ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ÇOK AMAÇLI STOKASTİK PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNE ETKİLEŞİMLİ BULANIK PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI

Kumru Didem ATALAY

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2006

Prof. Dr. Ayşen APAYDIN Danışmanlığında, Kumru Didem ATALAY tarafından hazırlanan "Çok Amaçlı Stokastik Programlama Problemlerine Etkileşimli Bulanık Programlama Yaklaşımı" adlı tez çalışması 07/11/2006 Tarihinde aşağıdaki jüri tarafından İstatistik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA** tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gülsüm HOCAOĞLU
Hacettepe Üniversitesi,
İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU
Ankara Üniversitesi,
İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK
Ankara Üniversitesi,
İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Hasan BAL
Gazi Üniversitesi,
İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ayşen APAYDIN
Ankara Üniversitesi,
İstatistik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU

Enstitü Müdürü

Otuz yılını bana adayan

Canım Anneme,

ÖZET

Doktora Tezi

ÇOK AMAÇLI STOKASTİK PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNE
ETKİLEŞİMLİ BULANIK PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI

Kumru Didem ATALAY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayşen APAYDIN

Doğrusal programlama problemi olarak modellenen birçok gerçek hayat probleminde katsayılar rasgele değişken olarak ortaya çıkar. Bu durumda kurulan probleme stokastik programlama problemi adı verilmektedir. Stokastik programlamanın çözümünde temel yaklaşım, problemin olasılıksal bir yapıdan deterministik bir yapıya dönüştürülerek bilinen yöntemlerle çözülmesidir. Stokastik programlama tekniklerinden biri olan şans kısıtlı programlama yaklaşımı, rasgele kısıtları belirli seviyelerine göre deterministik hale getirmeyi amaçlar. Rasgele değişken olan bu katsayılar için genel olarak ele alınan dağılım normal dağılımdır.

Bu çalışmada, A katsayılar matrisinin elemanlarının gamma dağılımına sahip bağımsız rasgele değişken olması durumu göz önüne alınmıştır. A katsayılar matrisinin sütun sayısı iki olduğunda, bu değişkenlerin toplamının dağılımı elde edilerek şans kısıtlarının deterministik eşitlikleri bulunmuştur. İkiden çok olduğu durumda, toplamın dağılımı ile normal dağılım arasındaki farkların tahmin yöntemi kullanılarak şans kısıtlarının deterministik eşitlikleri elde edilmiştir. Katsayıları normal ve gamma dağılımına sahip modellerin çözümü sonucunda karar değişkenlerinin birbirine yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Optimizasyon problemlerinde, belirsizlik rasgelelikten veya bulanıklıktan kaynaklanmaktadır. Amaç fonksiyonunun bulanık olması durumundaki belirsizlik için bulanık etkileşimli iki yeni algoritma önerilmiştir.

2006, 112 sayfa

Anahtar Kelimeler: Şans Kısıtlı Stokastik Programlama, Gamma Dağılımı, Esseen Eşitsizliği, Etkileşimli Bulanık Programlama, Çok Amaçlı Doğrusal Programlama.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

INTERACTIVE FUZZY PROGRAMMING APPROACH TO MULTI OBJECTIVE STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS

Kumru Didem ATALAY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Ayşen APAYDIN

Many real life problems which are modeled as linear programming problems where coefficients appear as random variables. In this case, such problems are called as stochastic programming problem. The basic approach in the stochastic programming is solving the problem with known methods by a converting the problem from a probability structure to a deterministic structure. The chance constraints in this programming approach can be forced from being the random coefficients to deterministic one according to their specific levels. Generally, the distribution for these coefficients which are assumed to be random variables is normal.

In this study, members of the coefficient matrix A are considered as independent random variables with a gamma distribution. Two approaches are suggested for finding the deterministic equivalent of the chance constraints. In the first case, where the number of columns of the coefficient matrix A is two, it is considered that deterministic equalities of chance constraints are found by obtaining the distribution of sum of these variables. In the second case where there are for more than two colums, deterministic equalities of chance constraints are obtained by using the estimation method of differences between the distribution of sum of these variables and normal distribution. As a conclusion from solving these models where the coefficients are gamma distributed and normal distributed, it is observed that in each case approximate results are obtained. In optimization problems, the uncertainity arises from randomness or fuzziness. Two new fuzzy interactive algorithms are suggested in this work for uncertainity under the fuzziness of objective function.

2006, 112 pages

Key Words: Stochastic programming with chance constraint, Gamma Distribution, Esseen Inequality, Interactive Fuzzy Programming, Multi Objective Linear Programming.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında desteklerini benden esirgemeyen ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ayşen APAYDIN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Önerileri ile yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Fazıl ALİOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)' na, Sayın Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'e ve Sayın Prof. Dr. Gülsüm HOCAOĞLU (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)' na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Sonsuz sabır ve destekleri için aileme bütün kalbimle teşekkür ederim.

Kumru Didem ATALAY

Ankara, Kasım 2006

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$E(\cdot)$	Beklenen Değer
$\tilde{\cdot}$	Bulanık
dd	Diğer Durumlarda
u_i	$i.$ şans kısıtı için belirlenen olasılık düzeyi
$\times$	Kartezyen Çarpım
$P(\cdot)$	Olasılık Ölçüsü
z^{OL}	Optimal çözümden daha küçük değere sahip amaç fonksiyonu
z^{OR}	Optimal çözümden daha büyük değere sahip amaç fonksiyonu
$\Gamma(.,.)$	$(\cdot,\cdot)$ parametreli Gamma Dağılımı
K_{p_i}	Standart normal dağılımın p_i olasılığı için ters değeri
$Var(\cdot)$	Varyans

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1 Giriş

Doğrusal programlama modeli olarak tanımlanan problemlerin parametrelerindeki değişiklikler en iyilik sonrası analizler yapılarak izlenebilmektedir. Ancak bu analizlerin yapılabilmesi için bir doğrusal programlama probleminin sağ yan değerlerinin, fiyat vektörünün ve A katsayılar matrisinin rasgele değerlere sahip olmaması gerekir. Bu tür modellere deterministik model denir. Bununla birlikte matematiksel programlama problemi olarak modellenen birçok gerçek hayat probleminde değişkenler rasgele olarak ortaya çıkmaktadır. Böyle bir durumda kurulan problem, stokastik programlama problemi olarak adlandırılır. Stokastik programlama, girdi verilerinin (fiyatlar, ihtiyaçlar vektörü, teknoloji katsayıları) rasgele değişken olması durumu ile ilgilenir. Parametreler rasgele değişken olduğundan, bu parametreler için bir olasılık dağılımı belirlenmelidir.

Model parametrelerinin rasgele değişken içermesi halinde bir belirsizlik durumu ortaya çıkar. Bu belirsizliğin, uygun seviyeleri sabitleyerek ortadan kaldırılması ve problemin orijinal yapısını bozmadan çözüme ulaştırılması mümkündür. Bu nedenle katsayıları rasgele değişken olan model, belirli yöntemlerle deterministik bir modele dönüştürülebilir. Stokastik programlama modelinde her bir kısıtın belirli olasılıkla gerçekleşmesini sağlayan probleme şans kısıtlı stokastik programlama modeli denir. Bilinen bir doğrusal programlama problemindeki $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,...,m$ kısıtları şans kısıtlı modellerde, $\mathrm{P}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \right] \ge 1 - u_i$, $i = 1,...,m$ biçiminde ifade edilir. Burada $u_i \in (0,1)$, $i = 1,...,m$ olmak üzere verilmiş tolerans değerleridir.

Kısıtların ve amaç fonksiyonunun (fonksiyonlarının) rasgele değişken olması bunların her birinin birer dağılıma veya ortak bir dağılıma sahip olmasını gerektirir. Literatürde, şans kısıtlarının ele alındığı problemlerin çoğunda modelin deterministik eşitliğinin bulunması kolay olduğu için normal dağılım seçilmiştir. Fakat farklı dağılımlar için şans kısıtlı modelin çözümü karmaşık bir hale gelebilmektedir.

Gerçek hayat problemlerinde karşılaşılan belirsizliklerin giderilmesinin bir diğer yolu da bulanıklık kuramının kullanılmasıyla mümkün olmaktadır. Bulanıklık kuramı, belirsiz ve kesin olmayan karar durumlarında probleme kesinlik kazandırmaktadır. Bulanıklık kuramını kullanarak geliştirilen etkileşimli bulanık programlama problemleri, karar vericinin etkisi altında probleme bir esneklik tanımasından dolayı çözüm aşamasında daha iyi sonuçlar elde edildiği gözlenmiştir.

Bu çalışmada, doğrusal programlama problemlerinde gamma dağılımlı katsayıların şans kısıtlı modelleri ele alınarak deterministik eşitliğinin bulunması üzerinde durulacaktır. Teknoloji katsayılarının gamma dağılımına sahip olması durumunda bağımsız rasgele değişkenlerin toplamının dağılımı ve normal dağılım arasındaki farkların tahmininin kullanıldığı Esseen eşitsizliğinden yararlanılacaktır. Bu eşitsizlik yardımı ile şans kısıtı, normal dağılım yaklaşımlarından biri kullanılarak deterministik hale getirilecektir.

Optimizasyon problemlerinde, belirsizlik rasgelelikten veya bulanıklıktan kaynaklanmaktadır. Katsayılarının rasgele değişken olması ile ortaya çıkan kısıtlardaki belirsizlik durumu, şans kısıtlı stokastik programlama probleminin deterministik eşitliğinin bulunması ile giderilir. Amaç fonksiyonun bulanık olması durumundaki belirsizlik için bulanık etkileşimli algoritmalar önerilecektir. İki belirsizliği de içeren bir problemde, öncelikle kısıtlar deterministik hale getirilecek, bulanık amaç değerli bu modelin çözümü için iki yeni algoritma verilecektir.

Çalışmanın İkinci Bölümünde stokastik programlama modeli tanımlanacak ve şans kısıtlı stokastik programlama modeli üzerinde durularak, katsayıların normal dağılım ve ki-kare dağılımına sahip olması durumunda deterministik eşitliklerinin bulunması açıklanacaktır.

Üçüncü Bölümde, bulanık doğrusal programlamanın mantığını kavrayabilmek amacıyla, bulanıklık kuramı üzerinde durulacaktır. Bulanık kuramın temel kavramları verilerek, bulanık karar kuramı tanımlanacaktır. Bulanık doğrusal programlama tanıtılarak, çok amaçlı şans kısıtlı programlama problemlerine bulanık doğrusal programlama ve etkileşimli bulanık doğrusal programlama yaklaşımları açıklanacaktır.

Çalışmanın özgün yanını oluşturan bölümlerden ilki olan Dördüncü Bölümde, katsayılar matrisinin a_{ij} elemanlarının gamma dağılımına sahip rasgele değişken olması durumunda, Esseen eşitsizliği ve Polya'nın normal dağılım yaklaşımı kullanılarak şans kısıtlarının deterministik eşitliği elde edilecektir. Ayrıca katsayılar matrisinin iki sütunlu olması durumunda, şans kısıtlı model için dağılım fonksiyonu elde edilerek farklı bir çözüm sunulacaktır.

Beşinci Bölüm çalışmanın ikinci özgün yanını oluşturmaktadır. Elde edilen deterministik modellerin çözümü için Üçüncü Bölümde verilen fakat gamma ve ki-kareli modellerin deterministik eşitliklerinin çözümü için yetersiz kalan algoritmalar geliştirilerek iki yeni algoritma elde edilecektir.

Altıncı Bölümde, teknoloji katsayılarının gamma dağılımına ve sağ yan değerlerinin normal dağılıma sahip şans kısıtlı bir model ele alınarak çalışmada önerilen yöntemle deterministik eşitliği elde edilecektir. Bu modelin çözüm sonuçları literatürde sunulan hem teknoloji katsayıları hem de sağ yan değerleri normal dağılıma sahip model ile karşılaştıracaktır. Ayrıca iki farklı model ele alınarak, Beşinci Bölümde önerilen algoritmalar uygulanacaktır.

1.2 Önceki Çalışmalar

Şans kısıtlı stokastik programlar ilk olarak Charnes ve Cooper (1959) tarafından modellenmiştir. Burada kesin olmayan, en iyi stokastik karar kurallarının geçici planlamasını içeren yeni bir kavramsal ve analitik yöntem önermişlerdir. Geliştirdikleri yöntemi tipik bir endüstriyel örneğin açıklanmasında kullanmışlardır. Çalışmalarında problemi iki doğrusal olmayan (ya da olan) parçaya ayırmışlardır. Bunlar olasılık kısıtlarıyla amaç fonksiyonunu en büyükleyen dağılımları belirlemek ve bu dağılıma en yakın olan dağılıma yaklaşımda bulunmaktır.

Charnes ve Cooper (1963), belirlenen konveks programlama problemlerinin yapısında olan deterministik eşitlikleri üç sınıfta toplanan amaçlar altındaki doğrusal karar kurallarının genel sınıfı için saptamışlardır. Bunlar: 1) En büyük beklenen değer (E model), 2) En küçük varyans (V model), 3) En büyük olasılık (P model) dır. Şans kısıtlı programlamanın diğer durumlarıyla birlikte bu üç sınıf için sonuçlar elde etmişlerdir. Burada, Simon (1959)'un "yeterlilik" için önerileri, E ve V model varyasyonları ile ilgili en iyi amaçları geliştirmekte kullanılmıştır. Şans kısıtlı programlama konusunu ilk olarak sıradan doğrusal programlama problemini kullanarak sunmuşlardır.

Symonds (1967), çalışmasında şans kısıtlı programlama problemleri için deterministik çözümler sunmuştur. Şans kısıtlı modele denk olan kesin modeli elde ederek, her iki modelin birbirine benzer sonuçlar verdiğini gözlemlemiştir. Bunu doğrusal programlama problemleri üzerinde uygulamıştır.

Sengupta (1970), şans kısıtlı doğrusal programlamanın bazı dağılımlar açısından genelleştirilmesi üzerinde çalışmıştır. Şans kısıtlarını doğrusal olmayan amaç fonksiyonu ile dinamik modeller üzerinde uygulamış ve sayısal örnekler sunmuştur. Uygulamalarında karar vericinin kullandığı fonksiyon kareseldir. Risk altında karar için uyumlu kriterler geliştirerek şans kısıtlı yaklaşımın uygulanabilirliğini göstermiştir. 1972 yılındaki çalışmalarında, stokastik programlama yöntemlerini sistem güvenilirliği yaklaşımı altında incelemiş, uygulama ve yaklaştırma yöntemlerini sunmuştur. Dinamik stokastik kontrol problemlerinin içindeki güvenilirlik analizi problemlerini araştırmıştır.

Resh (1970), stokastik hesaplama zamanları ile makine yükleme problemlerinin şans kısıtlı programlaması üzerine çalışmıştır. Formüle dayanan matematiksel analizlerini dışbükey olma zorunluluğu olmayan kümeler üzerindeki çözümler ile ona denk olan doğrusal olmayan problemlere taşımıştır. Bu matematiksel sonuçları doğrusal yaklaşımların belirlenmesi ve çözülmesinde kullanmıştır. Böylece problemi genelleştirilmiş ulaştırma probleminin modellenmesine uyarlamıştır.

Kolbin (1977), stokastik programlama problemlerini açıkça tanımlamıştır. Planlama ve yönetim problemlerindeki risk ve belirsizliği incelemiş, şans kısıtlı programlama modellerini sunmuştur. Aynı zamanda iki aşamalı ve çok aşamalı stokastik programlama problemlerini, stokastik programlama problemlerine oyun yaklaşımını, dual doğrusal stokastik programlama problemlerini ve stokastik programlama problemleri içindeki çözümlerin karar problemlerini incelemiştir.

Yazenin (1987), bulanık matematiksel programlama ve stokastik programlama arasındaki ilişkiler üzerine çalışmıştır. Her iki problem arasındaki farklılıkları ve benzerlikleri incelemiş ve bunları sayısal bir örnek üzerinde göstermiştir.

Mohamed (1992), sağ yan değerlerinin farklı dağılımlara sahip olması durumunda, şans kısıtlı problemlerin çözümü için bulanık hedef programlama yaklaşımını sunmuştur. Çalışmasında hedef kısıtlarını olasılıksal ve bulanık olarak ele almış ve bu şans kısıtlı bulanık hedef programlama probleminin deterministik eşitliğini elde ederek sayısal bir örnek üzerinde uygulamıştır.

Luhandjula ve Gupta (1996), optimizasyon problemlerinde verilerin bulanık ve rasgele olması durumunu incelemişlerdir. Bu tür problemler bulanık rasgele değişkenler kavramını oluşturmaktadır. Robust programlama ile bulanık rasgele değişken katsayılarına sahip problemin çözümünü araştırmışlardır.

Gröwe (1997), karar problemleri için doğrusal kısıtların sağ yan değerlerinde rasgele parametreler bulunması durumunda, şans kısıtlı stokastik programlar için parametrik olmayan tahmin prosedürünü ele almıştır. Kısıtlar içerisindeki ayrı yapıya sahip stokastik programlardaki rasgele sağ yan veri sonuçlarının bileşenlerinin bağımsız olduğunu varsaymıştır. Artan hazard oranlarının sağ yan değerlerini izotonik regresyon tahmini ile bilinmeyen olasılık dağılımlarını tahmin etmiştir. Tahmin için logaritmik içbükey ölçümlerle ve artan hazard oran dağılımları arasındaki ilişkiyi göz önüne alarak seçim yapmıştır. En iyi değerler ve tahmin edilmiş programların en iyi çözüm kümeleri için geniş kapsamlı sonuçlar bulmuştur. Tahmin edilmiş şans kısıtlı programların sayısal uygulamalarını tartışmış ve yaptığı testlerin sonuçlarını raporlar halinde sunmuştur.

Hulsurkar, Biswal ve Sinha (1997), çok amaçlı stokastik doğrusal programlama problemlerinin bulanık programlama yaklaşımının bir uygulamasını çalışmışlardır. Önerilen bir stokastik programlama problemini doğrusal olan veya olmayan deterministik bir probleme dönüştürdükten sonra uzlaşık çözümü bulmak için bulanık programlama yaklaşımını kullanmışlardır. Amaç fonksiyonundaki ve kısıtlardaki karar değişkenleri katsayılarını, sağ yan değerlerini normal rasgele değişkenler olarak kabul edip olasılıksal problemi deterministik probleme dönüştürmüşlerdir.

Déak (1998), stokastik programlama probleminin en iyilenmesinde çoklu normal dağılımlar için doğrusal regresyon tahmin edicileri sunmuştur. Tahmin edicileri m boyutlu normal dağılım veya bir doğru boyunca dağılım fonksiyonu biçiminde tasarlamıştır. Bu regresyon tahmin edicileri karesel fonksiyonlardır ve stokastik programlama problemlerinin en iyilenmesi sırasındaki sayısal problemlere uygulanabilir. Geliştirdiği temel yöntemi, uygun kümenin sınırlarını ve doğruların kesişimlerini bulmak için kullanmıştır. Yönsel türevin ve çoklu normal dağılımının gradyantının hesaplanabilirliğini göstermiş ve bazı sayısal sonuçlar da sunmuştur.

Liu ve Iwamura (1998), bulanık parametrelerle şans kısıtlı programlama üzerinde çalışmışlardır. Şans kısıtlı programlamayı, stokastikten bulanık ortama genişletmişlerdir. Stokastik programlamaya benzer olarak bulanık ortamdaki bazı şans kısıtlarının kesin denklemlerini sunmuşlardır. Ayrıca genellikle kesin denklemlere çevrilmesi zor olan şans kısıtları için bulanık simülasyon tekniği önermişlerdir. Sonuçta genetik algoritmayı temel alan bu bulanık simülasyonlar bu tür problemleri çözmek ve sayısal örnekleri tartışmak için dizayn edilmiştir.

Wu (1999), bulanık rasgele değişkenlerin, olasılık yoğunluk fonksiyonu kavramını sunmuştur. Bilinen olasılık yoğunluk fonksiyonlarından, bulanık rasgele değişkenlerin, bulanık olasılık yoğunluk fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Bulanık rasgele değişkenlerden, bulanık gözlemlerin bulanık olasılık yoğunluklarının üyeliklerini bulmak için, orijinal problemi doğrusal olmayan programlama problemine dönüştürerek çözmüşlerdir.

Mohammed (2000), düzgün rasgele değişken katsayılarına sahip sağ yan değerleri içeren şans kısıtlı bulanık hedef programlama üzerine çalışmıştır. Stokastik hedef programlama ve şans kısıtlı doğrusal hedef programlama hakkında temel düşünceyi sunmuştur. Olasılıksal hedef programlamayı deterministik hedef programlamaya dönüştürmüştür. Kısıtlardaki sağ yan değerlerinin düzgün dağılımlı rasgele değişken olduğu stokastik bulanık hedef programlama problemini ele almıştır. Kesin olmayan istek düzeyine sahip durumda şans kısıtlı hedef programlamayı göz önüne alarak bu düzeyin bilinen olasılık dağılım fonksiyonu ile rasgele dağıldığını göstermiştir. Buna denk deterministik hedef programlamayı geliştirmiş ve bunu örnekler üzerinde sunmuştur.

Sinha, Hulsurkar ve Biswal (2000), b_i 'lerin ortak normal dağıldığı durumda, çok amaçlı stokastik programlama problemlerine bulanık programlama yaklaşımını sunmuşlardır. Çalışmalarında çok amaçlı, şans kısıtlı programlama problemini; b_i 'lerin normal rasgele değişken ve kısıtların ortak dağılım fonksiyonuna sahip olduğu durumda incelemişlerdir. Bu olasılıksal problem ona denk olan deterministik doğrusal olmayan programlama problemine dönüştürülmüştür. Bu durumda bulanık programlama tekniklerini uzlaşık çözümlerin elde edilmesinde uygulamış ve sayısal örneklerle bu yöntemin açıklamıştır.

Liu (2000), bulanık ortamda bağımlı şans programlama üzerine çalışmıştır. Bağımlı-şans çok amaçlı programlama ve bağımlı şans hedef programlamadaki gibi bağımlı şans programlamanın bulanık ortamdaki yapısını vermiştir. Ayrıca belirsiz ortamların, olayların şans fonksiyonlarını ve mevcut kısıtların kapsamını stokastikten bulanık durumlara genişletmiştir. Çalışmasında genetik algoritmaya dayanan bulanık simülasyonu, bağımlı-şans modellerinin bazı sayısal örnekleriyle açıklamıştır.

Liu ve Member (2001), bulanık rasgele şans kısıtlı programlama üzerine çalışmışlardır. Bulanık rasgele programlama ile bulanık rasgele karar problemlerine ilişkin optimizasyon kuramını kurmuşlardır. Çalışmalarında bulanık rasgele olayların şansının yeni bir kavramını ve bulanık rasgele şans kısıtlı programlamanın genel yapısını tanımlamışlardır. Bulanık rasgele programlamanın alanından kaynaklanan, belirsiz fonksiyonların hesaplanması için bulanık rasgele simülasyonun tayfını geliştirmişlerdir. Son olarak bulanık rasgele programlama modellerinin çözümleri için yeterince güçlü ve etkili, melez, akıllı algoritmaların üretiminde bulanık rasgele simülasyonu, sinir ağlarını ve genetik algoritmayı birleştirerek bunların etkinliklerini bazı sayısal örneklerle vermişlerdir.

Mohan ve Nguyen (2001), çok amaçlı karmaşık, bulanık stokastik problemini çözmek için etkileşimli bir yöntem sunmuşlardır. Önerilen yöntem doğrusal olanı çözdüğü gibi karmaşık, bulanık stokastik ortamdaki doğrusal olmayan problemlerin çözümünde de geçerlidir. Burada rasgelelik ve bulanıklıkla ilgili olan çeşitli belirsizliklerin mevcut olduğu gösterilmiştir. Genelleştirilmiş E modeli tabanında ve bulanıklaştırılmış şans kısıtları yani stokastik kısıtları ve stokastik amaçları ele alarak bulanıklık yaklaşımı önerilmiştir. Bunun sonucunda stokastik amaçlarla birlikte stokastik kısıtlar, bulanıklık ortamında ele alınmış ve etkileşimli yöntem sürecinde karar vericinin stokastik amaçlar ve kısıtların tatmin edici bir çözüm anlayışı içerisindeyken bulanıklaştırılması önerilmiştir. Yöntemlerinin kullanımını verdikleri test örnekleriyle açıklamışlardır.

Kampas ve White (2003), çalışmalarında nitrat kirliliği kontrolü için olasılıksal programlamayı önermişlerdir ve bunu farklı olasılıksal kısıt yaklaşımlarıyla kıyaslamışlardır. Yayılımın normal dağılıma uygun olduğu varsayımı altında olasılıksal kısıt, nitrat yayılımı için en iyi yaklaşımı vermiştir.

Sakawa, Kato ve Nishizaki (2003), beklenen değer modelini kullanarak çok amaçlı doğrusal stokastik programlama problemleri için bir etkileşimli bulanık yöntem önermişlerdir. Amaç fonksiyonunda ve (veya) kısıtlarda rasgele değişken olması durumunda çok amaçlı problemlere çözüm aramışlardır.

Jana ve Biswal (2004), katsayıları sürekli dağılıma sahip rasgele değişkenler olan şans kısıtlı stokastik programlama problemlerinin çözümü için, genetik algoritmayı temel alan stokastik simülasyon sunmuşlardır. Genel olarak deterministik eşitliklerin elde edilmesi çok güç olduğundan özel olarak normal, üstel ve logaritmik normal dağılım üzerine çalışmışlardır. Şans kısıtlarının uygunluğunu stokastik simulasyon ve genetik algoritmayı uygulayarak elde ettikleri en iyi çözümlerle doğrulamışlardır. Bir sonraki makalelerinde Jana ve Biswal (2004), katsayıların kesikli dağılımlara sahip rasgele değişken olması durumunu incelemişlerdir.

Sakawa, Kato ve Katagiri (2004), en büyük olasılık modelini kullanarak katsayıları rasgele değişken olan çok amaçlı doğrusal programlama problemleri için etkileşimli bulanık yeterli yöntemi sunmuşlardır.

Sahoo ve Biswal (2005), katsayıları cauchy dağılımına sahip rasgele değişken olan stokastik doğrusal programlama problemlerini çalışmışlardır. Olasılıksal çok amaçlı doğrusal programlama problemlerinin çözümü için iki değişik yaklaşım ileri sürmüşlerdir.

2. STOKASTİK PROGRAMLAMA

2.1 Giriş

Doğrusal programlamanın uygulamalarında karşılaşılan genel problemlerden birisi de model parametrelerinin $\left(c_j, a_{ij}\, ve\, b_i\right)$ uygun değerlerini belirleme güçlüğüdür. Parametreler için kesin değerler alınır ve uygulanana kadar doğruluğu bilinmeyebilir. Bu bazen araştırmanın yansızlığını etkileyebilir. Bununla birlikte bu parametreler genellikle önceden belirlenmesi mümkün olmayan, rasgele değişkenlerin etkisi altında kalmaktadır. Kısacası modelde bazı veya tüm parametreler rasgele değişken olabilir. Bu tür problemlere stokastik programlama problemleri adı verilir (Hillier and Lieberman 1990).

