ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

POPÜLASYON MODELLERİ VE UYGULAMALARI

Burcu SÜTCÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2008

TEZ ONAYI

Burcu SÜTCÜ tarafından hazırlanan "**Popülasyon Modelleri ve Uygulamaları**" adlı tez çalışması 13/02/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Yrd. Doç. Dr. Nuri ÖZALP

Jüri Üyeleri:

Başkan: *Doç. Dr. Ogün DOĞRU*

Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye **:** *Yrd. Doç.Dr. A. Feza GÜVENİLİR*

Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye **:** *Yrd. Doç. Dr. Nuri ÖZALP*

Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof.Dr.Ülkü MEHMETOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

POPÜLASYON MODELLERİ VE UYGULAMALARI

Burcu SÜTCÜ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nuri ÖZALP

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm temel kavramlara ayrılmıştır. Genel lojistik modelin oluşturulması ve kararlılık durumları tek ve iki tür için ayrıntılı olarak incelenmiştir.

İkinci bölümde, iki tür lojistik model yapısının, çok dil konuşan toplumlarda dominant dil ve ikinci dil kullanım ilişkisi ve karşılıklı etkileşimleri incelenmiş olup, ayrıca bu modelin kararlılığı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise aynı tip modeller iki ve üç kültürlü toplumlara uygulanmıştır.

Şubat 2008, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lojistik model, tek-dil çok dil yapısı, tek-kültür çok-kültür yapısı, kararlılık analizi.

ABSTRACT

Master Thesis

POPULATION MODELS AND THEIR APPLICATIONS

Burcu SÜTCÜ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Nuri ÖZALP

This thesis consists of three chapters.

The first chapter is for inroductory. Construction of general lojistic model and the stability analysis for single and two-species models are investigated.

In the second chapter, the structure of two-species lojistic model is studied on the relation and interaction between unilingual and bilingual population in the multilingual society.

In the third chapter, same type of models is applied respectively to the populations having two and three culture groups.

February 2008, 50 pages

Key Words: Lojistic model, bilingual and multilingual structure, one and multi-culture structure, stability analysis.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, çalışmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Nuri ÖZALP'e, çalışmalarım süresince manevi yönden her zaman bana destek olan anneme ve yardımlarını esirgemeyen ablam Araş. Gör. Demet Banu KORALAY'a en derin duygularla teşekkür ederim.

Burcu SÜTCÜ
Ankara, Şubat 2008

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. NÜFUS DİNAMİKLERİ

1.1 Giriş

Matematik, biyolojik bilimlerde, fiziksel bilimlerde olduğu kadar başarılı değildir. Bitki ve hayvanlar birleşik ve birçok karmaşık bileşenden oluşmaktadır. Newton yasası gibi bir biyolojik yasa yok gibi görünmektedir. Bu nedenle bilim dünyası biyolojide neden-etki ilişkisini anlamaktan uzaktır. Dahası, birçok hayvan türü hareket seçme yeteneğine sahip olup, örneğin bir sarkaçtaki gibi kurallara bağlı değildir. Bu nedenlerle geliştirilen matematiksel modeller çok duyarlı olmamaktadır.

1.2 Tek Tür Modeli

Bir türün nüfus artış modelini formülleştirmek için öncelikle nüfusu etkileyen faktörlere karar vermemiz gerekir. Bir çok durumda, çok sayıdaki bir tür için nüfusa zamanın sürekli fonksiyonu olarak yaklaşmak kabul edilebilirdir.

Kabul edelim ki $P\,(t)$, bir türün t zamanındaki nüfusu ve $b\ \ (>0)$ de her bir birey için sabit doğum oranı olsun. Yalın bir doğum olayı, nüfusun tamamen denk organizmalardan oluştuğunu, ve ölümsüz olarak b oranında ürediğini kabul eder. Matematiksel olarak bu,

$$b = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \quad \text{yani} \quad \frac{dP}{dt} = bP$$

demektir. Benzer şekilde, yalın bir ölüm olayı da hiç bir doğum olmaksızın, her bir bireyin aynı pozitif c ölüm oranına sahip olduğunu kabul eder. Bu ise,

$$c = \frac{1}{P}\left(-\frac{dP}{dt}\right) \quad \text{yani} \quad \frac{dP}{dt} = -cP$$

anlamına gelir. Böylece sabit doğum ve ölüm oranlı bir nüfus modeli

$$\frac{dP}{dt} = (b-c)P$$

denklemi ile ifade edilebilir. Buradan, $a = b - c$ (sabit) ve başlangıç nüfusu P_0 olmak üzere

$$\frac{dP}{dt} = aP$$
$$P(0) = P_0 \tag{1.1}$$

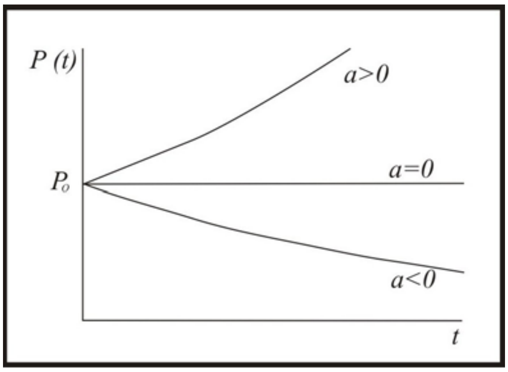
başlangıç değer problemi elde edilir. (1.1) denklemini çözersek,

$$\ln|P| = at + k \quad (k \text{ integral sabiti})$$
$$\Rightarrow P = \exp(at + k)$$

olup, başlangıç koşulu kullanılırsa

$$P(t) = P_0 \exp(at) = \begin{cases} \to \infty, (t \to \infty); \text{ eger } a > 0 & \text{ise,} \\ = P_0 \quad ; \text{ eger } a = 0 & \text{ise,} \\ \to 0, (t \to \infty) ; \text{ eger } a < 0 & \text{ise} \end{cases}$$

bulunur.



Şekil 1.1 Nüfus modeli $P = P_0 e^{at}$

Bu model, kısa zaman aralıklarında gerçekçi olabilir. Dikkat edilirse, savaş, göç, doğum ve ölüm oranlarındaki değişimler gibi önemli faktörler burada gözardı edilmiştir.

Temel olarak, eğer nüfus yeterince büyürse, türün çevresi ve diğer türlerle olan ilişkileri de devreye girer. Yiyecek kıtlığı bu durumda nüfusun büyümesini engeller. Yiyecek kaynakları arttırılsa bile, yine de nüfus yoğunluğu arttıkça büyüme oranı yok olur. Böylece, yoğunluk (kalabalıklık) yiyecek kaynaklarının kısıtlanması ile aynı etkiyi doğurur.

Genel olarak $R(t)$ büyüme oranı $R(P) = (1/P)(dP/dt)$ yani

$$\frac{dP}{dt} = PR(P)$$

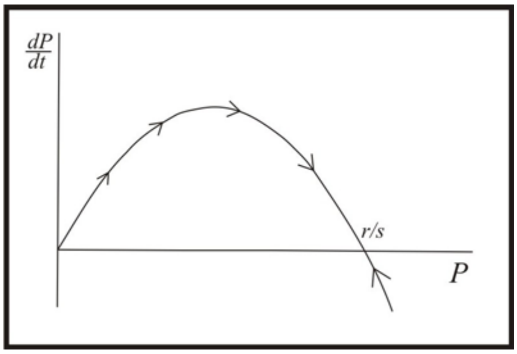
ile verilir. Burada, nüfusun yeterince büyük olduğunu ve böylece zamanın sürekli bir fonksiyonu olduğunu kabul ediyoruz. Bu nedenle çok küçük P değerli $R(P)$ ile ilgilenmiyoruz. Normal düzeydeki nüfuslar için, büyüme türün toplam çevresinden sadece çok küçük kısıtlamalar ile oluşur; P yok olurken $R(P)$ çevre etkisi olmaksızın büyüme oranına yaklaşmaktadır. P artarken $R(P)$ azalır. Daha büyük nüfuslar için $R(P)$ negatiftir, yani doğumdan çok ölüm vardır. $R(P)$'nin sürekli olduğunu kabul edersek, bu durumda büyüme oranının sıfır olduğu bir nüfus var olmalıdır.

Nüfus problemine bir doğrusal yaklaşım, 1838 yılında Belçikalı matematikçi Pierre F. Verhulst'ın insan nüfusu için önerdiği ve lojistik Verhulst-Pearl denklemi olarak bilinen

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P$$

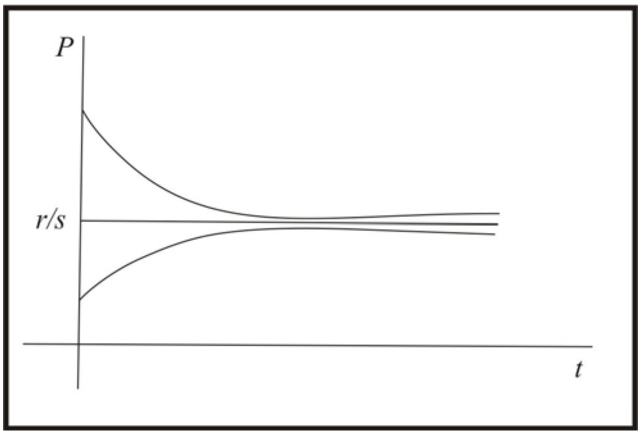
denklemidir. Verhulst'ın elinde o devirde yeterince veri bulunmadığı için bu modelin duyarlılığını tam olarak test edememiştir. Fakat model daha sonra 1930 yılında Pearl tarafından meyve sineği nüfusuna ve 1935'de G. F. Gause tarafından hamam böceği nüfusuna uygulanmış olup, elde edilen deneysel duyarlılık nedeni ile ilgi çekmeye başlamıştır. Bu modelde, r ve s sırası ile çevre etkisiz büyüme oranı ve artan nüfus yoğunluğu etkisine karşılık gelen pozitif sabitlerdir. Büyüme oranının sıfır olduğu nüfusa denge nüfusu denir. Lojistik denklem için bu, $P = 0$ (ki bu durum bizim için ilgi çekici değildir) veya $r - sP = 0$ yani $P = r/s$ durumunda oluşur. Sonraki durum, çevrenin alabileceği en geniş nüfus durumu olup, çevre taşıma kapasitesi olarak adlandırılır.

Lojistik denklem otonomdur, yani zamana açıkça bağlı değildir. Şimdi dP/dt 'yi P 'nin fonksiyonu olarak çizersek P eksenini 0 ve r/s de kesen bir parabol elde ederiz.



Şekil 1.2 Lojistik denklemin faz düzlemi

Oklar çözümün zamanla nasıl değiştiğini göstermektedir. r/s den daha az nüfus için $dP/dt > 0$ yani P artandır. r/s den daha büyük nüfus için $dP/dt < 0$ yani P azalandır. Her iki durumda da, P'nin asla taşıma kapasitesine ulaşamadığı gösterilebilir. Taşıma kapasitesi bazen doygunluk düzeyi olarak da adlandırılır.



Şekil 1.3 Lojistik büyüme modeli

Tanım 1. Eğer zamana bağlı bir denklemin, denge noktasına yakın tüm başlangıç koşulları için çözümü de denge noktasına yakın kalıyorsa, denge çözümü kararlıdır denir.

