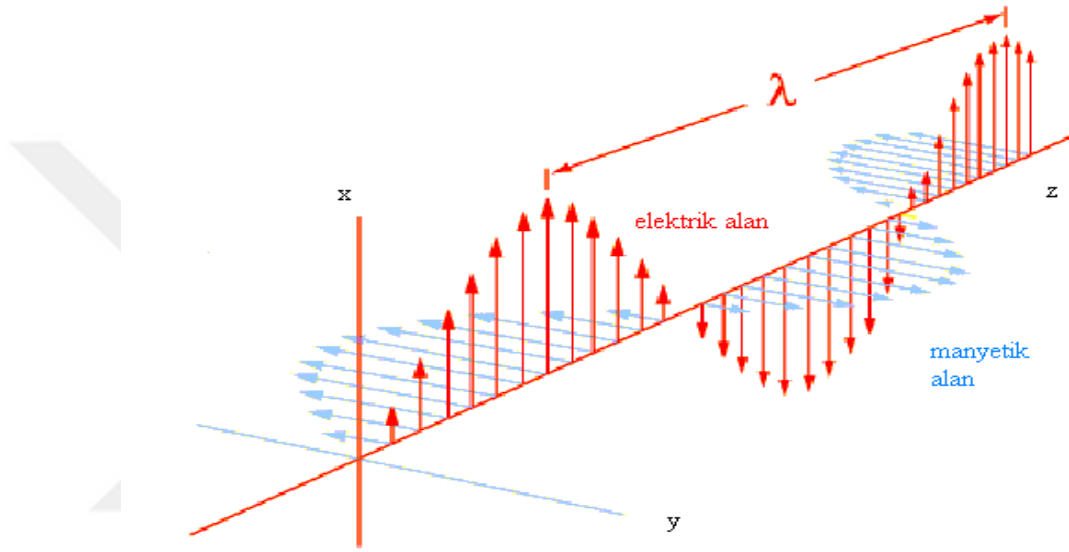
Çalışmamızda ikinci bölümde kutuplanma tanımlanarak, kutuplanma çeşitleri ve kutuplanmamış ışıktan kutuplanmış ışık elde etmek için geliştirilen dört yöntem anlatılmıştır. Üçüncü bölümde, vektör transfer denkleminin türetilmesinde kullanılacak olan Stokes parametreleri ve Stokes vektörünü anlamada kolaylık sağlayacak Poincare

küresi tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde, vektör transfer denkleminin türetilmesi gösterilmiştir. Beşinci bölümde, türetilen bu transfer denkleminin genel çözümü Case yöntemine benzer şekilde elde edilmiştir. Altıncı bölümde, tam- bölge diklik koşulları çıkarılmıştır. Yedinci bölümde ise nötron transport teoride kullanılan H_N yönteminin vektör transfer denklemine uygulanması anlatılarak bu yöntemle Milne problemi çözülmüştür. Sonuç bölümünde H_N yöntemi ile Milne probleminin çözümünden elde edilen nümerik sonuçlar, Siewert ve Schnatz (1971) tarafından H-fonksiyonlarıyla bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.



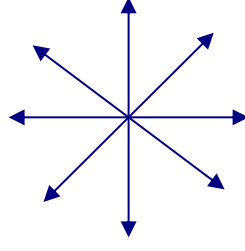
2. KUTUPLANMA

Kutuplanma ışığın bir özelliğidir. Kutuplanma olayı elektromanyetik dalgaların enine doğasının kesin kanıtıdır. Bu dalgalar, birbirlerine ve dalganın yayılma doğrultusuna dik olan ve titreşen elektrik ve manyetik alanlardan ibarettir. Bu nedenle elektromanyetik dalgalar enine dalgalardır (şekil 2.1.)



Şekil 2.1. z-doğrultusunda yayılan elektromanyetik dalga

Rasgele bir ışık demeti, ışık kaynağındaki atom veya moleküller tarafından yayınlanan çok sayıda dalgalardan ibarettir. Her atom kendi elektrik alan yöneliminde dalga meydana getirir. Bu yönelim, atomik titreşmelerin de doğrultusudur. Elektromanyetik dalganın kutuplanma yönü, elektrik alanın titreşim yaptığı yön olarak tanımlanır. Fakat, bütün yönlerde titreşim mümkün olduğundan, bileşke elektromanyetik dalga, her bir atomik kaynağın ürettiği dalgaların üst üste gelmesidir. Sonuç, şekil 2.2. de gösterildiği gibi kutuplanmamış bir ışık dalgasıdır. Şekildeki dalganın yayılma yönü sayfaya diktir. Oklar, bileşke demeti meydana getiren her bir dalga için elektrik alan vektörü yönlerini göstermektedir. Herhangi bir noktada ve anda, sadece bir tane bileşke elektrik alanı vardır.



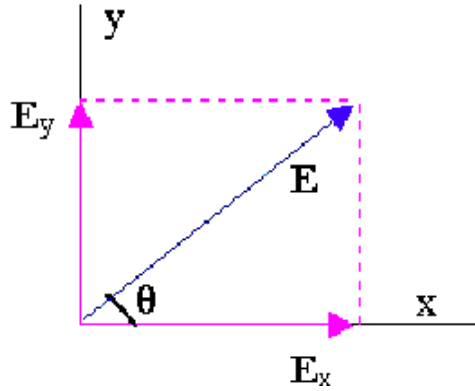
Şekil 2.2. Yayılma yönünde gözlenen kutuplanmamış bir ışık demeti

Işık ışınlarının yayılma yönüne dik düzlemdeki, \mathbf{E} elektrik alan vektörü ışığın değişik kutuplanma durumlarını içerir: (1) çizgisel kutuplanma, (2) dairesel kutuplanma, (3) eliptik kutuplanma.

2.1. Kutuplanma Çeşitleri

2.1.1. Çizgisel kutuplanma

Bir dalga, belirli bir noktada, her an aynı yönde titreşiyorsa, bu dalgaya çizgisel olarak kutuplanmış veya düzlem kutuplu dalga denir. z yönünde hareket eden bir ışık demetinin, bir an için x eksenine ile θ açısı yapan bir elektrik alan vektörü olduğu düşünülün (şekil 2.3). Eğer E_x ve E_y bileşenlerinden bir tanesi her an sıfır veya θ açısı zaman içerisinde sabit kalırsa ışık çizgisel olarak kutuplanmış olur.



Şekil 2.3. x eksenine ile θ açısı yapan çizgisel olarak kutuplanmış bir \mathbf{E} alanı

Bu kutuplanmanın matematiksel gösterimi için z yönünde iki dik bileşenden oluşan bir elektrik alan ile yayılan elektromanyetik dalgaya bakılabilir (Anonim 2003).

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - wt) \quad (2.1.1)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(kz - wt + \delta) \quad (2.1.1.2)$$

Buradaki sabitler

E_{0x} , E_{0y} : genlik

k : yayılma sabiti, $k = 2\pi/\lambda$

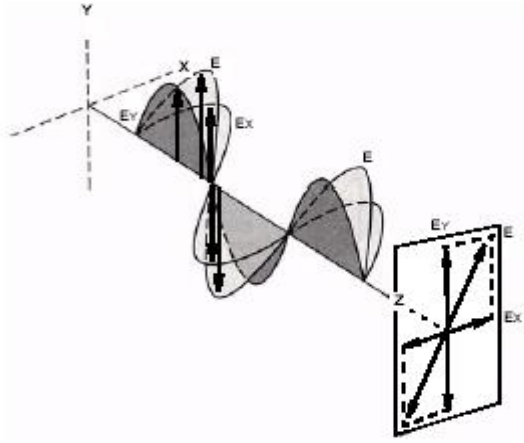
w : açısal frekans, $w = kc = 2\pi c/\lambda$

δ : iki dalga arasındaki faz farkı

şeklinde tanımlanır. İki alan bileşeni birbirleriyle aynı fazda, veya $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere $\delta = m\pi$ şeklinde ise, kutuplanma çizgiseldir. $\delta = 0$ olduğunda \mathbf{E} elektrik alan vektörü

$$\mathbf{E} = (E_{0x} \hat{i} + E_{0y} \hat{j}) \cos(kz - wt) \quad (2.1.1.1.3)$$

olur. m çift sayı olduğunda, bileşenler arasında 360° faz farkı vardır ve \mathbf{E} vektörü pozitif yönlüdür (şekil 2.4.). Eğer m tek sayı olursa, bileşenler arasında 180° faz farkı olur ve \mathbf{E} vektörü negatif yönlüdür.



Şekil 2.4. Çizgisel kutuplanma

2.1.2. Dairesel kutuplanma

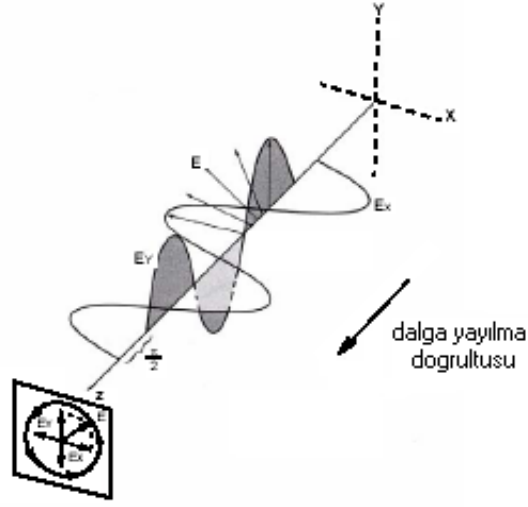
E vektörünün ucu zamanla bir daire çizerek dönüyorsa dalga dairesel kutuplanmıştır denir. Bu durum, E_x ve E_y bileşenleri büyüklükçe eşit, fakat aralarında 90° lik faz farkı olduğunda meydana gelir. Yani, $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ ve bileşenler arasındaki faz farkı, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere, $\delta = + 2m\pi \pm \pi/2$ olduğunda dairesel kutuplanma oluşur. Bu durumda E_y bileşeni aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$E_y = \pm E_{0y} \sin(kz - \omega t) \quad (2.1.2.1)$$

Böylece, E alan vektörü

$$E = E_0 [\cos(kz - \omega t)\hat{i} \pm \sin(kz - \omega t)\hat{j}] \quad (2.1.2.2)$$

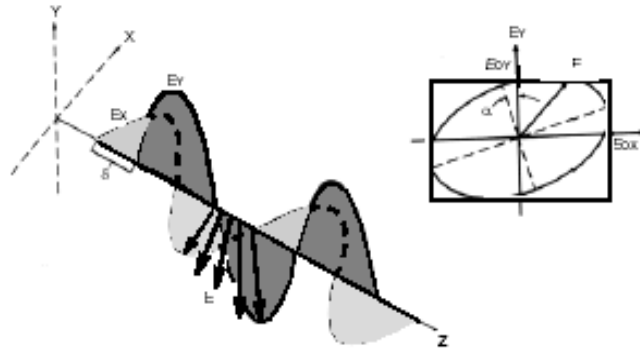
biçiminde yazılır. + veya - , $\pi/2$ faz farkının işaretidir. Genlik sabittir ancak vektör yönü zamanla değişmektedir (şekil 2.5). Elektrik alan vektörünün gözlemci doğrultusunda hangi yönde döndüğüne bağlı olarak, sağa veya sola dairesel kutuplanmış şeklinde nitelendirilir.



Şekil 2.5. Dairesel kutuplanma

2.1.3. Eliptik kutuplanma

Çizgisel ve dairesel kutuplanma durumları eliptik ışığın özel biçimi olduğundan, eliptik kutuplanma esas kutuplanma durumu olarak düşünülür. E_x ve E_y bileşenleri büyüklükçe eşit değilse ve yine 90° lik faz farkına sahipse, o zaman \mathbf{E} ' nin ucu bir elips çizer (şekil 2.6). Böyle bir dalgaya da eliptik kutuplu denir. Eliptik kutuplanma faz farkı, $\delta = \pi$ (çizgisel) , $\delta = \pi/2$ (dairesel) veya sıfırdan farklı iken oluşur. Elektrik alan vektörünün genliği ve yönü zamanla değişir.



Şekil 2.6. Eliptik kutuplanma

Son olarak eğer E_x ve E_y bileşenleri hemen hemen eşit büyüklükte ise ve rasgele değişen faz farkına sahiplerse, ışık demeti kutuplanmamıştır.

