$L[u] = -\nabla.\left(T(x,y)\nabla u\right)$ ELİPTİK OPERATÖRÜ İÇİN
VARYASYONEL PRENSİBİ VE
DIRICHLET, NEUMANN VE KARIŞIK SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNİN ELDE EDİLİŞİ

Mevlüt TUNÇ

Y.Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Murat SUBAŞI
2007

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Y.LİSANS TEZİ

$L[u] = -\nabla.\left(T(x,y)\nabla u\right)$ ELİPTİK OPERATÖRÜ İÇİN VARYASYONEL PRENSİBİ VE DIRICHLET, NEUMANN VE KARIŞIK SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ELDE EDİLİŞİ

Mevlüt TUNÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2007

Yrd. Doç. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında, Mevlüt TUNÇ tarafından hazırlanan bu çalışma 12/02/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Y. Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ *İmza* : ………………

Üye : Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR *İmza* : ………..……

Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat SUBAŞI *İmza* : ………………

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)

Prof. Dr. Mehmet ERTUĞRUL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Y.Lisans Tezi

$L[u] = -\nabla\left(T(x,y)\nabla u\right)$ ELİPTİK OPERATÖRÜ İÇİN VARYASYONEL PRENSİBİ VE DIRICHLET, NEUMANN VE KARIŞIK SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ELDE EDİLİŞİ

Mevlüt TUNÇ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat SUBAŞI

Bu tezde, $L[u] = -\nabla\left(T(x,y)\nabla u\right)$ Eliptik operatörü için varyasyonel prensibi kurularak, bu prensibe karşılık gelecek Dirichlet, Neumann ve Karışık sınır değer problemleri ele alınmaktadır. İlk bölümde eliptik operatörler hakkında genel bir giriş verilmektedir. Sonraki bölümde ilk olarak metrik uzaylar, vektör uzayları, Banach uzayları, Lebesque uzayları, Hilbert uzayları ve Sobolev uzaylarının konuya olan etkileri bölümler halinde belirtilmektedir. İkinci olarak ise elastik zarın enine eğilmesi problemi için karşılık gelen varyasyonel prensibinden Dirichlet, Neumann ve Karışık sınır değer problemleri türetilmektedir. Son olarak incelenen problemin bir boyutlu hali için bir uygulama yapılıp, benzer problemler için uygulanabilecek bir Maple programı verilmektedir.

2007, 99 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Eliptik operatör, varyasyonel prensip, sınır değer problemleri.

ABSTRACT

MS Thesis

VARIATIONAL PRENCIPLE FOR $L[u]=-\nabla\left(T(x,y)\nabla u\right)$

ELLIPTIC OPERATOR AND OBTAINING DIRICHLET,

NEUMANN AND MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Mevlüt TUNÇ

Atatürk University

Graduate School of Naturel and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Murat SUBAŞI

In this thesis, constituting the variational principle for $L[u]=-\nabla\left(T(x,y)\nabla u\right)$ elliptic operator, Dirichlet, Neumann and Mixed boundary value problems, corresponding this principle, have been considered. In the first chapter, a general entrance about elliptic operators has been given. In the following chapter, firstly the effects of metric spaces, vector spaces, Banach spaces, Lebesque spaces, Hilbert spaces and Sobolev spaces to the subject have been stated as sub chapters. Secondly, for the problem of transverse deflection of an elastic membrane from corresponding variational principle Dirichlet, Neumann and Mixed boundary value problems have been derived. At the end, an application has been done for one dimensional case of the considered problem and a Maple program, which can be applicable for similar problems, has been given.

2007, 99 Pages

Keywords: Elliptic operator, variational principle, boundary value problems.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda bana vermiş olduğu maddi ve manevi katkı ve yardımlarından ötürü çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat SUBAŞI'na, Sayın Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ ve Sayın Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR hocama en içten şükranlarımı sunarım.

Bana manevi olarak destek veren anneme, babama ve eşime teşekkürlerimi sunarım.

Mevlüt TUNÇ
Ocak 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$	her
$a\ f\ b$	a yı b ye götüren bağıntı
$S_r(x_0)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{S_r}(x_0)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$\sigma_r(x_0)$	yuvar yüzeyi
$S_r^0(x_0)$	$S_r(x_0)\setminus\{x_0\}$: x_0 noktasının delinmiş r komşuluğu
$C^k([a,b])$	$[a,b]$ aralığında $k.$ mertebeye kadar sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonların uzayı
supp$f$	f 'nin kompakt dayanağı
$C(X)$	X metrik uzayı üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı
$C_b(X)$	X metrik uzayı üzerinde sınırlı sürekli fonksiyonların uzayı
$C_c(X)$	X metrik uzayı üzerinde kompakt dayanağa sahip sürekli fonksiyonların uzayı
$C_0(X)$	sonsuzda sıfır olan sürekli fonksiyonların uzayı
$L_p(\Omega)$	Lebesque uzayı
$L_\infty(\Omega)$	Ω üzerinde esaslı sınıra sahip fonksiyonların kümesi
$dist(x,M)$	x vektörünün boş olmayan M kümesine olan uzaklığı
$\rightharpoonup$	zayıf yakınsaklık
$L_p^{loc}(\Omega)$	lokal L_p uzayı
$C_c^\infty(\Omega)$	(veya $D(\Omega)$) test fonksiyonları kümesi (her mertebeden sürekli kısmi türevlere ve kompakt dayanağa sahip fonksiyonların kümesi)

$W_p^k(\Omega)$	$0 \le \lvert\alpha\rvert \le k$ mertebeden bütün zayıf kısmi türevleri $\partial^\alpha f \in L_p(\Omega)$ olan $f:\Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonları (yada Ω ‘nın $\partial\Omega$ sınırında k-1. mertebeye kadar türevleri sıfır olan fonksiyonların uzayı)
$H^k(\Omega)$	$W_2^k(\Omega)$ fonksiyonları
$\dot{W}_p^k(\Omega)$	$C_c^\infty(\Omega)$ uzayının $W_p^k(\Omega)$ normuna göre kapanışı ($\dot{W}_p^k(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ ile gösterilir)
p'	p ’nin Hölder eşlenegi
p^*	p nin Sobolev eşlenegi ($\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$)
$C(\overline{\Omega})$	Ω bölgesinde düzgün sürekli fonksiyonların uzayı

Kısaltmalar

hhh	Hemen hemen her yerde

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler teorisi oldukça uzun bir geçmişe sahiptir. Başlangıç 18. yüzyılın ortalarında D'Alembert, Euler ve Bernoulli'nin titreyen telin denklemini çalışmaya başlamalarına dayanmaktadır. 19. yüzyılın başlangıcında Fourier tarafından Laplace ve Poisson denklemlerinin tanıtılmasıyla matematiksel fizikte yeni denklemler ortaya çıkarılarak genel teori(Green ve Gauss potansiyel teorisi) görünmüştür.

Cauchy uygulamalardan bağımsız olarak genel teoriyi tek başına değerlendiren matematikçilerden biridir. Böylece kısmi diferansiyel denklemler teorisinin ilk genel teoremlerinden biri olan Cauchy-Kovalevskaya teoremi ortaya çıkmıştır.

19. yüzyılın ikinci yarısında analitik olmayan fonksiyonlar matematikçiler tarafından kabul edilince Genel Cauchy probleminde analitik fonksiyonlardan daha genel fonksiyonlara geçiş çabaları başlamıştır. Hadamard bunun aşikar olmadığını keşfeden ilk kişi olmuştur. Dağılım teorisinin S. Sobolev ve L. Schwartz tarafından geliştirilmesiyle kısmi diferansiyel denklemlerin genel teorisine yeniden canlılık kazandırılmıştır. Dağılım teorisi kısmi diferansiyel denklemler teorisinde birçok bölge için ihtiyaç duyulan çalışmaları kolaylaştırmıştır. Klasik çözümlerin yanı sıra dağılımsal çözümlerin de göz önünde bulundurulması gereği günümüzde de çok iyi bilinen bir gerçektir.

Eliptik tipteki kısmi diferansiyel denklemler Tikhonov ve Samarski (Tikhonov and Samarski 1963), Ladyzhenskaya (1985), Isakov (1998), DuChateau (1989) gibi bilim adamlarının eserlerinde güncel olarak ele alınmıştır.

Son yıllarda bu türde özellikle nümerik çalışmalar hız kazanmıştır. Han ve Reddy benzer türdeki problemleri inceleyen çalışmalar yapmıştır (Han and Reddy, 1999). 2001 yılında Hasanov ve Muller eliptik operatörle kurulmuş parabolik problemler üzerine nümerik çalışma yayınlamıştır. 2004 yılında Subaşı ve Yıldız eliptik problemler için kararlılık değerlendirmesi üzerine bir çalışma yapmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Tanım 2.1 : A ve B boş olmayan iki küme ise

$$A\times B=\{(a,b):a\in A \text{ ve } b\in B\} \tag{2.1}$$

kümesine A ile B' nin kartezyen (dik) çarpımı denir. Benzer olarak $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):x_1\in A_1,\ldots,x_n\in A_n\} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ durumunda

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n \text{ tane}}=A^n \tag{2.3}$$

yazılır.

Tanım 2.2 : X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $X\times Y$'nin boş olmayan alt kümesine X'den Y'ye bir bağıntı denir. $X\times X=X^2$'nin boş olmayan her alt kümesine X'de ikili bağıntı denir.

Tanım 2.3 : X'den Y'ye bir f bağıntısı verildiğinde

$$\{(b,a):(a,b)\in f\} \tag{2.4}$$

kümesi Y'den X'e bir bağıntıdır ve bu bağıntıya f'nin tersi adı verilir, f^{-1} ile gösterilir.

Tanım 2.4 : f, X'de bir ikili bağıntı yani $f\in X\times X=X^2$ olsun.

1. $\forall a\in X$ için $a\ f\ a$ ise f'ye yansıyan
2. $\forall a,b\in X$ için $a\ f\ b=b\ f\ a$ ise f'ye simetrik
3. $\forall a,b,c\in X$ için $(a\ f\ b\wedge b\ f\ c)\Rightarrow a\ f\ c$ ise f'ye geçişken
4. $\forall a,b\in X$ için $(a\ f\ b\wedge b\ f\ a)\Rightarrow a=b$ ise f'ye ters simetrik

bağıntı adı verilir.

Tanım 2.5: Yansıyan, simetrik ve geçişken bağıntıya denklik bağıntısı denir.

Tanım 2.6 : A, $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi olsun. Her $x \in A$ için $x \leq M$ oluyorsa $M \in \mathbb{R}$ sayısına A' nın üst sınırı, $m \leq x$ oluyorsa $m \in \mathbb{R}$ sayısına A'nın alt sınırı denir. A kümesine, üst sınırı varsa yukarıdan sınırlı, alt sınırı varsa aşağıdan sınırlı, hem üst hem de alt sınırı varsa sınırlı denir.

Eğer A'nın M üst sınırı varsa başka birçok daha üst sınırı vardır. Mesela herhangi $M' \geq M$ sayısı da bir üst sınırdır.

Tanım 2.7 : A, $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi olsun. M, A'nın bir üst sınırı ve A'nın diğer bütün M' üst sınırları için $M \leq M'$ oluyorsa M sayısına supremum, en küçük üst sınır, denir. m, A nın bir alt sınırı ve A nın diğer bütün m' alt sınırları için $m \geq m'$ oluyorsa m sayısına infimum, en büyük alt sınır, denir ve $\min A$ ile gösterilir.

Tanım 2.8 : f, boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $x \in X$ için

$$[x] = \{y \in X : y\ f\ x\} \tag{2.5}$$

kümesine, temsilcisi x olan denklik sınıfı ve

$$X / f = \{[x] : x \in X\} \tag{2.6}$$

küme ailesine de denklik sınıfları ailesi denir.

Tanım 2.9 : X ve Y boş olmayan iki küme ve

$$f = \{(x, y) : x \in X \text{ ve } y \in Y\} \tag{2.7}$$

$X \times Y$ içinde bir bağıntı olsun. Eğer

1. $x \in X$ için $\exists y \in Y : (x, y) \in f$
2. $(x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

koşulları sağlanıyorsa f ’ye X ’den Y ’ye bir fonksiyon denir ve $f : X \to Y$ ile gösterilir.

1. şarttaki x ’ler f ’nin tanım kümesini oluşturur ve bu küme $D(f)$ ile gösterilir.

$$\{ f(x) \in Y : x \in D(f) \} \tag{2.8}$$

kümesi ise değer kümesi olup $R(f)$ ile gösterilir. Buna göre $f : X \to Y$ fonksiyonu için $D(f) \neq X$ veya $R(f) \neq Y$ olabilir.

Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verildiğinde $x \in D(f)$ elemanına karşılık gelen $y \in R(f)$ elemanı $y = f(x)$ ile gösterilir ve x ’in f altındaki görüntüsü denir.

Tanım 2.10: Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verildiğinde

a. $A \subset D(f)$ olmak üzere

$$f(A) = \{ y \in R(f) : x \in A \text{ için } y = f(x) \} \tag{2.9}$$

kümesine A ’nın f altındaki görüntüsü denir.

b. $B \subset R(f)$ olmak üzere

$$f^{-1}(B) = \{ x \in D(f) : f(x) \in B \} \tag{2.10}$$

kümesine de B ’nin f altındaki ters görüntüsü denir.

Tanım 2.11 : $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. Her $x \in A$ için $f\big|_A : A \to Y$ fonksiyonuna f ’nin A ’ya kısıtlaması denir.

Tanım 2.12: Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verildiğinde

a) $\forall y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ elemanı varsa (veya $f(X) = Y$ ise), f fonksiyonuna örten(surjective) fonksiyon

b) $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (ya da $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$) ise f fonksiyonuna birebir(infective) fonksiyon denir.

c) Birebir ve örten fonksiyona bijective fonksiyon denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Metrik uzaylar

Analizde birçok problemi çalışmanın en basit şekli metrik uzaylardır. Bir metrik uzay elemanları arasında uygun bir uzaklık notasyonu bulunan noktaların kümesidir. Metrik ya da uzaklık fonksiyonunu yakınsaklık, süreklilik ve kompaktlık gibi temel analiz kavramlarını tanımlamada kullanırız.

Tanım 3.1.1 : X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinde bir metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ şeklinde

a. $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b. $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

c. $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerine sahip bir fonksiyondur. Bu (X, d) ikilisine metrik uzay denir. Bir küme üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir.

Örnek 3.1.2 : $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi $d(x, y) = |x - y|$ uzaklık fonksiyonuyla bir metrik uzaydır. Bu metriğe mutlak değer metrik denir.

Örnek 3.1.3 : $d(x, y) = |x - y|^2$ dönüşümünün $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde bir metrik olup olmadığına bakalım.

$x = 1, y = 3$ ve $z = 2$ için üçgen eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

$$d(1,3) = 4 > 2 = 1 + 1 = d(1,2) + d(2,3) \qquad (3.1.1)$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaz. Dolayısıyla $(\mathbb{N}, d)$ metrik uzay değildir.

Örnek 3.1.4 : $X=\mathbb{R}^n\left(\text{veya } \mathbb{C}^n\right)$ olsun.

$$d_1 : X\times X \to \mathbb{R},\ d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k| \tag{3.1.2}$$

$$d_p : X\times X \to \mathbb{R},\ d_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p},\ 1\le p<\infty \tag{3.1.3}$$

$$d_\infty : X\times X \to \mathbb{R},\ d_\infty(x,y)=\max\left\{|x_k-y_k| : k=1,2,...,n\right\} \tag{3.1.4}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümler $X=\mathbb{R}^n\left(\text{veya } \mathbb{C}^n\right)$ üzerinde bir metriktir.

Örnek 3.1.5 : X boş olmayan bir küme ve $B(X)$’ de X’den $\mathbb{R}$’ye tanımlı bütün sınırlı fonksiyonların kümesi olsun.

$$d : B(X)\times B(X)\to\mathbb{R},\ d(f,g)=\sup\left\{|f(t)-g(t)| : t\in X\right\} \tag{3.1.5}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü $B(X)$ kümesi üzerinde bir metriktir.

Örnek 3.1.6 : $[a,b]\subset\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların kümesi $C([a,b])$ olsun. $f,g\in C([a,b])$ için

$$d_\infty(f,g)=\max\left\{|f(t)-g(t)| : t\in[a,b]\right\} \tag{3.1.6}$$

şeklinde tanımlanan $d_\infty : C([a,b])\times C([a,b])\to\mathbb{R}$ dönüşümü $C([a,b])$ üzerinde bir metriktir.

$K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ olmak üzere elemanları K kümesinden olan $(x_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ sonsuz dizileri K^∞ ile gösterelim.

$$l_\infty=\left\{(x_n)\in K^\infty : (x_n) \text{ sınırlı}\right\} \tag{3.1.7}$$

$$c=\left\{(x_n)\in K^\infty : (x_n) \text{ yakınsak}\right\} \tag{3.1.8}$$

$$c_0=\left\{(x_n)\in K^\infty : \lim_{n\to\infty}x_n=0\right\} \tag{3.1.9}$$

$$l_p=\left\{(x_n)\in K^\infty : \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p \text{ yakınsak}\right\} \tag{3.1.10}$$

kümelerini tanımlayalım.

Örnek 3.1.7 : $x=(x_n), y=(y_n)\in l_\infty$ için $d_\infty(x,y)=\sup\{|x_k-y_k| : k\in\mathbb{N}\}$ şeklinde tanımlanan $d_\infty : l_\infty\times l_\infty\to\mathbb{R}$ dönüşümü l_∞ üzerinde bir metriktir. Benzer şekilde (c,d_∞) ve (c_0,d_∞) uzayları da birer metrik uzaydır.

Örnek 3.1.8 : $x=(x_n), y=(y_n)\in l_p$ için

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p} \tag{3.1.11}$$

şeklinde tanımlanan $d_p : l_p\times l_p\to\mathbb{R}$ dönüşümü l_p üzerinde bir metriktir.

Teorem 3.1.9 :

a) p ile q, $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere $\forall\, x=(x_n), y=(y_n)\in\mathbb{R}^n\left(\mathbb{C}^n\right)$ için

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k|\le\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Hölder Eşitsizliği)} \tag{3.1.12}$$

b) $1\le p<\infty$ olmak üzere $\forall\, x=(x_n), y=(y_n)\in\mathbb{R}^n\left(\mathbb{C}^n\right)$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p} \quad \text{(MinkowskiEsitsizliği)} \tag{3.1.13}$$

eşitsizlikleri doğrudur. $p=q=2$ durumunda Hölder eşitsizliğine Cauchy-Schwartz eşitsizliği de denir.

Teorem 3.1.10 :

a) p ile q, $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere $\forall\, x=(x_n)\in l^p$ ve $y=(y_n)\in l^q$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_k|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Hölder Eşitsizliği)} \tag{3.1.14}$$

b) $1 \le p < \infty$ olmak üzere $\forall\, x = (x_n) \in l^p$ ve $y = (y_n) \in l^p$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p} \quad \text{(Minkowski Esitsizliği)} \tag{3.1.15}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Örnek 3.1.11 : $f, g \in C([a,b])$ için

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(s) - g(s)|\, ds \tag{3.1.16}$$

şeklinde tanımlanan $d_1 : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $C([a,b])$ üzerinde bir metriktir.

Teorem 3.1.12 :

a) p ile q, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere $\forall f, g \in C([a,b])$ için

$$\int_a^b |f(s)\, g(s)|\, ds \le \left(\int_a^b |f(s)|^p\, ds \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(s)|^q\, ds \right)^{1/q} \quad \text{(Hölder Eşitsizliği)} \tag{3.1.17}$$

b) $1 \le p < \infty$ olmak üzere $\forall f, g \in C([a,b])$ için

$$\left(\int_a^b |f(s) + g(s)|^p ds \right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(s)|^p\, ds \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(s)|^p\, ds \right)^{1/p} \quad \text{(Minkowski Esitsizliği)} \tag{3.1.18}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Örnek 3.1.13 : $1 \le p < \infty$ olmak üzere $f, g \in C([a,b])$ için

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(s) - g(s)|^p\, ds \right)^{1/p} \tag{3.1.19}$$

şeklinde tanımlanan $d_p : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $C([a,b])$ üzerinde bir metriktir.

3.1.1. Metrik uzaylarda yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık

Tanım 3.1.1.1 : Bir (X,d) metrik uzayı, bir $x_0 \in X$ noktası ve pozitif bir r sayısı verilsin.

$$S_r(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\} \quad (3.1.1.1)$$

$$\overline{S_r}(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) \le r\} \quad (3.1.1.2)$$

ve

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\} \quad (3.1.1.3)$$

kümelerine sırasıyla x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi denir. $S_r(x_0)$ açık yuvarına x_0 noktasının r komşuluğu, $\overset{\circ}{S}_r(x_0) = S_r(x_0) \backslash \{x_0\}$ kümesine de x_0 noktasının delinmiş r komşuluğu denir.

Bir (X,d) metrik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\overset{\circ}{S}_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing$ ise, x noktasına A'nın bir limit noktası denir. A kümesinin bütün limit noktalarından oluşan A' kümesi ile A'nın bileşimine A'nın kapanışı adı verilir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. $A = \overline{A}$ ise A kümesine X'de kapalı küme adı verilir.

$B \subset X$ ve $x \in B$ olsun. $S_\varepsilon(x) \subset B$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa x'e B'nin bir iç noktası denir. B'nin iç noktalarının kümesine B'nin içi denir ve $\overset{\circ}{B}$ ile gösterilir. $B = \overset{\circ}{B}$ ise B kümesine X'de açık küme denir.

Tanım 3.1.1.2 : (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonuna X'de bir dizi denir ve $f(n) = (x_n)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.1.3 : (x_n), (X,d) metrik uzayı içinde bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$ ise, başka bir değişle, eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa, (x_n) dizisi x_0 elemanına yakınsıyor denir.

Tanım 3.1.1.4 : (X,d) bir metrik uzay ve A, X 'in boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$d(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} \tag{3.1.1.4}$$

sayısına A kümesinin çapı denir. $d(A) < \infty$ ise A'ya X 'de sınırlı bir küme denir. X içindeki (x_n) dizisinin terimlerinden oluşan küme X 'de sınırlı ise (x_n) dizisine X 'de sınırlı dizi adı verilir.

Teorem 3.1.1.5 : (x_n), (X,d) metrik uzayı içinde bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$ ise,

a) x_0 limiti tektir.

b) (x_n) dizisi sınırlıdır.

c) (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisinin limiti de x_0 'dır.

Tanım 3.1.1.6 : (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar, $f : X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ sayısı varsa f dönüşümü x_0 noktasında süreklidir.

Bu tanım şöyle özetlenebilir.

f dönüşümü X kümesinin x_0 noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır öyleki $\forall x \in X$ için

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \tag{3.1.1.5}$$

olur.

Örnek 3.1.1.7 : $d(x,y)=|x-y|$ metriğine göre $f(x)=1/x$ ile tanımlı $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında süreklidir. x_0, $(0,1)$ aralığında herhangi bir nokta olsun. δ sayısını nasıl seçeceğimize karar vermek için $|f(x)-f(x_0)|$ farkını değerlendirelim.

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|x.x_0|} \tag{3.1.1.6}$$

olup $|x-x_0|<\delta$ olursa

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\delta}{|x.x_0|}=\frac{\delta}{x.x_0} \tag{3.1.1.7}$$

elde ederiz. Aradığımız $\exists\delta>0$ sayısı için $\delta<x_0/2$ şartı koysak $|x-x_0|<\delta<x_0/2$ olup $-x_0/2<x<3x_0/2$ olacağından

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\delta}{x.x_0}<\frac{\delta}{\frac{x_0}{2}x_0}=\frac{2\delta}{x_0^{\ 2}} \tag{3.1.1.8}$$

bulunur. Böylece $|f(x)-f(x_0)|<\frac{2\delta}{x_0^{\ 2}}<\varepsilon$ olması için $\delta<\varepsilon x_0^{\ 2}/2$ olmalıdır. Bu şart $\delta<x_0/2$ şartıyla çelişmesin diye $\delta=\min\left\{x_0/2,\varepsilon x_0^{\ 2}/2\right\}$ olarak alırsak

$$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \tag{3.1.1.9}$$

olur.

Tanım 3.1.1.8 : (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar ve $f:X\to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall x,y\in X$ için $d(x,y)<\delta$ olduğunda $\rho(f(x),f(y))<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)$ sayısı varsa f dönüşümü X kümesinde düzgün süreklidir denir.

Bu tanım ve tersi kısaca şöyle söylenebilir.

f dönüşümü X kümesinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyleki $\forall x, y \in X$ için

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon \qquad (3.1.1.10)$$

olur.

f dönüşümü X kümesinde düzgün sürekli değildir $\Leftrightarrow$ $\exists\varepsilon > 0$ için $\forall\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyleki $\exists x, y \in X$ için

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x), f(y)\big) \geq \varepsilon \qquad (3.1.1.11)$$

olur.

