ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇOK DEĞİŞKENLİ ÇOKLU REGRESYON MODELİNİN BULANIK MİNMAD PROBLEMİ OLARAK MODELLENMESİ VE GLOBAL KRİTER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Demet BAKIN

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2007

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇOK DEĞİŞKENLİ ÇOKLU REGRESYON MODELİNİN
BULANIK MİNMAD PROBLEMİ OLARAK MODELLENMESİ
VE GLOBAL KRİTER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Demet BAKIN
Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayşen APAYDIN

Çok değişkenli çoklu regresyon modellerinde parametre tahmini için genellikle En Küçük Kareler (EKK) Yöntemi kullanılmaktadır. EKK yöntemi modelin bilinmeyen parametrelerinin tahmini için hatalar bağımsız olduğunda optimal sonuçlar vermektedir. Bu tahmin ediciler sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılıma uymaktadır. Özellikle normal dağılıma uymayan durumlarda ve uç değerler olduğunda bu yöntem optimallikten çok uzaklaşmaktadır. Bu nedenle matematiksel modellerde EKK yaklaşımına alternatif olarak, mutlak sapmaların enküçüklenmesi (MİNMAD-Minimizing Mean Absolute Deviations) yöntemi ele alınmıştır. Bu yöntem EKK yöntemine göre bazı durumlarda üstün olmaktadır. Özellikle çoklu bağlantının olduğu durumlarda etkin sonuçlar vermektedir. Belirsizliğin bir çeşidi olan bulanıklık kavramı ile gerçek hayat problemlerinde sıkça karşılaşılmaktadır. Klasik regresyon analizinde bağımlı ve bağımsız değişkenler arasında belirsizlikler bulunabilir. Bu durumda EKK yöntemine alternatif olarak geliştirilen Bulanık Mutlak Sapmaların En Küçüklemesi (Bulanık MINMAD) yöntemini kullanmak daha gerçekçidir. Bu çalışmada ilk olarak çok değişkenli çoklu regresyon modeli MİNMAD problemine dönüştürülmüştür. Daha sonra bulanıklık kavramı ile ilgili temel tanımlar verilmiştir. Regresyon analizinde bağımlı değişken bulanık sayı ve bağımsız değişken sabit sayı olduğunda Bulanık MİNMAD yöntemi incelenmiştir. Bulanık MİNMAD yöntemi sayısal iki örnek üzerinde uygulanmıştır. Son aşamada ise elde edilen çok amaçlı doğrusal programlama probleminin çözümü için Global Kriter Yöntemi kullanılmıştır.

2007, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bulanık MİNMAD, Çok Amaçlı Programlama, Global Kriter Yöntemi

ABSTRACT

Master Thesis

GLOBAL CRITERIA METHOD FOR SOLVING MULTIVARIATE MULTIPLE REGRESSION MODEL MODELLED AS FUZZY MINMAD PROBLEM

Demet BAKIN
Ankara University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor : Prof. Dr. Ayşen APAYDIN

The least-squares method is generally used for the parameter estimation in the multivariate multiple regression models. Since the error terms are uncorrelated, the least-squares method gives optimal results for the model's unknown parameter estimation. These estimators must be distributed normally with a mean of 0 and a variance of σ^2. When some situations that do not fit the normallity assumptions and outliers exist, this method departs from the optimal. Because of this reason, Minimizing Mean Absolute Deviations (MINMAD) method is considered as an alternative for the least-squares approach in mathematical models. This method has priority over least-squares method in some situations. Especially it gives effective results when multiple connection exists. Fuzzyness concept , a kind of uncertainty, is frequently encountered in real life problems. In classical regression analysis, uncertanity can be detected between dependent and independent variables. In such situations, using Fuzzy MINMAD method which is developed as an alternative for the least-squares method is more realistic. In this study, firstly the multivariate multiple regression model has been converted to MİNMAD problem. Then, the basic definitions have been given about fuzzness concept. Since the dependent variables are fuzzy numbers and independent variables are constant numbers, Fuzzy MINMAD method has been examined in this regression analysis. Fuzzy MINMAD method has been applied to two numerical examples. At final stage, Global Criteria method has been used for multi-objective linear programming problem which is obtained before.

2007, 75 pages

Key Words: Fuzzy MINMAD, Multi-Objective Programming, Global Criteria Method

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi ve önerileriyle beni destekleyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ayşen APAYDIN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmada yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Dr. Kumru Didem ATALAY (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yakın ilgileriyle bana destek olan sevgili aileme ve arkadaşım Özlem BÖYREKÇİ' ye sonsuz teşekkürler…

Demet BAKIN
ANKARA, Ağustos 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

EKK	En Küçük Kareler
MİNMAD	Mutlak Sapmaların En Küçüklenmesi (Minimizing Mean Absolute Deviations)
MSAE, LSAE	Mutlak Hataların Minimum Toplamı (Minimum (or Least) Sum of Absolute Errors)
MAD, LAD	Mutlak Sapmaların Minimumu (Minimum (or Least) Absolute Deviations)
MAE, LAV	Mutlak Hatalar ya da Değerlerin Minimumu (Minimum (or Least) Absolute Errors (or Values))
GFLM	Genel Bulanık Doğrusal Model (General Fuzzy Linear Model)

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ ve ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1 Giriş

İstatistik teorisinin gelişim sürecinde optimizasyon problemleri ile oldukça sık karşılaşılmaktadır. Regresyon analizi, bu tür optimizasyon problemlerinin çözümü için kullanılan tekniklerden biridir. En Küçük Kareler literatürde uzun süredir kullanılan yaygın bir yöntemdir. Bu yöntemin yaygın olmasının nedeni teorinin basit, iyi geliştirilmiş ve belgelendirilmiş olmasıdır.

Regresyon analizinde etkin olarak kullanılan En Küçük Kareler (EKK) Yönteminde uç değerlerin var olması ve hataların sıfır ortalamalı, ortak σ^2 varyanslı normal dağılıma uymaması durumunda elde edilen sonuçlar optimallikten uzaklaşmaktadır. Ayrıca EKK yönteminin karesel yapıya sahip olması nedeniyle işlem zorlukları ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle parametre tahmini için alternatif bir yöntem olarak (ortalama mutlak sapmaların enküçüklenmesi) MİNMAD yöntemi geliştirilmiştir

Charnes, Cooper ve Ferguson tarafından 1955 yılında yapılan ilk çalışmada Doğrusal Regresyon için MİNMAD yöntemi ele alınmış ve Doğrusal Programlama modeli ile ilişkilendirilmiştir. MİNMAD yöntemi normallik varsayımı sağlanmadığında ve uç değerler gözlendiğinde En Küçük Kareler Regresyona alternatif olarak geliştirilmiş bir yöntemdir (Pehlivan-Yapıcı ve Apaydın 2003).

Yöneylem araştırmasında en iyileme yöntemlerinden biri olarak kullanılan Doğrusal Programlamada kısıtlara bağlı olarak amaç fonksiyonunu maksimum ya da minimum yapan çözüm ya da çözümler bulunmaya çalışılır. Fakat gerçek hayat problemlerinde kısıtlar ve amaç fonksiyonu genellikle esnektir. Amaç fonksiyonunu en iyilemektense, belirli bir derecede tatmin etmek gerçek hayat problemleri için daha uygundur. Bu nedenle, bu tür problemlerin çözümü için Bulanık Doğrusal Programlama yöntemini kullanmak daha anlamlıdır.

Çok değişkenli çoklu regresyon analizinde bağımlı değişkenler, bağımsız değişkenler ya da her ikisi birden bulanık sayılar olabilir. Bu çalışmada bağımlı değişkenlerin bulanık sayı, bağımsız değişkenlerin sabit sayı olduğu durum incelenmiştir. Çok değişkenli çoklu regresyon modeli, En küçük kareler yöntemine alternatif olarak geliştirilen Bulanık MİNMAD problemine dönüştürülmüştür. Çok değişkenli çoklu regresyon modelinin Bulanık MİNMAD problemi olarak modellenmesi sonucunda çok amaçlı doğrusal programlama problemi elde edilmiştir. Elde edilen problemin çözümü için çok amaçlı programlama yöntemlerinden Global Kriter Yönteminden yararlanılacaktır.

Bu çalışmanın amacı bağımlı değişkenlerin bulanık, bağımsız değişkenlerin sabit sayı olduğu çok değişkenli çoklu regresyon modelinin Bulanık MİNMAD problemine dönüştürülerek çözülmesi ve bağımlı değişkenlere ilişkin hataların minimum yapılmasıdır.

Çalışmanın İkinci Bölüm' ünde çok değişkenli çoklu regresyon modeli ele alınacak ve bu model MİNMAD problemine dönüştürülecektir.

Üçüncü Bölüm' de bulanık sayı ve bulanık küme teorisiyle ilgili temel kavramlar ve terimler verilecektir. Ardından bulanık MİNMAD regresyon açıklanacaktır.

Dördüncü Bölüm' de çok değişkenli çoklu regresyon modeli bulanık çok amaçlı MİNMAD problemine dönüştürülecektir. Bağımlı değişkenin bulanık sayı, bağımsız değişkenin sabit sayı olması durumunda bulanık MİNMAD regresyon uygulanarak elde edilen çok amaçlı doğrusal programlama probleminin çözümü için Global Kriter Yöntemi ele alınacaktır. Bu yöntemin uygulanması sonucunda bağımlı değişkene ilişkin hatalar gözlenecektir.

2.1 Önceki Çalışmalar

Çok değişkenli çoklu regresyon modelinin bulanık MİNMAD problemi olarak modellenmesi ve çözüm yöntemleri ile ilgili yapılan çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Charnes *et al.* (1955)'un birlikte çalıştıkları makalede matematiksel programlamanın bir uygulaması ele alınmış ve MİNMAD problemi doğrusal regresyon modelinin çözümü için En Küçük Kareler (EKK) yöntemine bir alternatif alarak seçilmiştir. Bu makalede MİNMAD problemi Doğrusal Programlama modeli olarak formüle edilmiş ve çözülmüştür (Pehlivan-Yapıcı ve Apaydın 2003).

Meyer vd (1964) ekonomi problemlerinde mutlak hataların, karesel hatalardan daha memnun edici olabileceğini ileri sürmüşlerdir (Narula and Wellington 1982).

Huber (1973) regresyon problemleri için tek bir uç gözlemin EKK tahmin edicisini etkileyebileceğini ve uç noktanın var olması durumunda optimallikten uzaklaşılacağını belirtmiştir (Narula and Wellington 1982).

Andrews (1974) modelin formu kesin olarak bilinmiyorsa, yani hatalar normal dağılma sahip değil ise EKK yöntemine alternatif bir yöntemin gerekli olabileceğini öne sürmüştür (Narula and Wellington 1982).

Narula *et al.* (1982) MİNMAD regresyonun, EKK regresyonda karşılaşılan dezavantajları yendiğini ve bir alternatif sağladığını ileri sürmüşlerdir. MİNMAD regresyonun , uç değerlere EKK yönteminden daha az duyarlı olduğunu ve bu nedenle daha iyi sonuçlar sağlandığını belirtmişlerdir.

Bulanık küme kuramı ilk olarak Lotfi Zadeh (1965) tarafından yayınlanan bir makalede ortaya konulmuştur. Bu tarihten sonra da birçok alanda kullanılmaya başlanmıştır.

İlk olarak Zimmermann (1978) tarafından ortaya konulan Bulanık Doğrusal Programlama, bulanık ortamda karar vermeyi sağlamaktadır. Bulanık ortamda karar vermeyle kastedilen, hedeflerin, kısıtların ya da her ikisinin birden yapı olarak belirsizlik içerdiği (bulanık olduğu) bir karar sürecidir.

Zionts *et al.* (1983) çok amaçlı doğrusal programlama problemlerinde her bir katsayının bulanık oluşunu ve hedef değerlere ulaşmadaki bulanıklığı düşünerek, karar vericinin karar vermesine yardımcı olan etkileşimli bir yöntemi ileri sürmüştür. Bu yöntem baskın çözümler arasından en iyi uzlaşık çözümü bulmayı sağlayan bir yöntemdir.

Tanaka *et al.* (1982) bulanık doğrusal regresyon çözümlemesindeki ilk çalışmayı yapmıştır.

Sakawa and Yano (1992) bağımlı değişkenin, bağımsız değişkenin ve parametrelerin bulanık olduğu, bulanık doğrusal regresyon modelinin tahmini için doğrusal programlamayı kullanarak çok amaçlı programlama metodunu geliştirmişlerdir.

Sasaki and Gen (1993) yaptıkları çalışmada amaç fonksiyonu katsayılarının, kısıtlara ilişkin katsayıların ve sağ yan değerlerinin bulanık olduğu çok amaçlı doğrusal programlama problemini ele almıştır. Bu problemi çözebilmek için, baskın çözümler kümesi karşısında karar vericiye kararında yardımcı olan Zionts- Wallenius Yöntemi kullanılarak karar vericinin bulanık hedeflere ulaşmadaki memnuniyet derecesi nitelendirilmiştir.

Chang *et al.* (1994) bağımlı değişken $Y_i = (y_i^m, y_i^L, y_i^R)_{LR}$ bulanık sayı, bağımsız değişken X_i sabit sayı olduğunda, bulanık MİNMAD (Mutlak Sapmaların en Küçüklenmesi) yöntemini kullanarak kestirilen regresyon denklemini ve bağımlı değişkene ilişkin hataları (sapmaları) elde etmişlerdir.

Yang and Lin (2002) bağımlı değişken ve parametrelerin bulanık sayı , bağımsız değişkenin sabit sayı olduğu bulanık regresyon modelini incelemişlerdir. Bulanık regresyon modelinin analizinde doğrusal programlama ve en küçük kareler yaklaşımını ele alıp bu iki yöntemi karşılaştırmışlardır.

Yang and Liu (2003) bulanık regresyon modelini Tanaka'nın doğrusal programlama yaklaşımı ve en küçük kareler yaklaşımı olmak üzere iki kategoride incelemiştir. Çalışmada etkileşimli bulanık doğrusal regresyon modelleri için gürültü kümeli yeni bulanık en küçük kareler algoritmaları ileri sürülmüştür. Aykırı değerler var olduğunda bu algoritmalar bulanık doğrusal regresyon modeli için güçlüdür (robusttur).

Tran and Duckstein (2002) çok amaçlı bulanık regresyon modelini ele almıştır. Bu modelin istatistiksel ve bulanık regresyonun olasılıksal özelliklerini ve merkezi eğilimlerini birleştirdiği ve bu iki yaklaşımda meydana gelen birçok sorunun üstesinden geldiğini öne sürmüştür. İki aralıktaki tüm noktaları dikkate alan iki aralık için uzaklık ölçüsünün yeni bir sınıfı tanıtılmıştır.

2. ÇOK DEĞİŞKENLİ ÇOKLU REGRESYON MODELİ VE MUTLAK SAPMALARIN ENKÜÇÜKLENMESİ

Regresyon en bilinen tanımıyla, değişkenler arasındaki ilişki ve bağlantıların incelenmesidir. Regresyon analizinde değişkenlerden biri ya da bir kaçının, diğer bir ya da birkaç değişkeni ne ölçüde etkilediği araştırılır. Eğer değişkenler arasında ilişki varsa ilişkinin derecesi ve fonksiyonel şekli belirlenmeye çalışılır. Diğer bir anlatımla regresyon çözümlemesi, bilinmeyen parametrelerin tahmin edilmesiyle oluşturulan modelde, bağımsız değişkenlerin belirlenen değerleri için bağımlı değişkenin alacağı değerlerin kestirilmesidir (Draper and Smith1981).

2.1 Çok Değişkenli Çoklu Regresyon Modeli

Regresyon çözümlemesi iki ya da daha çok değişken arasındaki ilişkinin yapısını incelemektedir. Regresyon çözümlemesinde, genelde ilgilenilen olayı tanımlayan rasgele değişken "bağımlı (açıklanan) değişken" ve bu olayla ilgili ya da olayı etkileyen değişken ise "bağımsız (açıklayıcı) değişken" olarak tanımlanır. Bir bağımlı değişken (Y) ve birden fazla bağımsız değişken (X) arasındaki doğrusal ilişkiyi inceleyen çoklu regresyon modeli,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n + \varepsilon$$

eşitliği ile verilmektedir.

N birimlik örneklem için x bağımsız ve y bağımlı değişkenlerine ilişkin çoklu regresyon modeli,

$$\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \dots + \beta_P x_{1n} + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \dots + \beta_P x_{2n} + \varepsilon_2 \qquad (2.1.1) \\
\vdots & \qquad\qquad \vdots \\
y_N &= \beta_0 + \beta_1 x_{N1} + \beta_2 x_{N2} + \dots + \beta_P x_{Nn} + \varepsilon_N
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Burada y_i (i=1,2,…,N), i. gözlem için bağımlı değişken değerini, $x_1, x_2, ..., x_n$, n bağımsız değişken sayısını , ε_i rassal hata miktarını ve $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$ regresyon parametrelerini (katsayılarını) göstermektedir.

$y : N \times 1$ boyutlu bağımlı değişken vektörünü,

x: $N \times (n+1)$ boyutlu bağımsız değişken matrisini,

β : $(n+1) \times 1$ boyutlu regresyon katsayıları vektörünü,

ε : $N \times 1$ boyutlu hata vektörünü

göstermek üzere, (2.1.1) ile verilen regresyon modeli matris gösterimi ile,

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

ya da

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilir.

Hatalar bir rasgele değişken olduğu için bazı varsayımları vardır.
Bu varsayımlar,

1) $E(\varepsilon_j) = 0$,

2) $Var(\varepsilon_j) = \sigma^2$ (sabit) ,

3) $Cov(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0$, $j \neq k$

biçimindedir.

İstatistiksel sonuç çıkarımı için hata vektörünün , $E(\varepsilon) = 0$ ve $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 \mathrm{I}$ ile normal dağılıma ($\varepsilon \sim$ N (0, σ^2I)) sahip olduğu kabul edilir.

M tane bağımlı değişken (Y) ve n tane bağımsız değişken (X)‘ e sahip çok değişkenli çoklu regresyon modeli,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_{01} + \beta_{11}x_1 + \ldots + \beta_{n1}x_n + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \beta_{02} + \beta_{12}x_1 + \ldots + \beta_{n2}x_n + \varepsilon_2 \qquad (2.1.2) \\
\vdots & \qquad \vdots \\
y_M &= \beta_{0M} + \beta_{1M}x_1 + \ldots + \beta_{nM}x_n + \varepsilon_M
\end{aligned}
$$

biçiminde ifade edilir. Her bir bağımlı değişken i = 1,2,…,N kez gözlenmektedir. Burada,

y: $N \times M$ boyutlu bağımlı değişken matrisini,

x: $N \times (n+1)$ boyutlu bağımsız değişken matrisini,

β : $(n+1) \times M$ boyutlu regresyon katsayıları matrisini,

ε : $N \times M$ boyutlu hata matrisini

göstermek üzere, (2.1.2) eşitliği ile verilen model matris formunda ,

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

ya da

$$
\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1M} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N1} & y_{N2} & \cdots & y_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{20} & x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N0} & x_{N1} & \cdots & x_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \cdots & \beta_{0M} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1M} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{N1} & \varepsilon_{N2} & \cdots & \varepsilon_{NM} \end{bmatrix}
$$

biçiminde ifade edilir (Johnson ve Wichern 1988).

ε hata matrisi, E(ε_j)= 0 ve Cov = ($\varepsilon_j, \varepsilon_k$) = σ^2_{jk} I , j = k = 1,2,…,M ile normal dağılıma ($\varepsilon \sim$ N (0,Σ)) sahiptir. Burada Σ kovaryans matrisini göstermektedir.

y_j , j = 1,2,…,M bağımlı değişkenleri üzerinden alınan gözlemlerden elde edilen En Küçük Kareler tahmin edicisi $\hat{\beta}$ ’ yı bulmak için,

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{(j)i}^2 = \varepsilon_{(j)}{}' \varepsilon_{(j)} = (Y_{(j)} - X\beta_{(j)})' (Y_{(j)} - X\beta_{(j)}) \qquad j = 1,2,...,M$$

eşitliğinin enküçüklenmesi gerekir. $\varepsilon_{(j)}{}' \varepsilon_{(j)} = (Y_{(j)} - X\beta_{(j)})' (Y_{(j)} - X\beta_{(j)})$ ifadesinin $\beta_{(j)}$ ’ ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{\partial \varepsilon_{(j)}{}' \varepsilon_{(j)}}{\partial \beta_{(j)}} = \frac{\partial (Y_{(j)} - X\beta_{(j)})' (Y_{(j)} - X\beta_{(j)})}{\partial \beta_{(j)}} = 0$$

$$-2X'Y_{(j)} + 2X'X\beta_{(j)} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik normal denklem sistemidir. Bu normal denklem sisteminin çözümü ile β ’ nın EKK tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} XY \qquad (2.1.3)$$

olarak elde edilir.

