ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

q-DOĞURUCU FONKSİYONLAR ve GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERGEOMETRİK POLİNOMLAR

Tümay GÜRLEK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2006

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

q-DOĞURUCU FONKSİYONLAR ve GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERGEOMETRİK POLİNOMLAR

Tümay GÜRLEK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümünde q-genişlemesinin önemi vurgulanmış, ikinci bölümünde çift katlı serileri içeren doğurucu fonksiyonlar üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde çok değişkenli ortogonal polinomlar için doğurucu fonksiyonlara değinilmiş ve bazı örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde q-analizi açıklanmış, bazı fonksiyonların ve teoremlerin q-genişlemeleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde hipergeometrik fonksiyonların bazı özellikleri ve bunların q-genişlemeleri verilmiştir.

Altıncı ve yedinci bölümlerde q-hipergeometrik ve q-jacobi polinomları için doğurucu fonksiyonlar elde edilmiştir.

2006, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Doğurucu Fonksiyon, Hipergeometrik Polinomlar, Jacobi Polinomları, q-Analoğu, q-Binom Teoremi.

ABSTRACT

Master Thesis

q-GENERATING FUNCTIONS and
GENERALIZED HYPERGEOMETRIC POLYNOMIALS

Tümay GÜRLEK

Ankara University
Institute of Science
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter, importance of q-extension is stressed, in the second chapter, generating functions involving double series are focused.

In the third chapter, some families of generating functions for the multiple orthogonal polynomials are mentioned and some samples are given.

In the fourth chapter, q-extension is explained and q-extensions of some functions and theorems are obtained.

In the fifth chapter, some characteristics of hypergeometric functions and q-extensions of them are given.

In the sixth and seventh chapters, generating functions for q-hypergeometric and q-jacobi polynomials are obtained.

2006, 63 pages

Key Words: Generating Function, Hypergeometric Polynomials, Jacobi Polynomials, q-Extension, q-Binomial Theorem.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Yrd. Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL' a ve bana desteklerinden dolayı aileme teşekkürlerimi sunarım.

Tümay GÜRLEK

Ankara, Kasım 2006

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi Polinomları
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre Polinomları
$[a]_q$	a tamsayısının q-analoğu
$[n]_q!$	$n!$ fonksiyonunun q-analoğu
Δ_q	q-fark operatörü
$[(\alpha)_k]_q$	Pochhammer sembolünün q-analoğu
$\Gamma_q(x)$	q-gamma fonksiyonu
$B_q(\alpha,\beta)$	q-beta fonksiyonu
${}_rF_s$	Genelleştirilmiş Hipergeometrik Polinomlar
${}_r\Phi_s$	Genelleştirilmiş q-Hipergeometrik Polinomlar
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x,q)$	q-Jacobi Polinomları

1. GİRİŞ

q-analizine yaklaşık 150 yıl öncesinden beri çalışılmaktadır. Son yıllarda oldukça büyük bir önem kazanmış, fonksiyonların ve bazı bağıntıların q-genişlemeleri elde edilmiştir. Özellikle ortogonal polinom aileleri için önem taşıyan doğurucu fonksiyonların da q-analogları incelenmektedir. 1980 den sonra q-analogları ile ilgili çalışmalar, H. M. Srivastava, E. H. Ismail, D. Moak, V. K. Jain ve T. Ernst gibi matematikçiler tarafından yapılmıştır.

Bu tezde, önce çift katlı serileri içeren doğurucu fonksiyonlar hakkında bilgi verilmiş (Srivastava *et al.* 2000) ve bilinen bazı polinomlar için uygulanmıştır. Sonra çok değişkenli ortogonal polinomlar için doğurucu fonksiyonlara değinilmiş ve örneklendirilmiştir. Sonra da q-analizinin nasıl ortaya çıktığı ve önemli bazı özellik ve teoremlerin q-analogları elde edilmiştir. Daha sonra ise genelleştirilmiş hipergeometrik polinomlara ait özellikler verilmiş ve bunların q-genişlemeleri yapılmıştır. Ardından genelleştirilmiş q-hipergeometrik polinomların bazı doğurucu fonksiyonları elde edilmiştir. En son olarak da q-Jacobi polinomları için bir doğurucu fonksiyon bulunmuştur.

2. ÇİFT KATLI SERİLERİ İÇEREN DOĞURUCU FONKSİYONLAR

$\{A_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ uygun bir çift katlı dizi olmak üzere, $S_{n,m}{}^{N}(z)$ polinomları,

$$S_{n,m}{}^{N}(z)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{N}\right]}\frac{(-n)_{Nk}}{k!}A_{m+n,k}z^{k} \qquad , \quad (m,n\in \mathrm{N}_0 , N\in \mathrm{N}) \tag{2.1}$$

olarak tanımlansın. Bu bölümde $S_{n,m}{}^{N}(z)$ polinomlarını içeren doğurucu fonksiyonlar üzerinde durulacaktır. Bu nedenle aşağıdaki lemmalar verilecektir.

Lemma 2.1.

$$(-n)_{Nk}=\frac{(-1)^{Nk}n!}{(n-Nk)!} \qquad , \quad \left(0\le k\le \left[\frac{n}{N}\right]\right) \tag{2.2}$$

dir. Burada,

$$(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1) \tag{2.3}$$

olarak tanımlanan "Pochammer Sembolü" ve

$$\left[\frac{n}{N}\right]=\begin{cases}\dfrac{n-1}{N}, & n \ \ tek \ ise\\[2mm] \dfrac{n}{N}, & n \ \ çift \ ise\end{cases}$$

dir.

İspat: (2.3) eşitliğinden,

$$(-n)_{Nk}=(-n)(-n+1)\ldots(-n+Nk-1) \quad =(-1)^{Nk}n(n-1)\ldots(n-Nk+1)$$

$$=(-1)^{Nk}\frac{n!}{(n-Nk)!}$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Lemma 2.2.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(k,n-k) \tag{2.4}$$

ve

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B(k,n+k) \tag{2.5}$$

dir.

İspat:

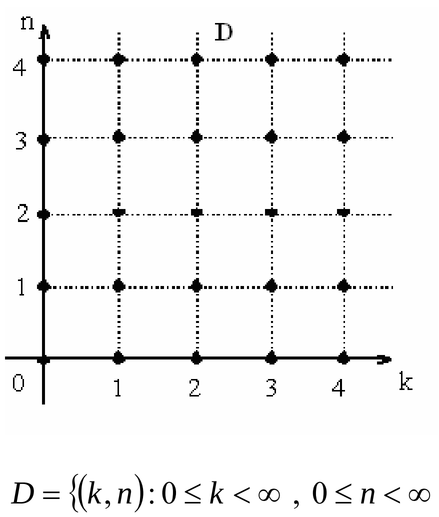
a) Düzlemde (k,n) doğal sayı çiftlerinin oluşturduğu bir nokta cümlesi,

$D=\{(k,n):0\le k<\infty\ ,\ 0\le n<\infty\,;\,n,k\in \mathrm{N}_0\}$

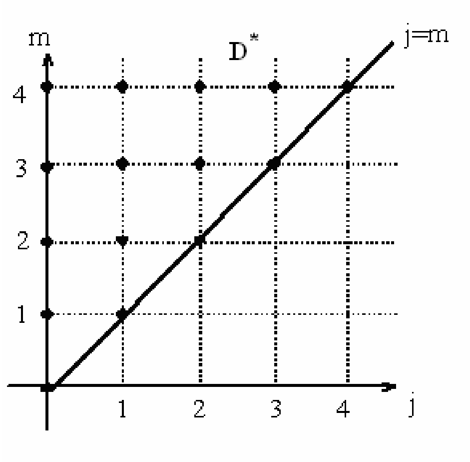
şeklinde tanımlansın. Burada yeni indisler $k=j$, $n=m-j$ olarak tanımlanırsa D cümlesi,

$D^{*}=\{(j,m):0\le j\le m\ ,\ 0\le m<\infty\,;\,j,m\in \mathrm{N}_0\}$

cümlesine dönüşür. Bu dönüşüm geometrik olarak şu şekilde gösterilebilir:



$D=\{(k,n):0\le k<\infty\ ,\ 0\le n<\infty\,;\,n,k\in \mathrm{N}_0\}$



$$D^* = \{(j,m) : 0 \le j \le m \ , \ 0 \le m < \infty \ ; \ j,m \in \mathrm{N}_0 \ \}$$

Buna göre,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} A(j,m-j)$$

yazılabilir. m, j indisleri yerine sırasıyla n, k indisleri konulursa istenilen elde edilir.

b) Önceki eşitlikte, $A(k,n-k) = B(k,n)$ alınması yeterlidir

Lemma 2.3.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A(k,n-2k) \tag{2.6}$$

ve

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} A(k,n-pk) \tag{2.7}$$

dir.

İspat:

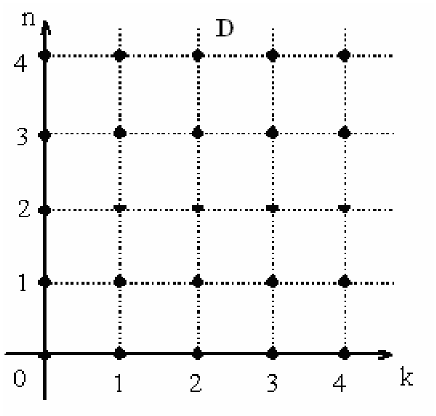
a) Düzlemde (k,n) doğal sayı çiftlerinin oluşturduğu bir nokta cümlesi,

$D = \{(k,n): 0 \le k < \infty \ , \ 0 \le n < \infty \, ; n,k \in \mathrm{N}_0 \}$

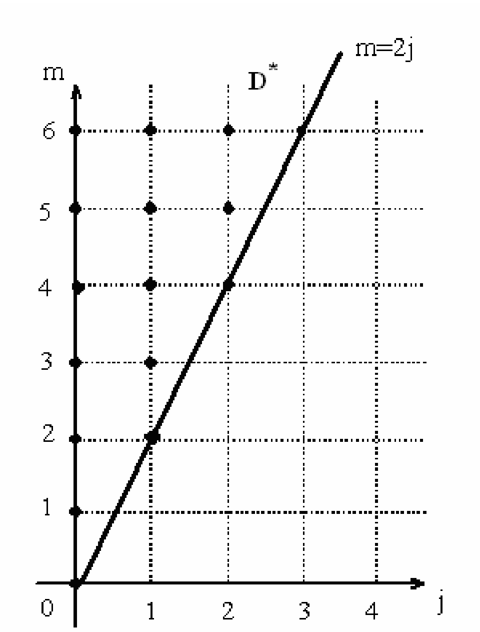
şeklinde tanımlansın. Burada yeni indisler $k = j$, $n = m - 2j$ olarak tanımlanırsa D cümlesi,

$$D^* = \left\{ (j,m): 0 \le j \le \frac{m}{2} \ , \ 0 \le m < \infty \, ; \ j,m \in \mathrm{N}_0 \right\}$$

cümlesine dönüşür. Bu dönüşüm geometrik olarak şu şekilde gösterilebilir:



$D = \{(k,n): 0 \le k < \infty \ , \ 0 \le n < \infty \, ; n,k \in \mathrm{N}_0 \}$



$$D^* = \left\{ (j,m): 0 \le j \le \frac{m}{2} , 0 \le m < \infty \, ; \ j,m \in \mathrm{N}_0 \right\}$$

Buna göre,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}A(j,m-2j)$$

yazılabilir. m, j indisleri yerine sırasıyla n, k indisleri konulursa (2.6) eşitliği elde edilir.

b) Önceki eşitlikte $k=j$, $n=m-pj$ olarak tanımlanırsa, (2.7) eşitliği elde edilir.

Lemma 2.4.

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty} f(m)\frac{(x+y)^m}{m!} \tag{2.8}$$

dir. Burada $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklinde bir dizidir.

İspat: (2.8) eşitliğinin sol tarafı,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(m+n)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

şeklinde yazılır ve bu eşitliğin sağ tarafında (2.4) eşitliğinden yararlanılarak m yerine $m-n$ yazılırsa,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty} f(m)\sum_{n=0}^{m}\frac{x^{m-n}}{(m-n)!}\frac{y^n}{n!}$$

bulunur. Burada $(x+y)^m=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^{m-n}y^n$ sonlu binom teoremi kullanılırsa,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty} f(m)\frac{(x+y)^m}{m!}$$

elde edilir**.** Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n) S_{n,m}^{N}(z) \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+nN) A_{m+nN,n} \frac{(x+y)^m}{m!} \frac{\{(-y)^N z\}^n}{n!} \qquad (2.9)$$

dır. Burada $S_{n,m}^{N}(z)$ ler (2.1) de tanımlandığı gibidir.

İspat:

(2.9) eşitliğinin sol tarafına $\Delta(x,y,z)$ denir ve $S_{n,m}^{N}(z)$ polinomları yerine yazılırsa

$$\Delta(x,y,z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n) \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{N}\right]} \frac{(-n)_{Nk}}{k!} A_{m+n,k} z^k \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

olur. Burada (2.2) eşitliği kullanılır ve (2.7) göz önüne alınırsa,

$$\Delta(x,y,z) = \sum_{n,m,k=0}^{\infty} f(m+n+Nk)(-1)^{Nk} \frac{(n+Nk)!}{n!} A_{m+n+Nk,k} z^k \frac{x^m}{m!} \frac{y^{n+Nk}}{(n+Nk)!\,k!}$$

bulunur. (2.4) ten yararlanılarak m yerine $m-n$ yazılırsa,

$$\Delta(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} f(m+Nk) \frac{m!}{(m-n)!\,n!} x^{m-n} y^n \frac{1}{m!} \frac{\{(-y)^N z\}^k}{k!} A_{m+Nk,k}$$

elde edilir. Sonlu binom teoreminden,

$$\Delta(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m+Nk) \frac{(x+y)^m}{m!} \frac{\{(-y)^N z\}^k}{k!} A_{m+Nk,k}$$

elde edilir. k yerine n alınırsa teorem ispatlanır.

Sonuç 2.1.

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n) S_{n,m}^{N}(z) \frac{x^m}{m!} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nN) A_{nN,n} \frac{(x^N z)^n}{n!} \qquad (2.10)$$

dir.