Örnek 3.1.1.9 : $d(x,y) = |x - y|$ metriğine göre $f(x) = 1/x$ ile tanımlı $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında düzgün sürekli değildir. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ve $\forall\delta > 0$ sayısı için $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}} + 1$ bir tamsayı olmak üzere $(0,1)$ aralığının $x = \frac{1}{n_0}$ ve $y = \frac{1}{n_0 + 1}$ noktaları için

$$|x - y| = \left|\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0 + 1}\right| = \frac{1}{n_0(n_0 + 1)} < \frac{1}{n_0^{\,2}} < \delta \qquad (3.1.1.12)$$

olmasına rağmen

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = |n_0 - (n_0 + 1)| = 1 > \varepsilon \qquad (3.1.1.13)$$

olur. Böylece $f(x) = 1/x$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında düzgün sürekli değildir.

Örnek 3.1.1.10 : $f(x) = x^2$ ile tanımlı $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de süreklidir fakat düzgün sürekli değildir. $[a,b]$ herhangi sınırlı bir aralık ise $f\big|_{[a,b]}$ fonksiyonu $[a,b]$ de düzgün süreklidir.

Teorem 3.1.1.11 : $\mathbb{R}$ 'nin kapalı ve sınırlı alt kümesi üzerinde sürekli her fonksiyon bu küme üzerinde düzgün süreklidir.

Tanım 3.1.1.12 : Bir (X,d) metrik uzayında tanımlı $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna her $x,y\in X$ için

$$\left|f(x)-f(y)\right|\leq Cd(x,y) \tag{3.1.1.14}$$

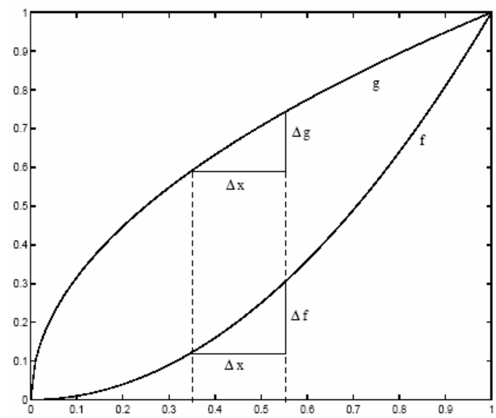
olacak şekilde $C\geq 0$ sayısı varsa X' de Lipschitz süreklidir denir.

Her Lipschitz sürekli fonksiyon düzgün süreklidir fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 3.1.1.13 : Aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi $[0,1]$ aralığında mutlak değer metriği ile $f(x)=x^2$ fonksiyonu Lipschitz süreklidir, fakat düzgün sürekli olan $g(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu Lipschitz sürekli değildir. Çünkü

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|g(x)-g(0)\right|}{\left|x-0\right|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\infty \tag{3.1.1.15}$$

olup her $x,y\in[0,1]$ için istenen $C\geq 0$ sayısı bulunamaz.



Şekil 3.1.1.1 : $[0,1]$ aralığında süreklilik ve Lipschitz süreklilik örnekleri.

f, $[0,1]$ de Lipschitz sürekli iken *g*, 0 noktasında Lipschitz sürekli değildir. $\Delta f / \Delta x$ oranı keyfi küçük Δx için $[0,1]$ de her yerde sınırlı iken, $\Delta g / \Delta x$, $x=0$ civarında küçük Δx için sınırsızdır.

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Lipschitz sürekli bir fonksiyon ise *f*' nin Lipschitz sabitini

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \tag{3.1.1.16}$$

şeklinde tanımlarız. Buna denk olarak $\mathrm{Lip}(f)$, Lipschitz şartının sağlandığı en küçük C sayısıdır.

$$\mathrm{Lip}(f) = \inf \left\{ C : \ |f(x) - f(y)| \leq C d(x,y) \text{ her } x, y \in X \text{ icin} \right\} \tag{3.1.1.17}$$

Örnek 3.1.1.14 : $f(x) = |x|$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| = \big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \tag{3.1.1.18}$$

olduğundan Lipschitz sabiti 1 olur.

Tanım 3.1.1.15 : (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonuna, $x \in X$ noktasına yakınsayan her $d(x_n, x) \to 0$ dizisi için Y de $\rho(f(x_n), f(x)) \to 0$ oluyorsa dizisel süreklidir denir.

Teorem 3.1.1.16 : (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart $x \in X$ noktasında dizisel sürekli olmasıdır.

Şimdi reel bir dizi için mutlak değer metriğine göre lim sup ve lim inf kavramlarını inceleyelim. Önce monoton diziyi ele alalım. (x_n) dizisine her n için $x_n \leq x_{n+1}$ oluyorsa monoton artan, $x_n \geq x_{n+1}$ oluyorsa monoton azalan denir. Monoton dizi ise monoton artan veya azalan diziye denir. Monoton artan bir dizi supremumuna yakınsar$\left(\text{bu } \infty \text{ olabilir}\right)$ ve monoton azalan bir dizi infimumuna yakınsar$\left(\text{bu } -\infty \text{ olabilir}\right)$.

Şimdi keyfi bir $\left(x_n\right)$ dizisini alalım. Bu dizinin ardışık elemanlarını kesip supremumlarını alarak yeni bir $y_n = \sup\left\{x_k : k \geq n\right\}$ dizisi oluşturalım. Artan n ler için supremumlar daha küçük kümeler üzerinden alındığından $\left(y_n\right)$ dizisi monoton azalandır. Böylece bu dizinin limiti vardır ve bu limite $\left(x_n\right)$ dizisinin lim sup'u deyip $\lim\sup x_n$ ile göstereceğiz. Benzer olarak bu dizinin ardışık elemanlarını kesip infimumlarını alarak yeni bir dizi oluşturalım, bu dizi monoton artan olur. Bu dizinin limitine $\left(x_n\right)$ dizisinin lim inf'i deyip $\lim\inf x_n$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.1.17 : $\left(x_n\right)$ bir reel sayı dizisi olsun.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sup x_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\sup\left\{x_k : k \geq n\right\}\right] \\ \lim_{n\to\infty}\inf x_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\inf\left\{x_k : k \geq n\right\}\right] \end{aligned} \qquad (3.1.1.19)$$

olur. Başka bir gösterim

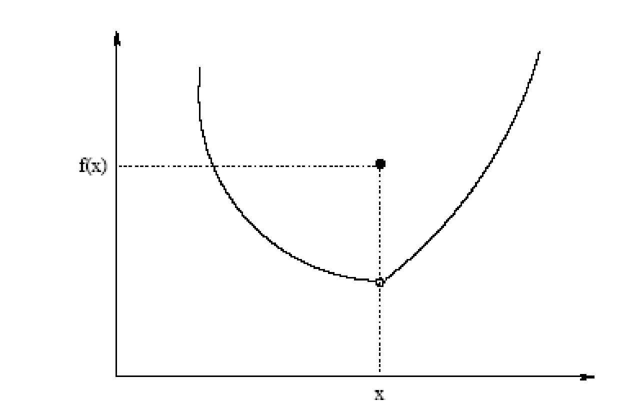
$$\lim\sup x_n = \overline{\lim}\, x_n,\ \ \lim\inf x_n = \underline{\lim}\, x_n \qquad (3.1.1.20)$$

şeklindedir. $\sup\left\{x_k : k \geq n\right\} = \infty$ veya $\inf\left\{x_k : k \geq n\right\} = -\infty$ ise $\lim\sup x_n = \infty$ veya $\lim\inf x_n = -\infty$ diyebiliriz.

Tanımdan $\lim_{n\to\infty}\inf x_n \leq \lim_{n\to\infty}\sup x_n$ diyebiliriz, üstelik $\left(x_n\right)$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty}\inf x_n = \lim_{n\to\infty}\sup x_n$ olmasıdır.

Örnek 3.1.1.18 : $x_n = \left(-1\right)^n$ dizisi için $\lim_{n\to\infty}\inf x_n = -1$ ve $\lim_{n\to\infty}\sup x_n = 1$ olur. Bu değerler farklı olduğu için dizinin limiti yoktur.

Tanım 3.1.1.19 : $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna her $x \in X$ ve $d(x_n, x) \to 0$ için $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \le f(x)$ oluyorsa yukarıdan yarı süreklidir denir. $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna her $x \in X$ ve $d(x_n, x) \to 0$ için $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \ge f(x)$ oluyorsa aşağıdan yarı süreklidir denir.



Şekil 3.1.1.2 : x noktasında sürekli olmayan yukarıdan yarı sürekli f fonksiyonu

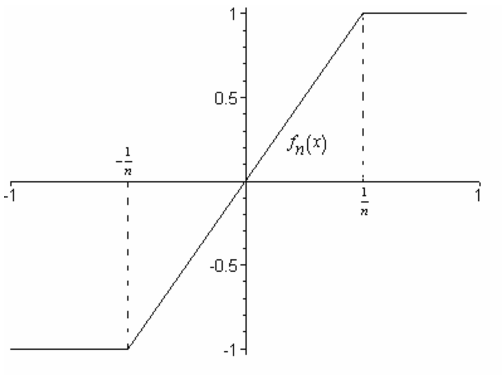
Tanım 3.1.1.20 : (x_n), (X,d) metrik uzayı içinde bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n,m > n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa, (x_n) dizisine X 'de Cauchy dizisi adı verilir.

Örnek 3.1.1.21 : $f, g \in X = C([a,b])$ için

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \tag{3.1.1.21}$$

şeklinde tanımlanan $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü için (X, d_1)'in bir metrik uzay olduğunu biliyoruz. $C([-1,1])$ içinde terimleri

$$f_n(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x\le -1/n\\ nx & -1/n\le x\le 1/n\\ 1 & 1/n\le x\le 1\end{cases}$$



Şekil 3.1.1.3 : $C([-1,1])$ içinde Cauchy dizisi olan (f_n) dizisi

şeklinde tanımlanan (f_n) dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin $C([-1,1])$'de Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Her $n=1,2,...$ ve $x\in[-1,1]$ için $|f_n(x)|\le 1$ olduğu açıktır. $m>n$ için

$$\begin{aligned} d_1(f_n,f_m) &= \int_{-1}^{1}|f_n(x)-f_m(x)|dx=\int_{-1/n}^{1/n}|f_n(x)-f_m(x)|dx \\ &\le \int_{-1/n}^{1/n}|f_n(x)|dx+\int_{-1/n}^{1/n}|f_m(x)|dx\le 2\int_{-1/n}^{1/n}dx=\frac{4}{n} \end{aligned} \tag{3.1.1.22}$$

olduğundan $\lim\limits_{n,m\to\infty} d_1(f_n,f_m)=0$ olup (f_n) dizisi $C([-1,1])$ içinde Cauchy dizisidir.

Teorem 3.1.1.22 : Aşağıdaki önermeler doğrudur.

a) Metrik uzay içindeki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir. (Reel sayılar için bunun tersi de doğrudur.)

b) Metrik uzay içindeki her Cauchy dizisi sınırlıdır.

c) Bir (X,d) metrik uzayında, bir (x_n) Cauchy dizisi, $x\in X$ elemanına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisine sahipse (x_n) dizisinin kendisi de x elemanına yakınsar.

Örnek 3.1.1.23 : Reel sayılar kümesi üzerinde $d(x,y)=|x-y|$ mutlak değer metriğine göre $\{x_n\}=\log n$ dizisi $n\to\infty$ için $\log n\to\infty$ olduğundan yakınsak değildir. Bu dizinin elemanları reel sayılar olduğu için bu dizi Cauchy dizisi de olamaz. Üstelik $n\to\infty$ için $|x_{n+1}-x_n|=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 0$ yazabiliriz. Bu örnek gösterir ki bir dizinin ardışık terimlerinin birbirine yeteri kadar yakın olması onun Cauchy dizisi olmasını gerektirmez.

Teorem(Bolzano-Weierstrass) 3.1.1.24 : $\mathbb{R}^n$ de her sınırlı dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir.

Tanım 3.1.1.25 : Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse bu (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay adı verilir.

Örnek 3.1.1.26 : $\mathbb{R}$ kümesi mutlak değer metriğine göre tamdır. (x_n), $\mathbb{R}$ içinde keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Metrik uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlı olduğundan (x_n) sınırlıdır. Bolzano-Weierstrass teoremi gereğince (x_n)' nin yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. $\lim_{k\to\infty}|x_{n_k}-x|=0$ olsun. Bir Cauchy dizisinin yakınsak alt dizisinin limiti o Cauchy dizisinin de limiti olacağından $\lim_{n\to\infty}|x_n-x|=0$ olur. O halde $\mathbb{R}$ tamdır.

Örnek 3.1.1.27 : $\mathbb{R}^n$ kümesi

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p},\ 1\le p<\infty \qquad (3.1.1.23)$$

ve

$$d_\infty(x,y)=\max\{|x_k-y_k| : k=1,2,...,n\} \qquad (3.1.1.24)$$

metriklerine göre tamdır.

Örnek 3.1.1.28 : l_∞ kümesi

$$d_\infty(x,y) = \sup\{|x_k - y_k| : k \in \mathbb{N}\} \qquad (3.1.1.25)$$

metriğine göre tamdır. Aynı zamanda c kümesi de aynı metriğe göre tamdır.

Örnek 3.1.1.29 : $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki

$$d(x,y) = |x-y| \qquad (3.1.1.26)$$

metriğine göre tam değildir. $\mathbb{Q}$ içinde terimleri $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1,2,\ldots$ olan (x_n) dizisini alalım. Bu dizi $(\mathbb{Q},d)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir fakat bu dizinin yakınsadığı e sayısı $\mathbb{Q}$ içinde değildir.

Örnek 3.1.1.30 : Her (a,b) açık aralığı $\mathbb{R}$ üzerindeki $d(x,y) = |x-y|$ metriğine göre tam değildir. (a,b) aralığı içinde terimleri $x_n = b - \frac{b-a}{2n}, n = 1,2,\ldots$ olan (x_n) dizisi $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir fakat bu dizinin yakınsadığı b noktası (a,b) içinde değildir. Bunun yanı sıra $([a,b],d)$ uzayı tamdır.

Örnek 3.1.1.31 : $C([a,b])$ uzayı

$$d_\infty(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [a,b]\} \qquad (3.1.1.27)$$

metriğine göre tamdır.

Örnek 3.1.1.32 : $C^k([a,b])$ uzayı $[a,b]$ aralığında k. mertebeye kadar sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonların uzayı olsun. $f,g \in C^k([a,b])$ için

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{k} d_\infty\left(f^{(i)}, g^{(i)}\right) = \max\{|f-g|\} + \max\{|f'-g'|\} + \cdots + \max\left\{\left|f^{(k)} - g^{(k)}\right|\right\} \qquad (3.1.1.28)$$

biçiminde tanımlanan $d : C^k([a,b]) \times C^k([a,b]) \to \mathbb{R}$ dönüşümü bir metrik olup $\left(C^k([a,b]), d\right)$ metrik uzayı tamdır.

3.1.2. Metrik uzaylarda maksimum ve minimum

Kompaktlık

Kompaktlık, analizin en önemli kavramlarından biridir. Metrik uzayda kompakt kümeyi tanımlamanın en basit yolu diziler vasıtasıyla olur.

Tanım 3.1.2.1 : X metrik uzayının bir K alt kümesine, eğer K'daki her dizi limiti K'da olan yakınsak bir alt diziye sahipse dizisel kompakttır denir.

Metrik uzaylar için kompaktlık ve dizisel kompaktlık denktir.

Örnek 3.1.2.2 : $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin kendisi dizisel kompakt değildir. Örneğin $(x_n) = n$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahip değildir, çünkü $\mathbb{R}$'de yakınsak dizinin Cauchy dizisi olması gerekir, her $m \neq n$ için $|x_n - x_m| \geq 1$ olacağından bu dizi Cauchy dizisi olamaz.

Teorem(Heine-Borel) 3.1.2.3 : $\mathbb{R}^n$ **'**nin bir alt kümesinin dizisel kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır.

Teorem(Bolzano-Weierstrass) 3.1.2.4 : $\mathbb{R}^n$ **'**de her sınırlı dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir.

Tanım 3.1.2.5 : Bir X metrik uzayının bir A alt kümesine, eğer kapanışı X'de kompakt ise prekompakt denir.

Bu tanım, A'nın prekompakt olması için A'daki her dizinin yakınsak bir diziye sahip olması anlamına gelir. Bu dizinin limitinin A'ya ait olması gerekmez. Kompakt kümeler kapalı olduğundan, bir kümenin kompakt olması için kapalı ve prekompakt olması gerekir.

Örnek 3.1.2.6 : $\mathbb{R}^n$ nin bir alt kümesinin prekompakt olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

Kompakt kümelerde sürekli fonksiyonların güzel özellikleri vardır. Sürekli fonksiyonlar dizilerin yakınsaklığını muhafaza ederler. Böylece sürekli fonksiyonlar kompaktlığı da muhafaza ederler.

Teorem 3.1.2.7 : K bir kompakt metrik uzay ve Y herhangi bir metrik uzay olmak üzere $f : K \to Y$ sürekli olsun. Bu taktirde $f\left(K\right)$'da kompakttır.

Maksimum ve minimum

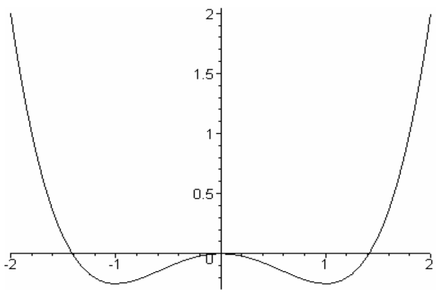
Maksimum ve minimum problemleri uygulamalarda büyük öneme sahiptir. Örneğin bir çok fiziksel sistemde denge durumu, enerjiyi minimumlaştırır veya entropiyi maksimumlaştırır. Optimalleştirme problemlerinde sistemin arzu edilen durumu, uygun aday fonksiyonunu minimumlaştırır. Bu problemlerin matematiksel formülü reel değerli bir f fonksiyonunun bir X durum uzayında maksimalleştirilmesi veya minimalleştirilmesidir. Genelde metrik uzay olan durum uzayının her bir noktası sistemin muhtemel bir durumunu temsil eder. f'nin X' de maksimum ya da minimum noktasının varlığı belirli olmayabilir hatta böyle bir nokta olmayabilir de. Aşağıdaki teorem maksimum ya da minimum noktanın varlığı için gerekli şartları verir. Her ne kadar bu şartlar temel olsa da birçok uygulamada faydalı olamayacak kadar zordur.

Teorem 3.1.2.8 : K bir kompakt metrik uzay ve $f : K \to \mathbb{R}$ sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f, K'da sınırlıdır ve maksimum ve minimum değerini alır.

İspat: f sürekli olduğundan $f(K)$ görüntüsü de kompakttır. Böylece Heine-Borel teoremine göre $f(K)$ sınırlıdır. f**'**nin infimuma sahip olduğunu ispatlamak yeter çünkü bu $-f$ nin supremuma sahip olmasıyla aynıdır. f sınırlı olduğundan aşağıdan sınırlıdır ve f'nin K'daki m infimumu sonludur.

Problemlerde yaklaşık çözümlerinin dizisini oluştururuz, bu dizi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$ şartını sağlayan (x_n) minimalleştirici dizisidir. Yakınsak bir alt dizi elde etmek için kompaktlığı kullanırız ve yakınsak dizinin limitinin problemimizin çözümü olduğunu gösteririz. Bu durumda limit f'nin infimumunu aldığı noktadır.

Örnek 3.1.2.9 : $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında sürekli ve sınırlıdır. Fonksiyon minimumunu $x = \pm 1$ noktalarında alır.



Şekil 3.1.2.1: $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2}$ fonksiyonu

Minimalleştirici dizi örneği olarak $(x_n) = (-1)^n$ dizisi alınabilir. Gerçekten her n için $f(x_n) = \inf f(x)$ olur. Bu minimalleştirici dizi yakınsak değildir.

Bu örnekten görüldüğü gibi kompaktlık f 'nin minimumunu aldığı noktanın tekliğini garanti etmez. Birçok muhtemel minimalleştirici dizi olabilir ve verilen bir minimalleştirici dizinin değişik limitlere yakınsayan alt dizileri olabilir. Bununla birlikte f fonksiyonu minimumunu tek bir noktada alıyorsa her minimalleştirici dizi o noktaya yakınsar.

Örnek 3.1.2.10 : $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonu kompakt olmayan $\mathbb{R}$ kümesinde sürekli ve aşağıdan sınırlıdır. f 'nin $\mathbb{R}$ 'deki infimumu sıfırdır ama f infimumunda değer almaz. Minimalleştirici dizi örneği olarak $x_n = n$ alınabilir. Minimalleştirici dizi sonsuza gittiğinden yakınsak bir alt diziye sahip olamaz.

Teorem 3.1.2.11 : K bir kompakt metrik uzay olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ yukarıdan yarı sürekli ise yukarıdan sınırlıdır ve supremumunu alır. Eğer $f : K \to \mathbb{R}$ aşağıdan yarı sürekli ise aşağıdan sınırlıdır ve infimumunu alır.

Örnek 3.1.2.12 : $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le 1 \\ -1 & x = 0 \end{cases} \tag{3.1.2.1}$$

şeklinde tanımlayalım. f fonksiyonu yukarıdan yarı süreklidir. İnfimum değeri sıfır olup minimum değeri yoktur. Ayrıca infimum değerini hiçbir x noktası için almaz. g fonksiyonu aşağıdan yarı süreklidir. İnfimum ve minimum değeri -1 olup bu değeri $x = 0$ için alır.

3.2. Vektör uzayları

Tanım 3.2.1 : X boş olmayan bir küme ve K cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun.

$$\begin{aligned} +: X \times X \to X, \quad (x,y) \to x+y \\ .: K \times X \to X, \quad (a,x) \to ax \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in K$ için

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y+z) = (x+y) + z$
3. Her $x \in X$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır.
4. Her $x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır.
5. Her $x \in X$ $1.x = x$
6. $a(x+y) = ax + ay$
7. $(a+b)x = ax + bx$
8. $(ab)x = a(bx)$

şartları sağlansın. Bu durumda X 'e K üzerinde bir vektör uzayı(lineer uzay), elemanlarına da vektör denir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X 'e reel vektör uzayı, $K = \mathbb{C}$ alınırsa kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 3.2.2 : $\varnothing \neq M \subset X$ ise M 'den alınan her sonlu sayıdaki vektörün lineer kombinasyonlarının kümesine M 'nin gerdiği küme denir ve $SpanM$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.3 : X bir vektör uzayı ve $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ olsun. $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ eşitliği ancak ve ancak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ olması halinde gerçekleniyorsa $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine lineer bağımsız, aksi taktirde lineer bağımlıdır denir.

Tanım 3.2.4 : X bir vektör uzayı ve M , X 'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. M lineer bağımsız ve $X = SpanM$ ise M 'ye X 'in bir tabanı veya bazı denir.

Eğer X vektör uzayının sonlu bir tabanı varsa X 'e sonlu boyutlu bir vektör uzayı, aksi taktirde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı denir. Sonlu boyutlu bir X vektör uzayının tabanındaki vektörlerin sayısına X 'in boyutu denir ve $BoyX$ ile gösterilir.

Herhangi bir D kümesi ve bir X vektör uzayı verilsin. Tanım kümesi D ve görüntü kümesi X 'in bir alt kümesi olan bütün fonksiyonlar kümesi

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ x \in D, \ \alpha \in K \qquad (3.2.2)$$

cebirsel işlemleri altında bir vektör uzayı oluşturur ve $E(D,X)$ ile gösterilir. Farklı D kümeleri ve farklı X vektör uzayları durumunda çeşitli $E(D,X)$ vektör uzayları elde edilir.

Örnek 3.2.5 : $D = \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, reel katsayılı ve derecesi verilen bir m sayısından daha büyük olmayan bütün cebirsel polinomlardan oluşan P_m kümesini göz önüne alalım.

$$\forall p, q \in P_m \text{ ve } \forall a \in \mathbb{R} \text{ için } p + q \in P_m \text{ ve } ap \in P_m \qquad (3.2.3)$$

olduğundan P_m bir reel vektör uzayıdır ve $BoyP_m = m+1$' dir. Benzer şekilde $D = \mathbb{C}$ üzerinde tanımlı, kompleks katsayılı ve derecesi verilen bir m sayısından daha büyük olmayan bütün cebirsel polinomlardan oluşan P_m kümesi bir kompleks vektör uzayıdır.

Örnek 3.2.6 : $D = [a,b]$ ve $X = C([a,b])$, $[a,b]$ üzerinde tanımlı sürekli ve (3.2.2) işlemleri altında reel bir vektör uzayı oluşturan reel değerli bütün fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda $E([a,b], C([a,b])) = C([a,b], \mathbb{R})$ reel bir vektör uzayıdır. Benzer şekilde $C([a,b], \mathbb{C})$ kompleks vektör uzayı tanımlanır.

Simdi bazı önemli vektör uzaylarını inceleyelim.