Şimdi, denge nüfusunun kararlı olduğunu gösteren iki farklı yöntem verelim:

Yöntem 1. Faz düzlem eğrisine denge nüfusunun komşuluğunda

$$\frac{dP}{dt} = m\left(P - \frac{r}{s}\right)$$

doğrusu ile yaklaşalım. Burada m eğimi $P = r/s$ noktasında negatiftir. Bu lineer diferensiyel denklemin bir integral çarpanı e^{-mt} olup, böylece

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-mt}P(t)\right) = -\frac{mr}{s}e^{-mt}$$

ve buradan da

$$e^{-m\tau}P(\tau)\Big|_0^t = \frac{r}{s}e^{-m\tau}\Big|_0^t$$

olur. $P(0) = P_o$ (r/s ye yakın) kabul edelim. Bu durumda

$$e^{-mt}P(t) - P_0 = \frac{r}{s}\left(e^{-mt} - 1\right) P$$

veya

$$P(t) = \frac{r}{s} + \left(P_0 - \frac{r}{s}\right)e^{mt}$$

elde edilir. $m < 0$ olduğundan, $t \to \infty$ için $P \to r/s$ dir. Görüldüğü gibi P asla sonlu zamanda r/s ye ulaşamaz. Ayrıca P_0 başlangıç koşulu denge noktasına yakın olduğu için dengeden sapma sıfıra yaklaşır. Bu ise denge noktasının kararlı olması demektir.

Yöntem 2. Pertürbasyon yöntemi kullanarak,

$$P = \frac{r}{s} + \varepsilon P_1$$

diyelim. Burada, εP_1 dengeden sapmayı göstermektedir. ε küçük bir parametre ve $|\varepsilon P_1| << r/s$ (Yani $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\varepsilon P_1}{r/s} = 0$) dir. Lojistik denklemden

$$\varepsilon \frac{dP_1}{dt} = \left(\frac{r}{s} + \varepsilon P_1\right)\left(r - r - \varepsilon s P_1\right)$$

yani

$$\frac{dP_1}{dt} = -sP_1\left(\frac{r}{s} + \varepsilon P_1\right)$$

olup, εP_1 çok küçük olduğundan, lineer olmayan terimi iptal edebiliriz. Böylece,

$$\frac{dP_1}{dt} = -rP_1$$

elde ederiz. Bu denklem ise değişkenlerine ayrılabilir olup, çözümü

$$P_1(t) = Ce^{-rt} \quad (< P_1(0))$$

dir. C sabit olduğundan bu, denge nüfusunun kararlı olması demektir.

Yöntem 1 deki azalma sabiti m, $P = r/s$ noktasında faz düzleminin eğimidir. Yani

$$m = \frac{d}{dP}\left(P(r - sP)\right)\Big|_{P=r/s} = r - 2sP\Big|_{P=r/s} = -r$$

olup, bu ise Yöntem 2 dekinin aynıdır.

Şimdi lojistik denklemi $P(0) = P_0$ başlangıç koşulu altında çözelim.

$$\frac{dP}{P(r - sP)} = dt$$

den,

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{P} - \frac{s}{r - sP}\right)dP = dt$$

olup, her iki tarafın integralini alırsak

$$\frac{1}{r}\left(\ln|P| - \ln|r - sP|\right) = t + c$$

veya

$$\frac{1}{r}\ln\left|\frac{P}{r-sP}\right| = t + c$$

elde ederiz. $P(0) = P_0$ başlangıç koşulunu kullanırsak,

$$\frac{1}{r}\ln\left|\frac{P}{r-sP}\right| = t + \frac{1}{r}\ln\left|\frac{P_0}{r-sP_0}\right|$$

ya da

$$\frac{P}{P_0}\left|\frac{r-sP_0}{r-sP}\right| = e^{rt}$$

buluruz. t sonsuz olduğunda denge nüfusuna ulaşıldığından yani $\lim_{t\to\infty} r - sP(t) = 0$ olduğundan, $(r-sP_0)/(r-sP)$ oranının işareti pozitiftir. O halde

$$\frac{P}{P_0}\left(\frac{r-sP_0}{r-sP}\right) = e^{rt}$$

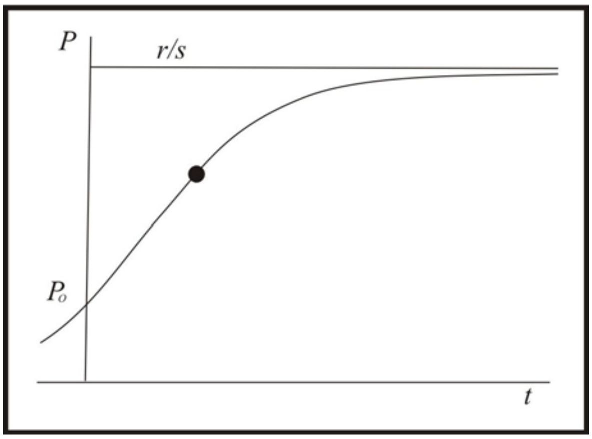
ve buradan

$$P\left(r - sP_0 + sP_0e^{rt}\right) = P_0re^{rt}$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{P_0re^{rt}}{\left(r - sP_0 + sP_0e^{rt}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{r/s}{1 + \dfrac{r-sP_0}{sP_0e^{rt}}} \to \frac{r}{s} \qquad (t \to \infty)$$

elde ederiz.



Şekil 1.4 Lojistik eğri

Bir kültürdeki mayanın büyümesi lojistik eğriye oldukça uymaktadır. Lojistik model üç sabit içerir. r, s ve P_0. Böylece bir modeli test etmek için üç bilinen koşula gereksinim vardır. Örneğin, üç farklı zamanda $P(t_0) = P_0$, $P(t_1) = P_1$, $P(t_2) = P_2$ değerleri verilebilir. Bu model aşağıdakiler göz önüne alınarak yenilenebilir:

- lineer olmayan (örneğin polinom tipi) büyüme oranı
- göç (iç veya dış)
- ölüm, doğum
- ekonomik refah
- savaş
- bunalım v.s.

1.3 İki Tür Ekolojik Modeli

Lojistik büyüme modelinde, bir türün büyümesi gıdadaki (ki bu muhtemelen bir başka tür olabilir) sonluluk nedeni ile sınırlıdır. Buna bir örnek olarak geyik ve yediği otlardan oluşan bir ekosistem düşünülebilir.

Şimdi dikkatimizi zamanı düşünmeksizin, deterministik matematiksel modellere verelim. P_1 ve P_2 nüfuslu, iki türden oluşan küçük bir ekosistemi göz önüne alalım.

Her bir türün değişim oranının sadece türlerin nüfusuna bağımlı olduğunu kabul edelim. O halde, matematiksel modelimiz,

$$\frac{dP_1}{dt} = g(P_1, P_2) \tag{1.2}$$

$$\frac{dP_2}{dt} = f(P_1, P_2) \tag{1.3}$$

şeklindedir.

Genel olarak bir türün etkisi, diğer türün nüfusunu artırmak veya azaltmak şeklindedir. Böylece iki tür arasında dört tip etkileşim oluşur. Bunları dört sembol kümesi ile gösterirsek; +-, ++, --; -+ durumlarına sahip oluruz. Fakat, simetriden dolayı +- ve -+ aynı olup, böylece iki tür arasındaki etkileşim durumu üç farklı tipten biridir: Eğer her iki nüfus birbirinin nüfusunu artırıyorsa (++) etkileşimine sahibiz. Bu durumdaki ekolojik etkileşime ortaklık denir. Eğer her iki nüfus birbirinin nüfusunu azaltıyorsa (--) etkileşimi olur. Bu durumdaki ekolojik etkileşime yarışma (rekabet) denir. Örneğin her iki türün de aynı yiyecek kaynağını kullandığı etkileşim bir yarışmadır. Köpek balıkları ve beslendikleri küçük balıklardan oluşan bir ekosistemde olduğu gibi, eğer bir tür diğer türü azaltıyorsa, bu tip etkileşim de (+-) veya (-+) etkileşimi olup, av-avcı etkileşimi adını alır. Bu tip bir etkileşimde, avın varlığı avcının çoğalmasını sağlar ki bu durumda da avcının varlığı tehlikeye girer.

İki tür için verilen (1.2)-(1.3) modelinde, eğer hiçbir türün dış gücü yoksa bu durumda

$$g(0, P_2) = 0 \ \text{ ve } \ f(P_1, 0) = 0$$

olur. (1.2)-(1.3) sisteminin faz düzlem denklemi,

$$\frac{dP_2}{dP_1} = \frac{f(P_1, P_2)}{g(P_1, P_2)} \tag{1.4}$$

iki-nüfus ekosisteminin fazları olarak adlandırılır. Bu denklemin çözümü nüfusların yörüngelerini verir.

$g(P_1, P_2)$ ve $f(P_1, P_2)$ zamana açık olarak bağlı olmadıklarından, denk. (1.2)-(1.3) ile verilen model otonomdur. Nüfusların etkileşimini çalışmak için ya (1.2)-(1.3) ü ya da denklem (1.4) ü analiz etmek gerekir. Çoğu zaman her ikisinin de açık bir çözümünü bulmak mümkün değildir.

Denge nüfusu, her iki nüfusun da zamanla değişmediği nüfustur. Bu durumda, her iki nüfusun doğumları ve ölümleri dengede (eşit) olmak zorundadır. (P_{1e}, P_{2e}) nin bir denge nüfusunu gösterdiğini kabul edelim. Bu durumda, matematiksel olarak

$$f(P_{1e}, P_{2e}) = 0 \tag{1.5}$$

$$g(P_{1e}, P_{2e}) = 0 \tag{1.6}$$

demektir. Denge durumunda, dP_2/dP_1 belirsizdir. Böylece, (P_{1e}, P_{2e}) noktası faz düzlem denkleminin bir aykırı (tekil) noktasıdır. Yani, faz düzlem denkleminin bir aykırı noktası, zamana bağımlı (1.2)-(1.3) sisteminin bir denge noktasıdır.

Denge noktası bulunduğunda, ikinci soru bu nüfusun kararlı olup olmadığıdır. Bunun için, eğer her iki nüfus da denge nüfuslarına yakın ise, zaman içinde ne olacağını araştırmak için doğrusal kararlılık (lineer stabilite) analizi yapabiliriz. O halde,

$$P_1(t) = P_{1e} + \varepsilon P_{11}(t)$$
$$P_2(t) = P_{2e} + \varepsilon P_{21}(t)$$

kabul edelim. Burada, ε, $0 < |\varepsilon| << 1$ olacak şekilde yeterince küçük bir sayı, ve $\varepsilon P_{11}(t)$ ve $\varepsilon P_{21}(t)$ ise denge nüfuslarından sapmaları göstermektedir. Bu eşitlikleri (1.2)-(1.3) sisteminde yerlerine yazarsak

$$\varepsilon \frac{dP_{11}(t)}{dt} = g\left(P_{1e} + \varepsilon P_{11}(t), P_{2e} + \varepsilon P_{21(t)}\right)$$
$$\varepsilon \frac{dP_{21}(t)}{dt} = f\left(P_{1e} + \varepsilon P_{11}(t), P_{2e} + \varepsilon P_{21(t)}\right)$$

elde ederiz. İki değişkenli fonksiyonlar için g ve f nin Taylor açılımını yaparsak

$$\varepsilon \frac{dP_{11}(t)}{dt} = g(P_{1e}, P_{2e}) + \varepsilon P_{11}(t)\frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} + \varepsilon P_{21}(t)\frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_2} + O(\varepsilon^2)$$
$$\varepsilon \frac{dP_{21}(t)}{dt} = f(P_{1e}, P_{2e}) + \varepsilon P_{11}(t)\frac{\partial f(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} + \varepsilon P_{21}(t)\frac{\partial f(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_2} + O(\varepsilon^2)$$

olur. (1.6) ve (1.5) değerlerini kullanıp, $O(\varepsilon^2)$ terimini göz ardı edersek

$$\frac{dP_{11}(t)}{dt} = \frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} P_{11}(t) + \frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_2} P_{21}(t) \tag{1.7}$$
$$\frac{dP_{21}(t)}{dt} = \frac{\partial f(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} P_{11}(t) + \frac{\partial f(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_2} P_{21}(t) \tag{1.8}$$

denklemlerini elde ederiz ki bu birinci basamaktan bir lineer denklem sistemidir ve çözümü denge noktası komşuluğunda türlerin davranışını verir.