İspat: (2.9) da $y=-x$ alınırsa,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n) S_{n,m}^{N}(z) \frac{x^m}{m!} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+nN) A_{m+nN,n} \frac{(x-x)^m}{m!} \frac{(x^N z)^n}{n!}$$

olur. Burada $m=0$ için bir terim sıfırdan farklı, diğerleri ise sıfırdır. Bu ise ispatı tamamlar.

Özel olarak (2.10) da $f(t)=\dfrac{1}{A_{t,n}}$ alınırsa,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{A_{m+n,n}} S_{n,m}^{N}(z) \frac{x^m}{m!} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{A_{nN,n}} A_{nN,n} \frac{(x^N z)^n}{n!}$$

$$= e^{x^N z}$$

elde edilir.

Sonuç 2.2. Jacobi Polinomları,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+\beta+1)_{2n}}{(\alpha+\beta+1)_n\, n!} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (-\beta-n)_k}{(-\alpha-\beta-2n)_k\, k!} \left(\frac{2}{1+x}\right)^k$$

olmak üzere; $P_n^{(\alpha+m,\beta+m)}(z)$ Jacobi Polinomları için bir doğurucu fonksiyon,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n)(\alpha+\beta+m+n+1)_m P_n^{(\alpha+m,\beta+m)}(z) \frac{x^m}{m!} \left(\frac{-2x}{1+z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{(\beta+1)_n}{n!} \left(\frac{2x}{1+z}\right)^n \qquad (2.11)$$

dır.

İspat: Özel olarak,

$$A_{m,n} = \frac{(\alpha+\beta+1)_{2m} (-\beta-m)_n}{(\alpha+\beta+1)_m (-\alpha-\beta-2m)_n} \qquad (m,n\in \mathrm{N}_0),\; N=1 \text{ ve } z \text{ yerine } \frac{2}{1+z}$$

alınır ve (2.1) de yerine yazılırsa,

$$S_{n,m}^{1}\left(\frac{2}{1+z}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{k!}\frac{(\alpha+\beta+1)_{2m+2n}(-\beta-m-n)_k}{(\alpha+\beta+1)_{m+n}(-\alpha-\beta-2m-2n)_k}\left(\frac{2}{1+z}\right)^k \tag{2.12}$$

bulunur. Burada $(-n)_k=(-n)(-n+1)\ldots(-n+k-1)$ ifadesi $k=n+1,n+2,\ldots$ için sıfır olduğundan toplam, $k=0$ dan $k=\infty$ a kadar yazılabilir. Diğer yandan,

$$\frac{(\alpha+\beta+1)_{2m+2n}}{(\alpha+\beta+1)_{m+n}}=\frac{(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+m+n)(\alpha+\beta+m+n+1)\ldots(\alpha+\beta+2m+2n)}{(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+m+n)}$$

$$=(\alpha+\beta+m+n+1)\ldots(\alpha+\beta+2m+n)(\alpha+\beta+2m+n+1)\ldots(\alpha+\beta+2m+2n)$$

dır. Eşitliğin sağ tarafı $(\alpha+\beta+2m+1)_n$ ile çarpılıp bölünürse,

$$\frac{(\alpha+\beta+1)_{2m+2n}}{(\alpha+\beta+1)_{m+n}}=(\alpha+\beta+m+n+1)_m\frac{(\alpha+\beta+2m+1)_{2n}}{(\alpha+\beta+2m+1)_n}$$

bulunur. Bu ifade (2.12) de kullanılırsa,

$$S_{n,m}^{1}\left(\frac{2}{1+z}\right)=(\alpha+\beta+m+n+1)_m\frac{(\alpha+\beta+2m+1)_{2n}}{(\alpha+\beta+2m+1)_n}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k}{k!}\frac{(-(\beta+m)-n)_k}{(-(\alpha+m)-(\beta+m)-2n)_k}\left(\frac{2}{1+z}\right)^k$$

elde edilir. Bu eşitliğin ikinci yanı $n!\left(\frac{2}{1+z}\right)^n$ ile çarpılıp bölünürse,

$$=n!\left(\frac{2}{1+z}\right)^n(\alpha+\beta+m+n+1)_m\frac{(\alpha+\beta+2m+1)_{2n}}{(\alpha+\beta+2m+1)_n\,n!}\left(\frac{1+z}{2}\right)^n$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k}{k!}\frac{(-(\beta+m)-n)_k}{(-(\alpha+m)-(\beta+m)-2n)_k}\left(\frac{2}{1+z}\right)^k$$

bulunur. Burada $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomlarının tanımı dikkate alınırsa,

$$S_{n,m}^{1}\left(\frac{2}{1+z}\right)=n!(\alpha+\beta+m+n+1)_m\left(\frac{2}{1+z}\right)^n P_n^{(\alpha+m,\beta+m)}(z)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$A_{n,n} = \dfrac{(\alpha+\beta+1)_{2n}(-\beta-n)_n}{(\alpha+\beta+1)_n(-\alpha-\beta-2n)_n}$ seçilir ve bu ifade Pochhammer sembolü dikkate

alınarak hesaplanırsa,

$$A_{n,n} = \frac{(\alpha+\beta+1)\cdots(\alpha+\beta+2n)(-1)^n(\beta+n)\ldots(\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+n)(-1)^n(\alpha+\beta+2n)\ldots(\alpha+\beta+n+1)}$$

$$= (\beta+1)_n$$

olur. $S^1_{n,m}\left(\dfrac{2}{1+z}\right)$ polinomları ve $A_{n,n}$ ifadesi (2.10) da yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n) n!(\alpha+\beta+m+n+1)_m \left(\frac{2}{1+z}\right)^n P_n^{(\alpha+m,\beta+m)}(z)\frac{x^m}{m!}\frac{(-x)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(\beta+1)_n \left(x\frac{2}{1+z}\right)^n \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n)(\alpha+\beta+m+n+1)_m P_n^{(\alpha+m,\beta+m)}(z)\frac{x^m}{m!}\left(\frac{-2x}{1+z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{(\beta+1)_n}{n!}\left(\frac{2x}{1+z}\right)^n$$

elde edilir ki bu ise $P_n^{(\alpha+m,\beta+m)}(z)$ Jacobi polinomları için bir doğurucu fonksiyondur.

Özel olarak (2.11) de $f=1$ alınırsa,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} (\alpha+\beta+m+n+1)_m P_n^{(\alpha+m,\beta+m)}(z)\frac{x^m}{m!}\left(\frac{-2x}{1+z}\right)^n = {}_1F_0\left(\beta+1,-,\frac{2x}{1+z}\right)$$

elde edilir.

$f = \dfrac{1}{(\beta+1)_n}$ alınırsa,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+m+n+1)_m}{(\beta+1)_{m+n}}P_n^{(\alpha+m,\beta+m)}(z)\frac{x^m}{m!}\left(\frac{-2x}{1+z}\right)^n=e^{\frac{2x}{1+z}}$$

elde edilir.

Sonuç 2.3. Laguerre Polinomları,

$$L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{(-z)^n}{n!}{}_2F_0\left(-n,-\alpha-n,-,\frac{-1}{z}\right)=\frac{(-z)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(-\alpha-n)_k}{k!}\left(\frac{-1}{z}\right)^k$$

olmak üzere; $L_n^{(\alpha+m)}(z)$ Laguerre Polinomları için bir doğurucu fonksiyon,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}f(m+n)L_n^{(\alpha+m)}(z)\frac{x^m}{m!}\left(\frac{x}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\left(\frac{x}{z}\right)^n \tag{2.13}$$

dır.

İspat:

$A_{m,n}=(-\alpha-m)_n \qquad (m,n\in N_0),\quad N=1 \quad$ ve $\quad z$ yerine $\dfrac{-1}{z}$

alınır ve (2.1) de yerine yazılırsa,

$$S_{n,m}^{1}\left(\frac{-1}{z}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k}{k!}(-\alpha-m-n)_k\left(\frac{-1}{z}\right)^k$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}A_{n,n}= \quad (-\alpha-n)_n&=(-\alpha-n)(-\alpha-n+1)\cdots(-\alpha-1)\\&=(-1)^n(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+1)\\&=(-1)^n(\alpha+1)_n\end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınır, bu ifadeler (2.10) da yerlerine yazılır ve $(-z)^n$ ile çarpılıp bölünürse,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k}{k!}(-\alpha-m-n)_k\left(\frac{-1}{z}\right)^k \frac{x^m}{m!}\frac{(-x)^n}{n!}\frac{(-z)^n}{(-z)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-1)^n \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\left(\frac{-x}{z}\right)^n$$

elde edilir. Burada Laguerre polinomlarının tanımı dikkate alınırsa,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(m+n)L_n^{(\alpha+m)}(z)\frac{x^m}{m!}\left(\frac{x}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\left(\frac{x}{z}\right)^n$$

$L_n^{(\alpha+m)}(z)$ Laguerre polinomları için bir doğurucu fonksiyon elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3. ÇOK DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR İÇİN DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Teorem A. (Coussement *et al.* 2001)

$x \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n-1}^{\alpha}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \rho_{\upsilon}\left(\frac{x}{1-t}\right), \qquad \operatorname{Re} x \geq 0 \ (x \neq 0), \ |t| < \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

dir. Burada eğer $\operatorname{Re} x < 0$, $\operatorname{Im} x \neq 0$ ve $|t| < \dfrac{|\operatorname{Im} x|}{|x| + |\operatorname{Im} x|}$ dir ve de

$$Q_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (\alpha + k + 1)_{n-k+1} (-x)^k \rho_{\upsilon - k}(x) \quad \text{dir.}$$

Teorem B. (Coussement *et al.* 2001)

$P_n^{\alpha}(x)$ polinomları için bir doğurucu fonksiyon,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{\alpha}(x)}{(\alpha+1)_n (\alpha + \upsilon + 1)_n} \frac{t^n}{n!} = e^{-t} {}_0F_2(-; \alpha + 1, \alpha + \upsilon + 1; xt) \quad , \ x, t \in \mathbb{C} \tag{3.2}$$

olarak verilir.

Teorem 3.1. (Altın *et al.* 2004) $\Omega_{\mu}(\xi_1, \ldots, \xi_s)$, μ-yüncü basamaktan ve s $(s \in \mathrm{N})$ değişkenli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\Lambda_{\psi,\mu}^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_s; \tau) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu + \psi k}(\xi_1, \ldots, \xi_s) \tau^k \quad ; \qquad (a_k \neq 0, \psi \in \mathbb{C}) \tag{3.3}$$

$$\Theta_{n,r}^{\mu,\lambda,\psi}(x; \xi_1, \ldots, \xi_s; \zeta) := \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]} \frac{n!}{(n - rk)!} a_k Q_{n-rk-1}^{\alpha + \lambda k}(x) \Omega_{\mu + \psi k}(\xi_1, \ldots, \xi_s) \zeta^k \quad ,$$

$$(n, r \in \mathrm{N}; \alpha + \lambda k > -1) \tag{3.4}$$

olarak tanımlansınlar. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,r}^{\mu,\lambda,\psi}\left(x;\xi_1,\ldots,\xi_s;\frac{\eta}{t^r}\right)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\rho_{\upsilon}\left(\frac{x}{1-t}\right)\Lambda_{\psi,\mu}^{(1)}\left(\xi_1,\ldots,\xi_s;\frac{\eta}{(1-t)^{\lambda}}\right) \tag{3.5}$$

dir. Burada,

$\operatorname{Re}x\geq 0\ (x\neq 0)$, $|t|<\frac{1}{2}$ dir. Eğer $\operatorname{Re}x<0$ ve $\operatorname{Im}x\neq 0$ ise $|t|<\frac{|\operatorname{Im}x|}{|x|+|\operatorname{Im}x|}$ dir.

İspat: (3.5) eşitliğinin sol tarafına $\Delta(x,t)$ denir ve $\Theta_{n,r}^{\mu,\lambda,\psi}(x;\xi_1,\ldots,\xi_s;\zeta)$ ifadesi (3.5) te yerine yazılırsa,

$$\Delta(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]}\frac{n!}{(n-rk)!}a_k Q_{n-rk-1}^{\alpha+\lambda k}(x)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\ldots,\xi_s)\frac{\eta^k}{t^{rk}}\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Burada (2.7) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\Delta(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\ldots,\xi_s)\eta^k\sum_{n=0}^{\infty}Q_{n-1}^{\alpha+\lambda k}(x)\frac{t^n}{n!}$$

olur. (3.1) de α yerine $\alpha+\lambda k$, $(k\in \mathrm{N}_0)$ alınır ve yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında yerine yazılırsa,

$$\Delta(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\ldots,\xi_s)\eta^k\frac{1}{(1-t)^{\lambda k+\alpha+1}}\rho_{\upsilon}\left(\frac{x}{1-t}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\ldots,\xi_s)\left\{\frac{\eta}{(1-t)^{\lambda}}\right\}^k\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\rho_{\upsilon}\left(\frac{x}{1-t}\right)$$

bulunur. (3.3) eşitliğinden,

$$\Delta(x,t)=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\rho_{\upsilon}\left(\frac{x}{1-t}\right)\Lambda_{\psi,\mu}^{(1)}\left(\xi_1,\ldots,\xi_s;\frac{\eta}{(1-t)^{\lambda}}\right)$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Teorem 3.2. (Altın *et al.* 2004) $\Omega_{\mu}(\xi_1,\ldots,\xi_s)$, μ-yüncü basamaktan ve s $(s\in\mathrm{N})$ değişkenli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\Lambda^{(2)}_{\psi,\mu}(\xi_1,\ldots,\xi_s;\tau):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\ldots,\xi_s)\tau^k \quad ; \qquad (a_k\neq 0,\psi\in\mathbb{C}) \tag{3.6}$$

$$\Phi^{\mu,\psi}_{n,r}(x;\xi_1,\ldots,\xi_s;\zeta):=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]}\frac{n!}{(n-rk)!}a_kP^{\alpha}_{n-rk}(x)\frac{\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\ldots,\xi_s)\zeta^k}{(\alpha+1)_{n-rk}(\alpha+\upsilon+1)_{n-rk}} \quad ,$$

$$(n,r\in\mathrm{N};x\in\mathbb{C}) \tag{3.7}$$

olarak tanımlansınlar. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi^{\mu,\psi}_{n,r}\left(x;\xi_1,\ldots,\xi_s;\frac{\eta}{t^r}\right)\frac{t^n}{n!}=e^{-t}\,{}_0F_2(-;\alpha+1,\alpha+\upsilon+1;xt)\Lambda^{(2)}_{\psi,\mu}(\xi_1,\ldots,\xi_s;\eta) \tag{3.8}$$

dir.