Tanım 3.2.7 : Bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun dayanağı f 'nin sıfırdan farklı olduğu kümenin kapanışıdır. Yani

$$\text{supp}f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \tag{3.2.4}$$

seklindedir. supp$f$ kümesi X 'in kompakt bir alt kümesi ise f 'ye kompakt dayanağa sahiptir denir.

$C_b(X)$ uzayı; X metrik uzayı üzerinde sınırlı sürekli fonksiyonların uzayıdır.

$C_c(X)$ uzayı; X metrik uzayı üzerinde kompakt dayanağa sahip sürekli fonksiyonların uzayıdır. $C_c(X)$ uzayı $C_b(X)$ uzayının lineer alt uzayıdır fakat kapalı olması gerekmez. $C_0(X)$ uzayı; $C_c(X)$ uzayının $C_b(X)$ uzayındaki kapanışıdır. $C_0(X)$ uzayı sonsuzda sıfır olan sürekli fonksiyonların uzayıdır.

Sürekli fonksiyonlardan oluşan bu vektör uzayları arasında aşağıdaki ilişki vardır.

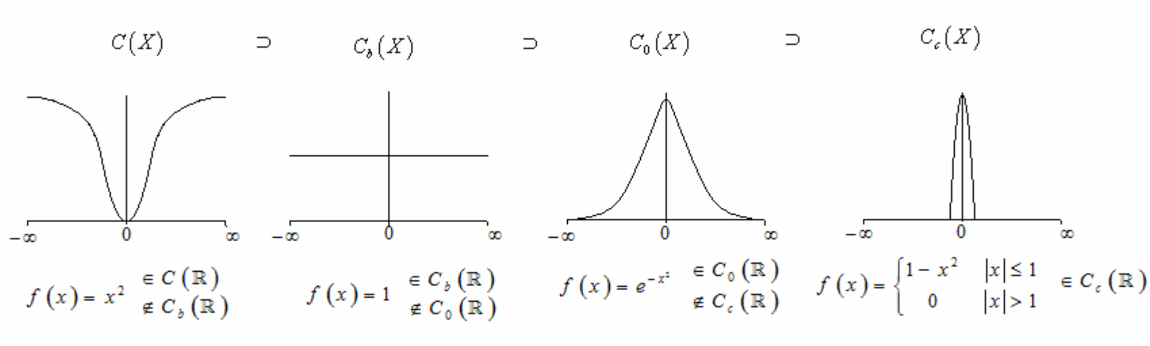
$$C(X) \supset C_b(X) \supset C_0(X) \supset C_c(X) \tag{3.2.5}$$

X kompakt metrik uzay ise bu vektör uzayları denktir.

Örnek 3.2.8 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $C(\mathbb{R})$ uzayına ait olup $C_b(\mathbb{R})$ uzayına ait değildir. $f(x) = 1$ fonksiyonu $C_b(\mathbb{R})$ uzayına ait olup $C_0(\mathbb{R})$ uzayına ait değildir. $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu $C_0(\mathbb{R})$ uzayına ait olup $C_c(\mathbb{R})$ uzayına ait değildir.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \tag{3.2.6}$$

$C_c(\mathbb{R})$ uzayına aittir.



Şekil 3.2.1 : Sürekli fonksiyonlara örnek gösterimler

3.2.1 Normlu Vektör Uzayları

Vektör uzayı açık bir cebirsel amaç olup, eğer bu amaç üzerinde Analizle uğraşmak istiyorsak onun üzerinde bir uzunluk ölçüm tarzının inşa edilmesi gerekir. Bu, norm denilen kavramın tanımlanmasıyla yapılır.

Tanım 3.2.1.1 : X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için

a. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (3.2.1.1)

c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine normlu vektör uzayı denir. Bir vektör uzayı üzerinde birden fazla norm tanımlanabilir.

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olmak üzere

$$d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(x, y) = \|x - y\| \qquad (3.2.1.2)$$

şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğu kolayca görülebilir. Böylece her normlu uzaydan bir metrik uzay elde edilebilir.

Tanım 3.2.1.2 : (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0 \qquad (3.2.1.3)$$

ise (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama adı verilir.

Tanım 3.2.1.3 : (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir n_ε doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisidir denir.

Lemma 3.2.1.4 : Aşağıdaki önermeler doğrudur.

a. Normlu uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.
b. Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.
c. $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki bir (x_n) Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisine sahipse (x_n) dizisi de x noktasına yakınsar. ♦

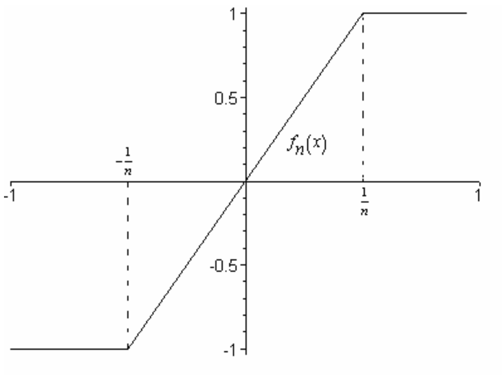
$C([a,b], \mathbb{R})$ vektör uzayı $1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.2.1.4)$$

normuna göre bir normlu uzaydır.

$C([-1,1])$ içinde terimleri

$$f_n(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x\le -1/n\\ nx & -1/n\le x\le 1/n\\ 1 & 1/n\le x\le 1\end{cases}$$



Şekil 3.2.1.1 : $f_n(x)$ fonksiyonu

şeklinde tanımlanan (f_n) dizisinin $d_1(f,g)=\int_a^b |f(s)-g(s)|ds$ metriğine göre Cauchy dizisi olduğunu önceden ispatlamıştık. Böylece bu dizinin $\left(C([-1,1]),\|.\|_{L_1}\right)$ uzayında bir Cauchy olduğunu söyleyebiliriz. Bu dizinin bu normlu uzaydaki limitinin

$$f_0(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & -1\le x<0 \text{ için}\\ 0 & x=0 \text{ için}\\ -1 & 0<x\le 1 \text{ için}\end{cases} \tag{3.2.1.5}$$

fonksiyonu olduğunu gösterelim. Her $n=1,2,\ldots$ ve $x\in[-1,1]$ için $|f_n(x)-f_0(x)|\le 2$ olduğundan

$$\|f_n-f_0\|_{L_1}=\int_{-1}^{1}|f_n(x)-f_0(x)|ds=\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}}|f_n(x)-f_0(x)|ds\le\frac{4}{n} \tag{3.2.1.6}$$

olur. Buradan $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f_0\|_{L_1}=0$ olacağından (f_n) dizisinin limiti f_0 fonksiyonudur. f_0 fonksiyonu ise $C([-1,1])$ uzayının elemanı değildir. Dolayısıyla $C([-1,1])$ uzayı $L_1[-1,1]$ normuna göre tam değildir. ♦

$[a,b]$ aralığında sonlu sayıda noktada sıçramalı süreksizliğe sahip her fonksiyon bir $\{f_n\} \in C([a,b])$ Cauchy dizisinin

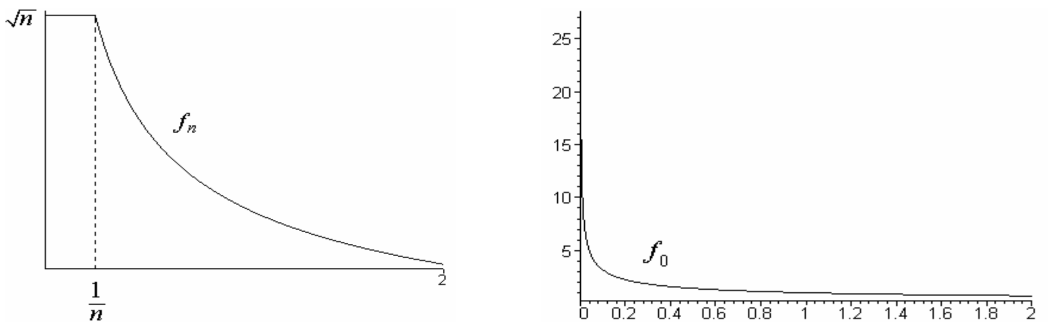
$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (3.2.1.7)$$

normuna göre limitidir. Bu özellik $[a,b]$ aralığında sonlu sayıda noktada sonsuz süreksizliğe sahip fonksiyonlar için de geçerlidir.

Örnek 3.2.1.5 : $C([0,2])$ uzayındaki

$$f_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x \in \left[\dfrac{1}{n}, 2\right] \\ \sqrt{n} & x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \end{cases} \qquad (3.2.1.8)$$

dizisi $L_1[0,2]$ normuna göre $f_0 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonuna yakınsar. Fakat $f_0 \notin C([0,2])$ 'dir.



Şekil 3.2.1.2 : $C([0,2])$ uzayındaki f_n dizisinin $f_0 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonuna yakınsaması

Bunlardan da $\left(C([a,b]), d_p\right)$, $1 < p < \infty$ metrik uzayının tam olmadığını görürüz.

Tanım 3.2.1.6 : Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir.

Örnek 3.2.1.7 : $X = \mathbb{R}^n \left(\text{veya } \mathbb{C}^n\right)$ vektör uzayı

a. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (3.2.1.9)

b. $\|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \ 1 \le p \le \infty$ (3.2.1.10)

c. $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$ (3.2.1.11)

normlarına göre birer Banach uzayıdır.

Örnek 3.2.1.8 : $C([a,b], K)$ vektör uzayı

$$\| f \|_{C([a,b])} = \max\{| f(x)| : x \in [a,b]\} \qquad (3.2.1.12)$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Bu normun sup ile de tanımlanması bir şeyi değiştirmeyecektir. Daha genel olarak kompakt K metrik uzayında tanımlı sürekli fonksiyonların $C(K)$ uzayı supremum norma göre Banach uzayıdır.

X kümesi kompakt değilse, sürekli fonksiyonlar sınırsız olabileceğinden $\| f \|_\infty = \sup_{x \in X} | f(x)|$ ifadesi $C(X)$ üzerinde bir norm tanımlamayabilir. $C_b(X)$ uzayı X üzerinde sınırlı sürekli fonksiyonların uzayı olup supremum norma göre Banach uzayıdır.

Örnek 3.2.1.9 : $[a,b]$ aralığında kendisi ve birinci türevi sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonların $C^1([a,b])$ uzayı supremum normuna göre Banach uzayı değildir. Çünkü sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların uniform limitinin diferensiyellenebilir olması gerekmez.

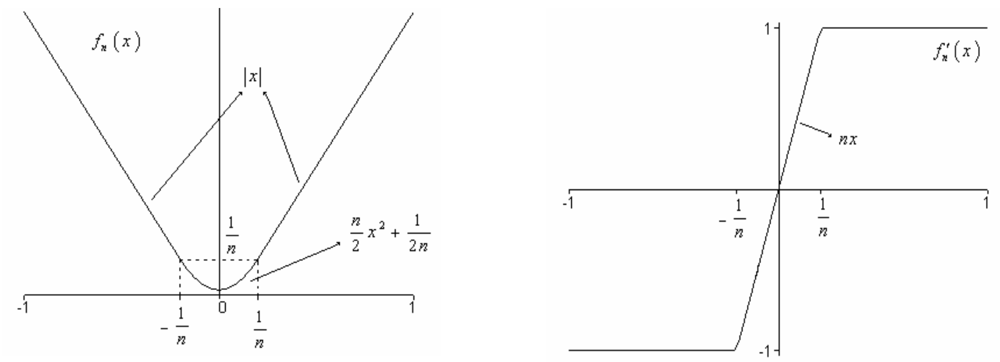
Mesela

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}x^2+\dfrac{1}{2n} & 0\le |x|\le \dfrac{1}{n}\\ |x| & \dfrac{1}{n}\le |x|\le 1\end{cases} \qquad (3.2.1.13)$$

fonksiyon dizisi $C^1([-1,1])$ uzayının elemanıdır. Yani hem bu dizi hem de

$$f_n'(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x\le -\dfrac{1}{n}\\ nx & -\dfrac{1}{n}\le x\le \dfrac{1}{n}\\ 1 & \dfrac{1}{n}\le x\le 1\end{cases} \qquad (3.2.1.14)$$

dizisi $C^1([-1,1])$ uzayındadır.



Şekil 3.2.1.3 : $f_n(x)$ ve $f_n'(x)$ dizilerinin $C^1([-1,1])$ uzayının elemanları olması

Bu dizinin supremum limiti $f_0(x)=|x|$ fonksiyonu olup bu limit için $\lim\limits_{n\to 0}\|f_n-f_0\|_\infty=\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f_0(x)|=0$ olacağı kolayca görülür. Fakat bu fonksiyon diferansiyellenemez.

Normu faklı şekilde tanımlarsak, örneğin

$$\|f\|_{C^1}=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty \qquad (3.2.1.15)$$

şeklinde C^1 normu tanımlarsak $C^1([a,b])$ uzayı bu norma göre Banach uzayı olur. Daha genel olarak $r \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere $C^r([a,b])$ vektör uzayı

$$\|f\|_{C^{(r)}[a,b]} = \sum_{i=0}^{r} \left\| f^{(i)} \right\|_{C[a,b]} \tag{3.2.1.16}$$

normuna göre Banach uzayıdır.

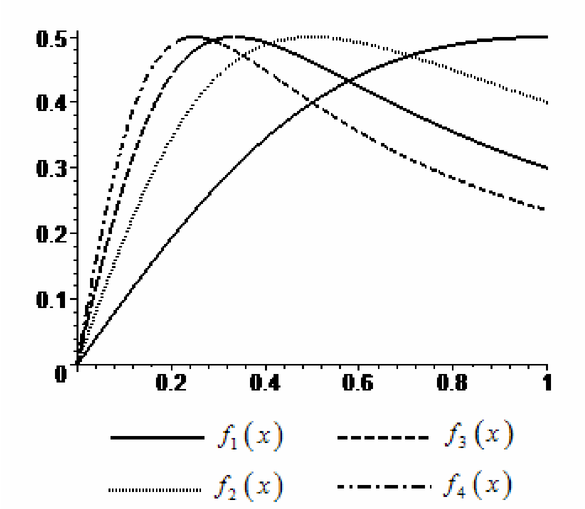
3.2.2. $C(K)$ Uzayının kompakt alt kümeleri

Heine-Borel teoremi $\mathbb{R}^n$'nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesinin kompakt olduğunu ispatlarken $\mathbb{R}^n$'nin sonlu boyutlu oluşunu kullanır. Sonsuz boyutlu uzaylarda kapalılık ve sınırlılık kompaktlık için yeterli değildir. $C(K)$'nin kompakt alt kümelerini Arzela-Ascoli teoremi tanımlar. Bu teorem denk süreklilik tanımını kullanır.

Tanım 3.2.2.1 : F, (X,d) metrik uzayından (Y,d) metrik uzayına tanımlı fonksiyonların bir ailesi olsun. Her $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $d(x,y) < \delta$ ifadesi $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ifadesini gerektirecek şekilde bütün $f \in F$ fonksiyonları için bir $\delta > 0$ sayısı varsa F ailesine denk süreklidir denir.

Bu tanımın temel noktası δ sayısının f fonksiyonuna bağlı olmayıp x noktasına bağlı olabileceğidir. δ sayısı x noktasından da bağımsız seçilebilirse F ailesi düzgün denk sürekli olur.

Örnek 3.2.2.2 : $x \in [0,1]$ için $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ sürekli fonksiyonlarının ailesini ele alalım.



Şekil 3.2.2.1 : $x \in [0,1]$ için $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ sürekli fonksiyonlarının ailesi

$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ olarak alalım. Keyfi bir δ sayısı verildiğinde $\dfrac{1}{k} < \delta$ olacak şekilde uygun bir k doğal sayısı bulunabilir. Buna göre $x = 0$ ve $y = \dfrac{1}{k}$ olarak alınırsa

$$d(x,y) = \frac{1}{k} < \delta \text{ olduğunda } d\left(f_k(x) - f_k(y)\right) = d\left(f_k(0) - f_k\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

olur. Yani k. fonksiyon olan f_k fonksiyonu şartı bozar. Bu yüzden ele aldığımız fonksiyon ailesi denk sürekli değildir.

Teorem(Arzela-Ascoli) 3.2.2.3 : K bir kompakt metrik uzay olsun. $C(K)$ uzayının bir alt uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı, sınırlı ve denk sürekli olmasıdır.

Bir küme prekompakt ise kapanışının kompakt olduğunu ve bir kümenin kompakt olması için gerek ve yeter şartın kapalı ve prekompakt olması gerektiğini biliyoruz.

K kompakt bir metrik uzay ve $M > 0$ olmak üzere $C(K)$ uzayının

$$F_M = \{ f : f, \text{K 'da Lipschitz surekli ve Lip}(f) \le M \} \qquad (3.2.2.1)$$

alt kümesini ele alalım. F_M kümesi denk süreklidir. Çünkü $\varepsilon > 0$ ve $\delta = \varepsilon / M$ alınırsa her $f \in F_M$ için $d(x, y) < \delta$ ifadesi $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ifadesini gerektirir.

F_M kümesi kapalıdır çünkü (f_n), $C(K)$ ' da f ' ye düzgün yakınsayan bir dizi ise

$$\begin{aligned} \text{Lip}(f) &= \sup_{x \ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \\ &= \sup_{x \ne y} \left[\lim_{n \to \infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x, y)} \right] \\ &\le \liminf_{n \to \infty} \left[\sup_{x \ne y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x, y)} \right] \le M \end{aligned} \qquad (3.2.2.2)$$

olacağından f limiti de F_M kümesine aittir. Sabit fonksiyonlar F_M kümesine ait olduğundan ve onların uniform normları keyfi olarak çok büyük olacağından F_M kümesi sınırlı değildir.

Sonuç olarak F_M kümesi kompakt değildir ama Arzela-Ascoli teoremine göre F_M 'nin her kapalı, sınırlı alt kümesi kompakttır ve F_M 'nin her sınırlı alt kümesi prekompakttır.

Örnek 3.2.2.4 : Yukarıdaki şekilde tanımlanmış F_M kümesini ele alalım. x_0, K kompakt metrik uzayında bir nokta olmak üzere

$$B_M = \{ f \in F_M : f(x_0) = 0 \} \qquad (3.2.2.3)$$

kümesi $C(K)$ 'nın kompakt bir alt kümesidir.

Çözüm: B_M kümesi denk sürekli olan F_M kümesinin alt kümesidir. B_M 'nin kompakt olduğunu göstermek için kapalı ve sınırlı olduğunu göstermeliyiz.

Her $f \in B_M$ için

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x) - f(x_0)| \le M \sup_{x \in K} |x - x_0| \le M \text{çap}(K) \qquad (3.2.2.3)$$

olup, K kompakt olduğundan çapı sonlu olacağından B_M kümesi sınırlıdır. B_M 'nin kapalı olduğunu göstermek için bu kümeden keyfi f_n dizisini alalım($f_n(x_0)=0$). Bu dizinin yakınsadığı eleman f olsun. Bu taktirde

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=0 \tag{3.2.2.4}$$

olacağından $f\in B_M$ olur. Dolayısıyla B_M kapalıdır. Böylece B_M kümesi $C(K)$ 'nın kompakt bir alt kümesidir. ♦

Düzgün sınırlı türevlere sahip sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların bir ailesi denk süreklidir. Bu aile ayrıca sınırlı olursa prekompakt olur. Bir fonksiyon ailesinin türevlerine uygun normlarda konulacak sınır, ailenin prekompakt oluşunu ima eder.

Örnek 3.2.2.5 : $C^1([0,1])$, $[0,1]$ aralığında türevleriyle birlikte sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $M>0$ ve $N>0$ sabitleri için F kümesini

$$F=\left\{ f\in C^1([0,1]) : \|f\|\le M,\ \|f'\|\le N \right\} \tag{3.2.2.5}$$

şeklinde düşünürsek F kümesi $C([0,1])$ uzayında prekompakt olur. Bununla birlikte sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların düzgün limitinin diferansiyellenebilir olması gerekmediğinden bu küme kapalı değildir. Böylece F kümesi kompakt olamaz. Bu kümenin $C([0,1])$ uzayındaki kapanışı

$$\overline{F}=\left\{ f\in C([0,1]) : \|f\|\le M,\ \mathrm{Lip}(f)\le N \right\} \tag{3.2.2.6}$$

kompakt kümesidir.

3.2.3. Adi Diferansiyel Denklemler

Kompaktlık kavramı adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını ispatlamada kullanılabilir.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(t,u) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \qquad (3.2.3.1)$$

başlangıç değer probleminin çözümünde genel $f(t,u)$ fonksiyonu için çözümün varlığını açık bir formül elde ederek ispatlayamayız. Bunun yerine kompaktlık kavramından faydalanabiliriz. Başlangıç değer problemini uygun yaklaşık anlamda sağlayan bir $\{u_\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1\}$ ailesi oluşturabiliriz. Bu fonksiyonlar diferansiyel denklemin yaklaşık çözümleri olduğu için türevleri düzgün sınırlıdır ve Arzela-Ascoli teoremine göre prekompakt bir küme oluştururlar. Buradan da bir y fonksiyonuna düzgün yakınsayan yaklaşık çözümlerin bir alt dizisi bulunabilir. Bu u fonksiyonunun da başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğu ispatlanabilir.

Tanım 3.2.3.1 : Aşağıdaki şartları bir I aralığında sağlayan $u_\varepsilon(t)$ fonksiyonuna (3.2.3.1) denkleminin ε yaklaşık çözümü denir.

a. $u_\varepsilon(t_0) = u_0$

b. $u_\varepsilon(t)$, I aralığında sonlu sayıda nokta dışında diferansiyellenebilen sürekli bir fonksiyondur.

c. $\dot{u}_\varepsilon(t)$ türevinin mevcut olduğu her noktada $\left|\dot{u}_\varepsilon(t) - f(t, u_\varepsilon(t))\right| \leq \varepsilon$

Peano Varlık Teoremi 3.2.3.2 : $f(t,u)$ fonksiyonu

$$\bar{\Omega} := \left\{ (t,u) \in R^2 : t \in [t_0, t_0 + a] \ , \ u \in [u_0 - b, u_0 + b] \ \right\} \qquad (3.2.3.2)$$

bölgesinde sürekli bir fonksiyon, $M := \max\limits_{(t,u)\in\bar{\Omega}} \left| f \ (t,u) \right|$ ve $\alpha = \min\{a, b/M\}$ olsun. Bu taktirde (3.2.3.1) denkleminin $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığında en az bir çözümü vardır.

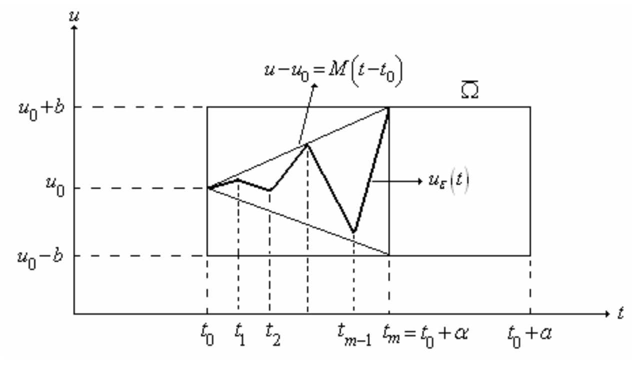
İspat: Bu teorem ispatlanırken $[t_0, t_0+\alpha]$ aralığı m eşit alt aralığa bölünerek her bir $t_k \le t \le t_{k+1}$ aralığında $u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t_k) + (t-t_k) f(t_k, u_\varepsilon(t_k))$ lineer fonksiyonu tanımlanır. Böylece tüm $[t_0, t_m]$ aralığında

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u_\varepsilon(t_0) + (t-t_0) f(t_0, u_\varepsilon(t_0)) & t_0 \le t \le t_1 \\ u_\varepsilon(t_1) + (t-t_1) f(t_1, u_\varepsilon(t_1)) & t_1 \le t \le t_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_\varepsilon(t_{m-1}) + (t-t_{m-1}) f(t_{m-1}, u_\varepsilon(t_{m-1})) & t_{m-1} \le t \le t_m \end{cases} \qquad (3.2.3.3)$$

sürekli, parçalı lineer fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon için $u_\varepsilon(t_0) = u_0$ olduğu ve bu fonksiyonun $t = t_k$ noktaları dışında diferansiyellenebildiği ve $t_k < t < t_{k+1}$ için $\dot{u}_\varepsilon(t) = f(t_k, u_\varepsilon(t_k))$ olduğu görülür. $\alpha = \min\{a, b/M\}$ olarak seçip $u_\varepsilon(t)$ fonksiyonu $[t_0, t_0+\alpha]$ aralığında tanımlayarak bu fonksiyonun $\overline{\Omega}$ süreklilik bölgesinin dışına çıkmasını engellemiş oluruz ve $u_\varepsilon(t)$ fonksiyonu $u - u_0 = M(t-t_0)$ ve $u - u_0 = -M(t-t_0)$ doğrularının arasında kalır. Böylece $u_\varepsilon(t)$ fonksiyonu

$$R := \{(t,u) \in R^2 : t \in [t_0, t_0+\alpha] \;,\; u \in [u_0 - b, u_0 + b] \} \qquad (3.2.3.4)$$

dikdörtgeninde kalır.