Sistem (1.7)-(1.8) daha basit bir gösterimle

$$\frac{dx}{dt} = ax + by \tag{1.9}$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy \tag{1.10}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, a,b,c,d sabitler x ve y de denge noktasından sapma olarak alınabilir. Eğer c=0 ise (1.10) denklemi y için çözülebilir olup, çözümü

$$y(t) = k_1 e^{dt}, \quad (k_1 \text{ sabit})$$

olur. Bunu (1.9) da yerine yazarsak, $x(t)$ ye göre bir lineer denklem elde ederiz ki bu denklemin çözümü de

$$x(t) = \begin{cases} k_2 e^{at} + \dfrac{bk_1}{d-a} e^{dt}, & d \neq a \\ k_2 e^{at} + k_1 bte^{at}, & d = a \end{cases} \qquad (k_2 \text{ sabit})$$

şeklinde bulunabilir. $c \neq 0$ kabul edip, (1.10) denkleminde türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= c\frac{dx}{dt} + d\,\frac{dy}{dt} \\ &= c(ax + by) + d\,\frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

olup, (1.9) denkleminde $cx = dy/dt - d.y$ olduğundan,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\left(\frac{dy}{dt} - d.y\right) + bcy + d\,\frac{dy}{dt}$$

veya düzenlenirse,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (a+d)\frac{dy}{dt} + (ad - bc)y = 0 \qquad (1.11)$$

sabit katsayılı denklemi elde edilir. Bu denklemin $y = e^{rt}$ şeklinde çözümü aranırsa, karakteristik denklemi

$$r^2 - (a+d)r + (ad - bc) = 0$$

olup, bunun kökleri ise

$$r_{1,2}=\frac{a+d\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}$$

olarak bulunur. Şimdi köklerin durumlarına göre çözümleri inceleyelim:

Durum 1. r_1 ve r_2 reel ve $r_1\neq r_2$

(1.11) denkleminin genel çözümü

$$y(t)=k_3e^{r_1t}+k_4e^{r_2t},\quad (k_3,k_4 \text{ isteksel sabitler}) \tag{1.12}$$

olup, (1.10) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} x(t)&=\frac{1}{c}\left(\frac{dy}{dt}-d.y\right)\\ &=\frac{1}{c}\left(k_3r_1e^{r_1t}+k_4r_2e^{r_2t}-dk_3e^{r_1t}-dk_4e^{r_2t}\right)\end{aligned}$$

veya düzenlenirse,

$$x(t)=\frac{k_3(r_1-d)}{c}e^{r_1t}+\frac{k_4(r_2-d)}{c}e^{r_2t} \tag{1.13}$$

elde edilir. O halde (1.12) ve (1.13) $t\to\infty$ için

$$(x(t),y(t))\to\begin{cases}(0,0), & (r_1,r_2<0)\\ xy-de\ bir\ nokta, & (bir\ kök<0,\ diger\ kök=0)\end{cases}$$

olur.

Durum 2. $r_1=r_2$.

Bu durumda (1.11) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = k_3 e^{r_1 t} + k_4 t e^{r_1 t}, \quad (k_3, k_4 \text{ isteksel sabitler})$$

olup,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{c}\left(\frac{dy}{dt} - d.y\right) \\ &= \frac{1}{c}\left(k_3 r_1 e^{r_1 t} + k_4 r_1 t e^{r_1 t} + k_4 e^{r_1 t} - dk_3 e^{r_1 t} - dk_4 t e^{r_1 t}\right) \end{aligned}$$

veya düzenlenirse

$$x(t) = \frac{k_3(r_1 - d)}{c} e^{r_1 t} + \frac{k_4(1 + r_1 t - dt)}{c} e^{r_1 t}$$

elde edilir. Böylece, $t \to \infty$ için

$$(x(t), y(t)) \to \begin{cases} (0,0), & (r_1 < 0) \\ \infty - da\ bir\ nokta, & (r_1 = 0) \end{cases}$$

sonucunu verir.

Durum 3. Kompleks eşlenik kökler: $r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$

Bu durumda (1.11) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = k_3 e^{at} \cos \beta t + k_4 e^{at} \sin \beta t$$

olup,

$$x(t) = \frac{1}{c}\left(\frac{dy}{dt} - d.y\right)$$
$$= \frac{1}{c}\left[k_3 e^{at}(\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t) + k_4 e^{at}(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) - dk_3 e^{at} \cos \beta t - dk_4 e^{at} \sin \beta t\right]$$

ve düzenlenirse,

$$x(t) = \frac{k_3 e^{at}}{c}(\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t - d \cos \beta t) + \frac{k_4 e^{at}}{c}(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t - d \sin \beta t)$$

bulunur. Buradan, $t \to \infty$ için

$$(x(t), y(t)) \to (0,0), \quad (\alpha < 0)$$

elde edilir.

Yukarıdaki durumları göz önüne alarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

Bir denge çözümü,

(i) **kararlıdır** eğer her iki kökün reel kısımları negatif ise,

(ii) **etkisiz kararlıdır** (yani çözüm $t \to \infty$ için bir denge noktasına yaklaşmaz), eğer her iki kök sıfır değilse, ve bir kökün reel kısmı sıfır ve diğeri küçük veya eşit sıfır ise (Durum 1 ve 3),

(iii) **cebirsel kararsızdır** (yani çözüm t nin bir cebirsel kuvveti ile büyür) eğer her iki kök de sıfır ise (Durum 2, dengenin etkisiz kararlı olduğu a=b=c=d=0 hariç),

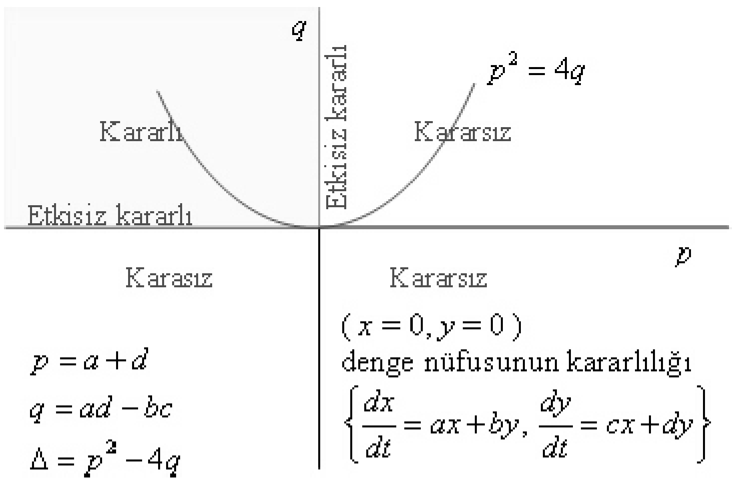
(iv) **kararsızdır** eğer bir kökün reel kısmı pozitif ise.

Bu veriler ışığında aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz:

$$r = \frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

ifadesinde $p = a + d$, $q = ad - bc$, $\Delta = p^2 - 4q$ olsun (Özalp 2006).

DURUM		KÖKLER	KARARLILIK
I.	$\triangle > 0$	Reel ve farklı	
A.	$q > 0$	aynı işaret	
	(a) $p > 0$	her ikisi de +	Kararsız
	(b) $p < 0$	her ikisi de -	Kararlı
B.	$q = 0$	bir kök sıfır	
	(a) $p > 0$	diğer kök +	Kararsız
	(b) $p < 0$	diğer kök -	Etkisiz kararlı
C.	$q < 0$	zıt işaretler	Kararsız
II.	$\triangle = 0$	Reel ve eşit	
A.	$p > 0$	her ikisi de +	Kararsız
B.	$p = 0$		
	(**a**) en az bir $a, b, c, d \neq 0$	her ikisi de sıfır	Cebirsel kararsız
	(**b**) $a, b, c, d = 0$	her ikisi de sıfır	Etkisiz kararlı
C.	$p < 0$	her ikisi de -	Kararlı
III.	$\triangle < 0$	Karmaşık eşlenik	
A.	$p > 0$	reel kısım +	Kararsız
B.	$p = 0$	reel kısım sıfır	Etkisiz kararlı
C.	$p < 0$	reel kısım -	Kararlı



Şekil 1.5 Kararlılık diyagramı

2. ÇOK DİLLİ NÜFUSA UYGULAMA

2.1 Giriş

Bir topluluk içinde tek dil kullanımı ve iki dil kullanımı arasındaki etkileşimi araştırmak nüfus dinamiğinde oldukça ilgi çekici bir çalışma konusudur.

Dünyadaki hemen hemen her ülkede; bir azınlık dilinin azalışı ve olası yok oluşu dikkate değer bir endişe yaratan bir sorun olabilir. Kanada'da Fransızca, Amerika Birleşik Devletleri'nde İspanyolca, Galler'de Galler dili, Türkiye'de Kürtçe, Kenya'da Swahili, v.s. dillerin tehdit altında olması demek, kendilerini bu dillerle belirleyen insanların kimliklerinin de tehlike altında olduğu hissini doğurmaktadır. Belirli bir dilin devamlılığı ve büyümesi, Kanada'da, Amerika'nın belli bölgelerinde ve diğer birçok ülkede görüldüğü gibi ciddi bir politik sorun olabilir (Fishman 1978, Wagner 1981, Bourhis 1984, Wardhough 1987).

Belirli bir dilin zenginleşip büyüdüğünü veya azalıp en sonunda yok olduğunu belirleyebilen birçok faktör vardır (Wardhough 1987). Fakat, bir dilin büyümesindeki temel faktör, dili konuşmayı terk eden kişi sayısının, dili konuşmaya başlayan kişi sayısından az kalmasıdır.

Bu çalışmada, basit bir yapıda, sadece iki dil grubu arasındaki ilişkinin dinamikleri modellenecektir. Şöyle ki, kapalı bir yörede iki dil konuşan popülasyonun tek dil konuşan popülasyonla etkileştiği durumu göz önüne alacağız. Örneğin Kanada'da ve Amerika'da, sadece İngilizce konuşan bir nüfusun, İngilizce ve Fransızca veya İngilizce ve Almanca veya İngilizce ve İspanyolca veya İngilizce ve İtalyanca veya İngilizce ve diğer bazı dillerde iki dili konuşan ikinci bir popülasyonun olduğu sayısız topluluk vardır. İngilizce konuşan bir ülkede çocukların İngilizce'de akıcı olması için dikkate değer bir baskının olduğu çok iyi bilinir. Çoğunlukla İngilizce fırsat dili olarak görülür. Sonuç olarak azınlık dili hayatta kalmak için çaba içinde olabilir.

Baggs and Freedman (1990)’da, ikinci dili öğrenme oranını belirleyen dinamikler üzerinde lojistik büyüme ve çok özel kabuller kullanılarak, bir nüfusun tek dil ve iki dil bileşenleri arasında bir model üzerinde çalışılmıştır. Bir popülasyon için böyle büyüme dinamikleri yaygın bir şekilde kullanıldığından lojistik büyüme kabulü hiçbir sorun yaratmamaktadır. Bu çalışmada, lojistiği özel bir durum olarak içeren daha genel bir büyüme yasası kullanılmakta olup bu, analizleri etkilememektedir.

Baggs and Freedman (1990)’da ele alınan modeller diğer bazı yönlerden eleştirilebilir. Bunların bir tanesi ikinci dili öğrenmeye götüren dinamiklerin bilinmediğidir. Böylece, bu dinamikleri temsil eden özel fonksiyonlar doğru olmayabilir. Bu nedenle, bu modelde daha genel bir fonksiyon kullanılacaktır.

Baggs and Freedman (1990)’daki modeller ile ilgili ikinci bir eleştiri; tüm durumlarda, aşikâr olmayan periyodik çözümlerin olabilirliğinin elimine edilememesidir. Planlama amaçları açısından son nüfus oranlarının tahmin edilebilirliği önemlidir. Bu, matematiksel olarak çözümlerin bir kararlı denge durumuna yaklaşıldığı bir model sınıfına sahip olmanın istenmesi anlamına gelir. Böyle bir model sınıfını tanımlamak bu çalışmanın ana amacından birisi olacaktır.