2.2. Kutuplanmamış Işıktan Kutuplanmış Işık Elde Edilmesi

Çizgisel kutuplu bir demeti, kutuplanmamış bir demetten elde etmek mümkündür. Kutuplanmamış ışıktan kutuplanmış ışık elde etmek için geliştirilen dört fiziksel yöntem vardır. Bunlar (1) seçici soğurma, (2) yansıma, (3) çift kırılma ve (4) saçılmadır.

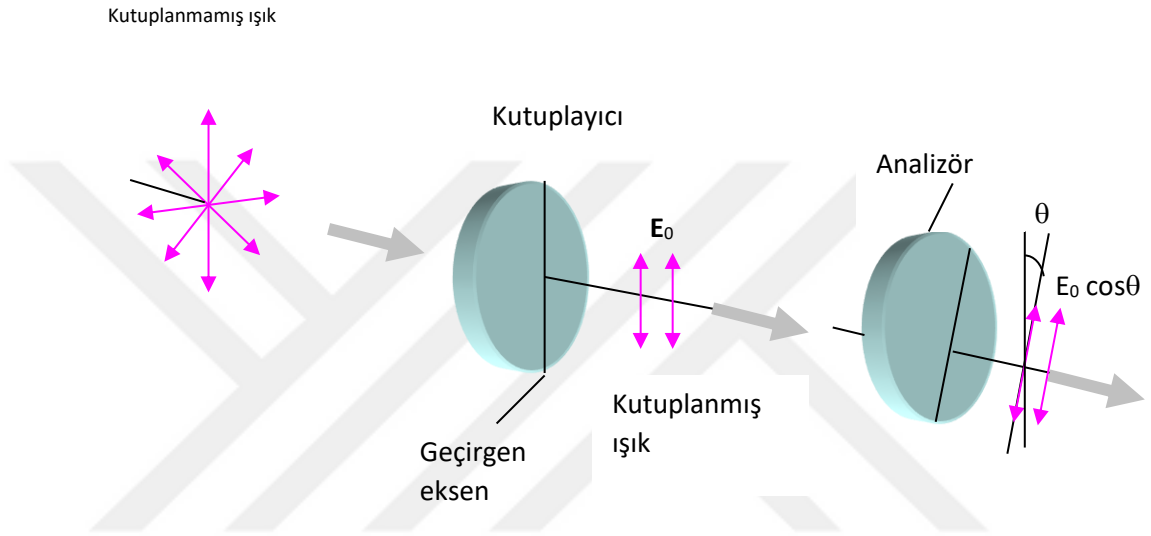
2.2.1. Seçici soğurma ile kutuplanma

Kutuplanmış ışık elde etmede en yaygın teknik, bir düzlemde, elektrik alan vektörleri belirli bir doğrultuya paralel olarak titreşim yapan dalgaları geçiren ve elektrik alan vektörleri diğer yönlerde titreşim yapan dalgaları soğuran bir malzeme kullanmaktır. Polaroid, yönlendirilmiş moleküllerle seçici soğurma yaparak ışığı kutuplayan bir maddedir. Polaroiddeki moleküller, elektrik alan vektörleri molekül uzunluğuna paralel olan ışığı kolayca soğurur; bu uzunluklara dik olan elektrik alan vektörlü ışığı geçirirler. Moleküller zincirlere dik doğrultuya geçirme eksenine denir. İdeal bir kutuplayıcıda, elektrik alanı geçirgen eksene paralel olan ışığın tümü geçer, elektrik alanı geçirgen eksene dik olan ışığın tümü soğurur.

Şekil 2.7., kutuplanmamış bir ışık demetinin, kutuplayıcıya gelişini göstermektedir. Şekilde, geçirgen eksen düşey olarak yönlendiğinden, tabakayı geçen ışık düşey olarak kutuplanmıştır. Analizör denilen ikinci kutuplayıcı tabaka demeti keser. Geçen demetin elektrik alan vektörüne E_0 denilir. E_0 ' in analizör eksenine paralel bileşeni $E_0 \cos\theta$ dir. Geçen ışığın şiddeti, genliğinin karesi ile değiştiğinden, analizörü geçen demetin şiddeti

$$I = I_{mak} \cos^2 \theta$$

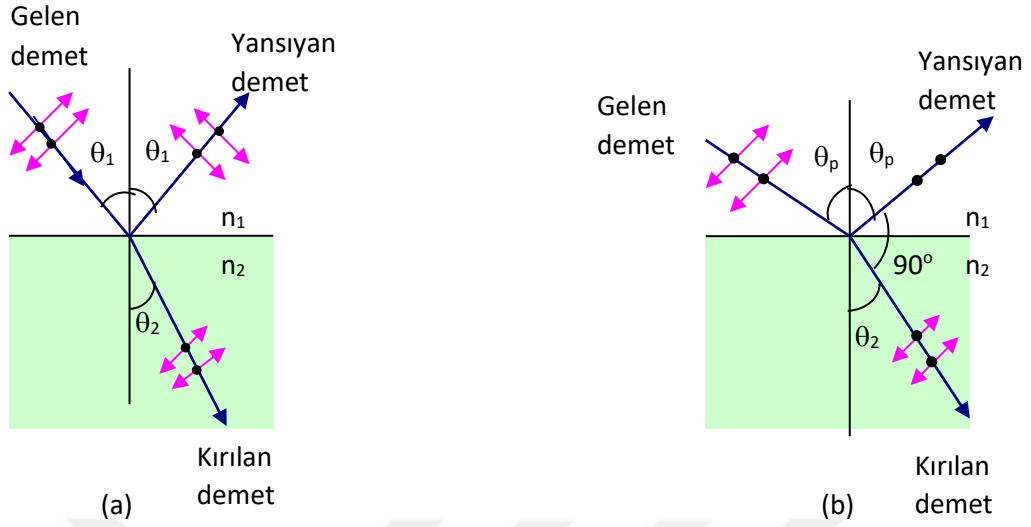
şeklinde değişir. Bağınıtdaki I_{mak} , analizöre gelen kutuplanmış demetin şiddetidir. Bu ifade geçirici eksenleri birbirleri ile θ açısı yapan herhangi iki kutuplatıcı malzemeye uygulanabilir. Geçen demetin şiddeti geçirgen eksenler paralel, $\theta = 0^\circ$ veya $\theta = 180^\circ$, olduklarında maksimum, geçirgen eksenler birbirlerine dik olduklarında sıfırdır yani analizör tarafından tamamen soğurulmuştur.



Şekil 2.7. Kutuplanmamış ışığın kutuplayıcıya gelişi

2.2.2. Yansıma ile kutuplanma

Yansıma yolu ile kutuplanma yaygın bir olaydır. Sudan, camdan ve kardan yansıyan güneş ışığı kısmen kutuplanır. Kutuplanmamış bir ışık demeti bir yüzeyden yansıdığında, yansıyan ışık, geliş açısına bağlı olarak, ya tamamen kutuplanır, ya kısmen kutuplanır veya kutuplanmaz. Eğer gelme açısı 0° ise, yansıyan demet kutuplanmaz. Diğer geliş açıları için yansımış ışık bir ölçüde kutuplanır, belirli bir geliş açısında, θ_p , ise ışık tamamen kutuplanır.



Şekil 2.8. (a) Kutuplanmamış bir ışık yansıtıcı bir yüzeye geldiğinde, yansıyan ve kırılan demetler
 (b) Geliş açısı, θ_p , kutuplanma açısına eşit olduğunda, yansımış demetin tamamen kutuplanması

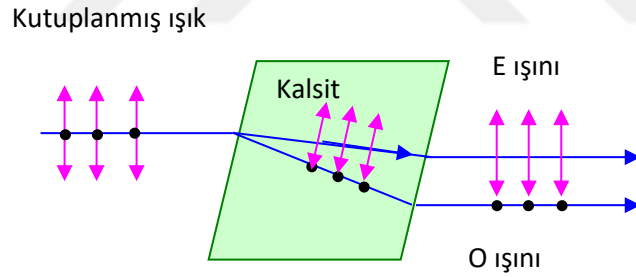
Şekil 2.8.a' da gösterildiği gibi kutuplanmamış bir ışık demetinin bir yüzeye geldiği düşünüldüğünde, her bir elektrik alan vektörü iki bileşene ayrılabilir: yüzeye paralel bileşen (sayfa düzlemine dik, şekil 2.8.' de nokta ile gösterilmiştir) ve hem birinci bileşene ve hem de yayılma yönüne dik bileşen (kırmızı oklarla gösterilmiştir). Paralel bileşenin dik bileşenden daha kuvvetli yansıdığı bulunmuştur. Böylece, kısmen kutuplanmış yansımış bir demet elde edilebilmektedir. Ayrıca kırılan demet de kısmen kutuplanmıştır. Şekil 2.8.b' de gösterildiği gibi yansıyan ve kırılan demet arasındaki açı 90° olduğunda, yansıyan demet tamamen kutuplanmaktadır. Bu kutuplanmanın meydana geldiği geliş açısına kutuplanma açısı (θ_p) denir.

2.2.3. Çift kırılma ile kutuplanma

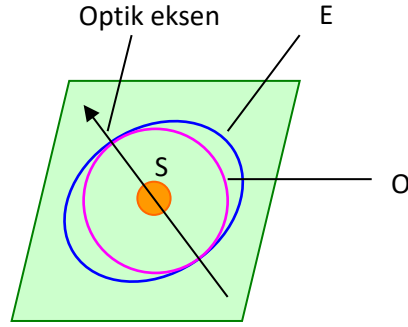
Katılar iç yapılarına göre sınıflandırılabilir. Atomları belirli bir düzen içinde bulunan katılara kristal, atomların rasgele dağılım gösterdiği katılara amorf denir. Işık, cam gibi amorf bir maddeden geçerken bütün yönlerde aynı hızda hareket eder. Yani, camın tek bir kırılma indisi vardır. Fakat kalsit ve quartz gibi bazı kristalik maddelerde ışık hızı

bütün yönlerde aynı değildir. Bu tür maddeler iki tane kırılma indisi ile karakterize edilir. Bundan dolayı çoğu zaman çift-kırıcı madde olarak bilinirler.

Kutuplanmamış ışık kalsit kristaline girdiğinde, şekil 2.9.' da görüldüğü gibi, iki kırılma açısı olan, farklı hızlarda hareket eden iki düzlemsel kutuplanmış ışına ayrılır. İki ışın, noktalar ve oklarla gösterildiği gibi birbirlerine dik yönlerde kutuplanırlar. Bir tanesi, olağan (O) ışın adını alır ve bütün yönlerde aynı n_O kırılma indisi ile karakterize edilir. Bunun anlamı, eğer noktasal bir ışık kaynağı kristalin içerisine yerleştirilebilseydi, şekil 2.10.' da olduğu gibi, olağan dalgalar kaynaktan küre biçiminde yayılmalarıdır. İkinci düzlem kutuplu ışına, olağandışı (E) ışın denir ve bunlar farklı yönlerde farklı hızlarla hareket ederler. Yayılma doğrultusuna göre değişen, n_E kırılma indisi ile nitelendirilirler. Şekil 2.10.' daki noktasal ışık kaynağı, eliptik kesitli dalga cephesine sahip olağan dışı dalgalar yayar. Bu şekildeki $n_O = n_E$ olan ve optik eksen olarak adlandırılan yönde, olağan ve olağan dışı ışınlar aynı hıza sahiptir. İki ışının hız farkı, optik eksene dik doğrultuda maksimumdur.