Kestirilen regresyon denklemi,

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

ve hatalar ise

$$\hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}$$

olarak elde edilir (Tatlıdil 1996, Pehlivan-Yapıcı ve Apaydın 2003).

2.2 Mutlak Sapmaların Enküçüklenmesi ve Doğrusal Programlama Tekniği

Klasik regresyon analizinde amaç, bağımlı değişkene ilişkin gözlenen değer ile kestirilen değer arasındaki farkı, yani hataların kareleri toplamını minimum yapmaktır. Bu metot En Küçük Kareler yöntemi olarak bilinmektedir. Eğer hatalar sıfır ortalamalı, bilinmeyen σ^2 ortak varyanslı Normal dağılıma sahipse ve birbirinden bağımsız ise modelin bilinmeyen parametrelerinin tahmin edicileri istatistiksel sonuç çıkarımı için optimal sonuçlar vermektedir. Fakat hatalar uzun kuyruklu bir dağılım gösterdiğinde EKK regresyonu optimallikten çok uzaklaşmaktadır.

Regresyon problemleri için Huber (1973) tek bir uç gözlemin EKK tahmin edicisini etkileyebileceğini belirtmiştir. Andrews (1974), modelin formu kesin olarak bilinmiyorsa yani hatalar Normal dağılıma sahip değilse EKK yöntemine alternatif bir yöntemin gerekli olabileceğini ileri sürmüştür (Arthanari and Dodge 1981, Narula and Wellington 1982).

1955 yılında Charnes, Cooper ve Ferguson tarafından yapılan çalışmada, MİNMAD yönteminin kullanıldığı regresyon modeli, doğrusal programlama olarak formüle edilip simpleks tablo ile çözülmüştür.

MİNMAD yöntemi mutlak hataların minimum toplamı (MSAE, LSAE) , mutlak sapmaların minimumu (MAD, LAD), mutlak hatalar ya da değerlerin minimumu (MAE, LAV), L_1 – normu olarak da bilinir.

En Küçük Kareler kestiricisinin normallik varsayımı ve veri kümesindeki uç değerlerden çok etkilenmesi gibi dezavantajlarından dolayı doğrusal regresyonda MİNMAD yöntemi tercih edilmektedir. Bu nedenle MİNMAD ve optimizasyon yöntemlerinin birlikte kullanıldığı çalışmalar oldukça fazladır (Arthanari and Dodge 1981).

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

biçiminde verilen basit doğrusal regresyon modelinde, $x_i, y_i \quad (i = 1,...,N)$ gözlenmiş değerler olmak üzere β_0 ve β_1 katsayılarının tahmin edilebilmesi için,

$$1/N \sum_{i=1}^{N} | Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i | \tag{2.2.1}$$

ifadesinin en küçüklenmesi istenir. (2.2.1) ile verilen ifade bağımlı değişkenin kestirilen ve gözlenen değerlerinden, ortalama mutlak sapmasıdır. Bu ifadenin en küçüklenmesi,

$$\sum_{i=1}^{N} | y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i | \tag{2.2.2}$$

mutlak sapmalarının enküçüklenmesi ile aynıdır. Çoklu doğrusal regresyon modelinde N gözlem sayısı ve n bağımsız değişken sayısı olmak üzere (2.2.2) eşitliği,

$$\sum_{i=1}^{N} \left| y_i - \sum_{t=1}^{n} x_{it} \beta_t \right|$$

biçiminde tanımlanır. β' nın tahmin edilebilmesi için bu ifadenin en küçüklenmesi gerekir.

Dolayısıyla,

$$Min \sum_{i=1}^{N} \left| y_i - \sum_{t=1}^{n} x_{it} \beta_t \right|$$

olarak yazılabilir(Arthanari and Dodge 1981, Eminkahyagil 1997).

Bir regresyon modelinde amaç, tahminleri yapılan β değerlerinin eniyilenmesidir. Bu tahminler yapılırken doğrusal programlama teknikleri uygulanabilir. β ' ya bağlı olarak,

$$Min \sum_{i=1}^{N} |d_i|$$

probleminde d_i, y_i gözleminin kestirim değeri ile gözlenmiş değeri arasındaki fark olmak üzere,

$$d_i = y_i - (\beta_0 - \beta_1 x_i)$$

olarak tanımlanır. Problem Mutlak sapmaların enküçüklemesi problemi olarak tanımlanır. Bu durumda β ' ya göre $\sum_{i=1}^{N} |d_i|$ ' nin enküçüklenmesi problemi,

$$Min \sum_{i=1}^{N} |d_i|$$

$$X\beta + d = Y$$

d, β işareti belirtilmemiş

biçiminde ifade edilir.

Burada,

$$|d_i| = d_{1i} + d_{2i}$$

ve

$$d_i = d_{1i} - d_{2i}$$

olmak üzere d_{1i} ve d_{2i} pozitif değerlerdir.

MİNMAD Problemi,

$$Min\sum_{i=1}^{N} d_{1i} + \sum_{i=1}^{N} d_{2i}$$

$$x\beta + d_1 - d_2 = y \qquad (2.2.3)$$

β işareti belirtilmemiş

$d_1, d_2 \geq 0$

biçiminde yeniden formüle edilir (Arthanari and Dodge 1981, Eminkahyagil 1997).

Charnes, Cooper ve Sueyoshi (1986), β üzerine konulan kısıtları düşünerek,

$$\underset{\beta}{Min}\sum_{i=1}^{N}\left| y_i - \sum_{t=1}^{n} x_{it}\beta_t \right| \qquad (2.2.4)$$

modeline eşdeğer olarak hedef programlama modelini,

$$Min\sum_{i=1}^{N}(d_i^+ + d_i^-)$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{it}\beta_t + d_i^- - d_i^+ = y_i \qquad (2.2.5)$$

$$d_i^+ d_i^- \geq 0 \quad i = 1,\ldots,N$$

biçiminde tanımlamışlardır.

Narula ve Korhonen (1994) ise (2.2.4) ile verilen modele ,

$C\hat{B}H = D$

kısıtını ekleyerek modeli doğrusallaştırmışlardır.

Dolayısı ile model,

$$\underset{\beta}{Min}\sum_{i=1}^{N}\left|y_i-\sum_{t=1}^{n}\beta_t x_{it}\right| \quad (2.2.6)$$

$$C\hat{B}H = D$$

biçimine dönüşür.

Burada,

$C = C_{n\times k} = [c_{ij}]$

$H = H_{N\times r} = [h_{ij}]$

$D = D_{n\times r} = [d_{ij}]$

biçimindedir.

(2.2.6) eşitliğinde tanımlanan modele bağlı olarak hedef programlama modeli ise,

$$Min \sum_{i=1}^{N} 1'(d_i^+ + d_i^-)$$

$$\sum_{t=1}^{n}\beta_t x_{it} + d_i^- - d_i^+ = y_i$$

$$C\hat{B}H = D$$

$$d_i^+ d_i^- \geq 0 \quad i = 1,\ldots,N$$

β işareti belirtilmemiş

biçiminde tanımlanır.

Eminkahyagil ve Apaydın (1997), (2.2.5) ile verilen modele

$$\sum_{t=1}^{n} \lambda_t \beta_t \leq d \quad , \quad \sum_{t=1}^{n} \lambda_t = 1$$

kısıtını ekleyerek hedef programlama problemini,

$$Min \sum_{i=1}^{N} 1'(d_i^+ + d_i^-)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i X_{ij} + d_j^- - d_j^+ = Y_j$$

$$\sum_{t=1}^{n} \lambda_t \beta_t \leq d \quad , \quad \sum_{t=1}^{n} \lambda_t = 1$$

$$d_i^+ d_i^- \geq 0 \quad i = 1,\ldots,N$$

β işareti belirtilmemiş

biçiminde tanımlamışlardır (Eminkahyagil and Apaydın 1997).

Hedef programlama modeli klasik yaklaşım çerçevesinde ağırlıklandırılma yapılarak,

$$Min \sum_{l=1}^{N} w_i \, [1'(d_i^+ + d_i^-)]$$

$$\sum_{t=1}^{n} \beta_t X_{it} + d_i^- - d_i^+ = Y_i$$

$$\sum_{t=1}^{n} \lambda_t \beta_t \leq d \quad , \quad \sum_{t=1}^{n} \lambda_t = 1$$

$$d_i^+ d_i^- \geq 0 \quad i = 1,\ldots,N$$

β_t işareti belirtilmemiş

biçiminde ağırlıklandırılmış hedef programlama modeli olarak elde edilir (Eminkahyagil 1997).

2.3 Çok Değişkenli Çoklu Regresyon Modeli için MİNMAD Problemi

Çoklu regresyonda En Küçük Kareler tahmin edicisi (2.1.3) eşitliğinde

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} XY$$

olarak tanımlanmıştı. X matrisinin sütunları eğer doğrusal bağımsız ise tek bir çözüm bulunabilir. Bulunan bu $\hat{\beta}$ çözümü gerçek β' nın yansız bir tahmin edicisidir. Eğer $(X'X)$ matrisinin özdeğerlerinin herhangi biri sıfır ise tek bir çözüme ulaşılmayacaktır ve en iyi doğrusal yansız tahmin edici olma özelliği de sağlanamayacaktır. Başka bir deyişle, X matrisinde iki veya daha çok bağımsız değişkenin birbiri ile ilişkili olmaları durumunda çoklu bağlantı ortaya çıkar. Çoklu bağlantı klasik doğrusal regresyon modelinden bir sapma oluşturur. Doğrusal regresyon modelinin varsayımlarından biri X matrisinin rankının n ‘ ye $(n < N)$ eşit olmasıdır. X matrisinin rankının n oluşu, bu matristeki sütunların birbirinden doğrusal bağımsız olduğunu diğer bir deyişle bağımsız değişkenler arasında doğrusal bir ilişki olmadığını ifade eder. Buradan X matrisinin sütunlarının da doğrusal bağımsız olduğu ve $(n \times n)$ boyutundaki bir matrisin de rankının n olduğu görülür. Eğer rank n' ye eşit ise $(X'X)$ matrisinin tersi alınabilir. Dolayısıyla (2.1.3) eşitliğinde parametreler tahmin edilir. Eğer $(X'X)$ matrisinin rankı n'den küçük ise bu matrisin determinantı sıfıra eşit olacaktır ve tersi bulunamayacaktır. Bu duruma tam çoklu bağlantı denir. EKK regresyonda karşılaşılan bu tür zorluklar için MİNMAD yöntemi geliştirilmiştir.

Apaydın ve Yapıcı (2001), eşitlik (2.1.2) ile verilen çok değişkenli çoklu regresyon modelini MİNMAD yaklaşımı ile (2.2.3) eşitliğini genelleştirerek modeli,

$$Min\ \ P_1 = \sum_{i=1}^{N} d_{1i} + \sum_{i=1}^{N} d_{2i}$$

$$Min\ \ P_2 = \sum_{i=1}^{N} d_{3i} + \sum_{i=1}^{N} d_{4i}$$

$$\vdots$$

$$Min\ P_M = \sum_{i=1}^{N} d_{(2M-1)i} + \sum_{i=1}^{N} d_{(2M)i} \tag{2.3.1}$$

$$X\beta_1 + d_1 - d_2 = Y_1$$

$$X\beta_2 + d_3 - d_4 = Y_2$$

$$\vdots$$

$$X\beta_M + d_{(2M-1)} - d_{(2M)} = Y_M$$

$$d_1 \geq 0,...,d_{(2M)} \geq 0$$

β işareti belirtilmemiş

biçimide formüle etmişlerdir. Burada y_j $\quad j = 1,...,M$ olmak üzere N gözlem değerine sahip j-inci bağımlı değişken için sütun vektörleridir.

Elde edilen bu problem bir çok amaçlı doğrusal programlama problemidir.

$$X\beta\ + d_1 - d_2 = Y$$

eşitliğini sağlayan herhangi bir (β, d_1, d_2) ifadesi, (2.3.1) ile verilen optimizasyon problemi için bir çözüm olarak adlandırılır (Apaydın ve Yapıcı 2001).

$\beta' \geq 0$, $\beta'' \geq 0$ alınıp, $\beta = (\beta' - \beta'')$ biçiminde tanımlanarak β işareti belirtilmiş duruma dönüştürülür. Çözüm sonucunda β' ve β'' değişkenlerinin optimal çözümü elde edilecektir. $d_1, d_2, ..., d_{(2M-1)}, d_{2M}$ sapma değişkenleri,

k tek olduğunda pozitif sapmalar,

$$d_k = \begin{cases} Y_k - \hat{Y}_k & , Y_k - \hat{Y}_k \geq 0 \\ 0 & , d.d. \end{cases}$$

k çift olduğunda negatif sapmalar,

$$d_k = \begin{cases} -(Y_k - \hat{Y}_k) & , Y_k - \hat{Y}_k < 0 \\ 0 & , d.d. \end{cases}$$

biçiminde ifade edilmektedir (Narula 1987, Apaydın ve Yapıcı 2001).

3. BULANIK TEORİ VE BULANIK MİNMAD REGRESYON

İlk olarak 1965 yılında Zadeh tarafından yayınlanan bir makalede bulanık mantık ve bulanık küme kuramı ortaya atılmıştır. Zadeh bu çalışmasında insan düşüncesinin büyük çoğunluğunun bulanık olduğunu, kesin olmadığını belirtmiştir. İnsan mantığı, açık, kapalı, sıcak, soğuk, 0 ve 1 gibi kesin ifadelerin yanı sıra az açık, az kapalı, ılık, serin gibi ara değerleri de göz önüne almaktadır. Bulanık mantık klasik mantığın aksine iki seviyeli değil çok seviyeli işlemleri kullanmaktadır.
Zadeh' in bu çalışmasından sonra bulanıklık kavramı işletme, yapay zeka, uzman sistem, kontrol kuramı, kuyruk kuramı, yöneylem araştırması, doğrusal ve doğrusal olmayan programlama, grup karar verme ve çok ölçütlü karar verme gibi alanlarda kullanılmaya başlanmıştır (Şanlı 2005).

Alt kesimlerde bulanık küme ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

3.1 Bulanık Küme Kuramı

Küme, eksiksiz olarak tanımlanmış ve birtakım genel özelliklere sahip soyut ya da somut nesnelerin oluşturduğu yığındır. Kümeler, kesin kümeler ve bulanık kümeler olmak üzere iki gruba ayrılır.

Tanım 3.1.1 Kesin Kümeler

X , Evrensel kümeyi göstermek üzere,
$x \in X$ ve $A \in X$ ise
$\forall\ x \in X\ :\ \mu_A(x) \in \{0,1\}$
biçiminde tanımlanır.

Burada, $\mu_A(x)$: üyelik fonksiyonu ya da karakteristik fonksiyon olarak adlandırılır. Üyelik fonksiyonu, X evrensel kümesine ait bir x öğesinin A alt kümesine ait olma derecesini veren bir fonksiyondur. Küme elemanlarının üyelik fonksiyonunda alacağı değerler “üyelik derecesi” olarak tanımlanır. Kesin kümelemede, bir öğe kümeye ya aittir ya da değildir, yani üyelik derecesi sırasıyla ya 1, ya da 0 değerini alır.

Tanım 3.1.2 Bulanık Kümeler

A bulanık kümeyi göstermek üzere,
$x \in X$ ve $A \in X$ ise
$\forall\ x \in X:\ \mu_A(x) \in [0,1]$
biçiminde tanımlanır.

Bulanık küme, üyeleri kesin olarak belli olmayan fakat aday öğelerin bu kümeye üyelik derecelerinin bilindiği bir kümedir. Bulanık kümelerde öğelerin üyelik derecesi $[0,1]$ kapalı aralığındaki herhangi bir değeri alabilir.

Bulanık küme,

$$\forall\ x \in X \text{ için } \quad A = \mu_A(x_1) / x_1 + \ldots + \mu_A(x_n) / x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) / x_i$$

biçiminde tanımlanır.
X evrensel kümesi sonlu değil ise,

$$\forall\ x \in X \text{ için } \quad A = \int_X \mu_A(x) / x dx$$

biçiminde ifade edilir (Klir and Yuan 1993, Allahverdi 1999).

Tanım 3.1.3 Destek Kümesi

Bir A bulanık kümesinin desteği, X evrensel kümesinin bir alt kümesidir . Destek kümesi,

$$destek\ A = \{ x \mid \mu_A(x) \geq 0 \ \ ve \ \ x \in X \}$$

ile gösterilir.

Tanım 3.1.4 α-Kesme

A bulanık kümesinin α-kesmesi, X evrensel kümesinin kesin bir alt kümesidir ve
$A_\alpha = \{ \ x : \mu_A(x) \geq \alpha \ \text{ ve } \ x \in X \ \}$
ile gösterilir.

Tanım 3.1.5 Normallik

Bulanık bir kümede üyelik derecesinin alabileceği en küçük değer 0 'dır. Eğer *A* bulanık kümesinin aldığı en büyük değer 1 ise *A* bulanık kümesi normallik özelliğine sahiptir, yani *A* bulanık kümesi normallik özelliğine sahip ise $\alpha \in [0,1]$ olur.

Tanım 3.1.6 Konvekslik (Dışbükeylik)

Tüm $x_1, x_2 \in \Re$ ve tüm $\lambda \in [0,1]$ için $\Re$ üzerinde bulanık bir *A* kümesi,
$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \min \{ \mu_A(x_1), \mu_A(x_2) \}$
koşulunu sağlıyorsa *A* bulanık kümesi konveks küme olarak tanımlanır (Apaydın 2004).

Tanım 3.1.7 Genişleme (Extension) Prensibi

X evrensel kümesinden Y evrensel kümesine bir fonksiyon $f : X \rightarrow Y$ olsun. X' deki *A* bulanık kümesi verildiğinde ve f fonksiyonu ile Y'deki $B = f(A)$ bulanık kümesinin belirlenmesi istendiğinde,

$$\mu_B(y) = \mu_A\left(f^{-1}(y)\right), \ y \in Y$$

biçiminde tanımlanır. Burada $f^{-1}(y)$, f ' in tersidir. Daha genel olarak B için üyelik fonksiyonu,

$$\mu_B(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \ , \ y \in Y \tag{3.1.1}$$

biçimindedir.

Burada $f^{-1}(y)$, tüm $x \in X$ kümesi için $f(x) = y$'dir. (3.1.1) ile verilen eşitlik genişleme prensibi olarak tanımlanır (Wang 1997, Apaydın 2000, Şanlı 2005).

Tanım 3.1.8 Bulanık Sayı

A bulanık küme ve $x \in A$ olmak üzere,

1. A bulanık sayısı normal ise,

2. $A_\alpha \in [0,1]$ ise,

3. A' nın destek kümesi sınırlı ise,

biçiminde belirtilen özelliklere sahip x bulanık sayı olarak adlandırılır (Klir and Yuan 1995, Şanlı 2005).

Tanım 3.1.9 Üçgensel Bulanık Sayı

Üçgensel bulanık sayı $x = (a,c,d)_T$ olarak tanımlanır. Burada a merkez, c sol yayılma, d sağ yayılma ve T üçgensel bulanık sayı anlamında kullanılır. A bulanık küme, $x \in A$ olmak üzere, üçgensel bulanık sayı x' in üyelik fonksiyonu $\mu(x)$,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq a-c \\ 1-\dfrac{(a-x)}{c} & , \quad a-c \leq x \leq a \\ 1-\dfrac{(x-a)}{d} & , \quad a \leq x \leq a+d \\ 0 & , \quad x \geq a+d \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $c = d$ ise x simetrik üçgensel bulanık sayı olarak adlandırılır (Şanlı 2005).

Tanım 3.1.10 Yamuksal Bulanık Sayı

Yamuksal bulanık sayı $x = (a_l, a_u, c, d)_{Tr}$ olarak tanımlanır. Burada c sol yayılma , d sağ yayılma ve Tr yamuksal bulanık sayı anlamındadır. A bulanık küme, $x \in A$ olmak üzere, yamuksal bulanık sayı x ' in üyelik fonksiyonu $\mu(x)$,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le a_l - c \\ 1 - \dfrac{(a_l - x)}{c} & , \quad a_l - c \le x \le a_l \\ 1 & , \quad a_l \le x \le a_u \\ 1 - \dfrac{(x - a_u)}{d} & , \quad a_u \le x \le a_u + d \\ 0 & , \quad x \ge a_u + d \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Eğer $c = d$ ise x simetrik yamuksal bulanık sayı olarak adlandırılır (Tanaka and Guo 1999, Şanlı 2005).

