170302

ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

JACOBİ VE LAGRANGE POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİNDE BAZI GENİŞLETMELER

Esra ERKUŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2005

Prof. Dr. Abdullah ALTIN danışmanlığında, Esra ERKUŞ tarafından hazırlanan bu çalışma 18/05/2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile Matematik Anabilim Dalı'nda doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Cevat KART

Üye : Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Üye : Prof. Dr. İ. Ethem ANAR

Üye : Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Üye : Prof. Dr. Şeref MİRASYEDİOĞLU

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

JACOBİ VE LAGRANGE POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİNDE BAZI GENİŞLETMELER

Esra ERKUŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, Lagrange polinomlarının temel özellikleri verilmiştir.
Bu çalışmanın orjinal sonuçları üçüncü ve beşinci bölümde yer almaktadır.
Üçüncü bölümde, Jacobi polinomları ve ilgili bazı özel polinomlar için yeni bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca çok değişkenli Lagrange polinomlarının özelliklerinde bazı genişletmeler yapılmıştır.
Dördüncü bölümde, $q-$Analizi ile ilgili kavramlar verilmiş ve bunlara ilişkin bazı temel sonuçlar hatırlatılmıştır.
Beşinci bölümde, çok değişkenli $q-$Lagrange polinomları tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

2005, 66 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Jacobi Polinomları, Lagrange Polinomları, Doğurucu Fonksiyon, Pochhammer Sembolü, İkinci Çeşit Stirling Sayıları, Rekürans Bağıntısı, Toplam Formülü, Hipergeometrik Seri, $q-$Binom Katsayıları, $q-$Faktöriyel, $q-$Fark Operatörü, $q-$Polinomlar.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOME EXTENSIONS IN THE PROPERTIES OF

JACOBI AND LAGRANGE POLYNOMIALS

Esra ERKUŞ

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah ALTIN

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter deals with basic properties of Lagrange polynomials.

Original results of this work are contained in Chapters 3 and 5.

In the third chapter, new relations for Jacobi polynomials and some special polynomials associated with Jacobi polynomials have been obtained. Furthermore, some extensions in the properties of multivariable Lagrange polynomials have been studied.

In the fourth chapter, the concepts concernings $q-$Calculus have been recalled and various basic results have been considered.

In the fifth chapter, multivariable $q-$Lagrange polynomials have been defined and their miscellaneous properties have been examined.

2005, 66 pages

Key Words : Jacobi polynomials, Lagrange polynomials, Generating functions, Pochhammer symbol, Stirling numbers of the second kind, Recurrence relation, Addition formula, Hypergeometric series, $q-$Binomial coefficients, $q-$Factorial, $q-$Difference operator, $q-$Polynomials.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Abdullah ALTIN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a ve hayat boyu her türlü sıkıntımda yanımda yer alan ve çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Esra ERKUŞ

Ankara, Mayıs 2005.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi polinomu
$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$	Lagrange polinomu
$g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)$	Çok değişkenli Lagrange polinomu
D_z^{μ}	μ-yüncü basamaktan kesirli türev operatörü
$F_D^{(r)}$	r değişkenli dördüncü çeşit Lauricella fonksiyonu
$\Phi_2^{(r)}$	r değişkenli konfluent hipergeometrik fonksiyon
$S(n,k)$	İkinci çeşit Stirling sayıları
$[x]_q!$	$x!$ fonksiyonunun $q-$analoğu
$[a]_q$	a tamsayısının q-analoğu
Δ_q	q-fark operatörü
$e_q(x)$	q-üstel fonksiyon
$\Gamma_q(x)$	q-gamma fonksiyonu
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x;q)$	q-Jacobi polinomları
$P_n(x;q)$	q-Legendre polinomları
$L_n^{\alpha}(x;q)$	q-Laguerre polinomları
$C_n^{v}(x;q)$	q-Gegenbauer (Ultraküresel) polinomları
$H_n(x;q)$	q-Hermite polinomları

1. GİRİŞ

İki değişkenli Lagrange polinomları ile özellikle istatistik problemlerinde karşılaşılmaktadır (Erdélyi *et al.* 1955). Bu polinomların üç değişkenli halini Khan ve Shukla çalışmışlardır (Khan ve Shukla 1998). Chan, Chyan ve Srivastava, 2001 yılında Lagrange polinomlarının çok değişkenlisini tanımlamışlar ve daha sonraki yıllarda bu polinomlar Chan-Chyan-Srivastava polinomları olarak adlandırılmışlardır. Lineer, multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon ailelerine sahip olan çok değişkenli Lagrange polinomları, çok değişkenli polinomlar hakkında yapılan çalışmalara önemli bir örnek olmuştur. Bu çalışmalar sayesinde başka çok değişkenli polinomlar geliştirilmiş ve bunların özellikleri incelenmiştir.

Diğer taraftan, tarihi yaklaşık 150 yıl öncesine dayanan $q-$Analizi de matematiksel genişletmeler (analoglar) arasında önemli bir yer tutmaktadır. İstatistiksel mekanikte kesin olarak çözülebilen modellerdeki önemi nedeniyle özellikle son zamanlarda fonksiyonların q-analoglarına ilgi artmıştır.

Bu tezde, önce Lagrange polinomları ile Jacobi polinomları arasında bilinen bir bağıntı yardımıyla (Chan *et al.* 2001) Jacobi polinomlarının sağladığı yeni bazı bağıntılar verilmiş ve Jacobi polinomlarının özel durumlarına karşılık gelen klasik ve iyi bilinen diğer bazı özel polinomlara geçilmiştir. Sonra da, çok değişkenli Lagrange polinomlarının farklı multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon ailelerini bulabilmek için yeni teoremler elde edilmiş ve bunların özel durumları incelenmiştir. Ayrıca bu polinomlar için rekürans formülleri elde edilmiştir. Son bölümde ise, $q-$Lagrange polinomları tanımlanmış ve bu polinomların da çeşitli doğurucu fonksiyon ailelerini elde edebilmek için teoremler verilmiştir.

2. LAGRANGE POLİNOMLARININ TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde öncelikle iki değişkenli Lagrange polinomlarının ve daha sonra da çok değişkenli Lagrange polinomlarının temel özellikleri verilecektir.

2.1. İki Değişkenli Lagrange Polinomları

İki değişkenli polinomlar ailesinden olan $g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomları,

$$(1-xt)^{-\alpha}(1-yt)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)\,t^n \ ; \quad |t|<\min\left\{|x|^{-1},|y|^{-1}\right\} \tag{2.1.1}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla tanımlanmaktadır (Erdélyi *et al.* 1955). Buradan $g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomları aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$(1-xt)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}(-1)^n x^n t^n$$

$$(1-yt)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\beta}{n}(-1)^n y^n t^n.$$

Bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılır ve ikinci tarafta iki kuvvet serisinin Cauchy çarpımı kullanılırsa,

$$(1-xt)^{-\alpha}(1-yt)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{-\alpha}{k}\binom{-\beta}{n-k}(-1)^n x^k y^{n-k}\right]t^n \tag{2.1.2}$$

olur. (2.1.1) ve (2.1.2) karşılaştırılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right]t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{-\alpha}{k}\binom{-\beta}{n-k}(-1)^n x^k y^{n-k}\right]t^n$$

olup t^n nin katsayıları eşitlendiğinde,

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{-\alpha}{k}\binom{-\beta}{n-k}(-1)^n x^k y^{n-k} \tag{2.1.3}$$

elde edilir. $\binom{-s}{m}=(-1)^m\frac{(s)_m}{m!}$ özelliği kullanılarak $g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomları,

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha)_k\,(\beta)_{n-k}}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $(\lambda)_k = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)$ ve $(\lambda)_0 = 1$ olarak tanımlanan Pochhammer sembolüdür.

2.2. Lagrange Polinomlarından Jacobi Polinomlarına Geçiş

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-k} \tag{2.2.1}$$

açılımına sahiptir (Szegö 1975). Jacobi polinomlarının bu tanımından yararlanılarak Jacobi polinomları ile Lagrange polinomları arasında aşağıdaki şekilde bir bağıntı bulunabilir:

Lagrange polinomlarının (2.1.3) tanımında ikinci yanı $(y-x)^{n-k}$ ile çarpılıp bölünür ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{-\alpha}{k} \binom{-\beta}{n-k} (-1)^n x^k y^{n-k} \\
&= (y-x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{-\alpha}{k} \binom{-\beta}{n-k} (x-y)^{-k} x^k (x-y)^{-n+k} y^{n-k} \\
&= (y-x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{-\alpha}{k} \binom{-\beta}{n-k} \left(\frac{x}{x-y}\right)^k \left(\frac{y}{x-y}\right)^{n-k} \\
&= (y-x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{-\alpha}{k} \binom{-\beta}{n-k} \left(\frac{\frac{x+y}{x-y}+1}{2}\right)^k \left(\frac{\frac{x+y}{x-y}-1}{2}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

olur. (2.2.1) de $\alpha \to -\alpha - n$, $\beta \to -\beta - n$, $x \to \dfrac{x+y}{x-y}$ alınmış hali de gözönünde tutularak bu son eşitlikten,

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) = (y-x)^n P_n^{(-\alpha-n,-\beta-n)}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \tag{2.2.2}$$

elde edilir. (2.2.2) bağıntısı yardımıyla, Lagrange polinomları ile Jacobi polinomları arasında, birinin bilinen bir özelliği kullanılarak diğeri için yeni özellikler ortaya çıkarılabilir.

2.3. Çok Değişkenli Lagrange Polinomları

$g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)$ çok değişkenli Lagrange polinomları,

$$\prod_{i=1}^{r}\left\{(1-x_i t)^{-\alpha_i}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n\ ; \tag{2.3.1}$$

$$|t|<\min\left\{|x_1|^{-1},\ldots,|x_r|^{-1}\right\}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanırlar (Chan *et al.* 2001). 1998 yılında bu polinomların $r=3$ halini Khan ve Shukla çalışmışlardır. Kısım 2.1 de iki değişkenli Lagrange polinomlarının elde edilişinde kullanılan yolla, burada da (2.3.1) den hareketle

$$g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{k_1+\ldots+k_r=n}\binom{\alpha_1+k_1-1}{k_1}\ldots\binom{\alpha_r+k_r-1}{k_r}x_1^{k_1}\ldots x_r^{k_r}$$

yazılabilir. İkinci yandaki binom katsayıları yerine Pochhammer sembolü cinsinden ifadeleri kullanılarak da

$$g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{k_1+\ldots+k_r=n}(\alpha_1)_{k_1}\ldots(\alpha_r)_{k_r}\frac{x_1^{k_1}}{k_1!}\ldots\frac{x_r^{k_r}}{k_r!} \tag{2.3.2}$$

elde edilir.

2.4. Kesirli Türev Yardımıyla Bazı Lineer Doğurucu Fonksiyonların Bulunması

D_z^{μ} , z değişkenine göre μ-yüncü basamaktan kesirli türevi gösteren operatör olmak üzere,

$$D_z^{\mu}\{f(z)\}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\mu)}\displaystyle\int_0^z(z-\xi)^{-\mu-1}f(\xi)d\xi & ,\quad (\mathrm{Re}(\mu)<0)\\ \dfrac{d^m}{dz^m}D_z^{\mu-m}\{f(z)\} & ,\quad (m-1\le \mathrm{Re}(\mu)<m;\ m\in\mathbb{N})\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre,

$$D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda}\right\}=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}z^{\lambda-\mu} \quad , \qquad \operatorname{Re}(\lambda)>-1 \tag{2.4.1}$$

olup buradan,

$$D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}\prod_{j=1}^{r}(1-x_jz)^{-\alpha_j}\right\}=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}F_D^{(r)}\left[\lambda,\alpha_1,...,\alpha_r;\mu;x_1z,...,x_rz\right] \tag{2.4.2}$$

yazılabilir (Srivastava ve Manocha 1984). Burada $F_D^{(r)}$, r kompleks değişkenli dördüncü çeşit Lauricella hipergeometrik fonksiyonu olup aşağıdaki şekilde tanımlanır (Srivastava ve Manocha 1984):

$$F_D^{(r)}\left[a,b_1,...,b_r;c;z_1,...,z_r\right] = \sum_{m_1,...,m_r=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+...+m_r}(b_1)_{m_1}...(b_r)_{m_r}}{(c)_{m_1+...+m_r}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{z_r^{m_r}}{m_r!}$$
$$\left(\max\left\{|z_1|,...,|z_r|\right\}<1\right).$$

(2.3.1) in her iki yanı $t^{\lambda-1}$ ile çarpılıp $D_t^{\lambda-\mu}$ kesirli türev operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}D_t^{\lambda-\mu}\left\{t^{\lambda-1}\prod_{j=1}^{r}(1-x_jt)^{-\alpha_j}\right\} &= D_t^{\lambda-\mu}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^{n+\lambda-1}\right\}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)D_t^{\lambda-\mu}\left\{t^{n+\lambda-1}\right\}\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitliğin sol yanında (2.4.2), sağ yanında da (2.4.1) gözönünde bulundurulursa,

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}t^{\mu-1}F_D^{(r)}\left[\lambda,\alpha_1,...,\alpha_r;\mu;x_1t,...,x_rt\right]=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\mu)}t^{n+\mu-1}$$

olup burada da $(\lambda)_k=\dfrac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}$ özelliğinin kullanılması ile,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n}g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n = F_D^{(r)}\left[\lambda,\alpha_1,...,\alpha_r;\mu;x_1t,...,x_rt\right] \tag{2.4.3}$$
$$\left(|t|<\min\left\{|x_1|^{-1},...,|x_r|^{-1}\right\}\right)$$

elde edilir (Chan *et al.* 2001). (2.4.3) de $\lambda = \mu$ alınırsa bu bağıntı, (2.3.1) doğurucu fonksiyonuna indirgenir.

(2.4.3) de λ ve μ parametrelerinin bir çok uygun seçimi ile çok değişkenli Lagrange polinomlarının başka doğurucu fonksiyonları da bulunabilir. Örneğin,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left\{(\lambda)_n\left(\frac{t}{\lambda}\right)^n\right\} = t^n \ ; \qquad (n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$$

ve

$$\begin{aligned}\lim_{|a|\to\infty}&\left\{F_D^{(r)}\left[a, b_1, ..., b_r; c; \frac{z_1}{a}, ..., \frac{z_r}{a}\right]\right\}\\ &= \lim_{|a|\to\infty}\left\{\sum_{m_1,...,m_r=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+...+m_r}(b_1)_{m_1}...(b_r)_{m_r}}{(c)_{m_1+...+m_r}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{z_r^{m_r}}{m_r!}\frac{1}{a^{m_1+...+m_r}}\right\}\\ &= \sum_{m_1,...,m_r=0}^{\infty}\frac{(b_1)_{m_1}...(b_r)_{m_r}}{(c)_{m_1+...+m_r}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{z_r^{m_r}}{m_r!}\\ &= \Phi_2^{(r)}\left[b_1, ..., b_r; c; z_1, ..., z_r\right]\end{aligned}$$

oldukları göz önüne alınsın. Burada $\Phi_2^{(r)}$, r kompleks değişkenli konfluent hipergeometrik fonksiyon olup,

$$\Phi_2^{(r)}\left[b_1, ..., b_r; c; z_1, ..., z_r\right] = \sum_{m_1,...,m_r=0}^{\infty}\frac{(b_1)_{m_1}...(b_r)_{m_r}}{(c)_{m_1+...+m_r}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{z_r^{m_r}}{m_r!}$$
$$(\max\{|z_1|, ..., |z_r|\} < \infty)$$

şeklinde tanımlanır (Srivastava ve Manocha 1984). Eğer (2.4.3) de $t \to \dfrac{t}{\lambda}$ ve $|\lambda| \to \infty$ alınırsa, çok değişkenli Lagrange polinomları için başka bir lineer doğurucu fonksiyonlar sınıfı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1, \ldots, x_r)\frac{t^n}{(\mu)_n} = \Phi_2^{(r)}\left[\alpha_1, ..., \alpha_r; \mu; x_1 t, ..., x_r t\right] \qquad (2.4.4)$$

olarak elde edilir (Chan *et al.* 2001).