Aşağıda ilk olarak modeller ve denge noktaları açıklanacaktır. 3. kesimde ise arzu edilen aşikâr dinamikler için kriterler elde edilecektir.

2.2 Modeller ve Eşitlikler

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$ sırasıyla t zamanında, toplulukta, tek dil ve iki dil konuşan popülasyon sayısını belirtsin. Bu durumda büyüme ve etkileşimlerinin modeli olarak aşağıdaki otonom adi diferensiyel denklem sistemi önerilebilir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= B_1(x_1) - D_1(x_1) - x_1 x_2 f(x_1, x_2) + P_1 B_2(x_2) \\ \dot{x}_2(t) &= P_2 B_2(x_2) - D_2(x_2) + x_1 x_2 f(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

Burada,

$$x_1(0) \geq 0, \;\; x_2(0) \geq 0, \;\; . = \frac{d}{dt}$$

dir. Bu modelin çeşitli elemanlarının açıklamaları ve kabulleri aşağıda verilmektedir. Fakat öncelikli olarak $t \geq 0$ için (2.1)'in çözümleri var, tek ve sürekli olsun diye tüm fonksiyonların yeterli şekilde pürüzsüz olduğunu kabul edelim.

$B_i(x_i)$ ve $D_i(x_i)$ sırasıyla x_i'nin doğum ve ölüm oranlarıdır. Varsayıyoruz ki (Freedman and Waltman (1978), Freedman and Gopalsamy (1986)),

$$(H1): B_i(0) = D_i(0) = 0, \;\; B_i(x_i) > 0 \text{ ve } D_i(x_i) > 0, \;\; x_i > 0 \text{ için,}$$

$$B_i'(0) > D_i'(0), \;\; \exists \;\; K_i > 0 \;\ni\; B_i(K_i) = D_i(K_i), \;\; B_i'(K_i) < D_i'(K_i)$$

Farklı dil grupları için farklı K_i (taşıma kapasitesi) ele almak farklı kültürel alt yapıların olabilirliğini göstermektedir.

$(H1)$ kabulleri altında,

$$\dot{x} = B(x) - D(x), \;\; x(0) > 0$$

çözümlerinin $t \to \infty$ için K ya yaklaştığı, $B(x(t-\tau))$, $B(x(t))$'nin yerine geçse bile, aşikârdır. (Freedman and Gopalsamy (1986)).

$f(x_1, x_2)$, tek dil konuşan nüfusun, ikinci dili öğrenme oranıyla ilişkilendirilen bir fonksiyondur. Nüfus artarken, toplumda sosyalleşmek için iki dilli olma gereksinimi yok olacağından, $f(x_1, x_2)$ nin azalan bir fonksiyon olduğunu beklemek uygundur. Fakat matematiksel amaçlar için böyle bir kabul gerekli değildir. Bu aşamada, tek ihtiyacımız,

$$(H2): \quad x_1, x_2 > 0 \text{ için } f(x_1, x_2) > 0$$

kabulünü yapmaktır.

Son olarak P_1, $0 < P_1 < 1$, iki dil konuşan ailede doğan çocukların, tek dil konuşan nüfusa katılacaklarının ortalama olasılığıdır. Böylece, $P_2 = 1 - P_1$ dir.

Baggs and Freedman (1990)'da,

$$B_i(x_i) = B_i x_i, \ D_i(x_i) = D_i x_i + L_i x_i^2 \ \text{(böylece } K_i = (B_i - D_i)/L_i \text{)},$$
$$f(x_1, x_2) = \alpha(1 + x_1)^{-1}$$

alınmış olup, Baggs and Freedman (1990)'daki model, böylece (2.1) modelleri tarafından içerilmektedir.

(2.1) sistemi her zaman orjinde, $E_0(0,0)$, ve x_1- ekseni üzerinde, $E_1(K_1, 0)$ denge noktasına sahiptir. Sistem, bir veya daha fazla $\hat{E}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ $(\hat{x}_1 > 0, \hat{x}_2 > 0)$ iç (pozitif) denge noktasına sahip olabilir ya da olmayabilir. Bunlar, tek mümkün olabilecek denge noktalarıdır.

$\hat{E}$ nın ne zaman var olduğunu bilmek dikkat çekicidir. Eğer cebirsel denklem

$$\begin{aligned} B_1(x_1) - D_1(x_1) - x_1 x_2 f(x_1, x_2) + P_1 B_2(x_2) = 0 \\ P_2 B_2(x_2) - D_2(x_2) + x_1 x_2 f(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

pozitif bir çözüme sahipse, $\hat{E}$ var olacaktır.

(2.2)'nin yerine (2.2)'de ikinci denklemi ve (2.2) denklemlerinin toplanmasıyla elde edilen denklemi içeren sistemi ele almak daha uygun olur. Yani (2.2) sistemi yerine,

$$B_1(x_1) - D_1(x_1) + B_2(x_2) - D_2(x_2) = 0 \tag{2.3}$$

$$P_2 B_2(x_2) - D_2(x_2) + x_1 x_2 f(x_1, x_2) = 0 \tag{2.4}$$

sistemini göz önüne alalım. (2.3) ve (2.4) denklemleri x_1x_2- düzleminde çizilebilir. Γ ve Γ_2 sırasıyla bunların grafikleri olsun. Γ ve Γ_2 nin pozitif kesişimi, pozitif denge noktasını verir.

(H_1)'den, Γ, $(0,0),(K_1,0),(0,K_2)$ ve (K_1,K_2) noktalarından geçen kapalı bir eğridir (Baggs and Freedman (1990)'da bir elips idi).

Şimdi $x_2 = 0$ olduğunda Γ_2 yi düşünelim. $\hat{x}_1$, eğer var ise, $(\hat{x}_1, 0)$ Γ_2 üzerinde olacak şekilde bir nokta olsun.

Bu durumda, L'Hospital kuralından,

$$\hat{x}_1 f(\hat{x}_1, 0) = D_2'(0) - P_2 B_2'(0) \tag{2.5}$$

dır. Şimdi $\hat{x}_2$, $(0, \hat{x}_2)$ noktası Γ_2 üzerinde olacak şekilde seçilsin. O zaman $\hat{x}_2$,

$$P_2 B_2(\hat{x}_2) = D_2(\hat{x}_2)$$

yi sağlar ve $P_2 < 1$, olduğundan $\hat{x}_2 < K_2$ dir. Aslında $\hat{x}_2 < 0$ olabilir.

Şimdi en az bir $\hat{E}$ nın varlığını garanti eden kriterler elde edebiliriz.

Teorem 2.1.

(i) $\hat{x}_2 \geq 0$ ve (2.5) denklemi $0 < \hat{x}_1 < K_1$ aralığında $\hat{x}_1$ çözümüne sahip değildir.

ya da,

(ii) (2.5) denklemi $0 < \hat{x}_1 < K_1$ aralığında bir tek $\hat{x}_1$ çözümüne sahiptir koşullarından biri gerçekleniyorsa, o zaman bir $\hat{E}$ vardır.

İspat:

Eğer (i) olursa, o zaman açıkça Γ ve Γ_2 kesişmelidir. Eğer (ii) olursa o zaman Γ_2, $x_1 = \hat{x}_1$ da pozitif kuadranta girer ve K_1'e kadar çıkamaz ve böylece Γ ile kesişir.

Baggs and Freedman (1990)'da Γ_2 artan bir eğri olduğu için ya $\hat{x}_2 > 0$ ya da $\hat{x}_1 < K_1$ olması $\hat{E}$'nın varlığını garanti etmek için yeterli idi.

Son olarak iki sınır denge noktası için bazı temel kararlılık sonuçlarından bahsedelim.

E_0 kararsızdır. E_1, x_1 ekseni boyunca kararlı bir manifolda sahiptir. $P_2 B_2'(0) - D_2'(0) + K_1 f(K_1, 0)$ sırasıyla negatif ve pozitif olurken, E_1, x_2 yönünde yerel kararlı veya kararsız olacaktır.

2.3 Aşikar Dinamikler İçin Kriterler

Bu bölümde aşikâr olmayan periyodik çözümlerin var olamayacağı $f(x_1, x_2)$ fonksiyon sınıfı tanımlanacaktır. İlk olarak büyüme yasasındaki ek hipotezlerin sağlandığını farz edelim. Bunlar tamamen lojistik tip büyümeyle uyumludur.

$$(H3):\ \frac{d}{dx_1}\left[\frac{B_1(x_1)-D_1(x_1)}{x_1}\right]=-\beta_1(x_1)<0$$

$$\frac{d}{dx_2}\left[\frac{P_2B_2(x_2)-D_2(x_2)}{x_2}\right]=-\beta_2(x_2)<0.$$

Kriterlerimizi oluştururken aşağıda belirtilen Dulac's Teoremi diye adlandırılan bir teorem kullanacağız (Andronov *et al.* (1973)).

Lemma 2.1. (Dulac's Teoremi):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2),\end{aligned} \tag{2.6}$$

sistemini göz önüne alalım. Burada, F_1 ve F_2, basit irtibatlı bir R bölgesinde C^1 fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $A(x_1, x_2)\neq 0$ fonksiyonu da R'de C^1 sınıfından olsun. Bu durumda eğer,

$$\Delta(x,y)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[A(x_1,x_2)F_1(x_1,x_2)\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[A(x_1,x_2)F_2(x_1,x_2)\right]$$

fonksiyonu R de işaret değiştirmezse (veya sıfıra özdeşse), tamamen R içinde bulunan aşikâr olmayan periyodik çözümler yoktur.

Teorem 2.2.

$f(x_1, x_2)\in C^1$ olsun. $(H2)$ ve $(H3)$ hipotezleri sağlansın. O zaman $f(x_1, x_2)$,

$$f(x_1,x_2)=G(x_1+x_2)+H_1(x_1)+H_2(x_2)+\delta_1 x_1+\delta_2 x_2 \tag{2.7}$$

formuna sahipse, o zaman (2.1) sistemi $\{(x_1, x_2) | 0 < x_1, 0 < x_2\}$ bölgesinde aşikâr olmayan periyodik çözümlere sahip değildir. Burada tüm $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ için

$$H_1'(x_1) \geq 0, \quad H_2'(x_2) \leq 0, \quad \delta_1 \geq \delta_2 \tag{2.8}$$

dir.

İspat:

x_1 ekseni değişmez (invariant) olduğu için ve

$$\hat{x}_1 \Big|_{x_1=0} = B_1(0) - D_1(0) + P_1 B_2(x_2) > 0, \quad x_2 \geq 0 \text{ için,}$$

olduğundan, her periyodik çözüm tamamen pozitif kuadrant içinde kalmalıdır. Böylece eğer biz keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$R = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq \varepsilon, x_2 \geq \varepsilon\}$$

seçersek ve R ‘de periyodik çözümün olmadığını gösterirsek teoremi ispatlamış olacağız.

$A(x_1, x_2) = x_1^{-1} x_2^{-1}$ seçelim. O zaman, R üzerinde $A(x_1, x_2) \in C^1$ dir. Şimdi (2.1) sistemi için Dulac’s teoreminde verildiği gibi $\Delta(x, y)$’yi hesaplarız ve

$$\Delta(x_1, x_2) = -\frac{\beta_1(x_1)}{x_2} - \frac{\beta_2(x_2)}{x_1} - \frac{P_1 B_2(x_2)}{x_1^2 x_2} + f_{x_2}(x_1, x_2) - f_{x_1}(x_1, x_2) \tag{2.9}$$

elde ederiz.

(2.7)'den

$$f_{x_2}(x_1, x_2) - f_{x_1}(x_1, x_2) = H_2'(x_2) - H_1'(x_1) + \delta_2 - \delta_1$$

pozitif değildir [(2.8)'den]. Böylece $(H3)$ tarafından $\Delta(x_1, x_2) < 0$ ve sonuç Dulac's teoreminden devam eder.