Şekil 2.9. Kalsit kristaline giren kutuplanmamış ışığın olağan (O) ışını ve olağandışı (E) ışını olmak üzere ikiye ayrılması



Şekil 2.10. İçerisinde bir S kaynağı olan çift kırılma yapan bir kristal

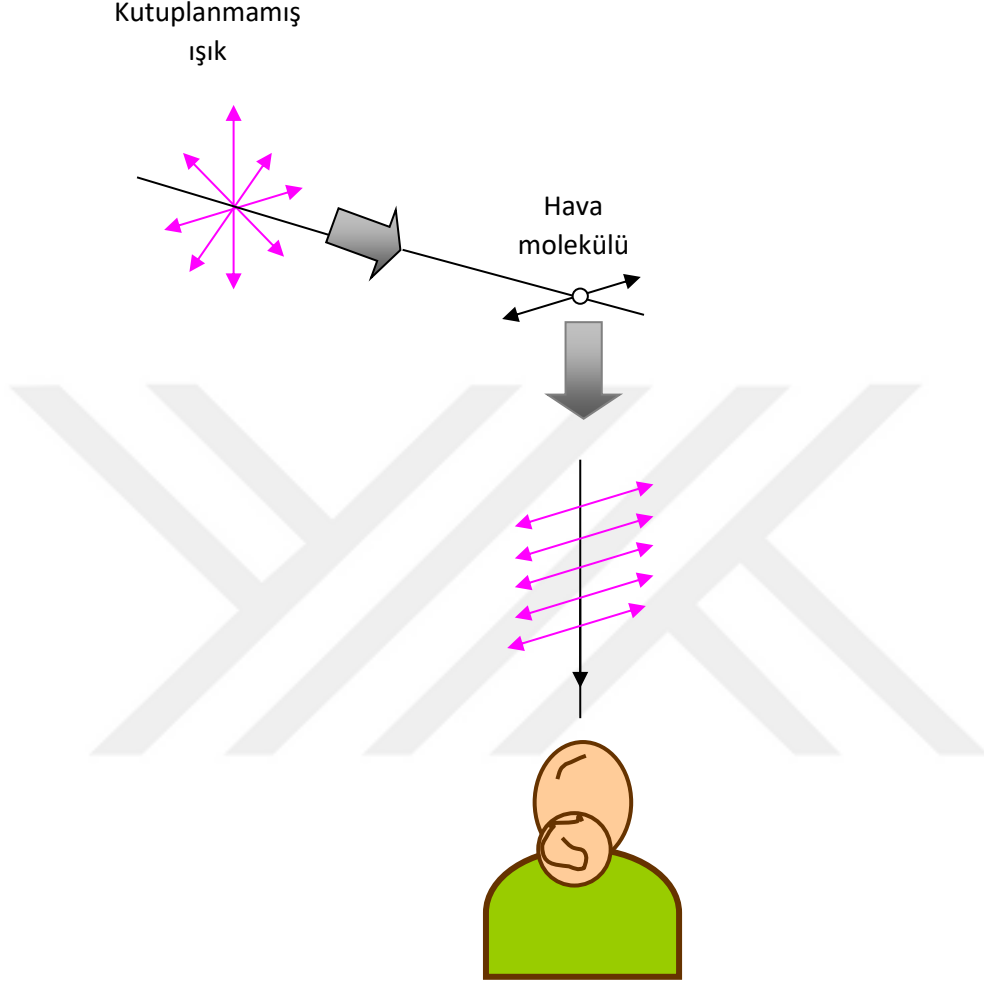
Eğer kalsit kristali yazılı bir kağıt üzerine konulup sonra kristale bakılırsa yazının iki görüntüsü olduğu görülür. Bu iki görüntünün bir tanesi olağan ışıktan, diğeri de olağandışı ışın tarafından oluşturulan görüntüdür. Eğer dönen bir kutuplayıcı cam tabakadan iki görüntüye bakılırsa, görüntüler sırayla bir görünür, bir yok olurlar. Çünkü olağan ve olağandışı ışınlar düzlem kutupludur.

2.2.4. Saçılma ile kutuplanma

Işık, herhangi bir maddeye geldiğinde, ortamdaki elektronlar ışığın bir kısmını soğurup sonra tekrar yayarlar. Işığın, havayı oluşturan gaz moleküllerindeki elektronlar tarafından bu şekilde soğurulması ve yeniden yayılması, yeryüzündeki bir gözlemciye ulaşan güneş ışığının kısmen kutuplanmasına sebep olur. Bu olaya saçılma denir. Şekil 2.11., güneş ışığının saçıldığında nasıl kutuplandığını göstermektedir.

Yatay doğrultuda (yeryüzüne paralel) hareket eden kutuplanmamış bir güneş ışığı demeti, havayı oluşturan bir gaz molekülüne çarpar ve molekül elektronlarında titreşim oluşturur. Gelen dalganın elektrik alan vektörünün yatay bileşeni, yüklerin yatay olarak titreşimine ve vektörün düşey bileşeni titreşimin düşey doğrultuda olmasına yol açar. Eğer, şekil 2.11.'deki gözlemci tam tepeye yani ışığın başlangıçtaki ilerleme doğrultusuna dik yönde bakıyorsa yüklerin düşey titreşimleri gözlemciye doğru hiç ışın göndermez. O halde, gözlemci kırmızı oklarla belirtildiği gibi yatay doğrultuda tamamen

kutuplanmış ışık görür. Gözlemci diğer yönlere bakarsa, ışık yatay doğrultuda kısmen kutuplanır.



Şekil 2.11. Kutuplanmamış güneş ışığının hava molekülleri tarafından saçılması

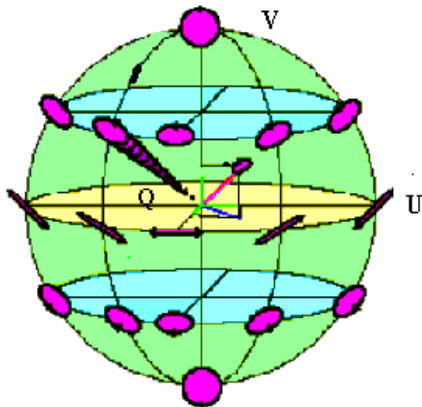
Işık saçılması ile ilgili olaylara atmosferde de bakılabilir. Çeşitli λ dalgalı boylarındaki ışık, d çaplı bir moleküle geldiğinde ($d \ll \lambda$), saçılan ışığın bağıl şiddeti $1/\lambda^4$ ile değişir. Dolayısıyla daha kısa dalgalı boylu olanlar (mavi ışık), daha uzun dalgalı boylu olanlardan (kırmızı ışık) daha etkili olarak saçılırlar. Bu nedenle, güneş ışığı, havadaki gaz molekülleri tarafından saçıldığında, kısa- dalgalı boylu ışınım (mavi), uzun- dalgalı boylu ışınımından daha şiddetli olarak saçılır. Gökyüzüne, Güneşe doğru olmayan bir yönde bakıldığında, etkin bir şekilde mavi olan, saçılmış ışık görünür; dolayısıyla mavi bir

gökyüzü görünür. Güneş batarken batıya, Güneş doğarken doğuya bakılırsa Güneşe doğru bir yönde bakılmış olunur ve havada büyük bir mesafe kat ederek geçen ışık görülmüş olunur. Mavi ışığın büyük bir kısmı gözlemci ile Güneş arasındaki havada saçılmaktadır. Havayı geçip gözlemciye ulaşan ışığın mavi bileşeninin çoğu saçılmakta ve spektrumun kırmızı ucuna doğru kaymaktadır. Sonuç olarak Güneş batarken kırmızı ve turuncu renkler görünür.



3. STOKES PARAMETRELERİ ve POINCARE KÜRESİ

Stokes vektörü bir kutuplayıcı eklenmesiyle ışığın nasıl etkilendiğini gösteren sayısal bir yöntemdir (Shurcliff ve Ballard 1964). Bu vektör kutuplanmış, kısmen kutuplanmış ve kutuplanmamış ışığa uygulanır ve dört elemandan oluşan bir sayı matrisi şeklindedir. Örneğin, birim- şiddetli kutuplanmamış ışık $(1,0,0,0)$ matrisiyle; 45° çizgisel kutuplanmış ışık $(1,0,1,0)$ matrisiyle; sağa dairesel kutuplanmış ışık $(1,0,0,1)$ matrisiyle gösterilir. Ayrıca, dikey çizgisel kutuplanma $(1,-1,0,0)$, -45° çizgisel kutuplanma $(1,0,-1,0)$ ve sola dairesel kutuplanma ise $(1,0,0,-1)$ matrisiyle verilir. Verilen bu matrislerden anlaşılacağı gibi matrisin ilk elemanı şiddeti, ikinci ve üçüncü elemanı iki ekseninde çizgisel kutuplu ışığın 45° den -45° ye dönmesini ve dördüncü eleman ise dairesel kutuplanmış ışığı temsil eder (Ariste ve Semel 1999). Bütün bu olası kutuplanma durumlarını göstermek amacıyla Fransız matematikçisi ve fizikçisi Henri Poincare tarafından Poincare küresi geliştirilmiştir (Anonim 2003). Poincare küresi kullanılarak, verilen bir düzlem dalgaının kutuplanmasının nasıl olduğunu görmek daha kolaylaşır. Küre üzerindeki her nokta, şekil 3.1.'de görüldüğü gibi, değişik kutuplanma durumlarını gösterir. Ekvator üzerindeki herhangi bir nokta çizgisel kutuplanmayı gösterir. Kürenin ekvatorunun etrafında dolandığında, çizgisel kutuplanma yatay çizgisel kutuplanmadan dik çizgisel kutuplanmaya ve tekrar yatay çizgisel kutuplanmaya döner. Bütün kutuplar dairesel kutuplanmayı, kutuplar ve ekvator arasındaki bütün diğer noktalar ise eliptik kutuplanmayı temsil eder.



- Küre merkezi kutuplanmamış ışık
- Küre yüzeyi kutuplanmış ışık
- Küre ekvatoru çizgisel kutuplanma
- Kuzey yarı-küre sağa eliptik kutuplanma
- Kuzey kutbu sağa dairesel kutuplanma
- Güney kutbu sola dairesel kutuplanma

Şekil 3.1. Poincare küresi

Küre üzerindeki her nokta, kürenin üç boyutsal eksenini, Q, U, V, ile tanımlanan tek bir koordinat setine sahiptir. Bu koordinatlar, Stokes vektörünü oluşturan normalize Stokes parametreleri olarak adlandırılırlar (Poincare küresi birim yarıçaplıdır). Stokes vektörü bir sütun matristir.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}$$

Burada \mathbf{I} , Stokes vektörüdür. Diğer parametreler ise

I : Toplam ışık şiddeti

Q : Çizgisel olarak kutuplanmış ışığın yatay ve düşey bileşenleri arasındaki şiddet farkı

U : Çizgisel olarak kutuplanmış ışığın $+45^\circ$ ve -45° 'de yönelen bileşenleri arasındaki şiddet farkı

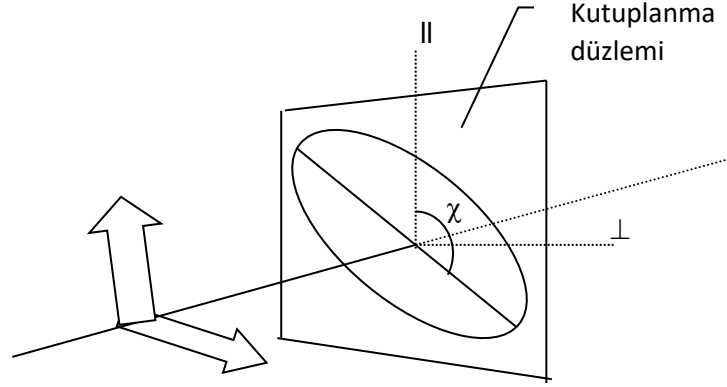
V : Sağa ve sola dairesel olarak kutuplanmış bileşenler arasındaki şiddet farkı

olarak tanımlanır.

Bu Stokes parametreleri eliptik kutuplanmış ışık için χ ve β açıları cinsinden yazılabilir. χ , saçılma düzlemine paralel bir yön civarında kutuplanmış elipsin major ekseninin dönmesi (şekil 3.2.) ve β eliptiklik veya major-minor eksenlerinin oranı ile ilişkilendirilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} Q &= I \cos 2\beta \cos 2\chi \\ U &= I \cos 2\beta \sin 2\chi \\ V &= I \sin 2\beta \end{aligned} \quad (3.1.)$$

şeklinde verilir.



Şekil 3.2. χ açısı elektrik alan genliğinin periyodik olarak değişimi olan çizgi boyunca yönelimini temsil eder

Eğer denklem 3.1.'deki parametrelerin karesi alınıp toplanırsa

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \quad (3.2)$$

olduğu açıkça görülebilir. Sonuç olarak, Stokes parametrelerinin sadece üç tanesi birbirinden bağımsızdır. Kısmen kutuplanmış ışık için ise tüm dört parametreye ihtiyaç vardır.

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2 \quad (3.3)$$

Kutuplanma derecesi ise

$$\frac{(Q^2 + U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{I}$$

şeklinde verilir.

Kutuplanmamış ışık için

$$Q=U=V=0$$

alınır.

Çizgisel ve dairesel kutuplanma için de Stokes parametrelerinin tanımlarına bakılabilir. Çizgisel kutuplanmada $\tan\beta$ olarak tanımlanan eliptiklik sıfır veya $\beta = 0, \pm \pi/2$ dir ve Stokes parametreleri

$$\begin{aligned} Q &= I \cos 2\chi \\ U &= I \sin 2\chi \\ V &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

olur. Dairesel kutuplanmada ise eliptiklik birdir ve böylece $\beta = \pi/4$ olur. Bu durumda Stokes parametreleri

$$\begin{aligned} Q &= 0 \\ U &= 0 \\ V &= I \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak ifade edilir.