Tanım 3.1.11 *L-R* Bulanık Sayı

Dubois ve Prade (1978) tarafından önerilen bir *L-R* bulanık sayısı $x = (a_l, a_u, c, d,)_{LR}$ olarak tanımlanır. Burada c sol yayılma, d sağ yayılma, $L(\bullet)$ ve $R(\bullet)$ bulanık sayılar fonksiyonu olarak tanımlanır. *L* ve *R*, bulanık sayıların sol ve sağ yanlarını tanımlayan fonksiyonlardır ve

1. $L(x) = L(-x)$, $R(x) = R(-x)$,

2. $L(0) = 1$, $R(0) = 1$,

3. $x \ge 0$ için $L(x)$ ve $R(x)$ kesin azalandır,

koşullarını sağlarlar.

L-R bulanık sayısı için üyelik fonksiyonu $\mu(x)$,

$$\mu(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a_l - x}{c}\right) & , \quad x \le a_l \\ 1 & , \quad a_l \le x \le a_u \\ R\left(\dfrac{x - a_u}{d}\right) & , \quad x \ge a_u \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

$L(\bullet) = R(\bullet)$ ve $c = d$ olduğunda bulanık sayı *L* bulanık sayısı olarak isimlendirilir ve $x = (a_l, a_u, c)_{LL}$ ya da $x = (a,c)_L$, $a_l = a_u = a$ şeklinde gösterilir. *L* bulanık sayısı $a_l = a_u$ ve $L(x) = \max\left(0, 1 - |x|\right)$ olduğunda bulanık sayı $(a,c)_L$ şeklinde gösterilir ve simetrik üçgensel bulanık sayı olarak isimlendirilir (Tanaka and Guo 1999, Şanlı 2005).

3.2 Bulanık Sayılar için Aritmetik İşlemler

İki üçgensel bulanık sayı, $A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere toplama işlemi,

$$A\,(+)\,B = (a_1, a_2, a_3)\ (+)\ (b_1, b_2, b_3)$$

$$= (\,a_1 + b_1\,, a_2 + b_2\,, a_3 + b_3\,)$$

biçiminde ve çıkarma işlemi,

$$A\,(-)\,B = (a_1, a_2, a_3)\ (-)\ (b_1, b_2, b_3)$$

$$= (\,a_1 - b_1\,, a_2 - b_2\,, a_3 - b_3\,)$$

biçiminde tanımlanır.

Elde edilen bu sayılar yine birer üçgensel bulanık sayıdır (Apaydın 2004).

3.3 Bulanık Küme İşlemleri

$\forall\ x \in A$ için A, B, C, D bulanık kümelerine ilişkin işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.3.1 Birleşme, Kesişme ve Tümleme

$A \cup B = C$, $A \cap B = D$, $\overline{A} = 1 - A$ ise üyelik fonksiyonları ;

birleşim için,

$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

biçiminde,

kesişim için,

$\mu_D(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

biçiminde,

tümleme için,

$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

biçiminde tanımlanır (Klir and Yuan 1993).

3.4 Bulanık Kümelerin Karşılaştırılması

Bulanık sayıların ya da daha genel olarak bulanık kümelerin karşılaştırılması veya sıralanması uygulamalı yaklaşımlar için çok önemlidir. Matematiksel modellerin kurulmasında bulanık küme teorisi kullanılıyorsa, bulanık sayıların karşılaştırılması veya sıralanması problemi ile karşılaşılmaktadır. Bulanık sayılar doğrusal bir sıra içinde olmadıkları için karşılaştırılmaları oldukça zordur. Literatürde farklı yaklaşımlar için farklı bulanık sıralama yöntemleri önerilmiştir (Şanlı 2005). Burada “ overall existence” yöntemi ele alınmıştır.

Tanım 3.4.1 A ve B bulanık kümeler olmak üzere, w_a, A kümesinin , w_b, B kümesinin üyelik fonksiyonunu göstermek üzere, verilen bir w seviyesi için μ^w üyelik fonksiyonunun ters görüntüsü ,

$\mu^{-1}(w) = \{x : \mu(x) = w\}$

biçiminde tanımlanır.

Teorem:

Herhangi bir üyelik fonksiyonuna sahip bulanık A ve B kümeleri göz önüne alınsın. $\forall \quad w \in (0,1]$ için w ‘ de A’ nın B’ den geniş olduğu söylenebiliyorsa, $\{ \mu_A^{-1}(w) \} > \{ \mu_B^{-1}(w) \}$’ dır. Fakat bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Bu yaklaşımda sadece bir w noktasının göz önüne alınması ve yeterli bilginin kullanılmaması bir problemdir. Bu nedenle tüm w seviyelerini göz önüne alan “ overall existence ” kavramı ele alınmıştır. Bu yöntemde kullanılan indeks “ overall existence index ” olarak adlandırılır ve

$$I = \int_0^1 g\left(\{\mu_A^{-1}(w)\} \right) dw - g\left(\{\mu_B^{-1}(w)\} \right) dw \tag{3.4.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

g : Üyelik fonksiyonlarının tersinin bir fonksiyonunu,

μ_A : A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonunu,

μ_B : B bulanık kümesinin üyelik fonksiyonunu,

$\mu_A^{-1}(w)$: $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonun ters görüntüsünü,

$\mu_B^{-1}(w)$: $\mu_B(x)$ üyelik fonksiyonun ters görüntüsünü,

göstermektedir.

A ve B bulanık kümelerine ait üyelik fonksiyonlarının ters görüntüsü sırasıyla

$$\begin{aligned} &\mu_A^{-1}(w) = \{x : \mu_A(x) = w\} \\ &\mu_B^{-1}(w) = \{y : \mu_B(x) = w\} \qquad x, y \in R \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

biçiminde tanımlanır.

A ve B bulanık sayıları arasındaki fark,

$$d(A,B)=\int_0^{w^*_{hgt}} g_A\left(\left\{\mu_A^{-1}(w)\right\}\right)dw-\int_0^{w^*_{hgt}} g_B\left(\left\{\mu_B^{-1}(w)\right\}\right)dw \qquad (3.4.3)$$

olarak tanımlanır.

Burada,

$$w^*_{hgt}=\min\left[hgt(A),hgt(B)\right]$$

hgt(A) = A bulanık sayısının alabileceği en yüksek üyelik derecesini,
hgt(B) = B bulanık sayısının alabileceği en yüksek üyelik derecesini,
göstermektedir.

Her bir bulanık küme için özel ölçü *OM(A_i)*,

$$OM(A_i)=\int_0^{w^*_{hgt}} g_i\left(\left\{\mu_A^{-1}(w)\right\}\right)dw \qquad (3.4.4)$$

eşitliği ile verilir. Bu eşitlik tüm üyelik fonksiyonları (dışbükey, dışbükey olmayan, normal, normal olmayan sürekli vb.) için uygulanabilir.
$g_i\left(\left\{\mu_A^{-1}(w)\right\}\right)$ ifadesi,

$$g_i\left(\left\{\mu_A^{-1}(w)\right\}\right)=W(w)\left(\chi_1(w)\,x_i^{'}(w)+\chi_2(w)\,x_i^{''}(w)\right) \qquad (3.4.5)$$

eşitliği ile verilir.

Burada,

$x^{'}(w)$, A bulanık sayısının sol referansının ters görüntüsü

$x^{''}(w)$, A bulanık sayısının sağ referansının ters görüntüsü

olmak üzere,

$$x^{'}(w) = \mu_{A_L}^{-1}(w)$$

$$x^{''}(w) = \mu_{A_R}^{-1}(w)$$

biçiminde tanımlanır. Buradan *OM* indeksi *OM (A)*

$$OM(A) = \int_0^1 W(w)\left[\chi_1(w)\,\mu_{A_L}^{-1}(w) + \chi_2(w)\,\mu_{A_R}^{-1}(w)\right]dw \qquad (3.4.6)$$

eşitliği ile verilir.

Burada,

$$W(w) = \frac{w}{\frac{1}{2}\left(w_{hgt}^{*}\right)^2}$$

olarak seçilir.

(3.4.6)' da verilen $W(w), \chi_1(w)$ ve $\chi_2(w)$ ağırlık ölçüleridir ve karar verici tarafından belirlenir. Burada $\chi_1(w)$ ve $\chi_2(w)$ ifadeleri,

$$\chi_1(w) + \chi_2(w) = 1$$

ve

$$\chi_1(w), \chi_2(w) \in (0,1]$$

koşullarını sağlamaktadır (Chang and Lee 1994, Apaydın 2004, Şanlı 2005).

3.5 Genel Bulanık Doğrusal Model

$f(X,A)$, X' ten *Y'* ye bir fonksiyon olarak düşünülsün. Bağımsız değişken *X*, x_i' lerden, bağımlı değişken Y , Y_i'lerden oluşsun. $A=(A_0, A_1,..., A_n)$ regresyon katsayılarını göstermek üzere, A_t' ler (*t= 1,…,n*) bulanık ise $f(X,A)$ modeli bulanık model olarak adlandırılır.

Genel bulanık doğrusal model (GFLM),

$$Y_i = A_0\,(+)\,A_1\,(\times)\,x_{i1}\,(+)\,A_2\,(\times)\,x_{i2}\,(+)...\,(+)\,A_n\,(\times)\,x_{in}\,\{+\}\varepsilon_i \tag{3.5.1}$$

biçiminde verilir.

Burada, ε_i gözlemsel hatalardır. ε_i' ler sıfır ortalamalı rasgele hatalar olarak düşünülmek yerine, modelin bulanık olmasından dolayı, bulanık hatalar olarak düşünülebilir. (+) ve (×) bulanık toplama ve çarpmayı göstermektedir.

A_t bulanık parametreleri,

$$\mu_{A_t}(a_t)=\begin{cases} L\left(\dfrac{\alpha_l - a_t}{c_t^L}\right) & , \quad a_t \le \alpha_t \quad , \quad c_t^L > 0 \\ R\left(\dfrac{a_t - \alpha_l}{c_t^R}\right) & , \quad a_t \ge \alpha_t \quad , \quad c_t^R > 0 \end{cases} \tag{3.5.2}$$

üyelik fonksiyonuna sahip *L-R* bulanık sayıları olarak tanımlanabilir.

L ve *R*, sol ve sağ referans fonksiyonlarını göstermektedir.

$A_t=(\alpha_t, c_t^L, c_t^R)_{LR}$ bulanık sayısında α_t merkezi, c_t^L, c_t^R ise sol ve sağ yayılımları göstermektedir.

L-R fonksiyonları farklı durumlarda farklı şekilde tanımlanabilir.

$L(u) = \max\left(0,\ 1-|\mu|^p\right),\ p \geq 0$

biçiminde olmak üzere üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{A_t}(a_t) = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{\alpha_t - a_t}{c_t^L}\right)^p & ,\ c_t^L \geq (\alpha_t - a_t) \geq 0\ ,\ c_t^L > 0 \\ 1-\left(\dfrac{a_t - \alpha_t}{c_t^R}\right)^p & ,\ c_t^R \geq (a_t - \alpha_t) \geq 0\ ,\ c_t^R > 0 \\ 0 & ,\ d.d. \end{cases} \quad (3.5.3)$$

biçiminde elde edilir.

$p = 1$ ise üçgensel bulanık sayıya ilişkin üyelik fonksiyonu,

$p = 2$ ise karesel bulanık sayıya ilişkin üyelik fonksiyonu

elde edilmiş olur.

$c_t^L = c_t^R = c_t$, yani L ve R fonksiyonları eşit ise (3.5.3) eşitliği simetrik üçgensel ya da simetrik karesel bulanık sayılar için tanımlanmış olur. Bu durumda $A_t = (\alpha_t, c_t)_L$ yazılabilir.

Y_i^*, bağımlı değişkenin kestirimi olmak üzere kestirim model denklemi,

$$Y_i^* = A_0^* (+) A_1^* (\times) x_{i1} (+) A_2^* (\times) x_{i2} (+) \ldots (+) A_n^* (\times) x_{in} \quad (3.5.4)$$

biçiminde tanımlanır**.**

$i = 1, \ldots, N$ ve $t = 1, \ldots, n$ olmak üzere eğer x_{ij} ’ler kesin sayılar ise, Zadeh’in genişleme prensibi ile Y_i^* için üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{Y_i^*}(y) = \max_{\{y = f(x_i, A)\}} \min_t \left(\mu_{A_t}(a_t)\right) \quad (3.5.5)$$

biçiminde tanımlanır.

Y_i^* için üyelik fonksiyonu elde etmenin bir alternatif yolu ise *L-R* bulanık sayıları için bulanık aritmetiğini kullanmaktır.

Buradan,

$$Y_i^* = A_0^* (+) A_1^* (\times) x_{i1} (+) A_2^* (\times) x_{i2} (+) \ldots (+) A_n^* (\times) x_{in}$$

$$= \left(\alpha_0 + \sum_{t=1}^{n} \alpha_t x_{it} \ , \ c_0^L + \sum_{t=1}^{n} c_t^L x_{it} \ , \ c_0^R + \sum_{t=1}^{n} c_t^R x_{it} \right)_{LR} \qquad (3.5.6)$$

eşitliği yazılabilir.

L-R bulanık sayıları simetrik ise,

$$Y_i^* = \left(\alpha_0 + \sum_{t=1}^{n} \alpha_t x_{it} \ , \ c_0 + \sum_{t=1}^{n} c_t x_{it} \right)_L$$

biçiminde yazılır.

Burada,

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)'$

$x_i = (1, x_{i1}, \ldots, x_{in})'$

$c^L = (c_0^L, c_1^L, \ldots, c_n^L)'$

$c^R = (c_0^R, c_1^R, \ldots, c_n^R)'$

eşitlikleri kullanılarak Y_i^* için,

$$Y_i^* = \left(\alpha' x_i \, , (c^L)' x_i \, , \, (c^R)' x_i \right)_{LR} \qquad (3.5.7)$$

ifadesi elde edilir. (3.5.7) eşitliğinden Y_i^* için üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{Y_i^*}(y) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\alpha' x_i - y}{(c^L)'} x_i \right) \ , \ y \le \alpha' x_i \ , \ (c^L)' x_i > 0 \\ L\left(\dfrac{y - \alpha' x_i}{(c^R)'} x_i \right) \ , \ y \ge \alpha' x_i \ , \ (c^R)' x_i > 0 \end{cases} \qquad (3.5.8)$$

biçiminde tekrar elde edilir.

L-R fonksiyonlarının,

$$L(u) = \max(0, 1-|u|^p) \ , \ p = 1,2$$

$$R(v) = \max(0, 1-|v|^p) \ , \ p = 1,2$$

biçiminde tanımlanması ile Y_i^* için üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{A_t}(a_t) = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{\alpha' x_i - y}{(c^L)'} x_i\right)^p & , \ \left(c^L\right)' x_i \geq \left(\alpha' x_i - y\right) \geq 0 \ , \ \left(c^L\right)' x_i > 0 \\ 1-\left(\dfrac{y-\alpha' x_i}{(c^R)'} x_i\right)^p & , \ \left(c^R\right)' x_i \geq \left(y - \alpha' x_i\right) \geq 0 \ , \left(c^R\right)' x_i > 0 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

olarak elde edilir (Chang and Lee 1994).

3.6 Bulanık En Küçük Kareler Toplamı

Genel bulanık doğrusal programlama problemi için Y_i ve Y_i^* kestirimi arasındaki sapmalar,

$$Y_i = Y_i^* \{+\} \varepsilon_i \qquad \text{ve} \qquad \varepsilon_i^* = Y_i \{-\} Y_i^* \tag{3.6.1}$$

biçiminde ifade edilir.

Burada, ε_i^* ' lar Y_i ile Y_i^* arasındaki bulanık uzaklık ya da bulanık yayılımı gösteren bulanık sapmaları ifade etmektedir. Bulanık En Küçük Kareler toplamı,

$$\min \sum_{i=1}^{N} \left(\varepsilon_i^*\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_i \{-\} Y_i^*)^2$$

formülü ile verilir.

Bulanık farkların elde edilmesinde “ overall existence ranking index (OERI) ” yöntemi kullanılmıştır.

A bulanık sayısının sol yanı A_L ve sağ yanı A_R olmak üzere,

$\left\{\mu_A^{-1}(w)\right\} = \left\{\mu_{A_L}^{-1}(w), \mu_{A_R}^{-1}(w)\right\}$ olarak yazılır.

Burada, $\mu_{A_L}^{-1}(w)$ ve $\mu_{A_L}^{-1}(w)$ sol ve sağ yanlara ilişkin ters üyelik fonksiyonlarını göstermektedir. Bu ters üyelik fonksiyonları (3.4.2.) eşitliğinden,

$$a_t^{''}(w) = \mu_{A_R}^{-1}(w) = \left\{a \mid \mu_{A_R}(a) = w\right\}$$

$$a_t^{'}(w) = \mu_{A_L}^{-1}(w) = \left\{a \mid \mu_{A_L}(a) = w\right\}$$

biçiminde yazılabilir.

Üçgensel *L-R* tipi $A_t = (\alpha_t, c_t^L, c_t^R)_{LR}$ bulanık sayıları için,

$$\mu_{A_L}(a_t) = 1 - \frac{\alpha_t - a_t}{\mathrm{c}_\mathrm{t}^\mathrm{L}} = w \quad , \quad \mu_{A_L}^{-1}(w) = \alpha_t - \mathrm{c}_\mathrm{t}^\mathrm{L}(1-w)$$

$$\mu_{A_R}(a_t) = 1 - \frac{a_t - \alpha_t}{\mathrm{c}_\mathrm{t}^\mathrm{R}} = w \quad , \quad \mu_{A_R}^{-1}(w) = \alpha_t + \mathrm{c}_\mathrm{t}^\mathrm{R}(1-w)$$

eşitlikleri kullanılarak (3.4.6.) eşitliğiyle verilen OM indeksi,

$$\begin{aligned} OM(A) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\alpha_t - \mathrm{c}_\mathrm{t}^\mathrm{L}(1-w)\right) + \left(\alpha_t + \mathrm{c}_\mathrm{t}^\mathrm{R}(1-w)\right)\right]dw \\ &= \frac{1}{2}\left(\alpha_t w - c_t^L w + c_t^L \frac{w^2}{2} + \alpha_t w + c_t^R w - c_t^R \frac{w^2}{2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(2\alpha_t - \frac{c_t^L + c_t^R}{2}\right) \\ &= \frac{4\alpha_t - c_t^L + c_t^R}{4} \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

biçiminde hesaplanır.

Burada $W(w)=1$, $\chi_1(w)=\chi_2(w)=\dfrac{1}{2}$ olarak alınmıştır.

$Y_i=(y_i^m, y_i^L, y_i^R)_{LR}$ ve $Y_i^*=\left(\alpha' x_i, (c^L)' x_i, (c^R)' x_i\right)_{LR}$ üçgensel *L*-*R* bulanık sayıları için eşitlik (3.6.2)' den yaralanarak amaç fonksiyonu,

$$\min J_1^T=\sum_{i=1}^{N}(Y_i\{-\}Y_i^*)^2$$

$$=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{N}\left(4y_i^m-y_i^L+y_i^R-4\alpha' x_i+(c^L)' x_i-(c^R)' x_i\right)^2$$

(3.6.3)

biçimindedir.

Daha önce $\chi_1(w)=\chi_2(w)$ alındığından (3.6.3) ile verilen eşitlik gerçek değerler ile kestirilen değerler arasındaki farkın enküçüklenmesini garanti etmez. Bu eşitlik sadece "overall existence " yaklaşımından elde edilen bulanık uzaklıkların (farkların) en küçüklenmesini sağlar. Bu nedenle problemin çözümü için amaç fonksiyonuna,

$$J_2=\sum_{i=1}^{N}\left(y_i^L-(c^L)' x_i\right)^2+\left(y_i^R-(c^R)' x_i\right)^2$$

fonksiyonu eklenir.

Bu fonksiyon ile sol ve sağ yayılımlar için gerçek ve kestirilen değer arasındaki sapmalar en küçüklenmiş olur.

Bu optimizasyon problemini enküçüklemek için,

$$[Y_i]_\lambda\subseteq \sup\left(Y_i^*\right),\ i=1,...,N \tag{3.6.4}$$

koşulunu sağlayan λ-düzeyi tanımlanır.

Burada, $[\ ]_\lambda$, λ-düzeyini, "sup" ise destek kümesini göstermektedir.

(3.6.4) ifadesindeki koşullar göz önünde bulundurularak üçgensel *L-R* bulanık sayısı,

$$y_i^m - (1-\lambda) y_i^L \geq \alpha' x_i - (c^L)' x_i \quad , \quad i = 1,...,N \qquad (3.6.5a)$$

$$y_i^m + (1-\lambda) y_i^R \leq \alpha' x_i - (c^R)' x_i \quad , \quad i = 1,...,N \qquad (3.6.5b)$$

biçiminde tekrar yazılabilir. (3.6.5a) ve (3.6.5b) kısıtları da modele eklenerek,
Genel bulanık doğrusal regresyon için bulanık en küçük kareler,

$$\min J_1^T + J_2$$

$$y_i^m - (1-\lambda) y_i^L \geq \alpha' x_i - (c^L)' x_i \quad , \quad i = 1,...,N$$

$$y_i^m + (1-\lambda) y_i^R \leq \alpha' x_i - (c^R)' x_i \quad , \quad i = 1,...,N$$

$$x_j \geq 0 \; , \; c^L, c^R \geq 0$$

biçiminde formüle edilir (Chang and Lee 1994).