2.5. Multilineer ve Multilateral Doğurucu Fonksiyonlar

Katlıterim katsayıları,

$$\binom{n}{k_1,...,k_r} = \frac{n!}{k_1!...k_r!} \qquad , \qquad (0 \le k_j \le n\ ;\ \ j = 1,...,r)$$

olarak tanımlanmaktadır. Mutlak yakınsak seriler için geçerli olan

$$\sum_{m_1,...,m_r=0}^{\infty} f(m_1+...+m_r)\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{x_r^{m_r}}{m_r!} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{(x_1+...+x_r)^n}{n!}$$

özdeşliği yardımıyla (Srivastava ve Manocha 1984), aşağıdakiler kolaylıkla elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n=0\\ l_1,...,l_p=0\\ m_1,...,m_q=0}}^{\infty} \binom{n+l_1+...+l_p+m_1+...+m_q}{n,l_1,...,l_p,m_1,...,m_q} \\
&\qquad \times g^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{n+l_1+...+l_p+m_1+...+m_q}(x_1,...,x_r)t^n u_1^{l_1}...u_p^{l_p} v_1^{m_1}...v_q^{m_q} \\
&= \sum_{\substack{n=0\\ l_1,...,l_p=0\\ m_1,...,m_q=0}}^{\infty} \tfrac{(n+l_1+...+l_p+m_1+...+m_q)!}{n!l_1!...l_p!m_1!...m_q!} g^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{n+l_1+...+l_p+m_1+...+m_q}(x_1,...,x_r)t^n u_1^{l_1}...u_p^{l_p} v_1^{m_1}...v_q^{m_q} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n! g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)\tfrac{(t+u_1+...+u_p+v_1+...+v_q)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)(t+u_1+...+u_p+v_1+...+v_q)^n \\
&= \prod_{j=1}^{r} \left\{[1-x_j(t+u_1+...+u_p+v_1+...+v_q)]^{-\alpha_j}\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{r} \left\{[1-x_j(t+u_1+...+u_p)]\left[1-\tfrac{x_j(v_1+...+v_q)}{1-x_j(t+u_1+...+u_p)}\right]\right\}^{-\alpha_j} \\
&= \prod_{j=1}^{r} [1-x_j(t+u_1+...+u_p)]^{-\alpha_j} \prod_{j=1}^{r}\left[1-\tfrac{x_j(v_1+...+v_q)}{1-x_j(t+u_1+...+u_p)}\right]^{-\alpha_j} \\
&= \prod_{j=1}^{r} [1-x_j(t+u_1+...+u_p)]^{-\alpha_j} \\
&\qquad \times \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}\left(\tfrac{x_1}{1-x_1(t+u_1+...+u_p)},...,\tfrac{x_r}{1-x_r(t+u_1+...+u_p)}\right)(v_1+...+v_q)^m
\end{aligned}$$

Bu son eşitlikte $q=1$ alınıp, $m_1=m$, $v_1=v$ denilirse,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n,l_1,...,l_p=0}^{\infty}\binom{n+l_1+...+l_p+m}{n,l_1,...,l_p,m}g_{n+l_1+...+l_p+m}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)t^n u_1^{l_1}...u_p^{l_p}v^m$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{r}\left\{[1-x_j(t+u_1+...+u_p)]^{-\alpha_j}\right\}$$
$$\times g_m^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}\left(\tfrac{x_1}{1-x_1(t+u_1+...+u_p)},...,\tfrac{x_r}{1-x_r(t+u_1+...+u_p)}\right)v^m$$

olur. Burada v^m nin katsayıları eşitlenirse,

$$\sum_{n,l_1,...,l_p=0}^{\infty}\binom{n+l_1+...+l_p+m}{n,l_1,...,l_p,m}g_{n+l_1+...+l_p+m}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)t^n u_1^{l_1}...u_p^{l_p}$$
$$=\prod_{j=1}^{r}\left\{[1-x_j(t+u_1+...+u_p)]^{-\alpha_j}\right\}$$
$$\times g_m^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}\left(\tfrac{x_1}{1-x_1(t+u_1+...+u_p)},...,\tfrac{x_r}{1-x_r(t+u_1+...+u_p)}\right)$$

bulunur. Bu son eşitlikte $u_j=0$ $(j=1,...,p)$ için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilmiştir (Chan *et al.* 2001):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}g_{m+n}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)t^n=\prod_{j=1}^{r}\left\{(1-x_jt)^{-\alpha_j}\right\}g_m^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}\left(\tfrac{x_1}{1-x_1t},...,\tfrac{x_r}{1-x_rt}\right)$$
$$\left(|t|<\min\left\{|x_1|^{-1},...,|x_r|^{-1}\right\};\ m\in\mathbb{N}_0\right). \tag{2.5.1}$$

Teorem 2.5.1. μ-yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli $(s\in\mathbb{N})$, sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1,...,y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{m,p,q}^{(\rho_1,...,\rho_r)}[x_1,...,x_r;y_1,...,y_s;z]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n g_{m+qn}^{(\alpha_1+\rho_1 n,...,\alpha_r+\rho_r n)}(x_1,...,x_r)\Omega_{\mu+pn}(y_1,...,y_s)z^n$$

$$(a_n\neq 0;\ m\in\mathbb{N}_0;\ p,q\in\mathbb{N})$$

ve

$$\Theta_{n,p,q}^{(\rho_1,...,\rho_r)}[x_1,...,x_r;y_1,...,y_s;z]$$
$$=\sum_{k=0}^{[n/q]}\binom{m+n}{n-qk}a_k g_{m+n}^{(\alpha_1+\rho_1 k,...,\alpha_r+\rho_r k)}(x_1,...,x_r)\Omega_{\mu+pk}(y_1,...,y_s)z^k$$

olsun. Burada $\rho_1,...,\rho_r$ uygun kompleks parametreler ve $[\lambda]$, $\lambda\in\mathbb{R}$ sayısından küçük ya da eşit olan en büyük tamsayıyı gösterir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,q}^{(\rho_1,\dots,\rho_r)}(x_1,\dots,x_r;y_1,\dots,y_s;z)t^n$$
$$= \prod_{i=1}^{r}\{(1-x_it)^{-\alpha_i}\}\,\Lambda_{m,p,q}^{(\rho_1,\dots,\rho_r)}\left[\tfrac{x_1}{1-x_1t},\dots,\tfrac{x_r}{1-x_rt};y_1,\dots,y_s;zt^q\prod_{j=1}^{r}\{(1-x_jt)^{-\rho_j}\}\right]$$
$$\left(|t|<\min\left\{|x_1|^{-1},\dots,|x_r|^{-1}\right\}\right)$$

dir(Chan *et al.* 2001).

a_k $(k\in\mathbb{N}_0)$ katsayılarının uygun herbir seçimi için, eğer $\Omega_\mu(y_1,\dots,y_s)$ çok değişkenli fonksiyonu, daha basit bazı fonksiyonların uygun bir çarpımı olarak ifade edilebilirse, bu durumda Teorem 2.5.1, (2.3.1) ile tanımlanan çok değişkenli Lagrange polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonların çeşitli ailelerini elde etmekte kullanılabilir.

2.6. Karma (Mixed) Doğurucu Fonksiyonlar

Srivastava 1979 yılında, çok değişkenli ve çok parametreli bazı fonksiyon dizileri için karma (mixed) doğurucu fonksiyonların bir ailesini aşağıdaki teorem ile vermiştir:

Teorem 2.6.1. $A(z)$, $B_i(z)$ ve $z^{-1}C(z)$ fonksiyonları orjinde analitik ve

$$A(0)=B_i(z)=C_j'(0)=1\ ,\quad i=1,\dots,r\ ;\quad j=1,\dots,s$$

olsun. Eğer,

$$A(z)\prod_{i=1}^{r}\{[B_i(z)]^{\alpha_i}\}\exp\left(\sum_{j=1}^{s}x_jC_j(z)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_s)\frac{z^n}{n!}$$

ise, z den bağımsız keyfi α, λ, x ve y ler için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(\alpha_1+\lambda_1n,\dots,\alpha_r+\lambda_rn)}(x_1+ny_1,\dots,x_s+ny_s)\frac{t^n}{n!}$$
$$=\frac{A(\zeta)\prod_{i=1}^{r}\{[B_i(\zeta)]^{\alpha_i}\}\exp\left(\sum_{j=1}^{s}x_jC_j(\zeta)\right)}{1-\zeta\left\{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[B_i'(\zeta)/B_i(\zeta)\right]+\sum_{j=1}^{s}y_jC_j'(\zeta)\right\}}$$

olup, burada

$$\zeta = t\prod_{i=1}^{r}\left\{[B_i(\zeta)]^{\lambda_i}\right\}\exp\left(\sum_{j=1}^{s} y_j C_j(\zeta)\right)$$

dir (Srivastava 1979).

(2.3.1) doğurucu fonksiyon bağıntısının, Srivastava'nın bu sonucunun genel çerçevesine uygunluğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla çok değişkenli Lagrange polinomları için karma (mixed) doğurucu fonksiyonların bir ailesi aşağıdaki şekilde elde edilmiştir (Chan *et al.* 2001):

(2.3.1) bağıntısı ile Teorem 2.6.1 karşılaştırılırsa,

$$B_i(z) = (1-x_i z)^{-1} \Rightarrow B_i'(z) = x_i(1-x_i z)^{-2};\ \ y_j = 0;\ \ A(z)\exp\left(\sum_{j=1}^{s} x_j C_j(z)\right) = 1$$

oldukları görülür. Bunların teoremde yerlerine yazılmasıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1+\lambda_1 n,\dots,\alpha_r+\lambda_r n)}(x_1,\dots,x_r)\,t^n = \frac{\prod_{j=1}^{r}\{(1-x_j\zeta)^{-\alpha_j}\}}{1-\zeta\sum_{j=1}^{r}\lambda_j x_j(1-x_j\zeta)^{-1}} \tag{2.6.1}$$

$$\left(|\zeta| < \min\left\{|x_1|^{-1},\dots,|x_r|^{-1}\right\};\ \ \lambda_j\in\mathbb{C};\ j=1,\dots,r\right)$$

elde edilir. Burada,

$$\zeta = t\prod_{j=1}^{r}\{(1-x_j\zeta)^{-\lambda_j}\}$$

dir. $\lambda_j = 0$, $(j = 1,\dots,r)$ özel durumunda (2.6.1) doğurucu fonksiyonu (2.3.1) doğurucu fonksiyonuna indirgenir.

2.7. İkinci Çeşit Stirling Sayıları İle İlişkili Bir Doğurucu Fonksiyon

Bu kısımda (2.5.1) doğurucu fonksiyon bağıntısının başka bir uygulaması verilecektir. (2.5.1) de $m \to k$, $n \to 1$, $t \to -z$ alınarak, elde edilen bağıntıdan

$g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}\left(\frac{x_1}{1+x_1 z},\ldots,\frac{x_r}{1+x_r z}\right)$ çekilir ve aşağıdaki seride yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} k^n g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}\left(\tfrac{x_1}{1+x_1 z},\ldots,\tfrac{x_r}{1+x_r z}\right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^n \left\{\prod_{j=1}^{r}\left\{(1+x_j z)^{\alpha_j}\right\} \sum_{l=0}^{\infty}\tbinom{k+l}{l} g_{k+l}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)(-z)^l\right\} z^k \\
&= \prod_{j=1}^{r}\left\{(1+x_j z)^{\alpha_j}\right\} \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r) z^k \sum_{l=0}^{k}(-1)^l (k-l)^n \tbinom{k}{l} \\
&= \prod_{j=1}^{r}\left\{(1+x_j z)^{\alpha_j}\right\} \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r) z^k \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l} \tbinom{k}{k-l} l^n
\end{aligned}
\tag{2.7.1}
$$

olur. Diğer taraftan,

$$
\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l} l^n = \begin{cases} 0 & ; \quad (k>n) \\ k!S(n,k) & ; \quad (0 \le k \le n) \end{cases}
$$

olup, burada $S(n,k)$ ikinci çeşit Stirling sayıları,

$$
S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^n \quad ; \qquad (0 \le k \le n)
$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Riordan 1968). O halde, (2.7.1) eşitliğinin sağındaki son toplam, Stirling sayıları cinsinden yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} k^n g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}\left(\tfrac{x_1}{1+x_1 z},\ldots,\tfrac{x_r}{1+x_r z}\right) z^k \\
&\quad = \prod_{j=1}^{r}\left\{(1+x_j z)^{\alpha_j}\right\} \sum_{k=0}^{n} k!S(n,k) g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r) z^k
\end{aligned}
\tag{2.7.2}
$$

$$
\left(|z| < \min\left\{|x_1|^{-1},\ldots,|x_r|^{-1}\right\} ; \quad n \in \mathbb{N}_0\right)
$$

bulunur. Son olarak (2.7.2) de x_j yerine $\dfrac{x_j}{1-x_j z}$; $(j=1,\ldots,r)$ alınarak, çok değişkenli Lagrange polinomları için bir doğurucu fonksiyon aşağıdaki şekilde elde edilmiştir (Srivastava 2000, Chan *et al.* 2001):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} k^n g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r) z^k \\
&\quad = \prod_{j=1}^{r}\left\{(1-x_j z)^{-\alpha_j}\right\} \sum_{k=0}^{n} k!S(n,k) g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}\left(\tfrac{x_1}{1-x_1 z},\ldots,\tfrac{x_r}{1-x_r z}\right) z^k
\end{aligned}
\tag{2.7.3}
$$

$$
\left(|z| < \min\left\{|x_1|^{-1},\ldots,|x_r|^{-1}\right\} ; \quad n \in \mathbb{N}_0\right)
$$

Burada $n = 0$ alınırsa (2.7.3) doğurucu fonksiyonu, (2.3.1) doğurucu fonksiyonuna indirgenir.