Deterministik yaklaşım, karmaşık sistemlerin araştırılması ve optimizasyonu sırasındaki tasarlama, projelendirme ve yönetim durumlarının ekonomide, teknolojide ve askeri yönetimde yaygın olarak kullanılmasına olanak sağlar. Başlangıç verilerinin her kategorisinin bazı özelliklere sahip olduğu kabul edilirse, bu yaklaşım gerçek karmaşık sistemlerin dualitesine önem vermez. Başka bir deyişle amaç kurallarının etkisi altında gelişirler ve bu durumda deterministiktirler. Fakat bu sistemlerin deterministik gelişimleri sadece bir eğilimdir ve rasgele faktörlerle bozulurlar. Bu nedenle gerçek hayat problemlerinin çoğunda stokastik yaklaşım kullanmak daha doğru olacaktır (Kolbin 1977).

Rasgele değişken içeren katsayılar nispeten küçük varyansa sahipse standart yaklaşım ile duyarlılık analizi yapılabilir. Bununla birlikte eğer bazı katsayılar büyük varyansa sahip ise, bu yaklaşım yeterli değildir. Problemi modellemek için gerekli olan, optimizasyonun belirsizliğini doğrudan hesaba katmaktır. Bu nedenle de stokastik programlama yönteminin kullanılmasına gerek duyulur (Hillier and Lieberman 1990).

Stokastik programlamanın birçok uygulamasında rasgele değişken olan katsayıların olasılık dağılımları bilinmez. Fakat ampirik veriden bilinmeyen olasılık dağılımını tahmin etmek mümkündür. Ampirik dağılım veya normal dağılıma benzeyen dağılımların sabitlenmiş parametrik ailesinden gelen olasılık dağılımları üzerinde tamamlanmamış bilgi olduğunda bu yöntemler stokastik programların çözümünde kullanılır. Dupacova (1986), Kankova (1994) ve Römisch ve Schultz (1991) her iki yaklaşımın doğrulanması ve şans kısıtlı programların durağanlığını çalışmışlardır. Orta ölçekli örnekler için ampirik dağılıma sahip şans kısıtlı programların sayısal çözümü hala algoritmaya ve hesaplanabilirliğe dayanmaktadır. Bu zorluğun üstesinden gelmenin tek yolu uygun bölgede tanımlanmış olasılık fonksiyonlarını yumuşatmaktır. Bu da başka bir olasılıkla ona uygun olarak adapte edilmiş düzgün tahminlerin kullanımı ile mümkündür. Karar değişkenleri için doğrusal kısıtların sağ yan değerleri üzerinde oluşan rasgele parametreler olduğunda, şans kısıtlı programlar için parametrik olmayan tahmin süreci geliştirilebilir. Burada kullanılan varsayım, kısıtlardaki ayrılabilir yapıyla stokastik programlardaki sağ yan değerlerinin veri sonuçlarının bileşenlerinin bağımsızlığıdır. Logaritmik içbükey ve artan hazard oranları dağılımları arasındaki ilişkiyi kullanarak artan hazard oranlarının izotonik regresyon tahminleri ile sağ yan değerlerinin verilerinin bilinmeyen olasılık dağılımlarının tahmini araştırılmıştır. Burada kullanılan tahmin seçimlerinde tahmin edilmiş şans kısıtlı stokastik programlar doğrusal programlara denktir. Eğer rasgele örneklerin sayısı sonsuza gidiyorsa tahmin edilmiş stokastik programların optimal değerlerinin ve çözümlerinin asimptotik özelliklerini kullanarak çözüme ulaşılabilir (Gröwe 1997).

Belirsizlik altındaki doğrusal programlar için bazı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Belirsizlik aslında parametrelerin kesin olarak belirlenmesinin zor olduğu durumlarda ortaya çıkar. Stokastik programlamada tüm kısıtların bir olasılığa sahip olması gerekmektedir. Burada genel yaklaşım, problemin olasılıksal yapısını, problemin gerçek yapısını bozmadan ona eşdeğer olan deterministik duruma dönüştürmektir. Bu tip problemlerde kesinlik elde edilir ve simpleks yöntem ile çözülür (Taha 1997).

Stokastik programlama geçmişte, çoklu, uygun olmayan ve genellikle bütün amaçları en büyükleyen (en küçükleyen) tek bir uygun çözümü bulunmayan problemler için kullanılmıştır. Burada uygun çözüme götüren seçenek çözümlerden herhangi birini seçmek söz konusudur. Böyle bir yöntemde karar verici genellikle sonucun tatmin ediciliğine, amaçların en büyüklenmesinden (en küçüklenmesinden) daha fazla önem verir. Böylece parametreler stokastik olduğunda bu problemler daha karmaşık bir hal alacaktır (Hulsukar *et al.* 1997).

Stokastik programlama teknikleri çok aşamalı programlama ve şans kısıtlı programlama olmak üzere iki çeşittir. Bu çalışmada ele alınan şans kısıtlı stokastik programlama tekniği Kesim 2.2'de açıklanmıştır.

2.2 Şans Kısıtlı Stokastik Programlama

Stokastik programlama problemini deterministik programlama problemine dönüştürmek için kullanılan yaklaşımlardan biri şans kısıtlı programlama problemidir. Şans kısıtlı programlama rasgele verileri içerir ve belirlenen olasılık limitlerine kadar kısıt bozulmalarına izin verir. Eğer doğrusal kısıtlar, kısıtlardaki bozulmaların genişliğini belirten olasılık ölçülerinin kümesiyle birleştiriliyorsa sıradan doğrusal programlama modeli şans kısıtlı olarak adlandırılır. Kısıtların kısmi bozulmasına izin veren yöntemde, yaklaşık güvenliliği sağlamak için şans kısıtlı programlama yaklaşımı bir teknik olarak görülebilir. Bu yöntem genelleştirilmiş ve birçok endüstriyel ve ekonomik problemde uygulanmıştır (Sengupta 1972).

Sıradan bir doğrusal programlama modeli

$$\begin{aligned} &\max(\min) z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\dots,m \\ &x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n \end{aligned} \tag{2.1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $c_j,\ j = 1,\dots,n$'ler fiyatlar, $b_i,\ i = 1,\dots,m$'ler sağ yan değerleri ve $a_{ij},\ j = 1,\dots,n,\ i = 1,\dots,m$'ler katsayılar vektörünün elemanlarıdır.

Şans kısıtlı doğrusal programlama modeli ise

$$\max(\min) z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\mathrm{P}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge 1 - u_i, \; i = 1,...,m \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,...,n$$

$$u_i \in (0,1), \quad i = 1,...,m$$

biçiminde tanımlanır. Burada c_j, a_{ij} ve b_i rasgele değişkenler ve u_i' ler seçilmiş olasılıklardır. Burada x_j karar değişkenlerinin deterministik olduğu varsayılmıştır. c_j, a_{ij} ve b_i'nin bilinen varyans ve ortalamalara sahip rasgele değişkenler olduğu durumda yedi farklı problemle karşılaşılır. Bunlar;

i. Sadece a_{ij}'lerin rasgele değişken olduğu,

ii. Sadece b_i'lerin rasgele değişken olduğu,

iii. Sadece c_j'lerin rasgele değişken olduğu,

iv. a_{ij} ve b_i'lerin birlikte rasgele değişken olduğu,

v. a_{ij} ve c_j'lerin birlikte rasgele değişken olduğu,

vi. c_j ve b_i'lerin birlikte rasgele değişken olduğu,

vii. c_j, a_{ij} ve b_i'lerin tümünün rasgele değişken olduğu,

modellerdir (Hulsurkar *et al.* 1997).

2.3 Şans Kısıtlı Stokastik Doğrusal Programlama Modellerinde Dağılımlar

(2.2) modelinde katsayıların rasgele değişken olması durumunda her birinin belli bir dağılıma sahip olması veya bunların ortak dağılımının bilinmesi gerekmektedir. Problemin çözüm aşamasında amaç, modeli rasgele değişkenlerden kurtararak şans kısıtlı probleme denk olan deterministik problemin elde edilmesidir.

Katsayıların normal ve ki kare dağılımına sahip olması durumunda elde edilen şans kısıtlı problemlerin deterministik eşitliklerinin elde edilmesi alt kesimlerde verilmiştir.

2.3.1 Katsayıların normal dağılıma sahip olduğu şans kısıtlı stokastik doğrusal programlama problemleri

Doğrusal programlama problemlerinde katsayıların rasgele değişken olduğu durumda genel olarak ele alınan dağılım normal dağılımdır. Bu varsayım altında (2.2) modeli ile verilen şans kısıtlı stokastik doğrusal programlama probleminde c_j, a_{ij} ve b_i'ler normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir.

Katsayıları normal dağılıma sahip şans kısıtlarının deterministik eşitliklerinin bulunması aşağıdaki dört durum ile verilmiştir. Diğer durumlar bu dört durumun kombinasyonu ile elde edilebilir.

Durum 1: Sadece a_{ij} katsayıları rasgele değişken ise;

a_{ij}, $E\left(a_{ij}\right)$ ortalamalı ve $Var\left(a_{ij}\right)$ varyanslı normal dağılıma sahip rasgele değişken olsun. a_{ij} ve a_{kl} rasgele değişkenleri arasındaki kovaryansın bilindiği varsayılsın. d_i rasgele değişkeni

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,, \qquad i = 1,...,m$$

biçiminde tanımlansın. $a_{i1},...,a_{in}$ katsayıları normal dağılımlı rasgele değişkenler ve $x_1,...,x_n$ karar değişkenleri olmak üzere, d_i rasgele değişkeni

$$E\left(d_i\right) = \sum_{j=1}^{n} E\left(a_{ij} x_j\right), \quad i = 1,...,m$$

ve

$$Var\left(d_i\right) = X^T V_i X, \qquad i = 1,...,m$$

ile normal dağılır. Burada V_i,

$$V_i = \begin{bmatrix} Var\left(a_{i1}\right) & Cov\left(a_{i1},a_{i2}\right)...Cov\left(a_{i1},a_{in}\right) \\ Cov\left(a_{i2},a_{i1}\right) & Var\left(a_{i2}\right) \quad ...Cov\left(a_{i2},a_{in}\right) \\ . & . \qquad\qquad . \\ . & . \qquad\qquad . \\ Cov\left(a_{in},a_{i1}\right) & Cov\left(a_{in},a_{i2}\right)...Var\left(a_{in}\right) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanan i 'inci kovaryans matrisidir. Bu durumda (2.2) modelinin kısıtları,

$$P\left[d_i \le b_i\right] \ge 1 - u_i \tag{2.3}$$

olarak yazılabilir. $\dfrac{\left(d_i - E\left(d_i\right)\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}}$ rasgele değişkeni ortalaması sıfır ve varyansı bir olan standart normal dağılıma sahip olduğundan, (2.3) ile verilen kısıt

$$P\left[\frac{d_i - E\left(d_i\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}} \le \frac{b_i - E\left(d_i\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}}\right] \ge 1 - u_{i,} \quad i = 1,...,m \tag{2.4}$$

biçiminde yazılır. $\phi\left(z\right)$, standart normal dağılıma sahip z' nin dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$P\left[d_i \le b_i\right] = \phi\left[\frac{b_i - E\left(d_i\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}}\right]$$

olarak yazılır. Eğer K_{u_i} , $\phi\left(K_{u_i}\right)=1-u_i$ olan standart normal değişkenin değeri olarak alınırsa (2.4) kısıtı,

$$\phi\left[\frac{b_i-E\left(d_i\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}}\right]\geq\phi\left(K_{u_i}\right),\qquad i=1,...,m \tag{2.5}$$

biçiminde ifade edilir. (2.5) eşitsizliği, sadece

$$\frac{b_i-E\left(d_i\right)}{\sqrt{Var\left(d_i\right)}}\geq K_{u_i}$$

olduğu durumda sağlanır, veya

$$E\left(d_i\right)+K_{u_i}\sqrt{Var\left(d_i\right)}\leq b_i\qquad i=1,...,m \tag{2.6}$$

şeklinde de yazılabilir. (2.6) eşitsizliğinde d_i rasgele değişkeninin değeri yerine konularak,

$$\sum_{j=1}^{n}E\left(a_{ij}\right)x_j+K_{u_i}\sqrt{X^TV_iX}\leq b_i,\quad i=1,...,m \tag{2.7}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.7) kısıtı, orijinal olasılıksal doğrusal kısıtlara denk, deterministik doğrusal olmayan kısıtlardır. Bu durumda, olasılıksal programlama probleminin çözümü,

$$\begin{aligned}&\max(\min)z\left(\mathbf{x}\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\&\sum_{j=1}^{n}E\left(a_{ij}\right)x_j+K_{u_i}\sqrt{X^TV_iX}\leq b_i\qquad i=1,...,m\\&x_j\geq 0\qquad j=1,...,n\end{aligned} \tag{2.8}$$

biçiminde oluşturulan deterministik doğrusal olmayan programlama probleminin çözümü ile elde edilir. Eğer tüm normal dağılımlı a_{ij} rasgele değişkenleri bağımsız ise kovaryans terimlerinin hepsi sıfır olacaktır ve (2.7) ile verilen kısıtlar,

$$\sum_{j=1}^{n} E\left(a_{ij}\right)x_j + K_{u_i}\sqrt{Var\left(a_{ij}\right)x_j^2} \le b_i \qquad i=1,\ldots,m \tag{2.9}$$

biçimine dönüşecektir (Hulsurkar *et al.* 1997).

Durum 2: Sadece b_i katsayıları rasgele değişken ise;

b_i, $E\left(b_i\right)$ ortalamalı ve $Var\left(b_i\right)$ varyanslı normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. Bu durumda (2.2) modelinde verilen şans kısıtı

$$P\left[\frac{b_i - E\left(b_i\right)}{\sqrt{Var\left(b_i\right)}} \ge \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E\left(b_i\right)}{\sqrt{Var\left(b_i\right)}}\right] \ge p_i, \qquad i=1,\ldots,m \tag{2.10}$$

biçiminde yazılır. Burada $p_i = 1-u_i$ ve $\frac{\left(b_i - E\left(b_i\right)\right)}{\sqrt{Var\left(b_i\right)}}$ standart normal rasgele değişkendir. Bu durumda (2.10) ile verilen eşitsizlik

$$1-P\left[\frac{b_i - E\left(b_i\right)}{\sqrt{Var\left(b_i\right)}} \le \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E\left(b_i\right)}{\sqrt{Var\left(b_i\right)}}\right] \ge p_i$$

veya

$$P\left[\frac{b_i - E(b_i)}{\sqrt{Var(b_i)}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E(b_i)}{\sqrt{Var(b_i)}}\right] \leq 1 - p_i \qquad (2.11)$$

biçimine dönüşür. Eğer, K_{p_i}, $\phi\left(K_{p_i}\right) = 1 - p_i$ olan standart normal değişkenin değeri olarak alınırsa (2.11) ile verilen kısıtlar,

$$\phi\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E(b_i)}{\sqrt{Var(b_i)}}\right) \leq \phi\left(K_{p_i}\right) \qquad (2.12)$$

biçiminde ifade edilir. (2.12) eşitsizliği sadece

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E(b_i)}{\sqrt{Var(b_i)}} \leq K_{p_i} \qquad i = 1,...,m$$

olduğu durumda sağlanır ya da,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq E(b_i) + K_{p_i}\sqrt{Var(b_i)} \qquad i = 1,...,m \qquad (2.13)$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece olasılıksal doğrusal programlama problemine denk olan deterministik doğrusal programlama problemi,

$$\begin{aligned} &\max(\min) z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq E(b_i) + K_{p_i}\sqrt{Var(b_i)} \qquad i = 1,...,m \\ &x_j \geq 0 \qquad j = 1,...,n \end{aligned} \qquad (2.14)$$

biçiminde ifade edilir (Hulsurkar *et al.* 1997).

Durum 3: Sadece c_j katsayıları rasgele değişken ise,

c_j katsayıları normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olduğundan $z(\mathbf{x})$, amaç fonksiyonu da normal dağılıma sahip olacaktır. $z(\mathbf{x})$'in ortalaması,

$$E\left(z(\mathbf{x})\right) = \sum_{j=1}^{n} E\left(c_j\right)x_{j,} \tag{2.15}$$

olacaktır. Böylece E-modele (beklenen değer optimizasyonuna) sahip deterministik amaç fonksiyonu

$$\max(\min)E\left(z(\mathbf{x})\right) = \sum_{j=1}^{n} E\left(c_j\right)x_{j,} \tag{2.16}$$

biçimine dönüşecektir.

Durum 4: a_{ij} ve b_i katsayıları birlikte rasgele değişken ise;

$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$ şeklinde tanımlanan bir rasgele değişken olmak üzere, (2.2) modelinde verilen şans kısıtları

$$P\left[h_i \le 0\right] \ge 1 - u_i \qquad i = 1,...,m \tag{2.17}$$

biçiminde yazılabilir. h_i normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerin doğrusal kombinasyonu olarak verildiğinden normal dağılıma sahip olacaktır. Böylece (2.17) ile verilen kısıt,

$$P\left[\frac{h_i - E(h_i)}{\sqrt{Var(h_i)}} \leq \frac{-E(h_i)}{\sqrt{Var(h_i)}}\right] \geq 1 - u_i \qquad i = 1,...,m \tag{2.18}$$

şeklinde yazılacaktır. Burada $\dfrac{h_i - E(h_i)}{\sqrt{Var(h_i)}}$ standart normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir. Böylece K_{u_i}, $\phi\left(K_{u_i}\right) = 1 - u_i$ olan standart normal değişkenin değeri olarak alınırsa (2.18) kısıtı,

$$\phi\left[\frac{-E(h_i)}{\sqrt{Var(h_i)}}\right] \geq \phi\left(K_{u_i}\right) \quad i = 1,...,m \tag{2.19}$$

biçiminde ifade edilir. (2.19) eşitsizliği sadece,

$$\frac{-E(h_i)}{\sqrt{Var(h_i)}} \geq K_{u_i}, \qquad i = 1,...,m$$

olduğu durumda sağlanır veya

$$E(h_i) + K_{u_i}\sqrt{Var(h_i)} \leq 0, \qquad i = 1,...,m \tag{2.20}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu durumda olasılıksal doğrusal programlama problemine denk olan doğrusal olmayan deterministik programlama problemi, h_i rasgele değişkenlerinin de yerine yazılmasıyla

$$\max\left(\min\right) z\left(\mathbf{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) + K_{u_i} \sqrt{Var\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right)} \leq 0 \qquad i = 1,...,m \qquad (2.21)$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,...,n$$

biçimine dönüşür (Taha 1997).

Burada dört model açıklanmıştır. Diğer modeller bu dört modelin kombinasyonlarından elde edilebilir.

2.3.2 Katsayıların ki-kare dağılıma sahip olduğu şans kısıtlı stokastik doğrusal programlama problemleri

Katsayıları ki kare dağılımına sahip olan şans kısıtlı modeller bu kesimde ayrıntılı olarak verilecektir. Şans kısıtlı modellere ait dört farklı durum açıklanacaktır.

(2.1) ile verilen sıradan doğrusal programlama modeli vektör notasyonları ile

$$\begin{aligned} \max(\min) z &= c'\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} &\leq b \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (2.22)$$

biçiminde yazılabilir.

Durum 1: Sadece b_i katsayıları rasgele değişken ise;

$a_i^{'}$, A katsayılar matrisinin *i*'inci satır vektörü ve u_i, 0 ile 1 arasında sabit olmak üzere, b rasgele değişkeninin b_i elemanları s_i parametresi ile bağımsız merkezsel ki-kare değişkenleri olsun. Bu durumda model (2.2) ile verilen şans kısıtları,

$$P\left(a_i^{'}\mathbf{x} \le b_i\right) \ge u_i \qquad i = 1,...,m \tag{2.23}$$

biçiminde yazılabilir. (2.23) ile verilen şans kısıtının deterministik eşitliği

$$\begin{aligned} a_i^{'}\mathbf{x} &\le F^{-1}\left(1-u_i\right) \quad i = 1,...,m \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.24}$$

biçiminde yazılır. Burada $F^{-1}\left(w\right)$, $w = 1-u_i$ değeri ile s_i serbestlik dereceli ki-kare dağılım fonksiyonunun tersidir. (2.24) eşitsizliğindeki $F^{-1}\left(1-u_i\right)$ terimi ki-kare tablosundan rahatlıkla bulunabilir. Bununla birlikte her bir s_i değerinin veya bunun tahminlerinin bilindiği varsayılır (Sengupta 1972).

Durum 2: Sadece a_{ij} (yani $a_i^{'}$ vektörünün elemanları) katsayıları bağımsız merkezsel ki-kare değişkenleri ise;

$a_k^{'}$, (2.22) modelindeki A matrisinin *k*'ıncı satırını göstermek üzere,

$$d_k = a_k^{'}\mathbf{x}, \quad k = 1,...,m \tag{2.25}$$

eşitlikleri tanımlansın. Her bir a_{ij} katsayısının ki-kare dağıldığı varsayılırsa, a_{ij} rasgele değişkenleri, normal dağılımlı rasgele değişkenlerin karesi olarak yazılabilir. Bu durumda,

$$\xi_{kj}^2 = \left(n_{kj}\tau_j\right)^2 \qquad \tau_j = x_j^{1/2} \ge 0 \qquad k = 1,...,m \quad j = 1,...,n$$

biçiminde tanımlansın. Burada n_{kj} sonlu ortalama ve varyansla normal dağılan rasgele değişkenlerdir ve a_{kj}, n_{kj}^2'nin dağılımına sahiptir. Eğer τ_j'ler stokastik olmayan karar değişkenleri ise ve n_{kj}'lerin bağımsız olduğu varsayılırsa , $\xi_{k1}, \xi_{k2,...,}\xi_{kn}$'ler

$$
\begin{aligned}
m_{kj} &= E\left(\xi_{kj}\right) \\
V_{kj} &= E\left(\xi_{kj} - m_{kj}\right)^2 \qquad j = 1,\dots,n
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

olmak üzere sonlu beklenen değer ve varyansla bağımsız normal rasgele değişkenler olduğu görülür. Bu durumda

$$
d_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_{kj}^2 = \sum_{j=1}^{n} V_{kj}\left(q_{kj} + \overline{m}_{kj}\right)^2 \tag{2.27}
$$

biçiminde yazılır. Burada ortalama ve q_{kj}

$$
\overline{m}_{kj} = \frac{m_{kj}}{V_{kj}^{1/2}}, \qquad q_{kj} = \frac{\left(\xi_{kj} - m_{kj}\right)}{V_{kj}^{1/2}}
$$

eşitlikleri ile verilir ve $\xi_{kj} \sim N\left(m_{kj}, V_{kj}\right)$ ve $q_{kj} \sim N\left(0,1\right)$' dir. Böylece (2.27) ile verilen d_k'nın karakteristik fonksiyonu, $\Phi\left(t\right)$,

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(t\right) &= E\left(e^{it\sum_{j=1}^{n}\xi_{kj}^2}\right) = E\left(e^{it\sum_{j=1}^{n}V_{kj}\left(q_{kj}+\overline{m}_{kj}\right)^2}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(q_{kj}^2\right)} e^{itV_{kj}\left(q_{kj}+\overline{m}_{kj}\right)^2} dq_{kj}\right]
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

işleminin çözümü sonucunda

$$
\Phi\left(t\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - 2itV_{kj}\right)^{-1/2} \exp\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(itV_{kj}\overline{m}_{kj}^2\right)}{1 - 2itV_{kj}}\right\} \tag{2.29}
$$

elde edilmektedir (Sengupta 1970). Buradan d_k'nın her bir momenti kolayca hesaplanabilmektedir. Bilinen λ merkezsel olmama parametreli ve n serbestlik dereceli tekli merkezsel olmayan ki-kare değişkeninin karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t) = (1-2it)^{-n/2} \exp\left\{\frac{\lambda it}{1-2it}\right\} \tag{2.30}$$

biçimindedir. Bu karakteristik fonksiyon yardımıyla ortalama $n+\lambda$ ve varyans $2(n+2\lambda)$ olarak bulunur. Merkezsel olmama parametresi $\lambda = 0$ olarak alınırsa genel (merkezsel) ki-kare karakteristik fonksiyonu elde edilir. Bu durumda (2.29) karakteristik fonksiyonu (2.30) karakteristik fonksiyonuna benzer olarak merkezi olmayan ki-kare dağılacaktır. (2.29) karakteristik fonksiyonu yardımıyla ortalama,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(V_{kj} + V_{kj}\overline{m}_{kj}^2\right) \tag{2.31}$$

ve varyans,

$$2\sum_{j=1}^{n}\left(V_{kj}^2 + 2V_{kj}^2\overline{m}_{kj}^2\right) \tag{2.32}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\overline{m}_{kj} = \frac{\left(E\left(n_{kj}\right)\right)\left(x_j^{1/2}\right)}{V_{kj}^{1/2}}$$

$$V_{kj} = x_j E\left(n_{kj} - E\left(n_{kj}\right)\right)^2, \qquad x_j = \tau_j^2$$

biçimindedir (Sengupta 1972).

Buraya kadar sadece a_{ij} değişkenlerinin rasgele olduğu durum incelenmiş ve (2.27) ile tanımlanan d_k 'nın dağılımı elde edilmiştir. d_k, (2.31) ile verilen ortalama ve (2.32) ile verilen varyansla merkezsel olmayan ki-kare dağılır. Merkezsel olmama parametresi $\lambda = \sum_{j=1}^{n} V_{kj} \overline{m}_{kj}^2$ 'dir.

Bununla birlikte eğer herhangi bir y rasgele değişkeni, h serbestlik derecesi ile merkezsel ki-kare dağılımına sahipse bunun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = \frac{e^{-\frac{1}{2}y} y^{\frac{1}{2}h-1}}{2^{\frac{1}{2}h}\Gamma\left(\frac{1}{2}h\right)}$$

biçiminde gösterilir. y 'ler $\chi_k^2(h)$ ile gösterilsin. a_{kj} rasgele değişkenlerinin ortalamaları yani $E\left(n_{kj}^2\right)$ 'ler

$$E\left(n_{kj}^2\right) = \overline{a}_{kj}$$

olarak alınırsa ve a_{kj} ' leri $\chi_{ij}^2\left(\overline{a}_{kj}\right)$ ile gösterilirse,

$$d_k = l_k \chi_k^2(h)$$

olacaktır. Burada

$$l_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j^2}{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j} \quad \text{ve} \quad h = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j^2\right)}$$

biçiminde tanımlanmıştır (Patnaik 1949). Böylece şans kısıtlı problem,

$$P\left(l_k \chi_k^2(h) \le b_k\right) \ge u_k \qquad k = 1,\dots,m$$

ifadesi yardımıyla hesaplanabilir. Burada işlemleri kolaylaştırmak amacıyla h niceliği için alternatif yaklaşım kullanılır. Bu yaklaşım için,

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j^2\right)} \le \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj}$$

eşitliği tanımlanır. Bununla birlikte D_k istenilen bir sabit olmak üzere

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j^2\right)} = D_k \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj}$$

yazılabilir. Bu durumda , D_k 'nın bir alınmasıyla, yani h ' ın en üst sınırının seçilmesiyle,

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j^2}{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j}\right) \chi_k^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj}\right)$$

ifadesi bulunur ve d_k rasgele değişkeninin yaklaşık olarak dağılımı elde edilebilir. Böylece şans kısıtları

$$P\left\{\chi_k^2\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj}\right) \le \frac{b_k \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j}{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j^2}\right\} \ge u_k; \qquad \left(b_k > 0\right) \qquad (2.33)$$

biçimine dönüşür. Alternatif olarak (2.33)

$$F_k\left(b_k \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j \bigg/ \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j^2\right) \geq u_k \qquad k = 1,...,m$$

yazılabilir. u_k'lar önceden belirlenmiş tolerans ölçümleridir. Burada $F_k(w)$ serbestlik derecesi $N = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj}$ olan merkezsel ki-karenin dağılım fonksiyonudur ve

$$F_k(w) = \left(2^{N/2}\Gamma(N/2)\right)^{-1} \int_0^w t^{(N/2)-1} \exp(-t/2)\,dt$$

ile gösterilir. Seçilen serbestlik derecesine göre w değerleri merkezsel ki-kare tablosundan rahatlıkla bulunur, ya da doğrudan

$$w = \frac{b_k \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_k}{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j^2}$$

eşitliği elde edilir. Böylece şans kısıtlı eşitlik,

$$b_k \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j - q_k \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j^2 \geq 0 \qquad (2.34)$$

biçimine dönüşecektir. Burada $q_k = w_o$ olarak alınır. Bu durumda eşdeğer deterministik model dışbükey programlama problemi olmak üzere,

$$\begin{gathered} \min z = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ b_k \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j - q_k \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_j^2 \geq 0; \quad q_k = w_o \\ x_j \geq 0 \quad k = 1,...,m, \quad j = 1,...,n \end{gathered} \qquad (2.35)$$

biçiminde modellenir (Sengupta 1970).