Stokes parametreleri, genlikler ve şiddetin paralel ve dik bileşenleri cinsinden yazılmak istenirse aşağıdaki şekilde tanımlanırlar

$$\begin{aligned} I &= E_{xo}^2 + E_{yo}^2 = I_l + I_r \\ Q &= E_{xo}^2 - E_{yo}^2 = I_l - I_r \\ U &= 2 E_{xo} E_{yo} \cos \delta \\ V &= 2 E_{xo} E_{yo} \sin \delta \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. KUTUPLANMIŞ IŞIK İÇİN VEKTÖR TRANSFER DENKLEMİ

Bu bölümde keyfi bir V hacmi içerisinde, ışınlam alanıyla maddenin etkileşmesine bakılarak, bu alan içerisindeki foton sayısının zamanla değişim oranını veren analitik ifade elde edilecektir. Herhangi bir t anında, faz uzayında fotonun yerini belirtmek için üç momentum değişkeni (v, Ω) ve üç tane de konum değişkeni (\mathbf{r}) olmak üzere altı değişken gerekir. v , frekans ve Ω , fotonun hareket doğrultusudur. Dağılım fonksiyonu f , bu değişken terimleriyle tanımlanır:

$$f \equiv f(\mathbf{r}, v, \Omega, t)$$

t anında, \mathbf{r} noktası civarında bir $d\mathbf{r}$ hacim elemanında, dv frekans aralığında v frekansında, Ω yöneliminde $d\Omega$ katı açısı içerisine giren foton sayısı

$$dn = f(\mathbf{r}, v, \Omega, t) d\mathbf{r} dv d\Omega$$

şeklinde verilir.

\mathbf{r} vektörü x, y, z kartezyen koordinatlarıyla, Ω vektörü θ polar açısı ve φ azimuthal açısıyla gösterilsin:

$$d\mathbf{r} = dx dy dz$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi = d\mu d\varphi$$

$\mu \equiv \cos\varphi$ olarak seçilir.

Böylece, bir t anında boyutları $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta v \Delta \mu \Delta \varphi$ olan altı boyutlu küpteki fotonların sayısı

$$\text{foton sayısı} = f(\mathbf{r}, v, \Omega, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta v \Delta \mu \Delta \varphi$$

olur. Burada f' in argümanları ortalama argümanlardır. Yani v' demek; Δv aralığında v' nün ortalama bir değeri demektir.

Bu altı boyutlu küpteki foton sayısının zamanla değişim oranı

$$\frac{\partial}{\partial t} [f(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) \Delta V] = \Delta V \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (4.1)$$

dir. $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta \nu \Delta \mu \Delta \varphi$, küp hacmi olarak gösterilmiştir. ΔV uzayda sabit bir hacim elemanı olduğu için denklemde türev dışına alınabilir. Verilen bu zamanla değişim oranı ΔV hacmi içerisine giren ve bu hacimden çıkan foton sayısının değişim oranına eşittir. Bu hacim içinde soğurulan fotonlar, hacimden çarpışma yapmadan ve çarpışma yaparak çıkan fotonlar değişime negatif katkı verirler. Bu hacim içerisinde üretilen fotonlar ve hacimde çarpışmalar sonucu açığa çıkan fotonlar ise bu değişime pozitif bir katkı sağlarlar. Değişimdeki tüm bu katkılar ayrı ayrı incelenecektir.

Küpün x- eksenine dik yüzeyi boyunca çarpışma yapmadan bu küpün iki yüzeyinden çıkan foton sayısının değişim oranı

$$\left[\dot{x} f(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) \right]_x^{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta \nu \Delta \mu \Delta \varphi \quad (4.2)$$

şeklindedir. \dot{x} , foton hızının x bileşeni ($\dot{x} = c\Omega_x$) ve $\Delta y \Delta z \Delta \nu \Delta \mu \Delta \varphi$ de yüzey alanıdır.

$\Delta x \rightarrow dx$ e yaklaştığından, denklem 4.2 yeniden yazılabilir:

$$\Delta V \frac{\partial}{\partial x} \left[\dot{x} f(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) \right] \quad (4.3)$$

Diğer beş yönde (y, z, ν , μ , φ) küpün yüzeylerinden çıkan foton için benzer sonuçlar yazılabilir. Küpten çıkan net foton sayısının değişim oranı

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\dot{x} f) + \frac{\partial}{\partial y} (\dot{y} f) + \frac{\partial}{\partial z} (\dot{z} f) + \frac{\partial}{\partial v} (\dot{v} f) + \frac{\partial}{\partial \mu} (\dot{\mu} f) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\dot{\varphi} f) \right] \Delta V \quad (4.4)$$

olarak yazılabilir.

Altı boyutlu küpteki soğurum oranı, küpteki fotonların sayısı, $(f \Delta V)$, ve birim zamanda foton başına düşen soğurum olasılığının çarpımıdır. Soğurum, ‘makroskopik soğurum katsayısı’ veya soğurum katsayısı $\sigma_a \equiv \sigma_a(\mathbf{r}, v, t)$ ile tanımlanır. Bu katsayı, bir fotonun ds yolu boyunca soğurulma olasılığını verir. Böylece küpteki soğurum olasılığı

$$c \sigma_a(\mathbf{r}, v, t) f(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}, t) \Delta V \quad (4.5)$$

olarak verilir. c , fotonun hızıdır.

Bir foton maddeyle etkileştiğinde saçılabilir. Saçılma katsayısı $\sigma_s \equiv \sigma_s(\mathbf{r}, v, t)$, soğurum katsayısına benzer şekilde tanımlanır. Saçılma olayında, soğurumda olduğu gibi, foton kaybolmaz. Fakat genellikle farklı bir hareket yönü ve frekansta ortaya çıkar. v' frekansı ile $\mathbf{\Omega}'$ doğrultusunda gelen bir foton çarpışma yaptıktan sonra v frekansında $\mathbf{\Omega}$ doğrultusunda saçılıyor olsun. Bu durumda saçılma katsayısı $\sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}, t)$ şeklinde tanımlanır. Burada kullanılan nokta çarpım $(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega})$ sadece saçılma açısının kosinüsüdür ve bu tek argüman kullanılarak saçılma olasılığının yalnızca saçılma açısına bağlı olduğu kabul edilmiş olunur. Bu saçılma katsayısı kullanılarak ΔV hacim elemanından çarpışma yaparak dışarı çıkan fotonların ve bu hacim elemanı içerisinde çarpışmalar sonucu açığa çıkan fotonların sayısının değişim oranı bulunabilir.

$\mathbf{\Omega}$ yönünde v frekansında gelip, çarpışmadan sonra v' frekansında $\mathbf{\Omega}'$ doğrultusunda çıkan foton sayısının zamanla değişim oranı,

$$c\Delta V \int_0^{\infty} dv' \int_{4\pi} d\Omega' \sigma_s(\mathbf{r}, \nu \rightarrow \nu', \Omega \bullet \Omega', t) f(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t) \quad (4.6)$$

ν' frekansında Ω' doğrultusunda gelip, çarpışmadan sonra ν frekansında Ω yönünde küpün içerisine giren foton oranı,

$$c\Delta V \int_0^{\infty} dv' \int_{4\pi} d\Omega' \sigma_s(\mathbf{r}, \nu' \rightarrow \nu, \Omega' \bullet \Omega, t) f(\mathbf{r}, \nu', \Omega', t) \quad (4.7)$$

ile verilir. Son olarak fotonların yayınımları yani fotonların madde içerisinde üretilmesi göz önüne alınır. Madde içerisinde üretimi sağlayan kaynak, $d\Omega$ katı açısında Ω yönünde, dv frekans aralığı içinde ν frekansında ve birim zamanda başına yayılan foton sayısı olan $q \equiv q(\mathbf{r}, \nu, t)$ fonksiyonuyla gösterilir. Böylece küpteki foton üretim oranı

$$q(\mathbf{r}, \nu, t) \Delta V \quad (4.8)$$

şeklinde verilir. Transfer denklemi bu beş terimin toplamıyla, kazanç ve kayıplar göz önüne alınarak, elde edilir.

Foton sayısının zamanla $= - \Delta V$ hacminde çarpışma yapmadan çıkan foton sayısının değişim oranı

+ ΔV hacminde üretilen foton sayısının değişim oranı

- ΔV hacminde soğurulan foton sayısının değişim oranı

+ ΔV hacmi içerisinde çarpışmalar sonucu açığa çıkan fotonların sayısının değişim oranı

- ΔV hacminden çarpışma yaparak dışarı çıkan fotonları sayısının değişim oranı

Analitik olarak bu tanım bütün terimlerden $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta v \Delta \mu \Delta \varphi$ yi yok ederek;

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} + \frac{\partial(\dot{x} f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\dot{y} f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t))}{\partial y} + \frac{\partial(\dot{z} f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t))}{\partial z} \\
& + \frac{\partial(\dot{v} f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t))}{\partial v} + \frac{\partial(\dot{\mu} f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t))}{\partial \mu} + \frac{\partial(\dot{\varphi} f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t))}{\partial \varphi} \\
& = q(\mathbf{r}, v, t) - c\sigma_a(\mathbf{r}, v, t)f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \\
& + c \int_0^\infty dv' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v, \boldsymbol{\Omega}' \bullet \boldsymbol{\Omega}, t) f(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}', t) \\
& - c \int_0^\infty dv' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \sigma_s(\mathbf{r}, v \rightarrow v', \boldsymbol{\Omega} \bullet \boldsymbol{\Omega}', t) f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. İki çarpışma arasında bir foton düz bir yol boyunca hareket ettiğinden $\dot{\mu} = \dot{\varphi} = 0$ alınır. Ayrıca fotonların akarken frekansı değişmediği için $\dot{v} = 0$ alınır. Son olarak, fotonlar $\boldsymbol{\Omega}$ yönünde, c hızıyla aktıklarından $\dot{x} = c\Omega_x$, $\dot{y} = c\Omega_y$, $\dot{z} = c\Omega_z$ dir. Böylece denklem 4.6

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} + c\boldsymbol{\Omega} \bullet \nabla f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) = q(\mathbf{r}, v, t) - c\sigma_a(\mathbf{r}, v, t)f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \\
& + c \int_0^\infty dv' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \left[\sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v, \boldsymbol{\Omega}' \bullet \boldsymbol{\Omega}, t) f(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}', t) \right. \\
& \left. - \sigma_s(\mathbf{r}, v \rightarrow v', \boldsymbol{\Omega} \bullet \boldsymbol{\Omega}', t) f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \right]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

şekline indirgenir. Eğer ışınım şiddeti $I = ch\nu f$ olarak tanımlanırsa denklemimiz

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) \\ & = S(\mathbf{r}, \nu, t) - \sigma_a(\mathbf{r}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & + \int_0^\infty d\nu' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \left[\frac{\nu}{\nu'} \sigma_s(\mathbf{r}, \nu' \rightarrow \nu, \boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}, t) I(\mathbf{r}, \nu', \boldsymbol{\Omega}', t) \right. \\ & \left. - \sigma_s(\mathbf{r}, \nu \rightarrow \nu', \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}', t) I(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) \right] \end{aligned}$$

olur. Burada $S(\mathbf{r}, \nu, t) = h\nu q(\mathbf{r}, \nu, t)$ dir. Ayrıca,

$$\int_0^\infty d\nu' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \sigma_s(\mathbf{r}, \nu \rightarrow \nu', \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}', t) I(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) = \sigma_s(\mathbf{r}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (4.9)$$

yazılabilir. Toplam etkileşme katsayısı $\sigma(\mathbf{r}, \nu, t) = \sigma_a(\mathbf{r}, \nu, t) + \sigma_s(\mathbf{r}, \nu, t)$ olduğundan transfer denklemi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) = S(\mathbf{r}, \nu, t) - \sigma(\mathbf{r}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) \\ & + \int_0^\infty d\nu' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\nu}{\nu'} \sigma_s(\mathbf{r}, \nu' \rightarrow \nu, \boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}, t) I(\mathbf{r}, \nu', \boldsymbol{\Omega}', t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Bulunan radyatif transfer denklemi (denklem 4.10.) henüz ışınım alanında kutuplanma durumlarını içermemektedir. Işık ışınının kutuplanma durumunu göstermek için dört parametreye gerek duyulur. Bunlar Stokes parametreleridir. Artık transfer denklemi kutuplanmış ışık için Stokes parametrelerine bağlı olarak vektörel biçimde yazılır. Ancak, vektör transfer denklemini bu haliyle çözmek zor olduğundan, zamandan bağımsız ve kaynak teriminin olmadığı durumda denkleme bakılabilir. Yani,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{I}(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{ve} \quad \mathbf{q}(\mathbf{r}, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) = 0$$

alınır.