Sonuç 2.1 .

Eğer Teorem 2.2'nin hipotezleri var olur ve $\hat{E}$ var olmazsa, o zaman $\lim_{t\to\infty}(x_1(t), x_2(t)) = (K_1, 0)$ olur.

İspat:

$\dot{x}_t(t) + \dot{x}_2(t) = B_1(x_1) - D_1(x_1) + B_2(x_2) - D_2(x_2)$ olduğundan, Γ'nın dışındaki çözümlere karşılık gelen toplam popülasyon artar. Böylece toplam popülasyon sınırlıdır. O zaman çözümler dengeye yaklaşmalıdır ve mümkün olan sadece E_1 dir.

Not 2.1.

(2.7) tarafından verilen $f(x_1, x_2)$ formu $f_{x_2}(x_1, x_2) - f_{x_1}(x_1, x_2) \le 0$ eşitsizliğini çözmek için kullanıldı (Rektorys (1969)).

Not 2.2.

$[2]$'de $f(x_1, x_2) = \alpha(1 + x_1)^{-1}$ alınmıştır. Bu fonksiyon (2.7)'yi sağlamaz. (2.7)'yi sağlayan kabul edilebilir bir fonksiyon, $f(x_1, x_2) = \alpha(1 + x_1 + x_2)^{-k}$, $k \ge 1$ olabilir.

3. BİR KÜLTÜR GRUBU İÇİNDEKİ NÜFUS DAĞILIMININ MATEMATİKSEL MODELLERİ

3.1 Giriş

Önceki birkaç çalışmada (Baggs and Freedman 1990, 1993), Baggs ve Freedman, birçok dil grupları arasındaki etkileşim için birçok model yayımladılar. Bu kesimde, bu grupların sürekliliği veya yok olup gitmesi için kriterler incelenmiştir.

İki dil konuşmak iki kültürlü olmanın özel bir durumudur. Fakat genelde iki kültürlülük, iki dillilikte bulunmayan karışık bir görünüşe sahiptir. Örneğin, her bir kültürel grup onunla ilgili çeşitli mezhep veya alt kültürlere sahip olabilir. Kültürün din ile tanımlanması daha yaygındır. Bir birey birden daha fazla kültüre ait olabilir.

Bir kültürel grubu tanımlayan genel kabuller vardır. Bunların bazıları din, etnik köken ve coğrafyadır. Böyle bir kültürü tanımlamak için yaygın geleneğin genel tanımlaması (Soares 1997) kabul edilebilir. Kültürel gruplar, bazı durumlarda tanımlandıktan sonra, modellemenin amacı için, sabit bir popülasyon ya da değişken bir popülasyon düşünülebilir. Fakat (Dumond 1969)'de Dumond, büyümenin hem uzun dönem kültürel gelişmeleri hem de sosyal organizasyonlardaki değişiklikleri etkilediğini tartışır. Böylece modellerimiz değişen popülasyonları içerir.

Bu çalışma kültürel modellerle ilgili olduğu için, ilk durumda "Ortodoks", "liberal", ikinci durumda "Ortodoks", "muhafazakar" ve "liberal" olarak tanımlanabilen 2 veya 3 alt kültürleri içeren tek bir kültürel grup içindeki popülasyon akışı ve dağılımını gösterir. Bir kültürel grup içindeki daha genel donanım ve kültürel grup arasındaki etkileşim modellerini sonraki çalışmalara bırakıyoruz.

2. kesimde 2 alt kültür modelini ve 3. kesimde de 3 alt kültür modelini ele alacağız. Bunların her birinde model geliştireceğiz, denge arayacağız ve kararlılıklarını tartışacağız. Daha sonra periyodik çözümlerin olup olmadığı sorusunu ele alacağız ve

son olarak tüm alt kültürlerin sürekliliği veya süreksizliği(yok oluşla ilgili) için kriterler elde edeceğiz.

Süreklilik bir matematiksel formülasyon olarak verilebilir (Freedman and Waltman 1985, Butler *et al.* 1986, Freedman and Moson 1990). Eğer $N(0) > 0$ *ise*, $\liminf_{t\to\infty} N(t) > 0$ olduğunu belirtir, $N(t)$ popülasyonunun kuvvetli olarak sürekli olduğu söylenir. Eğer $\liminf_{t\to\infty} N(t) > \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa; burada δ $N(0) > 0$ 'dan bağımsızdır; o zaman $N(t)$ düzgün süreklidir. Bu tanımları çalışmanın geri kalanı boyunca kullanacağız.

3.2 İki Alt Kültür Modeli

3.2.1 Model

Genel olarak (3.1) deki kültür gibi verilen, birbiri ile ve popülasyonla ilişkili iki alt kültürlü modelimizi alalım.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 g_1(x_1) - x_2 f_1(x_1) + x_1 f_2(x_2) + \varepsilon_1 x_1, \qquad x_1(0) = x_{10} \geq 0, \\ \dot{x}_2 &= x_2 g_2(x_2) - x_1 f_2(x_2) + x_2 f_1(x_1) + \varepsilon_2 x_2, \qquad x_2(0) = x_{20} \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

burada $\cdot = \dfrac{d}{dt}$. Burada $t \geq 0$ zamanında $x_1(t)$ liberal alt kültürlerin konsantrasyonudur ve $x_2(t)$ ortodoks alt kültürlerin konsantrasyonudur. $g_i(x_i)$, x_i popülasyonunun spesifik büyüme oranıdır. Böyle bir büyümeyi yeterli şekilde Dumond 1969'da yorumlarla detaylandırmıştır. Keyfitz'e göre (1977), lojistik büyüme insan popülasyonuna mantıklı bir yaklaşımdır. Böylece biz $g_i(x_i)$'nin lojistiğin (Freedman 1980) genelleştirilmiş bir hali olduğunu farz ederiz. Bu, $g_i(x_i)$ üzerindeki aşağıdaki kabulleri doğurur.

$$g_i(0) > 0, \quad \frac{dg_i(x_i)}{dx_i} < 0, \quad K_i > 0 \text{ var}$$

(H1)

$$\text{öyle ki, } g_i(K_i) = 0, \quad \lim_{x_i \to \infty} g_i(x_i) = -\infty, \quad i = 1,2.$$

K_i, i. popülasyon için çevre taşıma kapasitesidir. Son kabul, aşırı popülasyonun (büyük ölüm oranının) sonuçlarını belirtir.

Her kültürde, bir alt kültürel grubun alt kültürleri değiştirmek için diğerinin üyeleri üzerinde kullandığı kuvvet ve etkiler vardır. Bu, felsefi ve dini farklılıkların olduğu yerlerde (toplumlarda) kısmen doğrudur. Bu, modelde $x_i f_j(x_j),\ i, j = 1,2, \quad i \neq j$ formu şartıyla birleştirilir. Elbette eğer herhangi bir alt kültür popülasyondan mahrumsa orada etkileme yoktur ve popülasyon büyüdükçe etki de büyür. Bu $f_i(x_i)$ üzerindeki kabule öncülük eder ki,

(H2) $$f_i(0) = 0, \quad \frac{df_i(x_i)}{dx_i} > 0, \quad i = 1,2.$$

Dahası, bireyler liberalden ortodoksa geçebilmesine rağmen, ortodokstan liberale geçişte daha yüksek bir oranın olduğu belirtilmiştir. Böyle kanıtlar, dini kültürel gruplar arasında olan evliliklerdeki artış kadar kilise ve dini okullara katılımlardaki azalışın genel bir gidişatını gösteren istatistiklerdendir (Kelley 1971, Mol 1971, Oosthuizen 1988). Sonuç olarak,

(H3) $$f_2(.) > f_1(.)$$

olduğunu farz ediyoruz.

Son olarak, toplumun bütünü ile alt kültürlerin etkileşimi arasında sorun vardır. Bireyler, kültürel grupları bırakabilir veya kültürel gruplara katılabilir; ya da tam izolasyon durumunda (coğrafi ya da kültürel açıdan) bireyler hiçbir surette genel toplulukla etkileşim içinde olmayablir. $\varepsilon_i x_i$ formu bu etkileşimi gösterir. Eğer $\varepsilon_i > 0$ ise genel topluluktan i. alt kültüre net artış vardır; eğer $\varepsilon_i < 0$ ise genel toplulukta net düşüş var; eğer $\varepsilon_i = 0$ ise öyle bir artış veya düşüş yoktur. Artış veya azalışın liberal alt kültürden geldiği düşünülür, fakat artışlar ve azalışlar diğer alt kültürler için de mümkün olabilir. Örneğin, değişen en bağnaz kültür olabilir.

Son olarak, modelimize dinamik bir sistem olarak yaklaşılsın diye tüm fonksiyonların fazlasıyla pürüzsüz, ki (3.1)'in bütün çözümlerinin var, tek ve tüm pozitif zaman için sürekli olmasını farz ederiz.

$f_i(0) = 0$ için bazen onu,

$$f_i(x_i) = x_i h_i(x_i)$$

yazmak uygundur

ve

(H4) $$h_i(0) \geq 0, \quad \frac{dh_i(x_i)}{dx_i} \geq 0, \quad i = 1,2, \quad h_2(.) > h_1(.).$$

Daha sonra (3.1) sistemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 g_1(x_1) - x_1 x_2 h_1(x_1) + x_1 x_2 h_2(x_2) + \varepsilon_1 x_1, \quad x_1(0) = x_{10} \geq 0, \\ \dot{x}_2 &= x_2 g_2(x_2) - x_1 x_2 h_2(x_2) + x_1 x_2 h_1(x_1) + \varepsilon_2 x_2, \quad x_2(0) = x_{20} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

formunu alır.

Pozitif başlangıç şartlı (değerli) çözümler pozitif kalmalıdır. Şimdi sistemin dissipative olduğunu gösteririz. İlk olarak eğer $x = x_1 + x_2$ ise, o zaman

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x_1 g_1(x_1) + x_2 g_2(x_2) + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 \\
&= -x + x_1\left(g_1(x_1) + \varepsilon_1 + 1\right) + x_2\left(g_2(x_2) + \varepsilon_2 + 1\right)
\end{aligned}
$$

dir.

$\lim_{x_i \to \infty} g_i(x_i) = -\infty$ olduğu için, 0< $M_i = \sup_{0 \le x_i < \infty} x_i\left(g_i(x_i) + \varepsilon_i + 1\right)$ vardır. O zaman eğer $M = M_1 + M_2$ ise $\dot{x} \le -x + M$ elde ederiz. Standart karşılaştırma teorisinin kullanımı

$$
0 \le x_1(t) + x_2(t) \le (x_{10} + x_{20} - M)e^{-t} + M
$$

eşitsizliğini verir.

3.2.2 Denge

Mümkün olan dört denge vardır. Açık olarak $E_0 : (0,0)$ denge noktasıdır.
L_i , $i = 1,2$ ile belirtilen diğer iki denge noktasını elde etmek için,

$$
g_i(L_i) + \varepsilon_i = 0
$$

denkleminin tek çözümlerini belirtiriz. Açıkça, sadece $g_i(0) > 0$ ve $x_i \to \infty$ iken $g_i(x_i)$, $-\infty$ a doğru azaldığı için L_i vardır. Eğer $\varepsilon_i > 0$ ise, o zaman $L_i > K_i$; eğer $\varepsilon_i = 0$ ise, o zaman $L_i = K_i$; eğer $-g_i(0) < \varepsilon_i < 0$ o zaman $0 < L_i < K_i$ dir. Yukarıda yazılanlardan görüyoruz ki, $E_1 : (L_1, 0)$ ve $E_2 : (0, L_2)$ denge noktalarıdır.