Şekil 3.2.3.1 : Peano Varlık Teoremi

R kompakt bir bölge olduğundan f fonksiyonu bu bölgede düzgün süreklidir. Yani, keyfi $(s,u),(t,v) \in R$ noktaları verildiğinde her $\varepsilon > 0$ için $|f(s,u) - f(t,v)| \le \varepsilon$

olduğunda $|s-t|\le\delta,\ |u-v|\le\delta$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı vardır. Şimdi oluşturduğumuz $u_\varepsilon(t)$ fonksiyonu için $\left|\dot{u}_\varepsilon(t)-f\left(t,u_\varepsilon(t)\right)\right|$ ifadesini inceleyelim. $t_k<t<t_{k+1}$ için

$$\left|\dot{u}_\varepsilon(t)-f\left(t,u_\varepsilon(t)\right)\right|=\left|f\left(t_k,u_\varepsilon(t_k)\right)-f\left(t,u_\varepsilon(t_k)+(t-t_k)f\left(t_k,u_\varepsilon(t_k)\right)\right)\right| \quad (3.2.3.5)$$

olur. Ayrıca

$$|t-t_k|\le h,\ \left|u_\varepsilon(t_k)+(t-t_k)f\left(t_k,u_\varepsilon(t_k)\right)-u_\varepsilon(t_k)\right|\le\left|f\left(t_k,u_\varepsilon(t_k)\right)\right|h\le Mh \quad (3.2.3.6)$$

olduğundan $h\le\delta,\ Mh\le\delta$ seçilirse f 'nin düzgün sürekliliği kullanılarak $\left|\dot{u}_\varepsilon(t)-f\left(t,u_\varepsilon(t)\right)\right|\le\varepsilon$ bulunur. Böylece oluşturduğumuz $u_\varepsilon(t)$ fonksiyonu (3.2.3.1) denkleminin ε yaklaşık çözümüdür. Her ε sayısı için bu şekilde oluşturulmuş $u_\varepsilon(t)$ fonksiyonları Lipschitz süreklidir ve Lipschitz sabitleri M ile düzgün sınırlıdır. Böylece $\{u_\varepsilon\}$ ailesi $C\left([t_0,t_0+\alpha]\right)$ sınıfında prekompakttır. Demek ki $n\to\infty$ için $\varepsilon_n\to 0$ sayılarına karşılık yukarıdaki şekilde kurulacak olan u_{ε_n} fonksiyonları bir u fonksiyonuna düzgün yakınsar. Şimdi bu u fonksiyonunun da çözüm olduğunu gösterelim. $n=1,2,...$ için

$$\begin{aligned}u_{\varepsilon_n}(t)&=u_{\varepsilon_n}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot{u}_{\varepsilon_n}(s)\,ds=u_{\varepsilon_n}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[\dot{u}_{\varepsilon_n}(s)-f\left(s,u_{\varepsilon_n}(s)\right)\right]ds\\&+\int_{t_0}^{t}f\left(s,u_{\varepsilon_n}(s)\right)ds\end{aligned} \quad (3.2.3.7)$$

olup $n\to\infty$ için limit alınırsa $u(t)=u(t_0)+\int_{t_0}^{t}f\left(s,u(s)\right)ds$ bulunur. Buradan $[t_0,t_0+\alpha]$ için $\dot{u}(t)=f\left(t,u(t)\right)$ olduğu, yani limit fonksiyonun çözüm olduğu görülür.♦

Benzer ispat $[t_0-\alpha,t_0]$ için de yapılabilir.

Teorem(Gronwall Eşitsizliği) 3.2.3.4 : $u(t)\ge 0$ ve $v(t)\ge 0$, $0\le t\le T$ aralığında tanımlanmış sürekli ve reel değerli fonksiyonlar ve $u_0\ge 0$ bir sabit olsun. $t\in[0,T]$ için

$u(t) \le u_0 + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\,ds$ ise $t \in [0,T]$ için $u(t) \le u_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right)$ olur. Özel olarak $u_0 = 0$ ise $u(t) = 0$ olur.

Picard-Lindelöf Teoremi 3.2.3.5 : $f(t,u)$ fonksiyonu

$$\overline{\Omega} := \left\{ (t,u) \in R^2 : t \in [t_0, t_0 + a] \ , \ u \in [u_0 - b, u_0 + b] \right\} \qquad (3.2.3.8)$$

bölgesinde sürekli ve u değişkenine göre Lipschitz sürekli olsun. $M := \max\limits_{(t,u) \in \overline{\Omega}} |f(t,u)|$ ve $\alpha = \min\{a, b/M\}$ olsun. Bu taktirde (3.2.3.1) denkleminin $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığında tek bir çözümü vardır.♦

Çözümün tekliğinin ispatı için u ve v fonksiyonunun iki çözüm olduğunu kabul edelim. Bu iki fonksiyonun denklemini taraf tarafa çıkararak $u(t) - v(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \right] ds$ yazıp her iki tarafın mutlak değeriyle $|u(t) - v(t)| \le \int_{t_0}^{t} \left| f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \right| ds$ yazarız. $w = |u - v|$ dersek $w \le \int_{t_0}^{t} \left| f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \right| ds$ buluruz. f, Lipschitz sürekli olduğundan $\left| f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \right| \le L |u(s) - v(s)| = Lw$ olur. Böylece $w \le \int_{t_0}^{t} Lw(s)\,ds$ yazılır. Gronwall eşitsizliğinden $w = 0$ veya $u = v$ bulunur.

3.2.4. Lebesque uzayları

Tanım 3.2.4.1 : Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $C(\Omega)$ sınıfında

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p \, d\Omega < \infty \tag{3.2.4.1}$$

şartını sağlayan fonksiyonların kümesini $C_I(\Omega)$ ile gösterelim. Bu kümenin

$$\| f \|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, d\Omega \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.2.4.2}$$

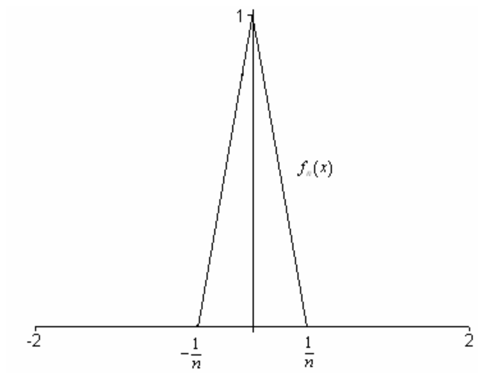
normuna göre tamlaması olan uzaya $L_p(\Omega)$ Lebesque uzayı denir. Buradaki integral Riemann anlamındaki integraldir.

$L_p(\Omega)$ uzayı $C_I(\Omega)$ uzayının tamlamasıdır. Bunun anlamı $L_p(\Omega)$uzayındaki elemanların, $C_I(\Omega)$ uzayındaki Cauchy dizilerinin denklik sınıfları olduğudur.
$C_I(\Omega)$ uzayında $\|.\|_{L_p}$ normuna göre Cauchy dizisi demek $\{ f_n(x) \} \in C_I(\Omega)$ dizisi için $m,n \to \infty$ iken $\| f_n - f_m \|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f_n(x) - f_m(x)|^p \, d\Omega \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$ olması demektir. Ayrıca $\{ f_n(x) \}$ ve $\{ g_n(x) \}$ dizilerinin denk olması demek $n \to \infty$ için $\| f_n - g_n \|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f_n(x) - g_n(x)|^p \, d\Omega \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$ olması anlamındadır.

$L_p(\Omega)$ uzayının elemanlarını daha yakından inceleyelim. $f(x) \in C_I(\Omega)$ ise $f(x) \in L_p(\Omega)$ olduğunu söylemek tam olarak doğru bir ifade değildir. Çünkü $L_p(\Omega)$ uzayının elemanları fonksiyonlar değil fonksiyonların Cauchy dizilerinin denklik sınıflarıdır. Bunun yanında $f(x) \in C_I(\Omega)$ ise Cauchy dizilerinin biri olarak $\{ f(x), f(x), \ldots \}$ dizisini alabileceğimiz bir denklik sınıfının var olduğunu söyleyebiliriz. Bu denklik sınıfını etiketlemek için yine $f(x)$'i kullanırız.

Örneğin $f(x)\equiv 0\in C_I(\Omega)$ fonksiyonu için $(0,0,\ldots)$ dizisini içeren denklik sınıfına *sıfır sınıfı* denir ve 0 ile etiketlenir. Fakat bu sınıfta başka Cauchy dizileri de vardır. Örneğin $N=1$ ve $\Omega=(-2,2)$ alırsak sürekli fonksiyonların

$$f_n(x)=\begin{cases}1-nx & 0\le x\le 1/n\\ 1+nx & -1/n\le x\le 0\\ 0 & \text{diger yerlerde}\end{cases}$$



Şekil 3.2.4.1 : $L_p(\Omega)$ uzayında denklik sınıfı

dizisi için

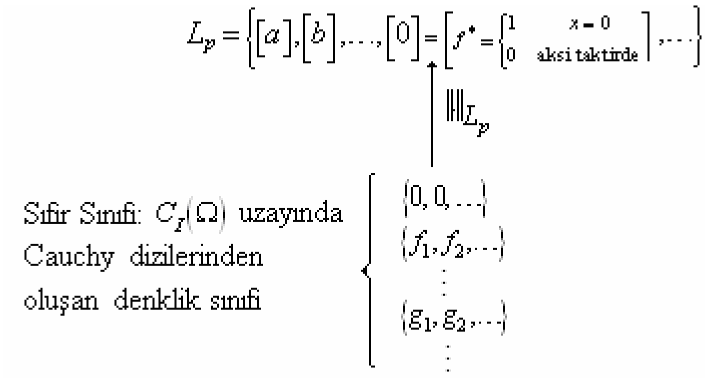
$$\left\| f_n(x)\right\|_{L_p}=\left(2\int_0^{1/n}\left|1-nx\right|^p dx\right)^{1/p}=\left(\frac{2}{n(p+1)}\right)^{1/p}\to 0 \qquad (3.2.4.3)$$

olur. Böylece $\{f_n(x)\}$ dizisi de $(0,0,\ldots)$ dizisi ile aynı denklik sınıfındadır. Diğer bir deyişle $\{f_n(x)\}$ dizisi $L_p(\Omega)$ uzayında 0 ile etiketlenmiş elemanın Cauchy dizilerinden biridir.

$\{f_n(x)\}$ dizisinin noktasal limiti

$$f^*(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & \text{aksi taktirde}\end{cases} \qquad (3.2.4.4)$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyona L_p normunda yakınsayacak $C_I(\Omega)$ uzayında Cauchy dizileri mevcuttur. Hem $f(x)\equiv 0$ fonksiyonuna hem de $f^*(x)$ fonksiyonuna sıfır sınıfından bir Cauchy dizisi eşleştirebileceğimizden, $L_p(\Omega)$ uzayı $f^*(x)$ fonksiyonu ile $f(x) \equiv 0$ fonksiyonunu aynı görür.



Şekil 3.2.4.2 : $L_p(\Omega)$ uzayının yapısı

Örnek 3.2.4.2 : $N = 1$ ve $\Omega = (0,1)$ alalım. $\{x_k\} \subset \Omega$ noktalar dizisi olmak üzere $\|\cdot\|_{L_p}$ normu

$$f(x) \equiv 0 \text{ ve } g(x) = \begin{cases} a_k & x = x_k,\ k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases} \qquad (3.2.4.5)$$

fonksiyonlarını ayırt edemez.

Tanım 3.2.4.3 : $\{f_n(x)\} \subset C_I(\Omega)$ dizisine $n \to \infty$ için $\|f_n\|_{L_p} \to 0$ oluyorsa sıfır dizisi denir.

Tanım 3.2.4.4 : Bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),\ x \in \Omega \qquad (3.2.4.6)$$

olacak şekilde $\{f_n(x)\} \subset C_I(\Omega)$ bir sıfır dizisi varsa bu $f(x)$ fonksiyonuna hemen hemen her yerde (h.h.h) sıfırdır denir.

Diğer bir deyişle h.h.h. $f(x)=0$ ise $L_p(\Omega)$ uzayında sıfır sınıfının elemanıdır.

Ω kümesinde h.h.h. $f(x)-g(x)=0$ ise $f(x)$ ile $g(x)$ fonksiyonlarının hemen hemen her yerde denk olduklarını söyleriz. Böyle fonksiyonlar için

$$\|f-g\|_{L_p}=0 \tag{3.2.4.7}$$

olur.

Böylece $L_p(\Omega)$ uzayını ölçüm teorisini kullanmadan tanımlamış olduk. $L_p(\Omega)$ uzayını $C_I(\Omega)$ uzayının tamlaması olarak tanımlamak ile ölçüm teorisini kullanarak tanımlamak aynı anlama gelecektir. Yaptığımız tanımlamada Ω üzerindeki integralleri Riemann anlamında hesapladık. Öyle bölgeler vardır ki Riemann integrali kullanılamaz ve Lebesque integrali gerekir. Fakat böyle bölgelerle pratikte pek karşılaşılmaz.

Tanım 3.2.4.5 : Ω ölçülebilir bir küme ve $p>1$ olsun. Ω kümesinde ölçülebilir, hemen hemen her yerde (h.h.h) sonlu olan ve p. kuvvetten Lebesque anlamında integrallenebilen bütün fonksiyonların kümesini $L_p(\Omega)$ ile gösterelim.

$L_p(\Omega)$ üzerinde $f\sim g \Leftrightarrow$ h.h.h. $f=g$ biçiminde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla bu bağıntı $L_p(\Omega)$ kümesini denklik sınıflarına ayırır. O halde $L_p(\Omega)$'nın elemanları $[f]$ biçiminde denklik sınıflarıdır. ($[f]$ sınıfı f fonksiyonuna h.h.h eşit olan fonksiyonlar sınıfıdır.)

$L_p(\Omega)$ kümesi $f,g\in L_p(\Omega)$ ve $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$[f]+[g]=[f+g],\quad a[f]=[af] \tag{3.2.4.8}$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre birer vektör uzayıdır.

Teorem 3.2.4.6 : $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ vektör uzayı $f \in L_p(\Omega)$ için

$$\|f\|_{L_p} = \|[f]\|_{L_p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\Omega \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.2.4.9)$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Örnek 3.2.4.7 : $v(x) = x^{-\beta}$ fonksiyonlarının denklik sınıfı $x \in I = (0,1)$ için $\beta < \dfrac{1}{2}$ olduğunda $L_2(I)$ uzayının elemanı olur.

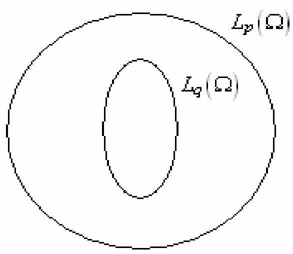
Teorem 3.2.4.8 : Ω sınırlı bir bölge ve $1 \le p \le q < \infty$ olsun. $mes\Omega = \int_\Omega 1.d\Omega$ olmak üzere $F(x)$ elemanı $L_q(\Omega)$ uzayında bir denklik sınıfı ise(yani bu denklik sınıfındaki elemanlar $q.$ dereceden integrallenebilir ise) $F(x) \in L_p(\Omega)$ olur ve

$$\|F\|_{L_p} \le (mes\Omega)^{1/p - 1/q} \|F\|_{L_q} \qquad (3.2.4.10)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 3.2.4.9 : X normlu uzayı Y normlu uzayının bir alt kümesi ise ve X 'den Y 'ye her $x \in X$ için $Ix = x$ ile tanımlanmış operatör sürekli ise X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \to Y$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre Ω sınırlı bir bölge ise $1 \le p \le q < \infty$ için $L_q(\Omega) \to L_p(\Omega)$.



Şekil 3.2.4.3 : $L_q(\Omega)$ uzayı $L_p(\Omega)$ uzayına gömülür.

Tanım 3.2.4.10 : $\Omega \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme ve bu küme üzerinde tanımlı f fonksiyonu için Ω üzerinde h.h.h. $|f(x)| \leq C$ olacak şekilde $C \geq 0$ sabiti varsa f fonksiyonu Ω üzerinde h.h.h. sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan $C \geq 0$ sabit sayılarının en küçüğüne f fonksiyonunun esaslı sınırı denir ve

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf\left\{C \geq 0 : \text{h.h.h. } |f(x)| \leq C\right\} \tag{3.2.4.11}$$

veya

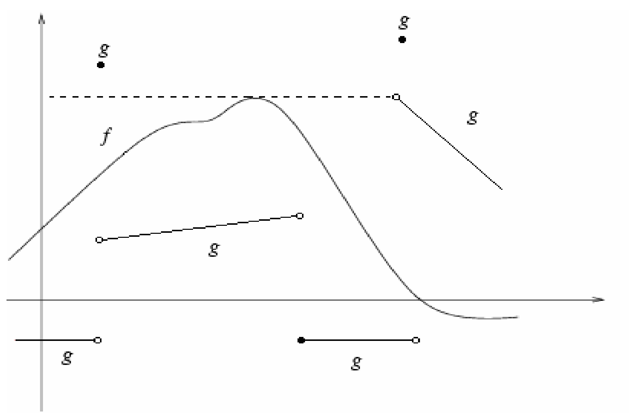
$$\|f\|_{L_\infty} = ess\sup\left\{ |f(x)| : x \in \Omega\right\} \tag{3.2.4.12}$$

biçiminde yazılır.

Ω üzerinde esaslı sınıra sahip fonksiyonların kümesi $L_\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $L_\infty(\Omega)$ uzayı da yukarıda tanımlanan bir vektör uzayıdır.

Örnek 3.2.4.11 : $f(x) = x \notin L_\infty(\mathbb{R})$ olur.

Örnek 3.2.4.12 : $g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{diger yerlerde} \end{cases}$ fonksiyonu $L_\infty(\mathbb{R})$ uzayının elemanıdır ve h.h.h. $|g(x)| \leq 1$ olur. Böylece $\|g(x)\|_{L_\infty} = 1$ olur.



Şekil 3.2.4.4 : Aynı esaslı sınıra sahip f ve g fonksiyonları

Örnek 3.2.4.13 : $g(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ x & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ fonksiyonu için $\|g(x)\|_{L_\infty}=\infty$ olur.

Teorem(Hölder Eşitsizliği) 3.2.4.14 : p ve q, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ özelliğinde genişletilmiş reel sayılar olsun. $f\in L_p(\Omega)$ ve $g\in L_q(\Omega)$ ise $fg\in L_1(\Omega)$ olur ve

$$\int_\Omega |fg|\le \|f\|_{L_p}\,\|g\|_{L_q} \tag{3.2.4.13}$$

eşitsizliği vardır.

3. 3. İç çarpım ve Hilbert uzayları

Vektör cebrinde tanımlanan iç çarpım ve diklik kavramlarının sonsuz boyutlu normlu uzaylara genelleştirilmesi Hilbert uzaylarını doğurur.

Tanım 3.3.1 : $K=\mathbb{R}(\text{veya }\mathbb{C})$ olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

$$(.,.):X\times X\to K \tag{3.3.1}$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(.,.)$'ye X üzerinde bir iç çarpım $(X,(.,.))$ ikilisine de iç çarpım uzayı(ön Hilbert uzayı) denir.

1. Her $x\in X$ için $(x,x)\ge 0$ ve $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$
2. Her $x,y\in X$ için $(x,y)=\overline{(y,x)}$
3. Her $x,y\in X$ ve $a\in K$ için $(ax,y)=a(x,y)$
4. Her $x,y,z\in X$ için $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

Örnek 3.3.2 : $x=(x_1,\dots,x_n)$ ve $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n\left(\text{veya }\mathbb{C}^n\right)$ için

$$\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k \quad \left(\text{veya } \left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{n}x_k \overline{y_k}\right) \tag{3.3.2}$$

tanımıyla $\mathbb{R}^n \left(\text{veya } \mathbb{C}^n\right)$ bir iç çarpım uzayıdır.

Örnek 3.3.3 : $f,g\in C\left(\left[a,b\right],K\right)$ için

$$\left(f,g\right)=\int_a^b f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx \tag{3.3.3}$$

tanımıyla $C\left(\left[a,b\right],K\right)$ bir iç çarpım uzayıdır. Bu uzayı $\tilde{L}_2\left(\left[a,b\right],K\right)$ ile gösteririz.

Tanım 3.3.4 : $\left(X,(.,.)\right)$ bir iç çarpım uzayı ve $x\in X$ olsun. x vektörünün normu

$$\left\|x\right\|=\left(x,x\right)^{1/2} \tag{3.3.4}$$

olarak tanımlanır ve

$$\left|\left(x,y\right)\right|\leq\left\|x\right\|.\left\|y\right\| \tag{3.3.5}$$

eşitsizliği de Cauchy-Schwartz eşitsizliği olarak bilinir.

Önerme 3.3.5 : Bir $\left(X,(.,.)\right)$ iç çarpım uzayı üzerindeki norm her $x,y\in X$ için

$$\left\|x+y\right\|^2+\left\|x-y\right\|^2=2\left\|x\right\|^2+2\left\|y\right\|^2 \tag{3.3.6}$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlik paralelkenar kuralı olarak bilinir.

$\left(X,(.,.)\right)$ bir iç çarpım uzayı ise $x,y\in X$ için

$$d\left(x,y\right)=\left\|x-y\right\|=\left(x-y,x-y\right)^{1/2} \tag{3.3.7}$$

tanımıyla bu iç çarpım uzayı bir metrik uzayıdır. Her iç çarpım uzayı bir normlu uzaydır tersi genelde doğru değildir. Bir normlu uzayın iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter şart paralelkenar kuralının sağlanmasıdır.

Örnek 3.3.6 : $1 \le p < \infty$ ve $p \ne 2$ olmak üzere $\left(\mathbb{R}^n, \|.\|_{L_p}\right)$ normlu uzayı iç çarpım uzayı değildir. Gerçekten $x = (1,1,0,0,...), y = (1,-1,0,0,...) \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için

$$x + y = (2,0,0,0,...), x - y = (0,2,0,0,...) \qquad (3.3.8)$$

olup $\|x\|_p = \|y\|_p = 2^{1/p}$, $\|x+y\|_p = \|x-y\|_p = 2$ olduğundan bu vektörler için paralelkenar kuralı $8 = 4.2^{2/p}$ şartına dönüşüp $p \ne 2$ için bu kural sağlanmaz.

Tanım 3.3.7 : Bir $(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı (3.3.4) normuna göre tam ise yani $(X,(.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi yakınsarsa bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Örnek 3.3.8 : $(.,.): l_2 \times l_2 \to K,\ (x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ dönüşümü l_2 üzerinde bir iç çarpımdır ve bu iç çarpıma göre bir Hilbert uzayıdır.

Örnek 3.3.9 : $\tilde{L}_2([a,b],K)$ uzayı Hilbert uzayı değildir. Çünkü $\tilde{L}_2([a,b],K)$ uzayında tanımlanan iç çarpımın ürettiği $\|.\|_{L_2}$ normuna göre $C\left([a,b], \|.\|_{L_2}\right)$ uzayı tam uzay değildir. $\tilde{L}_2([a,b],K)$ iç çarpım uzayının tamlaması olan $L_2[a,b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 3.3.10 : $(X,(.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun. $(x,y) = 0$ ise x vektörü y vektörüne ortogonaldir(diktir) denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. Benzer şekilde $A, B \subset X$ alt kümeleri verildiğinde eğer $\forall a \in A$ için $x \perp a$ ise x vektörü A kümesine ortogonaldir denir ve $x \perp A$ ile gösterilir. $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ için $a \perp b$ ise A ve B kümelerine ortogonal kümeler denir. Bir $A \subset X$ için $\{x \in X : x \perp A\}$ kümesi A kümesinin ortogonal tümleyeni adını alır ve $A^{\perp}$ ile gösterilir.

Bir $\left(X,\|.\|\right)$ normlu uzayında bir $x\in X$ vektörünün boş olmayan $M\subset X$ alt kümesine olan uzaklığı

$$dist\left(x,M\right)=\inf\left\{\|x-y\|:y\in M\right\} \tag{3.3.9}$$

olarak tanımlanır. Eğer

$$dist\left(x,M\right)=\left\|x-y^{*}\right\| \tag{3.3.10}$$

olacak şekilde $y^{*}\in M$ elemanı varsa y^{*} elemanına M içinde x vektörüne en yakın eleman denir.

M alt uzayı içinde (3.3.4) eşitliğini sağlayan y^{*} elemanının varlığı ve tekliği önemli bir problemdir.

X normlu bir uzay ve M , X 'in sonlu boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda her $x\in X$ için (3.3.4) probleminin en az bir $y^{*}\in M$ elemanı vardır. Bu en yakın eleman tek olmayabilir.

Teorem 3.3.11 : M , H Hilbert uzayının bir kapalı alt uzayı ve $x\in H\setminus M$ olsun. Bu durumda M içinde x vektörüne en yakın tek bir eleman vardır.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar.

a. $dist\left(x,M\right)=\|x-y\|\Rightarrow x-y\perp M$ 'dir.

b. Her $x\in H$ elemanı $y\in M$ ve $z\in M^{\perp}$ olmak üzere $x=y+z$ şeklinde tek türlü ifade edilir.