Bu durumda vektör transfer denklemi

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{I}(\mathbf{r}, \nu, \mathbf{\Omega}) + \sigma(\mathbf{r}, \nu) \mathbf{I}(\mathbf{r}, \nu, \mathbf{\Omega}) = \quad (4.11)$$

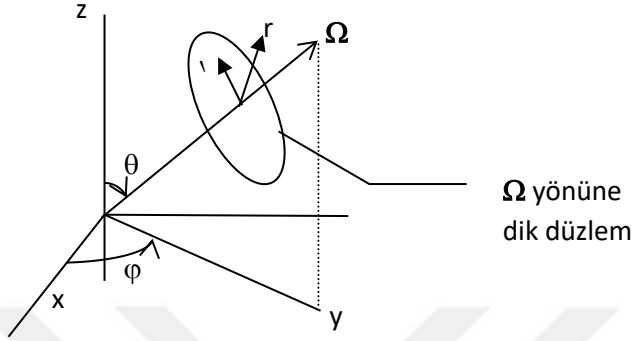
$$\int_0^\infty d\nu' \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \frac{\nu'}{\nu'} \sigma_s(\mathbf{r}, \nu') \mathbf{K}(\mathbf{r}, \nu' \rightarrow \nu, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{I}(\mathbf{r}, \nu', \mathbf{\Omega}')$$

şeklinde verilir. Burada $\sigma_s(\mathbf{r}, \nu' \rightarrow \nu, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) = \sigma_s(\mathbf{r}, \nu') \mathbf{K}(\mathbf{r}, \nu' \rightarrow \nu, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega})$ şeklinde yazılmıştır. $\mathbf{K}(\mathbf{r}, \nu' \rightarrow \nu, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega})$, saçılma faz matrisidir. Artık \mathbf{I} vektörü, I , I_r , U , V bileşenleriyle oluşturulmuş sütun matrisidir. Son olarak kutuplanma etkilerini içeren bu transfer denkleminde saçılma etkilerine bakmak gerekir. Bunun için Rayleigh saçılması, Mie saçılması, Henyey-Greenstein faz fonksiyonu ya da izotropik saçılma durumlarından herhangi birisi alınarak transfer denklemi oluşturulur. Henyey-Greenstein saçılma faz fonksiyonu genellikle dokulardan ışığın saçılmasının açısal dağılımı ve saçılma açısının ortalama kosinüsü, g , ile tanımlanır. Rayleigh saçılması, gelen ışınımın dalgaboyuna göre çok küçük parçacıklardan ($d \ll \lambda$) saçılma olarak tanımlanır. Bu saçılma türü, yağmur damlaları ve bulutta mikrodalga ışınım, aerosollerde kızılötesi ışınım, hava moleküllerinde morötesi ve görünür- bölge ışınım saçılma durumlarına uygulanabilir. Genellikle görünür dalgaboylarında büyük parçacıklardan saçılma ise Mie saçılması olarak nitelendirilir. Rayleigh saçılması frekansın değişmediği durumdur. Rayleigh saçılması durumunda denklem 4.11 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{I}(\mathbf{r}, \nu, \mathbf{\Omega}) = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') \quad (4.12)$$

Düzlem geometride Rayleigh saçılması durumunda vektör transfer denklemi oluşturulmak istenirse, düzlem geometrideki simetriden dolayı, $U = V = 0$ alınır. Böylece I ve Q bileşenlerine bağlı iki denklem bulunur ve $I = I_v + I_r$ ve $Q = I_v - I_r$ olduğu göz önüne alınarak vektör transfer denklemi I ve I_r bileşenlerine bağlı olarak yazılabilir. Ayrıca $\mu =$

$\cos\theta$ ve θ , Ω yönüyle z ekseninin yaptığı açı (şekil 4.1) olduğu düşünülerek vektör transfer denkleminiz



Şekil 4.1. Özgül (spesifik) ışınım şiddetinin tanımı

$$\mu \frac{\partial \mathbf{I}(z, \mu)}{\partial z} + \sigma(z) \mathbf{I}(z, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathbf{K}(\mu, \mu') \mathbf{I}(z, \mu') d\mu' \quad (4.13)$$

şeklini alır. Burada \mathbf{I} , I_x ve I_r , bileşenlerinden oluşan sütun matristir. Son olarak

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sigma(z) \frac{\partial}{\partial \tau}$$

değişken değiştirmesi yapılarak

$$\mu \frac{\partial \mathbf{I}(\tau, \mu)}{\partial \tau} + \mathbf{I}(\tau, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathbf{K}(\mu, \mu') \mathbf{I}(\tau, \mu') d\mu' \quad (4.14)$$

elde edilir. τ , optiksel değişkendir.

5. VEKTÖR TRANSFER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Düzlem geometride zamandan bağımsız, frekansın değişmediği durum için vektör transfer denklemi

$$\mu \frac{\partial \mathbf{I}(\tau, \mu)}{\partial \tau} + \mathbf{I}(\tau, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathbf{K}(\mu, \mu') \mathbf{I}(\tau, \mu') d\mu' \quad (5.1)$$

olarak yazılabilir (denklem 4.14). Daha önce belirtildiği gibi $\mathbf{I}(\tau, \mu)$, $I(\tau, \mu)$ ve $I_r(\tau, \mu)$ bileşenlerinden oluşan bir sütun matris, τ , optiksel değişken, μ ise yayılan ışınımın doğrultu kosinüsüdür. $\mathbf{K}(\mu, \mu')$, saçılma faz matrisidir. Saçılma faz matrisinin single scattering albedo ω , ve $\mathbf{Q}(\mu)$ matrisi ile bu matrisinin transpozunu olan $\mathbf{Q}^T(\mu)$ matrisinin çarpımlarından oluşur.

$$\mathbf{K}(\mu, \mu') = \omega \mathbf{Q}(\mu) \mathbf{Q}^T(\mu')$$

Single scattering albedo olarak tanımlanan ω , saçılma olasılığıdır ve $\omega = \frac{\sigma_s}{\sigma_t}$ şeklinde

verilir. Saçılmanın korunumlu olduğu durumunda $\omega = 1$, tamamen soğurulma durumunda $\omega = 0$ dır. $\mathbf{Q}(\mu)$ matrisi

$$\mathbf{Q}(\mu) = \frac{3(c+2)^{\frac{1}{2}}}{2(c+2)} \begin{bmatrix} c\mu^2 + \frac{2}{3}(1-c) & (2c)^{\frac{1}{2}}(1-\mu^2) \\ \frac{1}{3}(c+2) & 0 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Böylece vektör transfer denklemi

$$\mu \frac{\partial \mathbf{I}(\tau, \mu)}{\partial \tau} + \mathbf{I}(\tau, \mu) = \frac{1}{2} \omega \mathbf{Q}(\mu) \int_{-1}^{+1} \mathbf{Q}^T(\mu') \mathbf{I}(\tau, \mu') d\mu' \quad (5.2)$$

olarak elde edilir. Denklem 5.2.' in sağ tarafında yer alan ω ve c parametrelerinin özel durumlarına bakılabilir (Siewert ve Burniston 1970, Bond ve Siewert 1970).

$c = 1$, $\omega = 1$ için denklem 5.2. Chandrasekhar'ın korunumlu Rayleigh saçılması modelini sağlar. $c \in [0,1]$ ve $\omega = 1$, Rayleigh ve izotropik saçılma yasalarının bir birleşimi için Chandrasekhar'ın korunumlu modelini verir. $c = 1$ ve $\omega \in [0,1]$ seçimiyle, genel Rayleigh saçılması modeli, $c \in [0,1]$ ve $\omega \in [0,1]$ değerlerinin kabulüyle Rayleigh ve izotropik saçılmanın genel bir birleşimi elde edilir.

Denklem 5.2.'in çözümlerini bulmak için

$$\mathbf{I}_\eta(\tau, \mu) = \Phi(\eta, \mu) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \quad (5.3)$$

şeklinde çözüm önerilir. Önerilen bu çözüm denklem 5.2.'de yerine konulursa

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \omega \eta \mathbf{Q}(\mu) \mathbf{M}(\eta) \quad (5.4)$$

bulunur. Burada $\mathbf{M}(\eta)$ normalizasyon vektörü

$$\mathbf{M}(\eta) = \int_{-1}^{+1} \mathbf{Q}^T(\mu) \Phi(\eta, \mu) d\mu \quad (5.5)$$

olarak verilir. $\Phi(\eta, \mu)$ özfonksiyon, η ise bu özfonksiyonlara karşı gelen özdeğer olarak adlandırılır. μ , daima $-1 \leq \mu \leq +1$ aralığında değer alır. Denklem 5.4., η 'nin tanım aralığına göre yeniden yazılabilir.

$\eta \notin [-1,1]$ olduğu durumda denklem 5.4.'ün çözümü

$$\Phi(\pm\eta_0, \mu) = \frac{1}{2} \omega \eta_0 \frac{1}{(\eta_0 \mp \mu)} \mathbf{Q}(\mu) \mathbf{M}(\pm\eta_0) \quad (5.6)$$

olur. Bu çözümler kesikli çözümler olarak adlandırılır. Burada η_0 , kesikli özfonksiyonlara karşı gelen özdeğerlerdir. Denklem 5.5. kesikli durum için yazılıp, $\Phi(\eta_0, \mu)$ yerine konulursa

$$\Lambda(\eta_0) \mathbf{M}(\eta_0) = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

bulunur. $\Lambda(\eta_0)$, dağılım bağıntısı olmak üzere

$$\Lambda(\eta_0) = \mathbf{I} + \eta_0 \int_{-1}^{+1} \Psi(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \eta_0} \quad (5.8)$$

şeklinde verilir. \mathbf{I} , birim matrisi ve $\Psi(\mu)$ karakteristik matrisi gösterir.

$$\Psi(\mu) = \frac{1}{2} \omega \mathbf{Q}^T(\mu) \mathbf{Q}(\mu) \quad (5.9)$$

$\Psi(\mu)$, simetrik matris olduğu için $\Lambda(\eta_0)$ da simetriktir. Ayrıca $\Lambda(\eta_0) = \Lambda(-\eta_0)$ olduğuna dikkat edilmelidir. $\Lambda(\eta_0)$, dağılım fonksiyonunun açık şekli denklem 5.8.' de \mathbf{I} birim matrisi ve $\Psi(\mu)$ matrisi yerine konularak bulunur.

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}(\eta_0) &= 1 - \frac{9\omega}{4(c+2)} \left\{ \left[\left(\frac{c+2}{3} - c(1-\eta_0^2) \right)^2 + \left(\frac{c+2}{3} \right)^2 \right] \eta_0 \tanh^{-1} \frac{1}{\eta_0} \right. \\ &\quad \left. + c^2 \eta_0^2 (1-\eta_0^2) - \frac{4}{3} c \eta_0^2 \right\} \\ \Lambda_{22}(\eta_0) &= 1 - \frac{9\omega c}{2(c+2)} \left[(1-\eta_0^2)^2 \eta_0 \tanh^{-1} \frac{1}{\eta_0} - \eta_0^2 \left(\eta_0^2 - \frac{5}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{12}(\eta_0) &= \Lambda_{21}(\eta_0) = -\frac{9\omega(2c)^{\frac{1}{2}}}{4(c+2)} \left\{ \left[\frac{c+2}{3} - c(1-\eta_0^2) \right] (1-\eta_0^2) \eta_0 \tanh^{-1} \frac{1}{\eta_0} \right. \\ &\quad \left. + \eta_0^2 \left[\frac{2-c}{3} - c(1-\eta_0^2) \right] \right\} \end{aligned}$$

Ayrıca, $\det \Lambda(\eta_0) = 0$ olmasından dolayı

$$\Lambda(\eta_0) = \frac{1}{8}c\Lambda_1(\eta_0)\Lambda_2(\eta_0) + \left[(1-c) + \frac{3}{2}c(1-\omega)\eta_0^2 \right] \Lambda_0(\eta_0)$$

$$\Lambda_\alpha(\eta_0) = (-1)^\alpha + 3(1-\eta_0^2)\Lambda_0(\eta_0) - (-1)^\alpha 3\eta_0^2(1-w) \quad \alpha = 1, 2 \quad (5.11)$$

$$\Lambda_0(\eta_0) = 1 + \frac{1}{2}\omega\eta_0 \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\mu - \eta_0}$$

bağıntıları elde edilir. Denklem 5.5. ve Denklem 5.7. kullanılarak

$$\mathbf{M}(\eta_0) = \begin{bmatrix} A_{22}(\eta_0) \\ -A_{12}(\eta_0) \end{bmatrix} = 3(c+2)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2\omega_2(\eta_0) \\ (2c)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{3}(c+2)A_2(\eta_0) + \omega_2(\eta_0) \right] \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

bulunur. Burada $\omega_2(\eta_0)$

$$\omega_2(\eta_0) = \frac{4}{3}(1-c) + 2c(1-w)\eta_0^2$$

olarak tanımlanır. Böylece denklem 5.6.' da elde edilen kesikli özfonksiyonlar, $\Phi(\pm\eta_0, \mu)$, $\mathbf{M}(\eta_0)$ ve $\mathbf{Q}(\mu)$ lerin yerine konulmasıyla, denklem 5.6

$$\Phi(\pm\eta_0, \mu) = \frac{3}{2(c+2)} \omega\eta_0 \frac{1}{(\eta_0 \mp \mu)} \begin{bmatrix} \Lambda_2(\eta_0)c(c+2)(1-\mu^2) + \omega_2(2-c) \\ (c+2)\omega_2 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

şeklinde bulunur.