İspat: (3.8) eşitliğinin sol tarafına $\Delta(x,t)$ denir ve $\Phi^{\mu,\psi}_{n,r}(x;\xi_1,\ldots,\xi_s;\zeta)$ ifadesi (3.8) de yerine yazılırsa,

$$\Delta(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]}\frac{n!}{(n-rk)!}a_kP^{\alpha}_{n-rk}(x)\frac{\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\ldots,\xi_s)\eta^k t^{-rk}}{(\alpha+1)_{n-rk}(\alpha+\upsilon+1)_{n-rk}}\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Burada (2.7) göz önüne alınırsa,

$$\Delta(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\ldots,\xi_s)\eta^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P^{\alpha}_n(x)}{(\alpha+1)_n(\alpha+\upsilon+1)_n}\frac{t^n}{n!}$$

olur. (3.2) ve (3.6) eşitliklerinden,

$$\Delta(x,t)=e^{-t}\,{}_0F_2(-;\alpha+1,\alpha+\upsilon+1;xt)\Lambda^{(2)}_{\psi,\mu}(\xi_1,\ldots,\xi_s;\eta)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örneğin Teorem 3.1 de $s=1$, $\xi_1=z$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(z)=y_m(z;\mu+\psi k,\beta)$ alınırsa $Q^{\alpha+\lambda k}_{n-rk-1}(x)$ ya da $y_m(z;\mu+\psi k,\beta)$ polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfı elde edilir. Burada,

$\operatorname{Re}x\geq 0\ (x\neq 0)$, $|t|<\frac{1}{2}$ dir. Eğer $\operatorname{Re}x<0$ ve $\operatorname{Im}x\neq 0$ ise $|t|<\frac{|\operatorname{Im}x|}{|x|+|\operatorname{Im}x|}$ ve

$y_m(z;\alpha,\beta) = {}_2F_0\left(-m,\alpha+m-1;-;\frac{-x}{\beta}\right)$ genelleştirilmiş Bessel polinomlarıdır.

Sonuç 3.1. Eğer

$$\Pi^{(1)}_{\psi,\mu,m}(z;\tau) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_m(z;\mu+\psi k,\beta)\tau^k \quad ; \qquad (a_k \neq 0,\ \psi,\mu,\beta \in \mathbb{C}) \tag{3.9}$$

ve

$$\Psi^{(1)}_{\mu,\psi,\lambda,n,r}(x,z,\zeta) := \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]} \frac{n!}{(n-rk)!} a_k Q^{\alpha+\lambda k}_{n-rk-1}(x) y_m(z;\mu+\psi k,\beta)\zeta^k,\ (n,r \in \mathrm{N};\lambda \in \mathbb{C}) \tag{3.10}$$

ise, o takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi^{(1)}_{\mu,\psi,\lambda,n,r}\left(x,z,\frac{\eta}{t^r}\right)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \rho_\upsilon\left(\frac{x}{1-t}\right) \Pi^{(1)}_{\psi,\mu,m}\left(z;\frac{\eta}{(1-t)^\lambda}\right) \tag{3.11}$$

dir.

Örnek 3.1. Genelleştirilmiş Bessel polinomlarının bir doğurucu fonksiyonunun

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu+m+k-2}{k} y_m(z;\mu+k,\beta)\tau^k = (1-\tau)^{1-\mu-m} y_m\left(\frac{z}{1-\tau};\mu,\beta\right), \quad |\tau|<1 \tag{3.12}$$

olduğu bilinmektedir (Srivastava *et al.* 2003) .

(3.11) eşitliğinde, $\psi = 1$, $a_k = \binom{\mu+m+k-2}{k}$ alınır ve (3.9) ve (3.10) eşitlikleri burada yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]} \frac{n!}{(n-rk)!} \binom{\mu+m+k-2}{k} Q^{\alpha+\lambda k}_{n-rk-1}(x) y_m(z;\mu+k,\beta) \frac{\eta^k}{t^{rk}} \frac{t^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \rho_\upsilon\left(\frac{x}{1-t}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu+m+k-2}{k} y_m(z;\mu+k,\beta) \frac{\eta^k}{(1-t)^{\lambda k}}$$

olur. (3.12) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]}\frac{n!}{(n-rk)!}\binom{\mu+m+k-2}{k}Q_{n-rk-1}^{\alpha+\lambda k}(x)y_m(z;\mu+k,\beta)\eta^k t^{n-rk}$$

$$=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\rho_\upsilon\left(\frac{x}{1-t}\right)\left(1-\frac{\eta}{(1-t)^\lambda}\right)^{1-\mu-m}y_m\left(\frac{z(1-t)^\lambda}{(1-t)^\lambda-\eta};\mu,\beta\right)\quad,\quad\left|\frac{\eta}{(1-t)^\lambda}\right|<1$$

elde edilir.

Benzer şekilde Teorem 3.1 de $s=1,\quad \xi_1=z$ ve

$\Omega_{\mu+\psi k}(z)=Q_N^{\mu+\psi k}(z),\quad \left(k,N\in \mathrm{N}_0,\mu+\psi k>-1\right)$ alınırsa, çok değişkenli ortogonal polinomlar için bilineer doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki gibi elde edilir.

Sonuç 3.2.

$$\Pi_{\psi,\mu,N}^{(2)}(z;\tau):=\sum_{k=0}^{\infty}a_kQ_N^{\mu+\psi k}(z)\tau^k\ ,\quad (a_k\neq 0)$$

ve

$$\Psi_{\mu,\psi,\lambda,n,r}^{(2)}(x,z,\zeta):=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]}\frac{n!}{(n-rk)!}a_kQ_{n-rk-1}^{\alpha+\lambda k}(x)Q_N^{\mu+\psi k}(z)\zeta^k\quad,\quad (n,r\in\mathrm{N},\lambda\in R)$$

ise, o takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{\mu,\psi,\lambda,n,r}^{(2)}\left(x,z,\frac{\eta}{t^r}\right)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\rho_\upsilon\left(\frac{x}{1-t}\right)\Pi_{\psi,\mu,N}^{(2)}\left(z;\frac{\eta}{(1-t)^\lambda}\right)\tag{3.13}$$

dir.

Diğer taraftan Teorem 3.2 de $s=1,\quad \xi_1=z$ ve

$\Omega_{\mu+\psi k}(z)=Q_N^{\mu+\psi k}(z),\quad \left(k,N\in \mathrm{N}_0,\mu+\psi k>-1\right)$ alınırsa,

$P_{n-rk}^{\alpha}(x)$ ya da $Q_N^{\mu+\psi k}(z)$ polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfı elde edilir.

Sonuç 3.3.

$$\Pi_{\psi,\mu,N}^{(3)}(z;\tau):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_N^{\mu+\psi k}(z)\tau^k\ , \quad (a_k \neq 0)$$

ve

$$\Psi_{\mu,\psi,\lambda,n,r}^{(3)}\left(x;z,\frac{\eta}{t^r}\right):=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]}\frac{n!}{(n-rk)!}a_k P_{n-rk}^{\alpha}(x)\frac{Q_N^{\mu+\psi k}(z)\zeta^k}{(\alpha+1)_{n-rk}(\alpha+\upsilon+1)_{n-rk}}\ , \quad (n,r\in \mathrm{N})$$

ise, o takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{\mu,\psi,\lambda,n,r}^{(3)}\left(x,z,\frac{\eta}{t^r}\right)\frac{t^n}{n!}=e^{-t}\,{}_0F_2(-;\alpha+1,\alpha+\upsilon+1;xt)\Pi_{\psi,\mu,N}^{(3)}(z;\tau) \tag{3.14}$$

elde edilir.

4. q-SERİLERİ

4.1 q-Serilerine Giriş

Matematiksel ifadelerin q-analoğunda bazen $q = 1$, bazen de $q \to 1$ alındığında ifadenin kendisi elde edilir. Bu bölümde bazı fonksiyonların q-genişlemeleri elde edilecektir.

$$yx = qxy \tag{4.1.1}$$

ve q ları bir araya toplamak için,

$$yq = qy \quad , \quad xq = qx \tag{4.1.2}$$

eşitlikleri gerçeklensin. Ayrıca

$$(a,q)_k := \begin{cases} \prod_{n=0}^{k-1}\left(1-aq^n\right), & k = 1,2,\ldots\ ise \\ 1, & k = 0\ ise \end{cases} \tag{4.1.3}$$

$$(a,q)_\infty := \prod_{n=0}^{\infty}\left(1-aq^n\right) \qquad , 0 < q < 1 \tag{4.1.4}$$

$$(q,q)_k = \prod_{n=1}^{k}\left(1-q^n\right) \tag{4.1.5}$$

olarak tanımlanırlar (Andrews *et al.* 1999).

Sonlu binom teoreminden,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \ , \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

olduğu bilinmektedir.

Şimdi q-binom katsayılarının ispatında gerekli olan bir lemma verilecektir.

Lemma 4.1.1.

$$y^k x = q^k xy^k \tag{4.1.6}$$

dır.

İspat: (4.1.1) ve (4.1.2) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} y^k x &= y^{k-1} yx = y^{k-1} qxy = qy^{k-2} yxy = q^2 y^{k-2} xy^2 = q^2 y^{k-3} yxy^2 = q^3 y^{k-3} xy^3 \\ &= \ldots = q^k y^{k-k} xy^k = q^k xy^k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.1. (Andrews *et al.* 1999)

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ ile gösterilen q-binom katsayıları;

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q,q)_n}{(q,q)_k (q,q)_{n-k}} \tag{4.1.7}$$

şeklindedir.

İspat: Öncelikle,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k \tag{4.1.8}$$

olarak tanımlansın .

$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$ eşitliğinde (4.1.8) tanımı dikkate alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k (x+y)$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k x + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^{k+1}$$

elde edilir. Burada Lemma 4.1.1 den dolayı yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k+1} y^k q^k + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q x^{n-k+1} y^k$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafta $x^{n+1-k} y^k$ nın katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{4.1.9}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.1.8) ifadesi

$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q y x^{n-k} y^k$$

bulunur. Yine Lemma 4.1.1 den,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k+1} y^k + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{n-k+1} x^{n-k+1} y^k$$

bulunur. Her iki tarafta $x^{n+1-k} y^k$ nın katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{4.1.10}$$

elde edilir. (4.1.9) ve (4.1.10) eşitliklerinden,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q^k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \\
&= \frac{\left(1-q^{n-k+1}\right)\left(1-q^{n-k+2}\right)}{\left(1-q^k\right)\left(1-q^{k-1}\right)} \begin{bmatrix} n \\ k-2 \end{bmatrix}_q \\
&= \frac{\left(1-q^{n-k+1}\right)\left(1-q^{n-k+2}\right)\ldots\left(1-q^n\right)}{\left(1-q^k\right)\left(1-q^{k-1}\right)\ldots(1-q)} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q \\
&= \frac{\left(1-q^{n-k+1}\right)\ldots\left(1-q^n\right)}{\left(1-q^k\right)\ldots(1-q)}
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı $(1-q)\ldots\left(1-q^{n-k}\right)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q)\ldots\left(1-q^{n-k}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)\ldots\left(1-q^n\right)}{(1-q)\ldots\left(1-q^k\right)(1-q)\ldots\left(1-q^{n-k}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q,q)_n}{(q,q)_k\,(q,q)_{n-k}} \tag{4.1.11}$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

i negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, i tamsayısının q-analoğu $[i]_q$ ile gösterilir ve

$$[i]_q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{i-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^i}{1-q}, & q \neq 1 \ ise \\ i, & q = 1 \ ise \end{cases} \tag{4.1.12}$$

şeklinde tanımlanır. n faktöriyelin q-analoğu ise (4.1.12) den,

$$\begin{aligned}
[n]_q! &= [1]_q [2]_q \ldots [n]_q \\
&= 1(1+q)\left(1+q+q^2\right)\ldots\left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Eşitliğin sağ tarafı n tane $(1-q)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$[n]_q! = \frac{(1-q)[(1-q)(1+q)][(1-q)(1+q+q^2)]\ldots[(1-q)(1+q+\ldots+q^{n-1})]}{(1-q)(1-q)\ldots(1-q)}$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots(1-q^n)}{(1-q)^n}$$

$$[n]_q! = \frac{(q,q)_n}{(1-q)^n} \tag{4.1.13}$$

olur. Bu durumda (4.1.11) eşitliği ile verilen q-binom katsayıları,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \tag{4.1.14}$$

şeklinde de yazılabilir.

Şimdi de sonlu binom teoreminin q-genişlemesinde kullanılacak olan lemmalar aşağıda verilecektir.

Lemma 4.1.2.

$$(xy)^k = q^{\frac{(k-1)k}{2}} x^k y^k \tag{4.1.15}$$

dır.

İspat: (4.1.1) ve (4.1.2) eşitlikleri kullanılarak,

$$(xy)^k = xyxyxy\ldots yxy$$

$$= xqxyqxy\ldots qxyy$$

$$= q^{k-1}x^2yxyx\ldots yxy^2$$

$$= q^{k-1}q^{k-2}x^2xyxy\ldots xyy^2$$

$$= q^{k-1}q^{k-2}x^3yxyx\ldots yxy^3$$

$$\ldots$$

$$= q^{k-1}q^{k-2}q^{k-3}\ldots q^2 q x^k y^k$$

$$= q^{\frac{(k-1)k}{2}} x^k y^k$$

elde edilir ki bu ise istenilendir.

Lemma 4.1.3.

$$(x+xy)^n = x^n\left(1+q^{n-1}y\right)\ldots\left(1+q^2y\right)(1+qy)(1+y) \tag{4.1.16}$$

dir.

İspat: (4.1.1) ve (4.1.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
(x+xy)^n &= (x+xy)\ldots(x+xy)(x+xy)(x+xy) \\
&= x(1+y)\ldots x(1+y)x(1+y)x(1+y) \\
&= x(1+y)\ldots x(1+y)x(x+yx)(1+y) \\
&= x(1+y)\ldots x(1+y)x(x+qxy)(1+y) \\
&= x(1+y)\ldots x(1+y)x^2(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)\ldots x(x+yx)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)\ldots x(x+qxy)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)\ldots x^2(1+qy)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)\ldots x^2(x+qyx)(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)\ldots x^2\left(x+q^2xy\right)(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)\ldots x^3\left(1+q^2y\right)(1+qy)(1+y) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

$$= x^n \left(1 + q^{n-1} y\right) \ldots \left(1 + q^2 y\right)\left(1 + qy\right)\left(1 + y\right)$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.2. (Andrews *et al.* 1999).

