KOMPAKTLAŞTIRMA

Ceren Sultan ELMALI

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç.Dr. Tamer UĞUR
2007

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPAKTLAŞTIRMA

Ceren Sultan ELMALI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2007

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOMPAKTLAŞTIRMA

Ceren Sultan ELMALI

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç.Dr. Tamer UĞUR

Bu çalışmada topolojik uzayların kompaktlaştırılması incelenerek bazı özel kompaktlaştırma metodları hakkında bilgi verilmiş ve kompaktlaştırmalar arasındaki ilişkilerden faydalanılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2007, 69 sayfa

Anahtar Kelimeler: kompaktlaştırma, Aleksandroff kompaktlaştırması, Stone-Cech kompaktlaştırması, Hewitt kompaktlaştırması, Wallman kompaktlaştırması, Fan-Gottesman kompaktlaştırması

ABSTRACT

Master Thesis

COMPACTIFICATION

Ceren Sultan ELMALI

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof.Dr. Tamer UĞUR

In this study, information about some certain compactification methods is given by investigating compactification of topological spaces and some results are obtained by using relations between compactifications

2007, 69 pages

Keywords: compactification, Aleksandroff compactification, Stone-Cech compactification, Hewitt compactification, Wallman compactification, Fan-Gottesman compactification

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Tamer UĞUR'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik bölümünde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere anabilim dalımızın değerli öğretim üyeleri Sayın Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e, Sayın Doç. Dr. Abdullah KOPUZLU'ya ve matematik bölümünün diğer tüm öğretim elemanlarına,

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ceren Sultan ELMALI
Temmuz 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\overline{A}$	A kümesinin wX deki kapanışı
αX	Aleksandroff kompaktlaştırması
βX	Stone-Cech kompaktlaştırması
clA	A kümesinin X^* daki kapanışı
cX	X in herhangi bir kompaktlaştırması
eX	X in e izdüşüm fonksiyonu altındaki görüntüsü
$\Im$	Herhangi bir filtre
HX	Hewitt kompaktlaştırması
ηX	X in kompakt hausdorff çarpanı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
X^*	Fan-Gottesman kompaktlaştırması
(x_i)	Herhangi bir ağ
wX	Wallman kompaktlaştırması

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Topolojik uzayların genişlemesi olarak da adlandırılan kompaktlaştırma terimi ile ilk olarak 1924 yılında Tietze'nin makalesinde kullandığı tek nokta kompaktlaştırması kavramı ile literatüre girmiştir. Aynı yıllarda Alexandroff ve Urysohn kompaktlaştırmayı, sayılabilir kompakt uzayların genişlemesi olarak düşünmüşlerdir. Fakat daha sonraki yıllarda bu düşünce değişmiştir

1930'da Tychonoff tam regüler uzayları karakterize eden teoremi kompaktlaştırmanın özelliklede Stone-Cech kompaktlaştırmasının yolunu açmıştır. Bu teorem şunu ifade etmekteydi "Tam regüler uzaylar kapalı birim aralık olan I 'nın kopyalarının çarpımına gömülebilir". Bu teoremden hareketle 1937'de E.Cech ve M.H. Stone topolojik ve cebirsel olarak çok önemli yayınlar yaparak Stone-Cech kompaktlaştırmasının temelini attılar. Stone özellikle Boolean halkalarının uygulamalarını kullanıyordu. Aynı yıllarda H. Carton bizleri filtre ve ultrafiltrelerle tanıştırarak farklı kompaktlaştırmaların ilk adımlarının atılmasına sebep oldu.

1938'de H.Wallman normal taban ve filtreler yardımıyla elde edilen kendi adını taşıyan kompaktlaştırmayı geliştirdi.

1948'de Hewitt idealler ve filtreler arasında bir bağ kurarak (Hewitt genişlemeside denilen) Hewitt realkompaktlaştırmasını geliştirdi. Aynı yıllarda Nachbin'de benzer çalışmalar yaptı ancak Hewitt'ten sonra yayınlandığı için bazı kaynaklarda bu kompaktlaştırmaya Hewitt-Nachbin kompaktlaştırması adı verilir.

Yine 1948'de Samuel topolojik grupların kompaktlaştırılması üzerine çalışmalar yaptı.

1952'de H. Freudenthal yine topolojik grupların kompaktlaştırılmasında kullanılan geometrik ve cebirsel bir metot ortaya koydu.

1964'de O.Frink tam regüler uzayların normal tabanla karakterize edilebileceğini göstererek yeni kompaktlaştırma metotlarının önünü açtı.

Ayrıca bu konuyla ilgili olarak Myskis (1949), Kelley (1955),Wagner (1957) ve Kowalsky (1961)da çeşitli çalışmalar yapmıştır. Daha sonraları bu konu Peter Loeb, V.M Ul'janov, Charles Biles, W.Confort gibi birçok matematikçi tarafından çalışılarak günümüze kadar gelmiştir.

"Kompaktlaştırma" ifadesi genelde "hausdorff kompaktlaştırma" anlamında kullanılır. Ancak biz kompaktlaştırma ifadesinden herhangi bir topolojik uzayın bazı işlemler sonucu kompakt hale dönüştürülmesini anlayacağız. Bilindiği gibi pek çok kompaktlaştırma metodu vardır. Herhangi bir topolojik uzayın kompaktlaştırmasından bahsedilebilir. Mesela; T_1 uzayların T_1 kompaktlaştırması, lokal kompakt hausdorff uzayların hausdorff kompaktlaştırması vardır. Fakat en ilgi çekici olanı tam regüler uzayların hausdorff kompaktlaştırmasıdır ki bunu daha sonra Stone-Cech kompaktlaştırması başlığı altında inceleyeceğiz.

Biz burada en önemli beş kompaktlaştırmanın üzerinde duracağız. Bunlar Alexandroff, Stone-Cech, Wallman, Hewitt ve Fan-Gottesman kompaktlaştırmaları olup bu kompaktlaştırmaların birbiriyle olan ilişkilerine de yer verilecektir. Bu ilişkilerden faydalanılarak bazı sonuçlara ulaşılacaktır.

2.KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar verilecektir. Bu bölüm genel kavramlar, kompaktlık ve kompaktlaştırma başlığı altında üç alt bölüme ayrılmıştır.

2.1. Genel Kavramlar

2.1.1. Topolojik uzay: $X \neq \varnothing$ olsun. $P(X)$, X 'in kuvvet kümesi olmak üzere $\tau \subset P(X)$ alt sınıfını göz önüne alalım. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa τ alt sınıfına, X üzerinde bir topoloji τ ile beraber X kümesine topolojik uzay denir ve (X,τ) şeklinde gösterilir.