3.7 Bulanık Mutlak Sapmaların Enküçüklenmesi

Bulanık Mutlak Sapmaların En Küçüklenmesi ya da diğer bir ifadeyle bulanık MİNMAD regresyon için, Y_i bağımlı değişkenin bulanık olması durumunda, Y_i ile Y_i^* kestirimi arasındaki bulanık uzaklık (3.6.2)' de verildiği gibi " overall existence ranking index (OERI) " yöntemi kullanılarak elde edilmektedir. Burada amaç bu yaklaşımdan elde edilen bulanık uzaklıkların en küçüklenmesidir.
$Y_i = (y_i^m, y_i^L, y_i^R)_{LR}$ ve $Y_i^* = \left(\alpha' x_i, (c^L)' x_i, (c^R)' x_i\right)_{LR}$ üçgensel *L-R* bulanık sayıları için (3.6.2) ifadesinden yararlanarak bulanık mutlak sapmaların enküçüklenmesi için amaç fonksiyonu,

$$\min J_1^T = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N} \left| 4 y_i^m - y_i^L + y_i^R - 4\alpha' x_i + (c^L)' x_i - (c^R)' x_i \right|$$

biçiminde elde edilir.

$d_i^{T_1}$ ve $d_i^{T_2}$ negatif olmayan iki değişken olmak üzere,

$$\min\left(\frac{1}{4}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(d_i^{T_1}+d_i^{T_2}\right)$$
$$c^L, c^R, x_i, d_i^{T_1}, d_i^{T_2} \geq 0$$

biçiminde tanımlanır.

Burada,

$$d_i^{T_1}-d_i^{T_2} = 4y_i^m - y_i^L + y_i^R - 4\alpha' x_i + (c^L)' x_i - (c^R)' x \qquad (3.7.1)$$

olarak verilmiştir.

Benzer şekilde sol ve sağ yayılımlara ilişkin gerçek ve kestirilen değer arasındaki sapmaları gösteren J_2 için $d_i^{L_1}, d_i^{L_2}, d_i^{R_1}, d_i^{R_2}$ tanımlanır ve Mutlak Sapmaların En Küçüklemesi için (3.7.1) eşitliği ve (3.6.5a) - (3.6.5b)' de tanımlanan kısıtlar da göz önünde bulundurularak problem,

$$\min J_1^T + J_2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\left(\frac{1}{4}\right)d_i^{T_1} + \left(\frac{1}{4}\right)d_i^{T_2} + d_i^{L_1} + d_i^{L_2} + d_i^{R_1} + d_i^{R_2}\right)$$
$$y_i^L - (c^L)' x_i = d_i^{L_1} - d_i^{L_2}$$
$$y_i^R - (c^R)' x_i = d_i^{R_1} - d_i^{R_2}$$
$$y_i^m - (1-\lambda)y_i^L \geq \alpha' x_i - (c^L)' x_i \quad , \quad i = 1,...,N$$
$$y_i^m + (1-\lambda)y_i^R \leq \alpha' x_i + (c^R)' x_i \quad , \quad i = 1,...,N \qquad (3.7.2.)$$
$$4y_i^m - y_i^L + y_i^R - 4\alpha' x_i + (c^L)' x_i - (c^R)' x = d_i^{T_1} - d_i^{T_2}$$
$$x_i, d_i^{T_1}, d_i^{T_2}, d_i^{L_1}, d_i^{L_2}, d_i^{R_1}, d_i^{R_2} \geq 0$$
$$c^L, c^R \geq 0 \qquad i = 1,...,N$$

biçiminde formüle edilir (Chang and Lee 1994). Elde edilen bu problem sabit katsayılı doğrusal programlama problemidir.

4. ÇOK DEĞİŞKENLİ ÇOKLU REGRESYON MODELİNİN BULANIK MİNMAD PROBLEMİ OLARAK MODELLENMESİ

Çok ölçütlü karar verme sistem analizi, hızla gelişen yüksek teknolojinin modern toplumda ortaya çıkardığı karmaşık sorunların çözümünde kullanılan geniş bir alandır. Çok amaçlı programlama ve planlamada birbiri ile çelişen birden çok amacın bulunduğu karar verme problemleri ele alınmıştır. Çok amaçlı programlama geleneksel tek amaçlı yaklaşıma göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Çok amaçlı karar verme yaklaşımlarının kullanılması problemin çözümünde birçok yarar sağlamaktadır. Bu yaklaşımların, planlama sürecine katılan karar verici ve çözümleyicilerin birlikte çalışması, çok bilgiye sahip olunması ve çok sayıda amaç fonksiyonu ele alındığı için çözümleyicinin problem üzerine koyduğu varsayımların daha gerçekçi olması gibi yararları vardır (Apaydın 2005).

Chang and Lee (1994) yaptıkları çalışmada bir bağımlı değişken ve bağımsız değişkenler için bulanık mutlak sapmaların en küçüklenmesi problemini öne sürmüşler ve bağımlı değişkenin bulanık olması durumunu ele almışlardır. Problemi bulanıklıktan kurtarmak için "overall existence" yaklaşımından yararlanarak bulanık farklar hesaplanmış ve model bir doğrusal programlama problemi olarak elde edilmiştir.

Bu çalışmada çok değişkenli çoklu regresyon modeli için bağımlı değişkenlerin bulanık olması durumu ele alınmıştır. MİNMAD yöntemi EKK yöntemine alternatif olarak uç değerlerden etkilenmemektedir. Ayrıca gözlem sayısının az olduğu durumlarda etkin olarak kullanılabilmektedir. Bu avantajlarından dolayı çok değişkenli çoklu regresyon modeli için bulanık MİNMAD yaklaşımı amaçlanmıştır. Chang and Lee (1994)' nin bir bağımlı değişken için geliştirdiği Bulanık MİNMAD regresyon genişletilerek çok değişkenli çoklu regresyon modeli için formüle edilmiştir.

Elde edilen bu model, bir çok amaçlı doğrusal programlama problemidir. Bu problemin çözümü için çok amaçlı programlama problemleri yöntemlerinden Global Kriter Yöntemi kullanılacaktır. Model çözümü için ele alınan örnek problemlerin çözümünde LINGO ve MATLAB paket programından yararlanılacaktır.

4.1 Bulanık Çok Amaçlı MİNMAD Modeli

$Y_i = (y_i^m, y_i^L, y_i^R)_{LR}$ ve $Y_i^* = \left(\alpha' x_i, (c^L)' x_i, (c^R)' x_i\right)_{LR}$ üçgensel *L-R* bulanık sayı olarak alındında (3.6.2.) eşitliğinden yararlanarak amaç fonksiyonu (3.7.1) biçiminde elde edilmiştir. Çok değişkenli çoklu regresyon için bulanık mutlak sapmaların en küçüklenmesinde, *M* tane bağımlı değişken için *M* tane amaç fonksiyonu olacaktır. (3.6.2)'deki kısıtlar da düşünüldüğünde model,

$$\min J_{11}^T + J_{21} = \sum_{i=1}^{N}\left(\left(\frac{1}{4}\right)d_{i1}^{T_1} + \left(\frac{1}{4}\right)d_{i1}^{T_2} + d_{i1}^{L_1} + d_{i1}^{L_2} + d_{i1}^{R_1} + d_{i1}^{R_2}\right)$$

$$\min J_{12}^T + J_{22} = \sum_{i=1}^{N}\left(\left(\frac{1}{4}\right)d_{i2}^{T_1} + \left(\frac{1}{4}\right)d_{i2}^{T_2} + d_{i2}^{L_1} + d_{i2}^{L_2} + d_{i2}^{R_1} + d_{i2}^{R_2}\right) \qquad (4.1.1)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\min J_{1M}^T + J_{2M} = \sum_{i=1}^{N}\left(\left(\frac{1}{4}\right)d_{iM}^{T_1} + \left(\frac{1}{4}\right)d_{iM}^{T_2} + d_{iM}^{L_1} + d_{iM}^{L_2} + d_{iM}^{R_1} + d_{iM}^{R_2}\right)$$

$$y_{ij}^L - (c_j^L)' x_i = d_{ij}^{L_1} - d_{ij}^{L_2}$$

$$y_{ij}^R - (c_j^R)' x_i = d_{ij}^{R_1} - d_{ij}^{R_2}$$

$$y_{ij}^m - (1-\lambda) y_{ij}^L \geq \alpha'_j x_i - (c_j^L)' x_i \quad , \quad i = 1,\dots,N$$

$$y_{ij}^m + (1-\lambda) y_{ij}^R \leq \alpha'_j x_i + (c_j^R)' x_i \quad , \quad i = 1,\dots,N$$

$$4y_{ij}^m - y_{ij}^L + y_{ij}^R - 4\alpha'_j x_i + (c_j^L)' x_i - (c_j^R)' x = d_{ij}^{T_1} - d_{ij}^{T_2}$$

$$x_i, d_{ij}^{T_1}, d_{ij}^{T_2}, d_{ij}^{L_1}, d_{ij}^{L_2}, d_{ij}^{R_1}, d_{ij}^{R_2} \geq 0$$

$$c_j^L, c_j^R \geq 0 \qquad i = 1,\dots,N \ , \ j = 1,\dots,M$$

biçiminde formüle edilir. Burada $i = 1,\dots,N$ gözle sayısını, $j = 1,\dots,M$ bağımlı değişken sayısını göstermektedir. Bu model, bir çok amaçlı doğrusal programlama problemidir.

Global Kriter Yöntemi, problemle ilgili kısıtlar ve amaçlar tanımlandıktan sonra, karar vericinin tercihiyle ilgili bilgisine ihtiyaç duymayan yöntemlerden birisidir. Karar verici, klasik optimizasyon yöntemlerinde olduğu gibi yöntemin bulduğu çözümün kabul edilebilir olduğunu varsayar. Çok değişkenli çoklu regresyon modelinin çok amaçlı MİNMAD problemi olarak tasarlanmasıyla elde edilen çok amaçlı programlama modelinin çözümü için aşağıda tanımlanan Global Kriter Yöntem algoritması kullanılacaktır.

Algoritma

Adım 1:

(4.1.1)' de formüle edilen problemdeki her bir amaç fonksiyonu tek tek ele alınarak $P_1, P_2, \ldots, P_M$ biçiminde M tane doğrusal programlama problemi oluşturulur. Bu problemin çözümü sonucunda $P_1(d^*), P_2(d^*), \ldots, P_M(d^*)$ " ideal çözümler " i hesaplanır.

Adım 2:

Adım 1' de bulunan ideal çözümler yardımıyla,

$$\text{Minimize} \ \sum_{j=1}^{M} \left[\frac{P_j(d) - P_j(d^*)}{P_j(d^*)} \right]^a$$

$$y_{ij}^L - (c_j^L)' x_i = d_{ij}^{L_1} - d_{ij}^{L_2}$$

$$y_{ij}^R - (c_j^R)' x_i = d_{ij}^{R_1} - d_{ij}^{R_2}$$

$$y_{ij}^m - (1-\lambda) y_{ij}^L \geq \alpha_j' x_i - (c_j^L)' x_i \quad , \quad i = 1, \ldots, N$$

$$y_{ij}^m + (1-\lambda) y_{ij}^R \leq \alpha_j' x_i + (c_j^R)' x_i \quad , \quad i = 1, \ldots, N$$

$$4 y_{ij}^m - y_{ij}^L + y_{ij}^R - 4\alpha_j' x_i + (c_j^L)' x_i - (c_j^R)' x = d_{ij}^{T_1} - d_{ij}^{T_2}$$

$$x_i, d_{ij}^{T_1}, d_{ij}^{T_2}, d_{ij}^{L_1}, d_{ij}^{L_2}, d_{ij}^{R_1}, d_{ij}^{R_2} \geq 0$$

$$c_j^L, c_j^R \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, N \ , \ j = 1, \ldots, M$$

problemi çözülür.

Modelde işlem kolaylığı sağlanması ve bir doğrusal programlama problemi elde etmek istenmesi nedeniyle a = 1 alınmıştır. Bu problemin çözümü sonucunda elde edilen (d, α, c) değişkenleri optimal çözümü vermektedir (Kuruüzüm 1990).

4.2. Uygulama

Çalışmanın uygulama aşamasında gözlem sayısı beş ve dokuz olan iki örnek ele alınmıştır. Her iki örnek için öncelikle EKK ve MİNMAD yöntemi kullanılarak kestirim denklemleri elde edilmiş ve hatalar gözlenmiştir. Daha sonra bağımlı değişkenler bulanıklaştırılıp MİNMAD yöntemi uygulanarak kestirim denklemleri elde edilmiştir. Merkez ile sağ ve sol sapmalara ilişkin değerler gözlenmiştir.

Örnek 1:

Bir bilgisayar şirketi gelecek ihtiyaçları doğrultusunda doğru malzemeyi belirlemek için yedi benzer şirketten veri toplamıştır. Aşağıdaki veriler göz önüne alınarak çok değişkenli çoklu regresyon modeli kestirilecektir (Wichern and Johnson 1988).

X_1 :Müşteri siparişleri (binde),

X_2 :Eklenen-çıkarılan parça sayısı (binde),

Y_1 :Merkezi Süreç birimi (CPU) süresi (saatte),

Y_2 :Disk girdi-çıktı kapasitesi

Çizelge 4.1 Bağımlı ve bağımsız değişkene ilişkin değerler

Gözlem no	1	2	3	4	5
Y_1	141.5	168.9	154.8	146.5	172.8
Y_2	301.8	396.1	328.2	307.4	362.4
X_1	123.5	146.1	133.9	128.5	151.5
X_2	2.108	9.213	1.905	0.815	1.061

Y bağımlı değişkenleri ve X bağımsız değişkenleri göstermek üzere, çok değişkenli çoklu regresyon modeli hem kesim (2.1)' de tanımlanan EKK hem de kesim (2.3)' te tanımlanan MİNMAD yöntemleri kullanılarak kestirilecektir.

EKK yöntemi kullanılarak model parametrelerinin tahmin edicileri,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} XY$$

ile kestirim modelleri,

$$\hat{y}_1 = 2.1615 + 1.1265 x_1 + 0.2467 x_2$$

$$\hat{y}_2 = -0.0311 + 2.3572 x_1 + 5.6218 x_2$$

olarak elde edilmiştir. Burada $\hat{\varepsilon}$ hata terimlerine ilişkin değerler Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4.2 Y_1 ve Y_2 için hata değerleri

$\hat{\varepsilon}_{11}$	-0.3042	$\hat{\varepsilon}_{21}$	-1.1338
$\hat{\varepsilon}_{12}$	-0.1159	$\hat{\varepsilon}_{22}$	-0.4940
$\hat{\varepsilon}_{13}$	1.3301	$\hat{\varepsilon}_{23}$	1.8924
$\hat{\varepsilon}_{14}$	-0.6178	$\hat{\varepsilon}_{24}$	-0.0508
$\hat{\varepsilon}_{15}$	-0.2879	$\hat{\varepsilon}_{25}$	-0.6494

Y_1 ve Y_2 bağımlı değişkenlerine ait hata kareleri toplamları,

$\sum_{i=1}^{5} \hat{\varepsilon}_{1i}^2 = 2.34$ ve $\sum_{i=1}^{5} \hat{\varepsilon}_{2i}^2 = 5.53$ olarak elde edilmiştir.

Çok değişkenli çoklu regresyon için MİNMAD problemi,

$$P_1 : \; Minimize \sum_{i=1}^{5} d_{1i} + \sum_{i=1}^{5} d_{2i}$$

$$P_2 : \; Minimize \sum_{i=1}^{5} d_{3i} + \sum_{i=1}^{5} d_{4i}$$

$$\begin{aligned}
&(\beta'_{01} - \beta''_{01}) + 123.5(\beta'_{11} - \beta''_{11}) + 2.108(\beta'_{21} - \beta''_{21}) + d_{11} - d_{21} = 141.5 \\
&(\beta'_{01} - \beta''_{01}) + 146.1(\beta'_{11} - \beta''_{11}) + 9.213(\beta'_{21} - \beta''_{21}) + d_{12} - d_{22} = 168.9 \\
&(\beta'_{01} - \beta''_{01}) + 133.9(\beta'_{11} - \beta''_{11}) + 1.905(\beta'_{21} - \beta''_{21}) + d_{13} - d_{23} = 154.8 \\
&(\beta'_{01} - \beta''_{01}) + 128.5(\beta'_{11} - \beta''_{11}) + 0.815(\beta'_{21} - \beta''_{21}) + d_{14} - d_{24} = 146.5 \\
&(\beta'_{01} - \beta''_{01}) + 151.5(\beta'_{11} - \beta''_{11}) + 1.061(\beta'_{21} - \beta''_{21}) + d_{15} - d_{25} = 172.8 \\
&(\beta'_{02} - \beta''_{02}) + 123.5(\beta'_{12} - \beta''_{12}) + 2.108(\beta''_{22} - \beta''_{22}) + d_{31} - d_{41} = 301.8 \\
&(\beta'_{02} - \beta''_{02}) + 146.1(\beta'_{12} - \beta''_{12}) + 9.213(\beta''_{22} - \beta''_{22}) + d_{32} - d_{42} = 396.1 \\
&(\beta'_{02} - \beta''_{02}) + 133.9(\beta'_{12} - \beta''_{12}) + 1.905(\beta''_{22} - \beta''_{22}) + d_{33} - d_{43} = 328.2 \\
&(\beta'_{02} - \beta''_{02}) + 128.5(\beta'_{12} - \beta''_{12}) + 0.815(\beta''_{22} - \beta''_{22}) + d_{34} - d_{44} = 307.4 \\
&(\beta'_{02} - \beta''_{02}) + 151.5(\beta'_{12} - \beta''_{12}) + 1.061(\beta''_{22} - \beta''_{22}) + d_{35} - d_{45} = 362.4
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

$$\begin{aligned}
&d_{11}, d_{21}, \ldots, d_{15}, d_{25} \geq 0 \\
&d_{31}, d_{41}, \ldots, d_{35}, d_{45} \geq 0 \\
&\beta'_{01}, \beta''_{01}, \beta'_{11}, \beta''_{11}, \beta'_{21}, \beta''_{21} \geq 0 \\
&\beta'_{02}, \beta''_{02}, \beta'_{12}, \beta''_{12}, \beta'_{22}, \beta''_{22} \geq 0
\end{aligned}$$

biçiminde ele alınır.

Bu problem, bir çok amaçlı doğrusal programlama problemidir. Bu problemin çözümü için çok amaçlı doğrusal programlama yöntemlerinden Global Kriter Yöntemi algoritması uygulanacaktır.

Algoritma

Adım 1

(4.1) ile verilen çok amaçlı programlama problemindeki P_1 ve P_2 amaçları aynı kısıtlar doğrultusunda her biri ayrı ayrı çözülerek,

$$P_1(d^*) = 1.916393$$
$$P_2(d^*) = 3.314585$$

$P_1(d^*)$ ve $P_2(d^*)$ ideal çözümleri elde edilir.

Adım 2

Adım 1' de elde edilen ideal çözümler kullanılarak ve,

$$Min \sum_{j=1}^{2} \left[\frac{P_j(d) - P_j(d^*)}{P_j(d^*)} \right]^1$$

problemine (4.2.1)' deki kısıtlar eklenerek çözüm yapıldığında çok değişkenli çoklu regresyon modeli,

$$\hat{y}_1 = 1.6371 + 1.1279x_1 + 0.2687x_2$$
$$\hat{y}_2 = 3.2934 + 2.3305x_1 + 5.5777x_2$$

biçiminde elde edilmiştir

Burada $\hat{\varepsilon}_{1i}$ ve $\hat{\varepsilon}_{2i}$ değerleri,

$\hat{\varepsilon}_{1i} = d_{1i} - d_{2i}$ ve $\hat{\varepsilon}_{2i} = d_{3i} - d_{4i}$, (i = 1,…,5)

eşitliklerinden elde edilebilir. Bu değerler Çizelge 4.3 de verilmiştir.