Sonlu binom teoreminin bir q-genişlemesi,

$$\left(x + y\right)\left(x + qy\right) \ldots \left(x + q^{n-1} y\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{(k-1)k}{2}} x^{n-k} y^k$$

dir.

İspat: (4.1.8) de y yerine xy yazılırsa,

$$\left(x + xy\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} \left(xy\right)^k$$

elde edilir. (4.1.15) ve (4.1.16) eşitlikleri yukarıda yerlerine yazılır ve her iki yan x^n ile bölünürse,

$$x^n \left(1 + q^{n-1} y\right) \ldots \left(1 + q^2 y\right)\left(1 + qy\right)\left(1 + y\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} x^k y^k q^{\frac{(k-1)k}{2}}$$

$$\left(1 + y\right)\left(1 + qy\right) \ldots \left(1 + q^{n-1} y\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{(k-1)k}{2}} y^k$$

elde edilir. Burada y yerine $\frac{y}{x}$ yazılırsa ve düzenlenirse,

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + q\frac{y}{x}\right) \ldots \left(1 + q^{n-1} \frac{y}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{(k-1)k}{2}} \left(\frac{y}{x}\right)^k$$

$$\left(x + y\right)\left(x + qy\right) \ldots \left(x + q^{n-1} y\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{(k-1)k}{2}} x^{n-k} y^k$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4.2 q-Binom Teoremi

Bu kısımda öncelikle q-binom teoreminin ispatında kullanılacak olan tanım ve lemmalar verilecektir.

Tanım 4.2.1. Δ_q ile gösterilen q-fark operatörü;

$$\Delta_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx} = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x} \tag{4.2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.2.1.

$$(a,q)_k = (1-a)(aq,q)_{k-1} \tag{4.2.2}$$

dir.

İspat: (4.1.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
(a,q)_k &= \prod_{n=0}^{k-1}\left(1-aq^n\right) \\
&= (1-a)\prod_{n=1}^{k-1}\left(1-aq^n\right) \\
&= (1-a)\prod_{n=0}^{k-2}\left(1-aq^{n+1}\right) \\
&= (1-a)(aq,q)_{k-1}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise istenilendir.

Lemma 4.2.2.

$$(q,q)_k = \left(1-q^k\right)(q,q)_{k-1} \tag{4.2.3}$$

dir.

İspat: (4.1.5) eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
(q,q)_k &= \prod_{n=1}^{k}\left(1-q^n\right) \\
&= \left(1-q^k\right)\prod_{n=1}^{k-1}\left(1-q^n\right) \\
&= \left(1-q^k\right)(q,q)_{k-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir, bu ise istenilendir.

Lemma 4.2.3

$$
(a,q)_k - (aq,q)_k = (-a)\left(1-q^k\right)(aq,q)_{k-1} \tag{4.2.4}
$$

dir.

İspat: (4.1.3) eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
(a,q)_k - (aq,q)_k &= \prod_{n=0}^{k-1}\left(1-aq^n\right) - \prod_{n=0}^{k-1}\left(1-aq^{n+1}\right) \\
&= \left\{(1-a)\prod_{n=1}^{k-1}\left(1-aq^n\right)\right\} - \left\{\left(1-aq^k\right)\prod_{n=0}^{k-2}\left(1-aq^{n+1}\right)\right\} \\
&= \left\{(1-a)\prod_{n=0}^{k-2}\left(1-aq^{n+1}\right)\right\} - \left\{\left(1-aq^k\right)\prod_{n=0}^{k-2}\left(1-aq^{n+1}\right)\right\} \\
&= \left(1-a-1+aq^k\right)\prod_{n=0}^{k-2}\left(1-aq^{n+1}\right) \\
&= (-a)\left(1-q^k\right)(aq,q)_{k-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir, bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.1. (q-Binom Teoremi) (Andrews *et al.* 1999)

$|x|<1$ ve $|q|<1$ için,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,q)_k}{(q,q)_k}x^k=\frac{(ax,q)_\infty}{(x,q)_\infty} \tag{4.2.5}$$

dir

İspat:

$$f_a(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,q)_k}{(q,q)_k}x^k \tag{4.2.6}$$

olsun. $f_a(x)$ fonksiyonuna q-fark operatörü uygulanır ve (4.2.6) eşitliği göz önünde tutulursa,

$$\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{(1-q)x}=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,q)_k}{(q,q)_k}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,q)_k}{(q,q)_k}(qx)^k}{(1-q)x}$$

$$\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,q)_k}{(q,q)_k}\left(1-q^k\right)x^{k-1}$$

bulunur. Burada (4.2.2) ve (4.2.3) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{x}&=(1-a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq,q)_{k-1}}{\left(1-q^k\right)(q,q)_{k-1}}\left(1-q^k\right)x^{k-1}\\&=(1-a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq,q)_k}{(q,q)_k}x^k\\&=(1-a)f_{aq}(x)\end{aligned}$$

$$f_a(x)-f_a(qx)=(1-a)xf_{aq}(x) \tag{4.2.7}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.2.6) dan dolayı,

$$f_a(x) - f_{aq}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a,q)_k}{(q,q)_k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq,q)_k}{(q,q)_k} x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a,q)_k - (aq,q)_k}{(q,q)_k} x^k$$

dır. (4.2.3) ve (4.2.4) eşitliklerinden dolayı,

$$f_a(x) - f_{aq}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-a)(1-q^k)(aq,q)_{k-1}}{(1-q^k)(q,q)_{k-1}} x^k$$

$$= -ax \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq,q)_{k-1}}{(q,q)_{k-1}} x^{k-1}$$

$$= -ax \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq,q)_k}{(q,q)_k} x^k$$

elde edilir. Burada (4.2.6) eşitliği kullanılır ve düzenlenirse,

$$f_a(x) - f_{aq}(x) = -ax f_{aq}(x)$$

$$f_a(x) = (1-ax) f_{aq}(x) \tag{4.2.8}$$

olur. (4.2.7) ve (4.2.8) ifadeleri taraf tarafa oranlanırsa,

$$\frac{f_a(x) - f_a(qx)}{f_a(x)} = \frac{(1-a)x}{1-ax}$$

$$1 - \frac{f_a(qx)}{f_a(x)} = \frac{(1-a)x}{1-ax}$$

$$\frac{f_a(qx)}{f_a(x)} = \frac{1-ax-x+ax}{1-ax}$$

$$f_a(x) = \frac{1-ax}{1-x} f_a(qx)$$

bulunur. Bu eşitlik ardışık olarak n kez tekrarlanırsa,

$$
\begin{aligned}
f_a(x) &= \frac{(1-ax)(1-aqx)}{(1-x)(1-qx)} f_a(q^2x) \\
&= \frac{(1-ax)(1-aqx)(1-aq^2x)}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)} f_a(q^3x) \\
&= \frac{(1-ax)(1-aqx)(1-aq^2x)\ldots(1-aq^{n-1}x)}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\ldots(1-q^{n-1}x)} f_a(q^nx) \\
&= \frac{(ax,q)_n}{(x,q)_n} f_a(q^nx)
\end{aligned}
$$

olur. Her iki yanın $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$f_a(x) = \frac{(ax,q)_\infty}{(x,q)_\infty} f_a(0)$$

bulunur. (4.2.6) dan dolayı $f_a(0) = 1$ olduğundan,

$$f_a(x) = \frac{(ax,q)_\infty}{(x,q)_\infty}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

q-binom teoreminin sonuçlarına geçmeden önce bu sonuçların ispatında kullanılacak olan lemmalar aşağıda verilecektir.

Lemma 4.2.4.

$$a^n\left(\frac{1}{a},q\right)_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(a-q^k\right) \tag{4.2.9}$$

dır.

İspat: (4.1.3) eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
a^n\left(\frac{1}{a},q\right)_n &= a^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{q^k}{a}\right) \\
&= a^n\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\left(a-q^k\right)}{a} \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\left(a-q^k\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir, bu ise istenilendir.

Lemma 4.2.5.

$$\frac{\left(q^{-N},q\right)_k}{(q,q)_k}=\frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{q^{Nk}}\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q \tag{4.2.10}$$

dır.

İspat: (4.1.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\frac{\left(q^{-N},q\right)_k}{(q,q)_k}&=\frac{\prod_{n=0}^{k-1}\left(1-q^{-N+n}\right)}{(q,q)_k}\\&=\frac{\left(1-q^{-N}\right)\left(1-q^{-N+1}\right)\ldots\left(1-q^{-N+k-1}\right)}{(q,q)_k}\\&=\frac{\frac{q^N-1}{q^N}\frac{q^{N-1}-1}{q^{N-1}}\cdots\frac{q^{N-k+1}-1}{q^{N-k+1}}}{(q,q)_k}\\&=\frac{(-1)^k\left(1-q^N\right)\left(1-q^{N-1}\right)\ldots\left(1-q^{N-k+1}\right)}{q^N q^{N-1}\ldots q^{N-k+1}(q,q)_k}\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı $(1-q)\ldots\left(1-q^{N-k}\right)$ ile çarpılıp bölünür ve (4.1.7) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\left(q^{-N},q\right)_k}{(q,q)_k}&=\frac{(-1)^k q\ldots q^{k-1}(q,q)_N}{q^{Nk}(q,q)_{N-k}(q,q)_k}\\&=\frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{q^{Nk}}\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q\end{aligned}$$

elde edilir, bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 4.2.6.

$$\frac{(x,q)_\infty}{(q^N x,q)_\infty}=(x,q)_N \tag{4.2.11}$$

dir.

İspat: (4.1.4) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\frac{(x,q)_\infty}{(q^N x,q)_\infty} &= \frac{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-xq^k\right)}{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-xq^{N+k}\right)}\\ &= \frac{(1-x)(1-xq)\ldots\left(1-xq^{N-1}\right)\left(1-xq^N\right)\ldots}{\left(1-xq^N\right)\left(1-xq^{N+1}\right)\ldots}\\ &= (1-x)(1-xq)\ldots\left(1-xq^{N-1}\right)\\ &= (x,q)_N\end{aligned}$$

elde edilir, bu ise istenilendir.

Lemma 4.2.7.

$$\frac{(q^N,q)_k}{(q,q)_k}=\begin{bmatrix}N+k-1\\ k\end{bmatrix}_q \tag{4.2.12}$$

dır.

İspat: (4.1.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\frac{(q^N,q)_k}{(q,q)_k} &= \frac{\prod_{n=0}^{k-1}\left(1-q^{N+n}\right)}{(q,q)_k}\\ &= \frac{\left(1-q^N\right)\left(1-q^{N+1}\right)\ldots\left(1-q^{N+k-1}\right)}{(q,q)_k}\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı $(1-q)\ldots(1-q^{N-1})$ ile çarpılıp bölünür ve (4.1.7) eşitliği kullanılırsa,

$$\frac{(q^N,q)_k}{(q,q)_k} = \frac{(1-q)\ldots(1-q^{N-1})(1-q^N)\ldots(1-q^{N+k-1})}{(1-q)\ldots(1-q^{N-1})\ (q,q)_k}$$

$$= \frac{(q,q)_{N+k-1}}{(q,q)_{N-1}(q,q)_k}$$

$$= \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.2.8.

$$\frac{(xq^N,q)_\infty}{(x,q)_\infty} = \frac{1}{(x,q)_N} \tag{4.2.13}$$

dır.

İspat: (4.1.4) eşitliğinden,

$$\frac{(xq^N,q)_\infty}{(x,q)_\infty} = \frac{\prod_{k=0}^{\infty}(1-xq^{N+k})}{\prod_{k=0}^{\infty}(1-xq^k)}$$

$$= \frac{(1-xq^N)(1-xq^{N+1})\ldots}{(1-x)(1-xq)\ldots(1-xq^{N-1})(1-xq^N)(1-xq^{N+1})\ldots}$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-xq)\ldots(1-xq^{N-1})}$$

$$= \frac{1}{(x,q)_N}$$

elde edilir, bu ise istenilendir.

Sonuç 4.2.1. (Andrews *et al.* 1999)

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(q,q)_k} = \frac{1}{(x,q)_\infty}, \qquad |x| < 1 , |q| < 1 \qquad$ (Euler)

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n}{(q,q)_n} = (x,q)_\infty , \qquad |q| < 1 \qquad$ (Euler)

(c) $\sum_{k=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k = (x,q)_N = (1-x)\ldots(1-xq^{N-1}), \qquad$ (Rothe)

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \frac{1}{(x,q)_N} = \frac{1}{(1-x)\ldots(1-xq^{N-1})}, \qquad |x| < 1$

dır. Burada q-binom katsayıları,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q,q)_n}{(q,q)_k (q,q)_{n-k}}$$

dır.

İspat:

(a) Teorem 4.2.1 de $a = 0$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0,q)_k}{(q,q)_k} x^k = \frac{(0,q)_\infty}{(x,q)_\infty}$$

olur. (4.1.3) ve (4.1.4) te $a = 0$ alınırsa $(0,q)_k$ ve $(0,q)_\infty$ değerleri 1 e eşit olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(q,q)_k} = \frac{1}{(x,q)_\infty}$$

bulunur.

(b) Teorem 4.2.1 de a yerine $\frac{1}{a}$, x yerine ax alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{a},q\right)_n}{(q,q)_n} a^n x^n = \frac{\left(\frac{1}{a}ax,q\right)_\infty}{(ax,q)_\infty}$$

elde edilir. (4.2.9) dan dolayı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(a-q^k\right) \frac{x^n}{(q,q)_n} = \frac{(x,q)_\infty}{(ax,q)_\infty}$$

elde edilir. Burada $a=0$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-q^k\right) \frac{x^n}{(q,q)_n} = \frac{(x,q)_\infty}{(0,q)_\infty}$$

olur. Diğer taraftan

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(-q^k\right) = (-1)(-q)\left(-q^2\right)\ldots\left(-q^{n-1}\right) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}$$

olduğu göz önüne alınırsa, yukarıdaki eşitlik,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n}{(q,q)_n} = (x,q)_\infty$$

şekline dönüşür. Bu ise istenilendir.