Durum 3: a_{ij} (yani $a_i^{'}$ vektörünün elemanları) ve b_i ortak bağımsız merkezsel ki-kare değişkenleri ise;

(2.22) modelindeki $A\mathbf{x} \le b$ kısıtı $P\left(A\mathbf{x} \le b\right) \ge u$ olmak üzere şans kısıtı olarak ele alınsın. İlk olarak,

$$Q_k = \frac{d_k}{b_k} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j}{b_k} \qquad k = 1,...,m \tag{2.36}$$

değişkeni tanımlansın. Bu durumda şans kısıtlı eşitlik

$$P\left(Q_k \le 1\right) \ge u_k \qquad k = 1,...,m$$

biçiminde yazılabilir.

Durum 2'de verildiği üzere (2.36)' nın paydası merkezsel olmayan ki-kare dağılımına sahiptir. Aynı zamanda b_i'ler, $\overline{b_i}$ ortalamasına sahip merkezsel ki-kare değişkenleri olarak alındığında (2.36) ile verilen oran merkezsel olmayan F dağılımına sahip olacaktır. Merkezsel olmayan F dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f\left(x\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{-L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^j}{j!B\left(\frac{v_1}{2}+j, \frac{v_2}{2}\right)} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\left(\frac{v_1}{2}\right)+j} g\left(x\right);$$

eşitliği ile gösterilir. Burada,

$$g\left(x\right) = x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)+j-1} \left(1 + \frac{v_1 x}{v_2}\right)^{\frac{-(v_1+v_2)}{2-j}}$$

olarak alınmıştır. Diğer notasyonlar,

$B(m,n)$: Standart beta fonksiyonunu

v_1, L : Payın serbestlik derecesini ve payın merkezsel olmama parametresini (merkezsel olmayan ki-kare parametresini)

v_2 : Paydanın serbestlik derecesini

göstermek üzere (2.36) ifadesinin dağılımı,

$$\frac{l_k \chi_k^2(h) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj}}{\chi_k^2(\overline{b}_k)\big/\overline{b}_k} = \frac{\dfrac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j^2}{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_k} \chi_k^2(h) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj}}{\chi_k^2(\overline{b}_k)\big/\overline{b}_k}$$

oranının dağılımına eşittir. Bu durumda,

$$r = \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj}\right) \Big/ b_k \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_k\right) \tag{2.37}$$

ve serbestlik dereceleri

$$M_1 = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj}; \quad M_2 = \overline{b}_k \tag{2.38}$$

olmak üzere $Q_k = \dfrac{d_k}{b_k}$ oranı $rF(M_1, M_2)$'nin dağılımı ile bulunur. $F(M_1, M_2)$, M_1 ve M_2 serbestlik dereceli merkezsel F dağılımıdır. Şans kısıtları,

$$P\left(F(M_1, M_2) \le 1/r\right) \ge u_{k,} \ r > 0$$

ya da alternatif olarak,

$$G_k\left(\tfrac{1}{r}\right) \geq u_k \qquad k = 1,...,m \tag{2.39}$$

biçiminde yazılır. Burada $G_k(w)$, (2.38)' da verilen serbestlik dereceleri ile merkezsel F değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonudur. Böylece verilen u_k ve serbestlik dereceleri için pozitif sabit l 'nin değeri tablodan bulunabilir. Şöyle ki,

$$l_k = 1/r_0$$

değeri (2.39) eşitsizliğini sağlar. Böylece eşdeğer deterministik model,

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\overline{b}_k\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_k\right) - l_k\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj}\right) \geq 0$$

$$x_j \geq 0 \quad k = 1,...,m, \quad j = 1,...,n$$

biçimine dönüşür (Sengupta 1972).

Durum 4: a_{ij}, b_i ve c_j 'ler ki-kare dağılımına sahip rasgele değişken ise,

Durum 3' de verilen modelde, a_{ij}, b_i katsayıları birlikte rasgele değişken olduğu durum incelenmişti ve denk deterministik kısıt elde edilmişti. O halde Durum 4'de amaç fonksiyonunun rasgeleliğini incelemek yeterlidir.

Amaç fonksiyonu, $z = \mathbf{c}'\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 'nin en büyüklemesi her verilen olasılık ölçüsü v (0< v <1) ve alt limit f için ele alınmıştır. Burada,

$$P\left(z=\mathbf{c}^{'}\mathbf{x}\leq f\right)=v$$

olasılığı, c fiyat vektörünün rasgele olduğu durumda z amaç fonksiyonunun beklenen değerinin en büyüklemesini temsil eder. Bir en büyükleme problemi için eğer toplam kar z, en azından z_0'a eşit veya z_0'dan büyükse yani,

$$P\left(z\geq z_0\right)=u_{0,}\qquad 0\leq u_0\leq 1 \tag{2.40}$$

eşitliğinin en büyüklemesi ise, seçilmiş u_0 olasılığı ile karar vericinin istediği maksimizasyonu sağlar. (2.40) durumu ele alınsın. u_i'ler önceden atansın ve c_j elemanları ($\mathbf{c}$ fiyat vektörünün elemanları) ortalaması $\overline{c}_j$ ile ortak bağımsız dağılan ki-kare değişkenleri olsun ve $\chi_j^2\left(\overline{c}_j\right)$ ile gösterilsin. Böylece,

$$R=\sum_{j=1}^{n}x_j\chi_j^2\left(\overline{c}_j\right);\qquad \overline{c}_j : c_j \text{'nin beklenen değeridir.} \tag{2.41}$$

oranının dağılımı Durum 2' dekine benzer olarak,

$$R=l\chi^2(h);\ \text{burada}\quad l=\frac{\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j^2}{\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j},\qquad h=\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j$$

biçiminde tanımlanmasıyla ortaya çıkar. Bu durumda deterministik amaç fonksiyonu,

$$\max z_0=w_0\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j^2\Big/\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j \tag{2.42}$$

problemine indirgenir. Burada,

$$w_0 = F^{-1}\left(1-u_0\right)$$

olmak üzere pozitif sabittir ve $F\left(v\right)$, $\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j$ ortalamalı merkezsel ki-kare değişkeninin dağılım fonksiyonudur.

(2.42) fonksiyonunu geliştirerek, $t(z_0, x_j)$ fonksiyonu,

$$t(z_0, x_j) = z_0\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j - w_0\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j^2 \qquad (2.43)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda z_0'ın en büyüklemesi, $t(z_0, x_j)$'nin en büyüklemesine dönüşecektir. Böylece Durum 4 için deterministik model,

$$\begin{aligned}
&\max t(z_0, x_j) = \sum_{j=1}^{n} z_0\overline{c}_j x_j - \sum_{j=1}^{n} w_0\overline{c}_j x_j^2 \\
&\overline{b}_k\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_k\right) - d_k\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{kj}\right) \geq 0 \\
&x_j \geq 0 \quad k = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n
\end{aligned} \qquad (2.44)$$

olarak elde edilir. Eğer (2.44) modelinde amaç fonksiyonu olarak (2.42) eşitliğini kullanırsa problem doğrusal olmayan kesirli fonksiyonel programlama ile, eğer (2.43) eşitliğini kullanırsa iç bükey programlama problemi olarak ele alınır ve çözüme ulaştırılır (Sengupta 1970).

.

3. ÇOK AMAÇLI ŞANS KISITLI STOKASTİK PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNE BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE ETKİLEŞİMLİ BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA YAKLAŞIMLARI

3.1 Giriş

Gerçek dünyaya ilişkin problemler kesinlikten çok belirsizlik içerir. Bu belirsizlik, problemlerin stokastik yapıları incelenerek, karmaşık problemlerin çözümünde daha yeterli sonuçlar elde edilerek giderilebilir. Belirsizliğin giderilmesinin bir diğer yolu da bulanıklık kuramının kullanılması ile mümkündür. Bulanık küme kavramı, Aristo mantığının yetersiz kaldığı, belirsiz ve kesin olmayan karar durumlarında probleme kesinlik kazandırarak çözümdeki sorunu ortadan kaldırır.

20. yüzyılın ortalarına doğru karmaşık dünya problemlerinin belirsizlik içermeyen kesin parametrelere sahip matematiksel modellenmesi zor bir hal almaya başlamış ve yöneylem araştırması teknikleri gündeme gelmiştir. Fakat uygulama alanlarında kesinlik kavramı yetersiz kalmıştır. Geleneksel yöneylem araştırması yaklaşımları uygulamalı karar verme problemlerinde istenilen sonuçları vermemiştir. Ortaya çıkan bu belirsizlikler bulanıklık ve rasgelelik kavramını doğurmuştur. 1960'larda olasılık kuramının yaygın olarak kullanılmasından sonra, 1965 yılında L.A. Zadeh bulanık kuramı geliştirmiştir. Zadeh' in bu kuramından sonra bulanıklık yöneylem araştırması, işletme, kontrol kuramı ve istatistikte yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Karar sürecinde bulanık kümelerin rolünü en iyi ortaya koyan Bellman ve Zadeh olmuştur. Günümüzde bulanık kuram kalite kontrol, yapay zeka, ürün planlaması, ulaşım, yönetim bilimleri, finans, ziraat, felsefe, ekonomi, dil bilimi alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bulanık mantık, temelleri Aristo mantığına dayanan ikili mantık sistemine karşı geliştirilen günlük hayatta karşımıza çıkan değişkenlere üyelik dereceleri atayarak olayların hangi oranlarda gerçekleştiğini belirlemeye çalışan bir çoklu mantık sistemidir (Lai and Hwang 1992).

Bulanık kurama ilişkin temel tanımlar, bulanık karar kuramı, bulanık doğrusal programlama ve etkileşimli bulanık doğrusal programlama kavramlarına alt kesimlerde yer verilecektir.

3.2 Bulanık Kuramda Temel Tanımlar

Üyeleri kesin olarak belirli olmayan ama aday üyelerin bu kümeye üyelik derecelerinin bilindiği kümeye bulanık küme denir. Bulanık küme kuramına ilişkin genel tanımlar aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 3.1 Bulanık Küme: X , evrensel küme, x 'de evrensel kümenin elemanı olsun. $A \subseteq X$ kümesinin karakteristik fonksiyonu,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{3.1}$$

biçiminde gösterilir. Karakteristik fonksiyonun değer kümesi $\{0,1\}$ olur. (3.1) eşitliği eğer $\mu_A(x)$=1 ise "x elemanı A kümesine aittir" ve eğer $\mu_A(x)$=0 ise "x elemanı A kümesine ait değildir" anlamına gelir. Bu fonksiyon 0 ve 1 dışında değer alamaz. Eğer karakteristik fonksiyonun değer kümesi $[0,1]$ aralığında sürekli ise ve bu kapalı aralıkta her gerçel sayıyı alabilecek şekilde tanımlanırsa A kümesine bulanık küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2 Üyelik Fonksiyonu: A kümesi bir bulanık küme ise, $\mu_A(x)$ değerine x 'in A kümesine üyelik derecesi denir. A kümesinin üyelik fonksiyonu,

$$\forall x \in X : \mu_A(x) \in [0,1]$$

biçiminde ifade edilir. Bu durumda A kümesi

$$A = \{(x \mid \mu_A(x)), x \in X\}$$

ifadesi ile tanımlanır. Bulanık kümelerde üyelik fonksiyonu $[0,1]$ aralığında değerler almasına rağmen, farklı aralıklarda da üyelik fonksiyonları tanımlamak mümkündür. Her bir üyelik fonksiyonunun elemanı X evrensel kümesinin içinde yer almalı ve tanımlanan aralıkta gerçek sayılar olmalıdır (Dubois and Prade 1980).

Tanım 3.3 Destek Kümesi: A bulanık kümesinin destek kümesi

$$desA = \{x \mid \mu_A(x) > 0\, ve\, x \in X\}$$

= { üyelik dereceleri 0' dan büyük olan x 'ler }

olarak ifade edilmektedir.

Tanım 3.4 α - Kesme Kümesi: A bulanık kümesinin α kesme kümesi

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\, ve\, x \in X\}$$

= { üyelik dereceleri en az α kadar olan x ' ler }

biçimindedir.

Tanım 3.5 Normallik: A bulanık kümesi için

$$Bulanık\ A\, kümesi\ normaldir \Leftrightarrow \sup_x \mu_A(x) = 1$$

önermesi geçerlidir. $\sup_x \mu_A(x) = 1$ sağlanmıyorsa, A bulanık kümesi alt normaldir. Alt normal bir A kümesinin bütün elemanları A' nın en büyük üyelik derecesine bölünerek normalize edilebilir.

Tanım 3.6 Dışbükeylik: X evrensel küme ve A bir bulanık küme olsun. $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere, her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\mu_A\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \min\left(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\right)$$

koşulu sağlanıyorsa A kümesi dışbükey bir kümedir.

Tanım 3.7 Genişleme Prensibi: $A_1, A_2, ..., A_n$ sırasıyla $X_1, X_2, ..., X_n$ uzaylarında bulanık kümeler ve $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ kartezyen çarpım olsun,

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \int_X \min\left\{\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\right\} / (x_1, ..., x_n)$$

eşitliğine "Genişleme Prensibi" denir.

Tanım 3.8 Bulanık Sayı: A bulanık küme ve $x \in A$ olmak üzere

i. A kümesi normal ise,
ii. $A_\alpha \in (0,1]$ ise,
iii. A' nın destek kümesi sınırlı ise,

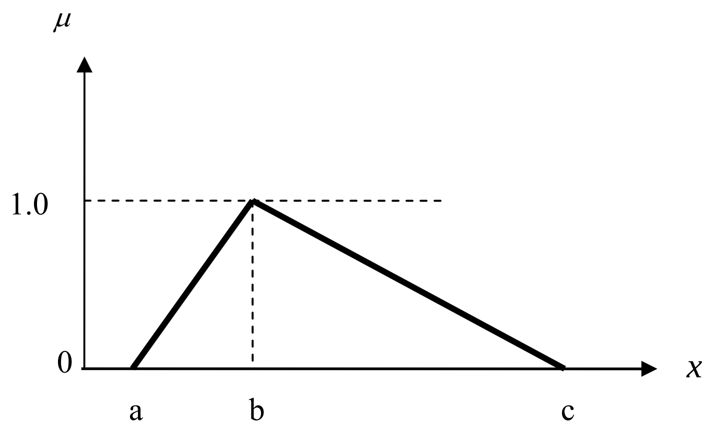
x bulanık sayıdır.

Tanım 3.9 Üçgensel Bulanık Sayı: A bulanık küme, $x \in A$ ve $\mu(x)$, x bulanık sayısının üyelik fonksiyonu olmak üzere, $\mu(x)$

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)}{(b-a)}, & a\le x<b\\ 1 \quad , & x=b\\ \dfrac{(c-x)}{(c-b)}, & b<x\le c\end{cases}$$

biçiminde tanımlandığında x bir üçgensel bulanık sayıdır.

Şekil 3.1'de x üçgensel bulanık sayısı $x=(a,b,c)$ biçiminde gösterilmiştir. Burada b merkez , $(b-a)$ sol yayılım ve $(c-b)$ sağ yayılımdır (Klir and Yuan 1995).



Şekil 3.1 Üçgensel bulanık sayı

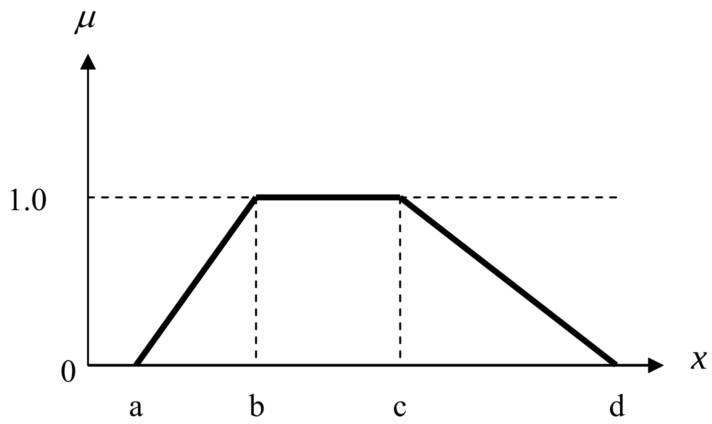
Tanım 3.10 Yamuksal Bulanık Sayı: A bulanık küme, $x\in A$ ve $\mu(x)$, x bulanık sayısının üyelik fonksiyonu olmak üzere, $\mu(x)$

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)}{(b-a)}, & a\le x<b\\ 1 \quad , & b\le x\le c\\ \dfrac{(d-x)}{(d-c)}, & b<x\le d\end{cases}$$

biçiminde tanımlandığında x bir yamuksal bulanık sayıdır.

Şekil 3.2'de x yamuksal bulanık sayısı $x=(a,b,c,d)$ biçiminde gösterilmiştir. Burada $(b-a)$ sol yayılım ve $(d-c)$ sağ yayılımdır (Klir and Yuan 1995).

$b=c$ olduğunda yamuksal bulanık sayı üçgensel bulanık sayıya dönüşmektedir.



Şekil 3.2 Yamuksal bulanık sayı

3.3 Bulanık Karar

Bulanık karar kuramını ilk olarak Bellman ve Zadeh (1970) üç ana temel üzerine kurmuşlardır. Bunlar bulanık hedef, bulanık kısıt ve bulanık karardır. Bulanıklık altında karar verme sürecinde bu üç kavramın uygulamalarını araştırmışlardır. Bulanık hedef ve bulanık kısıtlarla nasıl karar verilebileceğini 'bulanık ortamda karar verme' olarak tanımlamışlardır (Sakawa 2000).

Geleneksel bir karar verme probleminin özünü, mevcut durumu veya kısıt koşullarını dikkate alarak, karar vericinin belirlediği amaç veya hedef doğrultusunda ilerleme çabası oluşturur. Bulanık ortamda karar verme ilkesinde ise, karar verici ve evrensel kümede herhangi bir bulanıklık olmadığı kabul edilir, ancak amaç ve karar ölçütü (fayda, kar, gelir veya maliyet fonksiyonları) bileşenleri ise bulanıklık içermektedir. Karar verici amaç fonksiyonu için ulaşmak istediği sonucu bulanık olarak belirleyebilir. Ayrıca karar ölçütleri problemde bulanık olarak ortaya çıkabilir. Birbirini tamamlayan amaç ve karar ölçütü bileşenleri bulanık bir hedef olarak ele alınır (Özkan 2003).

X evrensel kümesinde bulanık G hedefi bulanık bir kümedir ve

$$\mu_G(x): X \to [0,1]$$

üyelik fonksiyonu ile ifade edilir. Burada $\mu_G(x)$ üyelik fonksiyonu, belirli bir x fonksiyonunun bulanık hedefe olan üyelik derecesini gösterir. $\mu_G(x)=1$ iken hedefe tamamen ulaşıldığı, $\mu_G(x)=0$ iken hedefe ulaşılmadığı ve $0<\mu_G(x)<1$ iken hedefe kısmen ulaşıldığı söylenir.

X evrensel kümesinde bulanık C kısıtı bulanık bir kümedir ve

$$\mu_C(x): X \to [0,1]$$

üyelik fonksiyonu ile ifade edilir. Burada $\mu_C(x)$ üyelik fonksiyonu, belirli bir x fonksiyonunun bulanık kısıttaki üyelik derecesini gösterir. $\mu_C(x)=1$ iken kısıtın tamamen sağlandığı, $\mu_C(x)=0$ iken kısıtın sağlanmadığı ve $0<\mu_C(x)<1$ iken kısıtın kısmen sağlandığı söylenir.

Bulanık bir karar, verilen hedefler ve kısıtların uzlaştırılmasından belirlenen bulanık bir küme olarak tanımlanır. Bulanık hedef ve kısıtların bir alt kümesi olan bulanık D karar kümesi, Bellman ve Zadeh (1970) tarafından

$$D = G \cap C$$

biçiminde ve üyelik fonksiyonu ise

$$\mu_D(x) = \min\left(\mu_G(x), \mu_C(x)\right)$$

biçiminde ifade edilir (Sakawa 2000). Karar verici bulanık karar kümesinin bulanıklıktan arındırılmasını veya $\mu_D(x)$ üyelik fonksiyonundan geleneksel bir kararın verilmesini ister. Böylece bulanık karar kümesinin en yüksek üyelik dereceli elemanının belirlenmesi gerekir. Buna göre kararın maksimizasyonu,

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min\left(\mu_G(x), \mu_C(x)\right)$$

biçimindedir (Sakawa 2000).

3.4 Bulanık Doğrusal Programlama

Doğrusal programlama modellerindeki bulanıklık, amaç fonksiyonu ve kısıtlardaki katsayıların tam olarak bilinmediği ve modeldeki bazı eşitsizlikler için net olmayan sınırların tanımlanabileceği anlamına gelir. Bunlar eksik bilgiden veya yapısal durumdan kaynaklanabilir (Özkan 2003).

Gerçek hayat problemlerinde kısıt katsayıları ve amaç fonksiyonları katsayıları kesin olmamakta ve bir belirsizlik içermektedir. Kesinlikten kaynaklanan katı kurallar karar vericiyi çoğu zaman sıkıntıya sokmakta ve problemi çözümsüzlüğe götürmektedir. Bulanık doğrusal programlama, karar verici için kabul edilebilir sınırlarda olması koşulunda, problemi çözümsüzlükten kurtaran esneklikler tanır. Gerçek dünyaya ilişkin belirsizliğin modelde yer alması ve çözümlenmesi bulanık küme terimlerinin kullanıldığı bulanık doğrusal programlama ile mümkündür. Modeldeki belirsizlikler amaç fonksiyonunda, kısıt katsayılarında ya da her ikisinde de olabilir. Bu belirsizliği içeren karar verme olgusu bulanık ortamda karar verme olarak ifade edilir (Bellman and Zadeh 1970).

Bulanık doğrusal programlama problemleri, bulanıklık kavramının ele alınışına göre farklı şekillerde sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırmanın ilki Zimmermann tarafından yapılmıştır. Zimmermann bulanık doğrusal programlama problemlerini simetrik modeller ve simetrik olmayan modeller olmak üzere iki sınıfta incelemiştir. Lai-Huwang bulanık doğrusal programlama modellerini üyelik fonksiyonlarından yararlanarak iki sınıfa ayırmıştır. Bunlardan birincisinde üyelik fonksiyonlarıyla nitelenen bulanık girdilerle ilgilenirken diğeri, olabilirlik doğrusal programlama adını alan olabilirlik dağılımlarıyla nitelenen kesin olmayan verilerle ilgilenir. Bellman ve Zadeh'in bulanık karar kümesi tanımına dayanarak Tanaka ve Zimmermann bulanık hedef ve kısıtlar altında karar verme problemini ele almışlardır (İnuiguchi and Ramik 2000).

Kesim 2.3.2'de verilen (2.22) doğrusal programlama modelinde tüm kısıtlar ve amaç fonksiyonu bulanık olarak ele alındığında

$$\begin{gathered} \max(\min) z = \tilde{c}\,'\mathbf{x} \\ \tilde{A}\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{gathered}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\sim$ işareti bulanıklığı temsil eder (Lai and Hwang 1992).

Bulanık doğrusal programlamanın birçok çözüm yöntemi vardır. Genelde modeller bulanıklıktan kurtarıldıktan sonra parametrik programlama problemlerine dönüşür ve bu yöntemle çözüme ulaştırılır. Çalışmanın içeriği açısından şans kısıtlı stokastik problemlerdeki bulanık yaklaşımlar incelendiğinden doğrudan bulanık doğrusal programlama çözüm yöntemlerine değinilmeyecektir.

3.4.1 Çok amaçlı şans kısıtlı stokastik programlama modellerine bulanık doğrusal programlama yaklaşımı

Sıradan bir çok amaçlı programlama modeli

$$
\begin{aligned}
&\max(\min) z_l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_{lj} x_j \quad l = 1,\ldots,K \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k \quad k = 1,\ldots,m \\
&x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanır. Burada verilen kısıtlar altında birden fazla amaç fonksiyonunun en büyüklenmesi veya en küçüklenmesi arzulanmaktadır.

Şans kısıtları ile çok amaçlı stokastik programlama problemi

$$
\begin{aligned}
&\max(\min) z_l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_{lj} x_j \quad l = 1,\ldots,K \\
&\mathrm{P}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k\right] \ge 1 - u_k \quad k = 1,\ldots,m \\
&x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n \\
&u_k \in (0,1), \quad k = 1,\ldots,m
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

biçiminde tanımlansın. Burada c_{lj} fiyatlar, a_{kj}'ler katsayılar matrisinin elemanları ve b_k'lar sağ yan değerleridir. u_k' lar ise seçilmiş olasılıklardır.

Amaç fonksiyonun bulanık olması varsayımı altında buna ait üyelik fonksiyonu

$$
\mu_l(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & z_l(\mathbf{x}) \le L_l \\ \dfrac{z_l(\mathbf{x}) - L_l}{U_l - L_l}, & L_l \le z_l(\mathbf{x}) \le U_l \\ 1, & z_l(\mathbf{x}) \ge U_l \end{cases}
\tag{3.3}
$$

biçiminde, doğrusal üyelik fonksiyonu olarak seçilsin. Burada U_l ve L_l'lar amaç fonksiyonun her biri için sırasıyla üst ve alt sınırlardır. (3.2)' de verilen çok amaçlı şans kısıtlı stokastik programlama probleminin deterministik eşitliği bulunduktan sonra, (3.3) ile verilen üyelik fonksiyonu yardımıyla model,

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \lambda \leq \frac{z_l(\mathbf{x}) - L_l}{U_l - L_l} \quad l = 1, \ldots, K \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \leq b_k \quad k = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

biçimine dönüşür. Buna göre çok amaçlı şans kısıtlı stokastik programlama probleminin çözümü için kullanılan algoritma aşağıdaki gibidir:

Adım 1: Öncelikle verilen stokastik programlama problemi, şans kısıtlı programlama problemi tekniği ile deterministik hale dönüştürülür.

Adım 2: Amaç fonksiyonlarının her biri tek tek ele alınarak Adım1' den elde edilen kısıtlar altında K tane model çözülür.

Adım 3: Adım 2'den elde edilen çözümlerin her birinin bütün amaçlara verdiği değerler bulunur.