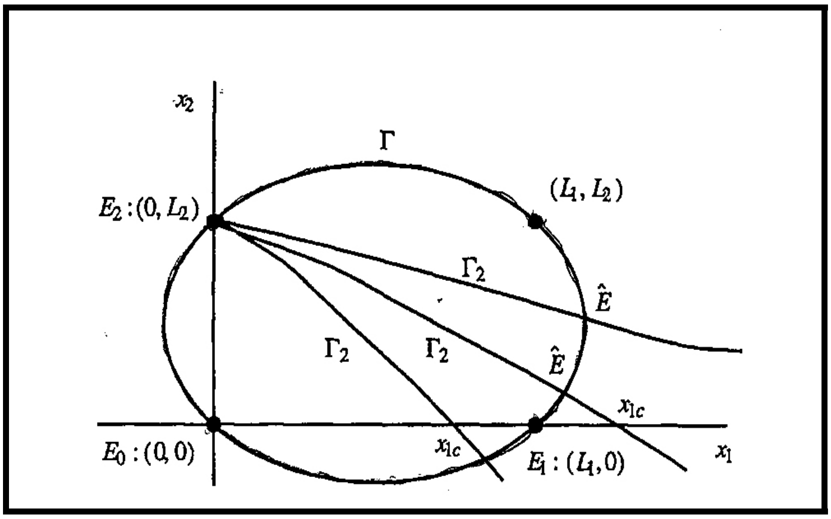
$\hat{E} : (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ ile gösterilen bir iç denge noktası olabilir ya da olmayabilir. Eğer $\hat{E}$ varsa, o cebirsel denklemin çözümü olmalıdır.

$$x_1 g_1(x_1) - x_1 x_2 h_1(x_1) + x_1 x_2 h_2(x_2) + \varepsilon_1 x_1 = 0,$$
$$x_2 g_2(x_2) - x_1 x_2 h_2(x_2) + x_1 x_2 h_1(x_1) + \varepsilon_2 x_2 = 0. \tag{3.3}$$

(3.3)'ün iki denklemini toplayarak ve ikinci denklemi kullanarak aşağıdaki eşdeğer sistemi elde ederiz.

$$x_1 g_1(x_1) + \varepsilon_1 x_1 + x_2 g_2(x_2) + \varepsilon_2 x_2 = 0 \tag{3.4}$$

$$g_2(x_2) - x_1 h_2(x_2) + x_1 h_1(x_1) + \varepsilon_2 = 0 \tag{3.5}$$



Şekil 3.1 (H.I. Freedman *et al.*'dan aynen alınmıştır)

Γ, denklem (3.4) ile gösterilen eğri olsun. O zaman Γ, $(0,0)$, $(L_1,0)$, $(0,L_2)$ ve (L_1,L_2) den geçen kapalı konveks bir eğridir (Şekil 3.1). Γ_2, denklem (3.5) ile belirtilen eğri olsun. O zaman $\hat{E}$, eğer Γ_2, Γ'yı (x_1, x_2)'nin bazı pozitif değerlerinde keserse, vardır.

Γ_2'yi düşün. $(0, L_2)$ boyunca uzanır (geçer). Şimdi hem Γ hem de Γ_2 için

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{(0,L_2)}$$

yi hesaplayalım. Genelinde $g_i(0)+\varepsilon_i > 0$ olduğunu farz ediyoruz. Γ üzerinde $g_i'(x_i) < 0$ olduğu için,

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{(0,L_2)} = -\frac{g_1(0)+\varepsilon_1}{g_2(L_2)+L_2 g_2'(L_2)+\varepsilon_2} = -\frac{g_1(0)+\varepsilon_1}{L_2 g_2'(L_2)} > 0,$$

dır. Γ_2 üzerinde $h_2(L_2) > h_2(0) > h_1(0)$ olduğu için,

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{(0,L_2)} = \frac{h_2(L_2)-h_1(0)}{g_2'(L_2)} < 0,$$

dır. Böylece, küçük pozitif x_1 için , Γ_2, Γ içine doğru uzanır. Eğer Γ_2 üzerinde tüm $x_1 > 0$ için $x_2 > 0$ ise o zaman Γ_2, Γ'yı kesmelidir ve $\hat{E}$ var olmalıdır. (3.5)'den x_{1c}'nin

$$g_2(0) - x_{1c}h_2(0) + x_{1c}h_1(x_{1c}) + \varepsilon_2 = 0 \tag{3.6}$$

denklemini sağladığını görürüz.

Eğer $\hat{E}$ varsa, o zaman o tektir, Γ ve Γ_2'nin çoklu pozitif kesişimlerine sahip olmak için, Γ_2 'nin kendi üzerine ters döneceği Γ'nın dış bükeyliğine sahip olmamız gerekir. Fakat,

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{(\Gamma_2)} = \frac{h_2(x_2)-h_1(x_1)-x_1h_1'(x_1)}{g_2'(x_2)-x_1h_2'(x_2)},$$

ve payda sürekli negatif olduğu ve böylece asla sıfır olmayacağı için bu gerçekleşemez. Yukarıdan aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.1. Denklem (3.6) ya

(i) pozitif x_{1c} çözüme sahip olmasın ya da

(ii) $x_{1c} > L_1$ den büyük pozitif bir x_{1c} çözümüne sahip olsun.

O zaman tek bir $\hat{E}$ vardır.

3.2.3 Periyodik çözümler

(3.2) sisteminin pozitif kuadrantta bulunan periyodik çözümünün olmadığını göstermek için Dulac's Teoremini (Baggs and Freedman 1990) kullanacağız.

Önerme 3.1.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{3..7}$$

sistemini düşünelim.

D, basit irtibatlı bir bölge ve $F_1(x_1, x_2)$, $i = 1,2$ ve $B(x_1, x_2) \in C^2(D)$ olsun. Dulac fonksiyonu $D(x_1, x_2)$'yi

$$D(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(B(x_1, x_2)F_1(x_1, x_2)\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(B(x_1, x_2)F_2(x_1, x_2)\right).$$

ile tanımlayalım.

O zaman eğer $D(x_1, x_2)$, D bölgesinde pozitif derecede işaret değiştirmez ve sıfır olmazsa tamamen D bölgesi içinde kalan (3.7)'nin kapalı çözümleri olmayabilir.

Teorem 3.2. Birinci kuadrantta bulunan sistem (3.2)'nin kapalı (ve böylece periyodik çözümleri olmayan) çözümleri yoktur.

İspat: $\delta > 0$ ve $D = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq \delta; x_2 \geq \delta\}$

$$F_1(x_1, x_2) = x_1 g_1(x_1) - x_1 x_2 h_1(x_1) + x_1 x_2 h_2(x_2) + \varepsilon_1 x_1,$$
$$F_2(x_1, x_2) = x_2 g_2(x_2) - x_1 x_2 h_2(x_2) + x_1 x_2 h_1(x_1) + \varepsilon_2 x_2,$$

olsun ve

$$B(x_1, x_2) = x_1^{-1} x_2^{-1} \quad \text{olsun.}$$

O zaman,

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(BF_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(BF_2) \\ &= x_2^{-1} g_1'(x_1) - h_1'(x_1) + x_1^{-1} g_2'(x_2) - h_2'(x_2). \end{aligned}$$

dir.

$g_1' < 0$, $g_2' < 0$, $h_1' > 0$ ve $h_2' > 0$ olduğu için, $D(x_1, x_2) < 0$ dır. Böylece $\delta > 0$ keyfi olduğundan Dulac's teoreminden sonuç devam eder.

3.2.4 Kararlılık

Sistem (3.1)'in çeşitli denge noktalarının kararlılığını hesaplamak için, M 'yi, (x_1, x_2) noktası üzerinde dönüşümsel matris olarak alırız.

$$M = \begin{bmatrix} x_1 g_1'(x_1) + g_1(x_1) - x_2 f_1'(x_1) + f_2(x_2) + \varepsilon_1 & -f_1(x_1) + x_1 f_2'(x_2) \\ -f_2(x_2) + x_2 f_1'(x_1) & x_2 g_2'(x_2) + g_2(x_2) - x_1 f_2'(x_2) + f_1(x_1) + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

$E_0 : (0,0)$ noktasında M 'yi hesaplarsak

$$M_0 = \begin{bmatrix} g_1(0)+\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & g_2(0)+\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

$g_i(L_i)+\varepsilon_i = 0$ varsayımımızdan, her iki özdeğer pozitiftir ve böylece bu denge noktası kararsızdır.

$E_1 : (L_1, 0)$ noktasında M 'yi hesaplarsak

$$M_1 = \begin{bmatrix} L_1 g_1'(L_1)+g_1(L_1)+\varepsilon_1 & -f_1(L_1)+L_1 f_2'(0) \\ 0 & g_2(0)-L_1 f_2'(0)+f_1(L_1)+\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Böylece,

$$M_1 = \begin{bmatrix} L_1 g_1'(L_1) & -f_1(L_1)+L_1 f_2'(0) \\ 0 & g_2(0)-L_1 f_2'(0)+f_1(L_1)+\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

olur.

$L_1 g_1'(L_1) < 0$ olduğundan ilk özdeğer negatiftir.

Şimdi E_1 için ikinci özdeğeri düşünelim. Eğer $g_2(0)-L_1 f_2'(0)+f_1(L_1)+\varepsilon_2 > 0$ ise, o zaman $(L_1, 0)$ bir hiperbolik semer noktasıdır. Eğer $g_2(0)-L_1 f_2'(0)+f_1(L_1)+\varepsilon_2 < 0$ ise, o zaman $(L_1, 0)$ kararlı denge noktasıdır.

$E_2 : (0, L_2)$ noktasında M 'yi hesaplarsak

$$M_2 = \begin{bmatrix} g_1(0) - L_2 f_1'(0) + f_2(L_2) + \varepsilon_1 & 0 \\ -f_2(L_2) + L_2 f_1'(0) & L_2 g_2'(L_2) + g_2(L_2) + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

verir. Böylece

$$M_2 = \begin{bmatrix} g_1(0) - L_2 f_1'(0) + f_2(L_2) + \varepsilon_1 & 0 \\ -f_2(L_2) + L_2 f_1'(0) & L_2 g_2'(L_2) \end{bmatrix}$$

olur ve ikinci özdeğer $L_2 g_2'(L_2) < 0$ negatiftir.

Şimdi E_2 için ilk özdeğeri, $g_1(0) - L_2 f_1'(0) + f_2(L_2) + \varepsilon_1$, düşünelim. Tanım ile $g_1(0) + \varepsilon_1 > 0$ dır. Aynı zamanda $f_2(L_2) - f_1'(0) > 0$ dır. Bundan ötürü bu özdeğer pozitiftir ve böylece $E_2 : (0, L_2)$ hiperbolik semer noktasıdır.

Hem E_1 hem de E_2'nin semer noktası olması durumunda tek olan bir iç denge noktası var olmalıdır. Sistem dissipative olduğu için, eğer $\hat{E}$ varsa o zaman o $x_{10} > 0, x_{20} > 0$ gibi çözümlerle ilgili asimptotik olarak kararlıdır.

Eğer x_{1c} varsa, x_{1c} L_1'den bağımsızdır fakat L_2'ye bağlıdır. Bu; eğer L_1, sabit L_2 için yeteri kadar büyükse, o zaman $\hat{E}$'nın var olmayacağını, E_1'in asimptotik olarak kararlı olduğunu ve x_2'nin yok olacağını belirtir (Şekil 3.1).