Çizelge 4.3 Çok amaçlı MİNMAD probleminin Global Kriter yöntemi ile çözülmesinden elde edilen hatalar

$\hat{\varepsilon}_{11}$	0	$\hat{\varepsilon}_{21}$	-1.2880
$\hat{\varepsilon}_{12}$	0	$\hat{\varepsilon}_{22}$	0
$\hat{\varepsilon}_{13}$	1.6243	$\hat{\varepsilon}_{23}$	2.0261
$\hat{\varepsilon}_{14}$	-0.2920	$\hat{\varepsilon}_{24}$	0
$\hat{\varepsilon}_{15}$	0	$\hat{\varepsilon}_{25}$	0

Y_1 ve Y_2 bağımlı değişkenlerine ait hata kareler toplamları,

$\sum_{i=1}^{5} \hat{\varepsilon}_{1i}^2 = 2.72 \qquad \sum_{j=1}^{5} \hat{\varepsilon}_{2i}^2 = 5.76 \quad (i=1,\ldots,5)$

olarak elde edilmiştir.

Y bağımlı değişkenleri ve X bağımsız değişkenleri göstermek üzere çok değişkenli çoklu regresyon modeli, bulanık çok amaçlı MİDMAD yöntemi kullanılarak kestirilecektir. Burada bağımlı değişkenlere ilişkin değerler bulanıklaştırılmıştır. Literatürdeki kullanım göz önüne alınarak, gözlem değerlerinin altıda biri alınıp simetrik üçgensel bulanık sayılar haline getirilmiştir. Değişkenlere ilişkin veriler Çizelge 4.4'te verilmiştir.

X_1 :Müşteri siparişlerini (binde),

X_2 : Eklenen-çıkarılan parça sayısını (binde),

Y_1 :Merkezi Süreç birimi (CPU) süresini (saatte),

Y_2 :Disk girdi-çıktı kapasitesini

göstermektedir.

Çizelge 4.4 Y bağımlı, X bağımsız değişkenlerine ilişkin değerler

No	x_{i1}	x_{i2}	$Y_{i1}^m = (y_{i1}^m, y_{i1}^L, y_{i1}^R)$	$Y_{i2}^m = (y_{i2}^m, y_{i2}^L, y_{i2}^R)$
1	123.5	2.108	(141.5 , 23.5 , 23.5)	(301,8 , 50,3 , 50,3)
2	146.1	9.213	(168.9 , 28.1 , 28.1)	(396.1 , 66 , 6)
3	133.9	1.905	(154.8 , 25.8 , 25.8)	(328.2 , 54.7 , 54.7)
4	128.5	0.815	(146.5 , 24.4 , 24.4)	(307.4 , 51.2 , 51.2)
5	151.5	1.061	(172.8 , 28.8 , 28.8)	(362.4 , 60.4 , 604.)

Bulanık çok amaçlı MİNMAD yöntemi kullanılarak amaç fonksiyonları ve kısıtlar,

$$
\begin{aligned}
P_1: \quad \min \quad J_{11}^T + J_{21} = \; & \frac{1}{4} d_{11}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{11}^{T_2} + d_{11}^{L_1} + d_{11}^{L_2} + d_{11}^{R_1} + d_{11}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{21}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{21}^{T_2} + d_{21}^{L_1} + d_{21}^{L_2} + d_{21}^{R_1} + d_{21}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{31}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{31}^{T_2} + d_{31}^{L_1} + d_{31}^{L_2} + d_{31}^{R_1} + d_{31}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{41}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{41}^{T_2} + d_{41}^{L_1} + d_{41}^{L_2} + d_{41}^{R_1} + d_{41}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{51}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{51}^{T_2} + d_{51}^{L_1} + d_{51}^{L_2} + d_{51}^{R_1} + d_{51}^{R_2}
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

$$P_2 \ : \ \min \ J_{12}^T + J_{22} = \frac{1}{4} d_{12}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{12}^{T_2} + d_{12}^{L_1} + d_{12}^{L_2} + d_{12}^{R_1} + d_{12}^{R_2} +$$
$$\frac{1}{4} d_{22}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{22}^{T_2} + d_{22}^{L_1} + d_{22}^{L_2} + d_{22}^{R_1} + d_{22}^{R_2} +$$
$$\frac{1}{4} d_{32}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{32}^{T_2} + d_{32}^{L_1} + d_{32}^{L_2} + d_{32}^{R_1} + d_{32}^{R_2} +$$
$$\frac{1}{4} d_{42}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{42}^{T_2} + d_{42}^{L_1} + d_{42}^{L_2} + d_{42}^{R_1} + d_{42}^{R_2} +$$
$$\frac{1}{4} d_{52}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{52}^{T_2} + d_{52}^{L_1} + d_{52}^{L_2} + d_{52}^{R_1} + d_{52}^{R_2}$$

$$23.5 - c_{01}^L - 123.5 c_{11}^L - 2.108 c_{21}^L = d_{11}^{L_1} - d_{11}^{L_2}$$
$$28.1 - c_{01}^L - 146.1 c_{11}^L - 9.213 c_{21}^L = d_{21}^{L_1} - d_{21}^{L_2}$$
$$25.8 - c_{01}^L - 133.9 c_{11}^L - 1.905 c_{21}^L = d_{31}^{L_1} - d_{31}^{L_2}$$
$$24.4 - c_{01}^L - 128.5 c_{11}^L - 0.815 c_{21}^L = d_{41}^{L_1} - d_{41}^{L_2}$$
$$28.8 - c_{01}^L - 151.5 c_{11}^L - 1.061 c_{21}^L = d_{51}^{L_1} - d_{51}^{L_2}$$

$$23.5 - c_{01}^R - 123.5 c_{11}^R - 2.108 c_{21}^R = d_{11}^{R_1} - d_{11}^{R_2}$$
$$28.1 - c_{01}^R - 146.1 c_{11}^R - 9.213 c_{21}^R = d_{21}^{R_1} - d_{21}^{R_2}$$
$$25.8 - c_{01}^R - 133.9 c_{11}^R - 1.905 c_{21}^R = d_{31}^{R_1} - d_{31}^{R_2}$$
$$24.4 - c_{01}^R - 128.5 c_{11}^R - 0.815 c_{21}^R = d_{41}^{R_1} - d_{41}^{R_2}$$
$$28.8 - c_{01}^R - 151.5 c_{11}^R - 1.061 c_{21}^R = d_{51}^{R_1} - d_{51}^{R_2}$$

$$118 \geq \alpha_{01} + 123.5\alpha_{11} + 2.108\alpha_{21} - c_{01}^L - 123.5 c_{11}^L - 2.108 c_{21}^L$$
$$140.8 \geq \alpha_{01} + 146.1\alpha_{11} + 9.213\alpha_{21} - c_{01}^L - 146.1 c_{11}^L - 9.213 c_{21}^L$$
$$129 \geq \alpha_{01} + 133.9\alpha_{11} + 1.905\alpha_{21} - c_{01}^L - 133.9 c_{11}^L - 1.905 c_{21}^L$$
$$122.1 \geq \alpha_{01} + 128.5\alpha_{11} + 0.815\alpha_{21} - c_{01}^L - 128.5 c_{11}^L - 0.815 c_{21}^L$$
$$144 \geq \alpha_{01} + 151.5\alpha_{11} + 1.061\alpha_{21} - c_{01}^L - 151.5 c_{11}^L - 1.061 c_{21}^L$$

$$165 \leq \alpha_{01} + 123.5\alpha_{11} + 2.108\alpha_{21} + c_{01}^R + 123.5 c_{11}^R + 2.108 c_{21}^R$$

$$197 \le \alpha_{01} + 146.1\alpha_{11} + 9.213\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 146.1c_{11}^{R} + 9.213c_{21}^{R}$$

$$180.6 \le \alpha_{01} + 133.9\alpha_{11} + 1.905\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 133.9c_{11}^{R} + 1.905c_{21}^{R}$$

$$170.9 \le \alpha_{01} + 128.5\alpha_{11} + 0.815\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 128.5c_{11}^{R} + 0.815c_{21}^{R}$$

$$201.6 \le \alpha_{01} + 151.5\alpha_{11} + 1.061\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 151.5c_{11}^{R} + 1.061c_{21}^{R}$$

$$566 - 4\alpha_{01} - 494\alpha_{11} - 8.432\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 123.5c_{11}^{L} + 2.108c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 123.5c_{11}^{R} - 2.108c_{21}^{R} = d_{11}^{T_1} - d_{11}^{T_2}$$

$$675.6 - 4\alpha_{01} - 584.4\alpha_{11} - 36.85\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 146.1c_{11}^{L} + 9.213c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 146.1c_{11}^{R} - 9.213c_{21}^{R} = d_{21}^{T_1} - d_{21}^{T_2}$$

$$619.2 - 4\alpha_{01} - 535.6\alpha_{11} - 7.62\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 133.9c_{11}^{L} + 1.905c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 133.9c_{11}^{R} - 1.905c_{21}^{R} = d_{31}^{T_1} - d_{31}^{T_2}$$

$$586 - 4\alpha_{01} - 514\alpha_{11} - 3.26\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 128.5c_{11}^{L} + 0.815c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 128.5c_{11}^{R} - 0.815c_{21}^{R} = d_{41}^{T_1} - d_{41}^{T_2}$$

$$691.2 - 4\alpha_{01} - 606\alpha_{11} - 4.244\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 151.5c_{11}^{L} + 1.061c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 151.5c_{11}^{R} - 1.66c_{21}^{R} = d_{51}^{T_1} - d_{51}^{T_2}$$

$$50.3 - c_{02}^{L} - 123.5c_{12}^{L} - 2.108c_{22}^{L} = d_{12}^{L_1} - d_{12}^{L_2}$$

$$66 - c_{02}^{L} - 146.1c_{12}^{L} - 9.213c_{22}^{L} = d_{22}^{L_1} - d_{22}^{L_2}$$

$$54.7 - c_{02}^{L} - 133.9c_{12}^{L} - 1.905c_{22}^{L} = d_{32}^{L_1} - d_{32}^{L_2}$$

$$51.2 - c_{02}^{L} - 128.5c_{12}^{L} - 0.815c_{22}^{L} = d_{42}^{L_1} - d_{42}^{L_2}$$

$$60.4 - c_{02}^{L} - 151.5c_{12}^{L} - 1.061c_{22}^{L} = d_{52}^{L_1} - d_{52}^{L_2}$$

$$50.3 - c_{02}^{R} - 123.5c_{12}^{R} - 2.108c_{22}^{R} = d_{12}^{R_1} - d_{12}^{R_2}$$

$$66 - c_{02}^{R} - 146.1c_{12}^{R} - 9.213c_{22}^{R} = d_{22}^{R_1} - d_{22}^{R_2}$$

$$547. - c_{02}^{R} - 133.9c_{12}^{R} - 1.905c_{22}^{R} = d_{32}^{R_1} - d_{32}^{R_2}$$

$$51.2 - c_{02}^{R} - 128.5c_{12}^{R} - 0.815c_{22}^{R} = d_{42}^{R_1} - d_{42}^{R_2}$$

$$60.4 - c_{02}^{R} - 151.5c_{12}^{R} - 1.061c_{22}^{R} = d_{52}^{R_1} - d_{52}^{R_2}$$

$$251.5 \geq \alpha_{02} + 123.5\alpha_{12} + 2.108\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 123.5c_{12}^{L} - 2.108c_{22}^{L}$$
$$330.1 \geq \alpha_{02} + 146.1\alpha_{12} + 9.213\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 146.1c_{12}^{L} - 9.213c_{22}^{L}$$
$$273.5 \geq \alpha_{02} + 133.9\alpha_{12} + 1.905\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 133.9c_{12}^{L} - 1.905c_{22}^{L}$$
$$256.2 \geq \alpha_{02} + 128.5\alpha_{12} + 0.815\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 128.5c_{12}^{L} - 0.815c_{22}^{L}$$
$$302 \geq \alpha_{02} + 151.5\alpha_{12} + 1.061\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 151.5c_{12}^{L} - 1.061c_{22}^{L}$$

$$352.1 \leq \alpha_{02} + 123.5\alpha_{12} + 2.108\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 123.5c_{12}^{R} + 2.108c_{22}^{R}$$
$$462.1 \leq \alpha_{02} + 146.1\alpha_{12} + 9.213\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 126.1c_{12}^{R} + 9.213c_{22}^{R}$$
$$382.9 \leq \alpha_{02} + 133.9\alpha_{12} + 1.905\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 1339c_{12}^{R} + 1.905c_{22}^{R}$$
$$358.6 \leq \alpha_{02} + 128..5\alpha_{12} + 0.815\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 128.5c_{12}^{R} + 0.815c_{22}^{R}$$
$$422.8 \leq \alpha_{02} + 151.5\alpha_{12} + 1.061\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 151.5c_{12}^{R} + 1.061c_{22}^{R}$$

$$1207.2 - 4\alpha_{02} - 494\alpha_{12} - 8.432\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 123.5c_{12}^{L} + 2.108c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 123.5c_{12}^{R} - 2.108c_{22}^{R} = d_{12}^{T_1} - d_{12}^{T_2}$$
$$1584.4 - 4\alpha_{02} - 584.4\alpha_{12} - 36.852\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 146.1c_{12}^{L} + 9.213c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 146.1c_{12}^{R} - 9.213c_{22}^{R} = d_{22}^{T_1} - d_{22}^{T_2}$$
$$1312.8 - 4\alpha_{02} - 535.6\alpha_{12} - 7.62\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 133.9c_{12}^{L} + 1.905.c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 133.9c_{12}^{R} - 1.905c_{22}^{R} = d_{32}^{T_1} - d_{32}^{T_2}$$
$$1229.6 - 4\alpha_{02} - 514\alpha_{12} - 3.26\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 128.5c_{12}^{L} + 0.815c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 128.5c_{12}^{R} - 0.815c_{22}^{R} = d_{42}^{T_1} - d_{42}^{T_2}$$
$$1449.6 - 4\alpha_{02} - 606\alpha_{12} - 4.244\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 151.5c_{12}^{L} + 1.061c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 151.5c_{12}^{R} - 1.061c_{22}^{R} = d_{52}^{T_1} - d_{52}^{T_2}$$

$$d_{i1}^{T_1}, d_{i1}^{T_2}, d_{i1}^{L_1}, d_{i1}^{L_2}, d_{i1}^{R_1}, d_{i1}^{R_2} \geq 0$$
$$d_{i2}^{T_1}, d_{i2}^{T_2}, d_{i2}^{L_1}, d_{i2}^{L_2}, d_{i2}^{R_1}, d_{i2}^{R_2} \geq 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,5$$
$$c_{01}^{L}, c_{11}^{L}, c_{21}^{L}, c_{01}^{R}, c_{11}^{R}, c_{21}^{R} \geq 0$$

biçiminde oluşturulur.

Bu problem bir çok amaçlı doğrusal programlama problemidir. Bu çok amaçlı doğrusal programlama probleminin çözümü için Global Kriter yöntemi algoritması kullanılmıştır.

Algoritma

Adım 1:

Bulanık çok amaçlı MİNMAD problemi için (4.2)' de verilen P_1 ve P_2 amaçlarının ayrı ayrı çözülmesi ile

$P_1(d^*) = 11.00974$

$P_2(d^*) = 15.66515$

ideal çözümleri elde edilir.

Adım 2:

Adım 1' de elde edilen ideal çözümler yardımıyla,

$$Min \sum_{j=1}^{2} \left[\frac{P_j(d) - P_j(d^*)}{P_j(d^*)} \right]^1$$

ifadesinde değerler yerine konularak amaç fonksiyonu ve kısıtlar,

$$\begin{aligned}
\min P' = \{ ((& \frac{1}{4} d_{11}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{11}^{T_2} + d_{11}^{L_1} + d_{11}^{L_2} + d_{11}^{R_1} + d_{11}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{21}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{21}^{T_2} + d_{21}^{L_1} + d_{21}^{L_2} + d_{21}^{R_1} + d_{21}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{31}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{31}^{T_2} + d_{31}^{L_1} + d_{31}^{L_2} + d_{31}^{R_1} + d_{31}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{41}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{41}^{T_2} + d_{41}^{L_1} + d_{41}^{L_2} + d_{41}^{R_1} + d_{41}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{51}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{51}^{T_2} + d_{51}^{L_1} + d_{51}^{L_2} + d_{51}^{R_1} + d_{51}^{R_2} - 11.00974) / 11.00974) + \\
& ((\frac{1}{4} d_{12}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{12}^{T_2} + d_{12}^{L_1} + d_{12}^{L_2} + d_{12}^{R_1} + d_{12}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{22}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{22}^{T_2} + d_{22}^{L_1} + d_{22}^{L_2} + d_{22}^{R_1} + d_{22}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{32}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{32}^{T_2} + d_{32}^{L_1} + d_{32}^{L_2} + d_{32}^{R_1} + d_{32}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{42}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{42}^{T_2} + d_{42}^{L_1} + d_{42}^{L_2} + d_{42}^{R_1} + d_{42}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{52}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{52}^{T_2} + d_{52}^{L_1} + d_{52}^{L_2} + d_{52}^{R_1} + d_{52}^{R_2} - 15.66515) / 15.66515) \}
\end{aligned}$$

$$y_i^L - (c^L)' x_i = d_i^{L_1} - d_i^{L_2}$$
$$y_i^R - (c^R)' x_i = d_i^{R_1} - d_i^{R_2}$$
$$y_i^m - (1-\lambda) y_i^L \geq \alpha' x_i - (c^L)' x_i \quad , \quad i = 1,...,N$$
$$y_i^m + (1-\lambda) y_i^R \leq \alpha' x_i + (c^R)' x_i \quad , \quad i = 1,...,N$$
$$x_i , d_i^{T_1}, d_i^{T_2}, d_i^{L_1}, d_i^{L_2}, d_i^{R_1}, d_i^{R_2} \geq 0$$
$$c^L , c^R \geq 0 \qquad i = 1,...,N$$

biçiminde oluşturulur. Elde edilen bu problem tek amaçlı bir optimizasyon problemidir. Kısıtlar doğrultusunda çözüm yapıldığında amaç fonksiyonu değeri,

$$\min \ P' = -0.3323.10^{-6}$$

olarak elde edilmiştir.

Merkez , sağ ve sol yayılımlara ilişkin sapmalar gözlenmiştir(Çizelge 4.5 ve 4.6).

Çizelge 4.5 Y_1 için merkez, sol ve sağ yayılıma ilişkin sapmalar
$(d_{ij}^T , d_{ij}^L , d_{ij}^R)$ $i = 1,...,5$ $j = 1$

Merkez	Sapma değerleri	Sol yayılım	Sapma Değerleri	Sağ yayılım	Sapma Değerleri
$d_{11}^{T_1} - d_{11}^{T_2}$	-3.0954	$d_{11}^{L_1} - d_{11}^{L_2}$	-0.5190	$d_{11}^{R_1} - d_{11}^{R_2}$	-2.9484
$d_{21}^{T_1} - d_{21}^{T_2}$	0	$d_{21}^{L_1} - d_{21}^{L_2}$	0	$d_{21}^{R_1} - d_{21}^{R_2}$	-0.2464
$d_{31}^{T_1} - d_{31}^{T_2}$	4.5655	$d_{31}^{L_1} - d_{31}^{L_2}$	0	$d_{31}^{R_1} - d_{31}^{R_2}$	-1.5218
$d_{41}^{T_1} - d_{41}^{T_2}$	-3.7939	$d_{41}^{L_1} - d_{41}^{L_2}$	-0.4418	$d_{41}^{R_1} - d_{41}^{R_2}$	-2.4683
$d_{51}^{T_1} - d_{51}^{T_2}$	0	$d_{51}^{L_1} - d_{51}^{L_2}$	0	$d_{51}^{R_1} - d_{51}^{R_2}$	0

Çizelge 4.6 Y_2 için merkez, sol ve sağ yayılıma ilişkin sapmalar
$(d_{ij}^{T}, d_{ij}^{L}, d_{ij}^{R})$ $i = 1,...,5$ $j = 2$

Merkez	Sapma değerleri	Sol yayılım	Sapma Değerleri	Sağ yayılım	Sapma değerleri
$d_{12}^{T_1} - d_{12}^{T_2}$	-6.8045	$d_{12}^{L_1} - d_{12}^{L_2}$	-0.7564	$d_{12}^{R_1} - d_{12}^{R_2}$	-4.5351
$d_{22}^{T_1} - d_{22}^{T_2}$	0	$d_{22}^{L_1} - d_{22}^{L_2}$	0	$d_{22}^{R_1} - d_{22}^{R_2}$	0
$d_{32}^{T_1} - d_{32}^{T_2}$	-7.0743	$d_{32}^{L_1} - d_{32}^{L_2}$	0	$d_{32}^{R_1} - d_{32}^{R_2}$	-2.3581
$d_{42}^{T_1} - d_{42}^{T_2}$	-1.4002	$d_{42}^{L_1} - d_{42}^{L_2}$	-0.4951	$d_{42}^{R_1} - d_{42}^{R_2}$	-3.7004
$d_{52}^{T_1} - d_{52}^{T_2}$	0	$d_{52}^{L_1} - d_{52}^{L_2}$	0	$d_{52}^{R_1} - d_{52}^{R_2}$	0

Kestirilen modele ilişkin katsayılar Global Kriter yöntemi kullanılarak çözülmüş ve elde edilen değerler Çizelge 4.7' de verilmiştir.