Adım 4: Adım 3'den yararlanarak amaç fonksiyonunun her biri için alt ve üst sınırlar (U_l ve L_l'lar) bulunur.

Adım 5: Önerilen üyelik fonksiyonu için problem yeniden düzenlenir ve uzlaşık çözüme varılır.

Problemde ele alınan üyelik fonksiyonu istenildiği gibi değiştirilebilir. Üyelik fonksiyonunun değişimine bağlı olarak (3.4) modeli de değişecektir (Hulsurkar *et al.* 1997).

3.5. Etkileşimli Bulanık Doğrusal Programlama

Etkileşimli kavramı sistem için karar vericinin en iyi çözümü kendi kriterleri doğrultusunda seçmesi anlamına gelmektedir. Karar verici kendi problemi için en önemli gördüğü faktörlere dayalı olarak amacını en iyilemek ister. Etkileşimli bulanık doğrusal programlama sistemleri, tüm olabilirlikleri kullanmayı, bunları doğrusal programlamanın özel alanlarındaki problemlere birleştirmeyi ve yönlendirmeyi, ayrıca özelliklerini öğrenmeyi sağlar. Eğer-ise kuralını uygulayarak probleme mantıklı düzenlemeler ve sıralamalar yapar.

Etkileşimli bulanık doğrusal programlama yönlendirme problemi ve kullanıcıya bağlı olma yaklaşımlarını içerir. Durumların çeşitliliğinin fazla olduğu varsayılırsa, karar verici bunları modele yerleştirmeyi ve doğrusal programlama problemini çözmeyi arzular. Etkileşimli bulanık doğrusal programlama, etkili ve sistematik yaklaşımları probleme yerleştirmeyi sağlar. Buna uygun olarak karar verici çözüm sonuçlarını ortaya koyar. Bu sonuçlar karar vericiye yeterli gelebilir veya gelmeyebilir. Yeterli gelmesi durumunda problem çözüme ulaşmış olur. Yeterli gelmemesi durumunda karar verici tatmin oluncaya kadar işlemler tekrarlanır veya orijinal problem karar vericinin oluşturacağı yeni kriterler doğrultusunda değiştirilerek tekrar çözülür.

Etkileşimli yaklaşımda karar vericinin kendisi bulanık kuramın kullanılmasında önemli bir rol oynar. Böylece etkileşimli süreç karar verici ve karar süreci arasında bir ilişkiye olanak sağlar. Bu ilişki problemin çözümü için gereklidir. Buna göre karar verici kendine bağlı olarak bulanık doğrusal programlama problemleri geliştirir ve bunları uygular.

Etkileşimli bulanık doğrusal programlama metodu 1980'den itibaren uygulanmaya başlanmıştır. Bu konudaki çalışmalar Baptistella ve Ollero (1980), Fabian, Ciobanu ve

Stico (1987), Sakawa ve Yano (1985), Slowinski (1986), Werners (1987) ve Zimmermann (1987) tarafından yapılmıştır (Lai and Hwang 1992).

3.5.1 Çok amaçlı şans kısıtlı stokastik programlama problemlerine etkileşimli bulanık programlama yaklaşımı

Stokastik amaçlara ve kısıtlara sahip problem, bulanık ortamda ele alınarak, etkileşimli bir yöntemle çözülebilir. Karar vericinin tatmin edici bir çözüm bulmasına fırsat tanır. Bu yöntemde stokastik amaçlar E-model (beklenen değer modeli) bulanıklaştırılmış ve stokastik olan kısıtlar ise şans kısıtları olarak ele alınmıştır. Bununla birlikte bulanık ve stokastik amaçlar karar vericinin tercihleri doğrultusunda etkileşimli bir süreç kurulmasına izin verir.

Amaç fonksiyonunun hem rasgele değişkenleri hem de kesin değişkenleri birlikte içeren ve \ veya kısıt katsayıları rasgele değişken olan Stancu-Minasian (1984) tarafından önerilen çok amaçlı stokastik programlama modeli,

$$\begin{gathered}
\min z_1\left(\mathbf{x},\omega\right)=\mathbf{c_1}\left(\omega\right)\mathbf{x}+\alpha_1\left(\omega\right)\\
\min z_2\left(\mathbf{x},\omega\right)=\mathbf{c_2}\left(\omega\right)\mathbf{x}+\alpha_2\left(\omega\right)\\
\vdots\\
\min z_K\left(\mathbf{x},\omega\right)=\mathbf{c}_K\left(\omega\right)\mathbf{x}+\alpha_K\left(\omega\right)\\
A\left(\omega\right)\mathbf{x}\le\mathbf{b}\quad\left(veya\;\;A\mathbf{x}\le\mathbf{b}\left(\omega\right)\right)\\
\mathbf{x}\ge\mathbf{0}
\end{gathered}\tag{3.5}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$\mathbf{x}$: n boyutlu karar değişkenlerinin sütun vektörü,

A: $m\times n$ boyutlu katsayılar matrisi ($A\left(\omega\right):m\times n$ boyutlu rasgele değişkenlere sahip katsayılar matrisi)

$\mathbf{c}_l\left(\omega\right)$: $l=1,...,K$ olmak üzere, n boyutlu rasgele değişkenlerin satır vektörü olup,

$$\mathbf{c}_l(\omega) = \mathbf{c}_l^1 + t(\omega)\mathbf{c}_l^2$$

dir. Burada $t(\omega)$; $\overline{t}$ ortalamalı rasgele değişken,

$\alpha_l(\omega)$: $\alpha_l(\omega) = \alpha_l^1 + t(\omega)\alpha_l^2$ biçiminde tanımlanmış rasgele değişken,

$\mathbf{b}$: m boyutlu sütun vektörü ($\mathbf{b}(\omega)$: m boyutlu rasgele değişkenlere sahip sütun vektörü)

olarak tanımlanmaktadır.

(3.5) ile verilen çok amaçlı doğrusal programlama problemindeki amaç fonksiyonu, beklenen değer modeli biçiminde ve kısıtlar u_i, $i = 1,...,m$ tatmin edici seviyeleri ile şans kısıtları olarak yazılırsa,

$$\begin{array}{ll}
\min E\left[z_1(\mathbf{x},\omega)\right] & \\
\min E\left[z_2(\mathbf{x},\omega)\right] & \\
\vdots & \\
\min E\left[z_K(\mathbf{x},\omega)\right] & \\
P\left[\mathbf{a_1}(\omega)\mathbf{x} \le b_1\right] \ge 1-u_1 & \left(veya\ P\left[\mathbf{a_1}\mathbf{x} \le b_1(\omega)\right] \ge u_1\right) \\
P\left[\mathbf{a_2}(\omega)\mathbf{x} \le b_2\right] \ge 1-u_2 & \left(veya\ P\left[\mathbf{a_2}\mathbf{x} \le b_2(\omega)\right] \ge u_2\right) \\
\vdots & \\
P\left[\mathbf{a_m}(\omega)\mathbf{x} \le b_m\right] \ge 1-u_m & \left(veya\ P\left[\mathbf{a_m}\mathbf{x} \le b_m(\omega)\right] \ge u_m\right) \\
\mathbf{x} \ge \mathbf{0} &
\end{array} \tag{3.6}$$

modeli elde edilir. Burada, $\mathbf{a_i}$ (veya $\mathbf{a_i}(\omega)$); A matrisinin i' inci satır vektörü ve b_i (veya $b_i(\omega)$); $\mathbf{b}$ vektörünün i' inci elemanıdır. Amaç fonksiyonu için E-model kullanılarak $E\left[t(\omega)\right] = \overline{t}$ olarak alınırsa, (3.6) ile verilen modeldeki amaç katsayıları,

$$E\left[z_l(\mathbf{x},\omega)\right] = \left(\mathbf{c}_l^1 + \overline{t}\mathbf{c}_l^2\right)\mathbf{x} + \left(\alpha_l^1 + \overline{t}\,\alpha_l^2\right)$$

olarak yazılacaktır. Kısıtlar için şans kısıtlı programlama kullanılarak deterministik eşitlikler bulunur. Bu durumda (3.6) problemi tamamen deterministik hale gelir.

$E\left[z_l\left(\mathbf{x},\omega\right)\right]=\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)=\left(\mathbf{c}_l^1+\overline{t}\mathbf{c}_l^2\right)\mathbf{x}+\left(\alpha_l^1+\overline{t}\,\alpha_l^2\right)$ ile tanımlanan her bir amaç fonksiyonu için karar vericinin kararlarının belirsiz nitelikte olduğu varsayımı altında önerilen bulanık hedefler üç tanedir. Bunlar,

i) $\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)$, p_l ’den küçük veya p_l ’ye eşit olmalıdır (bulanık en küçük)

ii) $\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)$, q_l ’den büyük veya q_l ’ye eşit olmalıdır (bulanık en büyük)

iii) $\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)$, r_l ’nin civarında olmalıdır (bulanık eşit).

Buna göre, (3.6) problemi

$$\begin{array}{l} \textit{bulanık} \;\; \text{enk} \;\; \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right), \quad l\in I_1 \\ \textit{bulanık} \;\; \text{enb} \;\; \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right), \quad l\in I_2 \\ \textit{bulanık} \;\; \text{eşit} \;\; \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right), \quad l\in I_3 \\ \qquad\qquad \mathbf{x}\in X \end{array} \tag{3.7}$$

biçiminde tekrar düzenlenir. Burada,

$$I_1\cup I_2\cup I_3=\left\{1,2,...,K\right\},\; I_i\cap I_j=\varnothing,\; i,j=1,2,3,\; i\neq j$$

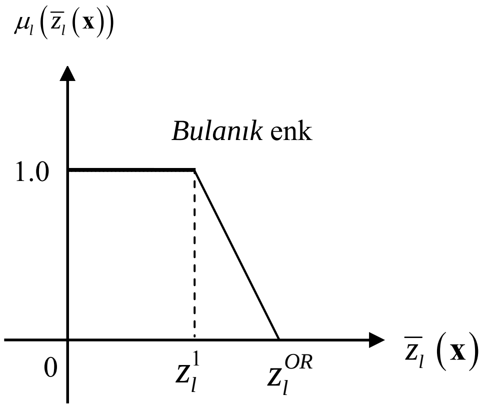
olarak tanımlanmaktadır. (3.7) modelinde verilen bulanık hedefler Şekil 3.3 ile verilen $\mu_i\left(\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\right),\; l=1,...,K$ üyelik fonksiyonlarına sahiptir. Bunlar,

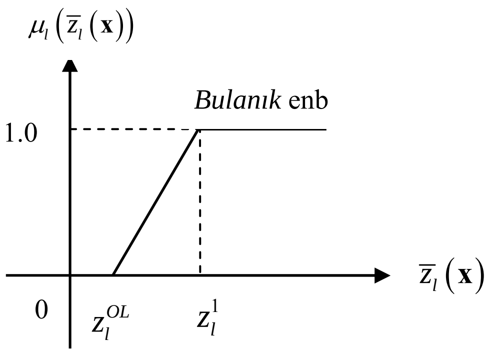
$$\textit{bulanık}\;\text{enk}\quad \mu_l\left(\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\right)=\begin{cases} 0, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)>z_l^{OR} \\ \dfrac{\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)-z_l^{OR}}{z_l^1-z_l^{OR}}, & z_l^1\leq\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\leq z_l^{OR} \\ 1, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)<z_l^1 \end{cases}$$

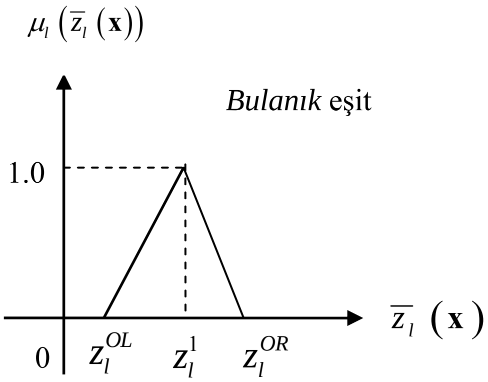
$$\textit{bulanık}\ \text{enb}\quad \mu_l\left(\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\right)=\begin{cases}0, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)< z_l^{OL}\\ \dfrac{\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)-z_l^{OL}}{z_l^{1}-z_l^{OL}}, & z_l^{OL}\le \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\le z_l^{1}\\ 1, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)> z_l^{1}\end{cases}$$

$$\textit{bulanık}\ \text{eşit}\quad \mu_l\left(\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\right)=\begin{cases}0, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)< z_l^{OL}\\ \dfrac{\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)-z_l^{OL}}{z_l^{1}-z_l^{OL}}, & z_l^{OL}\le \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\le z_l^{1}\\ \dfrac{\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)-z_l^{OR}}{z_l^{1}-z_l^{OR}}, & z_l^{1}\le \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\le z_l^{OR}\\ 0, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)> z_l^{OR}\end{cases}$$

eşitlikleri ile tanımlanmıştır.







Şekil 3.3 Üyelik fonksiyonlarının gösterimi

Problem (3.7), bulanık çok amaçlı karar verme problemi olarak,

$$\max_{\mathbf{x}\in X}\left(\left(\mu_1\left(\overline{z}_1\left(\mathbf{x}\right)\right)\right),\ldots,\left(\mu_K\left(\overline{z}_K\left(\mathbf{x}\right)\right)\right)\right) \tag{3.8}$$

biçiminde tanımlanır.

Bulanık hedefler içinde "*bulanık* eşit" olarak tanımlanan hedef mevcut ise Sakawa (2003) tarafından önerilen bulanık çok amaçlı karar verme problemleri için üyelik fonksiyonlarının değerlerine M-Pareto optimallik testi uygulanmalıdır. M-Pareto optimal çözüm tanımı Tanım 3.11 ile verilmiştir.

Tanım 3.11 (M-Pareto optimal çözüm) Yalnız ve ancak, her l için $\mu_l\left(z_l\left(\mathbf{x}\right)\right)\geq\mu_l\left(z_l\left(\mathbf{x}^*\right)\right)$ ve en az bir j için $\mu_j\left(z_j\left(\mathbf{x}\right)\right)>\mu_j\left(z_j\left(\mathbf{x}^*\right)\right)$ olacak şekilde başka $\mathbf{x}\in X$ mevcut değilse, $\mathbf{x}^*\in X$, M-Pareto optimal çözümdür.

(3.8) ifadesindeki k tane üyelik fonksiyonu $\mu_D\left(\mathbf{x}\right)$ fonksiyonu biçiminde tanımlanırsa, bu ifade;

$$\max_{\mathbf{x}\in X}\quad \mu_D\left(\mathbf{x}\right)$$

biçiminde tekrar düzenlenebilir. Burada, $\mu_D\left(\mathbf{x}\right)$ fonksiyonu, K bulanık hedefin tümü için karar vericinin tatmin veya öncelik derecesini göstermektedir. Burada etkileşim vasıtasıyla öncelik bilgisini temel alan karar verici için tatmin edici çözümü veren etkileşimli yöntem önerilmiştir. Bunun için referans üyelik fonksiyonları kullanılmıştır. Yinelemeli olarak bu referans üyelik dereceleri değiştirilerek çözüme ulaşmayı sağlayan "min max" problemi,

$$\begin{array}{c}\min\max\limits_{l=1,\ldots,K}\left\{\overline{\mu}_l-\mu_l\left(\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\right)\right\}\\ \mathbf{x}\in X\end{array} \tag{3.9}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\bar{\mu}_l$, $l = 1,\dots,K$ referans üyelik seviyeleridir. Problem (3.9)

$$\begin{aligned} &\min \quad v \\ &\bar{\mu}_1 - \mu_1\left(\bar{z}_1(\mathbf{x})\right) \le v \\ &\bar{\mu}_2 - \mu_2\left(\bar{z}_2(\mathbf{x})\right) \le v \\ &\vdots \\ &\bar{\mu}_K - \mu_K\left(\bar{z}_K(\mathbf{x})\right) \le v \\ &\mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{3.10}$$

problemine denktir. Burada,

$$\bar{z}_l^{\max} = \max_{x\in X} \bar{z}_l(\mathbf{x}),\ \bar{z}_l^{\min} = \min_{x\in X} \bar{z}_l(\mathbf{x})$$

olsun. Her $\mathbf{x} \in X$ için, eğer $z_l^1 \le \bar{z}_l(\mathbf{x}) \le z_l^{OR}$ (bulanık en küçük) veya $z_l^{OL} \le \bar{z}_l(\mathbf{x}) \le z_l^1$ (bulanık en büyük) veya $z_l^{OL} \le \bar{z}_l(\mathbf{x}) \le z_l^{OR}$ (bulanık eşit) ise ve her üyelik fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} &z_l^{OR} \ge \bar{z}_l^{\max},\quad l \in I_1 \\ &z_l^{OL} \le \bar{z}_l^{\min},\quad l \in I_2 \\ &z_l^{OL} \le \bar{z}_l^{\min},\ z_l^{OR} \ge \bar{z}_l^{\max},\quad l \in I_3 \end{aligned}$$

ise, (3.10) problemi

$$\begin{aligned} &\min \ v \\ &\frac{\bar{z}_l(\mathbf{x}) - z_l^{OR}}{z_l^1 - z_l^{OR}} \ge \bar{\mu}_l - v,\quad l \in I_1 \cup I_3 \\ &\frac{\bar{z}_l(\mathbf{x}) - z_l^{OL}}{z_l^1 - z_l^{OL}} \ge \bar{\mu}_l - v,\quad l \in I_2 \cup I_3 \\ &\mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{3.11}$$

biçiminde yazılan probleme denk olacaktır. (3.11) probleminin $\mathbf{x}^*$ optimal çözümü tektir, böylece $\mathbf{x}^*$ (3.8) probleminin M-Pareto optimal çözümüdür. Açıktır ki $\mathbf{x}^*$'ın tek olduğu, M- Pareto optimallik testi yapılarak görülebilir. Bu test,

$$
\begin{gathered}
\max \sum_{l=1}^{K} \varepsilon_l \\
\mu_1\left(\overline{z}_1(\mathbf{x})\right) - \varepsilon_1 = \mu_1\left(\overline{z}_1\left(\mathbf{x}^*\right)\right), \\
\vdots \\
\mu_K\left(\overline{z}_K(\mathbf{x})\right) - \varepsilon_K = \mu_K\left(\overline{z}_K\left(\mathbf{x}^*\right)\right), \\
\mathbf{x} \in X, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_K\right)^T \geq 0
\end{gathered} \tag{3.12}
$$

modeli çözülerek yapılmaktadır. (3.12) probleminin optimal çözümü $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\varepsilon}$ için

1. Eğer $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$ ise $\mathbf{x}^*$ (3.8) probleminin M-Pareto optimal çözümüdür.
2. Eğer $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq \mathbf{0}$ ise $\mathbf{x}^*$ değil, $\overline{\mathbf{x}}$ (3.8) probleminin M-Pareto optimal çözümüdür.

Bu tanımlamalar ışığı altında, etkileşimli bulanık tatmin edici yöntem algoritması aşağıdaki şekilde verilir (Sakawa *et al.* 2003).

Adım1: Karar verici tarafından her bir kısıt için, $u_i,\ i = 1, \ldots, m$ tatmin edici sevileri belirlenir.

Adım2: $u_i,\ i = 1, \ldots, m$ tatmin edici seviyeleri ile şans kısıtları koşulları altında $E\left[z_l(\mathbf{x}, \omega)\right] = \overline{z}_l(\mathbf{x}), l = 1, \ldots, K$ ' nın her biri için minimum $\overline{z}_l^{\min}$ ve maksimum $\overline{z}_l^{\max}$ değerleri hesaplanır.

Adım3: Her bir amaç fonksiyonu için, karar verici tarafından $\mu_l\left(\overline{z}_l(\mathbf{x})\right)$ üyelik fonksiyonu belirlenir.

Adım4: Başlangıç referans üyelik seviyesi $\overline{\mu}_l = 1,\ l = 1, \ldots, K$ olarak alınır.

Adım5: Karar verici tarafından Adım 4’ belirlenen referans üyelik seviyeleri için (3.11) problemi çözülür. Buradan elde edilen $\mathbf{x}^*$ optimal çözüm, (3.12) ile verilen M-Pareto optimallik problemi çözülerek test edilebilir.

Adım6: Karar verici uygun M-Pareto optimal çözümünü ve üyelik fonksiyonları arasındaki ödünleşim bilgisini yani referans üyelik seviyelerini ve her bir üyelik seviyesi arasındaki oranlarını

$$-\frac{\partial \mu_l\left(z_l\left(\mathbf{x}\right)\right)}{\partial \mu_1\left(z_1\left(\mathbf{x}\right)\right)} \quad l = 1,\ldots,K$$

ifadesi belirler. Pay ve paydadaki değerler (3.10) probleminin çözümünden elde edilen simpleks çarpanlarıdır. Eğer karar verici M-Pareto optimal çözümünün uygun üyelik fonksiyonlarını tatmin edici bulursa durulur. Diğer durumda karar vericiden referans üyelik seviyelerini değiştirmesi istenir ve Adım 5’ e dönülür (Sakawa *et al.* 2003).

4. ŞANS KISITLI STOKASTİK PROGRAMLAMA MODELLERİNE GAMMA DAĞILIMI YAKLAŞIMI

4.1 Giriş

Kesim 2.3' de şans kısıtlı stokastik programlama problemlerinde katsayıların normal ve ki-kare dağılımına sahip olması durumunda deterministik modellerin bulunuşu incelenmişti. Literatürde genelde hesaplama kolaylığı açısından normal dağılım yaklaşımı kullanılmaktadır.

Endüstri mühendisliği, sistem analizi, güvenirlik analizi alanlarındaki problemlerde genellikle gamma dağılımı ele alınmaktadır. Bu nedenle, çalışmanın bu bölümünde, model katsayılarının gamma dağılımına sahip olması durumu incelendi. Kesim 2.2.1' de verilen 7 farklı durum gamma dağılımlı rasgele değişkenler açısından incelendi. $c_j \quad j = 1,...,n$ fiyatlarının gamma dağılımına sahip rasgele değişken olması durumunda, beklenen değeri en büyükleme yöntemiyle ve $b_k \quad k = 1,...,m$ sağ yan değerlerin gamma dağılımlı rasgele değişken olması durumunda, dağılım fonksiyonunun tersi alınarak deterministik eşitliklerin kolayca bulunduğu görüldü. Bu nedenle çalışmanın amacı, a_{kj} katsayılarının gamma dağılımına sahip olması durumunun incelenmesi olarak belirlendi.

İlk olarak, gamma dağılımlı a_{kj} katsayılarının $j = 1,2$ olması halinde oluşan şans kısıtlı modeller ele alındı. Bu modellerdeki şans kısıtlarında doğrudan dağılım fonksiyonu elde edilerek model deterministik hale getirildi.

$j > 2$ olması durumunda, şans kısıtlarının deterministik eşitlikleri elde edilirken dağılım fonksiyonlarının bulunmasında zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bunun nedeni değerleri bilinmeyen x_j karar değişkenlerinin a_{kj} rasgele değişkenlerinin katsayıları olmasından kaynaklanmaktadır ikinci olarak, bu sorunu ortadan kaldırmak amacıyla bağımsız rasgele değişkenlerin toplamının dağılımı ve normal dağılım arasındaki farkların tahmini kullanılarak yeni bir yöntem geliştirildi.

Bu iki yöntem Kesim 4.2 ve Kesim 4.3' de ayrıntılı olarak sunuldu.

4.2 Gamma Dağılımına Sahip A Katsayılar Matrisinin Sütun Sayısı İki Olduğunda Şans Kısıtlı Stokastik Programlama Modeli

Bu kesimde A katsayılar matrisinin sütun sayısının iki olduğu durum ele alınmıştır. (3.2) modeli ile verilen şans kısıtının sol tarafındaki olasılık, $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2$ toplamının dağılımının doğrudan elde edilmesi ile hesaplanır ve kısıt deterministik hale getirilir.

(3.2) modeli ile verilen şans kısıtları,

$$\mathrm{P}\left[a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \le b_k\right] \ge 1 - u_k \qquad (4.1)$$

biçimine dönüşür. Burada a_{k1} ve a_{k2} rasgele değişkenleri sırasıyla $\Gamma\left(\alpha_{k1}, \beta_{k1}\right)$ ve $\Gamma\left(\alpha_{k2}, \beta_{k2}\right)$ ile Gamma dağılımına sahiptir. (4.1) modeline ait deterministik eşitliği bulmak için öncelikle $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu bulunmalıdır. Bunun için,

$$X = a_{k1}x_1, \qquad Y = a_{k2}x_2 \quad \text{ve} \quad Z = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 = X + Y$$

olarak tanımlansın. Burada X rasgele değişkeni,

$$\Gamma\left(\alpha_{k1}, \beta_{k1}x_1\right) = \Gamma\left(\alpha_{k1}, \beta_{k1}^{*}\right)$$

ve Y rasgele değişkeni,

$$\Gamma\left(\alpha_{k2}, \beta_{k2}x_2\right) = \Gamma\left(\alpha_{k2}, \beta_{k2}^{*}\right)$$

olarak gamma dağılımına sahip olacaktır. $Z = X + Y$ ' nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Z(z) = \frac{z^{\alpha_{k1}+\alpha_{k2}-1} e^{-\frac{z}{\beta_{k1}^*}}}{\left(\beta_{k1}^*\right)^{\alpha_{k1}} \left(\beta_{k2}^*\right)^{\alpha_{k2}} \Gamma\left(\alpha_{k1}+\alpha_{k2}\right)} hypergeom\left(\alpha_{k2}, \alpha_{k1}+\alpha_{k2}, -\left(\frac{1}{\beta_{k2}^*} - \frac{1}{\beta_{k1}^*}\right) z\right)$$

biçiminde elde edilir. Burada *hypergeom* terimi hipergeometrik dağılımı,

$$(a)_k = a(a+1)...(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$
$$(b)_k = b(b+1)...(b+k-1) = \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} hypergeom[a,b;x] &= F(a,b;x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k x^k}{(b)_k k!} \qquad (b \neq 0, -1, -2...) \end{aligned}$$

biçiminde temsil etmektedir. Bu tanımlamalara göre, $Z = X + Y$ ' nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Z(z) = \frac{z^{\alpha_{k1}+\alpha_{k2}-1} e^{-\frac{z}{\beta_{k1}^*}}}{\left(\beta_{k1}^*\right)^{\alpha_{k1}} \left(\beta_{k2}^*\right)^{\alpha_{k2}} \Gamma\left(\alpha_{k1}+\alpha_{k2}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha_{k2}\right)_j \left(-z\left(\frac{1}{\beta_{k2}^*} - \frac{1}{\beta_{k1}^*}\right)\right)^j}{\left(\alpha_{k1}+\alpha_{k2}\right)_j j!}$$

biçiminde olur. (4.1) ile verilen şans kısıtları,

$$\mathrm{P}\left[Z \le b_k\right] \ge 1 - u_k$$

olarak yazılırsa, Z rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun belirlenmesi gerekir. Bu fonksiyon,

$$F_Z(b_k) = \frac{1}{\left(\beta_{k1}^*\right)^{\alpha_{k1}}\left(\beta_{k2}^*\right)^{\alpha_{k2}}\Gamma\left(\alpha_{k1}+\alpha_{k2}\right)}\int_0^{b_k} z^{\alpha_{k1}+\alpha_{k2}-1} e^{-\frac{z}{\beta_{k1}^*}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha_{k2}\right)_j \left(-z\left(\frac{1}{\beta_{k2}^*}-\frac{1}{\beta_{k1}^*}\right)\right)^j}{\left(\alpha_{k1}+\alpha_{k2}\right)_j \, j!} dz$$

integralinin çözümü ile elde edilebilmektedir. Bu durumda (4.1) ile verilen şans kısıtına eş değer deterministik kısıt,

$$\frac{1}{\left(\beta_{k1}^*\right)^{\alpha_{k1}}\left(\beta_{k2}^*\right)^{\alpha_{k2}}\Gamma\left(\alpha_{k1}+\alpha_{k2}\right)}\int_0^{b_k} z^{\alpha_{k1}+\alpha_{k2}-1} e^{-\frac{z}{\beta_{k1}^*}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha_{k2}\right)_j \left(-z\left(\frac{1}{\beta_{k2}^*}-\frac{1}{\beta_{k1}^*}\right)\right)^j}{\left(\alpha_{k1}+\alpha_{k2}\right)_j \, j!} dz \geq 1-u_k \qquad (4.2)$$

biçiminde bulunur. Buradan gözlemlenebilir ki A katsayılar matrisinin sütun sayısı iki olduğu durumda bile şans kısıtının deterministik eşitliği karmaşık bir kısıta dönüşmektedir. Sütun sayısı arttıkça dağılım fonksiyonunu elde etmek zorlaşmaktadır.