2.8. Diğer Bazı Özellikler ve Türev İçeren Rekürans Bağıntıları

(2.3.1) de $\alpha_j \to \alpha_j + \beta_j$ yazılıp daha sonra iki kuvvet serisi için Cauchy çarpımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_r+\beta_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n \\ &= \prod_{j=1}^{r}\left\{(1-x_jt)^{-\alpha_j-\beta_j}\right\} \\ &= \prod_{j=1}^{r}\left\{(1-x_jt)^{-\alpha_j}\right\}\prod_{i=1}^{r}\left\{(1-x_it)^{-\beta_i}\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} g_{n-k}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,g_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n\end{aligned}$$

bulunur. Burada t^n nin katsayıları eşitlendiğinde çok değişkenli Lagrange polinomları için aşağıdaki toplam formülü elde edilir (Chan *et al.* 2001):

$$g_n^{(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_r+\beta_r)}(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{k=0}^{n} g_{n-k}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,g_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_r)}(x_1,\ldots,x_r). \tag{2.8.1}$$

Benzer şekilde yine (2.3.1) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x,\ldots,x)\,t^n &= \prod_{j=1}^{r}\left\{(1-xt)^{-\alpha_j}\right\} \\ &= (1-xt)^{-\alpha_1-\ldots-\alpha_r} \qquad \left(|t|<|x|^{-1}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha_1+\ldots+\alpha_r+n-1}{n}x^nt^n\end{aligned}$$

bulunur. Burada t^n nin katsayılarının eşitlenmesiyle,

$$g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x,\ldots,x) = \binom{\alpha_1+\ldots+\alpha_r+n-1}{n}x^n \quad ; \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

elde edilir.

Yine (2.3.1) bağıntısından yararlanılarak çok değişkenli Lagrange polinomları için türev içeren rekürans bağıntıları da aşağıdaki şekilde elde edilmiştir (Chan *et al.* 2001):

(2.3.1) de her iki yanın x_j ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n &= \alpha_j t(1-x_j t)^{-\alpha_j-1}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}\left\{(1-x_i t)^{-\alpha_i}\right\}\\ &= \alpha_j t(1-x_j t)^{-1}\prod_{i=1}^{r}\left\{(1-x_i t)^{-\alpha_i}\right\}\\ &= \alpha_j t\sum_{n=0}^{\infty} x_j^n t^n\sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^k\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitliğin sağındaki çift toplamda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A(k,n-k) \tag{2.8.2}$$

özelliği kullanılırsa (Rainville 1960),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n &= \alpha_j\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} x_j^{n-k} g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_j\sum_{k=0}^{n-1} x_j^{n-k-1} g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n\end{aligned}$$

olup burada $g_0^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)=1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} g_0^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)=0$ olduğu göz önünde bulundurularak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_j} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_j\sum_{k=0}^{n-1} x_j^{n-k-1} g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n$$

yazılabilir. Son bağıntıda t^n nin katsayıları eşitlenirse, $j=1,\ldots,r$ ve $n\geq 1$ için,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)=\alpha_j\sum_{k=0}^{n-1} x_j^{n-k-1} g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)$$

rekürans bağıntıları elde edilir.

3. LAGRANGE POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİNDE BAZI GENİŞLETMELER

Bu bölümde (2.3.1) doğurucu fonksiyon bağıntısı ile tanımlanan çok değişkenli Lagrange polinomları için yeni özellikler verilecektir. Öncelikle iki değişkenli Lagrange polinomları ve Jacobi polinomları arasındaki (2.2.2) bağıntısı kullanılarak Jacobi polinomları için yeni bağıntılar bulunacak, sonra da çok değişkenli Lagrange polinomlarının bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonları için yeni teoremler ispatlanacak ve de bunların özel durumları verilecektir. Son kısımda da farklı özellikler ve yeni rekürans bağıntıları elde edilecektir.

3.1. Jacobi Polinomları ve İlgili Bazı Özel Polinomlar İçin Yeni Bağıntılar

a, b pozitif sabitler ve $P(x), Q(y)$ herhangi polinomlar olmak üzere, (2.2.1) ile verilen $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları ile iki değişkenli Lagrange polinomları arasındaki bağıntıdan,

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(aP(x), bQ(y)) = [bQ(y) - aP(x)]^n P_n^{(-\alpha-n,-\beta-n)}\left(\frac{aP(x)+bQ(y)}{aP(x)-bQ(y)}\right) \quad (3.1.1)$$

yazabiliriz. Burada $a = 1$, $b = 1$, $P(x) = x$, $Q(y) = y$ alınırsa bu bağıntı, (2.2.2) ye indirgenir.

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomlarının $\alpha = 0$, $\beta = 0$ özel hali $P_n(x)$ Legendre polinomlarını verir. Buna göre (3.1.1) de $\alpha = \beta = 0$ alırsak,

$$g_n^{(-n,-n)}(aP(x), bQ(y)) = [bQ(y) - aP(x)]^n P_n\left(\frac{aP(x)+bQ(y)}{aP(x)-bQ(y)}\right)$$

elde ederiz.

Yine (3.1.1) de $\alpha = \beta$ alınırsa $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ Ultraküresel (Gegenbauer) polinomları için,

$$g_n^{(-\alpha-n,-\alpha-n)}(aP(x), bQ(y)) = [bQ(y) - aP(x)]^n P_n^{(\alpha,\alpha)}\left(\frac{aP(x)+bQ(y)}{aP(x)-bQ(y)}\right)$$

bağıntısını buluruz.

Diğer taraftan (2.4.3) eşitliğinde $r = 2$ alıp bulduğumuz bağıntı ile (3.1.1) özelliğini karşılaştırırsak Jacobi polinomları için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n} P_n^{(-\alpha-n,-\beta-n)}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)[(y-x)t]^n = F_D^{(2)}[\lambda,\alpha,\beta;\mu;xt,yt] \tag{3.1.2}$$

bağıntısını ve benzer şekilde (2.4.4) de $r = 2$ alıp bulduğumuz bağıntı ile tekrar (3.1.1) i karşılaştırırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(-\alpha-n,-\beta-n)}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\frac{[(y-x)t]^n}{(\mu)_n} = \Phi_2^{(2)}[\alpha,\beta;\mu;xt,yt]$$

eşitliğini elde ederiz.

Yine (2.6.4) de $r = 2$ alıp bulduğumuz bağıntı ile (3.1.1) i karşılaştırırsak da Jacobi polinomları için ikinci çeşit Stirling sayılarını içeren yeni bir bağıntıyı,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty} k^n P_k^{(-\alpha-k,-\beta-k)}\left(\tfrac{x+y}{x-y}\right)[(y-x)z]^k \\ &\qquad = (1-xz)^{-\alpha}(1-yz)^{-\beta}\sum_{k=0}^{n} k!S(n,k)P_k^{(-\alpha-k,-\beta-k)}\left(\tfrac{x+y-2xyz}{x-y-2xyz}\right)z^k\end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

3.2. Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar İçin İki Temel Teorem

Bu kısımda, çok değişkenli Lagrange polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonların bulunmasında kolaylık sağlayan yeni teoremler elde edeceğiz ve sonra bu teoremlerin çeşitli uygulamalarına değineceğiz.

Teorem 3.2.1. μ-yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(\xi_1,...,\xi_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,...,\xi_s;\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,...,\xi_s)\tau^k \tag{3.2.1}$$

$$(a_k \neq 0; \quad \psi \in \mathbb{C})$$

ve

$$\begin{aligned}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}&(x_1,...,x_r;\xi_1,...,\xi_s;\zeta)\\ &=\sum_{k=0}^{[n/p]}a_k g_{n-pk}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,...,\xi_s)\zeta^k\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

olsun. Burada $n,p\in\mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x_1,...,x_r;\xi_1,...,\xi_s;\frac{\eta}{t^p})t^n=\prod_{i=1}^{r}\{(1-x_it)^{-\alpha_i}\}\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,...,\xi_s;\eta)\tag{3.2.3}$$

gerçeklenir.

İspat: (3.2.3) deki doğurucu fonksiyon S olsun. $\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x_1,...,x_r;\xi_1,...,\xi_s;\zeta)$ polinomlarının değeri (3.2.2) den alınıp (3.2.3) de yerine konulursa,

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}a_k g_{n-pk}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,...,\xi_s)\frac{\eta^k}{t^{pk}}t^n$$

olup burada,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n+pk)\tag{3.2.4}$$

bağıntısı kullanılırsa (Rainville 1960),

$$\begin{aligned}S=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\, g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}&(x_1,...,x_r)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,...,\xi_s)\eta^k t^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)t^n\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,...,\xi_s)\eta^k\\ &=\prod_{i=1}^{r}\{(1-x_it)^{-\alpha_i}\}\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,...,\xi_s;\eta)\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.2.2. Yine, μ-yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli ($s\in\mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(\xi_1,...,\xi_s)$ fonksiyonu verilsin ve $p\in\mathbb{N}$, $\psi\in\mathbb{C}$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_r)$, $\beta=(\beta_1,...,\beta_r)$ için,

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mu,\psi,\alpha,\beta}^{n,p}(x_1,...,x_r;\xi_1,...,\xi_s;z)=&\sum_{k=0}^{[n/p]}a_k g_{n-pk}^{(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_r+\beta_r)}(x_1,...,x_r)\\ &\times\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,...,\xi_s)z^k,\end{aligned}$$

$$(a_k \neq 0; \quad n \in \mathbb{N}_0)$$

olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \, g_{n-k}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r) g_{k-pl}^{(\beta_1,...,\beta_r)}(x_1,...,x_r) \Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1,...,\xi_s) z^l \\ = \Lambda_{\mu,\psi,\alpha,\beta}^{n,p}(x_1,...,x_r;\xi_1,...,\xi_s;z) \tag{3.2.5}$$

dir.

İspat: (3.2.5) bağıntısının sol yanı T olsun. Şimdi,

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{[k/p]} A(k,l) = \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} A(k+pl,l) \tag{3.2.6}$$

bağıntısını kullanırsak (Rainville 1960),

$$\begin{aligned} T &= \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l \, g_{n-pl-k}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r) g_k^{(\beta_1,...,\beta_r)}(x_1,...,x_r) \Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1,...,\xi_s) z^l \\ &= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \, \Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1,...,\xi_s) z^l \sum_{k=0}^{n-pl} g_{n-pl-k}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r) g_k^{(\beta_1,...,\beta_r)}(x_1,...,x_r) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşırız ve (2.8.1) toplam formülünden,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \, g_{n-pl}^{(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_r+\beta_r)}(x_1,...,x_r) \Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1,...,\xi_s) z^l \\ &= \Lambda_{\mu,\psi,\alpha,\beta}^{n,p}(x_1,...,x_r;\xi_1,...,\xi_s;z) \end{aligned}$$

elde ederiz ki böylece ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki teoremlerde $\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,...,\xi_s)$ $(k \in \mathbb{N}_0,\ s \in \mathbb{N})$ çok değişkenli fonksiyonu bir ya da çok değişkenli basit fonksiyonlar tarafından ifade ederek, elde ettiğimiz sonuçların farklı uygulamalarını aşağıdaki şekilde verebiliriz. Örneğin, eğer Teorem 3.2.1 de $s = r$, $\xi_i = y_i$, $i = 1,...,r$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,...,y_r) = g_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(y_1,...,y_r)$ alırsak, çok değişkenli Lagrange polinomları için bilineer doğurucu fonksiyonların bir sınıfını şu şekilde elde ederiz:

Sonuç 3.2.1. Eğer

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu,\psi}(y_1,...,y_r;\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(y_1,...,y_r)\tau^k, \\ (a_k &\neq 0, \ \mu,\psi \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Psi_{n,p}^{\mu,\psi}(x_1,...,x_r;y_1,...,y_r;\zeta) &= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k g_{n-pk}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r) \\ &\quad \times g_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(y_1,...,y_r)\zeta^k \\ (n,p &\in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

ise bu takdirde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{n,p}^{\mu,\psi}(x_1,...,x_r;y_1,...,y_r;\frac{\eta}{t^p})t^n = \prod_{j=1}^{r}\left\{(1-x_jt)^{-\alpha_j}\right\}\Phi_{\mu,\psi}(y_1,...,y_r;\eta)$$

olur.

Uyarı: Çok değişkenli Lagrange polinomları için (2.3.1) ile verilen

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(y_1,...,y_r)t^k = \prod_{j=1}^{r}\left\{(1-y_jt)^{-\alpha_j}\right\}$$

doğurucu fonksiyonunu kullanırsak ve Sonuç 3.2.1 de $a_k = 1, \ \mu = 0, \psi = 1$ alırsak bu polinomlar için,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} g_{n-pk}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)g_k^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(y_1,...,y_r)\eta^k t^{n-pk} \\ &\qquad = \prod_{j=1}^{r}\left\{[(1-x_jt)(1-y_j\eta)]^{-\alpha_j}\right\} \end{aligned}$$

bağıntısını elde ederiz. Burada,

$$|t| < \min\left\{|x_1|^{-1},...,|x_r|^{-1}\right\}, \ |\eta| < \min\left\{|y_1|^{-1},...,|y_r|^{-1}\right\}$$

dir.

Teorem 3.2.2 de $s = r,\ \xi_i = y_i,\ i = 1, ..., r$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, ..., y_r) = g_{\mu+\psi k}^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}(y_1, ..., y_r)$, $(\mu, \psi \in \mathbb{N}_0)$ alırsak doğrudan aşağıdaki sonuca ulaşırız:

Sonuç 3.2.2. Eğer

$$\Phi^{n,p}_{\mu,\psi,\alpha,\beta,\gamma}(x_1, ..., x_r; y_1, ..., y_r; z) = \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k g_{n-pk}^{(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_r+\beta_r)}(x_1, ..., x_r) \times g_{\mu+\psi k}^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}(y_1, ..., y_r) z^k,$$

$$a_k \neq 0\,,\ \ n, p \in \mathbb{N},\ \ \mu, \psi \in \mathbb{N}_0,\ \ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r)\,,\ \beta = (\beta_1, ..., \beta_r)\,, \gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_r)$$

ise, bu durumda

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l\, g_{n-k}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1, ..., x_r) g_{k-pl}^{(\beta_1,...,\beta_r)}(x_1, ..., x_r) g_{\mu+\psi l}^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}(y_1, ..., y_r) z^l = \Phi^{n,p}_{\mu,\psi,\alpha,\beta,\gamma}(x_1, ..., x_r; y_1, ..., y_r; z)$$

dir.

Şimdi Teorem 3.2.1 in başka bir özel durumunu verelim. Bu teoremde $s = 1,\ \xi_1 = z$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(z) = y_N(z; \mu + \psi k, \beta),\ \ (k, N \in \mathbb{N}_0,\ \mu, \psi \in \mathbb{C})$, alalım. Burada $y_N(z; \alpha, \beta)$ genelleştirilmiş Bessel polinomları olup,

$$y_N(z; \alpha, \beta) = {}_2F_0\left(-N, \alpha + N - 1; -; \frac{-x}{\beta}\right),$$

şeklinde tanımlanır (Grosswald 1978). Bu durumda, genelleştirilmiş Bessel polinomları ya da çok değişkenli Lagrange polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfını aşağıdaki sonuçlarla verebiliriz:

Sonuç 3.2.3. Eğer

$$H_{\mu,\psi}(z; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_N(z; \mu + \psi k, \beta) \tau^k$$

$$(a_k \neq 0\,,\ \ \psi, \mu, \beta \in \mathbb{C})$$

ve $n, p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$R_{n,p}^{\mu,\psi}(x_1, ..., x_r; z; \zeta) = \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k g_{n-pk}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1, ..., x_r) y_N(z; \mu + \psi k, \beta)\zeta^k$$

ise, bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_{n,p}^{\mu,\psi}(x_1, ..., x_r; z; \frac{\eta}{t^p})t^n = \prod_{i=1}^{r} \{(1 - x_i t)^{-\alpha_i}\} H_{\mu,\psi}(z; \eta)$$

bulunur.