1-) $\varnothing, X \in \tau$

2-) $T_i \in \tau$ ise $\bigcup_{\mathrm{i}} \mathrm{T}_{\mathrm{i}} \in \tau$

3-) $\forall\ T_1, T_2 \in \tau$ için $T_1 \cap T_2 \in \tau$ (Lipschut 1965)

2.1.2. Yığılma noktası: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $p \in X$ noktasını alalım. p yi ihtiva eden τ daki her G açık kümesi için

$$\left(G - \{p\}\right) \cap A \neq \varnothing$$

oluyorsa p ye A kümesinin bir yığılma noktası denir. Bütün yığılma noktalarından oluşan kümeye A nın türev kümesi denir. A' ile gösterilir (Lipschut 1965).

2.1.3. Bir kümenin kapanışı: (X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini ihtiva eden tüm kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin kapanışı denir. Yani, bir kümenin kapanış kümesi o kümeyi ihtiva eden en küçük kapalı kümedir. Kapanış kümesi $\overline{A}$

veya $cl_X A$ ile gösterilir. Kapanış kümesinde yer alan noktalara da kapanış noktası denir (Simmons 1963).

2.1.4. Yoğun küme: X bir topolojik uzay $A, B \subset X$ olsun. Eğer $B \subset \overline{A}$ ise A kümesine B kümesinde yoğundur denir. Özel olarak $A \subset X$ olmak üzere $\overline{A} = X$ ise A'ya X'te yoğundur denir (Lipschut 1965).

2.1.5. Alt uzay topoloji: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. X in her açık kümesiyle A kümesinin arakesiti alınarak oluşturulan sınıf A kümesi üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu sınıf τ_A ile gösterilir ve rölatif topoloji veya alt uzay topolojisi diye adlandırılır. (A, τ_A) yada (X, τ) topolojik uzayının alt uzayı veya rölatif uzayı denir. Burada

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$$

şeklindedir (Lipschut 1965).

2.1.6. Süreklilik: (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. f'in sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall H \in \tau'$ için $f^{-1}(H) \in \tau$ olmasıdır (Lipschut 1965).

Bu tanıma denk olarak bir f fonksiyonunun sürekliliği analizde şu şekilde tanımlanır. $(\forall \varepsilon > 0)$ için $(\exists \delta > 0)$ vardır öyle ki $\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$

2.1.7. Düzgün süreklilik: $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun. Şayet $(\forall \varepsilon > 0)$ için $(\exists \delta > 0)$ vardır öyle ki $(\forall p, q \in B)\left(\|p - q\| < \delta \Rightarrow \|f(p) - f(q)\| < \varepsilon\right)$ özelliği sağlanıyorsa f ye B üzerinde düzgün süreklidir denir (Balcı 2003).

Bu tanıma dikkat edilirse düzgün sürekliliğin bir küme üzerinde tanımlı olduğu anlaşılır. Yine burada δ sadece ε a bağlıdır.

2.1.8. Lipschitz şartı: $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun. $\forall p, q \in B$ için $\left\| f(p) - f(q) \right\| < m \left| p - q \right|$ olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu B üzerinde Lipschitz şartını sağlıyor denir (Balcı 2003).

Bu tanıma göre Lipschitz şartını sağlayan her fonksiyon düzgün süreklidir.

2.1.9. Açık fonksiyon: $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere eğer X ’deki her açık kümenin görüntüsü Y ’de açık ise f ’ye açık fonksiyon denir (Lipschut 1965).

2.1.10. Homeomorfizm: $f : X \to Y$ fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve açıksa f ’ye homeomorfizm denir. X ve Y uzaylarına da homeomorf uzaylar denir (Munkres 1975).

2.1.11. İmbeding: $f : X \to Y$ fonksiyonu birebir, sürekli ve tersi sürekli bir fonksiyon olmak üzere $f(X) \subset Y$ oluyorsa yani f fonksiyonu X uzayından Y nin bir alt uzayına homeomorfizmse $f : X \to Y$ dönüşümüne topolojik imbeding, basitçe imbeding veya gömülme denir (Munkres 1975).

2.1.12. Sınırlı fonksiyon: $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon ve $S \subset B$ olsun. $\forall p \in S$ için $\left| f(p) \right| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa f ye S üzerinde sınırlı denir (Balcı 2003).

2.1.13. Filtre: X bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $F \subset P(X)$ alt ailesine X üzerinde bir filtre denir.

1-) $\varnothing \notin F$

2-) $T_1, T_2 \in F$ için $T_1 \cap T_2 \in F$

3-) $T_1 \in F$ ve $T_1 \subset T'$ ise $T' \in F$ 'dir (Willard 1970).

2.1.14. Zayıf-kuvvetli filtre: X üzerinde F_1, F_2 filtreleri verilsin. Eğer $F_1 \subset F_2$ ise F_1, F_2 'den daha kaba ya da F_2, F_1 'den daha incedir denir (Willard 1970).

2.1.15. Ultra filtre: F , X üzerinde bir filtre olsun. Eğer X üzerinde kesin olarak F 'den daha kuvvetli başka bir filtre yoksa F 'ye ultra filtre denir (Willard 1970).

2.1.16. Yönlendirilmiş küme: Bir Λ kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $'\preceq'$ bağıntısı yönlendirme bağıntısı ve üzerinde böyle bir bağıntı tanımlanmış kümeye de yönlendirilmiş küme denir.

1-) $\forall \lambda \in \Lambda$ için $\lambda \preceq \lambda$

2-) $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ için $\lambda_1 \preceq \lambda_2$ ve $\lambda_2 \preceq \lambda_3$ ise $\lambda_1 \preceq \lambda_3$ tür.

3-) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ ve $\lambda_1 \preceq \lambda_3$ ve $\lambda_2 \preceq \lambda_3$ olacak şekilde en az bir $\lambda_3 \in \Lambda$ vardır (Willard 1970).

2.1.17. Ağ: X bir küme ve Λ yönlendirilmiş küme olmak üzere Λ üzerinde tanımlı her $f : \Lambda \to X$ fonksiyonuna X de bir ağ veya net denir. $\lambda \in \Lambda$ için $f(\lambda) = x_\lambda \in X$ şeklinde veya (x_λ) şeklinde gösterilir (Willard 1970).

2.1.18. Bir ağın yığılma noktası: x in her U komşuluğu ve $\lambda_0 \preceq \lambda$ olacak şekilde bazı $\lambda_0 \in \Lambda$ elemanları için $x_{\lambda_0} \in U$ olacak şekilde bir x noktası bulunuyorsa bu x noktasına (x_λ) ağının yığılma noktasıdır denir (Willard 1970).

2.1.19. Ultra ağ: X bir küme ve (x_λ) X de bir ağ olsun.Eğer her $E \subset X$ için $\forall \lambda \succeq \lambda_1$ için $x_\lambda \in E$ veya $x_\lambda \in X - E$ olacak şekilde $\exists\, \lambda_1 = \lambda_1(E)$ varsa bu (x_λ) ağına evrensel ağ veya ultra net denir (Willard 1970).