4.3 Bağımsız Rasgele Değişkenlerin Toplamının Dağılımı ve Normal Dağılım Arasındaki Farkların Tahmini Kullanılarak Şans Kısıtlarının Deterministik Eşitliklerinin Bulunması

Kesim 4.2 ile verilen yöntemde gamma dağılımına sahip a_{kj} katsayılarının $j > 2$ olduğu durumda şans kısıtlarının deterministik eşitliğinin bulunuşunun karmaşık bir hal aldığı görüldü. Bu nedenle, bağımsız rasgele değişkenlerin toplamının dağılımı ve normal dağılım arasındaki farkların tahmini kullanılarak yeni bir yöntem geliştirildi. Bu yöntemde j değeri ne olursa olsun şans kısıtının deterministik eşitliği bulunabilir.

Bu yöntemi uygulayabilmek için Esseen eşitsizliği ve buna ilişkin teoremler ve lemmadan yararlanılmıştır.

$X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız rasgele değişkenleri $F_n(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip olsun. $\phi(x)$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonunu göstermek üzere, $F_n(x)$ ile $\phi(x)$ arasındaki mutlak farkın supremumu bulunabilir. Buna ilişkin lemma ve teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.1 $F_n(x)$ azalmayan bir fonksiyon, $G(x)$ gerçel düzlemde sınırlı diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f(t)$ ve $g(t)$ Fourier-Stieltjes dönüşümlerine ait olmak üzere, $F(-\infty) = G(-\infty)$ ve $F(\infty) = G(\infty)$ olarak verilsin. T, keyfi pozitif bir sayı olup

$$\sup_x \left| G^{'}(x) \right| \leq c$$

biçiminde varsayılsın. Böylece her $b > \frac{1}{2\pi}$ için

$$\sup_x \left| F(x) - G(x) \right| \leq b \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + r(b) \frac{c}{T} \qquad (4.3)$$

olarak yazılabilir. Burada $r(b)$ yalnızca b 'ye bağlı pozitif bir sabittir.

Lemma 4.1 $X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere,

$$EX_j = 0 \text{ ve } E\left|X_j\right|^3 < \infty \quad j = 1, ..., n$$

ile verilsin. Bu durumda,

$$\sigma_j^2 = EX_j^2 \qquad B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \qquad L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} E\left|X_j\right|^3$$

eşitlikleri tanımlansın. $f_n(t)$; $B_n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n} X_j$ rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $|t| \le \dfrac{1}{4L_n}$ için

$$\left| f_n(t) - e^{-t^2/2} \right| \le 16 L_n |t|^3 e^{-t^2/3}$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 4.2 (Esseen Eşitsizliği) $X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere,

$$EX_j = 0 \text{ ve } E\left|X_j\right|^3 < \infty \quad j = 1,...,n$$

ile verilsin. Bu durumda,

$$\sigma_j^2 = EX_j^2 \ , \qquad B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \ , \qquad F_n(x) = P\left[B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} X_j < x \right], \qquad L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} E\left|X_j\right|^3$$

olmak üzere,

$$\sup_x \left| F_n(x) - \phi(x) \right| \le SL_n \tag{4.4}$$

biçimindedir.

$F_n(x)$ ve $\phi(x)$ Teorem 4.1 ile verilen koşullara sahiptir. Burada,

$$\sup_x \left| \phi'(x) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = c$$

olarak bulunur. Teorem 4.1 ile verilen (4.3) eşitsizliğinde $b = \frac{1}{\pi}$ ve $T = \frac{1}{4L_n}$ alınırsa,

$$\sup_x \left| F_n(x) - \phi(x) \right| \le \frac{1}{\pi} \int_{|t| \le 1/4L_n} \left| \frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t} \right| dt + S_1 L_n$$

biçiminde yazılabilir. Burada $f_n(t)$; $F_n(x)$ dağılım fonksiyonunun karakteristik fonksiyonudur. $\phi(x)$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu ve S, S_1 sembolleri mutlak pozitif sabitlerdir (Petrov 1975).

Esseen eşitsizliğinin sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3 $X_1, X_2, ..., X_n$ sürekli dağılıma sahip, bağımsız rasgele değişkenler ve $E\left|X_j\right|^3 < \infty \quad j = 1, ..., n$ ise,

$$\sigma_j^2 = Var(X_j) \;, \qquad B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$$

olmak üzere, Büyük n değerleri için

$$P\left[B_n^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} X_j - E\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \right) \right) < x \right] = \phi(x) + \frac{\sum_{j=1}^{n} E\left(X_j - E\left(X_j \right) \right)^3 e^{\frac{-x^2}{2}} \left(1 - x^2 \right)}{6\sqrt{2\pi} B_n^{\frac{3}{2}}} + o(n^{\frac{-1}{2}}) \quad (4.5)$$

ifadesi normal dağılıma yaklaşımda kullanılmaktadır (Feller 1966).

Alt kesimde, gamma dağılımlı a_{kj} katsayılarına sahip şans kısıtlarının Esseen eşitsizliği yardımı ile deterministik eşitliğinin bulunması verilecektir.

4.3.1 A katsayılar matrisinin elemanlarının rasgele değişken olması durumunda şans kısıtlı stokastik programlama modellerine gamma dağılımı yaklaşımı

Şans kısıtları ile çok amaçlı stokastik programlama problemi (3.2) biçiminde tanımlandı.

Sıradan bir doğrusal programlama modelinde kısıtlar

$$A\mathbf{x} \le b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Sadece a_{kj} ’ler (yani $a_k^{'}$ vektörünün elemanları) bağımsız gamma rasgele değişkenleri ise, (3.2) modeli ile verilen kısıtlarda,

$$d_k = a_k^{'}\mathbf{x} \qquad k = 1, \ldots, m$$

olarak ele alınırsa,

$$d_k \le b_k \quad \Leftrightarrow \quad [a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}] \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ x_k \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \le b_k$$

biçiminde yazılabilir. a_{kj} katsayıları için

$$P\left(d_k \le b_k\right) \ge 1 - u_k, \;\; k = 1, 2, \ldots, m$$

şans kısıtları yazılır. Burada her bir a_{kj} rasgele değişkeni $\left(\alpha_{kj}, \beta_{kj}\right)$ parametreleri ile gamma dağılımına sahip olsun. Bu durumda her bir a_{kj} rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(a_{kj}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_{kj})\beta_{kj}^{\alpha_{kj}}} a_{kj}^{\alpha_{kj}-1} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}}, & a_{kj} > 0, \beta_{kj} > 0, \alpha_{kj} > 0 \\ 0 \quad , & dd \end{cases}$$

biçiminde yazılır.

Teorem 4.2 ile verilen Esseen eşitsizliğini kullanabilmek için

$$r_j = a_{kj} x_j - E(a_{kj} x_j) \qquad j = 1, \ldots, n$$

rasgele değişkeni tanımlansın. Her bir a_{kj} rasgele değişkeninin beklenen değeri,

$$E(a_{kj}) = \alpha_{kj} \beta_{kj}$$

ve varyansı,

$$Var(a_{kj}) = \alpha_{kj} \beta_{kj}^2$$

olmak üzere, r_j rasgele değişkeninin beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(r_j) &= E(a_{kj} x_j - E(a_{kj} x_j)) \\ &= E(x_j (a_{kj} - E(a_{kj})) \\ &= x_j \left[E(a_{kj}) - \alpha_{kj} \beta_{kj} \right] \\ &= x_j \left[\alpha_{kj} \beta_{kj} - \alpha_{kj} \beta_{kj} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve varyansı

$$\begin{aligned} Var(r_j) &= E(r_j)^2 - \left[E(r_j)\right]^2 \\ &= E(r_j)^2 \\ &= E\left[x_j(a_{kj} - E(a_{kj})\right]^2 \\ &= x_j^2 E\left(a_{kj} - E(a_{kj})\right)^2 \\ &= x_j^2 Var(a_{kj}) \\ &= x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. r_j rasgele değişkeninin mutlak üçüncü momenti

$$\begin{aligned} E\left|r_j\right|^3 &= E\left|a_{kj}x_j - E(a_{kj}x_j)\right|^3 \\ &= x_j^3 E\left|a_{kj} - E(a_{kj})\right|^3 \\ &= x_j^3 E\left|a_{kj} - \alpha_{kj}\beta_{kj}\right|^3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

olur. (4.6) eşitliğindeki beklenen değer

$$\begin{aligned} E\left|a_{kj} - \alpha_{kj}\beta_{kj}\right|^3 &= \int_0^\infty \left|a_{kj} - \alpha_{kj}\beta_{kj}\right|^3 f(a_{kj})da_{kj} \\ &= \int_0^{\alpha_{kj}\beta_{kj}} \left|a_{kj} - \alpha_{kj}\beta_{kj}\right|^3 f(a_{kj})da_{kj} + \int_{\alpha_{kj}\beta_{kj}}^\infty \left|a_{kj} - \alpha_{kj}\beta_{kj}\right|^3 f(a_{kj})da_{kj} \end{aligned} \tag{4.7}$$

olmak üzere iki integrale parçalanır. (4.7) eşitliğindeki integraller sırasıyla I_{kj} ve II_{kj} olarak adlandırılsın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{kj} &= \int_0^{\alpha_{kj}\beta_{kj}} \left[-\left(a_{kj}-\alpha_{kj}\beta_{kj}\right)\right]^3 f(a_{kj})da_{kj} \\
&= -\int_0^{\alpha_{kj}\beta_{kj}} \left(a_{kj}-\alpha_{kj}\beta_{kj}\right)^3 f(a_{kj})da_{kj} \\
&= -\int_0^{\alpha_{kj}\beta_{kj}} \left(a_{kj}-\alpha_{kj}\beta_{kj}\right)^3 \frac{1}{\Gamma(\alpha_{kj})\beta_{kj}^{\alpha_{kj}}} a_{kj}^{\alpha_{kj}-1} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj} \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha_{kj})\beta_{kj}^{\alpha_{kj}}} \int_0^{\alpha_{kj}\beta_{kj}} \left(a_{kj}^3 - 3a_{kj}^2\alpha_{kj}\beta_{kj} + 3a_{kj}\alpha_{kj}^2\beta_{kj}^2 - \alpha_{kj}^3\beta_{kj}^3\right) a_{kj}^{\alpha_{kj}-1} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. I_{kj} integralinde $-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_{kj})\beta_{kj}^{\alpha_{kj}}} = \Delta$ alınarak

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{kj} = {} & \Delta \int_0^{\alpha_{kj}\beta_{kj}} a_{kj}^{\alpha_{kj}+2} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj} - \Delta\left(3\alpha_{kj}\beta_{kj}\right) \int_0^{\alpha_{kj}\beta_{kj}} a_{kj}^{\alpha_{kj}+1} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj} + \Delta\left(3\alpha_{kj}^2\beta_{kj}^2\right) \int_0^{\alpha_{kj}\beta_{kj}} a_{kj}^{\alpha_{kj}} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj} \\
& -\Delta\left(\alpha_{kj}^3\beta_{kj}^3\right) \int_0^{\alpha_{kj}\beta_{kj}} a_{kj}^{\alpha_{kj}-1} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj} \\
= {} & \Delta\omega_1 + \Delta\left(3\alpha_{kj}\beta_{kj}\right)\omega_2 + \Delta\left(3\alpha_{kj}^2\beta_{kj}^2\right)\omega_3 + \Delta\left(\alpha_{kj}^3\beta_{kj}^3\right)\omega_4
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada $\dfrac{a_{kj}}{\beta_{kj}} = t_{kj}$ değişken değiştirmesi yapılarak,

$$\omega_1 = \beta_{kj}^{\alpha_{kj}+3} \int_0^{\alpha_{kj}} t_{kj}^{\alpha_{kj}+2} e^{-t_{kj}} dt_{kj}$$

elde edilir. Tamamlanmamış gamma fonksiyonu;

$$I(a,x) = \frac{\gamma(a,x)}{\Gamma(a)}$$

olmak üzere, burada

$$\gamma(a,x)=\int_0^x t^{a-1}e^{-t}dt$$

biçiminde tanımlanarak,

$$\omega_1=\beta_{kj}^{\alpha_{kj}+3}\Gamma(\alpha_{kj}+3)I(\alpha_{kj}+3,\alpha_{kj})$$

olarak tekrar düzenlenebilir. Aynı şekilde

$$\omega_2=\beta_{kj}^{\alpha_{kj}+2}\Gamma(\alpha_{kj}+2)I(\alpha_{kj}+2,\alpha_{kj})$$
$$\omega_3=\beta_{kj}^{\alpha_{kj}+1}\Gamma(\alpha_{kj}+1)I(\alpha_{kj}+1,\alpha_{kj})$$
$$\omega_4=\beta_{kj}^{\alpha_{kj}}\Gamma(\alpha_{kj})I(\alpha_{kj},\alpha_{kj})$$

yazılabilir.

İntegralin ikinci kısmı

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_{kj}&=\int_{\alpha_{kj}\beta_{kj}}^{\infty}\left(a_{kj}-\alpha_{kj}\beta_{kj}\right)^3 f(a_{kj})da_{kj}\\&=\int_{\alpha_{kj}\beta_{kj}}^{\infty}\left(a_{kj}-\alpha_{kj}\beta_{kj}\right)^3\frac{1}{\Gamma(\alpha_{kj})\beta_{kj}^{\alpha_{kj}}}a_{kj}^{\alpha_{kj}-1}e^{-a_{kj}/\beta_{kj}}da_{kj}\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha_{kj})\beta_{kj}^{\alpha_{kj}}}\int_{\alpha_{kj}\beta_{kj}}^{\infty}\left(a_{kj}^3-3a_{kj}^2\alpha_{kj}\beta_{kj}+3a_{kj}\alpha_{kj}^2\beta_{kj}^2-\alpha_{kj}^3\beta_{kj}^3\right)a_{kj}^{\alpha_{kj}-1}e^{-a_{kj}/\beta_{kj}}da_{kj}\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. II_{kj} integralinde $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_{kj})\beta_{kj}^{\alpha_{kj}}}=-\Delta$ olarak alınırsa

$$\mathrm{II}_{kj} = -\Delta \int_{\alpha_{kj}\beta_{kj}}^{\infty} a_{kj}^{\alpha_{kj}+2} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj} + \Delta\left(3\alpha_{kj}\beta_{kj}\right) \int_{\alpha_{kj}\beta_{kj}}^{\infty} a_{kj}^{\alpha_{kj}+1} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj} - \Delta\left(3\alpha_{kj}^2\beta_{kj}^2\right) \int_{\alpha_{kj}\beta_{kj}}^{\infty} a_{kj}^{\alpha_{kj}} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj}$$

$$+\Delta\left(\alpha_{kj}^3\beta_{kj}^3\right) \int_{\alpha_{kj}\beta_{kj}}^{\infty} a_{kj}^{\alpha_{kj}-1} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj}$$

$$= -\Delta\xi_1 + \Delta\left(3\alpha_{kj}\beta_{kj}\right)\xi_2 - \Delta\left(3\alpha_{kj}^2\beta_{kj}^2\right)\xi_3 + \Delta\left(\alpha_{kj}^3\beta_{kj}^3\right)\xi_4$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \int_0^{\infty} a_{kj}^{\alpha_{kj}+2} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj} - \int_0^{\alpha_{kj}\beta_{kj}} a_{kj}^{\alpha_{kj}+2} e^{-a_{kj}/\beta_{kj}} da_{kj} \\
&= \beta_{kj}^{\alpha_{kj}+3}\Gamma(\alpha_{kj}+3) - \omega_1 \\
&= \beta_{kj}^{\alpha_{kj}+3}\Gamma(\alpha_{kj}+3) - \beta_{kj}^{\alpha_{kj}+3}\Gamma(\alpha_{kj}+3) I(\alpha_{kj}+3, \alpha_{kj}) \\
&= \beta_{kj}^{\alpha_{kj}+3}\Gamma(\alpha_{kj}+3)\left[1 - I(\alpha_{kj}+3, \alpha_{kj})\right]
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \beta_{kj}^{\alpha_{kj}+2}\Gamma(\alpha_{kj}+2)\left[1 - I(\alpha_{kj}+2, \alpha_{kj})\right] \\
\xi_3 &= \beta_{kj}^{\alpha_{kj}+1}\Gamma(\alpha_{kj}+1)\left[1 - I(\alpha_{kj}+1, \alpha_{kj})\right] \\
\xi_4 &= \beta_{kj}^{\alpha_{kj}}\Gamma(\alpha_{kj})\left[1 - I(\alpha_{kj}, \alpha_{kj})\right]
\end{aligned}$$

bulunur.

Buna göre, Teorem 4.2 ile verilen Esseen eşitsizliğini uygulayabilmek için

$$Er_j = 0 \qquad E\left|r_j\right|^3 < \infty$$

koşulları sağlanmış olup, B_n ve σ_j^2 ifadeleri için

$$\sigma_j^2 = Er_j^2 = x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2$$
$$B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2$$

eşitlikleri elde edilir. r_j rasgele değişkeninin üçüncü mutlak momenti I_{kj} ve II_{kj} integralleri cinsinden;

$$E\left|r_j\right|^3 = x_j^3 \left(\mathrm{I}_{kj} + \mathrm{II}_{kj}\right)$$

biçiminde yazılır. Bu durumda,

$$L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} E\left|r_j\right|^3 = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^3 \left(\mathrm{I}_{kj} + \mathrm{II}_{kj}\right)}{\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2\right]^{3/2}} \tag{4.8}$$

olacaktır.

Teorem 4.2 ile verilen L_n ifadesinin maksimum değeri elde edilirse (4.4) ifadesinde iki dağılım fonksiyonu arasındaki maksimum fark elde edilebilir. Buna göre aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 4.2 L_n ifadesinin maksimum değeri, paydadaki ifadenin maksimumu ve paydaki ifadenin minimumu alınarak bulunabilir. Buna göre

$$\max_j \sum_{j=1}^{n} x_j^3 \left(\mathrm{I}_{kj} + \mathrm{II}_{kj}\right)$$

ve

$$\min_j \left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2\right]^{3/2}$$

alınmalıdır. Burada

$$\max_j \left| x_j^3 \left(\mathrm{I}_{kj} + \mathrm{II}_{kj} \right) \right| = L^*$$

ve

$$\min_j \left| x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2 \right| = x^* \alpha^* (\beta^*)^2$$

olmak üzere L_n ifadesinin maksimum değeri,

$$\max L_n = \frac{nL^*}{\left(n x^* \alpha^* (\beta^*)^2 \right)^{3/2}} = \frac{nL^*}{n^{3/2} \left(x^* \alpha^* \right)^{3/2} (\beta^*)^3} \tag{4.9}$$

olarak bulunur.

(4.8) eşitliği ile verilen L_n ifadesi, Teorem 4. 2' deki *sup* ifadesinde yerine konularak,

$$\begin{aligned} \sup_x \left| F_n(x) - \phi(x) \right| &\le S L_n \\ \sup_x \left| F_n(x) - \phi(x) \right| &\le S \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^3 \left(\mathrm{I}_{kj} + \mathrm{II}_{kj} \right)}{\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2 \right]^{3/2}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.10) eşitsizliğinde P.Van Beek (Petrov 1975) tarafından önerilen $S = 0.7975$ sabiti yerine yazılıp (4.9) ile verilen $\max L_n$ değeri kullanılırsa,

$$\sup_x \left| F_n(x) - \phi(x) \right| \le 0.7975 \frac{L^*}{\sqrt{n} \left(x^* \alpha^* \right)^{3/2} (\beta^*)^3}$$

ifadesi elde edilir. Burada $F_n(x)$ gamma dağılımının, $\phi(x)$'de standart normal dağılımın dağılım fonksiyonlarıdır.

Böylece (3.2) ile verilen modeldeki şans kısıtları, d_k eşitsizliği için

$$\frac{d_k - \sum_{j=1}^{n} x_j E(a_{kj})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 Var(a_{kj})}} = \frac{d_k - \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{kj} \beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2}}$$

ifadesi tanımlanarak

$$P\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{kj} \beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2}} \leq \frac{b_k - \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{kj} \beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2}}\right] \geq 1 - u_k \qquad k = 1,\ldots,m \qquad (4.11)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\phi\left[\frac{b_k - \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{kj} \beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \alpha_{kj} \beta_{kj}^2}}\right] \geq 1 - \left(u_k + SL_n\right) \qquad (4.12)$$

bulunur. (4.12) eşitsizliğinin sol tarafındaki L_n ifadesinin içinde x_j $(j = 1,\ldots,n)$ karar değişkenleri bulunmaktadır. Bu karar değişkenleri, (3.2) modelinin eş değer deterministik modelinin çözümü sonucunda elde edildiğinden bilinmemektedir. Bu nedenle sayısal bir değer olmayıp, $\phi^{-1}\left(SL_n\right)$ ifadesi yardımıyla çözülemez. Polya'nın önerdiği yaklaşım (Johnson and Kotz 1970) kullanılarak (4.12) eşitsizliğinin sağ tarafı için

$$\phi\left[\frac{b_k-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\right]=\frac{1}{2}\left(1+\left\{1-\exp\left(-\frac{2}{\pi}\left[\frac{b_k-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\right]^2\right)\right\}^{1/2}\right) \tag{4.13}$$

eşitliği yazılarak deterministik kısıt

$$\frac{1}{2}\left(1+\left\{1-\exp\left(-\frac{2}{\pi}\left[\frac{b_k-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\right]^2\right)\right\}^{1/2}\right)\geq 1-\left[u_k+0.7975\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j^3\left(\mathrm{I}_{kj}+\mathrm{II}_{kj}\right)}{\left[\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2\right]^{3/2}}\right)\right] \tag{4.14}$$

biçiminde bulunur.

Teorem 4.3 deki (4.5) eşitliği, (4.11) ifadesindeki şans kısıtının sol tarafı için kullanılırsa,

$$P\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\leq\frac{b_k-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\right]=\phi\left(\frac{b_k-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\right)$$

$$+\frac{\sum_{j=1}^{n}E\left(x_ja_{kj}-E\left(x_ja_{kj}\right)\right)^3 e^{-\frac{\left(\frac{b_k-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\right)^2}{2}}\left(1-\left(\frac{b_k-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\right)^2\right)}{6\sqrt{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\geq 1-u_k \tag{4.15}$$

bulunur. (4.13) eşitliği ile verilen Polya' nın yaklaşımı (4.15) ifadesinde $\phi(\cdot)$ için yerine konulup,

$$E\left(x_j a_{kj}-E(x_j a_{kj})\right)^3=x_j^3 E\left(a_{kj}-E(a_{kj})\right)^3=x_j^3 2\alpha_{kj}\beta_{kj}^3$$

eşitliğinin de kullanılması ile (4.15) yeniden yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(1+\left\{1-\exp\left(-\frac{2}{\pi}\left[\frac{b_k-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\right]^2\right)\right\}^{1/2}\right)$$

$$\geq 1-\left[u_k+\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j^3 2\alpha_{kj}\beta_{kj}^3 e^{\frac{-\left(\frac{b_k-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\right)^2}{2}}\left(1-\left(\frac{b_k-\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{kj}\beta_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2}}\right)^2\right)}{6\sqrt{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\alpha_{kj}\beta_{kj}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \qquad (4.16)$$

biçiminde bulunur.

(4.2), (4.14) ve (4.16) deterministik kısıtları kullanılarak elde edilen çözümler Altıncı Bölümde verilecektir.

5. ÇOK AMAÇLI ŞANS KISITLI STOKASTİK PROGRAMLAMA MODELLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN ÖNERİLEN ETKİLEŞİMLİ BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA YAKLAŞIMLARI

Amaç değerlerinin bulanık olması varsayımı altında (3.3) üyelik fonksiyonu yardımı ile elde edilen (3.4) modeli kullanılarak oluşturulan çok amaçlı şans kısıtlı bulanık doğrusal programlama yaklaşımı Kesim 3.4.1 ile verilmiştir. Burada, her bir amaç için üyelik derecesi λ olmak üzere, λ nın en büyüklemesi üzerine kurulan (3.4) modelinin çözümünden uzlaşık çözüme ulaşılmıştır. Bu algoritmada, tüm amaç fonksiyonlarının aynı λ üyelik derecesi ile modele dahil olması ayrıntılı çözümler elde edilmesini kısıtlamaktadır. Bu durumda, karar vericinin kendi belirlediği kriterler doğrultusunda amaç veya amaçlarını en iyileyen çözüm yöntemi olan etkileşimli yaklaşımlardan yararlanmak, karar vericiye daha fazla seçim imkanı tanır.

Kesim 3.5.1 de verilen algoritma, her bir amaca ayrı ayrı referans üyelik seviyeleri vererek elde ettiği çözümlerdeki simpleks çarpanlarının birbirine bölüm oranına göre bu üyelik seviyelerini değiştirdiği görülmüştür. Bu algoritmada kullanılan oranlama sistemine göre elde edilen kararın diğer çözümlerle karşılaştırılması mümkün değildir. Tüm bu eksikleri gidermek amacı ile her iki algoritmadan da yararlanılarak iki yeni etkileşimli algoritma önerildi. Bu algoritmalarda amaçlara ait referans üyelik seviyelerini belirlerken amaçların modele olan katkısının mümkün olduğunca korunması hedeflendi. Buna göre, referans üyelik seviyelerini temel alan karar verme kriterleri geliştirildi.

Çok amaçlı şans kısıtlı stokastik programlama problemleri için iki yeni etkileşimli algoritma aşağıda verilmiştir.

5.1 En Büyük Üyelik Çarpımı Yöntemi

Bu yöntemde, Kesim 3.4.1’ de çok amaçlı şans kısıtlı problemler için bulanık programlama ve Kesim 3.5.1’ de verilen etkileşimli bulanık programlama yaklaşımlarından yararlanıldı. Her bir amaç fonksiyonunun katkısını incelemek için referans üyelik seviyeleri belirlendi. Verilen senaryoya uygun olan çözümler içinde referans üyelik seviyelerinin birbirleri ile çarpımı alındı. Bu çarpımın en büyük olması amaçlandı.