Eğer $\eta \in (-1, 1)$ ise, yani η , -1 ve +1 arasında bulunan reel eksen üzerinde değer alırsa, denklem 5.4.' ün çözümleri

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2}\omega \left[\eta \frac{P}{\eta - \mu} + \lambda(\eta)\delta(\eta - \mu) \right] \mathbf{Q}(\mu) \mathbf{M}(\eta) \quad (5.14)$$

şeklinde yazılır. P sembolü, η ve ya μ üzerinden çıkan bütün integrallerin Cauchy Prensip değeriyle hesaplanması gerektiğini göstermek için kullanılır ve $\delta(x)$, Dirac δ fonksiyonudur. $\mu = \eta$ değerini alabilme olasılığından dolayı, denklem 5.14.'ün sağ tarafına $\lambda(\eta) \delta(\eta - \mu) \mathbf{Q}(\mu) \mathbf{M}(\eta)$ terimi eklenmiştir.

Eğer denklem 5.14., $\mathbf{Q}^T(\mu)$ ile çarpılıp, $\mu \in (-1, +1)$ aralığında μ üzerinden integral alınırsa, $\mathbf{M}(\eta)$ için homojen bir denklem elde edilir.

$$[\lambda(\eta) - \lambda(\eta)\Psi(\eta)]\mathbf{M}(\eta) = \mathbf{0} \quad (5.15)$$

$$\det[\lambda(\eta) - \lambda(\eta)\Psi(\eta)] = 0 \quad (5.16)$$

bağıntısından, $\lambda_1(\eta)$ ve $\lambda_2(\eta)$ çözümlerini veren $\lambda(\eta)$ 'nin quadratik denklemi bulunur. Burada $\lambda(\eta)$

$$\lambda(\eta) = \mathbf{I} + \eta \mathbf{P} \int_{-1}^{+1} \Psi(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \eta} \quad (5.17)$$

olarak tanımlanır. Böylece, süreklilik, $\eta \in (-1, 1)$, için iki katlı dejenerelik olduğundan denklem 5.4. lineer iki bağımsız çözüm içerir.

$$\Phi_\alpha(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \omega \left[\eta \frac{P}{\eta - \mu} + \lambda_\alpha(\eta) \delta(\eta - \mu) \right] \mathbf{Q}(\mu) \mathbf{M}_\alpha(\eta) \quad (5.18)$$

Bu çözümler sürekli çözüm olarak adlandırılır. Tamlık ve diklik bağıntılarının çıkarılması için denklem 5.18. ile verilen iki sürekli çözümün daha açık bir ifadesi kullanılabilir.

$$\Phi_1(\eta, \mu) = \left[\begin{array}{c} \frac{3}{2} \omega c \eta (1 - \eta^2) (1 - \mu^2) \frac{P}{\eta - \mu} + \omega_1(\eta) \delta(\eta - \mu) \\ - \omega_2(\eta) \delta(\eta - \mu) \end{array} \right] \quad (5.19 a)$$

$$\Phi_2(\eta, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\omega\eta(1-\eta^2)\frac{P}{\eta-\mu} + \lambda_1(\eta)\delta(\eta-\mu) \\ \frac{3}{2}\omega\eta(1-\eta^2)\frac{P}{\eta-\mu} + \lambda_2(\eta)\delta(\eta-\mu) \end{bmatrix} \quad (5.19 b)$$

Burada

$$\lambda_\alpha(\eta) = (-1)^\alpha [1 - 3(1-\omega)\eta^2] + 3(1-\eta^2)\lambda_0(\eta) \quad \alpha = 1, 2 \quad (5.20 a)$$

$$\lambda_0(\eta) = 1 - \omega\eta \tanh^{-1}\eta \quad (5.20 b)$$

$$\omega_1(\eta) = c(1-\eta^2)\lambda_1(\eta) + \omega_2(\eta) \quad (5.20 c)$$

$$\omega_2(\eta) = \frac{4}{3}(1-c) + 2c(1-\omega)\eta^2 \quad (5.20 d)$$

olarak tanımlanmıştır. Sürekli durum normalizasyon vektörleri, $\mathbf{M}_\alpha(\eta)$, kesikli durum normalizasyon vektörüne benzer şekilde tanımlanır

$$\mathbf{M}_\alpha(\eta) = \int_{-1}^{+1} \mathbf{Q}^T(\mu) \Phi_\alpha(\eta, \mu) d\mu, \quad \alpha = 1 \text{ veya } 2 \quad (5.21)$$

$\mathbf{M}_\alpha(\eta)$, normalizasyon vektörlerinin açık formu

$$\mathbf{M}_1(\eta) = 3(c+2)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}(c+2)(2c)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} (1-\eta^2) \quad (5.22 a)$$

$$\mathbf{M}_2(\eta) = 3(c+2)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ (2c)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} (1-\eta^2) \quad (5.22 b)$$

şeklindedir.

Böylece, denklem 5.2. ile verilen vektör transfer denkleminin genel çözümü, sürekli ve kesikli çözümlerin toplamıyla ifade edilebilir.

$$\mathbf{I}(\tau, \mu) = A(\eta_0)\Phi(\eta_0, \mu)e^{-\frac{\tau}{\eta_0}} + A(-\eta_0)\Phi(-\eta_0, \mu)e^{\frac{\tau}{\eta_0}} + \int_{-1}^{+1} \Psi(\eta, \mu)\mathbf{A}(\eta)e^{-\frac{\tau}{\eta}} d\eta \quad (5.23)$$

Burada $\Psi(\eta, \mu)$ 2×2 lik bir matristir

$$\Psi(\eta, \mu) = [\Phi_1(\eta, \mu) \quad \Phi_2(\eta, \mu)] \quad (5.24)$$

$\mathbf{A}(\eta)$ matrisi ise

$$\mathbf{A}(\eta) = \begin{bmatrix} A_1(\eta) \\ A_2(\eta) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

şeklindedir. Denklem 5.24. ve denklem 5.25.' de verilen matrisler denklem 5.23.' de yerine konulursa genel çözüm

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\tau, \mu) = & A(\eta_0)\Phi(\eta_0, \mu)e^{-\frac{\tau}{\eta_0}} + A(-\eta_0)\Phi(-\eta_0, \mu)e^{\frac{\tau}{\eta_0}} \\ & + \int_{-1}^{+1} [A_1(\eta)\Phi_1(\eta, \mu) + A_2(\eta)\Phi_2(\eta, \mu)]e^{-\frac{\tau}{\eta}} d\eta \end{aligned} \quad (5.26)$$

olur. Burada $A(\pm\eta_0)$, $A_1(\eta)$ ve $A_2(\eta)$ açılım katsayılarıdır. Çözümleri içeren özfonksiyonlar dik olduğundan, verilen bir problem için vektör transfer denkleminin çözümü özfonksiyonlar cinsinden yazılıp, sınır koşullarından açılım katsayıları bulunabilir.

6. TAM – BÖLGE DİKLİK BAĞINTILARI

$\Phi(\pm\eta_0, \mu)$, $\Phi_1(\eta, \mu)$ ve $\Phi_2(\eta, \mu)$ özvektörleri tam bölgede ortogonaldirler (diktirler). Tam bölge diklik bağıntısını türetmek için denklem 5.4. ξ ve ξ' ye bağlı olarak yazılır.

$$\left(1 - \frac{\mu}{\xi}\right) \Phi(\xi, \mu) = \frac{1}{2} \omega \xi \mathbf{Q}(\mu) \int_{-1}^{+1} \mathbf{Q}^T(\mu) \Phi(\xi, \mu) d\mu \quad (6.1.a)$$

$$\left(1 - \frac{\mu}{\xi'}\right) \Phi(\xi', \mu) = \frac{1}{2} \omega \xi' \mathbf{Q}(\mu) \int_{-1}^{+1} \mathbf{Q}^T(\mu) \Phi(\xi', \mu) d\mu \quad (6.1.b)$$

Burada ξ ve ξ' ler sürekli ve kesikli özfonksiyonları gösterir. Denklem 6.1.a sol taraftan $\Phi^T(\xi, \mu)$ ile ve denklem 6.1.b sağ taraftan $\Phi(\xi, \mu)$ ile çarpılır. Her iki denklem $\mu \in (-1, +1)$ aralığında μ üzerinden integrali alınıp, birbirinden çıkartılırsa diklik bağıntısı elde edilecektir.

$$\left\{ \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} \right\} \int_{-1}^{+1} \mu \Phi^T(\xi', \mu) \Phi(\xi, \mu) d\mu = 0 \quad (6.2)$$

Eğer $\xi \neq \xi'$ ise

$$\int_{-1}^{+1} \mu \Phi^T(\xi', \mu) \Phi(\xi, \mu) d\mu = 0, \quad \xi \neq \xi' \quad (6.3)$$

$\xi = \xi'$ olduğu durumda kesikli çözümler için normalizasyon integralleri

$$\int_{-1}^{+1} \mu \Phi^T(\pm\eta_0, \mu) \Phi(\pm\eta_0, \mu) d\mu = \pm N(\eta_0), \quad (6.4 a)$$

$$N(\pm\eta_0) = \pm \frac{1}{2} \omega \eta_0^2 \mathbf{M}^T(\eta_0) \frac{d}{dz} \Lambda(z) \Big|_{z=\eta_0} \mathbf{M}(\eta_0) \quad (6.4 b)$$

ile verilir. Sürekli özvektörlerin dejenerer olmasından dolayı sürekli özfonksiyonların diklik bağıntısının çıkarımında bazı zorluklar vardır. Eğer

$$\delta(\eta - \eta') \eta N_{ij}(\eta) = \int_{-1}^{+1} \mu \Phi_i^T(\eta', \mu) \Phi_j(\eta, \mu) d\mu \quad (6.5)$$

$$\eta \text{ ve } \eta' \in (-1, 1), \quad i, j = 1 \text{ veya } 2$$

tanımı yapılırsa

$$N_{11}(\eta) = c^2(1 - \eta^2)^2 \left[\lambda_1^2(\eta) + \frac{9}{4} \omega^2 \eta^2 (1 - \eta^2)^2 \pi^2 \right] + 2\omega_2(\eta) [c(1 - \eta^2) \lambda_1(\eta) + \omega_2(\eta)] \quad (6.6a)$$

$$N_{12}(\eta) = N_{21}(\eta) = c(1 - \eta^2)^2 \left[\lambda_1^2(\eta) + \frac{9}{4} \omega^2 \eta^2 (1 - \eta^2)^2 \pi^2 \right] - 2\omega_2(\eta) [1 - 3(1 - \omega)\eta^2] \quad (6.6b)$$

$$N_{22}(\eta) = 2[1 - 3(1 - \omega)\eta^2]^2 + 18(1 - \eta^2)^2 \left[\lambda_0^2(\eta) + \frac{1}{4} \omega^2 \eta^2 \pi^2 \right] \quad (6.6c)$$

elde edilir. Schmit-tipi işlem, adjoint özvektörlerinin bir kümesini geliştirmek için kullanılabilir. Eğer skalar çarpım

$$\langle i | j \rangle = \int_{-1}^{+1} \mu \Phi_i^{T\dagger}(\eta, \mu) \Phi_j(\eta, \mu) d\mu, \quad i, j = +, -, 1 \text{ ve } 2, \quad (6.7)$$