Uyarı: Genelleştirilmiş Bessel polinomları için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu + N + k - 2}{k} y_N(z; \mu + k, \beta)\tau^k = (1 - \tau)^{1-\mu-N} y_N(\frac{z}{1-\tau}; \mu, \beta), \quad (|\tau| < 1)$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısı bilinmektedir (Lin *et al.* 2003). Sonuç 3.2.3 de bu bağıntıyı kullanırsak ve $a_k = \binom{\mu + N + k - 2}{k}$, $\psi = 1$ alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \binom{\mu + N + k - 2}{k} g_{n-pk}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1, ..., x_r) y_N(z; \mu + k, \beta)\eta^k t^{n-pk}$$
$$= (1 - \eta)^{1-\mu-N} y_N(\tfrac{z}{1-\eta}; \mu, \beta) \prod_{i=1}^{r} \{(1 - x_i t)^{-\alpha_j}\}$$

bilateral doğurucu fonksiyonunu elde ederiz. Burada $|t| < \min\{|x_1|^{-1}, ..., |x_r|^{-1}\}$, $|\eta| < 1$ dir.

Son olarak, Teorem 3.2.1 de $s = 1$, $\xi_1 = z$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(z) = P_{\mu+\psi k}^{(\alpha,\beta)}(z)$, $(\mu, \psi, k \in \mathbb{N}_0)$ alırsak, Jacobi polinomları ya da çok değişkenli Lagrange polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfını aşağıda verebiliriz:

Sonuç 3.2.4. Eğer

$$\Pi_{\mu,\psi}(z;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k P_{\mu+\psi k}^{(\alpha,\beta)}(z)\tau^k,$$

$$(a_k\neq 0)$$

ve $n,p\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$W_{n,p}^{\mu,\psi}(x_1,...,x_r;z;\zeta)=\sum_{k=0}^{[n/p]}a_k g_{n-pk}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)P_{\mu+\psi k}^{(\alpha,\beta)}(z)\zeta^k$$

ise, bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty}W_{n,p}^{\mu,\psi}(x_1,...,x_r;z;\frac{\eta}{t^p})t^n=\prod_{i=1}^{r}\left\{(1-x_it)^{-\alpha_i}\right\}\Pi_{\mu,\psi}(z;\eta)$$

dir.

Uyarı: Jacobi polinomları için bir doğurucu fonksiyon,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k}P_k^{(\alpha,\beta)}(z)\tau^k$$
$$=(1-\tau)^{-1-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta+2}{2};\alpha+1;\frac{2\tau(z-1)}{(1-\tau)^2}\right)$$

şeklindedir (Erdélyi, Magnus, Oberhettinger ve Tricomi 1955). Sonuç 3.2.4 de bu bağıntı yardımıyla ve $a_k=\dfrac{(\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k}$, $\psi=1$, $\mu=0$ alarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{(\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k}g_{n-pk}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)P_k^{(\alpha,\beta)}(z)\eta^k t^{n-pk}$$
$$=(1-\eta)^{-1-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta+2}{2};\alpha+1;\frac{2\eta(z-1)}{(1-\eta)^2}\right)$$
$$\times\prod_{i=1}^{r}\left\{(1-x_it)^{-\alpha_i}\right\}$$

elde ederiz. Burada $|t|<\min\left\{|x_1|^{-1},...,|x_r|^{-1}\right\}$, $|\eta|<1$ dir.

a_k $(k\in\mathbb{N}_0)$ katsayılarının uygun herbir seçimi için, eğer $\Omega_\mu(\xi_1,...,\xi_s)$ çok değişkenli fonksiyonu, daha basit bazı fonksiyonların uygun bir çarpımı olarak ifade edilebilirse bu durumda Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 den, (2.3.1) ile tanımlanan çok değişkenli

Lagrange polinomları için, multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonların çeşitli aileleri de elde edilebilir.

3.3. Diğer Bazı Özellikler ve Türev İçermeyen Rekürans Bağıntıları

Öncelikle, çok değişkenli Lagrange polinomları, n-yinci dereceden homogendir ve Euler denklemini gerçekler, yani bu polinomlar

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r) = n g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)$$

kısmi türevli denklemine sahiptir.

(2.3.1) doğurucu fonksiyonunu daha da genişleterek,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{\left(\sum_{k=0}^{p}\alpha_1^{(k)},\ldots,\sum_{k=0}^{p}\alpha_r^{(k)}\right)}(x_1,\ldots,x_r)t^n &= \prod_{j=1}^{r}\left\{(1-x_jt)^{-\sum_{k=0}^{p}\alpha_j^{(k)}}\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1^{(0)},\ldots,\alpha_r^{(0)})}(x_1,\ldots,x_r)t^n \sum_{k_1=0}^{\infty} g_{k_1}^{(\alpha_1^{(1)},\ldots,\alpha_r^{(1)})}(x_1,\ldots,x_r)t^{k_1} \\ &\qquad \times\ldots\times \sum_{k_p=0}^{\infty} g_{k_p}^{(\alpha_1^{(p)},\ldots,\alpha_r^{(p)})}(x_1,\ldots,x_r)t^{k_p}\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada (2.8.2) ardışık olarak uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{\left(\sum_{k=0}^{p}\alpha_1^{(k)},\ldots,\sum_{k=0}^{p}\alpha_r^{(k)}\right)}(x_1,\ldots,x_r)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\cdots\sum_{k_p=0}^{n-k_1-\ldots-k_{p-1}} g_{n-k_1-\ldots-k_p}^{(\alpha_1^{(0)},\ldots,\alpha_r^{(0)})}(x_1,\ldots,x_r) \\ &\qquad \times \prod_{i=1}^{p} g_{k_i}^{(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_r^{(i)})}(x_1,\ldots,x_r)t^n\end{aligned}$$

buluruz ve t^n nin katsayılarını eşitlersek, çok değişkenli Lagrange polinomları için aşağıdaki toplam formülünü elde ederiz:

$$\begin{aligned}& g_n^{\left(\sum_{k=0}^{p}\alpha_1^{(k)},\ldots,\sum_{k=0}^{p}\alpha_r^{(k)}\right)}(x_1,\ldots,x_r) \\ &\quad = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\cdots\sum_{k_p=0}^{n-(k_1+\ldots+k_{p-1})} g_{n-(k_1+\ldots+k_p)}^{(\alpha_1^{(0)},\ldots,\alpha_r^{(0)})}(x_1,\ldots,x_r)\prod_{i=1}^{p} g_{k_i}^{(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_r^{(i)})}(x_1,\ldots,x_r).\end{aligned}$$

Son olarak, (2.3.1) doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki yanının t ye göre türevini alırsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)n\,t^{n-1}$$
$$= x_1\alpha_1(1-x_1t)^{-\alpha_1-1}\prod_{j=2}^{r}\{(1-x_jt)^{-\alpha j}\}$$
$$+\ldots + x_i\alpha_i(1-x_it)^{-\alpha_i-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\{(1-x_jt)^{-\alpha j}\}$$
$$+\ldots + x_r\alpha_r(1-x_rt)^{-\alpha_r-1}\prod_{j=2}^{r-1}\{(1-x_jt)^{-\alpha j}\}$$
$$= \sum_{k=1}^{r}\frac{x_k\alpha_k}{(1-x_kt)}\prod_{j=1}^{r}\{(1-x_jt)^{-\alpha j}\}$$
$$= \sum_{k=1}^{r}\frac{x_k\alpha_k}{(1-x_kt)}\sum_{m=0}^{\infty} g_m^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^m$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^m\sum_{k=1}^{r}x_k\alpha_k\sum_{n=0}^{\infty}x_k^nt^n$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\sum_{k=1}^{r}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_kx_k^{n+1}t^{m+n}$$

olup burada (2.8.2) bağıntısını kullanırsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)n\,t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=0}^{n}\alpha_k g_m^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)x_k^{n-m+1}t^n$$

olur. Bu son eşitliğin sağ yanında $n \to n-1$ yazıldığında,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)n\,t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_k g_m^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)x_k^{n-m}t^{n-1} \tag{3.3.1}$$

buluruz. (3.3.1) in her iki yanından t^{n-1} in katsayılarını eşitlersek,

$$ng_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{k=1}^{r}\alpha_k\sum_{m=0}^{n-1}x_k^{n-m}g_m^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r) \tag{3.3.2}$$

elde ederiz ki, (3.3.2) bağıntısı, çok değişkenli Lagrange polinomları için türev içermeyen bir rekürans bağıntısıdır.

Eğer (3.3.2) de $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k = -n$ alırsak bu polinomlar için,

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \sum_{m=0}^{n} x_k^{n-m} g_m^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r) = 0$$

bağıntısını kolaylıkla elde edebiliriz.

4. q−ANALİZİ

$q-$Analizi çalışmalarına yaklaşık olarak 150 yıl önce başlanmıştır. Parçalanma teorisinde $q-$Analizi önemli bir yer tutmaktadır. İstatistiksel mekanikte kesin olarak çözülebilen modellerdeki önemi nedeniyle son zamanlarda özellikle fonksiyonların $q-$analoglarına ilgi artmıştır.

Matematiksel bir ifadenin $q-$analoğunda $q \to 1$ alındığında tekrar ifadenin kendisi elde edilir. Bu bölümde $q-$analizinin çıkış yerinden başlayarak bilinen bazı fonksiyonların $q-$analogları verilecektir. Burada verilenler bir sonraki bölümde Lagrange polinomları için bilinen özelliklerin, $q-$analoglarının elde edilmesinde kullanılacaktır.

4.1. q−Serilerine Giriş

Sonlu binom teoreminden

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k; \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

olduğu bilinmektedir. Burada

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \tag{4.1.1}$$

olduğu kolayca görülebilir. Şimdi kabul edelim ki q bir parametre olmak üzere

$$yx = qxy, \; xq = qx \text{ ve } yq = qy \tag{4.1.2}$$

eşitlikleri gerçeklensin. $q-$binom katsayıları olarak ifade edilen $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ ları bulmak için

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k \tag{4.1.3}$$

olarak tanımlansın. Diğer yandan (4.1.2) den $y^k x = x y^k q^k$ yazılabilir.

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$$

eşitliğinden dolayı da

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k (x+y)$$

olup buradan

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k x + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k q^k + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q y^{n+1} \end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \right) x^{n-k+1} y^k$$

yazılabilir ki buradan

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{4.1.4}$$

elde edilir. (4.1.4) eşitliği (4.1.1) in bir $q-$genişlemesidir (Andrews *et al.* 1999). Benzer şekilde

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \text{ ve } yx^{n-k} = q^{n-k} x^{n-k} y$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla da

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{4.1.5}$$

bulunur. (4.1.4) ve (4.1.5) bağıntılarından ve $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1$ eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^{n+1-k})...(1-q^n)}{(1-q)...(1-q^k)}$$

olduğunu görmek kolaydır. Bu son eşitliğin pay ve paydası $(1-q)...(1-q^{n-k})$ ile çarpılarak,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} \tag{4.1.6}$$

yazılabilir. Burada

$$(q;q)_n = \prod_{j=1}^{n} (1-q^j) \tag{4.1.7}$$

ile verilmektedir (Andrews *et al.* 1999).

Şimdi (4.1.3) de y yerine xy yazılarak,

$$(x+xy)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} (xy)^k \tag{4.1.8}$$

olur. Tümevarım yoluyla

$$(xy)^k = x^k y^k q^{\frac{(k-1)k}{2}}$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}
(x+xy)^n &= (x+xy)...(x+xy)(x+xy)(x+xy) \\
&= x(1+y)...x(1+y)x(x+yx)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(1+y)x(x+qxy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(1+y)x(x+xqy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(1+y)x^2(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(x+yx)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(x+qxy)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(x+xqy)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x^2(1+qy)x(1+qy)(1+y) \\
& \quad ...
\end{aligned}$$

ve böyle devam ederek

$$(x+xy)^n = x^n(1+q^{n-1}y)...(1+q^2y)(1+qy)(1+y)$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntılar (4.1.8) de yerlerine yazılacak olursa

$$x^n(1+q^{n-1}y)...(1+q^2y)(1+qy)(1+y)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q x^{n-k}x^ky^kq^{\frac{(k-1)k}{2}}$$

olup buradan

$$(1+y)(1+qy)...(1+q^{n-1}y)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{(k-1)k}{2}}y^k \tag{4.1.9}$$

elde edilir. Burada y yerine $\frac{y}{x}$ yazılırsa

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+q\frac{y}{x}\right)...\left(1+q^{n-1}\frac{y}{x}\right)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{(k-1)k}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)^k$$

ya da

$$(x+y)(x+qy)...(x+q^{n-1}y)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{(k-1)k}{2}}x^{n-k}y^k \tag{4.1.10}$$

elde edilir ki (4.1.10) eşitliği (4.1.3) ün bir $q-$genişlemesidir (Andrews *et al.* 1999).

4.2. $q-$İntegrali

İlk olarak 1869 yılında Thomae ve sonra da 1910 yılında Jackson, $q-$integralini

$$\int_0^a f(x)d_qx=\sum_{n=0}^{\infty}f(aq^n)(aq^n-aq^{n+1}),\quad (0<q<1) \tag{4.2.1}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada d_qx Fermat ölçüsüdür. Jackson, $(0,\infty)$ aralığındaki integrali de

$$\int_0^{\infty} f(x)d_qx=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(q^n)q^n \tag{4.2.2}$$

şeklinde tanımlamıştır.

Beta integralinin bir $q-$analoğunu elde etmek için, (4.2.1) de

$a = 1$ ve $f(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ alınırsa (4.2.1) in sağ yanı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{(\alpha-1)N}(1-q^n)^{\beta-1}(q^n - q^{n+1})$$

olur. Burada $\int_0^1 f_q(x)d_qx$ $q-$integralinin uygun bir formunu inceleyebilmek için $q \to 1^-$ iken,

$$f_q(x) \to x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

olacak şekilde bir $f_q(x)$ fonksiyonu aranmalıdır. Bunun için $(1-x)^{\beta-1}$ ifadesi x in bir kuvvet serisi olarak yazılıp buradaki katsayıların ne olacağına bakılabilir.

Binom teoreminden $|x| < 1$ için

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k \tag{4.2.3}$$

olduğu bilinmektedir. Burada $k!$ ve $(\alpha)_k$ nın q-analoğuna ve binom teoreminin $q-$genişlemesine ihtiyaç duyulacaktır. Bir sonraki kısımda bunlar ele alınacak ve daha sonraki kısımlarda Beta integralinin $q-$analoğunun elde edilmesi problemine tekrar dönülecektir (Andrews *et al.* 1999).