(3.2) ile verilen çok amaçlı şans kısıtlı stokastik programlama modeli

$$
\begin{aligned}
\max(\min) z_l(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{n} c_{lj} x_j \quad l = 1,\dots,K \\
\mathrm{P}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k\right] &\ge 1 - u_k \quad k = 1,\dots,m \\
x_j &\ge 0, \quad j = 1,\dots,n \\
u_k &\in (0,1), \quad k = 1,\dots,m
\end{aligned}
$$

ele alınsın. Bu model için geliştirilen yeni bir etkileşimli bulanık programlama yaklaşımı olan en büyük üyelik çarpımı yönteminin algoritmasının adımları aşağıda verilmiştir:

Adım 1: Verilen stokastik programlama problemi şans kısıtlı programlama problemi tekniği ile deterministik modele dönüştürülür.

Adım 2: Her bir amaç için Adım 1’de elde edilen deterministik problem çözülür.

Adım 3: Adım 2’den elde edilen çözümlerin her biri için diğer amaçlara verdiği değerler bulunur.

Adım 4: Adım 3’den yararlanarak amaç fonksiyonunun her biri için alt ve üst sınırlar (L_l ve U_l ’lar) bulunur.

Adım 5: (3.3) ile verilen üyelik fonksiyonu kullanılarak (3.4) modeli elde edilir. Model çözülerek uzlaşık çözüme varılır. Karar verici daha ayrıntılı çözüm elde etmek için $v = 1 - \lambda$ alarak (3.4) modelini,

$$
\begin{aligned}
&\min v \\
&\bar{\mu}_l - v \le \frac{z_l(\mathbf{x}) - L_l}{U_l - L_l} \quad l = 1,\dots,K \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k \quad k = 1,\dots,m \\
&x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n \\
&v \ge 0,\ v \le 1
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

biçimine dönüştürür.

Adım6: Referans üyelik seviyeleri $\bar{\mu}_l,\ l = 1,\dots,K$ olmak üzere, $\{\bar{\mu}_{11}, \bar{\mu}_{12}, \dots, \bar{\mu}_{1m}\} \times \{\bar{\mu}_{21}, \bar{\mu}_{22}, \dots, \bar{\mu}_{2m}\} \times, \dots, \times \{\bar{\mu}_{K1}, \bar{\mu}_{K2}, \dots, \bar{\mu}_{Km}\}$ kartezyen çarpımı ile elde edilen tüm referans üyelik seviyeleri için (5.1) modeli ayrı ayrı çözülür. Burada *m* karar verici tarafından seçilen $\bar{\mu}_l,\ l = 1,\dots,K$ referans üyelik seviyesi için alınan kümenin eleman sayısıdır. m^K tane modelden elde edilen karar değişkenlerinin amaç fonksiyonlarına verdiği $z_l^*, l = 1,\dots,K$ değerleri hesaplanır. Hesaplanan değerler için, karar vericinin isteğine bağlı olarak *l*. amaç fonksiyonu seçilip diğer amaç fonksiyonları değerleri ve buna karşılık gelen referans üyelik seviyeleri bu fonksiyona göre küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe sıralanır.

Adım7: Adım 6'da elde edilen sonuçlar içinden $\bar{\mu}_1 = 1, \bar{\mu}_2 = 1, \dots, \bar{\mu}_l = 1, \dots, \bar{\mu}_K = 1$ için $z^*_{1,\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1,\dots,\bar{\mu}_l=1,\dots,\bar{\mu}_K=1}, z^*_{2,\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1,\dots,\bar{\mu}_l=1,\dots,\bar{\mu}_K=1}, \dots, z^*_{l,\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1,\dots,\bar{\mu}_l=1,\dots,\bar{\mu}_K=1}, \dots, z^*_{K,\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1,\dots,\bar{\mu}_l=1,\dots,\bar{\mu}_K=1}$ değerleri belirlenir. Burada $z^*_{l,\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1,\dots,\bar{\mu}_l=1,\dots,\bar{\mu}_K=1}$, $\bar{\mu}_1 = 1, \bar{\mu}_2 = 1, \dots, \bar{\mu}_l = 1, \dots, \bar{\mu}_K = 1$ alınarak elde edilen amaç fonksiyonu değeridir. $z^*_{l,\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1,\dots,\bar{\mu}_l=1,\dots,\bar{\mu}_K=1}$ değerinden en büyükleme (en küçükleme) problemi için daha büyük (küçük) olan değerler $\hat{z}_{l,\hat{\bar{\mu}}_1,\hat{\bar{\mu}}_2,\dots,\hat{\bar{\mu}}_l,\dots,\hat{\bar{\mu}}_K}$ olarak ifade edilir ve $m^K > n$ olmak üzere *n* tanedir. $\hat{\bar{\mu}}_l$, $\hat{z}_l$ amaç değerlerine karşılık gelen referans üyelik seviyeleri olup $z^*_{l,\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1,\dots,\bar{\mu}_l=1,\dots,\bar{\mu}_K=1} \le (\ge)\ \hat{z}_{l,\hat{\bar{\mu}}_1,\hat{\bar{\mu}}_2,\dots,\hat{\bar{\mu}}_l,\dots,\hat{\bar{\mu}}_K}$ koşulunu sağlayan $\hat{\bar{\mu}}_l, l = 1,\dots,K$ *n* tane referans üyelik seviyesi kümesi saptanır.

Adım8: Adım 7'den elde edilen *n* tane referans üyelik seviyesi kümesi içinden,

$$\max\left(\prod_{l=1}^{K}\hat{\bar{\mu}}_l\right)$$

olan değere ait sonuç çözüm olarak alınır.

Algoritmanın uygulaması Altıncı Bölümde verilmiştir.

5.2 Yinelemeli Referans Üyelik Seviyesi Yöntemi

Bu yöntem ile Kesim 3.5.1 de verilen algoritmanın karar aşaması için yeni bir yaklaşım ileri sürüldü. Referans üyelik seviyeleri problemin ilk çözümünden elde edilen üyelik seviyeleri ile senaryoya göre değiştirildi. Elde edilen yeni üyelik seviyeleri için problem tekrar çözüldü. En son üyelik seviyesi sabitlenene kadar yinelemeler sürdürüldü. Bulunan referans üyelik seviyelerine ait olan çözümler sonuç olarak alındı. Kesim 4.2.1 deki

$$\begin{gathered}
\min E\left[z_1(\mathbf{x},\omega)\right] \\
\min E\left[z_2(\mathbf{x},\omega)\right] \\
\vdots \\
\min E\left[z_K(\mathbf{x},\omega)\right] \\
P\left[\mathbf{a_1}(\omega)\mathbf{x}\le b_1\right]\ge 1-u_1 \qquad \left(veya\ P\left[\mathbf{a_1}\mathbf{x}\le b_1(\omega)\right]\ge u_1\right) \\
P\left[\mathbf{a_2}(\omega)\mathbf{x}\le b_2\right]\ge 1-u_2 \qquad \left(veya\ P\left[\mathbf{a_2}\mathbf{x}\le b_2(\omega)\right]\ge u_2\right) \\
\vdots \\
P\left[\mathbf{a_m}(\omega)\mathbf{x}\le b_m\right]\ge 1-u_m \qquad \left(veya\ P\left[\mathbf{a_m}\mathbf{x}\le b_m(\omega)\right]\ge u_m\right) \\
\mathbf{x}\ge\mathbf{0}
\end{gathered}$$

modeli ele alındığında algoritmanın adımları,

Adım1: Karar verici tarafından her bir kısıt için, $u_i,\ i=1,...,m$ tatmin edici seviyeleri belirlenir.

Adım2: $u_i,\ i=1,...,m$ tatmin edici seviyeleri kullanarak, gamma dağılımına sahip teknolojik katsayıların bulunduğu kısıtlar, Kesim 5.2.1' de verilen yöntemle deterministik hale getirilir. Rasgele değişken katsayılara sahip amaç fonksiyonu ise E-model ile $E\left[z_l\left(\mathbf{x},\omega\right)\right]=\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right), l=1,...,K$ ' biçiminde düzenlenerek kesin fonksiyonlar elde edilir. Her bir amaç için en küçük $\overline{z}_l^{\min}$ ve en büyük $\overline{z}_l^{\max}$ değerleri hesaplanır.

Adım3: Her bir amaç fonksiyonu için, karar verici tarafından $\mu_l\left(\overline{z}_l\left(x\right)\right)$ üyelik fonksiyonu belirlenir.

Adım4: Başlangıç referans üyelik seviyesi $\overline{\mu}_l=1,\ l=1,...,K$ olarak alınır. (3.11) modeli çözülür.

Adım5: Karar verici amaç fonksiyonu değerleri bakımından sonuçtan memnun kalmaz ise, referans üyelik seviyelerinin Adım 4' deki çözümden elde edilen amaç fonksiyonlarının değerlerini

$$\textit{bulanık}\ \text{enk}\quad \mu_l\left(\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\right)=\begin{cases}0, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)>z_l^{OR}\\ \dfrac{\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)-z_l^{OR}}{z_l^1-z_l^{OR}}, & z_l^1\le\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\le z_l^{OR}\\ 1, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)<z_l^1\end{cases}$$

$$\textit{bulanık}\ \text{enb}\quad \mu_l\left(\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\right)=\begin{cases}0, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)<z_l^{OL}\\ \dfrac{\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)-z_l^{OL}}{z_l^1-z_l^{OL}}, & z_l^{OL}\le\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\le z_l^1\\ 1, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)>z_l^1\end{cases}$$

$$\textit{bulanık} \text{ eşit} \quad \mu_l\left(\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right)\right) = \begin{cases} 0, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right) < z_l^{OL} \\ \dfrac{\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right) - z_l^{OL}}{z_l^1 - z_l^{OL}}, & z_l^{OL} \le \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right) \le z_l^1 \\ \dfrac{\overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right) - z_l^{OR}}{z_l^1 - z_l^{OR}}, & z_l^1 \le \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right) \le z_l^{OR} \\ 0, & \overline{z}_l\left(\mathbf{x}\right) > z_l^{OR} \end{cases}$$

fonksiyonlarında yerine koyarak yeni referans üyelik seviyelerini belirler.

Adım6: $\overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_2 = ... = \overline{\mu}_K = 1$ değerleri yerine Adım 5 de belirlenen üyelik seviyeleri sırası ile yerine konulur ve (3.11) modeli her biri için çözülür. Amaç fonksiyonu değeri bakımından en küçük değeri veren üyelik seviyesi kümesinden $\overline{\mu}_l \neq 1$ olan değer sabitlenir. Bu üyelik seviyesi kümesi (3.11) modelinde yerine konulur. Bir önceki yinelemede sabit tutulan değiştirilmemek kaydıyla amaç fonksiyonuna göre en küçük değeri veren üyelik seviyesinden $\overline{\mu}_l \neq 1$ olan değer sabitlenir. Bu yineleme, K tanesi sabitleninceye kadar devam eder. K tane yinelemeden sonra durulur. Elde edilen bu üyelik seviyelerine ait olan çözümler sonuç olarak alınır.

biçiminde oluşturulur. Bu algoritmaya ait uygulama Altıncı Bölümde verilmiştir.

6. UYGULAMA

Bu bölümde, ilk olarak a_{kj} rasgele değişkenlerin gamma dağılımına sahip olması durumunda, kısıtın deterministik eşitliğinin, doğrudan dağılımı bulunarak elde edilişi gösterildi. İkinci olarak ele alınan modelde a_{kj} katsayıları önce normal dağılıma sonra gamma dağılımına sahip rasgele değişkenler olarak ele alınıp bu iki modelin deterministik eşitliklerinin çözümleri elde edildi. Gamma dağılımlı katsayılara sahip modelin deterministik eşdeğer modeli Kesim 4.3'de verilen Esseen eşitsizliği yardımıyla bulundu. Aynı zamanda başka bir şans kısıtlı model oluşturulup, gamma dağılımlı a_{kj} katsayılarına sahip iken doğrudan dağılımı elde edilerek ve Esseen eşitsizliği kullanılarak modeller çözüldü. Bu iki çözüm a_{kj} katsayılarının normal dağılıma sahip olması durumu ile kıyaslandı.

Beşinci bölümde önerilen en büyük üyelik çarpımı yöntemine ve yinelemeli referans üyelik seviyesi yöntemine ilişkin algoritmalar ele alınan modeller üzerinde işletildi.

Deterministik modellerin çözümleri LINGO 9.0 paket programı kullanılarak yapıldı.

6.1 Gamma Dağılımına Sahip A Katsayılar Matrisinin Sütun Sayısı İki Olduğunda Şans Kısıtlı Stokastik Programlama Modelinin Çözümü

Bu kesimde verilen örneğin çözümü için Kesim 4.2'de verilen yöntemden yararlanıldı. Şans kısıtının doğrudan dağılımı elde edilerek model deterministik duruma getirildi. Hesaplama işlemleri sırasında MATLAB programı kullanıldı.

Üç kısıt ve bir amaçtan oluşan şans kısıtlı stokastik programlama problemi,

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + x_2 \\ &P\left[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le 3\right] \ge 0.6 \\ &P\left[a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le 2\right] \ge 0.6 \\ &P\left[a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le 1\right] \ge 0.75 \\ &x_j \ge 0 \quad j = 1,2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

ele alınsın. Burada, a_{kj}'ler $E\left(a_{kj}\right)$ beklenen değerli ve $Var\left(a_{kj}\right)$ varyanslı bağımsız gamma dağılımlı rasgele değişkenler olsunlar. Burada,

$$\begin{aligned} E\left(a_{11}\right) &= 1,\ Var\left(a_{11}\right) = 1 \\ E\left(a_{12}\right) &= 1,\ Var\left(a_{12}\right) = 1 \\ E\left(a_{21}\right) &= 1,\ Var\left(a_{21}\right) = 1 \\ E\left(a_{22}\right) &= 3,\ Var\left(a_{22}\right) = 9 \\ E\left(a_{31}\right) &= 2,\ Var\left(a_{31}\right) = 2 \\ E\left(a_{32}\right) &= 2,\ Var\left(a_{32}\right) = 4 \end{aligned}$$

olup

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 \sim \Gamma(1, x_1) & a_{12}x_2 \sim \Gamma(1, x_2) \\ a_{21}x_1 \sim \Gamma(1, x_1) & a_{22}x_1 \sim \Gamma(1, 3x_2) \\ a_{31}x_1 \sim \Gamma(2, x_1) & a_{32}x_1 \sim \Gamma(1, 2x_2) \end{array}$$

biçimindedir. (4.2) ifadesi kullanılarak (6.1)'deki şans kısıtlı model,

$$
\begin{gathered}
\max z = x_1 + x_2 \\
-e^{-3(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2})} x_2 e^{\frac{3}{x_1}} + e^{-3(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2})} x_1 e^{\frac{3}{x_2}} + x_2 - x_1 \geq 0.6(x_2 - x_1) \\
-3e^{-2(\frac{x_1+3x_2}{3x_1x_2})} x_2 e^{\frac{2}{x_1}} + e^{-2(\frac{x_1+3x_2}{3x_1x_2})} x_1 e^{\frac{2}{3x_2}} + 3x_2 - x_1 \geq 0.6(3x_2 - x_1) \qquad (6.2) \\
-4e^{-(\frac{x_1-2x_2}{2x_1x_2})} x_2^2 e^{-\frac{1}{x_1}} + 4e^{-\frac{1}{x_1}} x_1x_2 + 2e^{-\frac{1}{x_1}} x_2 - e^{-\frac{1}{x_1}} x_1 - e^{-\frac{1}{x_1}} x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1^2 \geq 0.75(-2x_2 + x_1)^2 \\
x_j \geq 0 \quad j = 1,2
\end{gathered}
$$

biçiminde dönüştürülerek deterministik hale gelir. Problem çözülerek,

$$x_1 = 0.07561216 \qquad x_2 = 0.3024115 \qquad \max z = 0.3780236$$

bulunur.

6.2 Gamma Dağılımına Sahip a_{kj} Rasgele Değişkenleri İçeren Modelin Deterministik Eşitliğinin Bulunması ve Modelin Çözümü

Bu kesimde yer alan birinci ve ikinci örneklerde a_{kj} katsayılarının gamma dağılımına sahip olması durumunda Kesim 4.3'de verilen yaklaşımdan yararlanıldı. Normal dağılıma sahip a_{kj} katsayılarının bulunduğu model çözümleri ile kıyaslandı. Üçüncü örnekte ise Kesim 4.2 ve Kesim 4.3 ile verilen yaklaşımlar aynı örneğe uygulandı ve normal dağılımlı model ile karşılaştırıldı.

***Örnek 1*:** İki kısıt ve bir amaçtan oluşan şans kısıtlı stokastik programlama problemi

$$
\begin{gathered}
\max z = 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
P\left[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq 8\right] \geq 0.95 \qquad (6.3) \\
P\left[5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq b_2\right] \geq 0.10 \\
x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3
\end{gathered}
$$

ele alınsın.

i) (6.3) şans kısıtlı stokastik programlama probleminde b_k katsayısının ve a_{kj} katsayılarının normal dağılımına sahip rasgele değişkenler olması durumu:

(6.3) modelinde

$$P\left[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le 8\right] \ge 0.95 \tag{6.4}$$

şans kısıtında a_{kj} katsayıları $E\left(a_{kj}\right)$ beklenen değerli ve $Var\left(a_{kj}\right)$ varyanslı bağımsız normal dağılımlı rasgele değişkenler olsunlar. Her bir a_{kj} katsayısı için beklenen değer ve varyanslar

$$\begin{aligned}
E\left(a_{11}\right) &= 4,\ Var\left(a_{11}\right) = 4 \\
E\left(a_{12}\right) &= 4,\ Var\left(a_{12}\right) = 8 \\
E\left(a_{13}\right) &= 6,\ Var\left(a_{13}\right) = 12
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. (2.7) ifadesi kullanılarak (6.4) ile verilen şans kısıtlı eşitliğin deterministik eşitliği

$$4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 1.645\sqrt{4x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_3^2} \le 8 \tag{6.5}$$

olarak bulunur.

(6.3) modelindeki ikinci kısıt

$$P\left[5x_1 + x_2 + 6x_3 \le b_2\right] \ge 0.10 \tag{6.6}$$

biçiminde olup burada b_2 rasgele değişkeni ise beklenen değeri,

$$E(b_2) = 7$$

ve varyansı,

$$Var(b_2) = 9$$

olan normal dağılıma sahip olsun. (6.6) eşitsizliği ile verilen şans kısıtı, (2.13) ifadesi kullanılarak deterministik eşitliği

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10.855 \tag{6.7}$$

biçiminde elde edilir.

Bu durumda (6.3) ile verilen şans kısıtlı problem, (6.5) ve (6.7) deterministik kısıtları kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\max z &= 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 1.645x_4 &\leq 8 \\
4x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_3^2 - x_4^2 &= 0 \\
5x_1 + x_2 + 6x_3 &\leq 10.855 \\
x_j \geq 0 \quad j &= 1,2,3,4
\end{aligned} \tag{6.8}$$

biçimine dönüşür.

ii) (6.3) şans kısıtlı stokastik programlama probleminde b_k katsayısı normal dağılıma sahip rasgele değişken ve a_{kj} katsayıları gamma dağılımına sahip rasgele değişkenler olması durumu:

(6.4) kısıtındaki a_{kj} katsayıları $\left(\alpha_{kj}, \beta_{kj}\right)$ parametreleri ile i)'de verilen $E\left(a_{kj}\right)$ beklenen değerli ve $Var\left(a_{kj}\right)$ varyanslı gamma dağılımlı bağımsız rasgele değişkenler olsunlar. Burada, a_{11} rasgele değişkeni için,

$$\alpha_{11}\beta_{11} = 4,\ \alpha_{11}\beta_{11}^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha_{11} = 4,\ \beta_{11} = 1$$

a_{12} rasgele değişkeni için,

$$\alpha_{12}\beta_{12} = 4,\ \alpha_{12}\beta_{12}^2 = 8 \Leftrightarrow \alpha_{12} = 2,\ \beta_{12} = 2$$

a_{13} rasgele değişkeni için,

$$\alpha_{13}\beta_{13} = 6,\ \alpha_{13}\beta_{13}^2 = 12 \Leftrightarrow \alpha_{13} = 3,\ \beta_{13} = 2$$

parametreleri tanımlansın. Bununla birlikte,

$$r_j = a_{kj}x_j - E\left(a_{kj}x_j\right)$$

olmak üzere,

$$Var\left(r_j\right) = x_j^2\left(\alpha_{kj}\beta_{kj}^2\right)$$

olup, $k = 1$ için

$$B_n = 4x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_3^2$$

olarak bulunur. Bu durumda,

$$L_n = \frac{\sum_{j=1}^{3} x_j^3 \left(\mathrm{I}_{kj} + \mathrm{II}_{kj} \right)}{\left(4x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_3^2 \right)^{3/2}}$$

biçiminde yazılır. L_n ifadesindeki I_{kj} $(k=1,\ j=1,2,3)$ ve II_{kj} $(k=1,\ j=1,2,3)$ integrallerinin çözümü sonucunda,

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_{11} = 3.2824,\ \mathrm{II}_{11} = 11.2824 \\ &\mathrm{I}_{12} = 6.9766,\ \mathrm{II}_{12} = 38.9766 \\ &\mathrm{I}_{13} = 15.3291,\ \mathrm{II}_{13} = 63.3291 \end{aligned}$$

değerleri elde edilir. Bu durumda L_n ifadesi,

$$L_n = \frac{14.5648 x_1^3 + 45.9532 x_2^3 + 78.6582 x_3^3}{\left(4x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_3^2 \right)^{3/2}}$$

olarak bulunur. Böylece (6.4) ile verilen şans kısıtının deterministik eşitliği (4.14) eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{1}{2}\left[1 + \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2}{\pi} \left[\frac{8 - (4x_1 + 4x_2 + 6x_3)}{\sqrt{4x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_3^2}} \right]^2 \right) \right\}^{1/2} \right] \geq 1 - \left[0.05 + 0.7975 \left(\frac{14.5648 x_1^3 + 45.9532 x_2^3 + 78.6582 x_3^3}{\left(4x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_3^2 \right)^{3/2}} \right) \right] \quad (6.9)$$

biçiminde elde edilir.

Bu durumda (6.3) ile verilen şans kısıtlı problem, (6.9) ve (6.7) deterministik kısıtları kullanılarak,

$$\max z = 7x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\frac{1}{2}\left[1+\left\{1-\exp\left(-\frac{2}{\pi}\left[\frac{8-(4x_1+4x_2+6x_3)}{\sqrt{4x_1^2+8x_2^2+12x_3^2}}\right]^2\right)\right\}^{1/2}\right] \geq 1-\left[0.05+0.7975\left(\frac{14.5648x_1^3+45.9532x_2^3+78.6582x_3^3}{\left(4x_1^2+8x_2^2+12x_3^2\right)^{3/2}}\right)\right]$$

$$0.7975\left(\frac{14.5648x_1^3+45.9532x_2^3+78.6582x_3^3}{\left(4x_1^2+8x_2^2+12x_3^2\right)^{3/2}}\right) \leq 0.95 \qquad (6.10)$$

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10.855$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3$$

olarak bulunur. (6.10)'de verilen ikinci kısıt, birinci kısıtın sağ tarafının negatif olmamasını kontrol etmek amacı ile verilmiştir.

Aynı problemde (6.4) şans kısıtı (4.16) eşitsizliği kullanılarak deterministik kısıta dönüştürülerek,

$$\max z = 7x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$0.5\left(1+\left\{1-\exp\left(-0.6366\frac{(8-x_4)^2}{x_5}\right)\right\}^{1/2}\right) \geq 0.95-\left[\frac{(8x_1^3+32x_2^3+48x_3^3)e^{\frac{-x_6}{2}}\left(1-x_6\right)}{6\sqrt{(6.28)}x_5^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$x_4 - 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0$$

$$x_5 - (4x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_3^2) = 0$$

$$x_6x_5 - (8 - x_4)^2 = 0 \qquad (6.11)$$

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10.855$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3,4,5,6$$

modeli elde edilir. Burada x_4, x_5, x_6 (6.11) modelini daha anlaşılır biçimde ifade edebilmek amacıyla tanımlanmış yardımcı değişkenlerdir. (6.8), (6.10) ve (6.11) deterministik problemlerinin çözümleri Çizelge 6.1'de verilmiştir.

Çizelge 6.1 (6.8), (6.10) ve (6.11) deterministik problemlerinin çözümleri

(6.8) modeli için çözümler	(6.10) modeli için çözümler	(6.11) modeli için çözümler
$x_1 = 1.097394$ $x_2 = 0.000000$ $x_3 = 0.000000$ $x_4 = 2.194787$ $\max z = 7.681756$	$x_1 = 1.466249$ $x_2 = 0.9250464$ $x_3 = 0.4331181$ $\max z = 13.84631$	$x_1 = 1.010669$ $x_2 = 0.000000$ $x_3 = 0.000000$ $x_4 = 4.042678$ $x_5 = 4.085811$ $x_6 = 3.832873$ $\max z = 7.074686$

Çizelge 6.1'de verilen sonuçlar incelendiğinde, (6.8) model çözümleri ile (6.11) model çözümlerinin birbirine oldukça yakın olduğu görülebilir. (6.10) modelindeki farklılık SL_n ifadesindeki S sabit teriminden ileri gelir. Esseen eşitsizliğinin duyarlılığını arttıran Teorem 4.3'de verilen (4.5) eşitliğinden yararlanılarak elde edilen, (4.16) eşitsizliğini kullanarak bulunan (6.11) modelinin çözümlerinin daha olumlu sonuçlar verdiği gözlemlenir.

Örnek 2: İki kısıt ve bir amaçtan oluşan şans kısıtlı stokastik programlama problemi

$$\begin{gathered} \min z = x_1 - x_2 x_3 \\ P\left[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq 8\right] \geq 0.95 \\ P\left[a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq 6\right] \geq 0.95 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3 \end{gathered} \tag{6.12}$$

ele alınsın.

i) a_{kj} 'ler $E\left(a_{kj}\right)$ beklenen değerli ve $Var\left(a_{kj}\right)$ varyanslı bağımsız gamma dağılımına sahip rasgele değişkenler olsunlar. Her bir a_{kj} katsayısı için beklenen değer ve varyanslar

$$E\left(a_{11}\right)=4,\ Var\left(a_{11}\right)=4$$
$$E\left(a_{12}\right)=4,\ Var\left(a_{12}\right)=8$$
$$E\left(a_{13}\right)=6,\ Var\left(a_{13}\right)=12$$

$$E\left(a_{21}\right)=5,\ Var\left(a_{21}\right)=25$$
$$E\left(a_{22}\right)=3,\ Var\left(a_{22}\right)=3$$
$$E\left(a_{23}\right)=12,\ Var\left(a_{23}\right)=36$$

olarak verilsin. (4.16) ifadesi kullanılarak (6.12) ile verilen modele eşdeğer deterministik model

$$\min z = x_1 - x_2 x_3$$

$$0.5\left(1+\left\{1-\exp\left(-0.6366\frac{(8-x_4)^2}{x_5}\right)\right\}^{½}\right) \geq 0.95-\left[\frac{(8x_1^3+32x_2^3+48x_3^3)e^{\frac{-x_6}{2}}\left(1-x_6\right)}{6\sqrt{(6.28)}x_5^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$x_4-4x_1-4x_2-6x_3=0$$

$$x_5-(4x_1^2+8x_2^2+12x_3^2)=0$$

$$x_6x_5-(8-x_4)^2=0 \tag{6.13}$$

$$0.5\left(1+\left\{1-\exp\left(-0.6366\frac{(6-x_7)^2}{x_8}\right)\right\}^{½}\right) \geq 0.95-\left[\frac{(250x_1^3+6x_2^3+216x_3^3)e^{\frac{-x_6}{2}}\left(1-x_9\right)}{6\sqrt{(6.28)}x_8^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$x_7-5x_1-3x_2-12x_3=0$$

$$x_8-(25x_1^2+3x_2^2+36x_3^2)=0$$

$$x_9x_8-(6-x_7)^2=0$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2,3,...,9$$

olarak bulunur.

ii) a_{kj}'ler $E\left(a_{kj}\right)$ beklenen değerli ve $Var\left(a_{kj}\right)$ varyanslı bağımsız normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olsunlar. Her bir a_{kj} katsayısı için beklenen değer ve varyanslar i) durumunda verilen değerlere eşit olarak alınsın. (6.12) şans kısıtlı stokastik programlama probleminin eşdeğer deterministik model,

$$\begin{gathered} \min z = x_1 - x_2 x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 1.645x_4 \leq 8 \\ 4x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_3^2 - x_4^2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 1.645x_5 \leq 6 \\ 25x_1^2 + 3x_2^2 + 36x_3^2 - x_5^2 = 0 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3,4,5 \end{gathered} \tag{6.14}$$

olarak bulunur. (6.13) ve (6.14) deterministik modellerinin çözümleri Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.2 (6.13) ve (6.14) deterministik modellerinin çözümleri

(6.13) modeli için çözümler	(6.14) modeli için çözümler
$x_1 = 0.000000$ $x_2 = 0.5534098$ $x_3 = 0.1542272$ $\min z =$ -0.08535083	$x_1 = 0.000000$ $x_2 = 0.5907785$ $x_3 = 0.1599778$ $\min z =$ -0.09451145

Çizelge 6.2'den her iki modelin çözümlerinin birbirine hem amaç değerleri hem de karar değişkenleri açısından çok yakın olduğu görülür.