(c) Teorem 4.2.1 de a yerine q^{-N} ve x yerine $q^N x$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(q^{-N},q\right)_k}{(q,q)_k} q^{Nk} x^k = \frac{\left(q^{-N}q^N x,q\right)_\infty}{\left(q^N x,q\right)_\infty}$$

elde edilir. (4.2.10) ve (4.2.11) eşitlikleri yukarıda yerlerine yazılırlarsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{q^{Nk}} q^{Nk} x^k = (x,q)_N$$

olur. Bu toplamda $k=N$ den sonraki terimler sıfır olacağından,

$$\sum_{k=0}^{N}\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k = (x,q)_N$$

elde edilir. Bu ise (c) şıkkının ispatını verir.

(d) Teorem 4.2.1 de a yerine q^N alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^N,q)_k}{(q,q)_k}x^k = \frac{(xq^N,q)_\infty}{(x,q)_\infty}$$

elde edilir. (4.2.12) ve (4.2.13) eşitlikleri yukarıda göz önüne alınırlarsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \frac{1}{(x,q)_N}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.2.

Sonuç 4.2.1 in (a) şıkkında x yerine $(1-q)x$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q)^n x^n}{(q,q)_n} = \frac{1}{((1-q)x,q)_\infty}$$

elde edilir. Burada $[n]_q! = \dfrac{(q,q)_n}{(1-q)^n}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]_q!} = \frac{1}{((1-q)x,q)_\infty}$$

olur. Her iki yanın $q \to 1^-$ için limiti alınırsa,

$$e^x = \lim_{q\to 1^-}\frac{1}{((1-q)x,q)_\infty} \tag{4.2.14}$$

elde edilir ki bu ise e^x in bir q-analoğu dur. Benzer şekilde Sonuç 4.2.1 in (b) şıkkında x yerine $-(1-q)x$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}(-1)^n(1-q)^n x^n}{(q,q)_n}=(-(1-q)x,q)_\infty$$

elde edilir. Burada yine $[n]_q!=\dfrac{(q,q)_n}{(1-q)^n}$ olduğu kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{n}{2}}x^n}{[n]_q!}=(-(1-q)x,q)_\infty$$

olur. Her iki yanın $q\to 1^-$ için limiti alınırsa,

$$e^x=\lim_{q\to 1^-}(-(1-q)x,q)_\infty \tag{4.2.15}$$

elde edilir. (4.2.14) ve (4.2.15) teki fonksiyonlar aşağıdaki şekilde isimlendirilirler:

$$e_q(x):=\frac{1}{((1-q)x,q)_\infty}$$

$$E_q(x):=(-(1-q)x,q)_\infty$$

Böylece e^x üstel fonksiyonunun iki farklı q-analoğu elde edilmiş olur.

4.3 q-İntegrali

İlk önce Thomae 1869 yılında ve daha sonra da Jackson 1910 yılında q-integralini,

$$\int_0^a f(x)d_qx=\sum_{n=0}^{\infty}f(aq^n)(aq^n-aq^{n+1}) \tag{4.3.1}$$

olarak tanımlamışlardır. Burada d_qx Fermat ölçüsüdür. Jackson $(0,\infty)$ aralığındaki q-integralini de,

$$\int_0^{\infty} f(x)d_qx=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(q^n)q^n \tag{4.3.2}$$

olarak tanımlamıştır.

4.4 q-Gamma ve q-Beta Fonksiyonları

Bu kısımda beta ve gamma fonksiyonlarının q-analogları elde edilecektir. (4.3.1) eşitliğinde $f(x)=x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ ve $a=1$ alınırsa,

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}d_q x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n\right)^{\alpha-1}\left(1-q^n\right)^{\beta-1}\left(q^n-q^{n+1}\right) \tag{4.4.1}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafındaki toplam bulunamadığından dolayı, $q\to 1^-$ iken $f_q(x)\to x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ olacak şekilde $f_q(x)$ fonksiyonu aranmalıdır. Bunun için $x^{\alpha-1}$ olduğu gibi kalacak ve $(1-x)^{\beta-1}$ ifadesi de x in bir kuvvet serisi olarak yazılacaktır. Binom teoreminden,

$$(1-x)^{-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k \qquad ,|x|<1 \text{ için} \tag{4.4.2}$$

olduğu bilinmektedir.
Pochhammer sembolünün q-analoğu ise (4.1.12) den dolayı,

$$[(\alpha)_k]_q=[\alpha]_q[\alpha+1]_q\ldots[\alpha+k-1]_q$$

$$=\frac{1-q^{\alpha}}{1-q}\frac{1-q^{\alpha+1}}{1-q}\cdots\frac{1-q^{\alpha+k-1}}{1-q}$$

$$=\frac{\left(1-q^{\alpha}\right)\left(1-q^{\alpha+1}\right)\ldots\left(1-q^{\alpha+k-1}\right)}{(1-q)^k}$$

$$[(\alpha)_k]_q=\frac{\left(q^{\alpha},q\right)_k}{(1-q)^k} \tag{4.4.3}$$

şeklindedir. Bu durumda $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k$ serisinin q-analoğu ise (4.1.13) ve (4.4.3) ten dolayı,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(q^{\alpha},q\right)_k}{(q,q)_k}x^k \tag{4.4.4}$$

dir. q-binom teoreminden $(1-x)^{-\alpha}$ nın q-analoğu,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha},q)_k}{(q,q)_k}x^k=\frac{(q^{\alpha}x,q)_{\infty}}{(x,q)_{\infty}} \tag{4.4.5}$$

biçimindedir. Buradan $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ in q-analoğunu bulmak için (4.4.5) ten,

$(1-x)^{-1}$ in q-analoğu $\dfrac{(qx,q)_{\infty}}{(x,q)_{\infty}}$

$(1-x)^{-\beta}$ nın q-analoğu $\dfrac{(q^{\beta}x,q)_{\infty}}{(x,q)_{\infty}}$

dır ve buradan $(1-x)^{\beta-1}$ in q-analoğu ise, $\dfrac{(qx,q)_{\infty}}{(q^{\beta}x,q)_{\infty}}$ olur. Bu durumda $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ yerine $f_q(x)=x^{\alpha-1}\dfrac{(qx,q)_{\infty}}{(q^{\beta}x,q)_{\infty}}$ yazılabilecektir. Diğer taraftan q-binom teoremi,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,q)_k}{(q,q)_k}x^k=\frac{(ax,q)_{\infty}}{(x,q)_{\infty}}$$

şeklinde verilmişti. Her iki taraf $\dfrac{(q,q)_{\infty}}{(a,q)_{\infty}}$ ile çarpılır ve (4.1.3), (4.1.4) tanımları kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a)\dots(1-aq^{n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)}\frac{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^{n+1})\dots}{(1-a)\dots(1-aq^{n-1})(1-aq^n)\dots}x^n=\frac{(ax,q)_{\infty}(q,q)_{\infty}}{(x,q)_{\infty}(a,q)_{\infty}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1},q)_{\infty}}{(q^n a,q)_{\infty}}x^n=\frac{(ax,q)_{\infty}(q,q)_{\infty}}{(x,q)_{\infty}(a,q)_{\infty}} \tag{4.4.6}$$

elde edilir. Burada x yerine q^{α} ve a yerine de q^{β} yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1},q)_{\infty}}{(q^{n+\beta},q)_{\infty}}q^{\alpha n}=\frac{(q^{\alpha+\beta},q)_{\infty}(q,q)_{\infty}}{(q^{\alpha},q)_{\infty}(q^{\beta},q)_{\infty}} \tag{4.4.7}$$

bulunur. Ayrıca (4.3.1) deki q-integralinin tanımında $f(x)$ yerine

$$f_q(x)=x^{\alpha-1}\frac{(qx,q)_\infty}{(q^\beta x,q)_\infty} \text{ ve } a=1 \text{ alınırsa,}$$

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx,q)_\infty}{(q^\beta x,q)_\infty}d_qx=\sum_{n=0}^{\infty}(q^n)^{\alpha-1}\frac{(q^{n+1},q)_\infty}{(q^{\beta+n},q)_\infty}(q^n-q^{n+1})$$

$$=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1},q)_\infty}{(q^{\beta+n},q)_\infty}q^{\alpha n}$$

olup (4.4.7) de yerine yazarsak,

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx,q)_\infty}{(q^\beta x,q)_\infty}d_qx=\frac{(1-q)(q^{\alpha+\beta},q)_\infty(q,q)_\infty}{(q^\alpha,q)_\infty(q^\beta,q)_\infty} \tag{4.4.8}$$

elde edilir ki bu bağıntı,

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

eşitliğinin q-genişlemesidir. Şimdi de (4.4.8) in sağ tarafını Γ fonksiyonu cinsinden yazmak için,

$$[n]_q!=\frac{(q,q)_n}{(1-q)^n}$$

ifadesinin sağ tarafı $(q^{n+1},q)_\infty$ ile çarpılıp bölünürse,

$$[n]_q!=\frac{(q,q)_\infty}{(1-q)^n(q^{n+1},q)_\infty}$$

olur. Ayrıca,

$$\Gamma_q(x)=[x-1]_q!$$

olduğunda yukarıdaki $[n]_q!$ eşitliğinde n yerine $x-1$ alınırsa,

$$\Gamma_q(x)=\frac{(q,q)_\infty}{(q^x,q)_\infty}(1-q)^{1-x}, \quad |q|<1 \tag{4.4.9}$$

elde edilir ki, bu ise gamma fonksiyonunun q-analoğudur. Buradan,

$$\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{(q,q)_\infty}{(q^\alpha,q)_\infty}(1-q)^{1-\alpha}\frac{(q,q)_\infty}{(q^\beta,q)_\infty}(1-q)^{1-\beta}}{\frac{(q,q)_\infty}{(q^{\alpha+\beta},q)_\infty}(1-q)^{1-\alpha-\beta}}$$

$$=\frac{(1-q)(q^{\alpha+\beta},q)_\infty(q,q)_\infty}{(q^\alpha,q)_\infty(q^\beta,q)_\infty}$$

elde edilir. Son denklem ile (4.4.8) karşılaştırılırsa,

$$B_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx,q)_\infty}{(q^\beta x,q)_\infty}d_qx=\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}$$

beta fonksiyonunun q-analoğu elde edilir (Andrews *et al.* 1999).

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERGEOMETRİK VE q-HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde hipergeometrik ve q-hipergeometrik fonksiyonların tanımı verilecek ve bunların bazı özellikleri elde edilecektir.

Tanım 5.1. α_i, β_i ler $(i = 1,\ldots,p,\, j = 1,\ldots,r)$ reel parametreler ve $|z| < 1$ olmak üzere, genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar;

$$
{}_pF_r\left[\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p, \\ \\ \beta_1,\ldots,\beta_r,\end{matrix}\quad z\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k\ldots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k(\beta_2)_k\ldots(\beta_r)_k\,k!}z^k \tag{5.1}
$$

olarak tanımlanır.

Tanım 5.2. (Srivastava *et al.* 2000) Genelleştirilmiş q-hipergeometrik fonksiyonları da;

$$
{}_r\Phi_s\left[\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_r, \\ \\ \beta_1,\ldots,\beta_s,\end{matrix}\quad q,z\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}\right\}^{1-r+s}\frac{(\alpha_1,q)_k\ldots(\alpha_r,q)_k}{(\beta_1,q)_k\ldots(\beta_s,q)_k}\frac{z^k}{(q,q)_k} \tag{5.2}
$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlara ait bir özellik verilecek ve bu özelliğin q-genişlemesi yapılacaktır.

Teorem 5.1. (Srivastava *et al.* 2000) $n \in \mathrm{N}$ olmak üzere,

$$
{}_{r+1}F_s\left[\begin{matrix}-n, & \alpha_1,\ldots,\alpha_r, \\ \\ & \beta_1,\ldots,\beta_s,\end{matrix}\quad z\right] = \frac{(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n\ldots(\beta_s)_n}(-z)^n
$$

$$
\times {}_{s+1}F_r\left[\begin{matrix}-n, & 1-\beta_1-n,\ldots,1-\beta_s-n, \\ \\ & 1-\alpha_1-n,\ldots,1-\alpha_r-n,\end{matrix}\quad \frac{(-1)^{r+s}}{z}\right] \tag{5.3}
$$

dir.