4.3. $q-$Binom Teoremi

Negatif olmayan herhangi bir i tamsayısı için i nin $q-$analoğu $[i]_q$ ile gösterilir ve

$$[i]_q = 1 + q + q^2 + ... + q^{i-1} = \begin{cases} \frac{1-q^i}{1-q} & , \ q \neq 1 \text{ ise} \\ i & , \ q = 1 \text{ ise} \end{cases} \tag{4.3.1}$$

şeklinde tanımlanır. $q-$faktöriyel ise (4.3.1) den ve faktöriyel tanımından

$$[k]_q! = [1]_q[2]_q \ldots [k]_q = \frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^k)}{(1-q)(1-q)...(1-q)}$$

şeklinde hesaplanır. $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)$ Pochhammer sembolünün $q-$analoğu

$$\{\alpha\}_{k,q} \;=\; [\alpha]_q[\alpha+1]_q...[\alpha+k-1]_q$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-q^{\alpha}}{1-q}\frac{1-q^{\alpha+1}}{1-q}\cdots\frac{1-q^{\alpha+k-1}}{1-q} \\
&= \frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha}q)\dots(1-q^{\alpha}q^{k-1})}{(1-q)^{k}} \\
&= \frac{(q^{\alpha};q)_k}{(1-q)^k}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada

$$
(a;q)_k = (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{k-1}) \tag{4.3.2}
$$

dir. O halde (4.2.3) de verilen $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha)_k x^k/k!$ serisinin $q-$analoğu

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha};q)_k}{(q;q)_k}x^k \tag{4.3.3}
$$

biçimindedir. Bu seri yakınsak olup toplamı $q-$binom teoremi ile verilecektir.

Nasıl toplanabildiğini görebilmek için aşağıdaki şekilde bir yol izlenecektir:

Öncelikle

$$
g_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k, \quad |x|<1
$$

olsun. Buradan türev alınırsa,

$$
g'_{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(k-1)!}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+1}}{k!}x^k = \alpha g_{\alpha+1}(x) \tag{4.3.4}
$$

bulunur ve böylece

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha}(x) - g_{\alpha+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)_k}{\alpha k!}x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k-(\alpha+1)_k}{k!}x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_k\left[\alpha-(\alpha+k)\right]}{k!}x^k \\
&= -x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}
\end{aligned}
$$

$$= \quad -xg_{\alpha+1}(x) \tag{4.3.5}$$

sonucuna ulaşılır. (4.3.4) ve (4.3.5) denklemlerinden

$$\frac{g'_\alpha(x)}{g_\alpha(x)} = \frac{\alpha}{1-x}$$

olup $g_\alpha(x) = y$ alınırsa,

$$\ln y = -\alpha \ln(1-x) + \ln c$$

ya da

$$y = c(1-x)^{-\alpha} = g_\alpha(x)$$

elde edilir. $g_\alpha(0) = 1$ olduğundan $c = 1$ olmak zorundadır. Buna göre

$$g_\alpha(x) = (1-x)^{-\alpha}$$

bulunur. Şimdi benzer yolla (4.3.3) toplamını bulmak için $q-$binom teoremini verelim. Bunun için $q-$fark operatörüne ihtiyaç duyulacaktır. Bu operatör

$$\Delta_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx} = \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.3.1. ($q-$Binom Teoremi). $|x| < 1$ ve $|q| < 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

olup burada

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k)$$

dır (Andrews *et al.* 1999).

İspat (1. yöntem):

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k$$

olsun. Her iki tarafa $q-$fark operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{x} &= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k-\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}(qx)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}(1-q^k)x^{k-1} \qquad (4.3.6)\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}(a;q)_k &= \prod_{n=0}^{k-1}(1-aq^n)=(1-a)\prod_{n=1}^{k-1}(1-aq^n)\\ &= (1-a)\prod_{n=0}^{k-2}(1-aq^{n+1})\\ &= (1-a)\prod_{n=0}^{(k-1)-1}(1-aqq^n)\\ &= (1-a)(aq;q)_{k-1}\end{aligned}$$

ve

$$(q;q)_k=\prod_{n=0}^{k-1}(1-q^{n+1})=(1-q^k)\prod_{n=0}^{k-2}(1-q^{n+1})=(1-q^k)(q;q)_{k-1}$$

olup bu eşitlikler (4.3.6) da yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{x} &= (1-a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}x^{k-1}\\ &= (1-a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k\\ &= (1-a)f_{aq}(x)\end{aligned}$$

ya da

$$f_a(x)-f_a(qx)=(1-a)xf_{aq}(x) \qquad (4.3.7)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}f_a(x)-f_{aq}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a;q)_k-(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k \qquad (4.3.8)\end{aligned}$$

olup burada

$$
\begin{aligned}
(a;q)_k-(aq;q)_k &= \prod_{n=0}^{k-1}(1-aq^n)-\prod_{n=0}^{k-1}(1-aq^{n+1}) \\
&= (1-a)\prod_{n=1}^{k-1}(1-aq^n)-(1-aq^k)\prod_{n=0}^{k-2}(1-aq^{n+1}) \\
&= (1-a)\prod_{n=0}^{k-2}(1-aq^{n+1})-(1-aq^k)\prod_{n=0}^{k-2}(1-aq^{n+1}) \\
&= (-a+aq^k)\prod_{n=0}^{k-2}(1-aq^{n+1}) \\
&= (-a)(1-q^k)(aq;q)_{k-1} \qquad (4.3.9)
\end{aligned}
$$

dir. (4.3.9) bağıntısı (4.3.8) de kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
f_a(x)-f_{aq}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-a)(1-q^k)(aq;q)_{k-1}}{(1-q^k)(q;q)_{k-1}}x^k \\
&= -ax\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}x^{k-1} \\
&= -ax\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k
\end{aligned}
$$

ya da

$$
f_a(x)-f_{aq}(x)=-axf_{aq}(x) \qquad (4.3.10)
$$

elde edilir. (4.3.7) ve (4.3.10) denklemlerinde $f_{aq}(x)$ yok edilirse,

$$
\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{f_a(x)}=\frac{(1-a)x}{1-ax}
$$

ve böylece

$$
f_a(x)=\left(\frac{1-ax}{1-x}\right)f_a(qx)
$$

bulunur. Bu bağıntıya n kez iterasyon uygulandığında

$$
\begin{aligned}
f_a(x) &= \frac{(1-ax)(1-aqx)}{(1-x)(1-qx)}f_a(q^2x) \\
&= \frac{(1-ax)(1-aqx)(1-axq^2)}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)}f_a(q^3x)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\dots \\
&= \frac{(1-ax)(1-aqx)(1-axq^2)...(1-axq^{n-1})}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)...(1-q^{n-1}x)} f_a(q^n x) \\
&= \frac{(ax;q)_n}{(x;q)_n} f_a(q^n x)
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} f_a(0) \\
&= \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki, bu da ispatı tamamlar. ■

(2. yöntem): $|x| < 1$ için $\dfrac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$ sonsuz çarpımının Taylor açılımı gözönüne alınsın. Buna göre

$$F(x) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \tag{4.3.11}$$

olur. İspatın 1. yöntemindeki düşünce kullanılarak kolayca görülebilir ki

$$F(x) = \frac{1-ax}{1-x} F(qx)$$

dir. O halde

$$(1-x)F(x) = (1-ax)F(qx)$$

olup (4.3.11) den

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n &= (1-ax)\sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n x^n \\
\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} aA_n q^n x^{n+1} \\
\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} aA_{n-1} q^{n-1} x^n \\
\sum_{n=1}^{\infty} [A_n - A_{n-1}]\, x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n q^n - aA_{n-1} q^{n-1}\right] x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada x^n nin katsayıları eşitlenirse

$$A_n - A_{n-1} = A_n q^n - aA_{n-1}q^{n-1}$$

ya da

$$A_n = \frac{1-aq^{n-1}}{1-q^n}A_{n-1}$$

bulunur. Burada da iterasyon alarak

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{(1-aq^{n-1})(1-aq^{n-2})}{(1-q^n)(1-q^{n-1})}A_{n-2} \\
&= \frac{(1-aq^{n-1})(1-aq^{n-2})(1-aq^{n-3})}{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}A_{n-3} \\
&\dots \\
&= \frac{(1-aq^{n-1})...(1-a)}{(1-q^n)...(1-q)}A_0 \\
&= \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n$$

sonucuna ulaşılır ki böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.3.1.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(x;q)_\infty}, \quad |x|<1, \ |q|<1 \quad \text{(Euler)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}x^n}{(q;q)_n} = (x;q)_\infty, \ |q|<1 \quad \text{(Euler)}$

dir (Andrews *et al.* 1999).

İspat: **(a)** Teorem 4.3.1 de $a=0$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0;q)_n}{(q;q)_n}x^n = \frac{(0;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_n}x^n = \frac{1}{(x;q)_\infty}$$

bulunur.

(b) Teorem 4.3.1 de a yerine $\frac{1}{a}$ ve x yerine de ax alınırsa, bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{a};q)_n}{(q;q)_n} a^n x^n = \frac{(\frac{1}{a}ax;q)_\infty}{(ax;q)_\infty}$$

olur. Burada

$$a^n(\frac{1}{a};q)_n = a^n \prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{q^k}{a}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}(a-q^k)$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n-1}(a-q^k)\frac{x^n}{(q;q)_n} = \frac{(x;q)_\infty}{(ax;q)_\infty}$$

bulunur. Bu son denklemde $a=0$ alınıp

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}(-q^k) &= (-1)^n q q^2 \ldots q^{n-1} = (-1)^n q^{1+2+\ldots+n-1} \\ &= (-1)^n q^{\frac{(n-1)n}{2}} = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}\end{aligned}$$

eşitliği de gözönünde bulundurulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n}x^n = (x;q)_\infty$$

elde edilir. ■

Diğer taraftan Sonuç 4.3.1.(a) da x yerine $(1-q)x$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q)^n x^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{((1-q)x;q)_\infty}$$

olur ve dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]_q!} = \frac{1}{((1-q)x;q)_\infty}$$

bulunur. Burada $q \to 1^-$ alırsak

$$e^x = \lim_{q\to 1^-}\frac{1}{((1-q)x;q)_\infty} \tag{4.3.12}$$

elde edilir. Aynı düşünceyle, Sonuç 4.3.1.**(b)** de benzer işlemler yapılırsa,

$$e^x = \lim_{q\to 1^-} (-(1-q)x; q)_\infty \tag{4.3.13}$$

bulunur. (4.3.12) ve (4.3.13) deki fonksiyonlar e^x in $q-$analoglarıdır ve aşağıdaki şekilde gösterilirler:

$$\begin{aligned}\exp_q(x) &= e_q(x) = \frac{1}{((1-q)x;q)_\infty}\\ E_q(x) &= (-(1-q)x;q)_\infty .\end{aligned}$$

4.4. $q-$Gamma Fonksiyonu

Şimdi tekrar $(0,1)$ aralığındaki beta integralinin bir $q-$analoğunu bulma problemine geri dönelim.

$q-$binom teoreminden $(1-x)^{-\alpha}$ nın $q-$analoğu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^\alpha;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(q^\alpha x;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \tag{4.4.1}$$

biçiminde verilmişti. Buradan $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ ifadesinin $q-$analizindeki karşılığını bulmak için (4.4.1) den

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1}\text{in } q-\text{analoğu } \frac{(qx;q)_\infty}{(x;q)_\infty}\\ (1-x)^{-\beta}\text{ nın } q-\text{analoğu } \frac{(q^\beta x;q)_\infty}{(x;q)_\infty}\end{aligned}$$

ve buradan $(1-x)^{\beta-1}$ in $q-$analoğu da

$$\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}$$

olur. Buna göre $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ yerine $f_q(x) = x^{\alpha-1}\dfrac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}$ yazılacaktır. Diğer taraftan $q-$binom teoremi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n=\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

şeklinde verilmişti. Burada

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)\frac{\prod\limits_{k=n}^{\infty}(1-aq^k)}{\prod\limits_{k=n}^{\infty}(1-aq^k)}=\frac{\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)}{\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1-aq^{n+k})}=\frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$$

$$(q;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-q^{k+1})\frac{\prod\limits_{k=n}^{\infty}(1-q^{k+1})}{\prod\limits_{k=n}^{\infty}(1-q^{k+1})}=\frac{\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1-q^{k+1})}{\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1-q^{n+k+1})}=\frac{(q;q)_\infty}{(q^{n+1};q)_\infty}$$

bağıntıları kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_\infty/(aq^n;q)_\infty}{(q;q)_\infty/(q^{n+1};q)_\infty}x^n=\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

olup böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}x^n=\frac{(ax;q)_\infty(q;q)_\infty}{(x;q)_\infty(a;q)_\infty}$$

elde edilir. Burada x yerine q^α ve a yerine q^β yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{n+\beta};q)_\infty}q^{\alpha n}=\frac{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty(q^\beta;q)_\infty} \tag{4.4.2}$$

bulunur. Ayrıca (4.2.1) de $a=1$ seçip $f(x)$ yerine de $f_q(x)=x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_qx &= \sum_{n=0}^{\infty}a^{n(\alpha-1)}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{n+\beta};q)_\infty}q^n(1-q)\\ &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{n+\beta};q)_\infty}q^{\alpha n}\end{aligned}$$

olup (4.4.2) eşitliğini de dikkate alarak

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_qx=\frac{(1-q)(q^{\alpha+\beta};q)_\infty(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty(q^\beta;q)_\infty} \tag{4.4.3}$$

elde edilir. Bu bağıntı

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

eşitliğinin $q-$genişlemesidir. (4.4.3) ü bu formda yazmak için gamma fonksiyonunun $q-$analoğuna ihtiyaç olacaktır. Öncelikle

$$[n]_q!=\frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}=\frac{(q;q)_\infty}{(1-q)^n(q^{n+1};q)_\infty},\quad 0<q<1$$

olduğundan,

$$[x]_q!=\frac{(q;q)_\infty}{(q^{x+1};q)_\infty}(1-q)^{-x}$$

ve böylece

$$\Gamma_q(x)=[x-1]_q!$$

olduğu da gözönünde bulundurularak, gamma fonksiyonunun $q-$analoğu

$$\Gamma_q(x)=\frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x},\quad |q|<1 \tag{4.4.4}$$

şeklinde oluşturulabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} &= \frac{\frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty}\frac{(q;q)_\infty}{(q^\beta;q)_\infty}(1-q)^{1-\alpha}(1-q)^{1-\beta}}{\frac{(q;q)_\infty}{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}(1-q)^{1-\alpha-\beta}}\\ &= \frac{(1-q)(q;q)_\infty(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty(q^\beta;q)_\infty}\end{aligned}$$

olur. Son denklem (4.4.3) ile karşılaştırılırsa

$$B_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_qx=\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}$$

elde edilir (Andrews *et al.* 1999).

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olduğu bilinmektedir. Şimdi bu özelliğin $q-$analoğunu bulmak için, (4.4.4) den

$$\Gamma_q(x+1) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^{x+1};q)_\infty}(1-q)^{1-(x+1)}$$

olup, burada da

$$\begin{aligned}
(q^{x+1};q)_\infty &= \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^{x+k+1}) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{x+k}) \\
&= \frac{1}{1-q^x}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{x+k+1}) = \frac{1}{1-q^x}\prod_{k=0}^{\infty}(1-q^{x+k}) \\
&= \frac{(q^x;q)_\infty}{1-q^x}
\end{aligned}$$

eşitliği gözönüne alınırsa

$$\Gamma_q(x+1) = \frac{1-q^x}{1-q}\Gamma_q(x)$$

bulunur. Ayrıca yine $\Gamma_q(x)$ in tanımından $\Gamma_q(1) = 1$ dir.