Örnek 3: Bu kesimde verilen son örnek Kesim 4.2 ile Kesim 4.3 de verilen yöntemleri karşılaştırmak amacıyla sunuldu. (6.1) ile verilen şans kısıtlı model ele alındı. Bu modelin deterministik modeli doğrudan dağılımı kullanılarak (6.2) olarak bulunmuştu.

i) (6.1) şans kısıtlı stokastik programlama probleminde a_{kj} katsayılarının Kesim 6.1'de verilen beklenen değer ve varyanslara sahip normal dağılımlı rasgele değişkenler olması durumunda (2.7) eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\begin{gathered}
\max z = x_1 + x_2 \\
3 - x_1 - x_2 - 0.253347103(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \\
2 - x_1 - 3x_2 - 0.253347103(x_1^2 + 9x_2^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \\
1 - 2x_1 - 2x_2 - 0.67449(2x_1^2 + 4x_2^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \\
x_j \geq 0 \quad j = 1, 2
\end{gathered} \tag{6.15}$$

deterministik modeli elde edilir.

ii) (6.1) şans kısıtlı stokastik programlama probleminde a_{kj} katsayılarının Kesim 6.1'de verilen beklenen değer ve varyanslara sahip gamma dağılımlı rasgele değişkenler olması durumunda (4.16) eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$0.5\left(1+\left\{1-\exp\left(-0.6366\frac{(3-x_3)^2}{x_4}\right)\right\}^{1/2}\right) \geq 0.6 - \left[\frac{(2x_1^3+2x_2^3)e^{\frac{-x_5}{2}}\left(1-x_5\right)}{6\sqrt{(6.28)}x_4^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$x_3 - x_1 - x_2 = 0$$

$$x_4 - (x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$x_5 x_4 - (3-x_3)^2 = 0$$

$$0.5\left(1+\left\{1-\exp\left(-0.6366\frac{(2-x_6)^2}{x_7}\right)\right\}^{1/2}\right) \geq 0.6 - \left[\frac{(2x_1^3+54x_2^3)e^{\frac{-x_8}{2}}\left(1-x_8\right)}{6\sqrt{(6.28)}x_7^{\frac{3}{2}}}\right] \quad (6.16)$$

$$x_6 - x_1 - 3x_2 = 0$$

$$x_7 - (x_1^2 + 9x_2^2) = 0$$

$$x_8 x_7 - (2-x_6)^2 = 0$$

$$0.5\left(1+\left\{1-\exp\left(-0.6366\frac{(2-x_9)^2}{x_{10}}\right)\right\}^{1/2}\right) \geq 0.75 - \left[\frac{(2x_1^3+54x_2^3)e^{\frac{-x_{11}}{2}}\left(1-x_{11}\right)}{6\sqrt{(6.28)}x_{10}^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$x_9 - 2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_{10} - (2x_1^2 + 4x_2^2) = 0$$

$$x_{11} x_{10} - (1-x_9)^2 = 0$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3,\ldots,11$$

deterministik modeli bulunur. (6.15), (6.16) ve (6.2) deterministik modellerinin çözümleri Çizelge 6.3'de verilmiştir.

Çizelge 6.3 (6.15), (6.14) ve (6.2) deterministik modellerinin çözümleri

(6.15) modeli için çözümler (a_{kj} katsayılarının normal dağılıma sahip olması durumunda (2.7) ifadesinin kullanılması halinde)	(6.16) modeli için çözümler (a_{kj} katsayılarının gamma dağılıma sahip olması durumunda Teorem 3'den elde edilen (4.16) eşitliğinin kullanılması halinde)	(6.2) modeli için çözümler (a_{kj} katsayılarının gamma dağılıma sahip olması durumunda doğrudan dağılımının bulunması halinde)
$x_1 = 0.2399088$ $x_2 = 0.1199544$ $\max z = 0.3598632$	$x_1 = 0.1389767$ $x_2 = 0.2462885$ $x_3 = 0.3852652$ $x_4 = 0.07997254$ $x_5 = 85.48981$ $x_6 = 0.8778421$ $x_7 = 0.5652366$ $x_8 = 2.227807$ $x_9 = 0.7705304$ $x_{10} = 0.2812611$ $x_{11} = 0.1872150$ $\max z = 0.3852652$	$x_1 = 0.07561216$ $x_2 = 0.3024115$ $\max z = 0.3780236$

Çizelge 6.3'den bu üç modelin çözümünün, amaç fonksiyonu değerleri bakımından birbirine yakın olduğu görülmektedir. Özellikle (4.16) ile verilen yaklaşım kullanılarak elde edilen çözümlerin, doğrudan Gamma dağılımını kullanarak bulunan çözümlere daha yakın değerler aldığı gözlenmektedir.

6.3 a_{kj} Katsayılarının Ki-Kare, b_k Katsayısının Normal Dağılıma Sahip Olması Durumunda Çok Amaçlı Şans Kısıtlı Stokastik Programlama Problemlerine Etkileşimli Bulanık Programlama Yaklaşımı

Bu kesimde, ki-kare dağılımına sahip a_{kj} katsayılarının deterministik eşitliklerinin bulunmasında, Kesim 2.3.2'de açıklanan Sengupta (1970)'nın önerdiği yöntem kullanıldı. Normal dağılıma sahip b_k sağ yan değerinin bulunduğu kısıtın deterministik eşitliğinin elde edilmesinde ise Kesim 2.3.1'de verilen Hulsurkar, Biswal ve Sinha (1997)'nın önerdiği yöntemden yararlanıldı. Bulunan deterministik kısıtlardan oluşan çok amaçlı bir problem ele alınarak, modelin çözüm aşamasında Beşinci Bölümde verilen en büyük üyelik çarpımı yöntemi için önerilen algoritma kullanıldı.

İki amaç, üç değişken ve iki stokastik kısıttan oluşan çok amaçlı stokastik programlama problemi;

$$\begin{aligned} \max z_1 &= 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \max z_2 &= 8x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \mathrm{P}\left\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le 8\right\} &\ge 0.95 \\ \mathrm{P}\left\{4x_1 + x_2 + 5x_3 \le b_2\right\} &\ge 0.10 \\ x_j \ge 0,\ j &= 1,2,3 \end{aligned} \tag{6.17}$$

biçiminde verilsin. Burada

$$\begin{aligned} E(a_{11}) &= 2,\ Var(a_{11}) = 4 \\ E(a_{12}) &= 1,\ Var(a_{12}) = 2 \\ E(a_{13}) &= 3,\ Var(a_{13}) = 9 \\ E(b_2) &= 7,\ Var(b_2) = 9 \end{aligned}$$

beklenen değer ve varyanslarla $a_{kj}, k = 1,\ j = 1,2,3$ katsayıları ki-kare dağılımına ve b_2 katsayısı normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olsunlar. Kesim 5.1'de verilen en büyük üyelik çarpımı yöntemi kullanılarak (6.17) problemi sekiz adımda çözüldü.

Adım 1: (6.17) modelinin denk deterministik eşitliği (2.34) ve (2.13) eşitsizlikleri yardımıyla

$$\begin{gathered}\max z_1 = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \max z_2 = 8x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 16x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 25.2x_1^2 - 12.6x_2^2 - 37.8x_3^2 \geq 0 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10.855 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3\end{gathered} \tag{6.18}$$

biçiminde elde edildi.

Adım 2,3,4: (6.18) modeli çözüldü, alt ve üst sınırlar bulunarak sonuçlar Çizelge 6.4'de verildi.

Çizelge 6.4 (6.18) modelinin çözümleri

1. amaç z_1 için	2. amaç z_2 için
$x_1 = 0.6718453$	$x_1 = 0.8012703$
$x_2 = 0.5537169$	$x_2 = 0.6803178$
$x_3 = 0.6324692$	$x_3 = 0.2771428$
$z_1 = 5.099129$	$z_2 = 8.183973$
$U_1 = 5.099129, \quad L_1 = 4.1926999$	$U_2 = 8.173993, \quad L_2 = 6.4034439$
$U_1 - L_1 = .9064291$	$U_2 - L_2 = 1.7705291$

Adım 5: (3.3) ile verien doğrusal üyelik fonksiyonu kullanılarak kısıtlar

$$\begin{gathered}\lambda \leq \frac{3x_1 + x_2 + 4x_3 - 4.1926999}{0.9064291} \\ \lambda \leq \frac{8x_1 + 3x_2 - x_3 - 6.4034439}{1.7705291}\end{gathered} \tag{6.19}$$

biçiminde elde edildi. (3.4) modelinden yararlanılarak

$$
\begin{gathered}
\max \lambda \\
\lambda \le \frac{3x_1 + x_2 + 4x_3 - 4.1926999}{0.9064291} \\
\lambda \le \frac{8x_1 + 3x_2 - x_3 - 6.4034439}{1.7705291} \\
16x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 25.2x_1^2 - 12.6x_2^2 - 37.8x_3^2 \ge 0 \\
4x_1 + x_2 + 5x_3 \le 10.855 \\
x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \\
\lambda \ge 0
\end{gathered}
\tag{6.20}
$$

modeli oluşturuldu. (6.20) modelinin çözümü Çizelge 6.5’de verilmiştir.

Çizelge 6.5 (6.20) modelinin çözümü

$x_1 = 0.7794529$	
$x_2 = 0.6476774$	$z_1 = 4.8614897$
$x_3 = 0.4688634$	$z_2 = 7.7097920$
$\lambda = 0.7378292$	

Daha ayrıntılı çözüm elde etmek için (5.1) modelinden yararlanarak

$$
\begin{gathered}
\min v \\
\frac{3x_1 + x_2 + 4x_3 - 4.1926999}{0.9064291} \ge \bar{\mu}_1 - v \\
\frac{8x_1 + 3x_2 - x_3 - 6.4034439}{1.17705291} \ge \bar{\mu}_2 - v \\
16x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 25.2x_1^2 - 12.6x_2^2 - 37.8x_3^2 \ge 0 \\
4x_1 + x_2 + 5x_3 \le 10.855 \\
x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \\
v \ge 0
\end{gathered}
\tag{6.21}
$$

modeli oluşturuldu.

Adım 6: Bu modelde $m=10$ için

$$\{\bar{\mu}_{11},\bar{\mu}_{12},...,\bar{\mu}_{1m}\}\times\{\bar{\mu}_{21},\bar{\mu}_{22},...,\bar{\mu}_{2m}\}=\{1,0.9,0.8,...,0.1\}\times\{1,0.9,0.8,...,0.1\}$$

alınarak her bir referans seviyesine göre (6.21) modelinden 10×10 tane çözüm elde edildi.. $l=2$ olmak üzere z_2 amaç fonksiyonu değeri seçildi. z_2^* değerleri küçükten büyüğe doğru sıralandı. z_2^* değerlerine karşılık gelen karar değişkenleri, z_1^* değerleri ve referans üyelik seviyeleri de düzenlendi. Tüm bu sonuçlar EK 1'de verildi

Adım 7: $(\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1)$ için

$$z^*_{1,\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1}=4.8614897\,,z^*_{2,\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1}=7.7097920$$

olarak elde edildi. $\hat{z}_{2,\hat{\bar{\mu}}_1,\hat{\bar{\mu}}_2}\geq z^*_{2,\bar{\mu}_1=1,\bar{\mu}_2=1}=7.7097920$ olan değerler ve bunlara karşılık gelen $n=24$ tane $\hat{\bar{\mu}}_1,\hat{\bar{\mu}}_2$ kümesi belirlendi. Sonuçlar EK 1'de görülebilir.

Adım 8: Adım 7'den elde edilen referans üyelik seviyeleri kullanılarak, EK 1'deki 24 tane referans üyelik seviyesi kümesi içinden

$$\max\left(\prod_{l=1}^{2}\hat{\bar{\mu}}_l\right)=\left(\hat{\bar{\mu}}_1=0.9\right)\left(\hat{\bar{\mu}}_2=1.0\right)=0.9$$

olan değere ait

$$x_1=0.7855149 \qquad x_2=0.6537150 \qquad x_3=0.4509630$$
$$\hat{z}_1=4.8141117 \qquad \hat{z}_2=7.7943012$$
$$\hat{\bar{\mu}}_1=0.9 \qquad \hat{\bar{\mu}}_2=1.0$$

sonuçları çözüm olarak alınır. Bu yöntem sayesinde karar verici problemini daha ayrıntılı inceleme imkanı bulmuş ve kendi kriterlerine göre daha iyi bir çözüm elde etmiştir.

6.4 a_{kj} Katsayılarının ve c_{kj} Amaç Katsayılarının Gamma, b_k Katsayısının Normal Dağılıma Sahip Olması Durumunda Çok Amaçlı Şans Kısıtlı Stokastik Programlama Problemlerine Etkileşimli Bulanık Programlama Yaklaşımı

Yinelemeli referans üyelik seviyesi yöntemine ilişkin algoritmanın uygulanması amacıyla 3 değişken, 3 amaç ve iki kısıttan oluşan bir problem ele alınsın. Burada amaç katsayıları ve birinci kısıttaki a_{kj} $(k=1,\ j=1,2,3)$ katsayıları gamma dağılımına sahip rasgele değişken, ikinci kısıttaki b_2 sağ yan değeri ise normal dağılıma sahip rasgele değişkendir. Buna göre kurulan model

$$\begin{gathered}\min\left(z_1\left(\mathbf{x},\omega\right),z_2\left(\mathbf{x},\omega\right),z_3\left(\mathbf{x},\omega\right)\right)^T\\ a_{11}\left(\omega\right)x_1+a_{12}\left(\omega\right)x_2+a_{13}\left(\omega\right)x_3\le b_1\\ 5x_1+x_2+6x_3\le b_2\left(\omega\right)\\ x_j\ge 0\ \ ,\ \ j=1,2,3\end{gathered}\tag{6.22}$$

biçiminde olsun. Burada, birinci kısıt için, $a_{kj}\left(\omega\right)$ rasgele değişkenleri $\left(\alpha_{kj},\beta_{kj}\right)$ parametreleri ile gamma dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olsunlar. Kesim (6.2)'de ele alınan parametreler kullanılarak, a_{11} rasgele değişkeni için,

$$\alpha_{11}\beta_{11}=4,\ \alpha_{11}\beta_{11}^2=4\ \Leftrightarrow\ \alpha_{11}=4,\ \beta_{11}=1$$

a_{12} rasgele değişkeni için,

$$\alpha_{12}\beta_{12}=4,\ \alpha_{12}\beta_{12}^2=8\Leftrightarrow\ \alpha_{12}=2,\ \beta_{12}=2$$

a_{13} rasgele değişkeni için,

$$\alpha_{13}\beta_{13}=6,\ \alpha_{13}\beta_{13}^2=12\Leftrightarrow\ \alpha_{13}=3,\ \beta_{13}=2$$

parametreleri tanımlansın. İkinci kısıt için, b_2 rasgele değişkeni ise beklenen değeri,

$$E(b_2) = 7$$

ve varyansı,

$$Var(b_2) = 9$$

olan normal dağılıma sahip olsun. Amaç fonksiyonu;

$$z_l(\mathbf{x},\omega) = \left(\mathbf{c}_l^1 + t_l(\omega)\mathbf{c}_l^2\right)\mathbf{x} + \left(\alpha_l^1 + t_l(\omega)\alpha_l^2\right), \quad l = 1,2,3 \tag{6.23}$$

biçiminde olup, burada $t_1(\omega)$ beklenen değeri; $E\left[t_1(\omega)\right] = \bar{t}_1 = 1$ olan, $t_2(\omega)$ beklenen değeri ; $E\left[t_2(\omega)\right] = \bar{t}_2 = 2$ olan, $t_3(\omega)$ beklenen değeri ; $E\left[t_3(\omega)\right] = \bar{t}_3 = 3$ olan gamma dağılımına sahip rasgele değişkenler olsun. (6.23) ifadesinin beklenen değeri

$$E\left[z_l(\mathbf{x},\omega)\right] = \left(\mathbf{c}_l^1 + \bar{t}_l\mathbf{c}_l^2\right)\mathbf{x} + \left(\alpha_l^1 + \bar{t}_l\alpha_l^2\right), \quad l = 1,2,3$$

biçiminde olacaktır. Amaç fonksiyonuna ait diğer katsayılar

$$\begin{gathered}
\mathbf{c}_1^1 = (-6,1,4),\ \mathbf{c}_1^2 = (1,2,2),\ \alpha_1^1 = 1,\ \alpha_1^2 = -1 \\
\mathbf{c}_2^1 = (3,-6,2),\ \mathbf{c}_2^2 = (-1,2,1),\ \alpha_2^1 = -2,\ \alpha_2^2 = 2 \\
\mathbf{c}_3^1 = (1,7,-9),\ \mathbf{c}_3^2 = (1,-3,2),\ \alpha_3^1 = 1,\ \alpha_3^2 = 2
\end{gathered}$$

olarak verilmiştir. Son olarak $b_1 = 8$ biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre (6.22) problemi,

$$
\begin{aligned}
&\min E\left[z_1(\mathbf{x},\omega)\right]\\
&\min E\left[z_2(\mathbf{x},\omega)\right]\\
&\min E\left[z_3(\mathbf{x},\omega)\right]\\
&P\left[a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\le 8\right]\ge 1-u_1\\
&P\left[5x_1+x_2+6x_3\le b_2\right]\ge u_2\\
&x_j\ge 0\;\; j=1,2,3
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

olarak modellenir.

Adım 1: $u_1=0.05;\; u_2=0.10$ olarak belirlendi.

Adım 2: (6.24) modeline ilişkin deterministik model

$$
\begin{aligned}
&\min z_1=-5x_1+3x_2+6x_3\\
&\min z_2=x_1-2x_2+4x_3+2\\
&\min z_3=4x_1-2x_2-3x_3+7\\
&0.5\left(1+\left\{1-\exp\left(-0.6366\frac{(8-x_4)^2}{x_5}\right)\right\}^{1/2}\right)\ge 0.95-\left[\frac{(8x_1^3+32x_2^3+48x_3^3)e^{\frac{-x_6}{2}}\left(1-x_6\right)}{6\sqrt{(6.28)}x_5^{\frac{3}{2}}}\right]\\
&x_4-4x_1-4x_2-6x_3=0\\
&x_5-(4x_1^2+8x_2^2+12x_3^2)=0\\
&x_6x_5-(8-x_4)^2=0\\
&5x_1+x_2+6x_3\le 10.855\\
&x_j\ge 0\quad j=1,2,3,4,5,6
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

olarak oluşturuldu. Doğrusal olmayan (6.25) problemine ait sonuçlar Çizelge 6.6'de verilmiştir.

Çizelge 6.6 (6.25) problemine ait sonuçlar

1.amaç fonksiyonu için	2.amaç fonksiyonu için	3.amaç fonksiyonu için
$z_1^{\min} = -5.053347$ $x_1 = 1.010669$ $x_2 = 0.000000$ $x_3 = 0.000000$	$z_2^{\min} = 0.3945828$ $x_1 = 0.0000000$ $x_2 = 0.8027086$ $x_3 = 0.0000000$	$z_3^{\min} = 4.846590$ $x_1 = 0.0000000$ $x_2 = 0.4306820$ $x_3 = 0.4306820$
$z_1^{\max} = 3.928297$ $x_1 = 0.000000$ $x_2 = 0.3180947$ $x_3 = 0.4956688$	$z_2^{\max} = 4.464588$ $x_1 = 0.0000000$ $x_2 = 0.0000000$ $x_3 = 0.6161471$	$z_3^{\max} = 11.04268$ $x_1 = 1.010669$ $x_2 = 0.000000$ $x_3 = 0.000000$

Adım 3: $I_1 = \{1,2\}, I_2 = \varnothing, I_3 = \{3\}$ olarak alınsın. Buna göre amaç fonksiyonlarının üyelik fonksiyonları için değerler Çizelge 6.7'de verilmiştir.

Çizelge 6.7 Her bir amaç fonksiyonuna ait üyelik fonksiyonlarının oluşturulması için gerekli değerler

$\overline{\mu}_1\left(\overline{z}_1(\mathbf{x})\right)$	$\overline{\mu}_2\left(\overline{z}_2(\mathbf{x})\right)$	$\overline{\mu}_3\left(\overline{z}_3(\mathbf{x})\right)$
Bulanık en küçük	Bulanık en küçük	Bulanık eşit
$z_1^1 = -5.053347$ $z_1^{OR} = 3.928297$	$z_2^1 = 0.3945828$ $z_2^{OR} = 4.464588$	$z_3^1 = \left(2\overline{z}_3^{\min} + \overline{z}_3^{\max}\right)/3 = 6.9119533$ $z_3^{OR} = 11.04268$ $z_3^{OL} = 4.846590$

Adım 4: $\overline{\mu}_l = 1,\ l = 1,2,3$ alınarak

$$\min\ v$$
$$\frac{-5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 3.928297}{-5.053347 - 3.928297} \geq \overline{\mu}_1 - v,$$
$$\frac{x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2 - 4.464588}{0.3945828 - 4.464588} \geq \overline{\mu}_2 - v,$$
$$\frac{4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7 - 4.846590}{6.9119533 - 4.846590} \geq \overline{\mu}_3 - v,$$
$$\frac{4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7 - 11.04268}{6.9119533 - 11.04268} \geq \overline{\mu}_3 - v,$$
$$0.5\left(1 + \left\{1 - \exp\left(-0.6366\frac{(8-x_4)^2}{x_5}\right)\right\}^{½}\right) \geq 0.95 - \left[\frac{(8x_1^3 + 32x_2^3 + 48x_3^3)e^{\frac{-x_6}{2}}\left(1 - x_6\right)}{6\sqrt{(6.28)}x_5^{\frac{3}{2}}}\right] \quad (6.26)$$
$$x_4 - 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0$$
$$x_5 - (4x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_3^2) = 0$$
$$x_6 x_5 - (8 - x_4)^2 = 0$$
$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10.855$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3,4,5,6$$

modeli elde edildi. (6.26) modeli çözülerek

$x_1 = 0.5133899$ $x_2 = 0.2953180$ $x_3 = 0.000000$	$\min v = 0.3754715$	$\overline{z}_1(\mathbf{x}) =$ -1,6809955 $\overline{z}_2(\mathbf{x}) = 1{,}9227539$ $\overline{z}_3(\mathbf{x}) = 8{,}4629236$

bulundu.

Adım 5: (6.26) modelinin çözüm sonuçlarından yararlanarak,

$$\mu_1\left(\overline{z}_1(\mathbf{x})\right) = \mu_1(-1.6809955) = 0.6245285$$

$$\mu_2\left(\overline{z}_2(\mathbf{x})\right) = \mu_2(1.9227539) = 0.6245285$$

$$\mu_3\left(\overline{z}_3(\mathbf{x})\right) = \mu_3(8.4629236) = 0.6245285$$

olarak elde edildi.

Adım 6: (6.26) modelinde Adım 5'de elde edilen referans üyelik seviyeleri yardımıyla elde edilen min $v = 0.1706532$ değerini veren $\bar{\mu}_1 = 0.6, \bar{\mu}_2 = 1, \bar{\mu}_3 = 1$ model seçilir. $\bar{\mu}_1 = 0.6$ olarak sabitlenir. Yeni elde edilen üyelik seviyeleri yararlanarak (6.26) modeli tekrar çözülür. En son referans üyelik seviyesi sabitleninceye kadar işlemler sürdürülür. Elde edilen çözümler Çizelge 6.8'de verilmiştir.