2.1.20. Taban: (X,τ) bir topolojik uzay ve β da τ daki açıklardan oluşan herhangi bir alt sınıf olsun. τ daki açıkların her biri β nın elemanlarının herhangi bir birleşimi şeklinde yazılıyorsa β ya τ topolojisi için bir tabandır denir (Lipschut 1965).

2.1.21. Alt taban: (X,τ) bir topolojik uzay ve $S \subset \tau$ yani S, X in açık kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer S nin elemanlarının sonlu arakesitleri τ için bir taban teşkil ediyorsa S ye τ topolojisi için bir tabandır denir (Lipschut 1965).

2.1.22. Lokal taban: X bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. p yi ihtiva eden açıkların β_p sınıfının p de bir lokal taban teşkil etmesi için gerek ve yeter şart p yi ihtiva eden her G açık kümesi için $p \in B_p \subset G$ olacak şekilde $B_p \in \beta_p$ olmasıdır (Lipschut 1965).

2.1.23. Birinci sayılabilir topolojik uzay: X bir topolojik uzay olsun. Eğer X in her $x \in X$ noktası için sayılabilir bir lokal tabanı varsa bu uzaya birinci sayılabilir topolojik uzay denir (Lipschut 1965).

2.1.24. İkinci sayılabilir topolojik uzay: X bir topolojik uzay olmak üzere X sayılabilir bir tabana sahipse bu uzaya ikinci sayılabilir topolojik uzay denir (Lipschut 1965).

2.1.25. T_1 (Frechet) uzay: (X,τ) topolojik uzay olsun. Seçilen her $(x,y) \in X$ $(x \neq y)$ çifti için $x \in U\,(y \notin U)$ ve $y \in V\,(x \notin V)$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa bu uzaya T_1 uzayı denir (Lipschut 1965).

2.1.26. T_2 (Hausdorff) uzay: (X,τ) herhangi bir topolojik uzay olmak üzere her $(x,y)\in X$ $(x\neq y)$ çifti için $x\in U, y\in V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa bu uzaya hausdorff veya T_2 uzayı denir (Lipschut 1965).

2.1.27. Regüler uzay: (X,τ) topolojik uzay olsun. Her $p\in X$ ve p 'yi ihtiva etmeyen bir F kapalı alt kümesi verilsin. $p\in U, F\subset V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa bu uzaya regüler uzay denir (Lipschut 1965).

2.1.28. T_3 uzay: Bir X regüler uzayı T_1 ise bu uzaya T_3 uzayı denir (Lipschut 1965).

2.1.29. Normal uzay: (X,τ) bir topolojik uzay ve F_1, F_2 'de X 'in kapalı alt kümeleri olsun. $F_1\subset U$ ve $F_2\subset V, U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa bu uzaya normal uzay adı verilir (Lipschut 1965).

2.1.30. T_4 uzay: Eğer bir normal uzay T_1 ise bu uzaya T_4 uzayı denir (Lipschut 1965).

2.1.31. Tam regüler uzay: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. F, X 'in kapalı bir alt kümesi ve p 'de F 'de bulunmayan X 'in bir noktası olsun. Eğer $f(p)=0$ ve $f[F]=\{1\}$ olacak şekilde $f: X\to[0,1]$ sürekli fonksiyonu varsa X 'e tam regüler uzay denir (Lipschut 1965).

2.1.32. $T_{3,5}$ (Tychonoff) uzay: Eğer bir tam regüler uzay T_1 ise bu uzaya Tychonoff uzay veya $T_{3,5}$ uzay adı verilir (Lipschut 1965).

2.1.33. Çarpım topolojisi: $(X_i, \tau_i), i \in I$ olmak üzere topolojik uzayların bir ailesi olsun. $X = \prod X_i$ çarpım kümesi üzerinde $\pi_i : X \to X_i$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan topolojiye bu uzaylar üzerindeki çarpım topolojisi denir (Lipschut 1965).

2.1.34. Sonuç uzayı: (X_i, τ_i) topolojik uzaylar ailesi olsun. $\forall i \in I$ için $f_i : X_i \to Y$ fonksiyonları verilsin. Y üzerindeki topolojiler arasında f_i leri sürekli yapan topolojilerin en incesine tümel veya sonuç topolojisi denir. Y uzayına da sonuç uzayı denir (Lipschut 1965).

2.1.35. Bölüm uzayı: (X, τ) bir topolojik uzay, β da X üzerinde bir denklik bağıntısı X / β da bu bağıntıya göre X in bölüm kümesi ve $p : X \to X / \beta$ doğal dönüşüm olmak üzere X / β üzerinde p yi sürekli kılan sonuç topolojisine bölüm topolojisi bu topolojiyle beraber X / β uzayına da bölüm uzayı adı verilir (Lipschut 1965).

2.1.36. Bölüm dönüşümü: Y bölüm topolojisine sahipse, $p : X \to Y$ sürekli örten her dönüşüme bölüm dönüşümü denir (Moller 2003).

2.1.39. Ayrılmış kümeler: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa A ve B ye ayrılmış kümeler denir.

1-) $A \cap B = \varnothing$

2-) $\overline{A} \cap B = \varnothing$ ve $A \cap \overline{B} = \varnothing$ (Kılıç 2002)

2.1.38. Tamamen (tam) normal uzay: (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X in her ayrılmış kümesi için ayrık olacak şekilde açık komşulukları bulunuyorsa yani; $A_{1,} A_2$ X de ayrılmış kümeler olmak üzere $A_1 \subset U, A_2 \subset V, U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa uzay tamamen normaldir denir (Munkres 1975).

2.1.39. T_5 uzay: Eğer tamamen normal bir uzay aynı zamanda T_1 şartını sağlıyor ise bu uzaya T_5 uzay denir (Bayramov 2004).

2.1.40. Mükemmel normal uzay: (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere her kapalı, ayrık $A,B \subset X$ kümeleri için $f^{-1}(0)=A$ ve $f^{-1}(1)=B$ şartını sağlayan sürekli $f:X \to [0,1]$ fonksiyonu varsa (X,τ) uzayı mükemmel normaldir denir (Rahimov 2006).

2.1.41. T_6 uzay: Eğer mükemmel normal bir uzay aynı zamanda T_1 şartını sağlıyor ise bu uzaya T_6 uzay denir (Bayramov 2004).

2.1.42. Lindelöf uzay: (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa bu uzaya lindelöf uzay denir (Lipschut 1965).

2.2.Kompaktlık

Kompaktlık kavramını ilk kez 1906 yılında Frechet kullanmıştır. Bu terim topolojiye analizdeki önemli iki teoremle girmiştir. Bunlar Heine-Borel ve Bolzano-Weierstrass teoremleridir.(Lipschut 1965) Kompaktlık topolojik bir sabit olmakla beraber analizde de oldukça önemli bir yere sahiptir. Çünkü kompakt bir küme üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar bu küme üzerinde düzgün süreklidir. Dolayısıyla Lipschitz şartını sağlarlar. Ayrıca kompakt bir küme üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar bu küme üzerinde sınırlıdırlar ve en önemli özelliklerden biri kompakt bir küme üzerindeki sürekli fonksiyonlar bu küme üzerinde maksimum ve minimum değerlerini alırlar.