şeklinde tanımlanırsa ve denklem 6.7.'deki adjoint vektörleri

$$\Phi_{\pm}^{\dagger}(\mu) = \Phi_{\pm}(\mu) \quad (6.8a)$$

$$\Phi_1^{\dagger}(\eta, \mu) = N_{22}(\eta) \Phi_1(\eta, \mu) - N_{12}(\eta) \Phi_2(\eta, \mu) \quad (6.8b)$$

$$\Phi_2^{\dagger}(\eta, \mu) = N_{11}(\eta) \Phi_2(\eta, \mu) - N_{21}(\eta) \Phi_1(\eta, \mu) \quad (6.8c)$$

şeklinde ise, istenilen diklik şartı bulunmuş olur.

$$\langle i | j \rangle = 0, \quad i \neq j \quad (6.9)$$

Denklem 6.8. ile verilen tanımlar yardımıyla gerekli normalizasyon integralleri doğruca hesaplanabilir.

$$\langle 1 | 1 \rangle = \langle 2 | 2 \rangle = N(\eta) \delta(\eta - \eta') \quad (6.10 a)$$

$$N(\eta) = \eta(1 - \eta^2)^2 \Lambda^+(\eta) \Lambda^-(\eta) \quad (6.10 b)$$

Burada

$$\begin{aligned} \Lambda^\pm(\eta) = & -1 + 9(1 - \eta^2)^2 \left[\lambda_0^2(\eta) - \frac{1}{4} \pi^2 \omega^2 \eta^2 \right] \\ & + 3\eta^2(1 - \omega) \left[4\lambda_0(\eta) - 3\eta^2(1 - \omega) + 2 \right] \\ & \pm i\pi\omega\eta \left[9(1 - \eta^2)^2 \lambda_0(\eta) + 6\eta^2(1 - \omega) \right], \quad c=1 \end{aligned} \quad (6.11)$$

şeklindedir.

7. H_N YÖNTEMİNİN VEKTÖR TRANSFER DENKLEMİNE UYGULANMASI

H_N yöntemi nötron transport denkleminin birinci formunu çözmek için kullanılan bir yöntemdir (Tezcan vd. 2003). Bu yöntem iki farklı şekilde uygulanabilir:

(1) Düzlem geometride yazılan F_N denkleminin çözümünde Case' in özfonksiyonlarını içeren Green fonksiyonlarının kullanılması

(2) Düzlem geometride Case' in özfonksiyonları cinsinden yazılan genel çözümde açılım katsayılarının bulunması

Atomlar ve fotonlar arasındaki etkileşme atomik çekirdekler ve nötronlar arasındaki etkileşmeden fiziksel olarak farklı olmasına rağmen, bir nükleer reaktörde nötron alanının genel özellikleri, yıldızda ışınım alanının genel özelliklerine benzerdir ve matematiksel denklemler aynı formda ifade edilebilirler. Bu nedenle, H_N yöntemi nötron transport denkleminin çözümü için geliştirilen bir yöntem olmasına karşın vektör transfer denkleminin çözümü için de kullanılabilir. Her iki denklem de yüksüz parçacıklar için geliştirilmiştir. Bu çalışmada vektör transfer denklemi kullanılarak Milne problemi H_N yöntemiyle incelenecektir. Bunun için H_N yönteminin ikinci şekli uygulanacaktır.

7. 1. H_N Yöntemi ile Milne Problemi

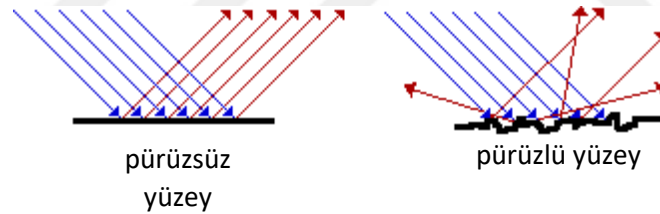
Atomik düzeyde Milne probleminin şartları Placzek ve Seidel tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Kourganoff 1963) :

Hızlarını değiştirmeden izotropik olarak saçılan nötronların bulunduğu $x=0$ düzlemiyle sınırlanan bir yarı- uzay ($x > 0$) ortam düşünülür. Ortamda kaynak olmadığı ve dışarıdan ortama nötron girişinin bulunmadığı kabul edilir. Milne problemi, bu ortamdaki nötron dağılımını ve $x=0$ düzleminden çıkan nötronların açısal dağılımını belirlemeyi içerir. Sonsuza yerleştirilen kaynaktan dolayı sınır yüzeyi civarındaki nötron akısı asimptotik

bir dağılım sergileyecektir. Bu durumda nötron akısının sıfır olduğu nokta ekstrapolasyon uzaklığı olacaktır.

Tanımlanan bu Milne problemi, hem astrofiziksel hem de atomik durumda kısıtlıdır. Çünkü yıldız atmosferiyle ilgilenildiğinde önerilebilen tek problem çeşididir. Bu nedenle sadece doğru soğurum ve saçılma değil çeşitli değişkenler de göz önüne alınabilir. Bu değişkenlerden bazıları Chandrasekhar ve Van de Hulst tarafından çalışılmıştır. Örnek olarak aşağıdaki durumlar düşünülebilir.

1. Paralel ışının tüm doğrultularda yayıldığı pürüzlü yüzeyden yansıma (şekil 7.1)
2. Rayleigh saçılması (gezegen atmosferi)
3. Elektronlarla Thomson saçılması (genç- tip yıldız)
4. Küresel simetrik atmosfer
5. Hareket halindeki tabakalar (Doppler olayı, novalar)



Şekil 7.1. Paralel ışının pürüzsüz ve pürüzlü yüzeyden yansıması

Milne problemi iki şekilde incelenir:

- Genel Milne problemi
- Gray Milne problemi

Genel Milne probleminde soğurum katsayısı sadece katmanın geometrik derinliği ile değil gelen ışınının ν frekansı ile de değişir. Gray Milne problemi ise genel Milne probleminin matematiksel olarak özel bir şeklidir. Soğurum katsayısının frekanstan bağımsız ve sadece katmanın geometrik derinliğine bağlı olduğu durumdur. Bölüm 4.' de

vektör transfer denklemi türetilirken Rayleigh saçılması (frekansın değişmediği durum) kullanıldığından bu çalışmada gray Milne problemi çözülecektir. Uygun sınır koşulları altında H_N yöntemi kullanılarak ekstrapolasyon uzaklığı bulunacaktır. Bunun için ilk sınır koşulu tanımlanır: atmosferin $x=0$ düzlemi ile sınırlanması veya dışarıdan ışınım olmaması. Bu koşul

$$\mathbf{I}(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0 \quad (7.1)$$

ile verir. Eğer bu problemin çözümünü $\mathbf{I}_M(\tau, \mu)$ ile tanımlarsak, $\tau \rightarrow \infty$ için ikinci koşul

$$\mathbf{I}_M(\tau, \mu) \approx \Phi(-\eta_0, \mu) e^{\frac{\tau}{\eta_0}}, \quad \tau \rightarrow \infty \quad (7.2)$$

olur. Milne probleminin çözümü $\Phi(-\eta_0, \mu) e^{\tau/\eta_0}$ ile sonsuzda yok olan temel çözümlerin toplamının bir lineer kombinasyonu şeklinde alınır (Schnatz ve Siewert 1971).

$$\mathbf{I}_M(\tau, \mu) = A(\eta_0) \Phi(\eta_0, \mu) e^{-\frac{\tau}{\eta_0}} + \Phi(-\eta_0, \mu) e^{\frac{\tau}{\eta_0}} + \int_0^{+1} \Psi(\eta, \mu) \mathbf{A}(\eta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} d\eta \quad (7.3)$$

Burada keyfi olarak çözüm normalize edilerek, $A(-\eta_0) = I$ alınır. $\tau=0$ daki genel çözüm,

$$\Psi(\eta, \mu) = [\Phi_1(\eta, \mu) \quad \Phi_2(\eta, \mu)]$$

ve

$$\mathbf{A}(\eta) = \begin{bmatrix} A_1(\eta) \\ A_2(\eta) \end{bmatrix}$$

matrislerinin denklem 7.1.' de yerine konulmasıyla

$$\mathbf{I}(0, \mu) = A(\eta_0) \Phi(\eta_0, \mu) + \Phi(-\eta_0, \mu) + \int_{-1}^{+1} [A_1(\eta) \Phi_1(\eta, \mu) + A_2(\eta) \Phi_2(\eta, \mu)] d\eta \quad (7.4)$$

olarak elde edilir. Denklem 7.4.' de yer alan açılım katsayılarını bulmak için tam- bölge diklik koşulları uygulanır. Bunun için ilk önce denklem 7.4., $\mu \Phi^T(\eta_0, \mu)$ ile sol taraftan çarpılıp, $\mu \in (-1, +1)$ aralığında μ üzerinden integral alınarak $A(\eta_0)$ katsayısı bulunur.

$$\int_{-1}^{+1} \mu \Phi^T(\eta_0, \mu) \mathbf{I}(0, \mu) d\mu = A(\eta_0) \int_{-1}^{+1} \mu \Phi^T(\eta_0, \mu) \Phi(\eta_0, \mu) d\mu + \int_{-1}^{+1} \mu \Phi^T(\eta_0, \mu) \Phi(-\eta_0, \mu) d\mu + \int_{-1}^{+1} \left\{ \mu \Phi^T(\eta_0, \mu) \int_{-1}^{+1} [A_1(\eta) \Phi_1(\eta, \mu) + A_2(\eta) \Phi_2(\eta, \mu)] d\eta \right\} d\mu \quad (7.5)$$

Denklem 6.3 ve denklem 6.4 ile verilen diklik koşulları denklem 7.5.' de uygulanırsa

$$\int_{-1}^{+1} \mu \Phi^T(\eta_0, \mu) \mathbf{I}(0, \mu) d\mu = A(\eta_0) N(\eta_0) \quad (7.6)$$

elde edilir. Sol tarafta yer alan integralin sınırları ikiye ayrılır.

$$\int_{-1}^0 \mu \Phi^T(\eta_0, \mu) \mathbf{I}(0, \mu) d\mu + \int_0^1 \mu \Phi^T(\eta_0, \mu) \mathbf{I}(0, \mu) d\mu = A(\eta_0) N(\eta_0) \quad (7.7)$$

Sınır koşulları

$$\mathbf{I}(0, \mu) = \mathbf{0} \quad \mu > 0 \quad (7.8a)$$

ve

$$\mathbf{I}(0, -\mu) = \mathbf{Q}(\mu) \sum_{\alpha=0}^N \mathbf{a}_\alpha \mu^\alpha \quad \mu > 0 \quad (7.8b)$$

şeklinde seçilerek denklem 7.7.' de yerine konularak $A(\eta_0)$ açılım katsayısı

$$A(\eta_0) = -\frac{1}{N(\eta_0)} \frac{\omega \eta_0}{2} \sum_{\alpha=0}^N \Gamma_\alpha(\eta_0) \mathbf{a}_\alpha \quad (7.9)$$

bulunur. Burada

$$\Gamma_\alpha(\eta_0) = \frac{2}{\omega \eta_0} \int_0^1 \mu^{\alpha+1} \Phi^T(\eta_0, -\mu) \mathbf{Q}(\mu) d\mu \quad (7.10)$$

olarak tanımlanır. 1×2 lik matrislerdir. $A_1(\eta)$ katsayısını bulmak için denklem 7.4 μ $\Phi_1^{T\dagger}(\eta, \mu)$ ile sol taraftan çarpılıp, $\mu \in (-1, +1)$ aralığında μ üzerinden integral alınarak denklem 6.7 ile verilen diklik koşulu uygulanırsa

$$\int_{-1}^{+1} \mu \Phi_1^{T\dagger}(\eta, \mu) \mathbf{I}(0, \mu) d\mu = \int_0^1 \int_{-1}^{+1} A_1(\eta) \mu \Phi_1^{T\dagger}(\eta, \mu) \Phi_1(\eta, \mu) d\mu d\eta \quad (7.11)$$

elde edilir. Denklem 6.8, denklem 7.11.' de yazılırsa

$$A_1(\eta) = \frac{1}{N(\eta)} \frac{\omega\eta}{2} \sum_{\alpha=0}^N [-N_{22}(\eta)\Gamma_{\alpha}^1(\eta) + N_{12}(\eta)\Gamma_{\alpha}^2(\eta)] \mathbf{a}_{\alpha} \quad (7.12)$$

bulunur. Burada

$$\Gamma_{\alpha}^{\beta}(\eta) = \frac{2}{\omega\eta_0} \int_0^1 \mu^{\alpha+1} \Phi_{\beta}^T(\eta, -\mu) \mathbf{Q}(\mu) d\mu, \quad \beta = 1, 2 \quad (7.13)$$

biçimindedir. Aynı şekilde denklem 7.4 $\mu \Phi_2^T(\eta, \mu)$ ile sol taraftan çarpılıp, $\mu \in (-1, +1)$ aralığında μ üzerinden integral alınarak $A_2(\eta)$ katsayısı bulunur.