Çizelge 6.8 Karar aşaması için yinelemeler

	Yineleme I
$\bar{\mu}_1 = 1,\ \bar{\mu}_2 = 1,\ \bar{\mu}_3 = 1$	$\left.\begin{array}{ll} \bar{\mu}_1 = 0.6,\ \bar{\mu}_2 = 1, \bar{\mu}_3 = 1 & v = 0.1706532 \\ \bar{\mu}_1 = 1, \bar{\mu}_2 = 0.6, \bar{\mu}_3 = 1 & v = 0.3650326 \\ \bar{\mu}_1 = 1, \bar{\mu}_2 = 1,\ \bar{\mu}_3 = 0.6 & v = 0.3386212 \end{array}\right\\} \min v = 0.1706532$
	$\bar{\mu}_1 = 0.6,\ \bar{\mu}_2 = 1,\ \bar{\mu}_3 = 1$
$\bar{z}_1(\mathbf{x}) = -1.6809955$ $\bar{z}_2(\mathbf{x}) = 1.9227539$ $\bar{z}_3(\mathbf{x}) = 8.4629236$	$\bar{z}_1(\mathbf{x}) = 0.0720565$ $\bar{z}_2(\mathbf{x}) = 1.0891421$ $\bar{z}_3(\mathbf{x}) = 7.1984824$
$\mu_1(\bar{z}_1(\mathbf{x})) = 0.6245285$ $\mu_2(\bar{z}_2(\mathbf{x})) = 0.6245285$ $\mu_3(\bar{z}_3(\mathbf{x})) = 0.6245285$	$\mu_1(\bar{z}_1(\mathbf{x})) = 0.4293468$ $\mu_2(\bar{z}_2(\mathbf{x})) = 0.8293468$ $\mu_3(\bar{z}_3(\mathbf{x})) = 0.9306347$
$v = 0.3754715$	$v = 0.1706532$

Çizelge 6.8 Karar aşaması için yinelemeler (devamı)

	Yineleme II
$\bar{\mu}_1 = 0.6,\ \bar{\mu}_2 = 1,\ \bar{\mu}_3 = 1$	$\left.\begin{array}{ll} \bar{\mu}_1 = 0.6,\ \bar{\mu}_2 = 0.8, \bar{\mu}_3 = 1 & v = 0.1205487 \\ \bar{\mu}_1 = 0.6, \bar{\mu}_2 = 1, \bar{\mu}_3 = 0.9 & v = 0.1706532 \end{array}\right\} \min v = 0.1205487$
	$\bar{\mu}_1 = 0.6,\ \bar{\mu}_2 = 0.8,\ \bar{\mu}_3 = 1$
$\bar{z}_1(\mathbf{x}) = 0.0720565$ $\bar{z}_2(\mathbf{x}) = 1.0891421$ $\bar{z}_3(\mathbf{x}) = 7.1984824$	$\bar{z}_1(\mathbf{x}) = -0.3779643$ $\bar{z}_2(\mathbf{x}) = 1.6992177$ $\bar{z}_3(\mathbf{x}) = 7.4099072$
$\mu_1(\bar{z}_1(\mathbf{x})) = 0.4293468$ $\mu_2(\bar{z}_2(\mathbf{x})) = 0.8293468$ $\mu_3(\bar{z}_3(\mathbf{x})) = 0.9306347$	$\mu_1(\bar{z}_1(\mathbf{x})) = 0.4794513$ $\mu_2(\bar{z}_2(\mathbf{x})) = 0.6794513$ $\mu_3(\bar{z}_3(\mathbf{x})) = 0.8794513$
$v = 0.1706532$	$v = 0.1205487$

	Yineleme III
$\bar{\mu}_1 = 0.6,\ \bar{\mu}_2 = 0.8,\ \bar{\mu}_3 = 1$	$\left.\begin{array}{ll} \bar{\mu}_1 = 0.6,\ \bar{\mu}_2 = 0.8, \bar{\mu}_3 = 1 & v = 0.1205487 \\ \bar{\mu}_1 = 0.6, \bar{\mu}_2 = 0.8, \bar{\mu}_3 = 0.9 & v = 0.08875464 \end{array}\right\} \min v = 0.08875464$
	$\bar{\mu}_1 = 0.6,\ \bar{\mu}_2 = 0.8,\ \bar{\mu}_3 = 0.9$
$\bar{z}_1(\mathbf{x}) = -0.3779643$ $\bar{z}_2(\mathbf{x}) = 1.6992177$ $\bar{z}_3(\mathbf{x}) = 7.4099072$	$\bar{z}_1(\mathbf{x}) = -0.6635267$ $\bar{z}_2(\mathbf{x}) = 1.5698156$ $\bar{z}_3(\mathbf{x}) = 7.6916470$
$\mu_1(\bar{z}_1(\mathbf{x})) = 0.4794513$ $\mu_2(\bar{z}_2(\mathbf{x})) = 0.6794513$ $\mu_3(\bar{z}_3(\mathbf{x})) = 0.8794513$	$\mu_1(\bar{z}_1(\mathbf{x})) = 0.5112453$ $\mu_2(\bar{z}_2(\mathbf{x})) = 0.7112454$ $\mu_3(\bar{z}_3(\mathbf{x})) = 0.8112454$
$v = 0.1706532$	$v = 0.08875464$

Çizelge 6.8'e göre, üyelik seviyeleri $\bar{\mu}_1 = 0.6, \bar{\mu}_2 = 0.8$ ve $\bar{\mu}_3 = 0.9$ alınarak elde edilen çözüm problemin çözümüdür.

7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Pratik olarak basit bir problemde başlangıç verisi yetersiz olduğunda, elde olan veriler kullanılarak durum içerisinde kararlar vermek bir kuraldır. Karmaşık durumlarda, deterministik modeller yerine stokastik modelleri seçerek karar vermenin daha uygun olduğu görülmüştür. Başlangıç verilerinin tam olarak bilinmediği, yani bir belirsizlik veya eksiklik içerdiği durumda şans kısıtlı stokastik programlama problemlerini kullanmak gerekmektedir.

Belirsizlik altında planlama ve yönetimin matematiksel yöntemlarının uygulamaları bulanık ve rasgelelik içerebilir. Doğrusal olan rasgele katsayılara sahip, şans kısıtlı modellerin deterministik eşitlikleri doğrusal olmayan problemlere dönüşebilir. Bu modellerin amaç fonksiyonlarının bulanık olması, bulanık programlama yaklaşımlarını da beraberinde getirir.

Katsayıların rasgele değişken olması, bu katsayıların birer dağılıma sahip olmasını zorunlu kılar. Literatürdeki örneklerde gözlenen, şans kısıtlarının normal dağılımlı katsayılara sahip olması durumudur. Bu, farklı bir dağılımın seçilmesi durumunda, şans kısıtlarının deterministik modellerinin nasıl elde edileceği sorusunu beraberinde getirir. Bu düşünceden yola çıkarak normal ve ki-kare dağılımlı şans kısıtlı modeller incelendikten sonra, gamma dağılımlı şans kısıtlarının modeller üzerindeki etkisinin incelenmesi arzulanmıştır. Gamma dağılımlı şans kısıtlı modellerde sağ yan değerlerinin ve amaç katsayılarının rasgele değişken olması durumunda, modelin deterministik eşitliğinin kolayca elde edilebileceği önceki çalışmalarda görülmüştür. Sağ yan değerleri rasgele olduğunda, dağılım fonksiyonunun tersi alınarak, amaç katsayıları rasgele olduğunda ise beklenen değer optimizasyonu (E-Model) yapılarak deterministik kısıtlar bulunabilir. Ancak teknoloji katsayılarının rasgele değişken olması durumunda, bir takım zorluklarla karşılaşılmıştır. Şans kısıtının deterministik eşitliğinin elde edilişi sırasında, a_{kj} katsayıları ile çarpım halinde bulunan x_j karar değişkenlerinden kaynaklanan sorunlar ortaya çıkmaktadır. Karar değişkenlerinin artması durumunda şans kısıtının dağılımının bulunması karmaşık olmaktadır. Bu nedenle, çalışmanın Dördüncü Bölümünde öncelikle katsayılar matrisinin sütun sayısının iki olması durumunda, doğrudan şans kısıtının dağılım fonksiyonu bulunup, deterministik kısıt oluşturulmuştur. Fakat sütun sayısı arttığında dağılımın bulunuşu çok zorlaşmaktadır. Bu nedenle, bağımsız rasgele değişkenlerin toplamının dağılımı ve normal dağılım arasındaki farkların tahmininin kullanıldığı yeni bir yaklaşım önerilmiştir. Bu yaklaşım sayesinde elde edilen sonuçlar ile doğrudan dağılımı kullanılarak bulunan sonuçlar birbirine yakın değerler vermektedir. Bu sonuçlara göre, Esseen eşitsizliğinin büyük örneklemde daha iyi sonuçlar verdiği de düşünülürse, karar değişkenlerinin ikiden çok olması durumunda da iyi sonuçlar verecektir. Toplamın dağılımını bulma veya normal dağılımı kullanma yerine önerilen yaklaşımı kullanmak yöntemin teoriye katkısı olmaktadır. Uygulama aşamasında, teknoloji katsayıları gamma dağılımına sahip modellerin önerilen yöntemle deterministik modeli elde edilmiştir. Aynı problem, hem sağ yan hem de teknoloji katsayılarının normal dağılıma sahip olması durumunda çözülmüştür. Ele alınan problemler için hem karar değişkenlerinin hem de amaç fonksiyonu değerlerinin birbirine çok yakın olduğu gözlenmiştir.

Modelde rasgelelikten kaynaklanan belirsizlik yok edildikten sonra, amaç fonksiyonu değerlerinin bulanık olması durumu göz önüne alınarak, bulanık programlama yaklaşımıyla model için uzlaşık çözümler elde edilmeye çalışılmıştır. Fakat literatürde bulunan bulanık programlama yaklaşımları karmaşık olan gamma dağılımlı ve ki-kare dağılımlı şans kısıtlı modellerin deterministik eşitliklerinin çözümleri için yeteri kadar ayrıntılı ve karar vericiye seçim imkanı tanıyan çözümler sunamamaktadır. Bu nedenle daha detaylı çözümler elde edebilmek için, karar verme aşaması karar vericiye bağlı olan, etkileşimli iki yeni bulanık algoritma geliştirilmiştir. Önerilen bu yeni algoritmalardan birincisinde literatürde bulunan iki farklı algoritma bir arada düşünülerek karar aşaması, karar vericinin isteğine bağlı olmak koşulu ile değiştirilmiştir. İkinci algoritmada ise çalışmanın Dördüncü Bölümü kullanılarak elde edilen deterministik modelin çözümü için, yinelemeli bir sistem kullanılmıştır. Üyelik değerlerini sabitleyen bu yöntemle ile yeni bir karar verme stratejisine sahip etkileşimli bulanık programlama yaklaşımı sunulmuştur.

Bundan sonraki çalışmalarımızda şans kısıtlı modeller için farklı dağılımlar olması durumları incelenebilir. Son zamanlarda literatürde sıklıkla rastlanan bulanık rasgele değişkenler irdelenerek, farklı çözüm yaklaşımları bulunabilir. Tez çalışmasında kullanılan gamma dağılımı için bir üyelik fonksiyonu elde etme problemi üzerinde durulabilir.

KAYNAKLAR

Bellman, R.E. and Zadeh, L.A. 1970. Decision Making in a Fuzzy Environment. Management Science, 17, 141-164.

Charnes, A. and Cooper, W.W. 1959. Chance Constrained Programming. Management Science, 6, 73-79.

Charnes, A. and Cooper, W.W. 1963. Deterministic Equivalents for Optimizing and Stisficing Under Chance Costrants. Operation Research, 11,18-39.

Déak, I. 1998. Linear Regression Estimators for Multinormal Distributions in Optimization of Stochastic Programming Problems. European Journal of Operational Research, 111, 555-568.

Dubois, D. and Prade, H. 1980. Fuzzy Sets and Systems. Academic Press, INC., 392 p., New-York.

Feller, W. 1966. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II. John Wiley and Sons, Inc. 704 p., New York, London.

Gröwe, N. 1997. Estimated Stochastic Programs with Chance Constraints. European Journal of Operational Research, 101, 285-305.

Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. 1990. Introduction to Mathematical Programming. Hill Publishing Company, 716 p., New York.

Hulsurkar, S., Biswal, M.P. and Sinha, S.B. 1997. Fuzzy Programming Approach to Multi-Objective Stochastic Linear Programming Problems. Fuzzy Sets and Systems, 88,173-181.

Inuiguchi, M. and Ramik, J. 2000. Probabilistik Linear Programming: A Brief Review of Fuzzy Mathematical Programming and A Comparison with Stochastic Programming in Portfolio Selection Problem. Fuzzy Sets and Systems, 111, 3-28.

Jana, R.K. and Biswal, M.P. 2004. Stochastic Simulation Based Genetic Algorıthm for Chance Constraint Programming Problems with Some Discrete Random Variables. International Journal of Computer Mathematics, 81(12), 1455-1463.

Jana, R.K. and Biswal, M.P. 2004. Stochastic Simulation-Based Genetic Algorıthm for Chance Constraint Programming Problems with Continuous Random Variables. International Journal of Computer Mathematics, 81(9), 1069-1076.

Johnson, N.L. and Kotz, S. 1970. Distributions-2. Houghton Mifflin Company. 306 p., Boston.

Kampas, A. and White, B. 2003. Probabilistic Programming for Nitrate Pollution Control: Comparing Different Probabilistic Constraint Approximations. European Journal of Operational Research, 147,217-228.

Klir, G.J. and Yuan, B. 1995. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Prentice-Hall, 574 p., USA.

Kolbin, V.V. 1977. Stochastic Programming.D. Reidel Publishing Company, 195 p., Boston.

Lai, Y.J. and Hwang, C.L. 1992. Fuzzy Mathematical Programming. Springer- Verlag. 301 p., Berlin.

Liu, B. 2000. Dependent-Chance Programming in Fuzzy Environments. Fuzzy Sets and Systems, 109, 90-706.

Liu, B. and Iwamura, K. 1998. Chance Constrained Programming with Fuzzy Parameters. Fuzzy Sets and Systems, 94,227-237.

Liu, B. and Member, S. 2001. Fuzzy Random Chance-Constrained Programming.IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 9,713-720.

Luhandjula, M.K. and Gupta, M.M. 1996. On Fuzzy Stochastic Optimization. Fuzzy Sets and Systems, 81, 47-55.

Mohamed, R.H. 1992. A Chance-Constrained Fuzzy Goal Program. Fuzzy Sets and Systems, 47, 183-186.

Mohammed, W. 2000. Chance Constrained Fuzzy Goal Programming with Right-Hand Side Uniform Random Variable Coefficients.Fuzzy Sets and Systems, 109,107-110.

Mohan, C. and Nguyen, H.T. 2001. An Interactive Satisficing Method for Solving Multiobjective Mixed Fuzzy-Stochastic Programming Problems. Fuzzy Sets and Systems, 117,61-79.

Özkan, M.M. 2003. Bulanık Hedef Programlama, Ekin Kitabevi, 288 s., İstanbul.

Patnaik, P.B. 1949. The Non-Central χ^2 and F- Distributions and Their Applications. Biometrika, 36,202-232.

Petrov, V.V. 1975. Sums of Independent Random Variables. Springer-Verlag. 345 p., New York.

Resh, M. 1970. Chance Constrained Programming of the Machine Loading Problem with Stochastic Proccessing Times. Management Science, 17,48-65.

Sahoo, N.P. and Biswal, M.P. 2005. Computation of Some Stochastic Linear Programming Problems with Cauchy and Extreme Value Distributions. International Journal of Computer Mathematics, 82(6), 685-698.

Sakawa, M. 2000. Large Scale Interactive Fuzzy Multiobjective Programming, Physica-Verlag Heidelberg. 217 p., New-York.

Sakawa, M., Kato, K. and Nishizaki, I. 2003. An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Stochastic Linear Programming Problems Through an Expectation Model. European Journal of Operational Research, 145, 665-672.

Sakawa, M., Kato, K. And Katagiri, H. 2004. An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Linear Programming Problems whits Random Variable Coefficients Through A Probability Maximization Model. Fuzzy Sets and Systems, 146, 205-220.

Sengupta, J.K. 1970. A Generalization of Some Distribution Aspects of Chance Constrained Linear Programming. International Economic Review, 11, 287-304.

Sengupta, J.K. 1972. Stochastic Programming: Methods and Applications. North-Holland Publishing Company, 313 p., Amsterdam.

Sinha, S.B., Hulsurkar, S. and Biswal, M.P. 2000. Fuzzy Programming Approach to Multi-Objective Stochastic Programming Problems When b_i 's Follow Joint Normal Distribution Fuzzy Sets and Systems, 109,91-96.

Simon, H. A. 1959. Theories of Decision Making in Economics and Behavioral Science.The Amrican Economic Rewiev Vol. 49, No:3, Jun pp. 253-283.

Stancu, L.M. - Minasian. 1984. Stochastic Programming With Multiple Objective Functions. D. Reidel Publishing Company. 334 p., Boston.

Symonds, G.H. 1967. Deterministic Solutions for A Class of Chance Constrained Programming Problems. Operations Research, 15, 495-512.

Taha, H.A. 1997. Operations Research on Introduction. Prentice Hall, Inc. 811 p., Upper Saddle River, NJ.

Wu, H.C. 1999. Probability Density Functions of Fuzzy Random Variable. Fuzzy Sets and Systems, 105, 139-158.

Yazenin, A.V. 1987. Fuzzy and Stochastic Programming. Fuzzy Sets and Systems, 22, 171-180.

EK 1 (6.21) modelinin çözüm sonuçları

	X1	X2	X3	Z1	Z2	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\mu}_1 \times \bar{\mu}_2$
1	0,6867979	0,5661092	0,6174823	5,0964321	6,5752285	1,0	0,1	……..
2	0,7492838	0,3927337	0,5919752	5,0084859	6,5804963	0,9	0,1	……..
3	0,8011478	0,2321824	0,5252329	4,7365574	6,5804967	0,6	0,1	……..
4	0,8308555	0,1173375	0,4183597	4,2833428	6,5804968	0,1	0,1	……..
5	0,8154105	0,1798378	0,4823006	4,5552717	6,5804968	0,4	0,1	……..
6	0,7888649	0,2722243	0,5470953	4,8272002	6,5804968	0,7	0,1	……..
7	0,8108102	0,1991958	0,5035720	4,6459144	6,5804970	0,5	0,1	……..
8	0,7726831	0,3227633	0,5692577	4,9178434	6,5804970	0,8	0,1	……..
9	0,8269538	0,1348147	0,4395774	4,3739857	6,5804971	0,2	0,1	……..
10	0,8242510	0,1490640	0,4607029	4,4646286	6,5804971	0,3	0,1	……..
11	0,7007174	0,5777631	0,6021569	5,0885429	6,7368716	1,0	0,2	……..
12	0,8389020	0,1501516	0,4041213	4,2833428	6,7575495	0,1	0,2	……..
13	0,8247462	0,2091810	0,4679630	4,5552716	6,7575496	0,4	0,2	……..
14	0,8119235	0,2576487	0,5107845	4,7365572	6,7575496	0,6	0,2	……..
15	0,7998395	0,2971551	0,5326317	4,8272004	6,7575496	0,7	0,2	……..
16	0,7599260	0,4185596	0,5775371	5,0084860	6,7575497	0,9	0,2	……..
17	0,8354614	0,1663874	0,4253035	4,3739856	6,7575499	0,2	0,2	……..
18	0,8307982	0,1859147	0,4465798	4,4646285	6,7575499	0,3	0,2	……..
19	0,8213336	0,2253414	0,4891431	4,6459146	6,7575499	0,5	0,2	……..
20	0,7837282	0,3475043	0,5547886	4,9178433	6,7575499	0,8	0,2	……..
21	0,7136566	0,5887162	0,5865102	5,0757268	6,8888912	1,0	0,3	……..
22	0,7674811	0,4526969	0,5633650	5,0086002	6,9345745	0,9	0,3	……..
23	0,8455633	0,1866951	0,3899894	4,2833426	6,9346023	0,1	0,3	……..
24	0,8091956	0,3264434	0,5182925	4,8272002	6,9346025	0,7	0,3	……..
25	0,7927859	0,3775959	0,5404724	4,9178432	6,9346025	0,8	0,3	……..
26	0,8212710	0,2869602	0,4964460	4,7365572	6,9346026	0,6	0,3	……..
27	0,8383376	0,2200941	0,4323804	4,4646285	6,9346027	0,3	0,3	……..
28	0,8326437	0,2423964	0,4537360	4,5552715	6,9346028	0,2	0,3	……..
29	0,8326437	0,2423964	0,4537360	4,5552715	6,9346028	0,4	0,3	……..
30	0,8252339	0,2693184	0,4752236	4,6459145	6,9346028	0,5	0,3	……..
31	0,7256576	0,5989987	0,5705561	5,0581959	7,0317008	1,0	0,4	……..
32	0,8220437	0,3393576	0,4827671	4,7365571	7,1116553	0,6	0,4	……..
33	0,8505736	0,2276837	0,3759846	4,2833429	7,1116553	0,1	0,4	……..
34	0,8480720	0,2413913	0,3970946	4,3739857	7,1116553	0,2	0,4	……..
35	0,8442178	0,2587406	0,4183087	4,4646288	7,1116555	0,3	0,4	……..
36	0,8388291	0,2802212	0,4396408	4,5552717	7,1116556	0,4	0,4	……..
37	0,8316082	0,3066346	0,4611138	4,6459144	7,1116556	0,5	0,4	……..
38	0,7905427	0,4381132	0,5270255	4,9178433	7,1116557	0,8	0,4	……..
39	0,7701137	0,5000869	0,5495145	5,0084860	7,1116558	0,9	0,4	……..
40	0,8091540	0,3810334	0,5046763	4,8272006	7,1116559	0,7	0,4	……..

EK 1 (6.21) modelinin çözüm sonuçları (devamı)

	X1	X2	X3	Z1	Z2	$\overline{\mu}_1$	$\overline{\mu}_2$	$\overline{\mu}_1 \times \overline{\mu}_2$
41	0,7367550	0,6086353	0,5543058	5,0361235	7,1656401	1,0	0,5	……..
42	0,8258074	0,3837024	0,4688582	4,7365574	7,2887082	0,6	0,5	……..
43	0,7898918	0,4943433	0,5134561	4,9178431	7,2887082	0,8	0,5	……..
44	0,8515091	0,2866154	0,3832107	4,3739855	7,2887083	0,2	0,5	……..
45	0,7547926	0,5958138	0,5370736	5,008486	7,2887086	0,9	0,5	……..
46	0,8356721	0,3501712	0,4471818	4,6459147	7,2887086	0,5	0,5	……..
47	0,8428641	0,3238356	0,4257109	4,5552715	7,2887087	0,4	0,5	……..
48	0,8480258	0,3029662	0,4043963	4,4646288	7,2887087	0,3	0,5	……..
49	0,8119126	0,4280842	0,4908446	4,8272004	7,2887088	0,7	0,5	……..
50	0,8535519	0,2742315	0,3621385	4,2834412	7,2889713	0,1	0,5	……..
51	0,7563430	0,6260454	0,5209511	4,9788788	7,4079291	0,9	0,6	……..
52	0,7563430	0,6260454	0,5209511	4,9788788	7,4079291	1,0	0,7	……..
53	0,7469763	0,6576458	0,5377685	5,0496487	7,4109793	1,0	0,6	……..
54	0,8537000	0,3282221	0,3485052	4,2833429	7,4657611	0,1	0,6	……..
55	0,8256654	0,4385625	0,4552496	4,7365571	7,4657611	0,6	0,6	……..
56	0,8490496	0,3546875	0,3906981	4,4646287	7,4657612	0,3	0,6	……..
57	0,8090316	0,4903184	0,4774468	4,8272004	7,4657612	0,7	0,6	……..
58	0,8522102	0,3392057	0,3695374	4,3739859	7,4657613	0,2	0,6	……..
59	0,8364890	0,4024496	0,4334995	4,6459146	7,4657613	0,5	0,6	……..
60	0,7977826	0,5275768	0,4992297	4,9178434	7,4657615	0,8	0,6	……..
61	0,8439661	0,3753465	0,4120067	4,5552716	7,4657616	0,4	0,6	……..
62	0,7648713	0,6338458	0,5038589	4,9438953	7,5166489	0,9	0,7	……..
63	0,7648714	0,6338458	0,5038589	4,9438956	7,5166497	1,0	0,8	……..
64	0,7725724	0,6410549	0,4864956	4,9047545	7,6172483	0,8	0,7	……..
65	0,7725724	0,6410549	0,4864956	4,9047545	7,6172483	0,9	0,8	……..
66	0,7725724	0,6410549	0,4864956	4,9047545	7,6172483	1,0	0,9	……..
67	0,8404715	0,4392327	0,3986561	4,5552716	7,6428140	0,4	0,7	……..
68	0,8318744	0,4693513	0,4202350	4,6459145	7,6428141	0,5	0,7	……..
69	0,8179321	0,5138608	0,4422251	4,7365575	7,6428141	0,6	0,7	……..
70	0,8497391	0,3933640	0,3351904	4,2833429	7,6428144	0,1	0,7	……..
71	0,8488098	0,4028385	0,3561795	4,3739859	7,6428144	0,2	0,7	……..
72	0,8150375	0,5286266	0,4633653	4,8272003	7,6428145	0,7	0,7	……..
73	0,8458449	0,4177935	0,3773251	4,4646286	7,6428146	0,3	0,7	……..
74	0,7794529	0,6476774	0,4688634	4,8614897	7,709792	0,8	0,8	……..
75	0,7794529	0,6476774	0,4688634	4,8614897	7,709792	0,9	0,9	……..
76	***0,7794529***	***0,6476774***	***0,4688634***	***4,8614897***	***7,7097920***	***1,0***	***1,0***	……..
77	0,7855149	0,6537149	0,4509630	4,8141116	7,7943009	0,7	0,8	0,56
78	0,7855149	0,6537149	0,4509630	4,8141116	7,7943009	0,8	0,9	0,72
79	0,7855149	0,6537150	0,4509630	4,8141117	7,7943012	0,9	1,0	0,9
80	0,8376669	0,4873164	0,3434172	4,3739859	7,8198672	0,2	0,8	0,16
81	0,8270540	0,5298347	0,3860687	4,5552715	7,8198674	0,4	0,8	0,32
82	0,8199272	0,5629673	0,4284521	4,7365573	7,8198674	0,6	0,8	0,48
83	0,8343454	0,5032315	0,3645903	4,4646289	7,8198674	0,3	0,8	0,24
84	0,8313744	0,5251754	0,4066540	4,6459146	7,8198674	0,5	0,8	0,4
85	0,8380061	0,4794307	0,3224735	4,2833430	7,8198674	0,1	0,8	0,08
86	0,7907563	0,6591660	0,4327936	4,7626093	7,8707548	0,7	0,9	0,63
87	0,7907564	0,6591659	0,4327936	4,7626095	7,8707553	0,8	1,0	0,8
88	0,7951705	0,6640257	0,4143532	4,70695	7,9390879	0,6	0,9	0,54
89	0,7951705	0,6640257	0,4143532	4,70695	7,9390879	0,7	1,0	0,7
90	0,8272497	0,5628630	0,3096814	4,2833377	7,9969052	0,1	0,9	0,09

EK 1 (6.21) modelinin çözüm sonuçları (devamı)

	X1	X2	X3	Z1	Z2	$\overline{\mu}_1$	$\overline{\mu}_2$	$\overline{\mu}_1 \times \overline{\mu}_2$
91	0,8199185	0,6035233	0,3729982	4,5552716	7,9969197	0,4	0,9	0,36
92	0,8065439	0,6465044	0,3949446	4,6459145	7,9969198	0,5	0,9	0,45
93	0,8288011	0,5656637	0,3304797	4,3739858	7,9969202	0,2	0,9	0,18
94	0,7987463	0,6682861	0,3956380	4,647077	7,9991907	0,6	1,0	0,6
95	0,8014675	0,6719357	0,3766427	4,582909	8,0509044	0,5	1,0	0,5
96	0,8033126	0,6749592	0,3573603	4,5143382	8,0940181	0,4	1,0	0,4
97	0,8042541	0,6773367	0,3377818	4,4412262	8,1282611	0,3	0,9	0,27
98	0,8042541	0,6773367	0,3377818	4,4412262	8,1282611	0,3	1,0	0,3
99	0,8042576	0,6790438	0,3178959	4,3634002	8,1532963	0,2	1,0	0,2
100	0,8032804	0,6800500	0,2976886	4,2806456	8,1687046	0,1	1,0	0,1

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Kumru Didem ATALAY

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 10.05.1975

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: Fransızca, İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: A.Ö.D Tevfik Fikret Lisesi, 1993
Lisans	: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, 1998
Yüksek Lisans	: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, 2000

Çalıştığı Kurum ve Yıl: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 1998.

Yayınları (SCI ve diğer)

Atalay, K.D. ve Apaydın, A. 2005. Katsayıların Ki-kare Dağılımına Sahip Olduğu Stokastik Programlama Problemlerine Bulanık Programlama Yaklaşımı, 4. İstatistik Kongresi 08-12 Mayıs, Belek/Antalya.

Apaydın, A., Atalay, K.D., Erbay, T. 2001. Sezgisel Diskriminant Analizine Bulanık Doğrusal Programlama Yaklaşımı, 2. İstatistik Kongresi 02-06 Mayıs, Antalya.

Apaydın, A., Atalay, K.D., Aydın, Ö.M. 2001. Chance Constrained Fuzzy Goal Programming in Regression Model. Bulletin of the International Statistical Institute, Vol. 53, Seoul.