Yukarıda bahsedilen her iki teoremde de sınırlılık şartı olduğundan herhangi bir topolojik uzayda geçerliliklerini kaybederler. Herhangi bir topolojik uzaya genelleştirmek için açık örtü kavramı kullanılmıştır. Şimdi bu kavramları verelim.

2.2.1. Örtü: (X,τ) topolojik uzay olsun. X 'in alt kümelerinin bir $(U_i)_{i\in I}$ ailesi verilsin. Eğer $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ ise $(U_i)_{i\in I}$ ailesine X uzayının bir örtüsü denir (Yüksel 1998).

2.2.2. Açık örtü: (X,τ) topolojik uzay olsun. $\{U_i\} \subset \tau$ olmak üzere $X = \bigcup_i U_i$ ise $\{U_i\}$ sınıfına X uzayının bir açık örtüsü denir (Yüksel 1998).

2.2.3. Sonlu alt örtü: $\{U_i\}$ sınıfı X uzayının bir açık örtüsü olsun. $U_{i1}, U_{i2}, ..., U_{in} \in \{U_i\}$ olmak üzere $X \subset \bigcup_{j=1} U_{ij}$ oluyorsa bu açık örtüye $\{U_i\}$ açık örtüsünün sonlu alt örtüsü denir (Yüksel 1998).

2.2.4. Kompaktlık: X bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X 'e kompakttır denir (Yüksel 1998).

2.2.5. Örnek: Reel sayıların alışılmış topolojisiyle beraber $A = [0,1]$ kapalı aralığı verilsin. (Λ herhangi bir indis kümesi olmak üzere) $\{G_i | i \in \Lambda\}$ ailesini göz önüne alalım.

$$A \subset \bigcup_{i\in\Lambda} G_i$$

Olacak şekilde açık kümelerin bir sınıfı olsun. Bu takdirde $\forall x \in [0,1]$ için $x \in (a_i, b_i) \subset G_i$ şeklinde açıklar bulunur. Böylece $\{(a_i, b_i) : i \in \Lambda \text{ ve } x \in [0,1]\}$ açık örtüsü

$$A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup .... \cup G_{i_n}$$

Olacak şekilde $G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}$ gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda $A = [a, b]$ şeklindeki her kapalı aralık sonlu bir alt örtüye indirgenebilir. Dolayısıyla kompakttır (Yüksel 1998).

2.2.6. Lokal kompaktlık: X topolojik uzayı verilsin. $\forall x \in X$ için kompakt bir komşuluk varsa, bu uzaya lokal kompakt uzay denir (Lipschut 1965).

2.2.7. Sonlu arakesit özelliği: $\{A_i\}$ kümeler sınıfı olsun. Eğer bu sınıfın her $\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}\}$ sonlu alt sınıfı boş olmayan arakesite sahipse $\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_n} \neq \varnothing\right)$ bu sınıfa sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir (Lipschut 1965).

2.3.Kompaktlaştırma

Kompaktlaştırma ile ilgili çalışmalar ilk olarak 1924 yılında Tietze ‘nin makalesinde kullandığı “tek nokta kompaktlaştırması“ kavramıyla başlamıştır. Yine 1924‘te Alexandroff ve Urysohn öncelikle kompaktlaştırmayı, sayılabilir kompakt uzayların genişlemesi olarak düşünmüşlerdir. 1930’da Tychonoff ‘un düşünceleri daha da geliştirmiştir. Kompaktlaştırma kavramının altında yatan temel düşünce uzayın genişlemesidir. Buradan hareketle uzayın genişlemesi tanımını verelim.

2.3.1. Uzayın genişlemesi: (X, τ), (Y, τ') topolojik uzaylar ve $A \subset Y$ alt kümesi Y de yoğun olsun. Eğer (X, τ) dan (A, τ_A)’ya bir homeomorfizm varsa, (Y, τ') uzayına (X, τ) uzayının bir genişlemesi denir. (Y, τ') genişlemeye

T_α —genişlemesi denir $\Leftrightarrow (Y, \tau')$ T_α -uzayı ise

Burada T_α ayırma aksiyomlarından herhangi birisini göstermektedir.

Verilen bir topolojik uzay bazı hallerde kompakt olmayabilir. Bu takdirde verilen uzay, kompakt bir uzayın yoğun bir alt uzayına homeomorf kılınabilir (Yıldız 2005).

2.3.2. Kompaktlaştırma: (X,τ) topolojik uzayı ve bir (Y,τ') kompakt uzayı verilsin. Eğer X uzayı, Y kompakt uzayının yoğun bir alt uzayına homeomorf ise Y uzayına X uzayının bir kompaktlaştırması veya kompaktlaması denir (Yıldız 2005).

X kompakt uzayının tek kompaktlaştırması X ,Y de kapalı ve yoğun olduğu için kendisidir.

2.3.3. Örnek: (R,U) alışılmış topolojik uzayında $X=(0,1)$ alt uzayı kompakt değildir. Fakat $Y=[0,1]$ uzayı kompakttır. Ayrıca $X\subset Y$ ve $\overline{X}=Y$ olduğundan X uzayı kendi kendisine homeomorftur. Bu durumda Y uzayı X 'in bir kompaktlaştırmasıdır(Yıldız 2005).

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1.Aleksandroff (Tek Nokta) Kompaktlaştırması

Aleksandroff kompaktlaştırmasının inşası başlangıçta farklı gibi görünebilir. Ancak birkaç önemli özelliğe sahiptir. Birincisi oldukça kullanışlıdır. Diğer kompaktlaştırmalara oranla her topolojik uzaya uygulanabilirdir. Örneğin; reel değerli fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip olan Stone-Cech kompaktlaştırması genel topolojik uzaylarda değil de sadece topolojik uzayların kısıtlanmış bir sınıfında geçerlidir. İkincisi herhangi bir topolojik uzay için kompaktlaştırmanın var olduğunu bilmek oldukça faydalıdır. Üçüncüsü kompaktlaştırma sonucunda ortaya çıkan uzay matematiksel açıdan oldukça anlamlıdır.

3.1.1. Aleksandroff kompaktlaştırması: (X,τ)lokal kompakt hausdorff uzay olsun. X uzayına ∞ sembolüyle gösterilen ve bu uzaya ait olmayan sonsuzdaki bir noktanın ilave edilmesiyle elde edilen $Y = X \cup \{\infty\}$ uzayını göz önüne alalım. $\tau' \subset P(Y)$ ailesi, aşağıdaki şekilde verilen kümelerden meydana gelsin.

1-) τ 'ya ait her küme τ' de yer alsın.

2-) Y kümesinin, ∞ noktasını içeren alt kümelerinden X 'e göre tümleyeni X uzayında kapalı ve kompakt olan olanlar yani; $\{\infty\} \cup X - C$ (C, X 'in kompakt alt kümesi olmak üzere) biçimindeki kümeler τ' de bulunsun.