$$A_2(\eta) = \frac{1}{N(\eta)} \frac{\omega\eta}{2} \sum_{\alpha=0}^N [N_{21}(\eta)\Gamma_{\alpha}^1(\eta) - N_{11}(\eta)\Gamma_{\alpha}^2(\eta)] \mathbf{a}_{\alpha} \quad (7.14)$$

\mathbf{a}_{α} katsayılarını bulmak için çıkan akı denklemi yazılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(0, -\mu) &= A(\eta_0) \Phi(\eta_0, -\mu) + \Phi(-\eta_0, -\mu) \\ &+ \int_{-1}^{+1} [A_1(\eta) \Phi_1(\eta, -\mu) + A_2(\eta) \Phi_2(\eta, -\mu)] d\eta \end{aligned} \quad (7.15)$$

μ^{m+1} ile çarpılıp $\mu \in (0, 1)$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=0}^N \int_0^1 \mu^{m+\alpha+1} \mathbf{Q}(\mu) \mathbf{a}_\alpha d\mu &= \frac{\omega\eta_0}{2} \mathbf{A}(\eta_0) \mathbf{A}_m(\eta_0) + \frac{\omega\eta_0}{2} \mathbf{B}_0(\eta_0) \\
&+ \int_0^1 \frac{\omega\eta}{2} \mathbf{A}_1(\eta) \mathbf{A}_m^1(\eta) d\eta + \int_0^1 \frac{\omega\eta}{2} \mathbf{A}_2(\eta) \mathbf{A}_m^2(\eta) d\eta
\end{aligned} \tag{7.16}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_\alpha(\eta_0) &= \frac{2}{\omega\eta_0} \int_0^1 \mu^{\alpha+1} \Phi(-\eta_0, \mu) d\mu \\
\mathbf{B}_\alpha(\eta_0) &= \frac{2}{\omega\eta_0} \int_0^1 \mu^{\alpha+1} \Phi(\eta_0, \mu) d\mu \quad \alpha = 1, 2 \\
\text{ve} \\
\mathbf{A}_\alpha^\beta(\eta) &= \frac{2}{\omega\eta} \int_0^1 \mu^{\alpha+1} \Phi_\beta(-\eta_0, \mu) d\mu \\
\mathbf{B}_\alpha^\beta(\eta) &= \frac{2}{\omega\eta} \int_0^1 \mu^{\alpha+1} \Phi_\beta(\eta_0, \mu) d\mu, \quad \beta = 1, 2
\end{aligned} \tag{7.17}$$

şeklinde tanımlanır ve 2×1 lik matrislerdir. Denklem 7.16.' da bulunan açılım katsayılarının yerine konulmasıyla \mathbf{a}_α , 2×1 lik matris, katsayılarının elde edilmesini sağlayan ifade bulunur.

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=0}^N \left\{ \int_0^1 \mu^{m+\alpha+1} \mathbf{Q}(\mu) d\mu + \left(\frac{\omega\eta_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(\eta_0)} \mathbf{A}_m(\eta_0) \Gamma_\alpha(\eta_0) \right. \\
\left. - \left(\frac{\omega}{\eta}\right)^2 \int_0^1 \frac{\eta^2}{N(\eta)} \mathbf{A}_m^1(\eta) [-N_{22}(\eta) \Gamma_\alpha^1(\eta) + N_{12}(\eta) \Gamma_\alpha^2(\eta)] d\eta \right. \\
\left. - \left(\frac{\omega}{\eta}\right)^2 \int_0^1 \frac{\eta^2}{N(\eta)} \mathbf{A}_m^2(\eta) [N_{21}(\eta) \Gamma_\alpha^1(\eta) - N_{11}(\eta) \Gamma_\alpha^2(\eta)] d\eta \right\} \mathbf{a}_\alpha = \frac{\omega\eta_0}{2} \mathbf{B}_0(\eta_0)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Bulunan bu katsayılar, Milne probleminde ilgilenilen parametre olan, ekstrapolasyon uzaklığının hesaplanmasında kullanılır. Ekstrapolasyon uzaklığı, asimptotik yoğunluğun bileşeninin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilir.

$$\rho_{as}(-\tau_0) = 0 \quad (7.19)$$

$$\rho_{as}(\tau_0) = \int_{-1}^{+1} \left[A(\eta_0) \Phi(\eta_0, \mu) e^{\frac{\tau}{\eta_0}} + \Phi(-\eta_0, \mu) e^{-\frac{\tau}{\eta_0}} \right] d\mu$$

ρ_{as} yoğunluk bileşeni, denklem 7.4.'de sürekli çözümler, $\eta \in (0,1)$, ihmal edilerek yazılmıştır. Böylece, ekstrapolasyon uzaklığı, τ_0 ,

$$\tau_0 = -\frac{\eta_0}{2} \log[-A(\eta_0)] \quad (7.20)$$

olarak bulunur. Bazı ω değerleri için hesaplanan nümerik değerler çizelge 7.1., 7.2. ve 7.3.' de verilmiştir.

Çizelge 7.1. $\omega = 0.3$ için kesikli özdeğer ve ekstrapolasyon uzaklığı

η_0 1.007230057	
N	τ_0
0	2.152803
1	2.159281
2	2.145970
3	2.147874
4	2.147604
5	2.147640
6	2.147636
Siewert ve Schnatz	2.147636

Çizelge 7.2. $\omega = 0.6$ için kesikli özdeğer ve ekstrapolasyon uzaklığı

η_0 1.125230588	
N	τ_0
0	1.167327
1	1.183061
2	1.179158
3	1.179447
4	1.179428
5	1.179429
6	1.179429
Siewert ve Schnatz	1.179429

Çizelge 7.3. $\omega = 0.9$ için kesikli özdeğer ve ekstrapolasyon uzaklığı

η_0	1.924621804
N	τ_0
0	0.788875
1	0.800063
2	0.799782
3	0.799784
4	0.799784
5	0.799784
6	0.799784
Siewert ve Schnatz	0.799784

8. SONUÇ

Bu çalışmada vektör transfer denklemi, Rayleigh saçılması durumunda incelenmiştir. Bu saçılma durumunda elde edilen transfer denkleminin çözümlerine bakılmıştır. Nötron transport denklemini çözmek için geliştirilmiş olan H_N yöntemi tanıtılmıştır. Vektör transfer denkleminin bir uygulaması olarak Milne problemi H_N yöntemiyle çözümlenerek bazı ω değerleri için ekstrapolasyon uzaklığı bulunmuştur. Bu fiziksel parametre bulunurken çıkan şiddet dağılımı, $\mu(=\cos\theta)$ ' nün kuvvetleri cinsinden seriye açılmıştır. Nümerik değerlerin bulunmasında Reduce 3.7 programı kullanılmış ve integraller hesaplanırken Gauss Quadrature, kök bulma programında ise Newton- Raphson iterasyon metodu kullanılmıştır. Bulunan nümerik değerler (çizelge 7.1., 7.2., 7.3.), Schnatz ve Siewert (1971) tarafından H- fonksiyonları kullanılarak elde edilen değerlerle uyumaktadır. Böylece seçmiş olduğumuz yöntemin ve çıkan şiddet dağılımı seçiminin vektör transfer denkleminin uygulamaları için uygun olduğu görülmüştür.

Bundan sonraki çalışmada vektör transfer denkleminin diğer bir uygulaması olarak yarı-uzay albedo ve slab albedo problemlerinin incelenmesi düşünülmektedir. Ayrıca Rayleigh saçılmasına göre çok daha kolay olan izotropik saçılma durumunda vektör transfer denklemi incelenerek, yarı uzay problemleri çözülecektir.

KAYNAKLAR

- Chandrasekhar, S. 1960. Radiative transfer. Dover, 393, United States of America.
- Kourganoff, V. 1963. Basic methods in transfer problems. Dover, 281, United States of America.
- Shurcliff, W. A. and Ballard, S. S. 1964. Polarized light. D. Van Nostrand, 143, New York.
- Pomraning, G. C. 1973. The equations of radiation hydrodynamics. Pergamon, 143, Australia.
- Mobley, C. D. 1994. Light and water. Academic, 592, California.
- Siewert, C. E. and Fraley, S. K. 1967. Radiative transfer in a free- electron atmosphere. *Annals of Physics*, 43 (2); 338-359.
- Smith, O. J. and Siewert, C. E. 1967. The half- space Green's function for an atmosphere with a polarized radiation field. *Journal of Mathematical Physics*, 8 (12); 2467-2474.
- Bond, G. R. and Siewert, C. E. 1967. On a Rayleigh scattering problem in stellar atmospheres. *The Astrophysical Journal*, 150; 357- 359.
- Siewert, C. E. 1968. A new approach to Chandrasekhar's scattering matrix for a semi-infinite Rayleigh- scattering atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 152; 835- 840.
- Shieh, P. S. and Siewert, C. E. 1968. On the albedo problem for a finite plane- parallel Rayleigh- scattering atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 155; 265-271.
- Mourad, S. A. and Siewert, C. E. 1969. On solutions of an equation of transfer for a planetary atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 155; 555-564.
- Mourad, S. A. and Siewert, C. E. 1969. Remarks on half- space applications regarding an equation of transfer for a planetary atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 156; 1181- 1184.
- Schnatz, T. W. and Siewert, C. E. 1970. Radiative transfer in a Rayleigh- scattering atmosphere with true absorption. *Journal of Mathematical Physics*, 11 (9); 2733- 2739.
- Burniston, E. E. and Siewert, C. E. 1970. Half- range expansion theorems in studies of polarized light, *Journal of Mathematical Physics*, 11 (12); 3416- 3420.
- Schnatz, T. W. and Siewert, C. E. 1971. On the transfer of polarized light in Rayleigh- scattering half spaces with true absorption. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 152; 491- 508.

- Bond, G. R. and Siewert, C. E. 1971. On the nonconservative equation of transfer for a combination of Rayleigh and isotropic scattering. *The Astrophysical Journal*, 164; 97-110.
- Siewert, C. E. 1972. On the half-range orthogonality theorem appropriate to the scattering of polarized light. *Journal of Quantative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 12; 683-694.
- Siewert, C. E. and Burniston, E. E. 1972. An explicit closed-form result for the discrete eigenvalue in studies of polarized light. *The Astrophysical Journal*, 173; 405-406.
- Siewert, C. E. 1979. On using the F_N method for polarization studies in finite plane-parallel atmospheres. *Journal of Quantative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 21; 35-39.
- Siewert, C. E. and Maiorino, J. R. 1980. The F_N method for polarization studies- II numerical results. *Journal of Quantative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 24; 159-165.
- Pomraning, G. C. 1998. A renormalized equation of transfer for Rayleigh scattering. *Journal of Quantative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 60 (2); 181-197.
- Fernández, J. E. 1999. Polarisation effects in multiple scattering photon calculations using the Boltzmann vector equation. *Radiation Physics and Chemistry*, 56; 27-59.
- Barman S. K. 2000. The solution of the radiative transfer equation for polarized light by the Chandrasekhar's discrete ordinate method. *Journal of Quantative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 66; 509-517.
- Elghazaly, A. 2001. Radiation transfer in semi-infinite polarized medium. *Journal of Quantative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 70; 47-53.
- Tezcan C., Kaşkaş A., and Güleçyüz M. Ç. 2003 The H_N Method for Solving Linear Transport Equation: Theory and Applications. *Journal of Quantative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 78, 243-254.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Ankara’ da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Anadolu’ nun çeşitli illerinde tamamladı. 1997 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü’ nden 2001 yılında Fizikçi olarak mezun oldu. 2001 yılında, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı’ nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü’ nde 2002 yılından bu yana Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