3.3 Üç Alt Kültür Modeli

3.3.1 Model

Bu kısımda kültürün, üç alt kültürün, "ortodoks", "muhafazakar" ve "liberal", birleşimi durumunu ele alacağız. Bu (3.8) modeline öncülük eder.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 g_1(x_1) - x_2 f_1(x_1) + x_1 f_{21}(x_2) + \varepsilon_1 x_1, \\
\dot{x}_2 &= x_2 g_2(x_2) - x_1 f_{21}(x_2) + x_2 f_1(x_1) - x_3 f_{23}(x_2) + x_2 f_3(x_3) + \varepsilon_2 x_2, \\
\dot{x}_3 &= x_3 g_3(x_3) - x_2 f_3(x_3) + x_3 f_{23}(x_2) + \varepsilon_3 x_3, \\
& \qquad\qquad x_i(0) = x_{i0} \geq 0, \quad i = 1,2,3,
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Burada $x_1(t)$ liberal alt kültür topluluğu, $x_2(t)$ muhafazakar alt kültür topluluğu ve $x_3(t)$ ortodoks alt kültür topluluğudur. Sistem (3.8) deki fonksiyonlar ve kısıtlar, sistem (3.1) deki benzer yorumlara ve özelliklere sahiptir. Bundan ötürü varsayarız ki

$$g_i(0) > 0, \quad \frac{dg_i(x_i)}{dx_i} < 0 \qquad K_i > 0 \text{ olduğu yerde}$$

$(H5)$

$$\text{öyle ki } g_i(K_i) = 0, \quad \lim_{x_i \to \infty} g_i(x_i) = -\infty \qquad i = 1,2,3$$

$$f_i(0) = 0, \quad \frac{df_i(x_i)}{dx_i} > 0, \quad f_{2j}(0) = 0, \quad \frac{df_{2j}(x_2)}{dx_2} > 0, \quad i, j = 1,2,3$$

$(H6)$

$$f_1(.) < f_{21}(.), \quad f_{23}(.) < f_3(.)$$

düzenlenirse

$$f_i(x_i) = x_i h_i(x_i), \quad f_{2j}(x_2) = x_2 h_{2j}(x_2), \qquad i, j = 1,2,3$$

Farz ederiz ki,

$$h_i(0) \geq 0, \quad \frac{dh_i(x_i)}{dx_i} \geq 0, \quad h_{2j}(0) \geq 0, \quad \frac{dh_{2j}(x_2)}{dx_2} \geq 0, \qquad i, j = 1,3$$

$(H7)$

$$h_1(.) < h_{21}(.), \quad h_{23}(.) < h_3(.)$$

Genelde toplulukla herbir alt kültürün net etkileşimini temsil eden her ε_i, pozitif, negatif veya sıfır olabilir.

3.3.2 Denge ve kararlılık

Orijinde, $E_0 : (0,0,0)$, bir denge noktası ve üç eksensel denge noktası, $E_1 : (L_1,0,0), E_2 : (0,L_2,0), E_3 : (0,0,L_3)$, her zaman vardır. En azından bir veya üçten daha fazla düzlemsel denge noktası vardır. $E_{13} : (L_1,0,L_3)$ var olmalıdır. $E_{12} : (\hat{x}_1,\hat{x}_2,0)$ *ve* $E_{23} : (0,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$ var olabilir ya da olmayabilir. Son olarak $E^*(x^*{}_1,x^*{}_2,x^*{}_3)$ formu bir pozitif iç denge noktası olabilir. E_{12}'nin var olabilmesi için kriter, takip eden kısımda verilecektir ve benzer kriter E_{23} e uygulanır.

Şimdi denge sınırlarının kararlılığını tartışacağız. Genel varyasyonel matris

$$M = \begin{bmatrix} \begin{matrix} x_1 g_1'(x_1) + g_1(x_1) \\ - x_2 f_1'(x_1) + f_{21}(x_2) + \varepsilon_1 \end{matrix} & - f_1(x_1) + x_1 f_{21}'(x_2) & 0 \\ - f_{21}(x_2) + x_2 f_1'(x_1) & \begin{matrix} x_2 g_2'(x_2) + g_2(x_2) - x_1 f_{21}'(x_2) \\ + f_1(x_1) - x_3 f_{23}'(x_2) + f_3(x_3) + \varepsilon_2 \end{matrix} & - f_{23}(x_2) + x_2 f_2'(x_3) \\ 0 & - f_3(x_3) + x_3 f_{23}'(x_2) & \begin{matrix} x_3 g_3'(x_3) + g_3(x_3) \\ - x_2 f_3'(x_3) + f_{23}(x_2) + \varepsilon_3 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

ile verilir.

$E_0 : (0,0,0)$ noktasında M 'yi hesaplarsak,

$$M_0 = \begin{bmatrix} g_1(0) + \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2(0) + \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3(0) + \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Tüm özdeğerler pozitiftir ve bundan ötürü E_0 kararsız bir denge noktasıdır.

$E_1 : (L_1, 0, 0)$ noktasında M 'yi hesaplarsak,

$$M_1 = \begin{bmatrix} L_1 g_1'(L_1) & -f_1(L_1) + L_1 f_{21}'(0) & 0 \\ 0 & g_2(0) + f_1(L_1) - L_1 f_{21}'(0) + \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3(0) + \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

$L_1 g_1'(L_1) < 0$ olduğundan bu denge noktası x_1 yönünde yerel olarak kararlıdır. $g_3(0) + \varepsilon_3 > 0$ olduğu için bu denge noktası x_3 yönünde yerel olarak kararsızdır. Bundan ötürü E_1 semer noktası olmalıdır.

$E_2 : (0, L_2, 0)$ noktasında M 'yi hesaplarsak,

$$M_2 = \begin{bmatrix} g_1(0) - L_2 f_1'(0) + f_{21}(L_2) + \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -f_{21}(L_2) + L_2 f_1'(0) & L_2 g_2'(L_2) & -f_{23}(L_2) + L_2 f_3'(0) \\ 0 & 0 & g_3(0) - L_2 f_3'(0) + f_{23}(L_2) + \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bir özdeğer $L_2 g_2'(L_2) < 0$ dır. $L_2 g_2'(L_2) < 0$ olduğu için E_2, x_2 yönünde yerel olarak kararlıdır. $g_1(0) - L_2 f_1'(0) + f_{21}(L_2) + \varepsilon_1 > 0$ olduğu için, x_1 yönünde yerel olarak kararsızdır ve E_2 semer noktasıdır.

$E_3 : (0, 0, L_3)$ noktasında M 'yi hesaplarsak,

$$M_3 = \begin{bmatrix} g_1(0)+\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2(0)-L_3 f'_{23}(0)+f_3(L_3)+\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & -f_3(L_3)+L_3 f'_{23}(0) & L_3 g'_3(L_3) \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$L_3 g'_3(L_3) < 0$ olduğu için x_3 yönünde yerel olarak kararlıdır. $g_1(0)+\varepsilon_1 > 0$ olduğu için bu denge noktası x_1 yönünde yerel olarak kararsızdır. Bundan dolayı E_3 bir semer noktası olmalıdır.

$E_{12} : (\hat{x}_1, \hat{x}_2, 0)$ noktasında M 'yi hesaplarsak,

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \hat{x}_1 g'_1(\hat{x}_1)+g_1(\hat{x}_1) \\ -\hat{x}_2 f'_1(\hat{x}_1)+f_{21}(\hat{x}_2)+\varepsilon_1 \end{matrix} & -f_1(\hat{x}_1)+\hat{x}_1 f'_{21}(\hat{x}_2) & 0 \\ -f_{21}(\hat{x}_2)+\hat{x}_2 f'_1(\hat{x}_1) & \begin{matrix} \hat{x}_2 g'_2(\hat{x}_2)+g_2(\hat{x}_2)-\hat{x}_1 f'_{21}(\hat{x}_2) \\ +f_1(\hat{x}_1)-\hat{x}_3 f'_{23}(\hat{x}_2)+f_3(\hat{x}_3)+\varepsilon_2 \end{matrix} & -f_{23}(\hat{x}_2)+\hat{x}_2 f'_2(0) \\ 0 & 0 & g_3(0)-\hat{x}_2 f'_3(0)+f_{23}(\hat{x}_2)+\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

$E_{13} : (L_1, 0, L_3)$ noktasında M 'yi hesaplarsak,

$$M_{13} = \begin{bmatrix} L_1 g'_1(L_1)+g_1(L_1)+\varepsilon_1 & -f_1(L_1)+L_1 f'_{21}(0) & 0 \\ 0 & \begin{matrix} g_2(0)-L_1 f'_{21}(0)+f_1(L_1) \\ -L_3 f'_{23}(0)+f_3(L_3)+\varepsilon_2 \end{matrix} & 0 \\ 0 & -f_3(L_3)+L_3 f'_{23}(0) & L_3 g'_3(L_3)+L_3 g_3(L_3)+\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

$E_{23} : (0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ noktasında M 'yi hesaplarsak,

$$M_{23}=\begin{bmatrix} g_1(0)-\bar{x}_2 f_1'(0)+f_{21}(\bar{x}_2)+\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -f_{21}(\bar{x}_2)+\bar{x}_2 f_1'(0) & \begin{matrix}\bar{x}_2 g_2'(\bar{x}_2)+g_2(\bar{x}_2)\\ -\bar{x}_3 f_{23}'(\bar{x}_2)+f_3(\bar{x}_3)+\varepsilon_2\end{matrix} & -f_{23}(\bar{x}_2)+\bar{x}_2 f_2'(\bar{x}_3) \\ 0 & -f_3(\bar{x}_3)+\bar{x}_3 f_{23}'(\bar{x}_2) & \begin{matrix}\bar{x}_3 g_3'(\bar{x}_3)+g_3(\bar{x}_3)\\ -\bar{x}_2 f_3'(\bar{x}_3)+f_{23}(\bar{x}_2)+\varepsilon_3\end{matrix} \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

$f_i(x_i)=x_i h_i(x_i)$, $f_{ij}(x_i)=x_i h_{ij}(x_i)$’yi kurarak,

$$\begin{aligned}
\xi_{12} &= g_3(0)-\hat{x}_2 h_3(0)+\hat{x}_2 h_{23}(x_2)+\varepsilon_3,\\
\xi_{13} &= g_2(0)-L_1 h_{21}(0)+L_1 h_1(L_1)-L_3 h_{23}(0)+L_3 h_3(L_3)+\varepsilon_2\\
\xi_{23} &= g_1(0)-\hat{x}_2 h_1(0)+\hat{x}_2 h_{21}(x_2)+\varepsilon_1
\end{aligned}$$

özdeğerlerini kontrol ederiz.

Eğer $\varepsilon_1>0$ ise $\xi_{23}>0$ dır. ξ_{12}, E_{12}’nin x_3 yönünde; ξ_{13}, E_{13}’ün x_2 yönünde ve ξ_{23}, E_{23}’ün x_1 yönünde yerel olarak kararlı veya kararsızlığını belirtir.

3.3.3. Süreklilik ve yok olma

Genelde, denklem (3.8)’in sağ tarafı sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem grubunun çözülmesiyle, sistem (3.8) dinamikleri detaylı olarak analiz edilemeyebilir ya da E^*’ın var olduğuna ilişkin kriterler bile belirlenemeyebilir. Bununla birlikte daha önemli bir soru tanımlanabilir, şöyle ki ne zaman bütün üç alt kültürlerin varlığını sürdüreceği veya ne zaman birisi veya bazılarının yok olup gideceğidir. Bir sonraki teoremde yok oluş sorusuna karşılık varoluş tanımlanacaktır.

Teorem 3.3.

(a) Aşağıdakilerden herhangi birisi olursa,

(i) eğer E_{12} varsa, $\xi_{12} < 0$ dır,

(ii) $\xi_{13} < 0$

(iii) eğer E_{23} varsa, $\xi_{23} < 0$ dır.

O zaman sistem (3.8) süreklilik göstermez, örneğin R^{+}_{3} de pozitif ölçülü bir küme mevcuttur öyle ki bu kümede bulunan çözümler koordinat düzlemine yaklaşır.

(b) Aşağıdakilerin tamamı gerçekleşirse,

(i) eğer E_{12} varsa, $\xi_{12} > 0$ dır,

(ii) $\xi_{13} > 0$

(iii) eğer E_{23} varsa, $\xi_{23} > 0$ dır.

O zaman sistem (3.8) süreklilik gösterir.

(a)'nın ispatı: Heriki durumda düzlemsel bir denge noktası yerel olarak iç yönlerde kararlı olduğundan ispat aşikardır.