Bu şekilde tanımlanan Y uzayına X 'in (tek nokta kompaktlaştırması) Aleksandroff kompaktlaştırması denir. Ayrıca τ' ailesi Y üzerinde bir topolojik yapıdır ve (X,τ)uzayı (Y,τ') uzayının bir alt uzayıdır. Yani;

$$\tau' = \{U : U, X \text{ in açık alt kümesi}\} \cup \{Y - C : C, X \text{ in kompakt alt kümesi}\}$$

şeklinde tanımlanan koleksiyon Y de bir topolojidir.

Bunu göstermek için topolojinin üç şartını sağlatalım. $\varnothing$ birinci tip bir kümedir dolayısıyla τ' de bulunur. $Y = Y - \varnothing$ şeklinde yazılabileceğinden dolayı ikinci tip bir kümedir ve τ' de bulunur.

Şimdi τ'deki elemanların sonlu arakesitlerinin τ' olup olmadığına bakalım. Bunu üç durumda inceleyeceğiz. Her iki kümede birinci tip ise X topolojik uzay olduğundan $U_1 \cap U_2$ açıktır ve τ' de bulunur. Her iki kümede ikinci tip ise bu durumda

$$\left(Y - C_1\right) \cap \left(Y - C_2\right) = Y - \left(C_1 \cup C_2\right)$$

olup $Y - \left(C_1 \cup C_2\right)$ikinci tip olduğundan τ'de bulunur. Biri birinci tip diğeri ikinci tip ise

$$U_1 \cap \left(Y - C_1\right) = U_1 \cap \left(X - C_1\right)$$

Elde edilir. C_1, X de kapalı olduğundan yukarıdaki ifade birinci tip olup τ' de bulunur.

Benzer olarak herhangi birleşimine bakalım. X topolojik uzay olduğundan birinci tip kümelerin herhangi birleşimi olan $\bigcup U_\alpha$ lar birinci tip olup τ' de bulunur. İkinci tip kümelerin herhangi birleşimi

$$\bigcup \left(Y - C_\beta\right) = Y - \left(\bigcap C_\beta\right) = Y - C$$

Şeklinde olup ikinci tip bir kümedir ve τ' de bulunur. Son olarak her iki tip kümeyi göz önüne alalım. Bu durumda

$$\left(\bigcup U_\alpha\right) \cup \left(\cup \left(Y - C_\beta\right)\right) = U \cup \left(Y - C\right) = Y - \left(C - U\right)$$

İfadesine ulaşırız. Burada $C - U, C$ nin kapalı alt kümesi olduğundan kompakttır. Dolayısıyla ifademiz ikinci tiptir ve τ' de bulunur.

Özel olarak X kompakt ise Y, X 'e yalıtık noktasının ilave edilmiş halidir (Munkres 1975).

Notasyon karışıklığını önlemek için bundan sonra herhangi bir uzayın Aleksandroff kompaktlaştırmasını αX ile göstereceğiz.

Aleksandroff kompaktlaştırma teoremini vermeden önce bu bölümde kullanacağımız birkaç önemli teoremi verelim.

3.1.2.Teorem: Kompakt kümelerin sürekli dönüşüm altındaki görüntüsü de kompakttır.

İspat: $A \subset X$ ve A kompakt olsun. $f : X \to Y$ sürekli dönüşüm verilsin. $f[A]$ kümesinin kompakt olduğunu göstermeliyiz. $\{G_i\}, Y$ de $f[A]$ görüntü kümesinin bir açık örtüsü olsun. f sürekli olduğundan her i için $f^{-1}[G_i], X$ de açık olur. Ayrıca $\{f^{-1}[G_i]\}$ sınıfı A kümesinin bir açık örtüsü olur. A kompakt olduğundan bu açık örtünün

$$A \subset f^{-1}\left[G_{i_1}\right] \cup f^{-1}\left[G_{i_2}\right] \cup ..... \cup f^{-1}\left[G_{i_n}\right]$$

olacak şekilde $\left\{f^{-1}\left[G_{i_n}\right]\right\}$ sonlu bir alt örtüsü vardır. Buradan

$$f[A] \subset G_{i_1} \subset G_{i_2} \subset ....G_{i_n}$$

olacak şekilde $\{G_i\}$ açık örtüsünün $f[A]$ yı örten sonlu bir $\{G_{i_n}\}$ alt örtüsü vardır. Yani; $f[A]$ kompakttır (Lipschutz 1965).

3.1.3.Teorem: Bir kompakt uzayın kapalı her alt kümesi kompakttır.

İspat: X kompakt ve $F \subset X$ kapalı bir alt kümesi olsun. F kapalı olduğundan tümleyeni olan $X - F$ açıktır.

$\{G_i\}, F$ nin bir açık örtüsü olsun. Bu durumda $\{G_i\} \cup X - F$ sınıfıda X i örter. X kompakt olduğundan bu sınıf

$$X = G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup .... \cup G_{i_n} \cup X - F$$

şeklinde sonlu bir alt örtüye sahiptir. Bu durumda $F \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup .... \cup G_{i_n}$ olur. Dolayısıyla F nin $\{G_i\}$ açık örtüsünün $\{G_{i_n}\}$ sonlu alt örtüsü vardır. O halde F kompakttır (Lipschutz 1965).

3.1.4.Teorem: Bir hausdorff uzayın her kompakt alt kümesi kapalıdır.

İspat: X bir hausdorff uzay olmak üzere $A \subset X$ ve A kompakt olsun. A^t nin açık olduğunu gösterelim.

$p \in A^t$ olsun. A yı örten $\{G_i\}$ açık örtüsü için p yi ihtiva eden en az bir G_{i_0} açık kümesi vardır.

$q \in A$ olsun. X hausdorff olduğundan $q \in U \subset A$ olacak şekilde U açığı vardır.

Bu durumda $G_{i_0} \cap U = \varnothing$ dir. O halde $p \in G_{i_0} \subset A^t$ olur. Yani; A^t açık A da kapalıdır (Lipschutz 1965).

3.1.5. Bölüm dönüşümünün evrensel özelliği: R, X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $f : X \to Y$ sürekli bir dönüşüm olsun.

1-) R denklik bağıntısına göre $p : X \to X / R$ dönüşümü vardır.

2-) R ye göre $f : X \to Y$ sürekli dönüşümse aşağıdaki diyagramın değişmeli olacağı $\overline{f} : X / R \to Y$ sürekli dönüşümü tek şekilde vardır

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\ & X / R \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 3.1.1. Bölüm dönüşümünün tekliği

3-) $\overline{f}$ varsa, $\overline{f}$ nin bölüm dönüşümü olması için gerek ve yeter şart f nin bölüm dönüşümü olmasıdır (Moller 2003).