Tanım 3.3.12 : $\left(X,(.,.)\right)$ bir iç çarpım uzayı ve L, X 'in bir alt kümesi olsun. L ortogonal ve $\forall y\in L$ için $\|y\|=1$ ise L 'ye ortonormal bir küme denir. O halde

X içindeki bir (x_n) dizisinin ortonormal olması için gerek ve yeter şart $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ ve $\forall n \neq m$ için $(x_n, x_m) = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.3.13 : H bir Hilbert uzayı ve f, H üzerinde bir sürekli lineer fonksiyonel olsun. Bu taktirde her $x \in H$ için

$$f(x) = (x, y) \tag{3.3.11}$$

olacak şekilde tek bir $y \in H$ elemanı vardır ve $\|f\| = \|y\|$ şeklindedir.

3.3.1. Hilbert uzayında zayıf yakınsaklık

Bir H Hilbert uzayındaki bir (x_n) dizisi her $y \in H$ için

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, y) = (x, y) \tag{3.3.1.1}$$

oluyorsa $x \in H$ elemanına zayıf yakınsar. Zayıf yakınsama $x_n \rightharpoonup x$ ile güçlü yakınsama da $x_n \to x$ ile gösterilir. Güçlü yakınsama zayıf yakınsamayı gerektirirken tersi doğru değildir.

Örnek 3.3.1.1 : $H = l^2(\mathbb{N})$ olduğunu kabul edelim. $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ standart baz vektörü olsun. $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in l^2(\mathbb{N})$ herhangi bir eleman olmak üzere $(e_n, y) = y_n$ olacaktır. $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2$ yakınsak olduğundan $n \to \infty$ için $y_n \to 0$ olmalıdır. Yani

$$0 = \lim_{n \to \infty} (e_n, y) = (0, y) \tag{3.3.1.2}$$

olacaktır. Böylece $e_n \rightharpoonup 0$ olur. Diğer yandan her $n \neq m$ için $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ olduğundan (e_n) güçlü yakınsamaz.

Zayıf yakınsak bir dizinin sınırlılığı aşikâr olmayan bir gerçektir. Bu durum düzgün sınırlılık teoreminin bir sonucudur.

Teorem(Düzgün Sınırlılık) 3.3.1.2 : Kabul edelim ki

$$\{\varphi_n : X \to C : n \in \mathbb{N}\} \qquad (3.3.1.3)$$

bir X Banach uzayında her $x \in X$ için $\{\varphi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ kompleks sayılarının kümesi sınırlı olacak şekilde lineer fonksiyonellerin bir kümesidir. Bu taktirde $\{\|\varphi_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ sınırlıdır.

Bu teorem lineer fonksiyonellerin bir ailesinin noktasal değerlerinin sınırlılığının normlarının sınırlılığını oluşturduğunu ortaya koyar.

Teorem 3.3.1.3 : (x_n), H Hilbert uzayında bir dizi ve D, H ’nin yoğun bir alt kümesi olsun. Bu taktirde $x_n \rightharpoonup x$ gerek ve yeter şart

a. $\|x_n\| \le M$ olacak şekilde M sabiti vardır.

b. Her $y \in D$ için $n \to \infty$ iken $(x_n, y) \to (x, y)$

şartlarının sağlanmasıdır.

Dizinin sınırlılığının zayıf yakınsaklığın sağlanması için esas olduğunu şu örnek gösteriyor.

Örnek 3.3.1.4 : Önceki örnekte $l^2(\mathbb{N})$ uzayındaki standart baz elemanlarının sınırlı (e_n) dizisinin sıfıra zayıf yakınsadığını görmüştük.

$$ne_n = (0, \ldots, 0, n, 0, \ldots, 0) \qquad (3.3.1.4)$$

ile tanımlı sınırsız (ne_n) dizisini ele alalım. Örneğin $x = \left(n^{-3/4}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisi $l^2(\mathbb{N})$ uzayına ait olup $(ne_n, x) = n^{1/4}$, $n \to \infty$ için yakınsamaz.

Eğer zayıf yakınsak bir dizinin normları zayıf limitin normuna yakınsarsa bu taktirde dizi güçlü yakınsar.

Teorem 3.3.1.5 : $x_n \rightharpoonup x$ olduğunda $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$ oluyorsa $x_n \to x$ olur.

İspat:

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= (x_n - x, x_n - x) = (x_n, x_n) - (x_n, x) - (x, x_n) + (x, x) \\ &= \|x_n\|^2 - (x_n, x) - (x, x_n) + \|x\|^2\end{aligned} \tag{3.3.1.5}$$

olup $x_n \rightharpoonup x$ ise $(x_n, x) \to (x, x)$ olduğundan ve $\|x_n\| \to \|x\|$ kabulünden $\|x_n - x\|^2 \to 0$ olacaktır. Bu da $x_n \to x$ demektir.

Tanım 3.3.1.6 : Zayıf limit noktalarını içeren kümeye zayıf kapalı küme denir.

Teorem 3.3.1.7 : Bir iç çarpım uzayında zayıf kapalı bir küme kapalıdır ama tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 3.3.1.8 : $H = L_2(0,1)$ uzayını ele alalım. S kümesini $S = \{x \in L_2(0,1) : \|x\| = 1\}$ şeklinde alalım. Acaba bu küme zayıf kapalı mıdır? $x_n(t) = \sqrt{2}\sin n\pi t$ dizisini ele alalım.

$$\|x_n\|^2 = 2\int_0^1 \sin^2 n\pi t dt = 1 \tag{3.3.1.6}$$

olduğundan $\{x_n\} \in S$ olur. Herhangi bir $f \in L_2(0,1)$ için

$$(x_n, f) = \sqrt{2}\int_0^1 f(t)\sin n\pi t dt \to 0 \tag{3.3.1.7}$$

olduğundan $x_n \rightharpoonup 0$ olur. Yani bu dizinin zayıf limiti 0 fonksiyonudur. 0, S kümesine ait olmadığından S zayıf kapalı değildir.

Tanım 3.3.1.9 : X bir iç çarpım uzayı ve $S \subset X$ olsun. S'deki her dizi X'de bir elemana zayıf yakınsayan bir alt diziye sahipse S kümesine zayıf prekompakt küme denir. Bu zayıf limit S'nin elemanı ise S kümesine zayıf kompakt küme denir.

Teorem(Banach-Alaoglu) 3.3.1.10 : Bir Hilbert uzayında kapalı birim top zayıf kompakttır.

Bu teoremin önemli bir uygulama alanı minimalleştirme problemleridir. Zayıf kapalı bir K kümesinde tanımlı bir $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $x_n \rightharpoonup x$ şeklindeki her (x_n) dizisi için

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \qquad (3.3.1.8)$$

oluyorsa aşağıdan zayıf yarı süreklidir denir.

Teorem 3.3.1.11 : Kabul edelim ki $f : K \to \mathbb{R}$ bir Hilbert uzayının zayıf kapalı, sınırlı bir K alt kümesinde tanımlı aşağıdan zayıf yarı sürekli bir fonksiyondur. Bu takdirde f aşağıdan sınırlıdır ve infimumunu alır.

Sonsuz boyutlu bir uzayda güçlü yakınsak dizilerden çok fazla sayıda zayıf yakınsak dizi vardır. Dolayısıyla f fonksiyonu bu zayıf yakınsak dizilerden bir çoğu için (3.3.4) şartını sağlayamaz. Bu yüzden zayıf kapalılık ve aşağıdan zayıf yarı süreklilik güçlü olanlardan daha katı şartlardır. Zayıf yarı sürekliliğin veya kapalılığın güçlü yarı süreklilikten elde edilmesi için yeter şart konveksliktir.

Teorem 3.3.1.12 : Reel ya da kompleks bir lineer uzayın bir C konveks kümesinde tanımlı reel değerli bir $f : C \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım. Her $x, y \in C$ ve $0 \leq t \leq 1$ için

$$f\left(tx + (1-t)y\right) \leq tf(x) + (1-t) f(y) \qquad (3.3.1.9)$$

oluyorsa f konveks bir fonksiyondur. $x \neq y$ ve $0 < t < 1$ için

$$f\left(tx + (1-t)y\right) < tf(x) + (1-t) f(y) \qquad (3.3.1.10)$$

oluyorsa f kesin konveks bir fonksiyondur.

Tanım 3.3.1.13 :

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \qquad (3.3.1.11)$$

olacak şekilde negatif olamayan $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ reel sayıları varsa y vektörüne $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektörlerinin konveks bileşimi denir.

Teorem(Mazur) 3.3.1.14 : Bir Hilbert uzayında $x_n \rightharpoonup x$ ise $y_n \to x$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin sonlu konveks kombinasyonlarının bir $\{y_n\}$ dizisi vardır.

Bu teoremden güçlü kapalı konveks bir kümenin zayıf kapalı olduğu sonucu çıkar.

Teorem 3.3.1.15 : $f : C \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir Hilbert uzayının güçlü kapalı, konveks ve sınırlı C alt kümesinde tanımlı güçlü aşağıdan yarı sürekli ve konveks bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Bu taktirde f aşağıdan sınırlıdır ve infimumunu alır. Eğer f kesin konveks ise minimum tektir.

Teorem 3.3.1.16 : $f : H \to \mathbb{R}$ bir Hilbert uzayında koersiv, güçlü aşağıdan yarı sürekli ve konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f aşağıdan sınırlıdır ve infimumunu alır.

3.3.2. Sobolev Uzayları

Sobolev uzayları zayıf türevleri L_p uzaylarına ait olan fonksiyonların Banach uzayıdır.

Önce $L_p^{loc}(\Omega)$ ile gösterilen lokal L_p uzaylarını tanımlayalım. Ölçülebilen ve her kompakt $K \subset \Omega$ kümesi için

$$\int_K |f|^p \, dx < \infty \qquad (3.3.2.1)$$

şartını sağlayan fonksiyonların uzayı $L_p^{loc}(\Omega)$ ile gösterilir. Örneğin $\frac{1}{x}$ fonksiyonu $L_1^{loc}((0,1))$ uzayının elemanı olup $L_1((0,1))$ veya $L_1^{loc}(\mathbb{R})$ uzayına ait değildir. Her $1 \le p \le \infty$ için

$$L_p(\Omega) \subset L_p^{loc}(\Omega) \subset L_1^{loc}(\Omega) \qquad (3.3.2.2)$$

olur. Böylece $L_1^{loc}(\Omega)$ integrallenebilir fonksiyonların en geniş uzayıdır.

Tanım 3.3.2.1 : Bir $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise ve dayanağı Ω'nın kompakt bir alt kümesi ise test fonksiyonu denir. Ω'da tanımlı test fonksiyonlarının kümesini $C_c^\infty(\Omega)$ veya $D(\Omega)$ ile gösteririz.

Tanım 3.3.2.2 : Test fonksiyonlarının uzayında tanımlanmış reel değerli fonksiyonlara $D(\Omega)$ üzerinde fonksiyonel denir. ϕ keyfi bir test fonksiyonu olmak üzere

$$J_1[\phi] = \phi(a),\; J_2[\phi] = \int_\Omega \phi(x) dx,\; J_3[\phi] = \phi'(a),\; J_4[\phi] = \phi(a)\phi'(a) \qquad (3.3.2.3)$$

$D(\Omega)$ üzerinde bazı fonksiyonellerdir.

Tanım 3.3.2.3 : $D(\Omega)$ test fonksiyonlarının uzayında tanımlanmış sürekli lineer fonksiyonele Ω üzerinde dağılım denir ve $D'(\Omega)$ ile gösterilir.

ϕ, $D(\Omega)$'da bir test fonksiyonu ve J, Ω üzerinde bir dağılım olsun. ϕ üzerinde hareket eden J'nin değerini gösteren $J[\phi]=\langle J,\phi\rangle$ notasyonlarını değiştirerek kullanacağız ve J'nin hareketi diyeceğiz. Her ne kadar J, U'daki noktalardan ziyade D'deki fonksiyonlar üzerinden değer alsa da dağılımları alışılmış noktasal değer alan fonksiyonların genelleştirilmesi olarak düşünebiliriz.

$f \in L_1^{loc}(\Omega)$ ve $\phi \in D(\Omega)$ için $J_f[\phi]=\int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx$ tanımlayalım. Bu taktirde $J_f \in D'(\Omega)$ olur.

Tanım 3.3.2.4 : Lokal integrallenebilir bir fonksiyonla türetilmiş dağılıma regüler dağılım bunun dışındaki dağılıma singüler dağılım denir.

Örnek 3.3.2.5 : $H_b(x)=\begin{cases}1 & x \ge b\\ 0 & x < b\end{cases}$ olsun. Açıkça $H_b \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$'dır ve $J_H[\phi]=\int_{\mathbb{R}} H_b\phi\,dx=\int_b^\infty \phi(x)\,dx$ regüler dağılımdır. $H_0(x)$ fonksiyonu birim adım fonksiyonudur.

Örnek 3.3.2.6 : $J[\phi]=\phi(0)\in D'(\mathbb{R})$ singüler dağılımdır. Yani J lokal integrallenebilir bir fonksiyonla türetilemez. Yani $\forall\phi\in D(\mathbb{R})$ için $J[\phi]=\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)\,dx=\phi(0)$ olacak şekilde $\delta\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ yoktur.

Bu gerçeğe rağmen $\forall\phi\in D(\mathbb{R})$ için $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)\,dx=\phi(0)$ olarak kabul edip, $\delta(x)$ fonksiyonuna J dağılımına karşılık gelen *genelleştirilmiş fonksiyon* denir. $\delta(x)$ genellikle orjinde yoğunlaşmış Dirac delta fonksiyonu olarak adlandırılır. Daha genel olarak $\forall \phi \in D(\mathbb{R})$ için $J[\phi]=\phi(a)$ dağılımı $\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x-a)\phi(x)\,dx=\phi(a)$ şeklinde yazılır ve $x=a$ da yoğunlaşmış Dirac delta fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım(Dağılımların Türevi) 3.3.2.7 : J_f, lokal integrallenebilir $f(x)$ fonksiyonuyla türetilmiş regüler dağılım olsun ve $f'(x)$ türeviyle oluşturulmuş dağılımı ele alalım. Bu dağılımın hareketi

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx = f(x)\phi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx = 0+\left\langle J_f,-\phi'\right\rangle \qquad (3.3.2.4)$$

ile belirlenir. $J_{f'}$ türevinin $\phi(x)$ test fonksiyonundaki hareketinin J_f fonksiyonunun $-\phi'(x)$ üzerindeki hareketiyle aynı olduğunu görürüz.

Tanım 3.3.2.8 : Herhangi $J\in D'(\mathbb{R})$ için, $dJ/dx\in D'(\mathbb{R})$ türevi $\phi(x)$ test fonksiyonu üzerinde hareket eden $\dfrac{dJ}{dx}[\phi]=J[-\phi']$ şeklinde bir dağılımdır. Yani $\forall\phi\in D(\mathbb{R})$ için $\left\langle dJ/dx,\phi(x)\right\rangle=\left\langle J,-\phi'(x)\right\rangle$ dır. Daha yüksek türevler

$$\left\langle d^kJ/dx^k,\phi(x)\right\rangle=(-1)^k\left\langle J,\phi^{(k)}(x)\right\rangle \qquad (3.3.2.5)$$

şeklindedir.

Örnek 3.3.2.9 : Lokal integrallenebilir $H_0(x)$ fonksiyonuyla türetilmiş J_H dağılımını düşünelim. $\left\langle dJ_H/dx,\phi(x)\right\rangle=\left\langle J_H,-\phi'(x)\right\rangle=\int\limits_0^\infty -\phi'(x)\,dx$ yani $\int\limits_0^\infty -\phi'(x)\,dx=-\phi(x)\Big|_{x=0}^{x=\infty}=\phi(0)$ olur. Yani $\forall\phi\in D(\mathbb{R})$ için $\left\langle dJ_H/dx,\phi(x)\right\rangle=\phi(0)$ olup $\left\langle \delta(x),\phi(x)\right\rangle=\phi(0)$ olduğundan $dH_0(x)/dx=\delta(x)$ olur.

Örnek 3.3.2.10 : $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım.

$$\left\langle dJ_f/dx, \phi(x)\right\rangle = \left\langle J_f, -\phi'(x)\right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} x\phi'(x)\,dx \qquad (3.3.2.6)$$

$$\begin{aligned} &= x\phi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \phi(x)\,dx - x\phi(x)\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \phi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} \phi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} \phi(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x)\phi(x)\,dx = \left\langle \operatorname{sgn}(x), \phi(x)\right\rangle \end{aligned} \qquad (3.3.2.7)$$

olup $f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ olur.

Örnek 3.3.2.11: Süreksiz fakat lokal integrallenebilir $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 1 \\ e^{-5x} & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonu için

$$\left\langle dJ_f/dx, \phi(x)\right\rangle = \left\langle J_f, -\phi'(x)\right\rangle = -\int_{-\infty}^{1} \left(x^2 + x\right)\phi'(x)\,dx - \int_{1}^{\infty} e^{-5x}\phi'(x)\,dx \qquad (3.3.2.8)$$

olup

$$-\int_{-\infty}^{1} \left(x^2 + x\right)\phi'(x)\,dx = -\left(x^2 + x\right)\phi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=1} + \int_{-\infty}^{1} (2x+1)\phi(x)\,dx \qquad (3.3.2.9)$$

$$= -2\phi(1) + \int_{-\infty}^{1} (2x+1)\phi(x)\,dx$$

ve

$$\begin{aligned} -\int_{1}^{\infty} e^{-5x}\phi'(x)\,dx &= -e^{-5x}\phi(x)\Big|_{x=1}^{x=\infty} + \int_{1}^{\infty} -5e^{-5x}\phi(x)\,dx \\ &= e^{-5}\phi(1) - 5\int_{1}^{\infty} e^{-5x}\phi(x)\,dx \end{aligned} \qquad (3.3.2.10)$$

yazılır. Buradan

$$\left\langle dJ_f/dx, \phi(x)\right\rangle = -2\phi(1) + \int_{-\infty}^{1} (2x+1)\phi(x)\,dx + e^{-5}\phi(1) - 5\int_{1}^{\infty} e^{-5x}\phi(x)\,dx$$

$$=\left(e^{-5}-2\right)\phi(1)+\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\,dx$$
$$=\left\langle \left[f(1+)-f(1-)\right]\delta(x-1),\phi(x)\right\rangle+\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\,dx \qquad (3.3.2.11)$$

yazılır. Burada $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<1 \\ -5e^{-5x} & x>1 \end{cases}$, $\phi(1)=\langle \delta(x-1),\phi(x)\rangle$ şeklindedir. $\Delta f(1)=f(1+)-f(1-)$ denirse $df/dx=\Delta f(1)\,\delta(x-1)+f'(x)$ olur. Daha genel olarak $f(x)$, $x=x_0$ da sıçramalı süreksizliğe sahip parçalı diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$df/dx=\Delta f\left(x_0\right)\delta\left(x-x_0\right)+f'(x) \qquad (3.3.2.12)$$

olur, burada $\Delta f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\right)-f\left(x_0-\right)$ ve $f'(x)$ klasik türevdir.

Örnek 3.3.2.12 : $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$ işaret fonksiyonunu ele alalım. Fonksiyon $x=0$ noktasında sıçramalı süreksizliğe sahip olduğundan $df/dx=\Delta f(0)\,\delta(x)=\left[f(0+)-f(0-)\right]\delta(x)=2\delta(x)$ olur.

Teorem 3.3.2.13: $F\in D'$ olsun. Bu taktirde herhangi mertebeden türev vardır, yani $\forall k\in\mathbb{N}$ için $F^{(k)}\in D'$ olur.

Örnek 3.3.2.14 : $\delta(x)\in D'$ olduğundan delta fonksiyonunu da diferensiyelleyebiliriz. $\langle\delta',\phi\rangle=\langle\delta,-\phi'\rangle=-\langle\delta,\phi'\rangle=-\phi'(0)$ olup daha genel olarak $\left\langle\delta^{(k)},\phi\right\rangle=(-1)^k\,\phi^{(k)}(0)$ olur.

Tanım 3.3.2.15 : $f, g \in L_1^{loc}(\Omega)$ fonksiyonları her $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega g\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi dx \tag{3.3.2.13}$$

eşitliğini sağlıyorsa f 'nin α. mertebeden zayıf kısmi türevi g fonksiyonudur.

Tanım 3.3.2.16 : k pozitif bir tamsayı, $1 \le p \le \infty$ ve Ω, $\mathbb{R}^n$ 'nin açık bir alt kümesi olsun. $W_p^k(\Omega)$, Sobolev uzayı $0 \le |\alpha| \le k$ mertebeden bütün zayıf kısmi türevleri $\partial^\alpha f \in L_p(\Omega)$ olan $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarından oluşur.

$W_p^k(\Omega)$ üzerindeki norm $1 \le p < \infty$ için

$$\| f \|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le k} \int_\Omega \left| \partial^\alpha f \right|^p dx \right)^{1/p} \tag{3.3.2.14}$$

şeklinde $p = \infty$ için

$$\| f \|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{0 \le |\alpha| \le k} \left\{ \sup_{x \in \Omega} \left| \partial^\alpha f \right| \right\} \tag{3.3.2.15}$$

şeklinde tanımlanır. $p = 2$ hali karesel integrallenebilir fonksiyonlara karşılık gelip $W_2^k(\Omega) = H^k(\Omega)$ ile gösterilir ve $H^k(\Omega)$ üzerindeki iç çarpım

$$\langle f, g \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le k} \int_\Omega \partial^\alpha f \partial^\alpha g dx \tag{3.3.2.16}$$

ile tanımlanır.

Şimdi Ω 'nın sınırında sıfır olan fonksiyonların Sobolev uzayını tanımlayalım.

Tanım 3.3.2.17 : $C_c^\infty(\Omega)$ uzayının $W_p^k(\Omega)$ normuna göre kapanışı $\dot{W}_p^k(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ ile gösterilir.

Çoğu kez $\dot{W}_p^k(\Omega)$ uzayını Ω'nın $\partial\Omega$ sınırında $k-1$. mertebeye kadar türevleri sıfır olan $W_p^k(\Omega)$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlarız.

Negatif dereceli Sobolev uzayları duallik kavramında kullanılır.

Tanım 3.3.2.18 : k pozitif bir tamsayı, $1 \le p < \infty$ ve p', p'nin Hölder eşlenegi olsun. W_p^{-k} Sobolev uzayı $\dot{W}_{p'}^k$ uzayının dual uzayıdır. Yani, $f \in W_p^{-k}$ dönüşümü

$$f : \dot{W}_{p'}^k \to \mathbb{R}, \quad f : u \to \langle f, u \rangle \tag{3.3.2.17}$$

sürekli lineer bir dönüşümdür. $f \in W_p^{-k}$ üzerindeki normu

$$\| f \|_{W_p^{-k}} = \sup_{\substack{u \in \dot{W}_{p'}^k \\ u \neq 0}} \frac{\langle f, u \rangle}{\|u\|} \tag{3.3.2.18}$$

ile tanımlarız.

3.3.3. Sobolev Uzaylarının Bazı Özellikleri

Bu özellikler; düzgün fonksiyonlarla Sobolev fonksiyonlarına yaklaşma (yoğunluk teoremleri), Sobolev fonksiyonlarının sürekliliği ve integrallenebilmesi(gömme teoremleri), kompaktlık şartları(Rellich-Kondrachov teoremi) ve Sobolev fonksiyonlarının sınır değerlerinin tanımı(iz teoremi) gibi özelliklerdir.

$C(\overline{\Omega})$ ile Ω bölgesinde düzgün sürekli fonksiyonların uzayını, $C_0(\mathbb{R}^n)$ ile $x \to \infty$ için sıfıra giden $\mathbb{R}^n$'de sürekli fonksiyonların uzayını temsil edeceğiz. İfade edeceğimiz teoremlerde iki tür bölge kullanacağız ; $\Omega = \mathbb{R}^n$ ve Ω, $\mathbb{R}^n$'nin $\partial\Omega$ sınırına sahip düzgün, sınırlı ve açık bir alt kümesi. k pozitif bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olarak alınacak.

Teorem(Yoğunluk) 3.3.3.1 : $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayı $W_p^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayında yoğundur. Ω, $\mathbb{R}^n$ 'nin açık bir alt kümesi ise $C_c^\infty(\Omega)$ uzayı $\dot{W}_p^k(\Omega)$ uzayında yoğundur. Ayrıca Ω düzgün bir bölge ise $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı $W_p^k(\Omega)$ uzayında yoğundur. ♦

Sobolev uzaylarının en önemli özellikleri bir fonksiyonun türevlerinin integrallenebilme özelliğinden o fonksiyonun sürekliliği veya integrallenebilmesini açıklayan gömme teoremleri ile verilir.