4.5. $q-$Beta Fonksiyonu

Şimdi $(0,\infty)$ aralığındaki beta fonksiyonunu inceleyelim. Öncelikle

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx$$

olduğu bilinmektedir. $(1-x)^{-\alpha}$ nın $q-$analogunu kullanarak ve $q-$binom teoreminden

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^\alpha;q)_k}{(q;q)_k}x^k = \frac{(q^\alpha x;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

olup buradan $(1+x)^{-(\alpha+\beta)}$ nın $q-$analoğu

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha+\beta};q)_k}{(q;q)_k}(-x)^k = \frac{(-q^{\alpha+\beta}x;q)_\infty}{(-x;q)_\infty}$$

dur. Şimdi $0 < q < 1, \quad 0 < \alpha < 1$ ve $|aq^{-\alpha}| < 1$ olsun ve

$$f(a) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}(-ax;q)_\infty}{(-x;q)_\infty}dx \tag{4.5.1}$$

olarak tanımlansın. Burada

$$(-ax;q)_\infty = (1+ax)(-axq;q)_\infty$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{(-axq;q)_\infty}{(-x;q)_\infty}(1-a+a(1+x))dx \\ &= (1-a)\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{(-axq;q)_\infty}{(-x;q)_\infty}dx + a\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{(-axq;q)_\infty}{(-x;q)_\infty}(1+x)dx \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$f(a) = (1-a)f(aq) + aI \tag{4.5.2}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{(-axq;q)_\infty}{(-x;q)_\infty}(1+x)dx, \quad (x \to \frac{x}{q} \text{ alırsak}) \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{q}\right)^{\alpha-1}\frac{(-ax;q)_\infty}{(-x/q;q)_\infty}(1+\frac{x}{q})\frac{dx}{q} \\ &= q^{-\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{(-ax;q)_\infty}{(-x/q;q)_\infty}(1+\frac{x}{q})dx \\ &= q^{-\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{(-ax;q)_\infty}{(-x;q)_\infty}dx \\ &= q^{-\alpha}f(a) \end{aligned}$$

dır. Bu (4.5.2) de yerine yazılırsa

$$f(a) = (1-a)f(aq) + aq^{-\alpha}f(a)$$

bulunur ve

$$
\begin{aligned}
f(a) &= \frac{1-a}{1-aq^{-\alpha}} f(aq) \\
&= \frac{(1-a)(1-aq)}{(1-aq^{-\alpha})(1-aq^{-\alpha+1})} f(aq^2) \\
&\dots \\
&= \frac{(a;q)_\infty}{(aq^{-\alpha};q)_\infty} f(0) \qquad (4.5.3)
\end{aligned}
$$

olur. Buradaki $f(0)$ değerini bulmak çok kolay değildir. Fakat $f(q)$ bulunabilir. Bunun için (4.5.1) de a yerine q alınırsa

$$
\begin{aligned}
f(q) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} \frac{(-qx;q)_\infty}{(-x;q)_\infty} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \beta(\alpha, 1-\alpha) \\
&= \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \qquad (4.5.4)
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.5.3) denkleminde $f(0)$ çekilir ve a yerine q alınırsa (4.5.4) denklemiyle de birlikte

$$
f(0) = \frac{(q^{1-\alpha};q)_\infty}{(q;q)_\infty} f(q) = \frac{(q^{1-\alpha};q)_\infty}{(q;q)_\infty} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}
$$

olur. Böylece $0 < \alpha < 1$ için

$$
f(a) = \frac{(a;q)_\infty (q^{1-\alpha};q)_\infty}{(aq^{-\alpha};q)_\infty (q;q)_\infty} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \qquad (4.5.5)
$$

elde edilir ki, buradan

$$
\int_0^\infty x^{\alpha-1} \frac{(-ax;q)_\infty}{(-x;q)_\infty} dx = \frac{(a;q)_\infty (q^{1-\alpha};q)_\infty}{(aq^{-\alpha};q)_\infty (q;q)_\infty} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \qquad (4.5.6)
$$

yazılabilir. (4.5.6) , beta fonksiyonunun bir $q-$analoğudur.

Diğer taraftan

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

bağıntısının bir $q-$genişlemesini bulabilmek için (4.5.6) da $a = q^{\alpha+\beta}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{(-q^{\alpha+\beta}x;q)_\infty}{(-x;q)_\infty}dx &= \frac{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty(q^{1-\alpha};q)_\infty}{(q^\beta;q)_\infty(q;q)_\infty}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \\
&= \frac{\frac{(q;q)_\infty}{(q^\beta;q)_\infty}(1-q)^{1-\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\frac{(q;q)_\infty}{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}(1-q)^{1-\alpha-\beta}\frac{(q;q)_\infty}{(q^{1-\alpha};q)_\infty}(1-q)^\alpha} \\
&= \frac{\Gamma_q(\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)\Gamma_q(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

olur. Fakat bu formülde α ve β ya göre simetri yoktur. Simetriyi sağlamak için

$$f(a,b) = \int_0^\infty x^{c-1}\frac{(-ax;q)_\infty(-qb/x;q)_\infty}{(-x;q)_\infty(-q/x;q)_\infty}dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$(-ax;q)_\infty = (1+ax)(-axq;q)_\infty$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= \int_0^\infty x^{c-1}\frac{(-axq;q)_\infty(-qb/x;q)_\infty}{(-x;q)_\infty(-q/x;q)_\infty}(1+ax)dx \\
&= \int_0^\infty x^{c-1}\frac{(-axq;q)_\infty(-qb/x;q)_\infty}{(-x;q)_\infty(-q/x;q)_\infty}dx + aI \\
&= f(aq,b) + aI
\end{aligned}$$

olup burada

$$I = \int_0^\infty x^{c-1}\frac{(-axq;q)_\infty(-qb/x;q)_\infty}{(-x;q)_\infty(-q/x;q)_\infty}xdx$$

dir. I da $x \to \dfrac{x}{q}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{q}\right)^{c-1} \frac{(-ax;q)_\infty(-q^2b/x;q)_\infty}{(-x/q;q)_\infty(-q^2/x;q)_\infty}\frac{x}{q}\frac{dx}{q} \\
&= q^{-c}\int_0^\infty x^{c-1}\frac{(-ax;q)_\infty(-q^2b/x;q)_\infty}{\left(1+\frac{x}{q}\right)(-x;q)_\infty\frac{(-q/x;q)_\infty}{(1+q/x)}}\frac{x}{q}dx \\
&= q^{-c}\int_0^\infty x^{c-1}\frac{(-ax;q)_\infty(-q^2b/x;q)_\infty}{(-x;q)_\infty(-q/x;q)_\infty}dx \\
&= q^{-c}f(a,bq)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$f(a,b) = f(aq,b) + aq^{-c}f(a,bq) \tag{4.5.7}$$

bulunur. Benzer yolla, $(-qb/x;q)_\infty = \left(1+\dfrac{b}{x}q\right)(-q^2b/x;q)_\infty$ bağıntısı kullanılarak

$$f(a,b) = f(a,bq) + bq^c f(aq,b) \tag{4.5.8}$$

bulunur. (4.5.7) ve (4.5.8) den $f(aq,b)$ yok edilirse,

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= f(a,bq) + bq^c\left(f(a,b) - aq^{-c}f(a,bq)\right) \\
&= \frac{1-ab}{1-bq^c}f(a,bq) \\
&= \frac{(1-ab)(1-abq)}{(1-bq^c)(1-bq^{c+1})}f(a,bq^2) \\
&= \frac{(1-ab)(1-abq)(1-abq^2)}{(1-bq^c)(1-bq^{c+1})(1-bq^{c+2})}f(a,bq^3)
\end{aligned}$$

ve bu şekilde devam ederek

$$f(a,b) = \frac{(ab;q)_\infty}{(bq^c;q)_\infty}f(a,0) \tag{4.5.9}$$

olur. Burada b yerine 1 alınıp $f(a,0)$ çekilirse,

$$f(a,0)=\frac{(q^c;q)_\infty}{(a;q)_\infty}f(a,1)$$

bulunur. $f(a,1)=f(a)$ olup (4.5.5) eşitliği yardımıyla

$$f(a,0)=\frac{(q^c;q)_\infty}{(a;q)_\infty}\frac{(a;q)_\infty(q^{1-c};q)_\infty}{(aq^{-c};q)_\infty(q;q)_\infty}\frac{\pi}{\sin\pi c}$$

elde edilir ve bu değer (4.5.9) da yerine yazılırsa,

$$f(a,b)=\frac{(ab;q)_\infty(q^c;q)_\infty(q^{1-c};q)_\infty}{(bq^c;q)_\infty(aq^{-c};q)_\infty(q;q)_\infty}\frac{\pi}{\sin\pi c}$$

olur. Buradan

$$\int_0^\infty x^{c-1}\frac{(-ax;q)_\infty(-qb/x;q)_\infty}{(-x;q)_\infty(-q/x;q)_\infty}dx=\frac{(ab;q)_\infty(q^c;q)_\infty(q^{1-c};q)_\infty}{(bq^c;q)_\infty(aq^{-c};q)_\infty(q;q)_\infty}\frac{\pi}{\sin\pi c}$$

olup, bu son bağıntıda da $a=q^{\alpha+c}$ ve $b=q^{\beta-c}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{c-1}\frac{(-q^{\alpha+c}x;q)_\infty(-q^{\beta-c+1}/x;q)_\infty}{(-x;q)_\infty(-q/x;q)_\infty}dx\\
&=\frac{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty(q^c;q)_\infty(q^{1-c};q)_\infty}{(q^\beta;q)_\infty(q^\alpha;q)_\infty(q;q)_\infty}\frac{\pi}{\sin\pi c}\\
&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)\frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty}(1-q)^{1-\alpha}\frac{(q;q)_\infty}{(q^\beta;q)_\infty}(1-q)^{1-\beta}}{\frac{(q;q)_\infty}{(q^c;q)_\infty}(1-q)^{1-c}\frac{(q;q)_\infty}{(q^{1-c};q)_\infty}(1-q)^c\frac{(q;q)_\infty}{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}(1-q)^{1-\alpha-\beta}}\\
&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}{\Gamma_q(c)\Gamma_q(1-c)}\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu bağıntı farklı bir $q-$beta integralidir (Andrews *et al.* 1999).

4.6. Hipergeometrik Serilerin $q-$Analoğu

$q-$Binom teoremine göre (Teorem 4.3.1),

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n=\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

olduğunu biliyoruz. Bu teoremi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ formunda yazarsak

$$c_n = \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n \quad \text{ve} \quad c_0 = 1$$

olur. Bu serinin bir genelini yazmak için

$$c_n = \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} x^n$$

alalım ve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ serisi ${}_2\Phi_1 \left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array} ;q,x \right)$ ile gösterilsin. Dolayısıyla

$${}_2\Phi_1 \left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array} ;q,x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} x^n \tag{4.6.1}$$

olarak yazılabilir ve (4.6.1), hipergeometrik serilerin $q-$analoğudur (Andrews *et al.* 1999). Eğer burada $a = q^{\alpha}$, $b = q^{\beta}$ ve $c = q^{\gamma}$ yazılıp

$$\{\alpha\}_{n,q} = \frac{(q^{\alpha};q)_n}{(1-q)^n}$$

olduğu gözönünde bulundurulur ve de $q \to 1^-$ alınırsa, bu durumda (4.6.1), ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x)$ hipergeometrik fonksiyonuna indirgenir.

${}_pF_r$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu,

$${}_pF_r\left(\alpha_1,...,\alpha_p;\beta_1,...,\beta_r;x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n ... (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n ... (\beta_r)_n} \frac{x^n}{n!}$$

olup bu fonksiyonların $q-$analoğu da

$${}_r\Phi_s \left[\begin{array}{cc} \alpha_1,...,\alpha_r & ; \\ & q,\ z \\ \beta_1,...,\beta_s & ; \end{array} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{(1-r+s)n} q^{(1-r+s)n(n-1)/2} \frac{(\alpha_1,...,\alpha_r;q)_n}{(\beta_1,...,\beta_s;q)_n} \frac{z^n}{(q;q)_n}$$

olarak tanımlanır (Slater 1966, Srivastava ve Karlson 1985). Burada,

$$(a_1, ..., a_k; q)_b = (a_1; q)_b \cdots (a_k; q)_b \quad ; \quad (k \in \mathbb{N};\, a_1, ..., a_k \in \mathbb{C})$$

dir.

1847 yılında Heine, ${}_2\Phi_1$ serileri üzerinde çalışmış ve aşağıdaki teoremi ispatlamıştır ki, bu teorem, hipergeometrik fonksiyonların Euler integral formülünün bir $q-$analoğunu oluşturmakta kullanılmıştır.

Teorem 4.6.1. $|q| < 1$, $|x| < 1$ ve $|b| < 1$ için

$${}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; q, x\right) = \frac{(b;q)_\infty (ax;q)_\infty}{(c;q)_\infty (x;q)_\infty} {}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} c/b, x \\ ax \end{matrix} ; q, b\right)$$

dir (Heine 1847).