3.1.6. Kapalı dönüşüm lemması: X kompakt uzay Y hausdorff uzay ve $f : X \to Y$ sürekli dönüşüm olsun. Bu durumda

1) f kapalıdır.

2) f örtense, kapalı bölüm dönüşümüdür.

3) f birebirse, imbedingdir.

İspat: $f : X \to Y$ kompakt hausdorff X uzayından Y hausdorff uzayına sürekli bir dönüşüm olsun.

(1) C, X de kapalı ise 3.1.3. teoremden C kompakt olup, f altındaki görüntüsü olan $f(C)$ de 3.1.2. teoremden Y de kompakttır. Böylece f nin kapalı bir dönüşüm olduğunu göstermiş olduk.

(2) Her kapalı sürekli örten dönüşüm kapalı bölüm dönüşümüdür.

(3) Her kapalı sürekli birebir dönüşüm imbedingdir (Moller 2003).

3.1.7. Alexandroff kompaktlaştırma teoremi: (X, τ) lokal kompakt hausdorff uzay $\{\infty\} \notin X$ bir nokta ve $Y = X \cup \{\infty\}$ olsun. Y uzayında 3.1.1. deki τ' topolojisi tanımlansın.

1)Bu topoloji ile beraber (Y, τ') uzayı (X, τ) uzayının bir kompaktlaştırmasıdır.

2) $c : X \to cX$, X in başka bir kompaktlaştırmasıysa aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde $\underline{c} : cX \to Y = cX / (cX - X)$ tek bir kapalı bölüm dönüşümü vardır.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "c"'] \arrow[dr] & \\
cX \arrow[rr, "\underline{c}"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

Şekil 3.1.2. Kapalı bölüm dönüşümü

İspat: 1) $Y = X \cup \{\infty\}$ kümesinde τ' topolojisi yukarıdaki gibi τ ailesi ile $\{\infty\} \cup X - C$ (burada $C \subset X$ kompakt kümedir)şeklinde verilen kümeler ailesinin birleşimi olarak tanımlansın. τ' ailesinin bir topoloji oluşturduğu kolayca görülebilir.

(Y, τ') uzayının kompakt hausdorff olduğunu gösterelim. Önce hausdorff olduğunu gösterelim. Eğer $x \neq y \in Y$ için $x, y \in X$ ise X hausdorff olduğundan bu noktaların ayrık komşulukları vardır. Eğer $x \in X, y = \infty$ ise (X, τ) lokal kompakt olduğundan $\bar{U}$ kompakt olan $x \in U \in \tau$ komşuluğu vardır. O halde $\{\infty\} \cup (X - \bar{U}) \in \tau'$ 'dür ve ∞ noktasını içerdiği için ∞ 'un bir komşuluğudur. $U \cap (\{\infty\} \cup (X - \bar{U})) = \varnothing$ olduğu açıktır.

Şimdi (Y, τ')uzayının kompakt olduğunu gösterelim. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ailesi (Y, τ') uzayının herhangi bir açık örtüsü olsun. $\infty \in Y$ noktası bu örtünün en az bir $U_{\alpha 0}$ kümesine aittir. τ' topolojisinin tanımından $U_{\alpha 0} = \{\infty\} \cup X - C$ 'dır ve $C \subset X$ kümesi kompakttır. $C \subset X \subset Y$ olduğundan $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ailesi C 'nin bir açık örtüsüdür. O halde $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ örtüsünden C 'nin sonlu $U_{\alpha 1}, ...U_{\alpha n}$ alt örtüsü seçilebilir. Böylece $U_{\alpha 0}, U_{\alpha 1}, ...U_{\alpha n}$ sonlu ailesi Y 'nin bir örtüsüdür.

$h : X \to Y$ fonksiyonunu $h(x) = x$ şeklinde verelim. Açıktır ki h fonksiyonu bir imbeding fonksiyonudur. $\overline{X} = Y$ olduğunu göstermek için $\infty \in \overline{X}$ olduğunu göstermek yeterlidir. ∞ noktasının herhangi $\{\infty\} \cup X - C$ komşuluğu için $C = X$ olamaz. Çünkü C kompakt uzay fakat X kompakt uzay değildir. Böylece $\varnothing \neq X - C \subset X$ 'tir.Buradan

$$X \cap (\{\infty\} \cup X - C) = X - C \neq \varnothing$$

elde edilir. Bununla (Y, τ')uzayının (X, τ)'nun bir kompaktlaştırması olduğu ispatlanır.

2)Şimdi $c: X \to cX$, X in başka bir kompaktlaştırması olsun. $\forall x \in X$ için $\underline{c}(x) = x$ ve $\underline{c}(cX - X) = \infty$ ile $\underline{c}: cX \to Y$ dönüşümünü tanımlayalım. $\underline{c}$ nın sürekliliğini kontrol edelim. Herhangi bir açık $U \subset X \subset Y$ kümesi için $\underline{c}^{-1}(U), X$ de açıktır. X , cX de açık olduğundan $\underline{c}^{-1}(U), cX$ 'de de açıktır.

$C \subset X$ herhangi bir kompakt uzayı için $\underline{c}^{-1}(Y - C) = cX - C$ olup cX hausdorff uzayında C kompakt altkümesi kapalı olup $cX - C, cX$ de açıktır. Bu $\underline{c}$ nın sürekliliğini gösterir. $\underline{c}$ nın tanından örtendir ve dolayısıyla kapalı bölüm dönüşümüdür.

Bu teorem cX , X in bir kompaktlaştırması olmak üzere $Y = cX / (cX - X)$ olduğunu söyler. Özel olarak cX , X ve tek noktadan oluşuyorsa $\underline{c}$ birebir ve örten bölüm dönüşümüdür, yani; homeomorfizmdir (Moller 2003).

3.1.8. Örnek: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ uzayı kompakt bir uzaydır. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ olup $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^*$ dır.Bu durumda $\mathbb{R}^*$ uzayı $\mathbb{R}$ 'nin bir kompaktlaştırmasıdır (Yüksel 1998).