(b)'nin ispatı: İspat ekolojik modellemede (örneğin Freedman and Waltman 1984, 1985, Kumar and Freedman 1989) pek çok üç türlü sistemlerde bulunan ispatlara benzer olarak yapılabilir. İlk olarak, Butler-McGehee Lemma (Freedman and Waltman 1984)'yı kullanarak, pozitif başlangıç şartlı (değerli) çözümler için orijinin omega limit kümesinin parçası olamadığı gösterilir. Daha sonra aynı şeyin eksensel denge ve sonra düzlemsel denge için doğru olduğu gösterilir. Son olarak sınırdaki kapalı, kompakt değişmeyen kümeler denk olduğu için, bütün çözümler teoremi kanıtlayarak koordinat ekseninden uzaklaşırlar.

Şimdi E^*'ın varlığı için basit kriterler elde edebiliriz.

Teorem 3.4.

Eğer sistem (3.8) sürekli ise E^* vardır.

İspat: (Butler 1986)'ın ana teoreminde, sınır dengesinin hiperbolikliği, izoleliği ve daireselliği ile sistem (3.8) düzgün süreklidir. O zaman (Butler 1986)'den E^* var olmalıdır.

Yukarıdaki sonuç ne E^*'ın tekliği veya kararlılığı hakkında birşey söyler, ne de periyodik çözümlerin sorusu hakkında cevap verir.

3.4. Örnekler

Sonuçları açıklamak için $g_i(x_i) = 1 - x_i$ ve $h_i(x_i) = h_i$, $h_{2j}(x_2) = h_{2j}$ kabul edelim. O zaman sistem (3.8),

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1) + (h_{21} - h_1)x_1 x_2 + \varepsilon_1 x_1, \\
\dot{x}_2 &= x_2(1 - x_2) - (h_{21} - h_1)x_1 x_2 + (h_3 - h_{23})x_2 x_3 + \varepsilon_2 x_2, \\
\dot{x}_3 &= x_3(1 - x_3) - (h_{23} - h_3)x_2 x_3 + \varepsilon_3 x_3,
\end{aligned}
$$

$$x_i(0) = x_{i0} \geq 0, \quad i = 1,2,3.$$

şeklinde olur.

L_i tanımından,

$L_i = 1 + \varepsilon_i$ dir.

Bu,

$$\varepsilon_i > -1. \text{ olduğunu gösterir.}$$

Denge noktası aşağıdaki gibidir.

$E_0 : (0,0,0),\ E_1 : (1+\varepsilon_1,0,0),\ E_2 : (0,1+\varepsilon_2,0),\ E_3 : (0,0,1+\varepsilon_3)$ ve $E_{13} = (1+\varepsilon_1,0,1+\varepsilon_3)$ belirlidir. E_{12} *ve* E_{23}, 2 cebirsel denklemin çözümü ile elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
&1+\varepsilon_1 - x_1 + (h_{21} - h_1)x_2 = 0,\\
&1+\varepsilon_2 - (h_{21} - h_1)x_1 - x_2 = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&1+\varepsilon_2 - x_2 + (h_3 - h_{23})x_3 = 0,\\
&1+\varepsilon_3 - (h_{23} - h_3)x_2 - x_3 = 0
\end{aligned}$$

olup, sırasıyla,

$$E_{12} = \left(\frac{1+\varepsilon_1 + (h_{21}-h_1)(1+\varepsilon_2)}{1+(h_{21}-h_1)^2}, \frac{1+\varepsilon_2 - (h_{21}-h_1)(1+\varepsilon_1)}{1+(h_{21}-h_1)^2}, 0 \right)$$

ve

$$E_{23} = \left(0, \frac{1+\varepsilon_2 + (h_3-h_{23})(1+\varepsilon_3)}{1+(h_3-h_{23})^2}, \frac{1+\varepsilon_3 - (h_3-h_{23})(1+\varepsilon_2)}{1+(h_3-h_{23})^2} \right),$$

bulunur. Böylece, ancak ve ancak $(h_{21}-h_1)(1+\varepsilon_1) < 1+\varepsilon_2$ olduğunda E_{12} ve ancak ve ancak $(h_3-h_{23})(1+\varepsilon_2) < 1+\varepsilon_3$ olduğunda E_{23} var olacaktır. Şimdi onlar var olduğunda ξ_{ij} 'yi hesaplayacağız. Şöyle ki,

$$\xi_{12} = 1 + \varepsilon_3 - (h_{23} - h_3)\left[\frac{1 + \varepsilon_2 - (h_{21} - h_1)(1 + \varepsilon_1)}{1 + (h_{21} - h_1)^2}\right],$$
$$\xi_{13} = 1 + \varepsilon_2 - (h_{21} - h_1)(1 + \varepsilon_1) + (h_3 - h_{23})(1 + \varepsilon_3),$$
$$\xi_{23} = 1 + \varepsilon_1 - (h_{21} - h_1)\left[\frac{1 + \varepsilon_2 + (h_3 - h_{23})(1 + \varepsilon_3)}{1 + (h_3 - h_{23})^2}\right]$$

Pek çok farklı durum göstermek için $(h_{21} - h_1) = 1$ ve $(h_3 - h_{23}) = 1$ alırsak, o zaman ancak ve ancak $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ olursa E_{12} ve ancak ve ancak $\varepsilon_2 < \varepsilon_3$ olursa E_{23} var olur. Dahası,

$$\xi_{12} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$
$$\xi_{13} = 1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$
$$\xi_{23} = 2 + \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3$$

olursa,

(i) $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$, hem E_{12} hem de E_{23} var ve $\varepsilon_i > -1$, bütün $\xi_{ij} > 0$ lar süreklidir.

(ii) $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ve $\varepsilon_2 > \varepsilon_3$ dir. O zaman E_{23} ve böylece ξ_{23} var olmayacaktır. O zaman eğer $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1,\ \ \varepsilon_2 = 0.2$ ise $\xi_{12} > 0$ süreklidir. Fakat eğer $\varepsilon_1 = 0.2,\ \ \varepsilon_2 = 2,\ \ \varepsilon_3 = -0.4$ ise, o zaman $\xi_{12} < 0$, x_3'ün bölgesel olarak yok olmasına sebep olur.

(iii) $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$. O zaman sadece E_{13} ve ξ_{13} var olur. Eğer $\varepsilon_1 = 0.3,\ \ \varepsilon_2 = 0.2,\ \ \varepsilon_3 = 0.1$ olursa, o zaman $\xi_{13} > 0$ süreklidir. Eğer $\varepsilon_1 = 0.3,\ \ \varepsilon_2 = -0.4,\ \ \varepsilon_3 = -0.5$ olursa, o zaman $\xi_{13} < 0$ tüm popülasyonun yok oluşunu verir.

3.5 Tartışma

Bu bölümde ilk olarak iki veya üç alt kültürlü bir kültürel grup içindeki nüfusun dağılımı için bir model kuruldu. Alt kültürlerin denge, kararlılık ve süreklilik veya yok oluş soruları incelendi.

Verilen bir kültür grubu için, varolma veya yok olma problemi özel olarak ilgi çeken bir durumdur. Süreklilik veya yok oluş için kriterler katsayıların ve doğum ve ölüm parametrelerinin ilişkisi aracılığı ile yorumlanabilir. Bazı sonuçlar açıktır. Eğer doğum oranları yüksekse ve eğer alt kültürler yeteri derecede cazip olurlarsa süreklilik (varlığını sürdürme) garantidir. Diğer taraftan, eğer verilen bir alt kültür çok popüler değilse, böylece diğer alt kültürlere veya topluluklara net kayıp oranı doğum oranını aşar, yok oluş meydana gelir.

Her iki modelde, tüm alt kültürlerin sürekliliği pozitif sabit bir durumun varlığını vurgular. İki alt kültürlü modelde bu sabit durum asimptotik sabit olarak gösterilir. Üç alt kültürlü modelde sabit durum hakkında böyle bir iddiada bulunulamaz. Bu durumda periyodik çözümler var olabilir.

KAYNAKLAR

Andronov, A.A., Leontovich, E.A., Gordon, I.I. and Maier, A.G. 1973. Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems. John Wiley and Sons, New York.

Baggs, I. and Freedman, H.I. 1990. A Mathematical Model For The Dynamics Of Interactions Between A Unilingual and Bilingual Population: Persistence Versus Extinction. J. Math. Sociology, 16, 51-75.

Baggs, I. and Freedman, H.I. 1993. Can The Speakers Of A Dominated Language Survive As Unilinguals?: A Mathematical Model For Bilingualism. Mathl. Comput. Modelling, 18 (5), 9-18.

Bourhis, R.Y. 1984. Conflict and Language Planning In Quebec. Clevedon, Multilingual Matters.

Butler, G.J., Freedman, H.I. and Waltman, P. 1986. Uniformly Persistent Systems. Proc. Amer. Math. Soc., 96, 425-429.

Dumond, D.E. 1969. Population Growth and Real Culture Change, In Introductory Readings On Sociological Concepts, Methods and Data (Edited By M. Abrahamson). pp,. 118-137, Van Nostrand, New York.

Fishman, J.A. (ed.) 1978. Advences In The Study Of Societal Multilingualism. Mouton Press, The Hague.

Freedman, H.I. 1980. Deterministic Mathematical Models In Population Ecology. Marcel Dekker, New York.

Freedman, H.I. and Gopalsamy, K. 1986. Global Stability In Time-Delayed Single Species Dynamics. Bull. Math. Biol., 48, 485-492.

Freedman, H.I. and Moson, P. 1990. Persistence Definitions and Their Connections. Proc. Amer. Math. Soc., 109, 1025-1033.

Freedman, H.I. and Waltman, P. 1978. Predator Influence On The Growth Of A Population With Three Genotypes. J. Math. Biol., 6, 367-374,

Freedman, H.I. and Waltman, P. 1984. Persistence In Models Of Three Interacting Predator-Prey Populations. Math. Biosci., 68, 213-231.

Freedman, H.I. and Waltman, P. 1985. Persistence In A Model Of Three Competitive Populations. Math. Biosci., 73, 89-101.

Kelley, D.M. 1986. Why Concervative Churches Are Growing. Mercer University Press, Macon, GA.

Keyfitz, N. 1977. Introduction To The Mathematics Of Populations With Revisions. Addison-Wesley.

Kumar, R. and Freedman, H.I. 1989. A Mathematical Model Of Facultative Mutualism With Populations Interacting In A Food Chain. Math. Biosci., 97, 235-261.

Mol, H. 1971. Religion In Australia. Thomas Nelson, Sydney.

Oosthuizen, G.C., Goetzee, J.C., De Gruchy, J.W., Hofmeyr, J.H. and Lategan, B.C. 1988. Religion, Intergroup Relations and Social Change In South Africa. Greenwood Press, New York.

Özalp, N. 2006. Matematiksel Modelleme. Gazi Kitabevi, 185, Ankara.

Rektorys, K. 1969. Survey Of Applicable Mathematics. M.I.T. Press, Cambridge.

Soares, J.A. 1997. A Reformulation Of The Concept Of Tradition, In Rethinking The Sociology Of Culture. (Edited by J. H. Stanfield, II); Int. J. Sociology and Social Policy, 17, 6-21

Wagner, S.T. 1981. The Historical Background Of Bilingualism and Biculturalism In The United States. In The New Bilingualism: An American Dilemma (M. Ridge, ed.). USC Press, Los Angeles, 29-52.

Wardhough, R. 1987. Languages In Competition: Dominance, Diversity and Decline. Basil Blackwell, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Burcu SÜTCÜ

Doğum Yeri : Bolu

Doğum Tarihi : 19.11.1980

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Batıkent Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi
Lisans	: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2003)
Yüksek Lisans	: Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Alan Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans (2005)
	: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2005-Mart 2008)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

T. Vakıflar Bankası T.A.O. Genel Müdürlüğü (2005-)