İspat: (4.6.1) den

$${}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; q, x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} x^n$$

olup burada

$$(b;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - bq^k) \frac{\prod\limits_{k=n}^{\infty} (1 - bq^k)}{\prod\limits_{k=n}^{\infty} (1 - bq^k)} = \frac{(b;q)_\infty}{(bq^n;q)_\infty}$$

ve

$$(c;q)_n = \frac{(c;q)_\infty}{(cq^n;q)_\infty}$$

olduğundan

$${}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; q, x\right) = \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (cq^n;q)_\infty}{(q;q)_n (bq^n;q)_\infty} x^n \tag{4.6.2}$$

bulunur. Ayrıca $q-$binom teoreminde $x \to bq^n$ ve $a \to \dfrac{c}{b}$ alınırsa,

$$\frac{(cq^n;q)_\infty}{(bq^n;q)_\infty} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b;q)_m}{(q;q)_m}(bq^n)^m$$

olup bunu (4.6.2) de yerine yazarsak

$${}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix} ;q,x\right) = \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_m}{(q;q)_m}(bq^n)^m$$

elde edilir. Yine bu son eşitlikte x yerine xq^m alınarak $q-$binom teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
{}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix} ;q,x\right) &= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_m(axq^m;q)_\infty}{(q;q)_m(xq^m;q)_\infty}b^m \\
&= \frac{(b;q)_\infty(ax;q)_\infty}{(c;q)_\infty(x;q)_\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_m(x;q)_m}{(q;q)_m(ax;q)_m}b^m \\
&= \frac{(b;q)_\infty(ax;q)_\infty}{(c;q)_\infty(x;q)_\infty}\,{}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} c/b,x \\ ax \end{matrix} ;q,b\right)
\end{aligned}$$

bulunur ki, bu da teoremin ispatını tamamlar. ■

${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonunun Euler integral gösteriminin bir $q-$integral analoğu da incelenmiştir (Thomae 1869). Bunun için, Teorem 4.6.1 de $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$ ve $c = q^\gamma$ alınırsa, bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^\alpha;q)_n(q^\beta;q)_n}{(q;q)_n(q^\gamma;q)_n}x^n = \frac{(q^\beta;q)_\infty(q^\alpha x;q)_\infty}{(q^\gamma;q)_\infty(x;q)_\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q^{\gamma-\beta};q)_m(x;q)_m}{(q;q)_m(q^\alpha x;q)_m}q^{\beta m} \tag{4.6.3}$$

olur. Şimdi

$$(a;q)_m = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^m;q)_\infty}$$

eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
(q^{\gamma-\beta};q)_m &= \frac{(q^{\gamma-\beta};q)_\infty}{(q^{\gamma-\beta+m};q)_\infty}, \quad (x;q)_m = \frac{(x;q)_\infty}{(xq^m;q)_\infty} \\
(q;q)_m &= \frac{(q;q)_\infty}{(q^{m+1};q)_\infty}, \quad (q^\alpha;q)_m = \frac{(q^\alpha;q)_\infty}{(q^{\alpha+m};q)_\infty}
\end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir. Bunlar (4.6.3) de yerlerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha};q)_n(q^{\beta};q)_n}{(q;q)_n(q^{\gamma};q)_n}x^n=\frac{(q^{\beta};q)_{\infty}(q^{\gamma-\beta};q)_{\infty}}{(q^{\gamma};q)_{\infty}(q;q)_{\infty}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q^{m+1};q)_{\infty}(xq^{\alpha+m};q)_{\infty}q^{\beta m}}{(q^{m+1+\gamma-\beta-1};q)_{\infty}(xq^{m};q)_{\infty}} \tag{4.6.4}$$

bulunur. Burada

$$\frac{(q^{m+1};q)_{\infty}}{(q^{m+1+\gamma-\beta-1};q)_{\infty}}=(q^{m+1};q)_{\gamma-\beta-1},\quad \frac{(xq^{m};q)_{\infty}}{(xq^{\alpha+m};q)_{\infty}}=(xq^{m};q)_{\alpha}$$

bağıntıları ve (4.4.4) tanımı gözönüne alınırsa (4.6.4) den

$$\begin{aligned}{}_2\Phi_1\left(\begin{matrix}q^{\alpha},q^{\beta}\\ q^{\gamma}\end{matrix};q,x\right) &= \frac{\frac{(q;q)_{\infty}}{(q^{\gamma};q)_{\infty}}(1-q)^{1-\gamma}}{\frac{(q;q)_{\infty}}{(q^{\beta};q)_{\infty}}(1-q)^{1-\beta}\frac{(q;q)_{\infty}}{(q^{\gamma-\beta};q)_{\infty}}(1-q)^{1-\gamma+\beta}}\\ &\quad\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q^{m+1};q)_{\gamma-\beta-1}}{(xq^{m};q)_{\alpha}}q^{m\beta-m}q^{m}(1-q)\end{aligned}$$

bulunur. $q-$integralinin tanımından

$$\int_0^1 f(x)d_qx=\sum_{n=0}^{\infty}f(q^n)q^n(1-q)$$

eşitliği gerçeklendiğine göre burada

$$\begin{aligned}{}_2\Phi_1\left(\begin{matrix}q^{\alpha},q^{\beta}\\ q^{\gamma}\end{matrix};q,x\right) &= \frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\gamma-\beta)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q^{m+1};q)_{\gamma-\beta-1}}{(xq^{m};q)_{\alpha}}q^{m\beta-m}q^{m}(1-q)\\ &= \frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\gamma-\beta)}\int_0^1 f(q^m)q^m(1-q)\end{aligned}$$

olur. f fonksiyonu

$$f(t)=\frac{t^{\beta-1}(qt;q)_{\gamma-\beta-1}}{(xt;q)_{\alpha}}$$

ile verilmektedir. Dolayısıyla

$${}_2\Phi_1\left(\begin{matrix}q^{\alpha},q^{\beta}\\ q^{\gamma}\end{matrix};q,x\right)=\frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\gamma-\beta)}\int_0^1\frac{t^{\beta-1}(qt;q)_{\gamma-\beta-1}}{(xt;q)_{\alpha}}d_qt$$

$q-$integral formülü elde edilir ki, yukarıdaki sonuç,

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-xt)^a} dt $$

olarak bilinen Euler integral gösteriminin bir $q-$genişlemesidir.

4.7. Bazı Özel Polinomların q−Analogları

Ortogonal polinomlardan bir çoğunun (özellikle hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazılabilen polinomların) $q-$analogları üzerinde çalışılmıştır. Burada bunlardan bir kaçı verilecektir.

I. $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{\alpha+n}{n} {}_2F_1\left(-n,\ \alpha+\beta+n-1;\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2}\right) $$

şeklinde tanımlanırlar. Bu polinomların $q-$analoğu olan q-Jacobi polinomları,

$$ P_n^{(\alpha,\beta)}(x;q) = \frac{(\alpha q;q)_n}{(q;q)_n}\ {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^{-n}, \alpha\beta q^{n+1} & ; \\ & & q,\ xq \\ \alpha q & ; \end{matrix}\right] ; $$

şeklindedir (Hahn 1949, Andrews ve Askey 1985). Burada ${}_2\Phi_1$, (4.6.1) ile verilmektedir.

II. $P_n(x)$ Legendre polinomları, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$ P_n(x) = (-1)^n\, {}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1+x}{2}\right) $$

olarak tanımlanırlar. Bu polinomların $q-$analoğu olan q-Legendre polinomları ise,

$$ P_n(x;q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n+k \\ n-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k \\ k \end{bmatrix} x^k $$

şeklindedir (Kasumov 1984).

III. $C_n^{v}(x)$ Gegenbauer (Ultraküresel) polinomları, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$C_n^v(x)=\frac{(2v)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n,\,2v+n;\,v+\frac{1}{2},\,\frac{1-x}{2}\right)$$

olarak tanımlanırlar. Bu polinomların $q-$analoğu olan q-Gegenbauer polinomları ise,

$$C_n^v(x;q)=\frac{(v;q)_n}{(q,q)_n}e^{in\theta}\,{}_2\Phi_1\left[\begin{array}{ll} q^{-n},v & ; \\ q^{1-n}v^{-1} & ; \end{array} q,\ \frac{q}{ve^{2i\theta}}\right]$$

şeklindedir (Andrews *et al.* 1999).

IV. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1\left(-n;\alpha+1;x\right)$$

olarak tanımlanırlar. Bu polinomların $q-$analoğu olan $q-$Laguerre polinomları,

$$L_n^{(\alpha)}(x;q)=\frac{(\alpha q;q)_n}{(q;q)_n}\ {}_1\Phi_1\left[\begin{array}{l} q^{-n}\ ; \\ \alpha q\ ; \end{array} q,\ -x\right];$$

ile verilir (Jackson 1944, Hahn 1949).

V. $J_n(x)$ Bessel polinomları, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$J_n(x)=\frac{(x/2)^n}{\Gamma(n+1)}\,{}_0F_1\left(-;\,1+n;-\frac{x^2}{4}\right)$$

olarak tanımlanırlar. Bu polinomların $q-$analoğu olan $q-$Bessel polinomları da,

$$J(q;c,n,x)=\frac{(q^c;q)_n}{(q;q)_n}\ {}_2\Phi_1\left[\begin{array}{ll} q^{-n},\,q^{c+n} & ; \\ 0 & ; \end{array} q,\ -x\right].$$

şeklinde ifade edilmektedirler (Abdi 1965, Gonzalez *et al.* 2001).

VI. $H_n(x)$ Hermite polinomları, hipergeometrik polinomlar cinsinden

$$H_n(x)=(2x)^n\,{}_2F_0\left(-\frac{1}{2}n,\,-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2};\,-;-\frac{1}{x^2}\right)$$

olarak tanımlanırlar. Bu polinomların $q-$analoğu olan $q-$Hermite polinomları da,

$$H_n(\cos\theta;q)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(q,q)_n}{(q,q)_k(q,q)_{n-k}}e^{i(n-2k)\theta}$$

ile verilirler (Andrews *et al.* 1999).

Bu polinomların kendileri için elde edilen özelliklerin birçoğu $q-$analogları için de benzer şekilde elde edilebilmektedir.

5. ÇOK DEĞİŞKENLİ q−LAGRANGE POLİNOMLARI

Bu bölümde önce iki değişkenli Lagrange polinomlarının sonra da çok değişkenli Lagrange polinomlarının $q-$analoglarını oluşturacağız. Daha sonra da çok değişkenli $q-$Lagrange polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon aileleri için teoremler ispatlayacak ve son olarak da bu polinomlar için bazı bağıntılar elde edeceğiz.

5.1. q−Lagrange Polinomlarının İnşası

İki değişkenli $g_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ polinomlarını,

$$\frac{1}{(xt;q)_\alpha (yt;q)_\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(x,y)t^n, \quad \left(|t| < \min\left\{|x|^{-1}, |y|^{-1}\right\}\right) \tag{5.1.1}$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahip $q-$Lagrange polinomları olarak tanımlayalım. (5.1.1) tanımından hareket ederek $g_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ $q-$Lagrange polinomlarını aşağıdaki şekilde bulabiliriz:

Teorem 4.3.1 den

$$\frac{1}{(xt;q)_\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{\alpha\}_{k,q}}{[k]_q!}(xt)^k$$

$$\frac{1}{(yt;q)_\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{\beta\}_{n,q}}{[n]_q!}(yt)^n$$

olup bu iki eşitliği taraf tarafa çarpar ve (2.8.2) yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(xt;q)_\alpha (yt;q)_\beta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{\alpha\}_{k,q}\{\beta\}_{n,q}}{[k]_q!\,[n]_q!} x^k y^n t^{n+k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\{\alpha\}_{k,q}\{\beta\}_{n-k,q}}{[k]_q!\,[n-k]_q!} x^k y^{n-k}\right] t^n \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitliği (5.1.1) ile karşılaştırırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[g_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right] t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\{\alpha\}_{k,q}\{\beta\}_{n-k,q}}{[k]_q!\,[n-k]_q!} x^k y^{n-k}\right] t^n \tag{5.1.2}$$

buluruz. (5.1.2) nin her iki yanından t^n nin katsayılarını eşitlersek, iki değişkenli $q-$Lagrange polinomlarını,

$$g_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\{\alpha\}_{k,q}\,\{\beta\}_{n-k,q}}{[k]_q!\,[n-k]_q!}x^k y^{n-k} \tag{5.1.3}$$

olarak elde ederiz.

Benzer şekilde çok değişkenli $q-$Lagrange polinomlarını da

$$\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(x_i t;q)_{\alpha_i}}=\sum_{n=0}^{\infty}g_{n,q}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)t^n\,, \tag{5.1.4}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı ile tanımlayabiliriz. Burada $|t|<\min\left\{|x_1|^{-1},\ldots,|x_r|^{-1}\right\}$ dir. Yine Teorem 4.3.1 den

$$\frac{1}{(x_i t;q)_{\alpha_i}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha_i},q)_k}{(q,q)_k}(x_i t)^k; \qquad i=1,\ldots,r$$

yazabiliriz. Bu r tane eşitliği taraf tarafa çarpar ve ardışık olarak (2.8.2) yi kullanırsak,

$$\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(x_i t;q)_{\alpha_i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k_1+\ldots+k_r=n}(q^{\alpha_{k_1}},q)_{k_1}\cdots(q^{\alpha_{k_r}},q)_{k_r}\frac{x_1^{k_1}}{(q,q)_{k_1}}\cdots\frac{x_r^{k_r}}{(q,q)_{k_r}}\right\}t^n \tag{5.1.5}$$

olur. (5.1.4) ve (5.1.5) den çok değişkenli $q-$Lagrange polinomlarını

$$g_{n,q}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{k_1+\ldots+k_r=n}(q^{\alpha_1},q)_{k_1}\cdots(q^{\alpha_{k_r}},q)_{k_r}\frac{x_1^{k_1}}{(q,q)_{k_1}}\cdots\frac{x_r^{k_r}}{(q,q)_{k_r}} \tag{5.1.6}$$

olarak elde ederiz.

5.2. $q-$Lagrange Polinomları İçin Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar

Bu kısımda (5.1.6) da verdiğimiz çok değişkenli $q-$Lagrange polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlarının bazı ailelerini elde edeceğiz. Sonra da bu polinomlar için bazı özellikler vereceğiz.

Teorem 5.2.1. μ-yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1, ..., y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,n}(y_1, ..., y_s; z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+nk}(y_1, ..., y_s) z^k \tag{5.2.1}$$

$$(a_k \neq 0; \quad n \in \mathbb{N})$$

ve

$$\begin{aligned} & {}_q\Theta_{l,p}^{\mu,n}(x_1, ..., x_r; y_1, ..., y_s; z) \\ & \quad = \sum_{k=0}^{[l/p]} a_k g_{l-pk,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1, ..., x_r) \Omega_{\mu+nk}(y_1, ..., y_s) z^k \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{l=0}^{\infty} {}_q\Theta_{l,p}^{\mu,n}(x_1, ..., x_r; y_1, ..., y_s; \frac{\eta}{t^p}) t^l = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(x_j t; q)_{\alpha_j}} \Lambda_{\mu,n}(y_1, ..., y_s; \eta) \tag{5.2.3}$$

dir.

İspat: (5.2.2) de $z \to \dfrac{\eta}{t^p}$ alıp, her iki yanı t^l ile çarparak $l = 0$ dan ∞ a kadar toplam alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{l=0}^{\infty} {}_q\Theta_{l,p}^{\mu,n}(x_1, ..., x_r; y_1, ..., y_s; \frac{\eta}{t^p}) t^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[l/p]} a_k g_{l-pk,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1, ..., x_r) \Omega_{\mu+nk}(y_1, ..., y_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^l \end{aligned}$$

buluruz. Bu son eşitlikte (3.2.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, g_{l,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1, ..., x_r) \Omega_{\mu+nk}(y_1, ..., y_s) \eta^k t^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} g_{l,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1, ..., x_r) t^l \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+nk}(y_1, ..., y_s) \eta^k \\ &= \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(x_j t; q)_{\alpha_j}} \Lambda_{\mu,n}(y_1, ..., y_s; \eta) \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar. ■

(5.1.6) polinomlarının bilateral doğurucu fonksiyonlarının başka bir ailesini elde etmek için önce, ihtiyacımız olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 5.2.1. Çok değişkenli $q-$Lagrange polinomları için bir toplam formülü,

$$g_{n,q}^{(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_r+\beta_r)}(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{k=0}^{n}g_{n-k,q}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)g_{k,q}^{(\beta_1,\ldots,\beta_r)}(x_1q^{\alpha_1},\ldots,x_rq^{\alpha_r})$$

şeklindedir.