Teorem(Gömme) 3.3.3.2 : Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de düzgün, sınırlı, açık bir bölge, $p<n$ ve p^*, p 'nin Sobolev eşlenegi yani $\dfrac{1}{p^*}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{n}$ olsun.

a. $u\in W_p^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ ise $u\in L_{p^*}\left(\mathbb{R}^n\right)$ olur. Yani

$$\|u\|_{L_{p^*}\left(\mathbb{R}^n\right)}\le C\|\nabla u\|_{L_p\left(\mathbb{R}^n\right)} \tag{3.3.3.1}$$

olacak şekilde $C=C(p,n)$ vardır.

b. $u\in W_p^1(\Omega)$ ve $1\le q\le p^*$ ise $u\in L_q(\Omega)$ olur. Yani

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\le C\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \tag{3.3.3.2}$$

olacak şekilde $C=C(p,n,\Omega)$ vardır.

Teorem(Gömme) 3.3.3.3 : Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de düzgün, sınırlı, açık bir bölge ve $n<p<\infty$ olsun.

a. $u\in W_p^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ ise $u\in C_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ olur. Yani

$$\|u\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}^n\right)}\le C\|\nabla u\|_{L_p\left(\mathbb{R}^n\right)} \tag{3.3.3.3}$$

olacak şekilde $C=C(p,n)$ vardır.

b. $u \in W_p^1(\Omega)$ ise $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ olur. Yani

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le C\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \tag{3.3.3.4}$$

olacak şekilde $C = C(p,\Omega)$ vardır.

c. $kp > n$ iken $u \in W_p^{k+r}(\Omega)$ ise $u \in C^r\left(\overline{\Omega}\right)$ olur.

Genel prensip olarak türevleri düzgün sınırlı olan fonksiyonların kümesi kompakttır. Bu prensibin Sobolev uzayları için olan versiyonu Rellich-Kondrachov teoremi olup $W_p^k(\Omega)$ uzayının $q < p^*$ için $L_q(\Omega)$ uzayına kompakt olarak gömüldüğünü ifade eder. Ω bölgesinin sınırlılığı ve q'nun Sobolev eşlenegi olan p^* dan kesin küçük olması kompaktlık için esastır. $q = p^*$ için gömülme süreklidir fakat kompakt değildir.

Teorem(Rellich-Kondrachov) 3.3.3.4 : Ω, $\mathbb{R}^n$'de düzgün, sınırlı, açık bir bölge olsun.

a. $1 \le p < n$ ve $1 \le q < p^*$ ise $W_p^1(\Omega)$ uzayındaki sınırlı kümeler $L_q(\Omega)$ uzayında prekompakttır.

b. $p > n$ ise $W_p^1(\Omega)$ uzayındaki sınırlı kümeler $C\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayında prekompakttır.

c. $kp < n$ ve $1 \le q < np/(n-kp)$ ise $W_p^k(\Omega)$ uzayındaki sınırlı kümeler $L_q(\Omega)$ uzayında prekompakttır.

d. $kp > n$ ise $W_p^k(\Omega)$ uzayındaki sınırlı kümeler $C\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayında prekompakttır.

Özel olarak (u_k)'nın $\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le C$ olacak şekilde $W_p^1(\Omega)$ uzayında fonksiyon dizisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $p < n$ ve $1 \le q < p^*$ ise (u_k)'nın $L_q(\Omega)$ uzayında güçlü yakınsayan bir alt dizisi vardır. $p > n$ ise (u_k)'nın düzgün yakınsayan bir alt dizisi vardır.

Genel bir $u \in L_p(\Omega)$ fonksiyonu için $u|_{\partial\Omega}$ sınır değerlerini atamanın anlamlı yolu yoktur. Düzgün bir bölgenin $\partial\Omega$ sınırının ölçümü sıfırdır ve L_p uzayındaki fonksiyonlar sıfır ölçümlü kümede farklı değerler alabilen denk fonksiyonlardır. Bu durum Sobolev fonksiyonları için farklıdır. $u \in W_p^k(\Omega)$ ise $k-1/p$. dereceden küçük veya eşit dereceden türevler için sınır değerleri atanabilir. Bununla birlikte k. dereceden türevler sadece L_p fonksiyonları oldukları için bu türevlerde sınır değerleri tanımlanamaz.

Teorem(İz) 3.3.3.5 : $u \in W_p^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ise $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$ olacak şekilde $\gamma : W_p^1(\Omega) \to W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ üzerine sınırlı lineer dönüşümü vardır.

Teorem(Poincare) 3.3.3.6 : Ω sınırlı bir bölge olmak üzere her $u \in \dot{W}_p^1$ fonksiyonu için

$$\|u\|_{L_p} \leq C\|\nabla u\|_{L_p} \tag{3.3.3.5}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Poincare eşitsizliği sıfırdan farklı sabit fonksiyonlar için geçersiz olacağından W_p^1 uzayı değil de $\dot{W}_p^1$ uzayı alınmalıdır.

Bu değerlendirmenin yararlı bir sonucu $\|\nabla u\|_{L_p}$ normunun $\dot{W}_p^1(\Omega)$ üzerinde denk bir norm tanımlamasıdır. $p=2$ olduğunda $H_0^1(\Omega)$ üzerinde bir iç çarpım olarak

$$\langle u,v\rangle = \int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x)\,dx \tag{3.3.3.6}$$

iç çarpımını alabiliriz.

3.3.4 Poisson Denklemi

Laplace operatörü için Dirichlet problemi

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \ x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \ x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.3.4.1}$$

şeklindedir. Burada $f : \Omega \to \mathbb{R}$ verilen bir fonksiyon(ya da dağılım) ve Ω, $\mathbb{R}^n$ de düzgün, sınırlı, açık bir bölgedir.

Herhangi bir kısmi diferansiyel denklemi incelerken çözümün hangi fonksiyon uzayına ait olduğunu belirlemek gerekir. (3.3.4.1) denkleminin klasik çözümü denklemi noktasal olarak sağlayan iki kez sürekli diferansiyellenebilen u fonksiyonudur. Zayıf çözüm ise denklemi dağılımsal anlamda sağlar.

Bir zayıf çözüm tanımı ortaya çıkarmak için u fonksiyonunun klasik çözüm olduğunu kabul edelim. $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ herhangi bir test fonksiyonu olsun. (3.3.4.1) denkleminin φ ile çarpılıp kısmi integrasyona uğramasıyla

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \tag{3.3.4.2}$$

bulunur. Tersine u, $\partial\Omega$ sınırında sıfır olan ve (3.3.4.2) eşitliğini her φ test fonksiyonu için sağlayan düzgün bir fonksiyon ise o zaman (3.3.4.1) probleminin klasik çözümü olur.

u çözümünün ve φ test fonksiyonunun aynı uzaydan olmasını talep edelim. Bu taktirde ∇u ve $\nabla \varphi$ karesel integrallenebilir olmalıdır. Bu yüzden çözümleri $H_0^1(\Omega)$ uzayında aramak gerekir. $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ olduğu için $f \in H^{-1}(\Omega)$ olduğu taktirde (3.3.4.2) eşitliğinin sağ tarafı anlamlı olacaktır. Böylece aşağıdaki tanım ortaya çıkar.

Tanım 3.3.4.1 : $f \in H^{-1}(\Omega)$ dağılımı verildiğinde $u \in H_0^1(\Omega)$ ise ve her $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi dx = (f, \varphi) \qquad (3.3.4.3)$$

eşitliği sağlanıyorsa u fonksiyonuna (3.3.4.1) probleminin zayıf çözümü denir.

Karesel $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ fonksiyonelini

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \langle f, u \rangle \qquad (3.3.4.4)$$

şeklinde tanımlarsak I fonksiyonelini minimumlaştıran bir u fonksiyonunun (3.3.4.1) probleminin zayıf çözümü olacağı gerçeği ortaya çıkar. Poisson denkleminin çözümünü bu şekilde arama varyasyonel metot olarak bilinir. $u = 0$ sınır şartı $u \in H_0^1(\Omega)$ şartıyla ifade edilmiştir.

Teorem 3.3.4.2 : Her $f \in H^{-1}(\Omega)$ için (3.3.4.1) probleminin tek bir $u \in H_0^1(\Omega)$ zayıf çözümü vardır. Bu çözüm için

$$\|u\|_{H^1} \le C \|f\|_{H^{-1}} \qquad (3.3.4.5)$$

değerlendirmesi geçerlidir.

Bu teoremin ispatı Riesz temsil teoremi kullanılarak yapılabilir. Bu teorem $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ dönüşümünün bir Hilbert uzayı izomorfizmi olduğunu gösterir. Bu genel $f \in H^{-1}(\Omega)$ sağ taraf fonksiyonu için beklenebilecek en iyi regülerlik durumudur. Bununla birlikte $f \in H^k$ düzgün ise eliptik regülerlik teorisi çözümün $u \in H^{k+2}$ olduğunu ve

$$\|u\|_{H^{k+2}} \le C \|u\|_{H^k} \qquad (3.3.4.6)$$

değerlendirmesinin geçerli olduğunu söyler.

$f \in H^k(\Omega)$ ise $u \in H^{k+2}(\Omega)$ olduğundan $k > n/2$ olduğunda Sobolev gömme teoreminden $H^{k+2}(\Omega) \subset C^2(\overline{\Omega})$ olacaktır. Böylece u klasik çözüm olur. Ayrıca $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ise $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ olacaktır. $f \in C(\overline{\Omega})$ ise $u \in C^2(\overline{\Omega})$ olması gerekmez.

Zayıf çözümün varlığını ve tekliğini ispatlamak için Riesz temsil teoreminin kullanılması daha başka genel lineer kısmi diferansiyel denklem diferansiyel denklemlere de genişletilebilir. Lineer bir denklemin

$$Au = f \tag{3.3.4.7}$$

formunda yazıldığını kabul edelim. Burada A, H Hilbert uzayından onun H^* dual uzayına tanımlı sınırlı lineer bir operatördür. Poisson denklemi durumunda $A = -\Delta$, $H = H_0^1(\Omega)$ ve $H^* = H^{-1}(\Omega)$ şeklindeydi. (3.3.4.7) denkleminin $v \in H$ test fonksiyonuyla işleme tabi tutulması

$$a(u,v) = (f,v) \tag{3.3.4.8}$$

zayıf denklemini verir. Burada $a : H \times H \to \mathbb{R}$,

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle \tag{3.3.4.9}$$

şeklinde tanımlıdır. Poisson denklemi durumunda

$$\langle Au, v \rangle = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx \tag{3.3.4.10}$$

şeklindeydi.

Bu durumda a pozitif, sınırlı ve simetrik bilineer form ise

$$\|u\|_A = \sqrt{a(u,u)} \tag{3.3.4.11}$$

enerji normu, H üzerindeki orijinal norma denktir ve Riesz temsil teoremine göre her $f \in H^*$ için (3.3.4.7) denkleminin tek bir zayıf çözümü vardır.

Eğer a simetrik değilse H üzerinde bir iç çarpım tanımlayamaz ve Riesz temsil teoremi direkt olarak kullanılamaz. Buna rağmen çözüm için benzer bir sonuç Lax-Milgram lemmasıyla elde edilebilir.

3.4. $L[u] = -\nabla\left(T(x,y)\nabla u\right)$ Eliptik operatörü için varyasyonel prensibi ve Dirichlet, Neumann ve karışık sınır değer problemlerinin elde edilişi

Fiziksel bir sistemde olayı açıklayan denklemleri türetmenin bir yolu uygun korunum ifadelerini ve karşılık gelen yasaları durum değişkenleri cinsinden açıklamak ve böylece diferansiyel denklem sistemini elde etmektir. İkinci bir yaklaşım sistem için bir varyasyonel prensip öne sürmektir. Bu yaklaşımda genellikle durum değişkenleri cinsinden sistemin enerjisiyle alakalı skaler bir değişken(fonksiyonel) karakterize edilir. Bu durumda varyasyonel prensibi, sistemin enerjiyi minimum yapan durum değişkenini kabul edeceği şeklindedir. Bu yaklaşım fiziksel sistemin davranışını yöneten denklemlerin formüle edilmesinde bir azalım vesilesi olur. Örneklerle bu yaklaşımı inceleyeceğiz.

Elastik Zarın Enine Eğilmesi: Düzlemde sert bir tabaka üzerine gerilmiş elastik bir zarı düşünelim. Tabakanın, içerisinde bir U bölgesini içeren basit kapalı bir eğri oluşturduğunu farz edelim. Bu durumda eğri U bölgesinin sınırını oluşturur. Serbest halinde zar düzlemde yer alır. Zarın düzlem dışına sapmasını $u(x,y)$ ile gösterirsek serbest halde $u=0$ olur. Zarın $f(x,y)$ ile tanımlanmış güç yoğunluğuna sahip enine bir yüke maruz kaldığını farz edelim. Bu durumda gerilmiş zarda bulunan potansiyel enerji

$$E\left[u(x,y)\right] = \int_U \left(\frac{1}{2}T(x,y)\nabla u.\nabla u - u(x,y)\, f(x,y)\right)dxdy \qquad (3.4.1)$$

ifadesiyle verilir. Burada $T(x,y)$ zardaki gerilmeyi temsil eden sınırlı ve kesin pozitif bir fonksiyondur. $T(x,y)$ fonksiyonunu parçalı sürekli ve $f(x,y)$ fonksiyonunu

$L_2(U)$ da alırsak $E[u]$, tanım kümesi $H^1(U)$ Sobolev uzayının $H_0^1(U)$ lineer alt uzayı olan bir fonksiyoneldir. $(x,y)\in\partial U$ için $u(x,y)=0$ şartı fonksiyonelin tanım kümesinde yer almaktadır. $H^1(U)$ uzayına, bu $E[u]$ enerjisini sonlu yapan $u(x,y)$ fonksiyonlarını içerdiğinden *enerji uzayı* denir. Genel olarak $L_2(U)$ da ki fonksiyonlar sonlu enerjiye sahip değildirler ve bu yüzden zarın bozulma durumunu tanımlamak için mümkün fonksiyonlar olamazlar. Verilen bir $f(x,y)\in L_2(U)$ yük fonksiyonu için $u(x,y)$ bozulma durum fonksiyonunu, $E[u]$ enerjisini minimum yaparak bulma problemine varyasyonel prensibi denir. Yani,

$$\forall v\in H_0^1(U) \text{ için } E[u]\le E[v] \text{ olacak şekilde } u\in H_0^1(U) \qquad (3.4.2)$$

bulma problemi varyasyonel prensibi olur.

Fiziksel olarak bu olay, elastik denge durumunda zar, bütün muhtemel u sapma durumları arasından $E[u]$ enerjisini minimum yapanı sapma durum fonksiyonu olarak kabul eder olarak açıklanır. Bunun doğruluğunu tartışmayıp bunu bir öneri olarak kabul ederiz.

Problemde $a(u,v)=\int_U T(x,y)\nabla u.\nabla v dxdy$ ve $F[u]=\int_U u(x,y)\, f(x,y)dxdy=(u,f)_0$ olmak üzere $E[u]=\frac{1}{2}a(u,u)-F[u]$ yazılabilir. Açıkça $H_0^1(U)$ da $a(u,v)$ bilineer, $F[u]$ lineerdir. Üstelik $0<T_0\le T(x,y)\le T_1$ ise

$$|a(u,v)|\le \int_U |T(x,y)\nabla u.\nabla v| dxdy \le T_1\|\nabla u\|_0\|\nabla v\|_0 \le T_1\|u\|_1\|v\|_1 \qquad (3.4.3)$$

ve $|F[u]|\le\|f\|_0\|u\|_0\le\|f\|_0\|u\|_1$ yazılabilir, bunlar da $H_0^1(U)$ da $a(u,v)$ ifadesinin sınırlı bilineer fonksiyonel ve $F[u]$ ifadesinin sınırlı lineer fonksiyonel olduğunu gösterir.

Üstelik $\forall \phi \in D(U)$ için $a(\phi,\phi) \geq T_0 \|\nabla \phi\|_0^2 = T_0 |\phi|_1^2 \geq \frac{T_0}{1+C} \|\phi\|_1^2$ yazılır. Test fonksiyonları $H_0^1(U)$ da yoğun olduğundan bu değerlendirme $\forall u \in H_0^1(U)$ için doğrudur. Böylece sınırlı bilineer olan $a(u,v)$ aynı zamanda pozitiftir.

Lemma 3.4.1 : Kabul edelim ki H Hilbert uzayı üzerinde, $a(u,v)$ pozitif, sınırlı ve simetrik bilineer form ve $F(u)$ sınırlı lineer fonksiyonel olsun.

a) $E[u] = \frac{1}{2} a(u,u) - F[u]$ fonksiyonelini minimumlaştırma

b) $\forall v \in H$ için $a(u,v) = F[v]$ yapan $u \in H$ elamanını bulma

problemlerini ele alalım. Bu durumda

i) $u \in H$ elemanının a) yı çözmesi için gerek yeter şart b) yi çözmesidir.

ii) H da b) yi çözen en çok bir u elemanı vardır.

iii) H da a) yı çözen en az bir u elemanı vardır.

Bu lemma $a(u,v)$ bilineer formunun simetrik olmasını gerektirir. Kısmi diferansiyel denklemler için varlık teoremlerinde bu durum kabul edilemez bir kısıtlamadır. Buna rağmen bu sonucun en önemli kısmı formun simetrik olmadığı durumlarda yine doğru çıkar. Bunu Lax-Milgram lemmasından görebiliriz.

Lemma(Lax-Milgram) 3.4.2 : $a(u,v)$, H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı, pozitif bir bilineer form ve $F(u)$ sınırlı lineer fonksiyonel olsun. Bu taktirde $\forall v \in H$ için

$$a(u_F, v) = F(v) \qquad (3.4.4)$$

olacak şekilde tek bir $u_F \in H$ elemanı vardır.♦

Bu lemmaya göre $H_0^1(U)$ üzerinde $E[u]$ fonksiyonelini minimum yapma problemi, $\forall v \in H_0^1(U)$ için $a(u,v)=F[v]$ yapan $u \in H_0^1(U)$ elemanını bulma problemine denktir. Bu eşitlik $u(x,y)$ fonksiyonunun $\forall \phi \in D(U) \subset H_0^1(U)$ için

$$a(u,\phi)=\int_U T(x,y)\nabla u.\nabla \phi dxdy = F[\phi]=\int_U \phi(x,y) f(x,y)dxdy \quad (3.4.5)$$

eşitliğini sağladığı anlamına gelir. Kısmi integrasyondan

$$\int_U T(x,y)\nabla u.\nabla \phi dxdy = \int_{\partial U} \phi T(x,y)\nabla u.ndS - \int_U \phi \nabla.T(x,y)\nabla u dxdy \quad (3.4.6)$$

olup, ∂U da $\phi = 0$ olduğundan $\int_U \phi\left[\nabla.T(x,y)\nabla u + f(x,y)\right]dxdy = 0$ eşitliği $u(x,y)$ tarafından sağlanır. Bu eşitlik U da dağılımsal anlamda $\nabla.T(x,y)\nabla u + f(x,y) = 0$ demektir. Test fonksiyonları $H_0^1(U)$ uzayında yoğun olduğundan bu eşitlik sadece test fonksiyonları üzerinden değil $H_0^1(U)$ uzayındaki bütün elemanlar üzerinden sağlanır. Böylece bu eşitlik dağılımsal anlamdan daha güçlü olur. $u \in H_0^1(U)$ olması, u fonksiyonunun $H^1(U)$ normunda test fonksiyonların dizisinin limiti olduğu demektir, böylece *bazı anlamda* U bölgesinin sınırında u fonksiyonu sıfır olur. İlaveten $u \in H_0^1(U) \cap C^0(\overline{U})$ olsaydı her $x \in \partial U$ için $u(x)=0$ olurdu. Böyle bir ilave bilgi olmazsa u sınır şartını genelleştirilmiş anlamda sağlar denir.

Böylece $\forall v \in H_0^1(U)$ için $a(u,v)=F[v]$ yapan $u \in H_0^1(U)$ elemanı

$$\begin{array}{lll} U & \text{bölgesinde} & -\nabla.T(x,y)\nabla u = f(x,y) \\ \partial U & \text{sınırında} & u = 0 \end{array} \quad (3.4.7)$$

probleminin dağılımsal çözümüdür.

Böylece problemi aşağıdaki şekillerde formüllendirebiliriz.

Varyasyonel Formül: $\forall v \in H_0^1(U)$ için $E[u] \leq E[v]$ olacak şekilde $u \in H_0^1(U)$ elemanını bulma

Zayıf Formül: $\forall v \in H_0^1(U)$ için $a(u,v) = F[v]$ yapan $u \in H_0^1(U)$ elemanını bulma

Güçlü Formül: $\begin{array}{ll} U \text{ bölgesinde} & -\nabla . T(x,y)\nabla u = f(x,y) \\ \partial U \text{ sınırında} & u = 0 \end{array}$ yapan u elemanını bulma

Bu güçlü problemi $L[u] = -\nabla . T(x,y)\nabla u$ eliptik operatörü için Dirichlet problemi olarak tanımlarız.

Şimdi $\forall v \in H^1(U)$ için $E[u] \leq E[v]$ olacak şekilde $u \in H^1(U)$ elemanını bulma varyasyonel problemini ele alalım. Burada enerjiyi $H_0^1(U)$ kapalı uzayı yerine $H^1(U)$ uzayında minimize edeceğiz. Fiziksel olarak bu, zarın U bölgesinin sınırına yapışık olma şartının kaldırılması demektir. Burada $H^1(U)$ çözüm uzayı bölgenin sınırına ait bilgi vermez, sınırdaki şartlar sonradan görülür. Burada da $a(u,v)$ ve $F[u]$, yeni $H^1(U)$ çözüm uzayında sınırlı olmak üzere $E[u] = \frac{1}{2}a(u,u) - F[u]$ şeklindedir. Yalnız burada $a(u,v)$ 'nin pozitifliği sağlanmaz, çünkü sabitler $H^1(U)$ uzayının elemanıdır ve herhangi bir C_1 sabiti için $a\left(C_1, C_1\right) = 0$ olur. Bu sorunu kaldırmak için $H^1(U)$ uzayındaki fonksiyonların denklik sınıfının bölüm uzayını $\hat{H}^1(U)$ ile gösterelim. Bu yeni uzayda aynı denklik sınıfına ait iki fonksiyon birbirinden bir sabit kadar farklıdır. Böylece bu bölüm uzayındaki Poincare normu $\forall u \in \hat{H}^1(U)$ için $a(u,u) \geq T_0 \|\nabla u\|_0^2 = T_0 |u|_1^2 > 0$ olur ve $a(u,v)$ pozitif olur. $H^1(U)$ uzayını $\hat{H}^1(U)$

uzayıyla değiştirerek incelediğimiz varyasyonel problem $\forall v\in \hat{H}^1(U)$ için $a(u,v)=F[v]$ olacak şekilde $u\in \hat{H}^1(U)$ elemanını bulma varyasyonel problemine denk olur.

Şimdi bu problemin güçlü halini görelim. $\forall v\in \hat{H}^1(U)$ için $\int_U T(x,y)\nabla u.\nabla v dxdy=\int_U v(x,y)\, f(x,y)dxdy$ olup kısmi integrasyon ile

$$\int_U T(x,y)\nabla u.\nabla v dxdy=\int_{\partial U} v\big(T(x,y)\nabla u\big).ndS-\int_U v\nabla.T(x,y)\nabla u dxdy \quad (3.4.8)$$

yazılır. Önce $v\in \hat{H}^1(U)$ elemanının test fonksiyonu olması halini ele alalım. Test fonksiyonları $\hat{H}^1(U)$ uzayında yoğun değildirler ama bu uzayın alt uzayıdırlar. $v\in C_c^\infty(U)\subset \hat{H}^1(U)$ için $\int_U T(x,y)\nabla u.\nabla v dxdy=\int_{\partial U} vT(x,y)\nabla u.ndS-\int_U v\nabla.T(x,y)\nabla u dxdy$ olup bu eşitlik U da dağılımsal anlamda $-\nabla.T(x,y)\nabla u=f(x,y)$ demektir. Eğer $v\in \hat{H}^1(U)$ test fonksiyonu değilse

$$\int_U T(x,y)\nabla u.\nabla v dxdy=\int_{\partial U} vT(x,y)\nabla u.ndS-\int_U v\nabla.T(x,y)\nabla u dxdy \quad (3.4.9)$$

eşitliği ne zaman sağlanacaktır? v test fonksiyonu iken $\left(v\in C_c^\infty(U)\right)$, $\int_U v\nabla.T(x,y)\nabla u dxdy=0$ olduğunu biliyoruz. O halde v keyfi bir fonksiyon iken de $\left(v\in C^\infty(U)\subset \hat{H}^1(U)\right)$, $\int_U v\nabla.T(x,y)\nabla u dxdy=0$ olur çünkü sınır sıfır ölçümlü bir kümedir ve integralin değerini değiştirmez. Böylece geriye

$$a(u,v)-F[v]=\int_{\partial U} vT(x,y)\nabla u.nds=0,\quad \forall v\in C^\infty(U)\subset \hat{H}^1(U) \quad (3.4.10)$$

kalır. $C^\infty(U)$, $\hat{H}^1(U)$ da yoğun olduğundan ∂U da genelleştirilmiş anlamda $\big(T(x,y)\nabla u\big).n=0$ olur. Böylece

i) $\forall v\in \hat{H}^1(U)$ için $E[u]\le E[v]$ olacak şekilde $u\in \hat{H}^1(U)$ elemanını

ii) $\forall v \in \hat{H}^1(U)$ için $a(u,v)=F[v]$ olacak şekilde $u \in \hat{H}^1(U)$ elemanını denk problemleri

$$\begin{array}{ll} U \text{ bölgesinde} & -\nabla .T(x,y)\nabla u = f(x,y) \\ \partial U \text{ sınırında} & \big(T(x,y)\nabla u\big).n = 0 \end{array} \qquad (3.4.11)$$

güçlü probleminin varyasyonel ve zayıf formülleridir. Bu güçlü problemi $L[u] = -\nabla .T(x,y)\nabla u$ eliptik operatörü için Neumann problemi olarak tanımlarız.