Çizelge 4.7 Y_1 ve Y_2 için kestirilen modele ilişkin katsayılar

$(\alpha_{01}, c_{01}^{L}, c_{01}^{R})$	(2.6173 , 2.7435 , 16.0762)
$(\alpha_{11}, c_{11}^{L}, c_{11}^{R})$	1.1215 , 0.1717, 0.0839)
$(\alpha_{21}, c_{21}^{L}, c_{21}^{R})$	(0.2569 , 0.2793 , 0)
$(\alpha_{02}, c_{02}^{L}, c_{02}^{R})$	(0.3282 , 3.5828 ,24.6443)
$(\alpha_{12}, c_{12}^{L}, c_{12}^{R})$	(2.3500 , 0.3685 , 0.2301)
$(\alpha_{22}, c_{22}^{L}, c_{22}^{R})$	(5.6906 , 0.9310 , 0.8393)

Y_1 ve Y_2 değişkenleri için kestirilen model denklemleri ,

$$Y_{i1}^{*} = (\alpha_{01}, c_{01}^{L}, c_{01}^{R}) + (\alpha_{11}, c_{11}^{L}, c_{11}^{R})\, x_1 + (\alpha_{21}, c_{21}^{L}, c_{21}^{R}) x_2$$
$$Y_{i2}^{*} = (\alpha_{02}, c_{02}^{L}, c_{02}^{R}) + (\alpha_{12}, c_{12}^{L}, c_{12}^{R})\, x_1 + (\alpha_{22}, c_{22}^{L}, c_{22}^{R}) x_2$$

biçimindedir.

Sayısal değerler yerine konulduğunda, kestirilen model denklemleri,

$$y_{i1}^{*} = (2.6173, 2.7435, 16.0762) + (1.1215, 0.1717, 0.0839)\,x_1 + (0.2569, 0.2793, 0)x_2$$

$$y_{i2}^{*} = (0.3282, 3.5825, 24.6443) + (2.35, 0.3685, 0.2301)\,x_1 + (5.6906, 0.931, 0.8393)x_2$$

biçiminde elde edilir (Çizelge 4.7).

Y_1 için sapmaların kareleri toplamı,

$$\sum_{i=1}^{5}(d_{i1}^{T_1} - d_{i1}^{T_2})^2 = 44.81 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5}(d_{i1}^{L_1} - d_{i1}^{L_2})^2 = 0.46 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5}(d_{i1}^{R_1} - d_{i1}^{R_2})^2 = 17.16$$

olarak,

Y_2 için sapmaların kareleri toplamı,

$$\sum_{i=1}^{5}(d_{i2}^{T_1} - d_{i2}^{T_2})^2 = 98.30 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5}(d_{i2}^{L_1} - d_{i2}^{L_2})^2 = 0.81 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5}(d_{i2}^{R_1} - d_{i2}^{R_2})^2 = 39.82$$

olarak elde edilmiştir.

Örnek 2

Y bağımlı değişkenleri ve X bağımsız değişkenleri göstermek üzere çok değişkenli çoklu regresyon modeli MİNMAD yöntemi kullanılarak kestirilecektir. Problem önce kesim (2.1)' de verilen EKK yöntemi ile ve (2.3.)' te verilen MİNMAD yöntemiyle çözülecektir. Daha sonra Y bağımlı değişkenlerin bulanık olması durumunda bulanık çok amaçlı MİNMAD yöntemi uygulanacak ve kestirilen model denklemleri ile hatalar gözlenecektir

Dokuz çocuğa ilişkin,

Y_1 - göğüs çevresi,

Y_2 - dirsek üstü kol çevresi,

X_1 - boy uzunluğu (cm cinsinden),

X_2 - yaş (ay olarak),

aşağıda verilmiştir (Tatlıdil 1996).

Çizelge 4.8 Y bağımlı, X bağımsız değişkenlere ilişkin değerler

Gözlem no	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_1	58.4	59.2	60.3	57.4	59.5	58.1	58.0	55.5	59.2
Y_2	14.0	15.0	15.0	13.0	14.0	14.5	12.5	11.0	12.5
X_1	80	75	78	75	79	78	75	64	80
X_2	21	27	27	22	26	26	23	22	22

EKK yöntemi ile çözüm yapıldığında, çok değişkenli çoklu regresyon modelinin kestirimleri,

$$\hat{y}_1 = 39.777 + 0.204 x_1 + 0.254 x_2$$

$$\hat{y}_2 = -5.526 + 0.104 x_1 + 0.347 x_2$$

olarak elde edilmiştir.

Çizelge 4.9 Y_1 ve Y_2 bağımlı değişkenlerine ait hatalar

$\hat{\varepsilon}_{11}$	-0.031	$\hat{\varepsilon}_{21}$	3.919
$\hat{\varepsilon}_{12}$	0.265	$\hat{\varepsilon}_{22}$	3.357
$\hat{\varepsilon}_{13}$	0.753	$\hat{\varepsilon}_{23}$	3.045
$\hat{\varepsilon}_{14}$	-0.265	$\hat{\varepsilon}_{24}$	3.092
$\hat{\varepsilon}_{15}$	-0.003	$\hat{\varepsilon}_{25}$	2.288
$\hat{\varepsilon}_{16}$	-1.193	$\hat{\varepsilon}_{26}$	2.892
$\hat{\varepsilon}_{17}$	0.081	$\hat{\varepsilon}_{27}$	2.245
$\hat{\varepsilon}_{18}$	0.079	$\hat{\varepsilon}_{28}$	2.236
$\hat{\varepsilon}_{19}$	0.515	$\hat{\varepsilon}_{29}$	2.072

Y_1 ve Y_2 bağımlı değişkenlerine ait hata kareleri toplamları,

$$\sum_{i=1}^{9} \hat{\varepsilon}_{1i}^2 = 2.409 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{9} \hat{\varepsilon}_{2i}^2 = 73.392$$

olarak elde edilmiştir.

MİNMAD yöntemi kullanılarak, verilere göre çok değişkenli çoklu regresyon modeli çok amaçlı MİNMAD problemine dönüştürülür (Pehlivan-Yapıcı ve Apaydın 2003).

$$P_1 : Min \sum_{i=1}^{9} d_{1i} + \sum_{i=1}^{9} d_{2i}$$

$$P_2 : Min \sum_{i=1}^{9} d_{3i} + \sum_{i=1}^{9} d_{4i}$$

$$(\beta'_{01} - \beta''_{01}) + 80(\beta'_{11} - \beta''_{11}) + 21(\beta'_{21} - \beta''_{21}) + d_{11} - d_{21} = 58.4$$

$$(\beta'_{01} - \beta''_{01}) + 75(\beta'_{11} - \beta''_{11}) + 27(\beta'_{21} - \beta''_{21}) + d_{12} - d_{22} = 59.2$$

$$(\beta'_{01} - \beta''_{01}) + 78(\beta'_{11} - \beta''_{11}) + 27(\beta'_{21} - \beta''_{21}) + d_{13} - d_{23} = 60.3$$

$$(\beta'_{01} - \beta''_{01}) + 75(\beta'_{11} - \beta''_{11}) + 22(\beta'_{21} - \beta''_{21}) + d_{14} - d_{24} = 57.4$$

$$(\beta'_{01} - \beta''_{01}) + 79(\beta'_{11} - \beta''_{11}) + 26(\beta'_{21} - \beta''_{21}) + d_{15} - d_{25} = 59.5$$

$$(\beta'_{01}-\beta''_{01})+78(\beta'_{11}-\beta''_{11})+26(\beta''_{21}-\beta''_{21})+d_{16}-d_{26}=58.1$$

$$(\beta'_{01}-\beta''_{01})+75(\beta'_{11}-\beta''_{11})+23(\beta''_{21}-\beta''_{21})+d_{17}-d_{27}=58.0$$

$$(\beta'_{01}-\beta''_{01})+64(\beta'_{11}-\beta''_{11})+22(\beta''_{21}-\beta''_{21})+d_{18}-d_{28}=55.5$$

$$(\beta'_{01}-\beta''_{01})+80(\beta'_{11}-\beta''_{11})+22(\beta''_{21}-\beta''_{21})+d_{19}-d_{29}=59.2$$

$$(\beta'_{02}-\beta''_{02})+80(\beta'_{12}-\beta''_{12})+21(\beta''_{22}-\beta''_{22})+d_{31}-d_{41}=14.0$$

$$(\beta'_{02}-\beta''_{02})+75(\beta'_{12}-\beta''_{12})+27(\beta''_{22}-\beta''_{22})+d_{32}-d_{42}=15.0$$

$$(\beta'_{02}-\beta''_{02})+78(\beta'_{12}-\beta''_{12})+27(\beta''_{22}-\beta''_{22})+d_{33}-d_{43}=15.0$$

$$(\beta'_{02}-\beta''_{02})+75(\beta'_{12}-\beta''_{12})+22(\beta''_{22}-\beta''_{22})+d_{34}-d_{44}=13.0$$

$$(\beta'_{02}-\beta''_{02})+79(\beta'_{12}-\beta''_{12})+26(\beta''_{22}-\beta''_{22})+d_{35}-d_{45}=14.0$$

$$(\beta'_{02}-\beta''_{02})+78(\beta'_{12}-\beta''_{12})+26(\beta''_{22}-\beta''_{22})+d_{36}-d_{46}=14.5$$

$$(\beta'_{02}-\beta''_{02})+75(\beta'_{12}-\beta''_{12})+23(\beta''_{22}-\beta''_{22})+d_{37}-d_{47}=12.5$$

$$(\beta'_{02}-\beta''_{02})+64(\beta'_{12}-\beta''_{12})+22(\beta''_{22}-\beta''_{22})+d_{38}-d_{48}=11.0$$

$$(\beta'_{02}-\beta''_{02})+80(\beta'_{12}-\beta''_{12})+22(\beta''_{22}-\beta''_{22})+d_{39}-d_{49}=12.5$$

$$d_{11},d_{21},...,d_{19},d_{29}\geq 0$$

$$d_{31},d_{41},...,d_{39},d_{49}\geq 0$$

$$\beta'_{01},\beta''_{01},\beta'_{11},\beta''_{11},\beta'_{21},\beta''_{21}\geq 0$$

$$\beta'_{02},\beta''_{02},\beta'_{12},\beta''_{12},\beta'_{22},\beta''_{22}\geq 0$$

Global Kriter yöntemi ile çözüm yapıldığında çok değişkenli çoklu regresyon modelleri,

$$\hat{y}_1=36.100+0.200x_1+0.300x_2$$

$$\hat{y}_2=-6.857+0.107x_1+0.500x_2$$

biçiminde elde edilmiştir.

Burada $\hat{\varepsilon}_{1i}$ ve $\hat{\varepsilon}_{2i}$ değerleri,

$\hat{\varepsilon}_{1i} = d_{1i} - d_{2i}$ ve $\hat{\varepsilon}_{2i} = d_{3i} - d_{4i}$, (i = 1,2,…,9)

eşitliklerinden elde edilebilir. Bu değerler Çizelge (4.10)' da verilmiştir.

Çizelge 4.10 Çok amaçlı MİNMAD probleminin Global Kriter yöntemi ile çözülmesinden elde edilen hatalar

$\hat{\varepsilon}_{11}$	0	$\hat{\varepsilon}_{21}$	1.7857
$\hat{\varepsilon}_{12}$	0	$\hat{\varepsilon}_{22}$	0.3214
$\hat{\varepsilon}_{13}$	0.4	$\hat{\varepsilon}_{23}$	0
$\hat{\varepsilon}_{14}$	-0.3	$\hat{\varepsilon}_{24}$	0.8214
$\hat{\varepsilon}_{15}$	-0.2	$\hat{\varepsilon}_{25}$	-0.6071
$\hat{\varepsilon}_{16}$	-1.4	$\hat{\varepsilon}_{26}$	0
$\hat{\varepsilon}_{17}$	0	$\hat{\varepsilon}_{27}$	-0.1786
$\hat{\varepsilon}_{18}$	0	$\hat{\varepsilon}_{28}$	0
$\hat{\varepsilon}_{19}$	0.5	$\hat{\varepsilon}_{29}$	-0.2143

Y_1 ve Y_2 bağımlı değişkenlerine ait hata kareler toplamları,

$$\sum_{i=1}^{9} \hat{\varepsilon}_{1i}^2 = 2.409 \quad , \qquad \sum_{i=1}^{9} \hat{\varepsilon}_{2i}^2 = 4.413$$

olarak elde edilmiştir.

Y bağımlı değişkenleri ve X bağımsız değişkenleri göstermek üzere çok değişkenli çoklu regresyon modeli, çok amaçlı bulanık MİNMAD yöntemi kullanılarak kestirilecektir.Y bağımlı değişkenlerine ait verilerin altıda biri alınarak simetriküçgensel bulanık sayıya dönüştürülmüştür. Veriler Çizelge (4.11)' de verilmiştir.

Çizelge 4.11 Y bağımlı, X bağımsız değişkenlere ilişkin değerler

No	x_{i1}	x_{i2}	$Y_{i1}^m = (y_{i1}^m , y_{i1}^L , y_{i1}^R)$	$Y_{i2}^m = (y_{i2}^m , y_{i2}^L , y_{i2}^R)$
1	80	21	(58.4 , 9.7 , 9.7)	(14 , 2.3 , 2.3)
2	75	27	(59,2 , 9,8 , 9,8)	(15 , 2.5 , 2.5)
3	78	27	(60,3 , 10 , 10)	(15 , 2.5 , 2.5)
4	75	22	(57.4 , 9.5 , 9.5)	(13 , 2.1 , 2.1)
5	79	26	(59.5 , 9.9 , 9.9)	(14 , 2.3 , 2.3)
6	78	26	(58.1 , 9.6 , 9.6)	(14.5 , 2.4 , 2.4)
7	75	23	(58 , 9.6 , 9.6)	(12.5 , 2 , 2)
8	64	22	(55.5 , 9.2 , 9.2)	(11 , 1.8 , 1.8)
9	80	22	(59.2 , 9.8 , 9.8)	(12.5 , 2 , 2)

Bulanık MİNMAD yöntemi kullanılarak amaç fonksiyonları ve kısıtlar,

$$
\begin{aligned}
P_1: \quad \min \quad J_{11}^{T} + J_{21} = {} & \frac{1}{4} d_{11}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{11}^{T_2} + d_{11}^{L_1} + d_{11}^{L_2} + d_{11}^{R_1} + d_{11}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{21}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{21}^{T_2} + d_{21}^{L_1} + d_{21}^{L_2} + d_{21}^{R_1} + d_{21}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{31}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{31}^{T_2} + d_{31}^{L_1} + d_{31}^{L_2} + d_{31}^{R_1} + d_{31}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{41}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{41}^{T_2} + d_{41}^{L_1} + d_{41}^{L_2} + d_{41}^{R_1} + d_{41}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{51}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{51}^{T_2} + d_{51}^{L_1} + d_{51}^{L_2} + d_{51}^{R_1} + d_{51}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{61}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{61}^{T_2} + d_{61}^{L_1} + d_{61}^{L_2} + d_{61}^{R_1} + d_{61}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{71}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{71}^{T_2} + d_{71}^{L_1} + d_{71}^{L_2} + d_{71}^{R_1} + d_{71}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{81}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{81}^{T_2} + d_{81}^{L_1} + d_{81}^{L_2} + d_{81}^{R_1} + d_{81}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{91}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{91}^{T_2} + d_{91}^{L_1} + d_{91}^{L_2} + d_{91}^{R_1} + d_{91}^{R_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_2: \min \quad J_{12}^{T} + J_{22} = {} & \frac{1}{4} d_{12}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{12}^{T_2} + d_{12}^{L_1} + d_{12}^{L_2} + d_{12}^{R_1} + d_{12}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{22}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{22}^{T_2} + d_{22}^{L_1} + d_{22}^{L_2} + d_{22}^{R_1} + d_{22}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{32}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{32}^{T_2} + d_{32}^{L_1} + d_{32}^{L_2} + d_{32}^{R_1} + d_{32}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{42}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{42}^{T_2} + d_{42}^{L_1} + d_{42}^{L_2} + d_{42}^{R_1} + d_{42}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{52}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{52}^{T_2} + d_{52}^{L_1} + d_{52}^{L_2} + d_{52}^{R_1} + d_{52}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{62}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{62}^{T_2} + d_{62}^{L_1} + d_{62}^{L_2} + d_{62}^{R_1} + d_{62}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{72}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{72}^{T_2} + d_{72}^{L_1} + d_{72}^{L_2} + d_{72}^{R_1} + d_{72}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{82}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{82}^{T_2} + d_{82}^{L_1} + d_{82}^{L_2} + d_{82}^{R_1} + d_{82}^{R_2} + \\
& \frac{1}{4} d_{92}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{92}^{T_2} + d_{92}^{L_1} + d_{92}^{L_2} + d_{92}^{R_1} + d_{92}^{R_2}
\end{aligned}
$$

$$9.7-c_{01}^{L}-80c_{11}^{L}-21c_{21}^{L}=d_{11}^{L_1}-d_{11}^{L_2}$$
$$9.8-c_{01}^{L}-75c_{11}^{L}-27c_{21}^{L}=d_{21}^{L_1}-d_{21}^{L_2}$$
$$10-c_{01}^{L}-78c_{11}^{L}-27c_{21}^{L}=d_{31}^{L_1}-d_{31}^{L_2}$$
$$9.5-c_{01}^{L}-75c_{11}^{L}-22c_{21}^{L}=d_{41}^{L_1}-d_{41}^{L_2}$$
$$9.9-c_{01}^{L}-79c_{11}^{L}-26c_{21}^{L}=d_{51}^{L_1}-d_{51}^{L_2}$$
$$9.6-c_{01}^{L}-78c_{11}^{L}-26c_{21}^{L}=d_{61}^{L_1}-d_{61}^{L_2}$$
$$9.6-c_{01}^{L}-75c_{11}^{L}-23c_{21}^{L}=d_{71}^{L_1}-d_{71}^{L_2}$$
$$9.2-c_{01}^{L}-64c_{11}^{L}-22c_{21}^{L}=d_{81}^{L_1}-d_{81}^{L_2}$$
$$9.8-c_{01}^{L}-80c_{11}^{L}-22c_{21}^{L}=d_{91}^{L_1}-d_{91}^{L_2}$$

$$9.7-c_{01}^{R}-80c_{11}^{R}-21c_{21}^{R}=d_{11}^{R_1}-d_{11}^{R_2}$$
$$9.8-c_{01}^{R}-75c_{11}^{R}-27c_{21}^{R}=d_{21}^{R_1}-d_{21}^{R_2}$$
$$10-c_{01}^{R}-78c_{11}^{R}-27c_{21}^{R}=d_{31}^{R_1}-d_{31}^{R_2}$$
$$9.5-c_{01}^{R}-75c_{11}^{R}-22c_{21}^{R}=d_{41}^{R_1}-d_{41}^{R_2}$$
$$9.9-c_{01}^{R}-79c_{11}^{R}-26c_{21}^{R}=d_{51}^{R_1}-d_{51}^{R_2}$$
$$9.6-c_{01}^{R}-78c_{11}^{R}-26c_{21}^{R}=d_{61}^{R_1}-d_{61}^{R_2}$$
$$9.6-c_{01}^{R}-75c_{11}^{R}-23c_{21}^{R}=d_{71}^{R_1}-d_{71}^{R_2}$$
$$9.2-c_{01}^{R}-64c_{11}^{R}-22c_{21}^{R}=d_{81}^{R_1}-d_{81}^{R_2}$$
$$9.8-c_{01}^{R}-80c_{11}^{R}-22c_{21}^{R}=d_{91}^{R_1}-d_{91}^{R_2}$$

$$48.7\geq\alpha_{01}+80\alpha_{11}+21\alpha_{21}-c_{01}^{L}-80c_{11}^{L}-21c_{21}^{L}$$
$$49.4\geq\alpha_{01}+75\alpha_{11}+27\alpha_{21}-c_{01}^{L}-75c_{11}^{L}-27c_{21}^{L}$$
$$50.3\geq\alpha_{01}+78\alpha_{11}+27\alpha_{21}-c_{01}^{L}-78c_{11}^{L}-27c_{21}^{L}$$
$$47.9\geq\alpha_{01}+75\alpha_{11}+22\alpha_{21}-c_{01}^{L}-75c_{11}^{L}-22c_{21}^{L}$$
$$49.6\geq\alpha_{01}+79\alpha_{11}+26\alpha_{21}-c_{01}^{L}-79c_{11}^{L}-26c_{21}^{L}$$
$$48.5\geq\alpha_{01}+78\alpha_{11}+26\alpha_{21}-c_{01}^{L}-78c_{11}^{L}-26c_{21}^{L}$$