İspat: Tanım 5.1 den dolayı,

$$
{}_{r+1}F_s\left[\begin{matrix}-n, & \alpha_1,\ldots,\alpha_r, & \\ & & z\\ & \beta_1,\ldots,\beta_s, & \end{matrix}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(\alpha_1)_k\ldots(\alpha_r)_k}{(\beta_1)_k\ldots(\beta_s)_k\,k!}z^k
$$

dır. $(-n)_k=(-n)(-n+1)\ldots(-n+k-1)$ ifadesi $k=n+1,n+2,\ldots$ için sıfır olduğundan toplam, $k=0$ dan $k=n$ e kadar yazılabilir ve k yerine $n-k$ yazılırsa,

$$
{}_{r+1}F_s\left[\begin{matrix}-n, & \alpha_1,\ldots,\alpha_r, & \\ & & z\\ & \beta_1,\ldots,\beta_s, & \end{matrix}\right]=\sum_{k=n}^{0}\frac{(-n)_{n-k}(\alpha_1)_{n-k}\ldots(\alpha_r)_{n-k}}{(\beta_1)_{n-k}\ldots(\beta_s)_{n-k}(n-k)!}z^{n-k} \tag{5.4}
$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$
(\alpha)_{n-k}=(\alpha)(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-k-1)
$$

olduğundan eşitliğinin sağ tarafı $(\alpha+n-k)\ldots(\alpha+n-1)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$
(\alpha)_{n-k}=\frac{(\alpha)\ldots(\alpha+n-k-1)(\alpha+n-k)\ldots(\alpha+n-1)}{(\alpha+n-k)\ldots(\alpha+n-1)}
$$

$$
=\frac{(\alpha)_n}{(-1)^k(1-\alpha-n)\ldots(k-\alpha-n)}=\frac{(\alpha)_n}{(-1)^k(1-\alpha-n)_k} \tag{5.5}
$$

olur ve

$$
\frac{(-n)_{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(-n)(-n+1)\ldots(-k-1)}{(n-k)!}=\frac{(-1)^{n-k}n(n-1)\ldots(k+1)}{(n-k)!}
$$

olup eşitliğin sağ tarafı $k!$ ile çarpılıp bölünürse,

$$
\frac{(-n)_{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(-1)^{n-k}}{k!}\frac{1.2\ldots(n-k)(n-k+1)\ldots n}{1.2\ldots(n-k)}
$$

$$
=\frac{(-1)^n}{k!}(-n)\ldots(-n+k-1)=\frac{(-1)^n}{k!}(-n)_k \tag{5.6}
$$

bağıntıları elde edilir. (5.5) ve (5.6) eşitlikleri (5.4) te göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$
{}_{r+1}F_s\left[\begin{matrix}-n, & \alpha_1,\ldots,\alpha_r, & \\ & & z\\ & \beta_1,\ldots,\beta_s, & \end{matrix}\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{\dfrac{(\alpha_1)_n}{(-1)^k(1-\alpha_1-n)_k}\cdots\dfrac{(\alpha_r)_n}{(-1)^k(1-\alpha_r-n)_k}}{\dfrac{(\beta_1)_n}{(-1)^k(1-\beta_1-n)_k}\cdots\dfrac{(\beta_s)_n}{(-1)^k(1-\beta_s-n)_k}}\frac{(-1)^n}{k!}(-n)_k z^{n-k}
$$

$$
=\frac{(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n\ldots(\beta_s)_n}(-z)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(1-\beta_1-n)_k\ldots(1-\beta_s-n)_k}{(1-\alpha_1-n)_k\ldots(1-\alpha_r-n)_k\,k!}\left\{(-1)^{r+s}\right\}^k z^{-k}
$$

olur. Sağ tarafta (5.1) tanımı dikkate alınırsa,

$$
{}_{r+1}F_s\left[\begin{matrix}-n, & \alpha_1,\ldots,\alpha_r, & \\ & & z\\ & \beta_1,\ldots,\beta_s, & \end{matrix}\right]
$$

$$
=\frac{(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n\ldots(\beta_s)_n}(-z)^n\;{}_{s+1}F_r\left[\begin{matrix}-n, & 1-\beta_1-n,\ldots,1-\beta_s-n, & \\ & & \dfrac{(-1)^{r+s}}{z}\\ & 1-\alpha_1-n,\ldots,1-\alpha_r-n, & \end{matrix}\right]
$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

(5.3) ile verilen ifadenin aşağıda bir q-genişlemesi verilecektir.

Teorem 5.2. $n\in \mathrm{N}$ olmak üzere,

$$
{}_{r+1}\Phi_s\left[\begin{matrix}q^{-n}, & \alpha_1,\ldots,\alpha_r, & \\ & & q,z\\ & \beta_1,\ldots,\beta_s, & \end{matrix}\right]=\frac{(\alpha_1,q)_n\ldots(\alpha_r,q)_n}{(\beta_1,q)_n\ldots(\beta_s,q)_n}q^{-\frac{1}{2}(r-s+1)n(n+1)}\left[(-1)^{r-s+1}\frac{z}{q}\right]^n
$$

$$
\times\;{}_{r+1}\Phi_r\left[\begin{matrix}q^{-n}, & \dfrac{q^{1-n}}{\beta_1},\ldots,\dfrac{q^{1-n}}{\beta_s},0,\ldots 0, & \\ & & q,\zeta\\ & \dfrac{q^{1-n}}{\alpha_1},\ldots,\dfrac{q^{1-n}}{\alpha_r}, & \end{matrix}\right] \tag{5.7}
$$

dir. Burada $\zeta=\dfrac{\beta_1\ldots\beta_s}{\alpha_1\ldots\alpha_r}\dfrac{q^{n+1}}{z}$ dir.

İspat: (5.2) den dolayı,

$$
{}_{r+1}\Phi_s\left[\begin{matrix} q^{-n}, & \alpha_1,\ldots,\alpha_r, & \\ & & q,z \\ & \beta_1,\ldots,\beta_s, & \end{matrix}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}\right\}^{s-r}\frac{\left(q^{-n},q\right)_k(\alpha_1,q)_k\ldots(\alpha_r,q)_k}{(\beta_1,q)_k\ldots(\beta_s,q)_k}\frac{z^k}{(q,q)_k}
$$

dır. $\left(q^{-n},q\right)_k=\left(1-q^{-n}\right)\left(1-q^{-n+1}\right)\ldots\left(1-q^{-n+k-1}\right)$ ifadesi $k=n+1,n+2,\ldots$ için sıfır olduğundan toplam, $k=0$ dan $k=n$ e kadar yazılabilir ve k yerine $n-k$ yazılırsa,

$$
{}_{r+1}\Phi_s\left[\begin{matrix} q^{-n}, & \alpha_1,\ldots,\alpha_r, & \\ & & q,z \\ & \beta_1,\ldots,\beta_s, & \end{matrix}\right]=\sum_{k=n}^{0}\left\{(-1)^{n-k} q^{\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)}\right\}^{s-r}
$$

$$
\times\frac{\left(q^{-n},q\right)_{n-k}(\alpha_1,q)_{n-k}\ldots(\alpha_r,q)_{n-k}}{(\beta_1,q)_{n-k}\ldots(\beta_s,q)_{n-k}}\frac{z^{n-k}}{(q,q)_{n-k}} \tag{5.8}
$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$
(\alpha,q)_{n-k}=(1-\alpha)(1-\alpha q)\ldots\left(1-\alpha q^{n-k-1}\right)
$$

olduğundan eşitliğin sağ tarafı $\left(1-\alpha q^{n-k}\right)\ldots\left(1-\alpha q^{n-1}\right)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$
(\alpha,q)_{n-k}=\frac{(1-\alpha)\ldots\left(1-\alpha q^{n-k-1}\right)\left(1-\alpha q^{n-k}\right)\ldots\left(1-\alpha q^{n-1}\right)}{(-1)^k\left(\alpha q^{n-k}-1\right)\ldots\left(\alpha q^{n-1}-1\right)}
$$

$$
=\frac{(\alpha,q)_n}{(-1)^k\left(\alpha q^{n-k}\right)\left(1-\dfrac{q^{k-n}}{\alpha}\right)\ldots\left(\alpha q^{n-1}\right)\left(1-\dfrac{q^{1-n}}{\alpha}\right)}
$$

$$
=\frac{(\alpha,q)_n}{(-1)^k\alpha^k q^{\frac{1}{2}k(2n-k-1)}\left(\dfrac{q^{1-n}}{\alpha},q\right)_k} \tag{5.9}
$$

olur ve

$$
\frac{\left(q^{-n},q\right)_{n-k}}{(q,q)_{n-k}}=\frac{\left(1-q^{-n}\right)\ldots\left(1-q^{-k-1}\right)}{(q,q)_{n-k}}=\frac{q^{-n}\left(q^n-1\right)\ldots q^{-k-1}\left(q^{k+1}-1\right)}{(q,q)_{n-k}}
$$

$$= \frac{(-1)^{n-k} q^{-\frac{1}{2}(n-k)(k+n+1)} (1-q^n)\dots(1-q^{k+1})}{(q,q)_{n-k}}$$

olup eşitliğin sağ tarafı $(q,q)_k$ ile çarpılıp bölünürse,

$$\frac{(q^{-n},q)_{n-k}}{(q,q)_{n-k}} = \frac{(-1)^{n-k} q^{-\frac{1}{2}(n-k)(k+n+1)} (1-q)\dots(1-q^{n-k})(1-q^{n-k+1})\dots(1-q^n)}{(1-q)\dots(1-q^{n-k})(q,q)_k}$$

$$= \frac{(-1)^{n-k} q^{-\frac{1}{2}(n-k)(k+n+1)} (-1)^k q^{\frac{1}{2}k(2n-k+1)}}{(q,q)_k} (q^{-n},q)_k$$

$$= \frac{(-1)^n q^{\frac{1}{2}(n+1)(2k-n)}}{(q,q)_k} (q^{-n},q)_k \tag{5.10}$$

bağıntıları elde edilir. (5.9) ve (5.10) eşitlikleri (5.8) de, göz önüne alınırsa,

$$ {}_{r+1}\Phi_s \left[\begin{matrix} q^{-n}, & \alpha_1,\dots,\alpha_r, & \\ & & q,z \\ & \beta_1,\dots,\beta_s, & \end{matrix} \right] = \sum_{k=0}^{n} \left\{ (-1)^{n-k} q^{\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)} \right\}^{s-r} \frac{(-1)^n q^{\frac{1}{2}(n+1)(2k-n)}}{(q,q)_k} (q^{-n},q)_k $$

$$ \times \frac{ \dfrac{(\alpha_1,q)_n}{(-1)^k (\alpha_1)^k q^{\frac{1}{2}k(2n-k-1)} \left(\frac{q^{1-n}}{\alpha_1},q\right)_k} \cdots \dfrac{(\alpha_r,q)_n}{(-1)^k (\alpha_r)^k q^{\frac{1}{2}k(2n-k-1)} \left(\frac{q^{1-n}}{\alpha_r},q\right)_k} }{ \dfrac{(\beta_1,q)_n}{(-1)^k (\beta_1)^k q^{\frac{1}{2}k(2n-k-1)} \left(\frac{q^{1-n}}{\beta_1},q\right)_k} \cdots \dfrac{(\beta_s,q)_n}{(-1)^k (\beta_s)^k q^{\frac{1}{2}k(2n-k-1)} \left(\frac{q^{1-n}}{\beta_s},q\right)_k} } z^{n-k} $$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$ {}_{r+1}\Phi_s \left[\begin{matrix} q^{-n}, & \alpha_1,\dots,\alpha_r, & \\ & & q,z \\ & \beta_1,\dots,\beta_s, & \end{matrix} \right] = \frac{(\alpha_1,q)_n \dots (\alpha_r,q)_n}{(\beta_1,q)_n \dots (\beta_s,q)_n} q^{-\frac{1}{2}(r-s+1)n(n+1)} (-1)^{n(r-s+1)} \frac{z^n}{q^n} $$

$$ \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n},q)_k \left(\frac{q^{1-n}}{\beta_1},q\right)_k \dots \left(\frac{q^{1-n}}{\beta_s},q\right)_k}{\left(\frac{q^{1-n}}{\alpha_1},q\right)_k \dots \left(\frac{q^{1-n}}{\alpha_r},q\right)_k (q,q)_k} \frac{(\beta_1 \dots \beta_s)^k}{(\alpha_1 \dots \alpha_r)^k} \frac{q^{(n+1)k}}{z^k} $$

$$=\frac{(\alpha_1,q)_n\ldots(\alpha_r,q)_n}{(\beta_1,q)_n\ldots(\beta_s,q)_n}q^{-\frac{1}{2}(r-s+1)n(n+1)}\left[(-1)^{r-s+1}\frac{z}{q}\right]^n {}_{r+1}\Phi_r\left[\begin{matrix}q^{-n}, & \dfrac{q^{1-n}}{\beta_1},\ldots,\dfrac{q^{1-n}}{\beta_s},0,\ldots0, & \\ & & q,\zeta \\ & \dfrac{q^{1-n}}{\alpha_1},\ldots,\dfrac{q^{1-n}}{\alpha_r}, & \end{matrix}\right]$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi de hipergeometrik fonksiyonlar için başka bir özelliğe geçmeden önce gerekli olan bir lemmayı verelim.

Lemma 5.1.

$$(\lambda)_k(\lambda+k)_{pl}=(\lambda)_{pl}(\lambda+pl)_k \tag{5.11}$$

dir.

İspat: Pochhammer sembolünün açılımından,

$$\begin{aligned}(\lambda)_k(\lambda+k)_{pl} &= \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)(\lambda+k)\ldots(\lambda+k+pl-1)\\ &= \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k+pl-1)\\ &= \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+pl-1)(\lambda+pl)\ldots(\lambda+pl+k-1)\\ &= (\lambda)_{pl}(\lambda+pl)_k\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.3. (Lee *et al.* 2000) $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi kompleks sayıların uygun bir dizisi olmak üzere, $\{\Theta_n^{(p,\lambda)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyon dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$\Theta_n^{(p,\lambda)}(z):=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{(\lambda+n)_{pl}}\frac{z^l}{l!} \quad , \ (\lambda\in\mathbb{C} \quad , \quad p\in R^+) \tag{5.12}$$

Ayrıca Kummer dönüşümü olarak bilinen,

$$ {}_1F_1(\alpha;\gamma;z) = e^z \, {}_1F_1(\gamma-\alpha;\gamma;-z) \tag{5.13} $$

dönüşümü verilsin. Bu durumda,

$$ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu)_k}{(\lambda)_k} \Theta_k^{(p,\lambda)}(z) \frac{t^k}{k!} = e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{(\lambda)_{pk}} \, {}_1F_1 \left[\begin{matrix} \lambda-\mu+pk, \\ \\ \lambda+pk, \end{matrix} \quad -t \right] \frac{z^k}{k!} \tag{5.14} $$

dir.

İspat: (5.14) eşitliğinin sol tarafına Λ denir ve (5.12) eşitliği dikkate alınırsa,

$$ \Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu)_k}{(\lambda)_k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{(\lambda+k)_{pl}} \frac{z^l}{l!} \frac{t^k}{k!} $$

olur. Burada (5.11) eşitliği kullanılırsa,

$$ \Lambda = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{(\lambda)_{pl}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu)_k}{(\lambda+pl)_k} \frac{t^k}{k!} \right\} \frac{z^l}{l!} $$

bulunur. (5.1) eşitliğinden yukarıdaki eşitlik,

$$ \Lambda = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{(\lambda)_{pl}} \, {}_1F_1(\mu;\lambda+pl;t) \frac{z^l}{l!} $$

şeklinde de yazılabilir. Burada (5.13) eşitliği uygulanırsa,

$$ \Lambda = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{(\lambda)_{pl}} e^t \, {}_1F_1(\lambda+pl-\mu;\lambda+pl;-t) \frac{z^l}{l!} $$

elde edilir. l yerine k alınırsa teorem ispatlanır.

(5.12) ile verilen ifadenin bir q-genişlemesini vermeden önce gerekli olan bir lemmayı verelim.

Lemma 5.2.

$$ (\lambda,q)_k \left(\lambda q^k, q\right)_{pl} = (\lambda,q)_{pl} \left(\lambda q^{pl}, q\right)_k \tag{5.15} $$

dir.