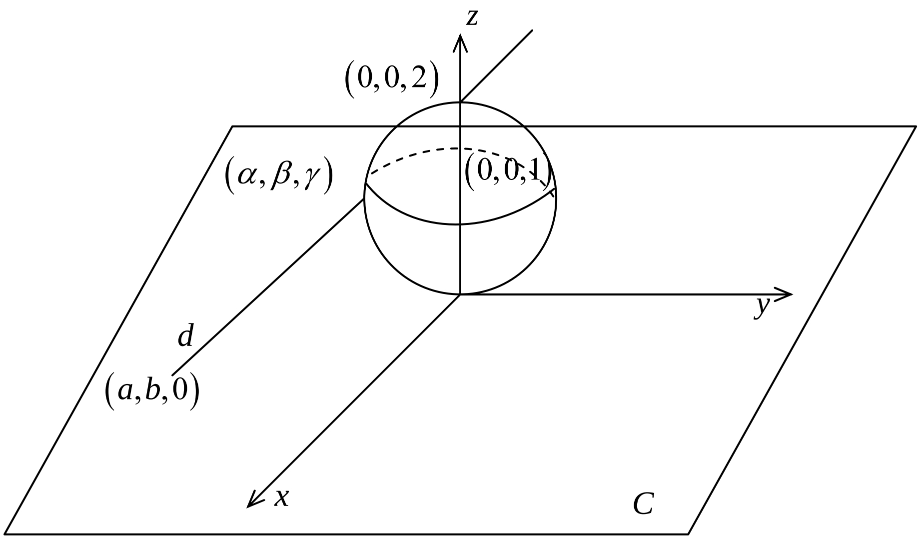
3.1.9. Örnek: $\mathbb{R}^3$ uzayındaki xy düzlemine $(0,0,0)$ noktasında teğet olan $(0,0,1)$ merkezli 1 yarıçaplı

$$S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bunun kuzey kutbu $z = (0,0,2)$ noktasıdır. C düzleminin her bir $P(a,b,0)$ noktasını S^2 küresinin kuzey kutbuna birleştiren d doğrusunu düşünelim. Bu doğrunun denklemi

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{2-z}{2}$$

olur ve aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi



Şekil 3.1.3. Düzlemin Aleksandroff kompaktlaştırması

S^2 küresini bir $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ noktasında keser. Şu halde

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{2-\gamma}{2}$$

eşitlikleri doğrudur. Buradan $a=\dfrac{2\alpha}{2-\gamma}$ ve $b=\dfrac{2\beta}{2-\gamma}$ bulunur.

Buradan da eğer $u=a+ib$ denirse,

$$u^2=\frac{4\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\left(2-\gamma\right)^2}$$

elde edilir. Öte yandan $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ noktasının

$$x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=0$$

küre denklemini de sağladığı hesaba katılırsa

$$|u|^2=\frac{4\gamma}{2-\gamma}$$

yada

$$2-\gamma=\frac{8}{4+|u|^2}$$

olur. Bunlardan sonuncusu kullanılarak

$$\alpha = \frac{4a}{4+a^2+b^2}, \beta = \frac{4b}{4+a^2+b^2} \text{ ve } \gamma = \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{4+a^2+b^2}$$

bulunur.

Şimdi $\mathbb{R}^2$ düzleminden S^2 küresi içine, her $P(x,y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$f\left(P(x,y)\right) = Q\left(\frac{4x}{4+x^2+y^2}, \frac{4y}{4+x^2+y^2}, \frac{2\left(x^2+y^2\right)}{4+x^2+y^2}\right)$$

biçiminde tanımlı, $f:\mathbb{R}^2 \to S-\{(0,0,2)\}$'ye bir f fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğu hesaplamalar yapılarak kolayca görülebileceği gibi yukarıdaki şekilden de açıkça görülebilir. Şu halde tersi vardır ve oda

$$f^{-1}: S-\{(0,0,2)\} \to \mathbb{R}^2 \quad f^{-1}\left(Q(x,y,z)\right) = P\left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z}\right)$$

olur. f fonksiyonu ile tersinin sürekli olduğunu görebilmek için önce $\mathbb{R}^2$ düzleminden $\mathbb{R}$ uzayına

$$f_1(x,y) = \frac{4x}{4+x^2+y^2}, \; f_2(x,y) = \frac{4y}{4+x^2+y^2}, \; f_3(x,y) = \frac{2\left(x^2+y^2\right)}{4+x^2+y^2}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu fonksiyonlar süreklidirler. Sürekli fonksiyonların bileşimi sürekli olduğundan f fonksiyonu süreklidir. Benzer biçimde terside sürekli olur ve dolayısıyla f fonksiyonu bir topolojik eş yapı dönüşümüdür (Kılıç 2002).

Görüldüğü gibi küre, düzlemin tek nokta kompaktlaştırmasıdır. Özel olarak $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin Aleksandroff kompaktlaştırması Riemann küresi veya genişletilmiş kompleks düzlem diye adlandırılır. Benzer olarak $\mathbb{R}$'nin tek nokta kompaktlaştırması çemberdir. Ayrıca $\mathbb{R}^3$'ün tek nokta kompaktlaştırmasıda $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ yani;

$$S^3 = \left\{(x,y,z,t) : x^2+y^2+z^2+t^2 = 1\right\}$$

denklemiyle verilen uzaydır (Kauffman 1986).

3.1.10. Sonuç: Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) X lokal kompakttır.

(2) X bir kompakt uzayın açık alt uzayına homeomorftur.

(3) Herhangi bir $x \in X$ noktası ve x in herhangi bir U komşuluğu için $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ olacak şekilde V açık kümesi vardır ve $\overline{V}$ kompakttır.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$ lokal kompakt hausdorff uzay olan X, wX kompakt hausdorff uzayının $wX - X$ açık alt uzayına homeomorftur.

$(2) \Rightarrow (3)$ Y in kompakt hausdorff uzay olduğunu ve $X \subset Y$ açık bir alt küme olduğunu farz edelim. Hausdorff uzayın alt uzayı hausdorff olduğundan X hausdorfftur. x, X in bir noktası ve $U \subset X$, x in komşuluğu olsun. Bu durumda U, Y de açıktır. Böylece U nun tümleyeni olan $Y - U$ kapalı olup kompakttır. Hausdorff Y uzayında kapalı $\{x\}$ ve $Y - U$ alt kümelerini $x \in V$ ve $Y - U \subset W$ veya $Y - W \subset U$ şeklindeki açık kümelerle ayırabiliriz. V, W dan ayrık olduğu için $Y - W$ kapalı kümesinde bulunur ve böylece $\overline{V} \subset Y - W \subset U$ dur. Burada $\overline{V}$ kompakt Y uzayının kapalı alt kümesi olduğundan kompakttır. V nin X deki kapanışı V nin Y deki kapanışına eşittir. Çünkü V nin Y deki kapanışı $\overline{V}$, U ve X de bulunur.

$(3) \Rightarrow (1)$ x, X in herhangi bir noktası olsun. (3) üncü özellik ile $U = X$ den $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ ve $\overline{V}$ kompakt olacak şekilde V açık kümesi vardır. Böylece X lokal kompakttır (Moller 2003).

3.1.11. Sonuç: (1) Lokal kompakt uzayların kapalı alt kümeleri lokal kompakttır.

(2) Lokal kompakt hausdorff bir uzayın açık veya kapalı alt kümeleri lokal kompakt hausdorfftur.

İspat: (1) X lokal kompakt uzay ve $A \subset X$ kapalı alt uzay olsun. Lokal kompakt uzayın tanımından A lokal kompakttır. $a \in A$ olsun. U açık ve C kompakt olacak şekilde $a \in U \subset C \subset X$ alt kümesi vardır. Bu durumda A da bir komşuluk olan $A \cap U$, ve kompakt bir kümenin kapalı alt kümesi olan $A \cap C$ kompakt kümesi için $A \cap U \subset A \cap C$ dir. Dolayısıyla lokal kompakttır.