$$48.4 \ge \alpha_{01} + 75\alpha_{11} + 23\alpha_{21} - c_{01}^{L} - 75c_{11}^{L} - 23c_{21}^{L}$$
$$46.3 \ge \alpha_{01} + 64\alpha_{11} + 22\alpha_{21} - c_{01}^{L} - 64c_{11}^{L} - 22c_{21}^{L}$$
$$49.4 \ge \alpha_{01} + 80\alpha_{11} + 22\alpha_{21} - c_{01}^{L} - 80c_{11}^{L} - 22c_{21}^{L}$$

$$68.1 \le \alpha_{01} + 80\alpha_{11} + 21\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 80c_{11}^{R} + 21c_{21}^{R}$$
$$69 \le \alpha_{01} + 75\alpha_{11} + 27\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 75c_{11}^{R} + 27c_{21}^{R}$$
$$70.3 \le \alpha_{01} + 78\alpha_{11} + 27\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 78c_{11}^{R} + 27c_{21}^{R}$$
$$66.9 \le \alpha_{01} + 75\alpha_{11} + 22\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 75c_{11}^{R} + 22c_{21}^{R}$$
$$69.4 \le \alpha_{01} + 79\alpha_{11} + 26\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 79c_{11}^{R} + 26c_{21}^{R}$$
$$67.7 \le \alpha_{01} + 78\alpha_{11} + 26\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 78c_{11}^{R} + 26c_{21}^{R}$$
$$67.6 \le \alpha_{01} + 75\alpha_{11} + 23\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 75c_{11}^{R} + 23c_{21}^{R}$$
$$64.7 \le \alpha_{01} + 64\alpha_{11} + 22\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 64c_{11}^{R} + 22c_{21}^{R}$$
$$69 \le \alpha_{01} + 80\alpha_{11} + 22\alpha_{21} + c_{01}^{R} + 80c_{11}^{R} + 22c_{21}^{R}$$

$$233.6 - 4\alpha_{01} - 320\alpha_{11} - 84\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 80c_{11}^{L} + 21c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 80c_{11}^{R} - 21c_{21}^{R} = d_{11}^{T_1} - d_{11}^{T_2}$$
$$236.8 - 4\alpha_{01} - 300\alpha_{11} - 108\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 75c_{11}^{L} + 27c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 75c_{11}^{R} - 27c_{21}^{R} = d_{21}^{T_1} - d_{21}^{T_2}$$
$$241.2 - 4\alpha_{01} - 312\alpha_{11} - 108\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 78c_{11}^{L} + 27c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 78c_{11}^{R} - 27c_{21}^{R} = d_{31}^{T_1} - d_{31}^{T_2}$$
$$229.6 - 4\alpha_{01} - 300\alpha_{11} - 88\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 75c_{11}^{L} + 22c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 75c_{11}^{R} - 22c_{21}^{R} = d_{41}^{T_1} - d_{41}^{T_2}$$
$$238 - 4\alpha_{01} - 316\alpha_{11} - 104\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 79c_{11}^{L} + 26c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 79c_{11}^{R} - 26c_{21}^{R} = d_{51}^{T_1} - d_{51}^{T_2}$$
$$232.4 - 4\alpha_{01} - 312\alpha_{11} - 104\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 78c_{11}^{L} + 26c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 78c_{11}^{R} - 26c_{21}^{R} = d_{61}^{T_1} - d_{61}^{T_2}$$
$$232 - 4\alpha_{01} - 300\alpha_{11} - 92\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 75c_{11}^{L} + 23c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 75c_{11}^{R} - 23c_{21}^{R} = d_{71}^{T_1} - d_{71}^{T_2}$$
$$222 - 4\alpha_{01} - 256\alpha_{11} - 88\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 64c_{11}^{L} + 22c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 64c_{11}^{R} - 22c_{21}^{R} = d_{81}^{T_1} - d_{81}^{T_2}$$
$$236.8 - 4\alpha_{01} - 320\alpha_{11} - 88\alpha_{21} + c_{01}^{L} + 80c_{11}^{L} + 22c_{21}^{L} - c_{01}^{R} - 80c_{11}^{R} - 22c_{21}^{R} = d_{91}^{T_1} - d_{91}^{T_2}$$

$$2.3 - c_{02}^{L} - 80c_{12}^{L} - 21c_{22}^{L} = d_{12}^{L_1} - d_{12}^{L_2}$$
$$2.5 - c_{02}^{L} - 75c_{12}^{L} - 27c_{22}^{L} = d_{22}^{L_1} - d_{22}^{L_2}$$
$$2.5 - c_{02}^{L} - 78c_{12}^{L} - 27c_{22}^{L} = d_{32}^{L_1} - d_{32}^{L_2}$$

$$2.1 - c_{02}^{L} - 75c_{12}^{L} - 22c_{22}^{L} = d_{42}^{L_1} - d_{42}^{L_2}$$

$$2.3 - c_{02}^{L} - 79c_{12}^{L} - 26c_{22}^{L} = d_{52}^{L_1} - d_{52}^{L_2}$$

$$2.4 - c_{02}^{L} - 78c_{12}^{L} - 26c_{22}^{L} = d_{62}^{L_1} - d_{62}^{L_2}$$

$$2 - c_{02}^{L} - 75c_{12}^{L} - 23c_{22}^{L} = d_{72}^{L_1} - d_{72}^{L_2}$$

$$1.8 - c_{02}^{L} - 64c_{12}^{L} - 22c_{22}^{L} = d_{82}^{L_1} - d_{82}^{L_2}$$

$$2 - c_{02}^{L} - 80c_{12}^{L} - 22c_{22}^{L} = d_{92}^{L_1} - d_{92}^{L_2}$$

$$2.3 - c_{02}^{R} - 80c_{12}^{R} - 21c_{22}^{R} = d_{12}^{R_1} - d_{12}^{R_2}$$

$$2.5 - c_{02}^{R} - 75c_{12}^{R} - 27c_{22}^{R} = d_{22}^{R_1} - d_{22}^{R_2}$$

$$2.5 - c_{02}^{R} - 78c_{12}^{R} - 27c_{22}^{R} = d_{32}^{R_1} - d_{32}^{R_2}$$

$$2.1 - c_{02}^{R} - 75c_{12}^{R} - 22c_{22}^{R} = d_{42}^{R_1} - d_{42}^{R_2}$$

$$2.3 - c_{02}^{R} - 79c_{12}^{R} - 26c_{22}^{R} = d_{52}^{R_1} - d_{52}^{R_2}$$

$$2.4 - c_{02}^{R} - 78c_{12}^{R} - 26c_{22}^{R} = d_{62}^{R_1} - d_{62}^{R_2}$$

$$2 - c_{02}^{R} - 75c_{12}^{R} - 23c_{22}^{R} = d_{72}^{R_1} - d_{72}^{R_2}$$

$$1.8 - c_{02}^{R} - 64c_{12}^{R} - 22c_{22}^{R} = d_{82}^{R_1} - d_{82}^{R_2}$$

$$2 - c_{02}^{R} - 80c_{12}^{R} - 22c_{22}^{R} = d_{92}^{R_1} - d_{92}^{R_2}$$

$$11.7 \geq \alpha_{02} + 80\alpha_{12} + 21\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 80c_{12}^{L} - 21c_{22}^{L}$$

$$12.5 \geq \alpha_{02} + 75\alpha_{12} + 27\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 75c_{12}^{L} - 27c_{22}^{L}$$

$$12.5 \geq \alpha_{02} + 78\alpha_{12} + 27\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 78c_{12}^{L} - 27c_{22}^{L}$$

$$10.9 \geq \alpha_{02} + 75\alpha_{12} + 22\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 75c_{12}^{L} - 22c_{22}^{L}$$

$$11.7 \geq \alpha_{02} + 79\alpha_{12} + 26\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 79c_{12}^{L} - 26c_{22}^{L}$$

$$12.1 \geq \alpha_{02} + 78\alpha_{12} + 26\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 78c_{12}^{L} - 26c_{22}^{L}$$

$$10.5 \geq \alpha_{02} + 75\alpha_{12} + 23\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 75c_{12}^{L} - 23c_{22}^{L}$$

$$9.2 \geq \alpha_{02} + 64\alpha_{12} + 22\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 64c_{12}^{L} - 22c_{22}^{L}$$

$$10.5 \geq \alpha_{02} + 80\alpha_{12} + 22\alpha_{22} - c_{02}^{L} - 80c_{12}^{L} - 22c_{22}^{L}$$

$$16.3 \le \alpha_{02} + 80\alpha_{12} + 21\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 80c_{12}^{R} + 21c_{22}^{R}$$
$$17.5 \le \alpha_{02} + 75\alpha_{12} + 27\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 75c_{12}^{R} + 27c_{22}^{R}$$
$$17.5 \le \alpha_{02} + 78\alpha_{12} + 27\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 78c_{12}^{R} + 27c_{22}^{R}$$
$$15.1 \le \alpha_{02} + 75\alpha_{12} + 22\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 75c_{12}^{R} + 22c_{22}^{R}$$
$$16.3 \le \alpha_{02} + 79\alpha_{12} + 26\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 79c_{12}^{R} + 26c_{22}^{R}$$
$$16.9 \le \alpha_{02} + 78\alpha_{12} + 26\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 78c_{12}^{R} + 26c_{22}^{R}$$
$$14.5 \le \alpha_{02} + 75\alpha_{12} + 23\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 75c_{12}^{R} + 23c_{22}^{R}$$
$$12.8 \le \alpha_{02} + 64\alpha_{12} + 22\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 64c_{12}^{R} + 22c_{22}^{R}$$
$$14.5 \le \alpha_{02} + 80\alpha_{12} + 22\alpha_{22} + c_{02}^{R} + 80c_{12}^{R} + 22c_{22}^{R}$$

$$56 - 4\alpha_{02} - 320\alpha_{12} - 84\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 80c_{12}^{L} + 21c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 80c_{12}^{R} - 21c_{22}^{R} = d_{12}^{T_1} - d_{12}^{T_2}$$
$$60 - 4\alpha_{02} - 300\alpha_{12} - 108\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 75c_{12}^{L} + 27c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 75c_{12}^{R} - 27c_{22}^{R} = d_{22}^{T_1} - d_{22}^{T_2}$$
$$60 - 4\alpha_{02} - 312\alpha_{12} - 108\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 78c_{12}^{L} + 27c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 78c_{12}^{R} - 27c_{22}^{R} = d_{32}^{T_1} - d_{32}^{T_2}$$
$$52 - 4\alpha_{02} - 300\alpha_{12} - 88\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 75c_{12}^{L} + 22c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 75c_{12}^{R} - 22c_{22}^{R} = d_{42}^{T_1} - d_{42}^{T_2}$$
$$56 - 4\alpha_{02} - 316\alpha_{12} - 104\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 79c_{12}^{L} + 26c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 79c_{12}^{R} - 26c_{22}^{R} = d_{52}^{T_1} - d_{52}^{T_2}$$
$$58 - 4\alpha_{02} - 312\alpha_{12} - 104\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 78c_{12}^{L} + 26c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 78c_{12}^{R} - 26c_{22}^{R} = d_{62}^{T_1} - d_{62}^{T_2}$$
$$50 - 4\alpha_{02} - 300\alpha_{12} - 92\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 75c_{12}^{L} + 23c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 75c_{12}^{R} - 23c_{22}^{R} = d_{72}^{T_1} - d_{72}^{T_2}$$
$$44 - 4\alpha_{02} - 256\alpha_{12} - 88\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 64c_{12}^{L} + 22c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 64c_{12}^{R} - 22c_{22}^{R} = d_{82}^{T_1} - d_{82}^{T_2}$$
$$50 - 4\alpha_{02} - 320\alpha_{12} - 88\alpha_{22} + c_{02}^{L} + 80c_{12}^{L} + 22c_{22}^{L} - c_{02}^{R} - 80c_{12}^{R} - 22c_{22}^{R} = d_{92}^{T_1} - d_{92}^{T_2}$$
$$d_{i1}^{T_1}, d_{i1}^{T_2}, d_{i1}^{L_1}, d_{i1}^{L_2}, d_{i1}^{R_1}, d_{i1}^{R_2} \ge 0$$
$$d_{i2}^{T_1}, d_{i2}^{T_2}, d_{i2}^{L_1}, d_{i2}^{L_2}, d_{i2}^{R_1}, d_{i2}^{R_2} \ge 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,9$$
$$c_{01}^{L}, c_{11}^{L}, c_{21}^{L}, c_{01}^{R}, c_{11}^{R}, c_{21}^{R} \ge 0$$
$$c_{02}^{L}, c_{12}^{L}, c_{22}^{L}, c_{02}^{R}, c_{12}^{R}, c_{22}^{R} \ge 0$$

olarak elde edilir.

Bu amaçlar ve kısıtlar doğrultusunda elde edilen problem, bir çok amaçlı doğrusal programlama problemidir. Bu çok amaçlı doğrusal programlama probleminin çözümü için Global Kriter yöntemi kullanılmıştır.

Algoritma

Adım 1

Çok değişkenli çoklu regresyon modelinin çok amaçlı MİNMAD problemi olarak tasarlanması ile elde edilen çok amaçlı programlama modelinin çözümü için P_1 ve P_2 Doğrusal Programlama Problemlerinin ayrı ayrı çözülmesiyle,

$P_1(d^*)$ = 13.64305

$P_2(d^*)$ = 17.39440

ideal çözümleri elde edilir.

Adım 2

Bulunan ideal çözümler yardımıyla,

$$Min \sum_{j=1}^{M} \left[\frac{P_j(d) - P_j(d^*)}{P_j(d^*)} \right]^1$$

ifadesinde ideal çözümler yerine koyularak çok amaçlı problem tek amaçlı doğrusal bir programlama problemine dönüştürülür.

Problem,

$$\min\ P' = \Big\{ \Big(\Big(\frac{1}{4} d_{11}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{11}^{T_2} + d_{11}^{L_1} + d_{11}^{L_2} + d_{11}^{R_1} + d_{11}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{21}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{21}^{T_2} + d_{21}^{L_1} + d_{21}^{L_2} + d_{21}^{R_1} + d_{21}^{R_2} +$$

$$\frac{1}{4} d_{31}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{31}^{T_2} + d_{31}^{L_1} + d_{31}^{L_2} + d_{31}^{R_1} + d_{31}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{41}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{41}^{T_2} + d_{41}^{L_1} + d_{41}^{L_2} + d_{41}^{R_1} + d_{41}^{R_2} +$$

$$\frac{1}{4} d_{51}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{51}^{T_2} + d_{51}^{L_1} + d_{51}^{L_2} + d_{51}^{R_1} + d_{51}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{61}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{61}^{T_2} + d_{61}^{L_1} + d_{61}^{L_2} + d_{61}^{R_1} + d_{61}^{R_2} +$$

$$\frac{1}{4} d_{71}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{71}^{T_2} + d_{71}^{L_1} + d_{71}^{L_2} + d_{71}^{R_1} + d_{71}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{81}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{81}^{T_2} + d_{81}^{L_1} + d_{81}^{L_2} + d_{81}^{R_1} + d_{81}^{R_2} +$$

$$\frac{1}{4} d_{91}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{91}^{T_2} + d_{91}^{L_1} + d_{91}^{L_2} + d_{91}^{R_1} + d_{91}^{R_2} - 13.64305 \Big) / 13.64305 \Big) +$$

$$\Big(\Big(\frac{1}{4} d_{12}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{12}^{T_2} + d_{12}^{L_1} + d_{12}^{L_2} + d_{12}^{R_1} + d_{12}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{22}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{22}^{T_2} + d_{22}^{L_1} + d_{22}^{L_2} + d_{22}^{R_1} + d_{22}^{R_2} +$$

$$\frac{1}{4} d_{32}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{32}^{T_2} + d_{32}^{L_1} + d_{32}^{L_2} + d_{32}^{R_1} + d_{32}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{42}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{42}^{T_2} + d_{42}^{L_1} + d_{42}^{L_2} + d_{42}^{R_1} + d_{42}^{R_2} +$$

$$\frac{1}{4} d_{52}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{52}^{T_2} + d_{52}^{L_1} + d_{52}^{L_2} + d_{52}^{R_1} + d_{52}^{R_2} + \frac{1}{4} d_{62}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{62}^{T_2} + d_{62}^{L_1} + d_{62}^{L_2} + d_{62}^{R_1} + d_{62}^{R_2} +$$

$$\frac{1}{4} d_{72}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{72}^{T_2} + d_{72}^{L_1} + d_{72}^{L_2} + d_{72}^{R_1} + d_{72}^{R_2}\ \frac{1}{4} d_{82}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{82}^{T_2} + d_{82}^{L_1} + d_{82}^{L_2} + d_{82}^{R_1} + d_{82}^{R_2} +$$

$$\frac{1}{4} d_{92}^{T_1} + \frac{1}{4} d_{92}^{T_2} + d_{92}^{L_1} + d_{92}^{L_2} + d_{92}^{R_1} + d_{92}^{R_2} - 17.39440 \Big) / 17.39440 \Big) \Big\}$$

$$y_i^L - (c^L)' x_i = d_i^{L_1} - d_i^{L_2}$$

$$y_i^R - (c^R)' x_i = d_i^{R_1} - d_i^{R_2}$$

$$y_i^m - (1-\lambda) y_i^L \geq \alpha' x_i - (c^L)' x_i \quad , \quad i = 1, \ldots, N$$

$$y_i^m + (1-\lambda) y_i^R \leq \alpha' x_i + (c^R)' x_i \quad , \quad i = 1, \ldots, N$$

$$x_i, d_i^{T_1}, d_i^{T_2}, d_i^{L_1}, d_i^{L_2}, d_i^{R_1}, d_i^{R_2} \geq 0$$

$$c^L, c^R \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, N$$

biçiminde tek amaç olarak elde edilir. Elde edilen bu amaç fonksiyonu ve kısıtlar çözülerek aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Amaç fonksiyonu değeri,

$$\min\ P' = -0.728659.10^{7}$$

olarak elde edilmiştir.

Merkez , sağ ve sol yayılımlara ilişkin sapmalar gözlenmiştir (Çizelge 4.12).

Çizelge 4.12 Y_1 için merkez, sol ve sağ yayılıma ilişkin sapmalar
$(d_{ij}^T, d_{ij}^L, d_{ij}^R)$ $i = 1,...,9$ $j = 1$

Merkez	Sapma değerleri	Sol yayılım	Sapma Değerleri	Sağ yayılım	Sapma Değerleri
$d_{11}^{T_1} - d_{11}^{T_2}$	-0.1915909	$d_{11}^{L_1} - d_{11}^{L_2}$	0	$d_{11}^{R_1} - d_{11}^{R_2}$	-0.6461364
$d_{21}^{T_1} - d_{21}^{T_2}$	0.7551136	$d_{21}^{L_1} - d_{21}^{L_2}$	-1.318750	$d_{21}^{R_1} - d_{21}^{R_2}$	-0.4704545
$d_{31}^{T_1} - d_{31}^{T_2}$	2.748427	$d_{31}^{L_1} - d_{31}^{L_2}$	-1.264423	$d_{31}^{R_1} - d_{31}^{R_2}$	-0.4946678
$d_{41}^{T_1} - d_{41}^{T_2}$	-1.224519	$d_{41}^{L_1} - d_{41}^{L_2}$	-0.2341346	$d_{41}^{R_1} - d_{41}^{R_2}$	-0.5221154
$d_{51}^{T_1} - d_{51}^{T_2}$	-0.2097290	$d_{51}^{L_1} - d_{51}^{L_2}$	-1.136058	$d_{51}^{R_1} - d_{51}^{R_2}$	-0.6197378
$d_{61}^{T_1} - d_{61}^{T_2}$	-5.007500	$d_{61}^{L_1} - d_{61}^{L_2}$	-1.387500	$d_{61}^{R_1} - d_{61}^{R_2}$	-0.8450000
$d_{71}^{T_1} - d_{71}^{T_2}$	-0.09280594	$d_{71}^{L_1} - d_{71}^{L_2}$	-0.4110577	$d_{71}^{R_1} - d_{71}^{R_2}$	-0.4717832
$d_{81}^{T_1} - d_{81}^{T_2}$	0	$d_{81}^{L_1} - d_{81}^{L_2}$	0	$d_{81}^{R_1} - d_{81}^{R_2}$	0
$d_{91}^{T_1} - d_{91}^{T_2}$	1.964336	$d_{91}^{L_1} - d_{91}^{L_2}$	-0.1769231	$d_{91}^{R_1} - d_{91}^{R_2}$	-0.5958042

Çizelge 4.13 Y_2 için merkez, sol ve sağ yayılıma ilişkin sapmalar
$(d_{ij}^T, d_{ij}^L, d_{ij}^R)$ $i = 1,...,9$ $j = 2$

Merkez	Sapma değerleri	Sol yayılım	Sapma Değerleri	Sağ yayılım	Sapma değerleri
$d_{12}^{T_1} - d_{12}^{T_2}$	3.616253	$d_{12}^{L_1} - d_{12}^{L_2}$	-0.4723424	$d_{12}^{R_1} - d_{12}^{R_2}$	-1.047970
$d_{22}^{T_1} - d_{22}^{T_2}$	2.082131	$d_{22}^{L_1} - d_{22}^{L_2}$	-0.1659655	$d_{22}^{R_1} - d_{22}^{R_2}$	-0.6387220
$d_{32}^{T_1} - d_{32}^{T_2}$	0.6913061	$d_{32}^{L_1} - d_{32}^{L_2}$	-0.2627244	$d_{32}^{R_1} - d_{32}^{R_2}$	-0.7642708
$d_{42}^{T_1} - d_{42}^{T_2}$	0.6256010	$d_{42}^{L_1} - d_{42}^{L_2}$	-0.5202257	$d_{42}^{R_1} - d_{42}^{R_2}$	-1.038722
$d_{52}^{T_1} - d_{52}^{T_2}$	-2.463608	$d_{52}^{L_1} - d_{52}^{L_2}$	-0.4858293	$d_{52}^{R_1} - d_{52}^{R_2}$	-1.006120
$d_{62}^{T_1} - d_{62}^{T_2}$	0	$d_{62}^{L_1} - d_{62}^{L_2}$	-0.3535764	$d_{62}^{R_1} - d_{62}^{R_2}$	-0.8642708
$d_{72}^{T_1} - d_{72}^{T_2}$	-2.683093	$d_{72}^{L_1} - d_{72}^{L_2}$	-0.6293737	$d_{72}^{R_1} - d_{72}^{R_2}$	-1.138722
$d_{82}^{T_1} - d_{82}^{T_2}$	-2.274706	$d_{82}^{L_1} - d_{82}^{L_2}$	-0.4654434	$d_{82}^{R_1} - d_{82}^{R_2}$	-0.8783761
$d_{92}^{T_1} - d_{92}^{T_2}$	-3.692441	$d_{92}^{L_1} - d_{92}^{L_2}$	-0.7814904	$d_{92}^{R_1} - d_{92}^{R_2}$	-1.347970

Kestirilen modele ilişkin katsayılar Çizelge 4.14’ te verilmiştir.