İspat: (4.1.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}(\lambda,q)_k(\lambda q^k,q)_{pl} &= (1-\lambda)(1-\lambda q)\ldots(1-\lambda q^{k-1})(1-\lambda q^k)\ldots(1-\lambda q^{k+pl-1})\\ &= (1-\lambda)(1-\lambda q)\ldots(1-\lambda q^{k+pl-1})\\ &= (1-\lambda)\ldots(1-\lambda q^{pl-1})(1-\lambda q^{pl})\ldots(1-\lambda q^{pl+k-1})\\ &= (\lambda,q)_{pl}(\lambda q^{pl},q)_k\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Teorem 5.4. (Lee *et al.* 2000) (5.12) ve (5.13) eşitliklerinin q-analogları;

$$\Xi_n^{(p,\lambda)}(z;q):=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{(\lambda q^n,q)_{pl}}\frac{z^l}{(q,q)_l} \qquad ,(\, z\in\mathbb{C} \quad , \quad p\in R^+) \tag{5.16}$$

ve

$${}_2\Phi_1\left[\begin{matrix}\alpha, & 0, & \\ & & q,z\\ & \gamma, & \end{matrix}\right]=\frac{1}{(z,q)_\infty}{}_1\Phi_1\left[\begin{matrix}\frac{\gamma}{\alpha}, & \\ & q,\alpha z\\ \gamma, & \end{matrix}\right] \tag{5.17}$$

şeklinde tanımlansınlar. Bu durumda (5.14) ifadesinin bir q-genişlemesi,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu,q)_k}{(\lambda,q)_k}\Xi_k^{(p,\lambda)}(z;q)\frac{t^k}{(q,q)_k}=\frac{1}{(t,q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k}{(\lambda,q)_{pk}}{}_1\Phi_1\left[\begin{matrix}\frac{\lambda q^{pk}}{\mu}, & \\ & q,\mu t\\ \lambda q^{pk}, & \end{matrix}\right]\frac{z^k}{(q,q)_k} \tag{5.18}$$

şeklindedir.

İspat: (5.18) eşitliğinin sol tarafına Λ denir ve (5.16) eşitliği dikkate alınırsa,

$$\Lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu,q)_k}{(\lambda,q)_k}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{(\lambda q^k,q)_{pl}}\frac{z^l}{(q,q)_l}\frac{t^k}{(q,q)_k}$$

olur. Burada (5.15) eşitliği kullanılırsa,

$$\Lambda=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{(\lambda,q)_{pl}}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu,q)_k}{(\lambda q^{pl},q)_k}\frac{t^k}{(q,q)_k}\right\}\frac{z^l}{(q,q)_l}$$

bulunur. (5.2) eşitliğinden yukarıdaki eşitlik,

$$\Lambda=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{(\lambda,q)_{pl}}\,{}_2\Phi_1\left[\begin{matrix}\mu, & 0, & \\ & & q,t\\ & \lambda q^{pl}, & \end{matrix}\right]\frac{z^l}{(q,q)_l}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada (5.17) eşitliği uygulanırsa,

$$\Lambda=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{(\lambda,q)_{pl}}\frac{1}{(t,q)_\infty}\,{}_1\Phi_1\left[\begin{matrix}\dfrac{\lambda q^{pl}}{\mu}, & \\ & q,\mu t\\ \lambda q^{pl}, & \end{matrix}\right]\frac{z^l}{(q,q)_l}$$

elde edilir. l yerine k alınırsa teorem ispatlanır.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ q-HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR İÇİN DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu kısımda öncelikle Laguerre polinomlarının hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden tanımı verilecek ve bu polinomlar için bir doğurucu fonksiyon elde edilecektir. Daha sonra genelleştirilmiş q-hipergeometrik fonksiyonlar için iki doğurucu fonksiyon verilecektir.

Tanım 6.1. (Lee *et al.* 2000)

α basamak ve $n \in N$ olmak üzere, Laguerre polinomları;

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n;\alpha+1;x) \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 6.1.

$$\frac{(-\alpha-n)_k}{(\alpha-k+1)_j}\binom{n+\alpha-k}{n} = \binom{\alpha+n}{n}\frac{(-\alpha-j)_k}{(\alpha+1)_j} \tag{6.2}$$

dir.

İspat: (6.2) eşitliğinin sol tarafı,

$$\frac{(-\alpha-n)_k}{(\alpha-k+1)_j}\binom{n+\alpha-k}{n} = \frac{(-\alpha-n)_k}{(\alpha-k+1)_j}\frac{(n+\alpha-k)!}{n!(\alpha-k)!}$$

$$= \frac{(-\alpha-n)(-\alpha-n+1)\ldots(-\alpha-n+k-1)}{(\alpha-k+1)(\alpha-k+2)\ldots(\alpha-k+j)}\frac{1.2\ldots(n+\alpha-k)}{n!\,1.2\ldots(\alpha-k)}$$

dir. Eşitliğin sağ tarafı $(\alpha-k+1)(\alpha-k+2)\ldots\alpha$ ile çarpılıp bölünür ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{(-\alpha-n)_k}{(\alpha-k+1)_j}\binom{n+\alpha-k}{n}=\frac{(-1)^k(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-k+1)\ldots 1}{n!\,1.2\ldots(\alpha-k)(\alpha-k+1)\ldots\alpha}$$

$$\times\frac{(\alpha-k+1)(\alpha-k+2)\ldots(\alpha-k+j)(\alpha-k+j+1)\ldots\alpha}{(\alpha-k+1)(\alpha-k+2)\ldots(\alpha-k+j)}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafında gerekli sadeleştirmeler yapılır ve $(\alpha+1)_j$ ile çarpılıp bölünürse,

$$\frac{(-\alpha-n)_k}{(\alpha-k+1)_j}\binom{n+\alpha-k}{n}=\frac{(\alpha+n)!}{n!\alpha!}(-1)^k\frac{(\alpha-k+j+1)(\alpha-k+j+2)\ldots\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+j)}{(\alpha+1)_j}$$

$$=\binom{\alpha+n}{n}(-1)^k\frac{(-1)^k(-\alpha-j)\ldots(-\alpha-j+k-1)}{(\alpha+1)_j}$$

$$=\binom{\alpha+n}{n}\frac{(-\alpha-j)_k}{(\alpha+1)_j}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 6.1. (Lee *et al.* 2000)

$L_n^{(\alpha-k)}(x)$ Laguerre polinomları için bir doğurucu fonksiyon;

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha-n)_k}{k!}L_n^{(\alpha-k)}(x)t^k=(1-t)^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x(1-t)) \quad , \quad (|t|<1) \tag{6.3}$$

dir.

İspat: (6.3) eşitliğinin sol tarafına $\Delta(x,t)$ denir ve (6.1) tanımı dikkate alınırsa,

$$\Delta(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha-n)_k}{k!}\left\{\binom{n+\alpha-k}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-n)_j}{(\alpha-k+1)_j}\frac{x^j}{j!}\right\}t^k$$

dir. Burada $(-n)_j$ ifadesi $j=n+1,n+2,\ldots$ için sıfır olduğundan toplam, $j=0$ dan $j=n$ e kadar yazılabilir. Ayrıca (6.2) eşitliği yukarıda kullanılır ve düzenlenirse,

$$\Delta(x,t)=\binom{n+\alpha}{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j}\frac{x^j}{j!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha-j)_k}{k!}t^k\right)$$

olur. $\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha-j)_k}{k!}t^k\right)$ ifadesi yerine Binom Teoreminden eşiti yazılırsa,

$$\Delta(x,t)=\binom{n+\alpha}{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j}\frac{x^j}{j!}(1-t)^{\alpha+j}$$

$$=(1-t)^{\alpha}\binom{n+\alpha}{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j}\frac{\{x(1-t)\}^j}{j!}$$

$$=(1-t)^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x(1-t)) \quad , \quad (|t|<1)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi genelleştirilmiş q-hipergeometrik fonksiyonlar için bir doğurucu fonksiyonu elde etmeden önce ispatında kullanılacak lemmalar verilecektir.

Lemma 6.2.

$$\left(\frac{q^{1-k}}{\lambda},q\right)_n=\frac{\left(\frac{q}{\lambda},q\right)_n(\lambda,q)_k}{(\lambda q^{-n},q)_k}q^{-kn} \tag{6.4}$$

dir.

İspat: (4.1.3) eşitliğinden,

$$\left(\frac{q^{1-k}}{\lambda},q\right)_n=\left(1-\frac{q^{1-k}}{\lambda}\right)\left(1-\frac{q^{2-k}}{\lambda}\right)\ldots\left(1-\frac{q^{n-k}}{\lambda}\right)$$

$$=\left(\frac{\lambda-q^{1-k}}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda-q^{2-k}}{\lambda}\right)\ldots\left(\frac{\lambda-q^{n-k}}{\lambda}\right)$$

$$=\frac{(\lambda-q^{1-k})(\lambda-q^{2-k})\ldots(\lambda-q^{n-k})}{\lambda^n}$$

$$= \frac{\left\{\left(\lambda - q^{1-k}\right)\ldots\left(\lambda - q^{-1}\right)\left(\lambda - q^{0}\right)\right\}\left\{\left(\lambda - q^{1}\right)\left(\lambda - q^{2}\right)\ldots\left(\lambda - q^{n-k}\right)\right\}}{\lambda^{n}}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafı $\left(\lambda - q^{n-k+1}\right)\ldots\left(\lambda - q^{n}\right)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$\left(\frac{q^{1-k}}{\lambda}, q\right)_n = \frac{\left\{\left(\lambda - \frac{1}{q^{k-1}}\right)\ldots\left(\lambda - \frac{1}{q}\right)(\lambda - 1)\right\}\left\{(\lambda - q)\left(\lambda - q^{2}\right)\ldots\left(\lambda - q^{n}\right)\right\}}{\lambda^{n}\left(\lambda - q^{n-k+1}\right)\ldots\left(\lambda - q^{n}\right)}$$

$$= \frac{\left\{\left(\lambda q^{k-1} - 1\right)\ldots(\lambda q - 1)(\lambda - 1)\right\}\left\{\left(1 - \frac{q}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{q^{2}}{\lambda}\right)\ldots\left(1 - \frac{q^{n}}{\lambda}\right)\right\}}{\left(q^{k-1}\ldots q\right)q^{n-k+1}\left(\frac{\lambda}{q^{n-k+1}} - 1\right)\ldots q^{n}\left(\frac{\lambda}{q^{n}} - 1\right)}$$

$$= \frac{\left\{\left(1 - \lambda q^{k-1}\right)\ldots(1 - \lambda q)(1 - \lambda)\right\}\left\{\left(1 - \frac{q}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{q^{2}}{\lambda}\right)\ldots\left(1 - \frac{q^{n}}{\lambda}\right)\right\}}{q^{kn}\left(1 - \frac{\lambda}{q^{n-k+1}}\right)\ldots\left(1 - \frac{\lambda}{q^{n}}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{q}{\lambda}, q\right)_n (\lambda, q)_k}{\left(\lambda q^{-n}, q\right)_k} q^{-kn}$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Teorem 6.2. ${}_r\Phi_{s+1}$ genelleştirilmiş q-hipergeometrik fonksiyonlar için bir doğurucu fonksiyon;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda, q)_k}{(q, q)_k} \, {}_r\Phi_{s+1}\left[\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \\ \frac{q^{1-k}}{\lambda}, \beta_1, \ldots, \beta_s, \end{matrix} \; q, z\right] t^k = \frac{(\lambda t, q)_\infty}{(t, q)_\infty} \, {}_{r+1}\Phi_{s+2}\left[\begin{matrix} t, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \\ 0, \frac{q}{\lambda}, \beta_1, \ldots, \beta_s, \end{matrix} \; q, z\right]$$

$\max\{|t|, |q|\} < 1$ dir. (6.5)

İspat: (6.5) eşitliğinin sol tarafına $\Delta(z,t)$ denir ve Tanım 5.2 dikkate alınırsa,

$$\Delta(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda,q)_k}{(q,q)_k}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\right\}^{2-r+s}\frac{(\alpha_1,q)_n\ldots(\alpha_r,q)_n}{\left(\frac{q^{1-k}}{\lambda},q\right)_n(\beta_1,q)_n\ldots(\beta_s,q)_n(q,q)_n}z^n t^k$$

olur. Burada (6.4) eşitliği kullanılırsa,

$$\Delta(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\right\}^{2-r+s}\frac{(\alpha_1,q)_n\ldots(\alpha_r,q)_n}{\left(\frac{q}{\lambda},q\right)_n(\beta_1,q)_n\ldots(\beta_s,q)_n}$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda,q)_k}{(q,q)_k}\frac{(\lambda q^{-n},q)_k}{(\lambda,q)_k}q^{kn}t^k\right)\frac{z^n}{(q,q)_n}$$

bulunur. $\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda q^{-n},q)_k}{(q,q)_k}q^{kn}t^k\right)$ ifadesi yerine q-Binom Teoreminden eşiti yazılırsa,

$$\Delta(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\right\}^{2-r+s}\frac{(\alpha_1,q)_n\ldots(\alpha_r,q)_n}{\left(\frac{q}{\lambda},q\right)_n(\beta_1,q)_n\ldots(\beta_s,q)_n}\left(\frac{(\lambda q^{-n}q^n t,q)_\infty}{(q^n t,q)_\infty}\right)\frac{z^n}{(q,q)_n}$$

olur. $(q^n t,q)_\infty$ ifadesi $(1-t)(1-tq)\ldots(1-tq^{n-1})$ ile çarpılıp bölünürse $\frac{(t,q)_\infty}{(t,q)_n}$ elde edilir. Bu da yukarıda yerine yazılırsa;

$$\Delta(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\right\}^{2-r+s}\frac{(\alpha_1,q)_n\ldots(\alpha_r,q)_n}{\left(\frac{q}{\lambda},q\right)_n(\beta_1,q)_n\ldots(\beta_s,q)_n}\frac{(\lambda t,q)_\infty}{(t,q)_\infty}(t,q)_n\frac{z^n}{(q,q)_n}$$

$$=\frac{(\lambda t,q)_\infty}{(t,q)_\infty}{}_{r+1}\Phi_{s+2}\left[\begin{matrix}t,\alpha_1,\ldots,\alpha_r, & \\ & q,z\\ 0,\frac{q}{\lambda},\beta_1,\ldots,\beta_s, & \end{matrix}\right]$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

q-hipergeometrik fonksiyonlar için başka bir doğurucu fonksiyonu vermeden önce gerekli olan lemmaları verelim.