Dikkat edilirse Neumann sınır şartları çözüm uzayının tanımında yer almadı problemin zayıf çözümünün gerekli bir sonucu olarak göründü. Böyle sınır şartlarına *doğal sınır şartları* denir. Dirichlet sınır şartlarında olduğu gibi çözüm uzayının tanımıyla ilişkili olarak verilen sınır şartlarına da *kararlı sınır şartları* denir. Elastik zar probleminde Neumann sınır şartları, sınırda sarf edilmiş kısıtlayıcı güç olmadığından, zarın kenarlarının bölgenin dışında serbest hareket edebildiğini gösterir.

Şimdi $H_0^1(U) \subset V(U) \subset H^1(U)$ şeklinde bir V kümesini ele alalım. ∂U sınırı ∂U_1 ve ∂U_2 şeklinde iki ayrı eğrinin bileşiminden oluşsun, yani $\partial U = \partial U_1 \cup \partial U_2$ olsun. Üstelik ∂U_1 ve ∂U_2 boş olmasın, yani V kesinlikle $H_0^1(U)$ ve $H^1(U)$ uzaylarının arasında olsun. Böylece V, ∂U_1 'de sıfır olan sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonların $H^1(U)-$ kapanışını göstersin. Şimdi

$\forall v \in V$ için $E[u] \le E[v]$ olacak şekilde $u \in V$ elemanını bulma

problemini inceleyelim. V sıfır olmayan sabit içermeyeceğinden V üzerindeki norm, Poincare normu tanımlar. Böylece $a(u,v)$ 'nin V üzerinde pozitifliği gösterilmiş olur. Böylece varyasyonel problem,

$\forall v \in V$ için $a(u,v) = F(v)$ olacak şekilde $u \in V$ elemanını bulma

zayıf problemine dönüşür.

V , $C_c^\infty(U)$ test fonksiyonlarını içerdiğinden $v \in C_c^\infty(U)$ için $\int_U v\left[\nabla.T(x,y)\nabla u + f(x,y)\right]dxdy = 0$ olduğunu biliyoruz. $v \in C^\infty(U)$ için de $\int_U v\left[\nabla.T(x,y)\nabla u + f(x,y)\right]dxdy = 0$ olduğunu söylemiştik. Böylece $v \in C^\infty(U) \cap \left\{\partial U_1 \ de \ v = 0\right\}$ için

$$a(u,v) - F[v] = \int_{\partial U_2} vT(x,y)\nabla u.nds = 0 \qquad (3.4.12)$$

olur.

v , ∂U_2 de keyfi olduğundan ∂U_2 de genelleştirilmiş anlamda $T(x,y)\nabla u.n = 0$ olur. Buradan

i) $\forall v \in V$ için $E[u] \le E[v]$ olacak şekilde $u \in V$ elemanını bulma

ii) $\forall v \in V$ için $a(u,v) = F(v)$ olacak şekilde $u \in V$ elemanını bulma

denk problemleri

$$\begin{array}{lc} U \text{ bölgesinde} & -\nabla.T(x,y)\nabla u = f(x,y) \\ \partial U_1 \text{ sınırında} & u = 0 \\ \partial U_2 \text{ sınırında} & (T(x,y)\nabla u).n = 0 \end{array} \qquad (3.4.13)$$

güçlü probleminin varyasyonel ve zayıf formülleridir. Bu güçlü problemi $L[u] = -\nabla.T(x,y)\nabla u$ eliptik operatörü için *karışık problem* olarak tanımlarız.

Zayıf Formüller

Aşağıdaki problemlerin aynı mesele için alternatif formüller olduğunu elde ettik.

1. $\forall v \in H_0^1(U)$ için $E[u] \le E[v]$ olacak şekilde $u \in H_0^1(U)$ elemanını bulma
2. $\forall v \in H_0^1(U)$ için $a(u,v) = F[v]$ yapan $u \in H_0^1(U)$ elemanını bulma
3. U bölgesinde $-\nabla(T(x,y)\nabla u) = f(x,y)$ ve ∂U sınırında $u = 0$ elemanını bulma

Benzer şekilde aşağıdakiler de alternatif formüllerdir.

4. $\forall v \in \hat{H}^1(U)$ için $E[u] \le E[v]$ olacak şekilde $u \in \hat{H}^1(U)$ elemanını bulma

5. $\forall v \in \hat{H}^1(U)$ için $a(u,v) = F[v]$ olacak şekilde $u \in \hat{H}^1(U)$ elemanını bulma

6. U bölgesinde $-\nabla\left(T(x,y)\nabla u\right) = f(x,y)$ ve ∂U sınırında $\left(T(x,y)\nabla u\right).n = 0$ elemanını bulma

Aynı şekilde aşağıdakiler de alternatif formüllerdir.

7. $\forall v \in V$ için $E[u] \le E[v]$ olacak şekilde $u \in V$ elemanını bulma

8. $\forall v \in V$ için $a(u,v) = F(v)$ olacak şekilde $u \in V$ elemanını bulma

9. U bölgesinde $-\nabla\left(T(x,y)\nabla u\right) = f(x,y)$, ∂U_1 sınırında $u = 0$ ve ∂U_2 sınırında $\left(T(x,y)\nabla u\right).n = 0$ elemanını bulma

3. , 6. ve 9. problemlerde kısmi diferansiyel denklemi dağılımsal anlamda ve sınır şartlarını da noktasal anlamdan daha zayıf olan bazı özelleştirilmemiş anlamlarda yorumluyoruz.

1. ,2. ve 3. problem Dirichlet probleminin varyasyonel, zayıf ve güçlü formülleridir, 4. ,5. ve 6. problemler Neumann probleminin varyasyonel, zayıf ve güçlü formülleridir, 7. ,8. ve 9. problemler ise sınırın bir kısmında Dirichlet, diğer kısmında ise Neumann şartlarının olduğu karışık sınır değer probleminin varyasyonel, zayıf ve güçlü formülleridir.

Her üç halde de zayıf ve varyasyonel problemler denktir ve güçlü çözümün diğer iki çözümle alakası, eğer $u = u(x,y)$ güçlü bir çözüm ise aynı zamanda zayıf ve varyasyonel çözüm olduğu fakat bunun tersinin doğru olmadığıdır.

Lemma 3.4.2 tek bir zayıf ve varyasyonel çözümün varlığını ifade eder. Şimdi aklımıza şu soru gelebilir.

Acaba bir problem ne zaman bu üç formülasyonla ifade edilir? Bunun için şu güçlü problemi ele alalım.

$$\begin{aligned} &U \text{ bölgesinde} \quad L\left[u(x,y)\right] = f(x,y) \\ &\partial U \text{ sınırında} \qquad u = 0 \end{aligned} \qquad (3.4.14)$$

olacak şekilde $u = u(x,y)$ fonksiyonunu bulalım.

$$L\left[u(x,y)\right] = -\nabla.\left(T(x,y)\nabla u\right) + \vec{c}(x,y).\nabla u + b(x,y)u \qquad (3.4.15)$$

olsun. Burada $\vec{c}(x,y).\nabla u = c_1(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + c_2(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}$ şeklindedir.

Bu güçlü probleme karşılık gelen bir zayıf formülasyon vardır fakat problem varyasyonel bir formülasyona sahip değildir. Zayıf formülü elde etmek için denklemin her iki tarafını keyfi bir $v = v(x,y) \in H_0^1(U)$ fonksiyonuyla çarpıp U üzerinden integralleyelim.

$$\int_U v(x,y)\left[-\nabla.\left(T(x,y)\nabla u\right) + \vec{c}(x,y).\nabla u + b(x,y)u\right]dU = \int_U fvdU \qquad (3.4.16)$$

ve

$$-\int_{\partial U} v(T\nabla u).nds + \int_U \left[T\nabla u.\nabla v + v\vec{c}.\nabla u + buv\right]dU = \int_U fvdU \quad (3.4.17)$$

olur. $v = v(x,y) \in H_0^1(U)$ için sınır integral sıfır olup

$$a(u,v) = \int_U \left[T\nabla u.\nabla v + v\vec{c}.\nabla u + buv\right]dU \qquad (3.4.18)$$

olmak üzere her $v \in H_0^1(U)$ için $a(u,v) = F(v)$ denklemini elde ederiz. $v\vec{c}.\nabla u$ teriminden dolayı $a(u,v)$ bilineer formu simetrik değildir. Yani $a(u,v) \neq a(v,u)$. Simetrik olmayan bilineer formlar için gradyeni $a(u,v) - F(v)$' ye eşit olan karesel fonksiyonel yoktur.

Simetrik olmayan bilineer formlar için varyasyonel formül olmamasına rağmen

$\forall v \in H_0^1(U)$ için $a(u,v) = F[v]$ yapan $u \in H_0^1(U)$ elemanını bulma

zayıf probleminin tek bir çözümü vardır. Her $(x,y) \in U$ için katsayı fonksiyonlarının aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim.

$$\begin{aligned} &0 < T_0 \le T(x,y) \le T_1 \\ &0 < b_0 \le b(x,y) \le b_1 \\ &\left|\vec{c}(x,y)\right| \le c_0 \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

Önce $a(u,v)$ bilineer formunun sınırlı olduğunu gösterelim. $u,v \in H_0^1(U)$ için

$$\begin{aligned} \left|a(u,v)\right| &\le \int_U \left|T\nabla u.\nabla v + v\vec{c}.\nabla u + buv\right| dU \\ &\le T_1 \left\|\nabla u\right\| \left\|\nabla v\right\| + \left|\vec{c}\right| \|v\| \left\|\nabla u\right\| + \left|b\right| \|u\| \|v\| \\ &\le \left(T_1 + c_0 + b_1\right) \|u\|_1 \|v\|_1 \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

yazabiliriz. Bu, bilineer formun $H_0^1(U) \times H_0^1(U)$' da sınırlı olduğunu gösterir. Sonra

$$\begin{aligned} a(u,u) &\ge \int_U \left[T\nabla u.\nabla u + u\vec{c}.\nabla u + bu^2\right] dU \\ &\ge T_0 \left\|\nabla u\right\|_0^2 - c_0 \int_U |u| \left|\nabla u\right| dx + b_0 \|u\|_0^2 \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

yazabiliriz. Her $A, B \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\left(\sqrt{\varepsilon}A - \frac{B}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 = \varepsilon A^2 - AB + \frac{B^2}{4\varepsilon} \ge 0 \tag{3.4.22}$$

yazılabileceğinden

$$\int_U |u|\left|\nabla u\right| dx \le \varepsilon \left\|\nabla u\right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left\|u\right\|^2 \tag{3.4.23}$$

olur. Böylece

$$a(u,u) \ge \left(T_0 - c_0\varepsilon\right)\left\|\nabla u\right\|^2 + \left(b_0 - \frac{c_0}{4\varepsilon}\right)\|u\|^2 \tag{3.4.24}$$

elde edilir. Katsayı fonksiyonlarına konulacak $4T_0 b_0 > c_0^2$ şartı dahilinde pozitif bir a_0 sabiti için

$$T_0 - c_0\varepsilon \geq a_0 > 0 \quad \text{ve} \quad b_0 - \frac{c_0}{4\varepsilon} \geq a_0 > 0 \tag{3.4.25}$$

olacak şekilde ε sabiti bulunabilir.

Böylece her $u \in H_0^1(U)$ için

$$a(u,u) \geq a_0 \|u\|_1^2 \tag{3.4.26}$$

yazılabilir. Böylece simetrik olmayan bilineer form pozitif veya koersiv olur.

Yani, simetrik olmayan $a(u,v)$ bilineer formu Lax-Milgram lemmasının şartlarını sağlar. Ayrıca her $v \in H_0^1(U)$ için

$$F[v] = (f, v) \tag{3.4.27}$$

sınırlı lineer bir fonksiyonel olduğundan Lax-Milgram lemmasına göre her $f \in L_2(U)$ için zayıf problemin tek bir çözümü vardır.

3.4.1. Yaklaşım Metodları

Başlangıç sınır değer problemlerinde analitik(gerçek) çözümü bulmak için gerekli olan şartlar oldukça özeldir ve çoğu durumda gerçek çözümü bulmak mümkün değildir. Bu gibi durumlarda yapılacak tek şey, problemin tek çözüme sahip olacağı çözüm uzaylarında özet metotları anladıktan sonra problem için yaklaşık bir çözüm oluşturmaktır. Sonlu fark metotları analitik metotların işe yaramadığı durumlarda problemin çözümüne yaklaşmak için kullanılacak metotlardan biridir. Bu metotlar türevleri fark oranlarına çevirir, böylece diferansiyel denklemlerle sınır şartları, cebirsel denklem sistemlerine dönüşür. Bu metotlar denklemlerin, cebirsel denklem sistemlerine dönüştürüldüğü tek yol değildir.

Rayleigh-Ritz Metodu 3.4.1.1 : Rayleigh- Ritz metodu varyasyonel formüllü problemlere uygulanır.

$$\forall v \in V \text{ için } E[u] \leq E[v] \text{ olacak şekilde } u \in V \text{ elemanını bulma}$$

varyasyonel problemini düşünelim. Burada $H_0^1(U) \subset V(U) \subset H^1(U)$ dır. $\{\phi_1,...,\phi_n\}$, V de lineer bağımsız fonksiyonlar ve $M = span[\phi_1,...,\phi_n]$ olsun. Bu taktirde probleme yaklaşım olarak

$$\forall v \in M \subset V \text{ için } E[u_M] \leq E[v] \text{ olacak şekilde } u_M \in M \text{ elemanını bulma}$$

problemini alalım. M ye yaklaşım alt uzayı, ϕ_k fonksiyonlarına da *test* ya da *şekil* fonksiyonları denir. u_M yaklaşık çözümü M kümesine aittir ve $\phi_k(x)$ fonksiyonları M yi gerdiğinden $u_M(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k(x)$ yazabiliriz. $c_1,...,c_N$ reel değişkenleriyle $F(c_1,...,c_N) = E[u_M]$ şeklinde bir fonksiyon tanımlayabilir ve F fonksiyonunu minimumlaştırabiliriz. Bu varyasyonel problemde gerektirdiği gibi M üzerinden $E[u_M]$ yi minimumlaştırma etkisi gösterecektir. Böylece $k = 1,...,N$ için $\frac{\partial F}{\partial c_k}(c_1,...,c_N) = 0$ yazarız. Bu $c_1,...,c_N$ bilinmeyenli N lineer denklem sistemidir.

$E[u] = \frac{1}{2}a(u,u) - (f,u)_2$ şeklindeki varyasyonel problemini ele alırsak

$$E[u_M] = \frac{1}{2}a(u_M,u_M) - (f,u_M)_2$$

$$= \frac{1}{2}a\left(\sum_{j=1}^{N} c_j\phi_j(x), \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k(x)\right) - \left(f, \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k(x)\right)_2 \qquad (3.4.1.1)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_j c_k a\left(\phi_j(x), \phi_k(x)\right) - \sum_{k=1}^{N} c_k\left(f, \phi_k(x)\right)_2 \qquad (3.4.1.2)$$

yazılabilir. $A_{jk} = a\left(\phi_j(x), \phi_k(x)\right) = A_{kj}$, $F_k = \left(f, \phi_k(x)\right)_2$ denirse bu eşitlik

$$F\left(c_1,...,c_N\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} c_j c_k A_{jk} - \sum_{k=1}^{N} c_k F_k \qquad (3.4.1.3)$$

olarak yazılır. Türeve geçilirse $k = 1,...,N$ için

$$\frac{\partial F}{\partial c_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} A_{jk} c_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} A_{jk} c_j - F_k = \sum_{j=1}^{N} A_{jk} c_j - F_k = 0 \qquad (3.4.1.4)$$

bulunur. Eğer $a(u,v)$ bilineer formu pozitif ise A matrisi pozitif tanımlıdır ve bu sistemin tek bir çözümü vardır. Bu sistemin çözümünden $c_1,...,c_N$ ler bulunur ve karşılık gelen u_M varyasyonel problemin çözümü için Rayleigh- Ritz yaklaşımıdır.

Galerkin Metodu 3.4.1.2 : Her başlangıç sınır değer problemi varyasyonel formüle sahip olmadığından Rayleigh- Ritz prosedürü her zaman uygulanamaz.

$\forall v \in V$ için $a(u,v) = (f,v)_2 = F(v)$ olacak şekilde $u \in V$ elemanını bulma

zayıf problemini ele alalım. $\left\{\phi_1,...,\phi_n\right\}$, V de lineer bağımsız fonksiyonlar ve $M = span\left[\phi_1,...,\phi_n\right]$ olsun. u_M ,

$\forall v \in M \subset V$ için $a\left(u_M, v\right) = F[v]$ olacak şekilde $u_M \in M$ elemanını bulma

probleminin çözümü olsun. Bu problem $k = 1,2,...N$ için $a\left(u_M, \phi_k\right) = F\left[\phi_k\right]$ olacak şekilde $u_M \in M$ elemanını bulma problemine denktir. $u_M(x) = \sum_{k=1}^{N} b_k \phi_k(x)$ olduğundan

$a\left(\sum_{k=1}^{N} b_k \phi_k(x), \phi_k\right) = F\left[\phi_k\right]$ ve $k = 1,...,N$ için $\sum_{j=1}^{N} b_j a\left(\phi_j(x), \phi_k\right) = \sum_{j=1}^{N} A_{jk} b_j = F_k$

bulunur. Bu sistem Rayleigh-Ritz yaklaşımındaki sistemle aynıdır. Rayleigh-Ritz yaklaşımı varyasyonel formüle sahip problemler için uygulanırken, Galerkin yaklaşımı varyasyonel formülü olsun veya olmasın zayıf formüllere uygulanır. Varyasyonel formülün olmadığı durumlarda $\left[A_{jk}\right]$ matrisi simetrik değildir, fakat $a(u,v)$ bilineer formu pozitif ise matris de pozitif tanımlı olacaktır, bu yüzden problemin tek çözümü olacaktır.

$H^1(U)$ Hilbert uzayı, ikinci mertebeden eliptik sınır değer problemlerin çözümünde şu şartlardan dolayı çözümün aranabileceği en iyi uzaydır.

- İkinci mertebeden eliptik sınır değer problemlerin çözümleri daha küçük uzaylarda $\left(H^2(U)\right)$ elde edilemeyebilir.
- $H^1(U)$ uzayından daha büyük uzaylarda çözümler fiziksel anlam taşımayabilir. Örneğin fonksiyonlar sonlu enerjiye sahip olamayabilir.
- Yaklaşık çözümleri oluşturmak için kullanılacak olan $H^1(U)$'nun sonlu boyutlu alt uzaylarını oluşturmak daha kolaydır. Bu $H^2(U)$ veya $C\left(\overline{U}\right)$ da daha zordur.

$\begin{matrix} -\nabla^2 u = F & U \text{ da} \\ u = 0 & \partial U \text{ da} \end{matrix}$ probleminin zayıf çözümü için değişik formüller mümkündür.

a. **Ultra-Düzgün Zayıf Çözüm:**

$\forall v \in L_2(U)$ için $\int_U \left(\nabla^2 u + F\right) v dx = 0$ olacak şekilde $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ elemanı bulma

b. Zayıf Çözüm:

$\forall v \in H_0^1(U)$ için $\int_U \nabla u . \nabla v dx = \int_U F v dx$ olacak şekilde $u \in H_0^1(U)$ elemanı bulma

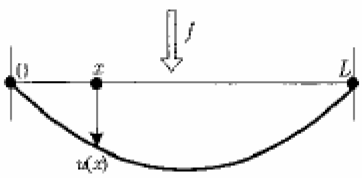
c. Ultra Zayıf Çözüm:

$\forall v \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ için $\int_U \left(\nabla^2 u + F\right) v dx = 0$ olacak şekilde $u \in L_2(U)$ elemanı bulma

a) halinde artan n için $H^2(U) \cap H_0^1(U)$ uzayına yaklaşan yaklaşık çözüm uzayının $\{V_n\}$ ailesini kurmaya zorlanırız. Bu durumda $L_2(U)$ uzayına yaklaşan test fonksiyonlarının ailesi $\{W_n\}$ olur. c) halinde durum terstir. $L_2(U)$ uzayına yaklaşan, yaklaşık çözüm uzayının ailesi $\{V_n\}$ olup, $H^2(U) \cap H_0^1(U)$ uzayına yaklaşan test fonksiyonlarının ailesi $\{W_n\}$ olur. b) halinde $\{V_n\} = \{W_n\}$ olup bu aileler $H_0^1(U)$ uzayına yaklaşır, çünkü çözüm uzayı ile test fonksiyonlarının uzayı aynıdır. Bu uyum problemdeki operatöre yaklaşım açısından simetrik ve pozitif tanımlı matris kullanmaya sebep olur. Diğer iki halde bu mümkün değildir. Bu gerçek ve $H^2(U) \cap H_0^1(U)$ da sonlu boyutlu uzayların dizisini inşa etmekteki güçlük b) halini problem için optimal zayıf formül olarak nitelendirir.

3.4.2. Metodların Uygulanması

$[0, L]$ aralığına yerleştirilmiş süper elastik ve esnek bir teli ele alalım. Teli uç noktalarda sabitleyelim ve tele dikey bir $f = f(x)$ kuvvetinin uygulandığını kabul edelim.



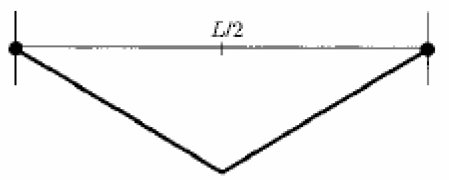
Şekil 3.4.2.1 : Esnek tele her noktasından kuvvet uygulanması

Hooke lineer elastikiyet yasası ve momentumun korunumu yasası $x \in (0, L)$ için $-\left(\kappa(x)u'(x)\right)' = f(x)$ denklemini verir. Burada $u(x)$ telin x noktasındaki yer değişimidir ve $\kappa(x) \geq \kappa_0 > 0$ fonksiyonu telin fiziksel özelliklerine bağlıdır. İlave olarak bu olay elastik bir ortamda gerçekleşirse tele f ile ters yönde bir $\lambda(x)u(x)$ kuvveti etki eder. Bu halde $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$ ortamın özelliklerine bağlıdır.

Böylece problemin matematiksel modeli

$$\begin{gathered} -\left(\kappa(x)u'(x)\right)' + \lambda(x)u(x) = f(x), \; x \in (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{gathered} \qquad (3.4.2.1)$$

şeklindedir. Dış kuvvetin sadece $x = L/2$ noktasında uygulandığını kabul edersek telin şeklinin



Şekil 3.4.2.2 : Esnek tele $x = L/2$ noktasından kuvvet uygulanması

biçiminde olacağı açıktır. Fakat bu şekilde gösterilen fonksiyonun $x = L/2$ noktasında diferansiyellenemeyeceği açıktır. Hâlbuki problemin klasik çözümü $(0, L)$ aralığında iki kez sürekli diferansiyellenebilen ve bu aralıkta denklemi sağlayan bir $u(x)$ fonksiyonudur. Bu halde incelediğimiz problemin klasik çözümünün olamayacağı açıktır. Bu durum bizi değişik çözüm kavramlarını oluşturmaya yöneltir.