Çizelge 4.14 Y_1 ve Y_2 için kestirilen modele ilişkin katsayılar

$(\alpha_{01}, c_{01}^L, c_{01}^R)$	(36.09 , 0 , 3.32)
$(\alpha_{11}, c_{11}^L, c_{11}^R)$	(0.19 , 0.04 , 0.07)
$(\alpha_{21}, c_{21}^L, c_{21}^R)$	(0.32 , 0.27 , 0.04)
$(\alpha_{02}, c_{02}^L, c_{02}^R)$	(-3.04 , 0 , 0)
$(\alpha_{12}, c_{12}^L, c_{12}^R)$	(0.11 , 0.03 , 0.04)
$(\alpha_{22}, c_{22}^L, c_{22}^R)$	(0.33 , 0.009 , 0)

Elde edilen değerler yerine konulduğunda kestirim denklemleri,

$$y_{i1}^* = (36.09, 0, 3.32) + (0.19, 0.04, 0.07)\, x_1 + (0.32, 0.27, 0.04) x_2$$
$$y_{i2}^* = (-3.04, 0, 0) + (0.11, 0.03, 0.04)\, x_1 + (0.33, 0.009, 0) x_2$$

biçiminde elde edilir (Çizelge 4.14).

Y_1 için sapmaların kareleri toplamı,

$$\sum_{i=1}^{9} (d_{i1}^{T_1} - d_{i1}^{T_2})^2 = 38.64 \quad , \quad \sum_{i=1}^{9} (d_{i1}^{L_1} - d_{i1}^{L_2})^2 = 6.80 \quad , \quad \sum_{i=1}^{9} (d_{i1}^{R_1} - d_{i1}^{R_2})^2 = 2.83$$

olarak,

Y_2 için sapmaların kareleri toplamı,

$$\sum_{i=1}^{9} (d_{i2}^{T_1} - d_{i2}^{T_2})^2 = 50.35 \quad , \quad \sum_{i=1}^{9} (d_{i2}^{L_1} - d_{i2}^{L_2})^2 = 2.17 \quad , \quad \sum_{i=1}^{9} (d_{i2}^{R_1} - d_{i2}^{R_2})^2 = 8.81$$

olarak elde edilmiştir.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Değişkenler arasındaki ilişkileri modellemede kullanılan regresyon analizi, çok sayıda bilim dalı için temel araçlardan biridir. Bununla birlikte regresyon analizi, modelin istatistiksel özellikleri hakkında bazı varsayımlar gerektirmektedir. Regresyonun gerektirdiği şartların sağlanamadığı ve belirsizliğin hakim olduğu durumlarda bulanık regresyon etkili bir araç haline gelmektedir.

Bu çalışmanın Birinci Bölümünde, En Küçük Kareler regresyona alternatif olarak geliştirilen Bulanık MİNMAD yönteminden bahsedilmiş ve bu konu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, tek değişkenli regresyon modeli için MİNMAD yöntemi üzerinde durulmuştur. Ardından bağımlı ve bağımsız değişkenlerin birden fazla olması durumunda MİNMAD yöntemi incelenmiştir. Çok değişkenli çoklu regresyon modelinin MİNMAD problemi olarak modellenmesi ele alınmıştır.

Üçüncü Bölümde bulanık küme ve bulanık küme işlemleri, bulanık sayı için aritmetik işlemler ele alınmıştır. Doğrusal programlama problemleri için bulanık kavramı verilmiş bulanık mutlak sapmaların en küçüklenmesi problemi modellenmiştir.

Dördüncü Bölümde ise , Bulanık MİNMAD problemi çok değişkenli çoklu regresyon için geliştirilmiş ve formüle edilmiştir. Bulanık çok amaçlı MİNMAD problemi olarak geliştirilen yöntem iki örnek üzerinde uygulanmıştır. Elde edilen problem bir çok amaçlı doğrusal programlama problemi olduğu için çok ölçütlü karar verme yöntemlerinden Global Kriter yöntemi kullanılarak sayısal örnekler için kestirim denklemleri ve hatalar gözlenmiştir.

Örnek 1 için EKK , MİNMAD ve Bulanık MİNMAD yöntemleri uygulanılarak elde edilen regresyon modelleri,
EKK için,

$$\hat{y}_1 = 2.1615 + 1.1265x_1 + 0.2467x_2$$
$$\hat{y}_2 = -0.0311 + 2.3572x_1 + 5.6218x_2$$

olarak,

MİNMAD için,

$$\hat{y}_1 = 1.6371 + 1.1279x_1 + 0.2687x_2$$
$$\hat{y}_2 = 3.2934 + 2.3305x_1 + 5.5777x_2$$

olarak ve

Bulanık MİNMAD için

$$y_{i1}^* = (2.6173, 2.7435, 16.0762) + (1.1215, 0.1717, 0.0839)\, x_1 + (0.2569, 0.2793, 0)x_2$$

$$y_{i2}^* = (0.3282, 3.5825, 24.6443) + (2.35, 0.3685, 0.2301)\, x_1 + (5.6906, 0.931, 0.8393)x_2$$

olarak elde edilmiştir.
Bu regresyon modelleri karşılaştırıldığında katsayıların birbirine yakın değerler aldığı gözlenmiştir.

Aynı düşünceyle Çizelge (5.1)' de verilen hatalar da karşılaştırıldığında (EKK ve MİNMAD için) hataların birbirine yakın değerler aldığı gözlenmiştir.

Çizelge 5.1 Y_1 ve Y_2 hatalarına ilişkin değerler

EKK	MİNMAD	Bulanık MİNMAD (Merkez değerleri)
$\hat{\varepsilon}_{11}$ = -0.3042	$\hat{\varepsilon}_{11}$ = 0	$d_{11}^{T_1} - d_{11}^{T_2}$ =-3.0954
$\hat{\varepsilon}_{12}$ = -0.1159	$\hat{\varepsilon}_{12}$ = 0	$d_{21}^{T_1} - d_{21}^{T_2}$ = 0
$\hat{\varepsilon}_{13}$ = 1.3301	$\hat{\varepsilon}_{13}$ = 1.6243	$d_{31}^{T_1} - d_{31}^{T_2}$ = 4.5655
$\hat{\varepsilon}_{14}$ = -0.6178	$\hat{\varepsilon}_{14}$ = -0.2920	$d_{41}^{T_1} - d_{41}^{T_2}$ = -3.7939
$\hat{\varepsilon}_{15}$ = -0.2879	$\hat{\varepsilon}_{15}$ = 0	$d_{51}^{T_1} - d_{51}^{T_2}$ = 0
$\hat{\varepsilon}_{21}$ = -1.1338	$\hat{\varepsilon}_{21}$ = -1.2880	$d_{12}^{T_1} - d_{12}^{T_2}$ = -6.8045
$\hat{\varepsilon}_{22}$ = -0.4940	$\hat{\varepsilon}_{22}$ = 0	$d_{22}^{T_1} - d_{22}^{T_2}$ = 0
$\hat{\varepsilon}_{23}$ = 1.8924	$\hat{\varepsilon}_{23}$ = 2.0261	$d_{32}^{T_1} - d_{32}^{T_2}$ = -7.0743
$\hat{\varepsilon}_{24}$ = -0.0508	$\hat{\varepsilon}_{24}$ = 0	$d_{42}^{T_1} - d_{42}^{T_2}$ = -1.4002
$\hat{\varepsilon}_{25}$ = -0.6494	$\hat{\varepsilon}_{25}$ = 0	$d_{52}^{T_1} - d_{52}^{T_2}$ = 0
Hata Kareler Toplamı = 7.87	Hata Kareler Toplamı = 8.48	Hata Kareler Toplamı = 143.1

Örnek 2 için EKK , MİNMAD ve Bulanık MİNMAD yöntemleri uygulanılarak elde edilen regresyon modelleri,

EKK için,

$$\hat{y}_1 = 39.777 + 0.204x_1 + 0.254x_2$$

$$\hat{y}_2 = -5.526 + 0.104x_1 + 0.347x_2$$

olarak,

MİNMAD için,

$$\hat{y}_1 = 36.100 + 0.200x_1 + 0.300x_2$$

$$\hat{y}_2 = -6.857 + 0.107x_1 + 0.500x_2$$

olarak,

Bulanık MİNMAD için,

$$y_{i1}^{*} = (36.09, 0, 3.32) + (0.19, 0.04, 0.07)\,x_1 + (0.32, 0.27, 0.04)x_2$$
$$y_{i2}^{*} = (-3.04, 0, 0) + (0.11, 0.03, 0.04)\,x_1 + (0.33, 0.009, 0)x_2$$

olarak elde edilmiştir. EKK, MİNMAD ve Bulanık MİNMAD uygulanarak elde edilen hatalar Çizelge 5.2 de verilmiştir.

Çizelge 5.2 (EKK, MİNMAD ve Bulanık MİNMAD) Y_1 ve Y_2 hatalarına ilişkin değerler

EKK	MİNMAD	Bulanık MİNMAD
$\hat{\varepsilon}_{11}$ = - 0.031	$\hat{\varepsilon}_{11}$ = 0	$d_{11}^{T_1} - d_{11}^{T_2}$ =-0.1915
$\hat{\varepsilon}_{12}$ = 0.265	$\hat{\varepsilon}_{12}$ = 0	$d_{21}^{T_1} - d_{21}^{T_2}$ =0.7551
$\hat{\varepsilon}_{13}$ = 0.753	$\hat{\varepsilon}_{13}$ = 0.4	$d_{31}^{T_1} - d_{31}^{T_2}$ =2.7484
$\hat{\varepsilon}_{14}$ = -.265	$\hat{\varepsilon}_{14}$ = -0.3	$d_{41}^{T_1} - d_{41}^{T_2}$ =-1.2245
$\hat{\varepsilon}_{15}$ = 0.003	$\hat{\varepsilon}_{15}$ = -0.2	$d_{51}^{T_1} - d_{51}^{T_2}$ =-0.2097
$\hat{\varepsilon}_{16}$ = -1.193	$\hat{\varepsilon}_{16}$ = -1.4	$d_{61}^{T_1} - d_{61}^{T_2}$ =-5.0075
$\hat{\varepsilon}_{17}$ = 0.081	$\hat{\varepsilon}_{17}$ = 0	$d_{71}^{T_1} - d_{71}^{T_2}$ =-0.0928
$\hat{\varepsilon}_{18}$ = 0.079	$\hat{\varepsilon}_{18}$ = 0	$d_{81}^{T_1} - d_{81}^{T_2}$ =0
$\hat{\varepsilon}_{19}$ = 0.515	$\hat{\varepsilon}_{19}$ = 0.5	$d_{91}^{T_1} - d_{91}^{T_2}$ =1.9643
$\hat{\varepsilon}_{21}$ = 3.919	$\hat{\varepsilon}_{21}$ = 1.7857	$d_{12}^{T_1} - d_{12}^{T_2}$ =3.6162
$\hat{\varepsilon}_{22}$ = 3.357	$\hat{\varepsilon}_{22}$ = 0.3214	$d_{22}^{T_1} - d_{22}^{T_2}$ =2.0821
$\hat{\varepsilon}_{23}$ = 3.045	$\hat{\varepsilon}_{23}$ = 0	$d_{32}^{T_1} - d_{32}^{T_2}$ =0.6913
$\hat{\varepsilon}_{24}$ = 3.092	$\hat{\varepsilon}_{24}$ = 0.8214	$d_{42}^{T_1} - d_{42}^{T_2}$ =0.6256
$\hat{\varepsilon}_{25}$ = 2.288	$\hat{\varepsilon}_{25}$ = -0.6071	$d_{52}^{T_1} - d_{52}^{T_2}$ =-2.4636
$\hat{\varepsilon}_{26}$ = 2.892	$\hat{\varepsilon}_{26}$ = 0	$d_{62}^{T_1} - d_{62}^{T_2}$ =0
$\hat{\varepsilon}_{27}$ = 2.245	$\hat{\varepsilon}_{27}$ = -0.1786	$d_{72}^{T_1} - d_{72}^{T_2}$ =-2.6830
$\hat{\varepsilon}_{28}$ = 2.236	$\hat{\varepsilon}_{28}$ = 0	$d_{82}^{T_1} - d_{82}^{T_2}$ =-2.2747
$\hat{\varepsilon}_{29}$ =2.072	$\hat{\varepsilon}_{29}$ =-0.2143	$d_{92}^{T_1} - d_{92}^{T_2}$ =-3.6924
Hata Kareler Toplamı = 75.801	Hata Kareler Toplamı = 6.813	Hata Kareler Toplamı = 88.99

Modele ilişkin katsayılar ve hatalar gözlendiğinde yakın değerler elde edildiği gözlenmiştir.

Buradan EKK regresyon için varsayımlar sağlanmadığında (Bulanık) MİNMAD yöntemin alternatif bir yöntem olarak kullanılabileceği sonucuna varılır.

Bundan sonraki çalışmalarda, farklı veri setleri için önerilen yöntem uygulanıp, elde edilen sonuçlar analiz edilebilir.

KAYNAKLAR

Allahverdi, N. 1999. Fuzzy Mantığı Ders Notları. Selçuk Üniversitesi.

Andrews, D. F. 1974. A Robust Method for Multiple Linear Regression. Technometrics 16, 523-531.

Apaydın, A. ve Yapıcı, N. 2001. Minmad Problemi Olarak Modellenen Çok Değişkenli Çoklu Regresyon Modelinin Çözümü İçin Çok Amaçlı Doğrusal Programlama Yaklaşımı. 2. İstatistik Kongresi, Bildiriler Kitabı, 66-69, 2-6 Mayıs, Antalya.

Apaydın, A.2004. İstatistik ve Optimizasyonda Bulanık Teori. Ders notu. Ankara Üniversitesi.

Apaydın, A. 2005. Çok Ölçütlü Karar Verme Yöntemleri. Ders notu .Ankara Üniversitesi.

Arthanari, T. S. and Dodge, Y. 1981. Mathematical Programming in Statistics. John Wiley and Sons Inc.

Chang P.-T and Lee E.S. 1994. Fuzzy Least Absolute Deviations Regression and Conflicting Trends in Fuzzy Parameters. Computers Math. Applic.Vol. 28, No. 5, pp. 89-101.

Charnes, A., Cooper, W.W. and Ferguson, R. 1955. Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming. Management Science, 1:138-151.

Charnes, A., Cooper,W.W. and Sueyoshi, T. 1986. Least Squares / Ridge Regression and Goal Programming / Constrained Regression Alternatives. European Journal of Operational Research 27, p: 146-157.

Draper, N. R. and Smith, H. 1981. Applied Regression Analysis, John Wiley and Sons, New York.

Eminkahyagil, G. 1997. Hedef Programlama ve Bir Uygulama. Ankara Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi.

Eminkahyagil, G. and Apaydın, A. 1997. The Goal Prgramming in Regression Analysis. Bulletin of The Inter. Stat.Instute, vol. 51, No.2 s. 137-139.

Huber, P.J. 1973. Robust Regression : Asymptotics, Conjectures and Monte Carlo. Ann. Statist. 1, 799-821.

Johnson, R.A. and Wichern, D.W. 1988. Applied Multivariate Statistical Analysis, Prentice- Hall International Editions.

Klir, G. and Yuan, B.1993. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Its Applications. Prentice Hall, New Jersey.

Kuruüzüm, A. 1990. Karar Destek Sistemlerinde Çok Amaçlı Yöntemler.Yıldız Üniversitesi, İstanbul.

Meyer, J.R. and Glauber, R.R. 1964. Investment Decisions, Economic Forecasting and Public Policy. Division of Reserch Memoir, Grad. School Bus. Ad., Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts.

Narula, S. C. and Wellington, J. F. 1982. The Minimum Sum of Absolute Errors Regression : A State of The Art Survey. International Statistical Review, 50, 317-326.

Narula, S.C. 1987. The Minimum Sum of Absolute Errors Regression. Journal of Quality Technology, 19, 1, 37-44.

Narula, S.C. and Korhonen, P.J. 1994. Multivariate Multiple Linear Regression Based on The Minimum Sum of Absolute Error Criterion. European Journal of Operational Research 73, Feb. 24 p: 70-75.

Pehlivan-Yapıcı, N. ve Apaydın, A. 2003. Çok Değişkenli Çoklu Regresyon Modelinin MİNMAD Problemi Olarak Modellenmesi ve Global Kriter Yöntemi ile Çözümü. İstatistik Araştırma Dergisi, cilt(02), no(02), özel sayı; 115-124.

Sakawa, M. and Yano, H. 1992. Multiobjective Fuzzy Linear Regression Analysis for Fuzzy Input - Output Data. Fuzzy Sets and Systems, Volume 47, issue 2, pages 173-181.

Sasaki, M. and Gen, M. 1993. An Extension of Interactive Method for Solving Multiple Objective Linear Programming with Fuzzy Parameters. Computers and Industrial Engineering, Vol.25, Nos.1-4, pp.9-12.

Şanlı, K. 2005. Bulanık Robust Regresyon Çözümlemesi. Ankara Üniversitesi Doktora Tezi.

Tanaka, H., Uejima, S. and Asai, K. 1982. Linear Regression Analysis with Fuzzy Model. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 12 (6); 903- 907.

Tatlıdil, H. 1996. Uygulamalı Çok Değişkenli istatisitksel Analiz. Ankara.
Tran, L. and Duckstein, L. 2002. Multiobjective Fuzzy Regression with Central Tendency and Possibilistic Properties. . Fuzzy Sets and Systems, Volume 130 issue 1, pages 21-31, Elsevier North-Holland, Inc.
Tuncel, Ö. S. 1996. Bulanık Doğrusal Programlama. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
Yang, M.-S. and Lin, T.-S. 2002. Fuzzy Least-Squares Linear Regression Analysis for Fuzzy Input – Output Data. Fuzzy Sets and Systems, Volume 126, issue 3, Elsevier North-Holland, Inc.
Yang, M.-S. and Liu,H.-H. 2003. Fuzzy Least-Squares Algorithms for Interactive Fuzzy Linear Regression Models. Fuzzy Sets and Systems, Volume 135, issue 2, Elsevier North-Holland, Inc.
Zimmerman, H. 1978. Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions. Fuzzy Sets and Systems, Vol.16, pp. 45-55.
Zionts, S. and Wallenius, J. 1983. An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for A Class Underlying Nonlinear Utility Function. Manage Sci. , pp.519-529.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Demet BAKIN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 11.04.1980

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : İncirli Lisesi-1998
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü-2003
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü-2007

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl
T. İş Bankası-2007