Lemma 6.3.

$$(\lambda,q)_{n+k}=(\lambda,q)_n\left(\lambda q^n,q\right)_k \tag{6.6}$$

dir.

İspat: (4.1.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}(\lambda,q)_{n+k}&=(1-\lambda)\ldots\left(1-\lambda q^{n-1}\right)\left(1-\lambda q^{n}\right)\ldots\left(1-\lambda q^{n+k-1}\right)\\&=(\lambda,q)_n\left(\lambda q^n,q\right)_k\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise istenilendir.

Lemma 6.4.

$$\frac{\left(q^{-n},q\right)_k}{(q,q)_n}=\frac{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}q^{-nk}}{(q,q)_{n-k}} \tag{6.7}$$

dir.

İspat: (4.1.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\frac{\left(q^{-n},q\right)_k}{(q,q)_n}&=\frac{\left(1-q^{-n}\right)\left(1-q^{-n+1}\right)\ldots\left(1-q^{-n+k-1}\right)}{(q,q)_n}\\&=\frac{\left(\dfrac{q^n-1}{q^n}\right)\left(\dfrac{q^{n-1}-1}{q^{n-1}}\right)\ldots\left(\dfrac{q^{n-k+1}-1}{q^{n-k+1}}\right)}{(q,q)_n}\\&=\frac{(-1)^k\left(1-q^n\right)\left(1-q^{n-1}\right)\ldots\left(1-q^{n-k+1}\right)}{q^nq^{n-1}\ldots q^{n-k+1}(1-q)\ldots\left(1-q^{n-k}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)\ldots\left(1-q^n\right)}\\&=\frac{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}q^{-nk}}{(q,q)_{n-k}}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 6.5.

$$\left(\lambda q^{2k}t,q\right)_\infty=\frac{(\lambda t,q)_\infty}{(\lambda t,q)_{2k}} \tag{6.8}$$

dır.

İspat: (4.1.4) eşitliğinden,

$$\left(\lambda q^{2k}t,q\right)_\infty=\left(1-\lambda tq^{2k}\right)\left(1-\lambda tq^{2k+1}\right)\ldots$$

dir. Bu eşitliğin sağ tarafı $(1-\lambda t)\ldots\left(1-\lambda tq^{2k-1}\right)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$\left(\lambda q^{2k}t,q\right)_\infty=\frac{(1-\lambda t)\ldots\left(1-\lambda tq^{2k-1}\right)\left(1-\lambda tq^{2k}\right)\ldots}{(1-\lambda t)\ldots\left(1-\lambda tq^{2k-1}\right)}$$

$$=\frac{(\lambda t,q)_\infty}{(\lambda t,q)_{2k}}$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Lemma 6.6.

$$(\lambda,q)_{2k}=\left(\sqrt{\lambda},q\right)_k\left(-\sqrt{\lambda},q\right)_k\left(\sqrt{\lambda q},q\right)_k\left(-\sqrt{\lambda q},q\right)_k \tag{6.9}$$

dir.

İspat: (4.1.3) eşitliğinden,

$$(\lambda,q)_{2k}=(1-\lambda)(1-\lambda q)\ldots\left(1-\lambda q^{2k-2}\right)\left(1-\lambda q^{2k-1}\right)$$

$$=\left(1-\sqrt{\lambda}\right)\left(1+\sqrt{\lambda}\right)\left(1-\sqrt{\lambda q}\right)\left(1+\sqrt{\lambda q}\right)\ldots\left(1-\sqrt{\lambda}q^{k-1}\right)\left(1+\sqrt{\lambda}q^{k-1}\right)\left(1-\sqrt{\lambda q}q^{k-1}\right)\left(1+\sqrt{\lambda q}q^{k-1}\right)$$

$$=\left(1-\sqrt{\lambda}\right)\ldots\left(1-\sqrt{\lambda}q^{k-1}\right)\left(1+\sqrt{\lambda}\right)\ldots\left(1+\sqrt{\lambda}q^{k-1}\right)\left(1-\sqrt{\lambda q}\right)\ldots\left(1-\sqrt{\lambda q}q^{k-1}\right)$$

$$\times\left(1+\sqrt{\lambda q}\right)\ldots\left(1+\sqrt{\lambda q}q^{k-1}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\lambda},q\right)_k\left(-\sqrt{\lambda},q\right)_k\left(\sqrt{\lambda q},q\right)_k\left(-\sqrt{\lambda q},q\right)_k$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 6.3. ${}_{r+2}\Phi_s$ genelleştirilmiş q-hipergeometrik fonksiyonlar için bir doğurucu fonksiyon;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda,q)_n}{(q,q)_n}\,{}_{r+2}\Phi_s\begin{bmatrix} q^{-n},\lambda q^n, & \alpha_1,\dots,\alpha_r, & \\ & & q,zq^n \\ & \beta_1,\dots,\beta_s, & \end{bmatrix}t^n=\frac{(\lambda t,q)_\infty}{(t,q)_\infty}$$

$$\times{}_{r+5}\Phi_{s+4}\begin{bmatrix} 0,\sqrt{\lambda},-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda q},-\sqrt{\lambda q}, & \alpha_1,\dots,\alpha_r, & \\ & & q,zt \\ \sqrt{\lambda t},-\sqrt{\lambda t},\sqrt{\lambda qt},-\sqrt{\lambda qt}, & \beta_1,\dots,\beta_s, & \end{bmatrix}\tag{6.10}$$

dir. Burada $\max\{|z|,|q|\}<1$ dir.

İspat: (6.10) eşitliğinin sol tarafına $\Delta(z,t)$ denir ve (5.2) tanımı dikkate alınırsa,

$$\Delta(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda,q)_n}{(q,q)_n}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}\right\}^{-1-r+s}\frac{(q^{-n},q)_k(\lambda q^n,q)_k(\alpha_1,q)_k\dots(\alpha_r,q)_k}{(\beta_1,q)_k\dots(\beta_s,q)_k(q,q)_k}(zq^n)^k t^n$$

dir. Burada $(q^{-n},q)_k$ ifadesi $k=n+1,n+2,\dots$ için sıfır olduğundan toplam, $k=0$ dan $k=n$ e kadar yazılabilir. Ayrıca (6.6) ve (6.7) eşitlikleri yukarıda kullanılır ve düzenlenirse,

$$\Delta(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}\right\}^{-1-r+s}\frac{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}q^{-nk}}{(q,q)_{n-k}}(\lambda,q)_{n+k}$$

$$\times\frac{(\alpha_1,q)_k\dots(\alpha_r,q)_k}{(\beta_1,q)_k\dots(\beta_s,q)_k(q,q)_k}(zq^n)^k t^n$$

olur. (2.5) eşitliğinden yararlanılarak n yerine $n+k$ yazılırsa,

$$\Delta(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}\right\}^{-r+s}\frac{(\lambda,q)_{n+2k}}{(q,q)_n}\frac{(\alpha_1,q)_k\dots(\alpha_r,q)_k}{(\beta_1,q)_k\dots(\beta_s,q)_k(q,q)_k}z^k t^{n+k}$$

bulunur. (6.6) eşitliği kullanılarak $(\lambda,q)_{n+2k} = (\lambda,q)_{2k}(\lambda q^{2k},q)_n$ eşitliği yukarıda yerine yazılırsa,

$$\Delta(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}\right\}^{-r+s} \frac{(\alpha_1,q)_k \dots (\alpha_r,q)_k}{(\beta_1,q)_k \dots (\beta_s,q)_k (q,q)_k}(\lambda,q)_{2k}(zt)^k \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda q^{2k},q)_n}{(q,q)_n}t^n$$

yazılabilir. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda q^{2k},q)_n}{(q,q)_n}t^n$ ifadesi yerine q-binom teoreminden eşiti yazılırsa,

$$\Delta(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}\right\}^{-r+s} \frac{(\alpha_1,q)_k \dots (\alpha_r,q)_k}{(\beta_1,q)_k \dots (\beta_s,q)_k (q,q)_k}(\lambda,q)_{2k}(zt)^k \frac{(\lambda q^{2k}t,q)_\infty}{(t,q)_\infty}$$

elde edilir. Burada (6.8) eşitliği kullanılır ve düzenlenirse,

$$\Delta(z,t) = \frac{(\lambda t,q)_\infty}{(t,q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}\right\}^{-r+s} \frac{(\alpha_1,q)_k \dots (\alpha_r,q)_k}{(\beta_1,q)_k \dots (\beta_s,q)_k (q,q)_k}\frac{(\lambda,q)_{2k}}{(\lambda t,q)_{2k}}(zt)^k$$

bulunur. (6.9) eşitliğinden dolayı,

$$\Delta(z,t) = \frac{(\lambda t,q)_\infty}{(t,q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}\right\}^{-r+s} \frac{(\alpha_1,q)_k \dots (\alpha_r,q)_k}{(\beta_1,q)_k \dots (\beta_s,q)_k (q,q)_k}$$

$$\times\frac{(\sqrt{\lambda},q)_k(-\sqrt{\lambda},q)_k(\sqrt{\lambda q},q)_k(-\sqrt{\lambda q},q)_k}{(\sqrt{\lambda t},q)_k(-\sqrt{\lambda t},q)_k(\sqrt{\lambda qt},q)_k(-\sqrt{\lambda qt},q)_k}(zt)^k$$

elde edilir. Başka bir ifadeyle,

$$\Delta(z,t) = \frac{(\lambda t,q)_\infty}{(t,q)_\infty}\,{}_{r+5}\Phi_{s+4}\left[\begin{matrix} 0,\sqrt{\lambda},-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda q},-\sqrt{\lambda q}, & \alpha_1,\dots,\alpha_r, & \\ & & q,zt \\ \sqrt{\lambda t},-\sqrt{\lambda t},\sqrt{\lambda qt},-\sqrt{\lambda qt}, & \beta_1,\dots,\beta_s, & \end{matrix}\right]$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

7. q-JACOBİ POLİNOMLARI İÇİN BİR DOĞURUCU FONKSİYON

Tanım 7.1. $\alpha > -1$, $\beta > -1$ ve $-1 \le x \le 1$ olmak üzere,

Jacobi Polinomları,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x+1)^k(x-1)^{n-k} \quad , n = 0,1,2,\ldots \tag{7.1}$$

olarak tanımlanırlar.

Tanım 7.2. q-Jacobi polinomları ise,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x,q) = \frac{(\alpha q,q)_n}{(q,q)_n}\,{}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^{-n},\alpha\beta q^{n+1}, & \\ & q,xq \\ \alpha q, & \end{matrix}\right] \tag{7.2}$$

şeklinde tanımlanırlar. Burada ${}_2\Phi_1$ (5.2) ile tanımlanan q-hipergeometrik fonksiyondur.

Teorem 7.1. $P_n^{(\alpha,\beta)}(xq^n,q)$ q-Jacobi polinomları için bir doğurucu fonksiyon,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\beta q,q)_n}{(\alpha q,q)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(xq^n,q)t^n = \frac{(\alpha\beta qt,q)_\infty}{(t,q)_\infty}$$

$$\times {}_5\Phi_5\left[\begin{matrix} 0,\sqrt{\alpha\beta q},-\sqrt{\alpha\beta q},q\sqrt{\alpha\beta},-q\sqrt{\alpha\beta}, & \\ & q,xqt \\ \alpha q,\sqrt{\alpha\beta qt},-\sqrt{\alpha\beta qt},q\sqrt{\alpha\beta t},-q\sqrt{\alpha\beta t}, & \end{matrix}\right], |t| < 1 \tag{7.3}$$

dır.

İspat: Teorem 6.3 te $r = s-1 = 0$, $\beta_1 = \alpha q$, $\lambda = \alpha\beta q$ ve $z = xq$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\beta q,q)_n}{(q,q)_n}\,{}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^{-n},\alpha\beta q^{n+1}, & \\ & q,xq^{n+1} \\ \alpha q, & \end{matrix}\right]t^n=\frac{(\alpha\beta qt,q)_\infty}{(t,q)_\infty}$$

$$\times{}_5\Phi_5\left[\begin{matrix} 0,\sqrt{\alpha\beta q},-\sqrt{\alpha\beta q},q\sqrt{\alpha\beta},-q\sqrt{\alpha\beta}, & \\ & q,xqt \\ \alpha q,\sqrt{\alpha\beta qt},-\sqrt{\alpha\beta qt},q\sqrt{\alpha\beta t},-q\sqrt{\alpha\beta t}, & \end{matrix}\right]$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafı $(\alpha q,q)_n$ ile çarpılıp bölünür ve (7.2) eşitliği kullanılırsa ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

Altın, A. and Özarslan, M. A. 2004. Some families of generating functions for the multiple orthogonal polynomials associated with Bessel K-functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 297, 186-193.

Andrews, G. E., Askey, R. and Roy, R. 1999. Special Functions. Cambridge Univ. Pres., 664, United Kingdom.

Bailey, W. N. 1935. Generalized Hypergeometric Series, Cambridge Univ. Pres., 108.

Chen, I. C., Lin, S. D. and Srivastava, H. M. 2003. Certain classes of finite series relationships and generating functions involving the generalized Bessel polynomials, Appl. Math. Comput., 137, 261-275.

Erkuş, E. 1999. Klasik ortogonal polinomların doğurucu fonksiyonları. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, 94 s., Ankara.

González, B. and Srivastava, H. M. 2001. Some q-generating functions and associated generalized hypergeometric polynomials, Mathematical and Computer Modelling, 34, 133-175.

Jagtap, T. B. and Patil, K. R. 1990. Note on generating functions for the q-Jacobi polynomials, Bull. Cal. Math. Sec., 82, 392-394.

Jain, V. K. and Srivastava, H. M. 1995. Some families of multilinear q-generating functions and combinatorial q-series identities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 192, 413-438.

Lee, P. A., Ong, S. H. and Srivastava, H. M. 2000. Some generating functions for the Laguerre and related polynomials, Appl. Math. Comput., 108, 129-138.

Rainville, E. D. 1960. Special Functions. The Macmillian Company, 365, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Tümay GÜRLEK
Doğum Yeri	: Ankara
Doğum Tarihi	: 13.10.1981
Medeni Hali	: Bekar
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	: Çankaya Lisesi (1999)
Lisans	: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2003)
Yüksek Lisans	: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2003-2006)