İspat: (5.1.4) doğurucu fonksiyon bağıntısında α_i yerine $\alpha_i+\beta_i$ yazarsak,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}g_{n,q}^{(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_r+\beta_r)}(x_1,\ldots,x_r)t^n&\\
&=\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(x_it;q)_{\alpha_i+\beta_i}}\\
&=\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(x_it;q)_{\alpha_i}}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(x_itq^{\alpha_i};q)_{\beta_i}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}g_{n,q}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)t^n\sum_{k=0}^{\infty}g_{k,q}^{(\beta_1,\ldots,\beta_r)}(x_1q^{\alpha_1},\ldots,x_rq^{\alpha_r})t^k\end{aligned}$$

olur. Burada (2.8.2) bağıntısını kullanırsak,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}g_{n,q}^{(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_r+\beta_r)}(x_1,\ldots,x_r)t^n&\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}g_{n-k,q}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)g_{k,q}^{(\beta_1,\ldots,\beta_r)}(x_1q^{\alpha_1},\ldots,x_rq^{\alpha_r})t^n\end{aligned}$$

buluruz. Bu son eşitlikte t^n nin katsayılarını eşitlersek,

$$g_{n,q}^{(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_r+\beta_r)}(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{k=0}^{n}g_{n-k,q}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)g_{k,q}^{(\beta_1,\ldots,\beta_r)}(x_1q^{\alpha_1},\ldots,x_rq^{\alpha_r})$$

elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 5.2.2. $\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,\ldots,y_s)$, μ-yüncü basamaktan, s kompleks değişkenli $(s\in\mathbb{N})$ ve sıfıra denk olmayan bir fonksiyon olarak verilsin. $\psi\in\mathbb{C}$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$,

$\beta = (\beta_1, ..., \beta_r)$ ve $a_k \neq 0$, $n, p \in \mathbb{N}$ için,

$$
\begin{aligned}
{}_q\Lambda^{p,n}_{\mu,\alpha,\beta}(x_1, ..., x_r; y_1, ..., y_s; z) = & \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k g^{(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_r+\beta_r)}_{n-pk,q}(x_1, ..., x_r) \\
& \times \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, ..., y_s) z^k,
\end{aligned} \tag{5.2.4}
$$

olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l\, g^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{n-k,q}(x_1, ..., x_r) g^{(\beta_1,...,\beta_r)}_{k-pl,q}(x_1 q^{\alpha_1}, ..., x_r q^{\alpha_r}) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, ..., y_s) z^l \\
= {}_q\Lambda^{p,n}_{\mu,\alpha,\beta}(x_1, ..., x_r; y_1, ..., y_s; z)
\end{aligned} \tag{5.2.5}
$$

dir.

İspat: (5.2.5) bağıntısının sol yanı T olsun. Burada (3.2.6) yı kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l\, g^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{n-pl-k,q}(x_1, ..., x_r) g^{(\beta_1,...,\beta_r)}_{k,q}(x_1 q^{\alpha_1}, ..., x_r q^{\alpha_r}) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, ..., y_s) z^l \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l\, \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, ..., y_s) z^l \sum_{k=0}^{n-pl} g^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{n-pl-k,q}(x_1, ..., x_r) g^{(\beta_1,...,\beta_r)}_{k,q}(x_1 q^{\alpha_1}, ..., x_r q^{\alpha_r})
\end{aligned}
$$

olur. Burada da Lemma 5.2.1 toplam formülü ve (5.2.4) den,

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l\, \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, ..., y_s) z^l g^{(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_r+\beta_r)}_{n-pl,q}(x_1, ..., x_r) \\
&= {}_q\Lambda^{p,n}_{\mu,\alpha,\beta}(x_1, ..., x_r; y_1, ..., y_s; z)
\end{aligned}
$$

elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar. ■

Yukarıdaki teoremlerde $\Omega_{\mu+nk}(y_1, ..., y_s)$ $(k \in \mathbb{N}_0,\ s \in \mathbb{N})$ çok değişkenli fonksiyonunu bir ya da çok değişkenli basit fonksiyonlar tarafından ifade ederek, elde ettiğimiz sonuçların farklı uygulamalarını aşağıdaki şekilde verebiliriz. Örneğin, eğer Teorem 5.2.1 de $s = r$ ve $\Omega_{\mu+nk}(y_1, ..., y_r) = g^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{\mu+nk,q}(y_1, ..., y_r)$ alırsak, çok değişkenli $q-$Lagrange polinomları için bilineer doğurucu fonksiyonların bir sınıfını şu şekilde elde ederiz:

Sonuç 5.2.1. Eğer

$$
\begin{aligned}
{}_q\Lambda_{\mu,n}(y_1,...,y_r;z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_{\mu+nk,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(y_1,...,y_r)z^k, \\
(a_k &\neq 0\,,\ n \in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
{}_q\Theta_{l,p}^{\mu,n}(x_1,...,x_r;y_1,...,y_r;z) &= \sum_{k=0}^{[l/p]} a_k g_{l-pk,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r) \\
&\quad \times g_{\mu+nk,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(y_1,...,y_r)z^k \\
(l,p &\in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

ise bu takdirde,

$$
\sum_{l=0}^{\infty} {}_q\Theta_{l,p}^{\mu,n}(x_1,...,x_r;y_1,...,y_r;\frac{\eta}{t^p})t^l = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(x_jt;q)_{\alpha_j}}\,{}_q\Lambda_{\mu,n}(y_1,...,y_r;\eta)
$$

olur.

Uyarı: Çok değişkenli $q-$Lagrange polinomları için (5.1.4) ile verilen

$$
\sum_{n=0}^{\infty} g_{n,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(y_1,...,y_r)t^n = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(y_it;q)_{\alpha_i}}
$$

doğurucu fonksiyonunu kullanırsak ve Sonuç 5.2.1 de $a_k = 1,\ \mu = 0,\ n = 1$ alırsak bu polinomlar için,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[l/p]} g_{l-pk,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)g_{k,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(y_1,...,y_r)\eta^k t^{l-pk} \\
&\qquad = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(x_jt;q)_{\alpha_j}(y_j\eta;q)_{\alpha_j}}
\end{aligned}
$$

bağıntısını elde ederiz. Burada,

$$
|t| < \min\left\{|x_1|^{-1},...,|x_r|^{-1}\right\},\ |\eta| < \min\left\{|y_1|^{-1},...,|y_r|^{-1}\right\}
$$

dir.

Teorem 5.2.2 de $s = r$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,...,y_r) = g^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}_{\mu+\psi k,q}(y_1,...,y_r)$, $(\mu,\psi \in \mathbb{N}_0)$ alırsak doğrudan aşağıdaki sonuca ulaşırız:

Sonuç 5.2.2. Eğer

$$\begin{aligned}\Phi^{n,p}_{\mu,\psi,\alpha,\beta,\gamma}(x_1,...,x_r;y_1,...,y_r;z) = &\sum_{k=0}^{[n/p]} a_k g^{(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_r+\beta_r)}_{n-pk,q}(x_1,...,x_r)\\ &\times g^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}_{\mu+\psi k,q}(y_1,...,y_r)z^k,\end{aligned}$$

$$a_k \neq 0\,,\ n,p\in\mathbb{N},\ \mu,\psi\in\mathbb{N}_0,\ \alpha=(\alpha_1,...,\alpha_r)\,,\ \beta=(\beta_1,...,\beta_r)\,,\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_r)$$

ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{[k/p]} a_l\, g^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{n-k,q}(x_1,...,x_r) g^{(\beta_1,...,\beta_r)}_{k-pl,q}(x_1,...,x_r) g^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}_{\mu+\psi l,q}(y_1,...,y_r)z^l\\ = \Phi^{n,p}_{\mu,\psi,\alpha,\beta,\gamma}(x_1,...,x_r;y_1,...,y_r;z)\end{aligned}$$

dir.

Şimdi Teorem 5.2.1 in başka bir özel durumunu verelim. Bu teoremde $s = 1$, $y_1 = z$ ve $\Omega_{\mu+nk}(z) = L^{(\alpha)}_{\mu+nk}(z;q)$, $(k \in \mathbb{N}_0,\ \mu,n \in \mathbb{C})$, alalım. Burada $L^{(\alpha)}_k(z;q)$, $q-$Laguerre polinomları olup Kısım 4.7 de tanımı verilmişti. Bu durumda, $q-$Laguerre polinomları ya da çok değişkenli $q-$Lagrange polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfını aşağıdaki sonuçlarla verebiliriz:

Sonuç 5.2.3. Eğer

$${}_qH_{\mu,n}(z;\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L^{(\alpha)}_{\mu+nk}(z;q)\tau^k$$

$$(a_k \neq 0\,,\ n,\mu\in\mathbb{C})$$

ve $l,p\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$${}_qR^{\mu,n}_{l,p}(x_1,...,x_r;z;\zeta) = \sum_{k=0}^{[l/p]} a_k g^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{l-pk,q}(x_1,...,x_r)L^{(\alpha)}_{\mu+nk}(z;q)\zeta^k$$

ise, bu durumda

$$\sum_{l=0}^{\infty} {}_qR_{l,p}^{\mu,n}(x_1,...,x_r;z;\frac{\eta}{t^p})t^l = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(x_jt;q)_{\alpha_j}} {}_qH_{\mu,n}(z;\eta)$$

bulunur.

Uyarı: $q-$Laguerre polinomları için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{c\}_{k,q}}{\{1+\alpha\}_{k,q}} L_k^{(\alpha)}(z;q)\eta^k = \frac{1}{(\eta;q)_c} {}_1\Phi_2\left(c;\ 1+\alpha|\, q;\ -z\eta q^{1+\alpha}(1-q);\ -;\ (\eta q^c;q)\right)$$
$$(|\tau| < 1)$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısı bilinmektedir. Sonuç 5.2.3 de bu bağıntıyı kullanırsak ve $a_k = \dfrac{\{c\}_{k,q}}{\{1+\alpha\}_{k,q}}$, $n=1$, $\mu = 0$ alırsak,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[l/p]} \frac{\{c\}_{k,q}}{\{1+\alpha\}_{k,q}} g_{l-pk,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r) L_k^{(\alpha)}(z;q)\eta^k t^{n-pk}$$
$$= \frac{1}{(\eta;q)_c} {}_1\Phi_2\left(c;\ 1+\alpha|\, q;\ -z\eta q^{1+\alpha}(1-q);\ -;\ (\eta q^c;q)\right) \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(x_jt;q)_{\alpha_j}}$$

bilateral doğurucu fonksiyonunu elde ederiz. Burada $|t| < \min\left\{|x_1|^{-1},...,|x_r|^{-1}\right\}$, $|\eta| < 1$ dir.

a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ katsayılarının uygun herbir seçimi ile, eğer $\Omega_\mu(y_1,...,y_s)$ çok değişkenli fonksiyonu, daha basit bazı fonksiyonların uygun bir çarpımı olarak ifade edilebilirse bu durumda Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.2.2 den, çok değişkenli $q-$Lagrange polinomları için, multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonların çeşitli aileleri elde edilebilir.

Son olarak çok değişkenli $q-$Lagrange polinomları için,

$$g_{n,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x,...,x) = \prod_{j=1}^{r} \frac{(q^{\alpha_j};q)_n}{(q;q)_n} x^n , \quad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{5.2.6}$$

şeklinde bir bağıntı verebiliriz. Gerçekten, (5.1.4) doğurucu fonksiyon bağıntısında

x_i yerine x alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_{n,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x,...,x)t^n = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(xt;q)_{\alpha_j}}$$

olur. Burada Teorem 4.3.1 i kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} g_{n,q}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x,...,x)t^n &= \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(xt;q)_{\alpha_j}} \\
&= \prod_{j=1}^{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{\alpha_j};q)_n}{(q;q)_n}(xt)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{r} \frac{(q^{\alpha_j};q)_n}{(q;q)_n} x^n \right] t^n
\end{aligned}$$

buluruz. Burada da t^n nin katsayılarını eşitlersek (5.2.6) yı elde ederiz.

KAYNAKLAR

Abdi, W.H. 1965. A basic analogue of the Bessel polynomials. Math. Nachr. 30; 209-219.

Andrews, G.E. and Askey, R. 1985. Classical orthogonal polynomials, in "Polynômes orthogonaux et applications" (C. Brezinski, A.Draux, A. P. Magnus, P.Maroni and A. Ronveaux, Eds:). Springer-Verlag, Berlin/New York; 36-62.

Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R. 1999. Special Functions. Cambridge University Press.

Chan, W.-C.C., Chyan, C.-J. and Srivastava, H. M. 2001. The Lagrange polynomials in several variables. Integral Transform. Spec. Funct. 12; 139-148.

Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G. 1955. Higher Transcendental Functions. Vol. III, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London.

Gonzalez, B., Materia, J. and Srivastava, H.M. 2001. Some q-generating functions and associated generalized hypergeometric polynomials. Mathematical and Computer Modelling 34; 133-175.

Grosswald, E. 1978. Bessel Polynomials. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Hahn, W. 1949. Über orthogonalpolynome, die q-differenzengleichungen genügen. Math. Nachr. 2; 4-34.

Heine, E. 1847. Untersuchungen über die Reihe. J. Reine Ang. Math. 34; 285-328.

Jackson, F.H. 1944. Basic double hypergeometric functions (II). Quart. J. Math. Oxford Ser.15; 49-61.

Kasumov, N.M. 1984. A discrete analogue of Legendre polynomials. Reports of Azerbaidzanien Academy of Sceinces, Series: Phisics-Technics-Mathematics, 2; 9-15.

Khan, M.A. and Shukla, A.K. 1998. On Lagrange's polynomials of three variables. Rev. Mat. 17; 227-235.

Lin, S.-D., Chen, I.-C. and Srivastava, H.M. 2003. Certain classes of finite-series relationships and generating functions involving the generalized Bessel polynomials. Appl. Math. Comput. 137; 261-275.

Rainville, E.D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, New York.

Riordan, J. 1968. Combinatorial Identities. John Wiley and Sons, New York, London and Sydney.

Slater, L.J. 1966. Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge Univ. Press, London/New York.

Srivastava, H.M. 1979. Some generalizations of Carlitz's theorem. Pasific J. Math. 85; 471-477.

Srivastava, H.M. and Manocha, H.L. 1984. A Treatise on Generating Functions. Halsted Press Wiley, New York.

Srivastava, H.M. and Karlson, P.W. 1985. Multiple Gaussian hypergeometric series. Halsted (Ellis Horwood, Chichester), Wiley, New York.

Srivastava, H.M. 2000. Some families of generating functions associated with the Stirling numbers of the second kind. J. Math. Anal. Appl. 251; 752-769.

Szegö, G. 1975. Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications, 23, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Thomae, J. 1869. Beiträge zur theorie der durch die Heinesche Reihe. J. Reine Ang. Math. 70; 258-281.

EKLER

Bu doktora tezinden aşağıdaki yayınlar üretilmiştir:

1) Altın, A., Erkuş, E. and Taşdelen, F. "The $q-$Lagrange polynomials in several variables", Taiwanese J. Math. (accepted for publication, November 23, 2004).

2) Erkuş, E. and Altın, A. "A note on the Lagrange polynomials in several variables", J. Math. Anal. Appl. (accepted for publication, January 11, 2005).

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1991 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1995 yılında Matematikçi ünvanıyla mezun oldu. Eylül 1999 yılında Yüksek Lisans öğrenimini Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda tamamlayarak 1999 yılında yine aynı enstitüde Doktora öğrenimine başladı.

Şubat 1996 da Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün Araştırma Görevliliği kadrosuna atandı. Eylül 1999 da 35. madde uyarınca Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde görevlendirildi. Halen aynı kuruluşta görev yapmaktadır.