Problemi şu şekilde düşünelim. f kuvveti x noktasında $v(x)$ yer değişimine sebep olursa $f(x)$ kuvvetinin yaptığı iş $f(x)v(x)$ olup f tarafından tüm tel boyunca yapılan iş $\int_0^L f(x)v(x)\,dx$ ile hesaplanır. Aynı işlemi problemin diğer tarafına da uygulayıp $v(0)=v(L)=0$ olduğunu göz önünde bulundurarak kısmi integrasyonla

$$\int_0^L -\left(\kappa(x)u'(x)\right)' v(x)\,dx = \int_0^L \kappa(x)u'(x)v'(x)\,dx \qquad (3.4.2.2)$$

elde edilir. Bu işlem $-(\kappa u')' + \lambda u = f$ diferansiyel denklemini

$$\int_0^L \kappa(x)u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^L \lambda(x)u(x)v(x)\,dx = \int_0^L f(x)v(x)\,dx \qquad (3.4.2.3)$$

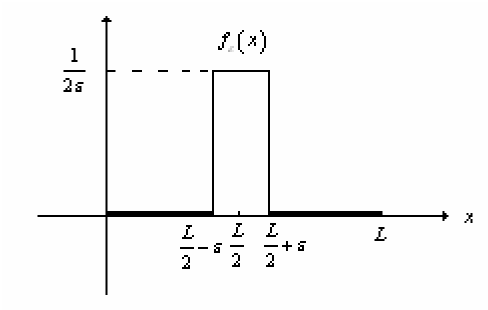
integral denklemine dönüştürür. Böylece problemin çözümünü bütün mümkün $v(0)=v(L)=0$ yer değişimleri için yukarıdaki eşitliği sağlayan $u(0)=u(L)=0$ şeklindeki $u:[0,L]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu olarak düşünmeliyiz. Bu yaklaşımın bir avantajı u fonksiyonunun sağlaması gereken şartların azalmasıdır. Yine de problemde açık olmayan iki husus vardır.

i. u fonksiyonu en az bir kez diferansiyellenebilmelidir fakat bu bir noktaya uygulanan kuvvet için mümkün değildir.
ii. Kuvvet $x=L/2$ noktasında uygulanırsa $0\le x\le L$ aralığında $x\ne L/2$ için $f(x)=0$ olacağından $\int_0^L f(x)v(x)\,dx=0$ olur. Bu durumda $u(x)=0$ fonksiyonu (3.4.2.1) eşitliğini sağlar. Bu ise Şekil 3.4.2.2' de gösterilen fiziksel duruma ters düşer.

Karşılaşılan sorunların üstesinden gelmek için tek bir noktada etki eden kuvvet kavramıyla matematiksel olarak çalışmanın daha iyi bir yolunu bulmalıyız. İlk olarak kuvveti $x=L/2$ noktasını içeren küçük bir aralığa dağıtıp

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}1/2\varepsilon, & L/2-\varepsilon\le x\le L/2+\varepsilon\\ 0, & \text{diger yerlerde}\end{cases} \qquad (3.4.2.4)$$

fonksiyonunu oluşturalım.



Şekil 3.4.2.3 : Tek noktada etki eden kuvvet fonksiyonuna dağılımsal yaklaşım

v yer değişimine sebep olarak bu kuvvetin yaptığı iş

$$\int_0^L f_\varepsilon(x)v(x)\,dx = \int_{L/2-\varepsilon}^{L/2+\varepsilon} \frac{v(x)}{2\varepsilon}dx \tag{3.4.2.5}$$

olup, integraller için ortalama değer teoremi kullanılarak $L/2-\varepsilon \le \xi_\varepsilon \le L/2+\varepsilon$ sayısı için

$$\int_0^L f_\varepsilon(x)v(x)\,dx = \int_{L/2-\varepsilon}^{L/2+\varepsilon} \frac{v(x)}{2\varepsilon}dx = v(\xi_\varepsilon) \tag{3.4.2.6}$$

olur. Bu mantıkla, tekbir x_0 noktasında uygulanmış kuvvet kavramını, belli fonksiyon sınıflarında tanımlanmış ve

$$\delta_{x_0} : v \to \left\langle \delta_{x_0}, v \right\rangle = v(x_0) \tag{3.4.2.7}$$

kuralıyla sayılar üreten bir δ_{x_0} dönüşümü olarak ele aldığımızda daha anlamlı sonuçlar üretebileceğimizi görürüz. Bu sonuç dağılım teorisinin temelini oluşturmuştur.

Böylece (3.4.2.1) eşitliğinin noktasal olarak sağlanamadığı durumlarda bu eşitliğin dağılımsal anlamda sağlanabileceğini görmüş oluruz. Türevleri de dağılımsal türev olarak düşünürsek (3.4.2.3) eşitliğinin sağlanabileceği açıktır.

Şimdi problemi dağılımsal anlamda oluşturmaya çalışalım. (3.4.2.3) eşitliğinin sağ tarafının anlamlı olması için Cauchy-Schwartz eşitsizliği gereği $f, v \in L_2(0,L)$ olması, (3.4.2.3) eşitliğinin sol tarafının anlamlı olması için, κ ve λ sınırlı olmak üzere u ve

v fonksiyonları ile bu fonksiyonların dağılımsal türevlerinin $L_2(0,L)$ uzayından olması gerekir. Böylece problemin çözümünü $H_0^1(0,L)$ uzayından aramalıyız.

$$H_0^1(0,L)=\{u\in L_2(0,L): u'\in L_2(0,L), u(0)=u(L)=0\} \qquad (3.4.2.8)$$

kümesinin $\|u\|_{H_0^1}=\left(\|u\|_2^2+\|u'\|_2^2\right)^{1/2}$ normuyla bir Hilbert uzayı olduğunu biliyoruz. $D(0,L)$ test fonksiyonlarının uzayının $H_0^1(0,L)$ uzayında $\|.\|_{H_0^1}-$yoğun olduğunu biliyoruz. Buradan Dirac-δ fonksiyonu $u\in H_0^1(0,L)$ için $\langle\delta_{x_0},u\rangle=u(x_0)$ şeklinde sürekli lineer $\delta_{x_0}: H_0^1(0,L)\to\mathbb{R}$ formuna genişletilebilir. $f\in L_2(0,L)$ fonksiyonlarını

$$f: H_0^1(0,L)\to\mathbb{R},\ v\to\langle f,v\rangle=\int_0^L f(x)v(x)\,dx \qquad (3.4.2.9)$$

şeklinde bir tanımla $H_0^1(0,L)$ uzayında sürekli lineer yapılar olarak da düşünebiliriz. Bu yeni düşünceyle incelediğimiz problem için yeni bir tanım oluşturabiliriz.

Verilen lineer ve sürekli bir $f: H_0^1(0,L)\to\mathbb{R}$ formu ve

$$a: H_0^1\times H_0^1\to\mathbb{R},\ (u,v)\to a(u,v)=\int_0^L \kappa(x)u'(x)v'(x)\,dx+\int_0^L \lambda(x)u(x)v(x)\,dx \qquad (3.4.2.10)$$

bilineer formunu oluşturursak her $v\in H_0^1(0,L)$ için $a(u,v)=\langle f,v\rangle$ eşitliğini sağlayan $u\in H_0^1(0,L)$ fonksiyonuna (3.4.2.1) probleminin zayıf çözümü denir.

3.4.3 Zayıf Çözümler İçin Nümerik Yaklaşım

Ele aldığımız problemin zayıf çözümünün $H_0^1(0,L)$ uzayında olduğunu biliyoruz. Bu uzay sonsuz boyutlu bir uzaydır. Sonlu elemanlar metodunun temel fikri sonsuz boyutlu $H_0^1(0,L)$ uzayına h pozitif bir parametre olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan uygun sonlu boyutlu H_h uzaylarıyla yaklaşmadır.

i. $H_h \subseteq H_0^1(0,L)$ olmalıdır.

ii. H_h uzayında problem kolayca çözülüp u_h çözümü bulunmalıdır.

iii. $\lim\limits_{h\to 0}\|u-u_h\|=0$ olmalıdır.

Böylece orijinal problemin u zayıf çözümünün nümerik u_h yaklaşımı elde edilebilir.

Şimdi H_h uzayı için örnek bir oluşum yazalım.

$n\in\mathbb{N}$ ve $h=L/(n+1)$ olsun. Bu taktirde $[0,L]$ aralığı

$$[0,L]=\bigcup_{i=0}^{n}[c_i,c_{i+1}],\ c_i=ih,\ 0\le i\le n \tag{3.4.3.1}$$

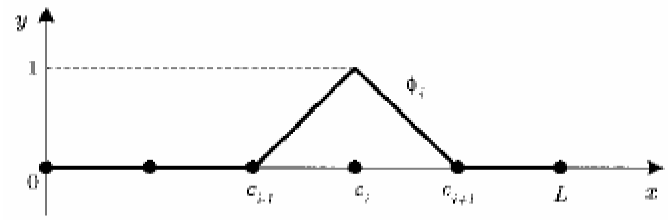
şeklinde ayrıştırılabilir. P_1 derecesi 1 den küçük eşit olan polinomlar olmak üzere

$$H_h=\left\{v:[0,L]\to\mathbb{R}\text{ sürekli, } v(0)=v(L)=0,\ v\big|_{[c_i,c_{i+1}]}\in P_1\right\} \tag{3.4.3.2}$$

olsun. $H_h \subseteq H_0^1(0,L)$ olduğu açıktır. $1\le i\le n$ için

$$\phi_i(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-c_i|}{h}, & c_{i-1}\le x\le c_{i+1}\\ 0, & \text{diger yerlerde}\end{cases} \tag{3.4.3.3}$$

fonksiyonlarının ailesi H_h uzayının bir bazıdır. Böylece boyut$(H_h)=n$ olur.



Şekil 3.4.3.1 : H_h uzayındaki ϕ_i fonksiyonu

Benzer şekillerde başka H_h uzayları da oluşturulabilir. Böylece problemimizi her $v_h \in H_h$ için

$$a(u_h, v_h) = \int_0^L \kappa(x) u_h'(x) v_h'(x)\,dx + \int_0^L \lambda(x) u_h(x) v_h(x)\,dx = \langle f, v_h \rangle \quad (3.4.3.4)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $u_h = \sum_{i=1}^{n} u_h^i \phi_i$ fonksiyonunu bulma problemine dönüştürebiliriz. $f \in L_2(0, L)$ ise $\langle f, v_h \rangle = \int_0^L f(x) v_h(x)\,dx$ olduğu ve f fonksiyonu x_0 noktasında Dirac-δ ise $\langle f, v_h \rangle = v_h(x_0)$ olduğu açıktır. (3.4.3.4) ifadesi her $v_h \in H_h$ için sağlanacaksa her bir ϕ_i için sağlanacağı ve tersine her bir ϕ_i için sağlanıyorsa H_h vektör uzayı olduğundan her $v_h \in H_h$ için sağlanacağını biliyoruz.

$|m-n| \geq 2$ için $\int_0^L \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0,\ \int_0^L \phi_m'(x)\phi_n'(x)dx = 0$ olacağını göz önünde bulundurarak (3.4.3.4) ifadesinde v_h yerine ϕ_1 alırsak

$$\int_0^L \kappa(x)\left(u_h^1\phi_1' + u_h^2\phi_2' + .. + u_h^n\phi_n'\right)\phi_1'(x)\,dx + \int_0^L \lambda(x)\left(u_h^1\phi_1 + u_h^2\phi_2 + .. + u_h^n\phi_n\right)\phi_1(x)\,dx = \langle f, \phi_1 \rangle$$

$$\int_0^L \kappa(x)\left(u_h^1\phi_1' + u_h^2\phi_2'\right)\phi_1'(x)\,dx + \int_0^L \lambda(x)\left(u_h^1\phi_1 + u_h^2\phi_2\right)\phi_1(x)\,dx = \langle f, \phi_1 \rangle$$

$$\int_0^L \kappa(x)\left(u_h^1\phi_1'\phi_1'\right)dx + \int_0^L \lambda(x)\left(u_h^1\phi_1\phi_1\right)dx + \int_0^L \kappa(x)\left(u_h^2\phi_2'\phi_1'\right)dx + \int_0^L \lambda(x)\left(u_h^2\phi_2\phi_1\right)dx = \langle f, \phi_1 \rangle \quad (3.4.3.5)$$

$$u_h^1 \underbrace{\left(\int_0^L \kappa(x)(\phi_1'\phi_1')\,dx + \int_0^L \lambda(x)(\phi_1\phi_1)\,dx\right)}_{a(\phi_1,\phi_1)} + u_h^2 \underbrace{\left(\int_0^L \kappa(x)(\phi_2'\phi_1')\,dx + \int_0^L \lambda(x)(\phi_2\phi_1)\,dx\right)}_{a(\phi_2,\phi_1)} = \langle f, \phi_1 \rangle$$

ifadesini elde ederiz. Benzer olarak (3.4.3.4) ifadesinde v_h yerine ϕ_2 alırsak

$$u_h^1 a(\phi_1, \phi_2) + u_h^2 a(\phi_2, \phi_2) + u_h^3 a(\phi_3, \phi_2) = \langle f, \phi_2 \rangle \quad (3.4.3.6)$$

olur. Bu şekilde devamla

$$
\begin{aligned}
&u_h^1 a(\phi_1,\phi_1)+u_h^2 a(\phi_2,\phi_1)=\langle f,\phi_1\rangle \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&0+u_h^{i-1}a(\phi_{i-1},\phi_i)+u_h^i a(\phi_i,\phi_i)+u_h^{i+1}a(\phi_{i+1},\phi_i)+0=\langle f,\phi_i\rangle \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u_h^{n-1}a(\phi_{n-1},\phi_n)+u_h^n a(\phi_n,\phi_n)=\langle f,\phi_n\rangle
\end{aligned}
\tag{3.4.3.7}
$$

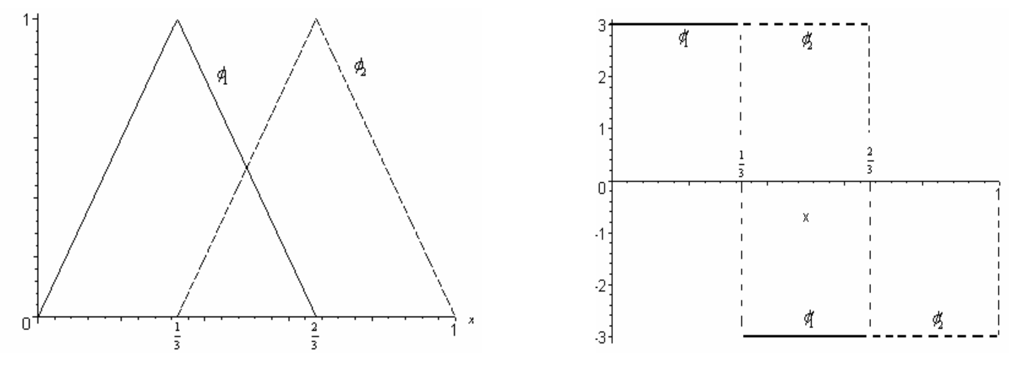
sistemi elde edilecektir.

Uygulama: $L=1,\ \kappa=1,\ \lambda=0$ ve $f=-\delta_{1/2}$ olarak alalım. Bu taktirde $\langle -\delta_{1/2},\phi_i\rangle=-\phi_i(0.5)$ olacaktır.

$n=2$ olarak alınırsa $h=1/3$ olur ve

$$
\phi_1=\begin{cases}1-\dfrac{|x-1/3|}{1/3} & 0\le x\le 2/3\\ 0 & 2/3<x\le 1\end{cases}
\quad \text{ve} \quad
\phi_2=\begin{cases}1-\dfrac{|x-2/3|}{1/3} & 1/3\le x\le 1\\ 0 & 0\le x<1/3\end{cases}
\tag{3.4.3.8}
$$

temel fonksiyonları bulunur.



Şekil 3.4.3.2 : Temel fonksiyonlar ve dağılımsal türevleri

Karşılık gelen sistem

$$
\begin{aligned}
&u_h^1 a(\phi_1,\phi_1)+u_h^2 a(\phi_2,\phi_1)=\langle f,\phi_1\rangle \\
&u_h^1 a(\phi_1,\phi_2)+u_h^2 a(\phi_2,\phi_2)=\langle f,\phi_2\rangle
\end{aligned}
\tag{3.4.3.9}
$$

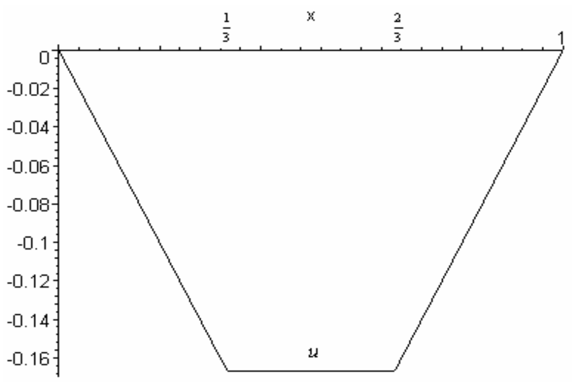
olup

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_h^1 \\ u_h^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad (3.4.3.10)$$

olur ve $\left[u_h^1, u_h^2\right]=[-0.166,-0.166]$ bulunur. Böylece yaklaşık çözüm

$$u=\begin{cases} -0.5x & 0<x<1/3 \\ -0.166 & 1/3\le x<2/3 \\ 0.5x-0.5 & 2/3\le x<1 \end{cases} \quad (3.4.3.11)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.4.3.3 : $n=2$ için yaklaşık çözüm grafiği

$n=3$ olarak alınırsa $h=1/4$ olur ve

$$\phi_1=\begin{cases} 1-\dfrac{|x-1/4|}{1/4} & 0\le x\le 2/4 \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases}, \quad \phi_2=\begin{cases} 1-\dfrac{|x-2/4|}{1/4} & 1/4\le x\le 3/4 \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases},$$

(3.4.3.12)

$$\phi_3=\begin{cases} 1-\dfrac{|x-3/4|}{1/4} & 2/4\le x\le 1 \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

temel fonksiyonları bulunur.

Karşılık gelen sistem

$$\begin{aligned}
&u_h^1 a(\phi_1,\phi_1)+u_h^2 a(\phi_2,\phi_1)+u_h^3 \underbrace{a(\phi_3,\phi_1)}_{0}=\langle f,\phi_1\rangle \\
&u_h^1 a(\phi_1,\phi_2)+u_h^2 a(\phi_2,\phi_2)+u_h^3 a(\phi_2,\phi_2)=\langle f,\phi_2\rangle \\
&u_h^1 \underbrace{a(\phi_1,\phi_3)}_{0}+u_h^2 a(\phi_2,\phi_3)+u_h^3 a(\phi_3,\phi_3)=\langle f,\phi_3\rangle
\end{aligned} \tag{3.4.3.13}$$

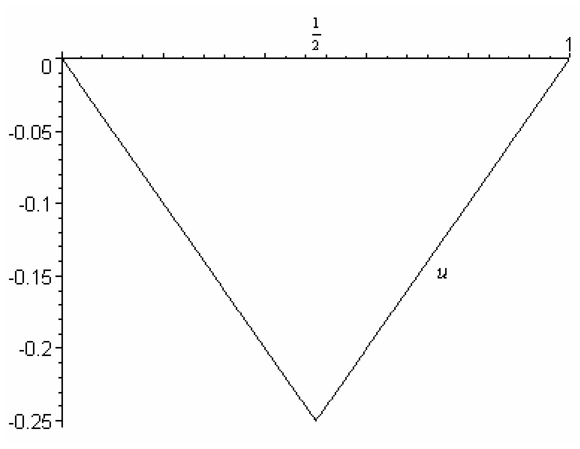
olup

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_h^1 \\ u_h^2 \\ u_h^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.4.3.14}$$

olur ve $\left[u_h^1, u_h^2, u_h^3\right]=[-0.125,-0.25,-0.125]$ bulunur. Böylece yaklaşık çözüm

$$u=\begin{cases} -0.5x & 0<x\leq 0.5 \\ 0.5x-0.5 & 0.5<x\leq 1 \end{cases} \tag{3.4.3.15}$$

olarak bulunur.



Şekil 3.4.3.4 : $n=3$ için yaklaşık çözüm grafiği

Daha büyük n değerleri için işlemler uzayacağından aşağıdaki Maple prosedürü sayesinde çözüm fonksiyonu kolayca elde edilebilir.

```
> ms:=proc(n)
> L:=1.:
> h:=L/(n+1):
> for i from 0 to n+1 do
> c[i]:=i*h:
> od:
> phi:=array(1..n):
> for k from 1 to n do
> phi[k]:=piecewise(x>=c[k-1] and x<=c[k+1],1-abs(x-c[k])/h);
> tphi[k]:=piecewise(x>=c[k-1] and x<c[k],1/h,x>c[k] and x<=c[k+1],-1/h);
> od:
> a:=proc(k,l)
> b:=int(k*l,x=0..L);
> end:
> A:=matrix(n,n):
> for i from 1 to n do
> for j from 1 to n do
> if (abs(i-j)>1) then A[i,j]:=0; else A[i,j]:=a(tphi[j],tphi[i]) end if;
> od;
> od;
> b:=array(1..n):
> for i from 1 to n do
> b[i]:=-evalf(subs(x=L/2,phi[i]));
> od:
> with(linalg):
> alpha:=linsolve(A,b):
> u:=sum('alpha[k]*phi[k]', 'k'=1..n):
> plot(u,x=0..L);
> end:
```

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3. bölümünde önce incelenen probleme esas teşkil edecek şekilde metrik uzaylar, vektör uzayları, normlu vektör uzayları, Lebesque uzayları, İç çarpım ve Hilbert uzayları, Sobolev uzayları ve Poisson denklemi ele alınmıştır.

Sonra elastik zarın enine eğilmesi problemi temel alınarak varyasyonel form ve buna karşılık gelen zayıf form gösterilmiştir. Bu formlardan $L[u] = -\nabla\left(T(x, y)\nabla u\right)$ eliptik operatörü için sırasıyla Dirichlet, Neumann ve Karışık sınır değer probleminin çıkarılışı tartışılmıştır. Böylece benzer problemlere de uygulanabilecek yaklaşım metotları olan Rayleigh-Ritz Metodu, Galerkin Metodu ayrı ayrı incelenmiştir.

En son olarak da problemin tek boyutlu hali olan elastik bir telin esnemesi meselesi göz önünde bulundurulup problemin dağılım teorisiyle ilişkisi ortaya konularak tanımlanan fonksiyon uzayında metotların nasıl uygulanacağı incelenmiştir. İncelenen tek boyutlu problem için bir Maple programı yazılmıştır.

5. SONUÇ

Bu tez eliptik bir operatör için değişik türde sınır değer problemlerinin nasıl çıkarılabileceğini ayrıntılı incelediği için diğer çalışmalara bir katkı sağlaması bakımından önem taşımaktadır. İncelenen fiziksel problemi oluşturmada ve çözmede kullanılan tanım ve teoremlerin temel matematiksel kavramlarla olan ilişkisi ayrıntılı ve oldukça uygulamalı bir biçimde sunulmuştur. Ayrıca tezde yazılan Maple programı sayesinde benzer türdeki tek boyutlu problemlerin pratik çözümü kolay bir şekilde yapılabilmektedir.

KAYNAKLAR

Adams, R.A.,1978.Sobolev Spaces.Academic Pres Inc,268 s.,California.(İngilizce)

DuChateau, P., 1989, Applied Partial Differential Equations, Harper and Row Publishing Co

Han, W. and Reddy, B. D., 1999, Plasticity: mathematical theory and numerical analysis, Springer-Verlag, 386 p., New York.

Hasanoğlu, A.,2001.Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi.Literatür Yayıncılık Ltd.Şti.,288 s.,İstanbul.(Türkçe)

Hasanov, A. and Mueller, J. L., 2001, A numerical method for backward parabolic problems with non-selfadjoint elliptic operators, Applied Numerical Mathematics, 37, Issues 1-2, 55-78.

Hunter, J.K. and Nachtergaele, B.,2001.Applied Analysis.World Scientific,439 s.,New York.(İngilizce)

Isakov, V., 1998, Inverse problems for Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 283 p., New York

Kesavan, S.,1989.Topics in Functional Analysis and Applications.Wiley Eastern Limited,266 s.,New Delhi, India.(İngilizce)

Kreyszig, E.,1978.Intraductory Functional Analysis with Applications.Jhon Wiley&Sons Inc.,687 s.,Canada.(İngilizce)

Ladyzhenskaya, O. A., 1985, The Boundary Value Problem of Mathematical Physics. Springer-Verlag, 321 p., New York.

Subaşı, M. and Yıldız, B., 2004, A stability estimate for an elliptic problem, Israel Journal of Mathematics, 144, 151-155.

Tikhonov, A. N. and Samarski, A. A., 1963, Equations of Mathematical Physics. Dover Publications, 754 p., New York.

Vasilyev, F.P.,1980.Eksternal Problemlerin Nümerik Çözüm Metodları.Nauka,388 s.,Moskova.(Rusça)

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Hatay ilinde doğdu. İlköğretimini Antakya’da, ortaöğretim kurumlar sınavında Kırıkhan Sağlık Meslek Lisesini (Sağlık Memurluğu Bölümü) kazandı ve bu bölümü 1998 yılında başarıyla tamamladı ve memur olarak atanma hakkı verildi. 1999 yılında kazandığı Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2003 yılında mezun oldu. 2002 yılında Oltu Devlet Hastanesinde Sağlık Memuru olarak göreve başladı. 2003 yılında eğitimi dolayısıyla Erzurum 2 Nolu Döner Sermaye Saymanlığına tayin edildi. 2003 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Dalında yüksek lisans programına başladı. 2004 yılında evlendi, 1 çocuk babası.

2002 yılından bu yana Sağlık Bakanlığı bünyesinde Sağlık Memurluğu görevini sürdürmektedir.