(2) X lokal kompakt hausdorff ve $A \subset X$ açık alt uzay olsun. 3.1.10. sonucun ikinci şıkkından A lokal kompakt hausdorfftur.

Lokal kompakt hausdorff uzayın herhangi bir alt uzayının lokal kompakt olması gerekmez. Lokal kompakt uzayların sonlu çarpımı lokal kompakttır ancak herhangi çarpımının lokal kompakt olması gerekmez. Örneğin; $\mathbb{Z}_+^w$ lokal kompakt değildir. Lokal kompakt uzayın açık ve sürekli dönüşüm altındaki görüntüsü lokal kompakttır. Ancak lokal kompakt uzayların sürekli dönüşüm altındaki görüntüsünün lokal kompakt olması gerekmez. İlaveten lokal kompakt uzayın bölüm uzayının lokal kompakt olması gerekmez (Moller 2003).

3.2. Stone-Cech Kompaktlaştırması

3.2.1. Tanım: X uzayının kompaktlaştırması , X yoğun olacak şekilde X i içeren kompakt hausdorff Y uzayıdır. Eğer $\forall x \in X$ için $h(x) = x$ olacak şekilde $h : Y_1 \to Y_2$ homeomorfizmi varsa X in Y_1 ve Y_2 kompaktlaştırması denktir denir (Munkres 1975).

X in kompaktlaştırması olması için X tam regüler olmalıdır. Aksi olarak her tam regüler uzay en az bir kompaktlaştırmaya sahiptir. X in kopaktlamasını elde etmenin bir yolu aşağıdaki gibidir.

X tam regüler olsun. X in kompakt hausdorff Z uzayına $h: X \to Z$ imbedingini seçelim. X_0, Z nin $h(X)$ alt uzayını ve Y_0, Z deki kapanışını belirtsin. Böylece Y_0 kompakt hausdorfftur ve $\overline{X}_0 = Y_0$ dır .Böylelikle X_0, Y_0 ın kompaktlaştırmasıdır.

$(X, Y), (X_0, Y_0)$ çiftine homeomorf olacak şekilde X i içeren Y uzayını inşa edelim. Bazı $k: A \to Y_0 - X_0$ dönüşümleri altında $Y_0 - X_0$ kümesiyle birebir ve üzerine eşlenen X den ayrık A kümesini seçelim. $Y = X \cup A$ ile tarif edelim.

$$\forall x \in X \text{ için } H(x) = h(x)$$
$$\forall a \in A \text{ için } H(a) = k(a)$$

Kuralıyla verilen $H: Y \to Y_0$ birebir ve örten dönüşümünü tarif edelim. Böylece Y uzayında ki U nun açık olması için gerek ve yeter şart $H(U)$ nun Y_0 da açık olmasıdır. H dönüşümü otomatik olarak homeomorfizmdir ve X uzayı Y uzayının alt uzayıdır. Çünkü H, Y nin X alt kümesine kısıtlandığı zaman h homeomorfizmine eşittir. Y uzayına X in h imbedingi ile elde edilmiş kompaktlaştırması denir.

Yukarıdaki inşayı şöyle özetleyebiliriz. $h: X \to Z$ kompakt hausdorff Z uzayında X in imbedingi ise h dan X in Y kompaktlaştırması elde edilir. h imbedingi $H: Y \to Z$ imbedingine genişleyebilme özelliğine sahiptir.

Verilen X uzayının kompaktlaştırmasını elde etmenin pek çok yolu vardır. Örneğin X uzayı olarak $(0,1)$ uzayını düşünelim.

3.2.2. Örnek: $\mathbb{R}^2$ de $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ birim çemberini düşünelim. $h: (0,1) \to S^1$ $h(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ olsun. h imbedingi ile üretilen kompaktlaştırma X in tek nokta kompaktlaştırmasına denktir.

3.2.3. Örnek: Y uzayı $\left[0,1\right]$ olsun. Böylece Y, X in kompaktlaştırmasıdır. $\left(0,1\right)$ in uç noktaları eklenerek elde edilir.

3.2.4. Örnek : $\mathbb{R}^2$ de $\left[-1,1\right]^2$ karesini düşünelim. $h:\left(0,1\right)\to\left[-1,1\right]^2$ $h\left(x\right)=\left(x,\sin\dfrac{1}{x}\right)$ olsun. $Y_0=\overline{h\left(X\right)}$ uzayı topolojicilerin ünlü sinüs eğrisidir. h imbedingi $\left(0,1\right)$ in diğerlerinden oldukça farklı bir kompaktlaştırmasını üretir. $\left(0,1\right)$ in sağında bir nokta ve solundaki noktaların doğrusu eklenerek elde edilir.

Çalışılan kompaktlaştırmalarda karşımıza çıkan temel problem aşağıda verilmiştir.

Y, X in kompaktlaştırmasıysa , X de tanımlı reel değerli f fonksiyonu hangi şartlar altında Y ye sürekli bir şekilde genişler?

f genişleyebilirse, sınırlı olacaktır. Çünkü genişlemesi Y kompakt uzayını $\mathbb{R}$ ye taşıyacaktır. Böylece sınırlı olacaktır. Ancak genelde sınırlılık yeterli değildir. Aşağıdaki örneği düşünelim.

3.2.5. Örnek: Birinci örnekte verilen $X=\left(0,1\right)$ in tek nokta kompaktlaştırmasını düşünelim. $f:\left(0,1\right)\to\mathbb{R}$ sınırlı sürekli fonksiyonunun bu kompaktlaştırmaya genişleyebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{x\to0^+} f\left(x\right) \text{ ve } \lim_{x\to1^-} f\left(x\right)$$

Limitlerinin var ve eşit olmasıdır.

İkinci örnekteki X in iki nokta kompaktlaştırmasında f nin genişleyebilir olması için gerek ve yeter şart bu iki limitin basitçe varlığıdır.

Üçüncü örnekteki kompaktlaştırma için fonksiyonların geniş bir sınıfı için genişleme vardır. Her iki limitin var olması durumunda f fonksiyonunun genişleyebilir olduğunu görmek kolaydır. Ancak $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ fonksiyonu bu kompaktlaştırmaya genişleyebilir. X alt uzayında h a eşit olan, $\mathbb{R}^2$ de Y nin imbedingi H olsun.

Bu durumda bileşke dönüşüm

$$Y \xrightarrow{H} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}$$

olup f nin arzulanan genişlemesidir. Çünkü eğer $\forall x\in X$ ise $\pi_2\left(H(x)\right)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ olacak şekilde $H(x)=h(x)=\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)$ dönüşümünden söz edebiliriz.

Bu son kompaktlaştırma ile ilgili bazı ilginçlikler vardır. Bileşen fonksiyonları x ve $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ olan

$$h:(0,1)\rightarrow\mathbb{R}^2$$

İmbedingini göz önüne alalım. Böylece x ve $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ fonksiyonlarının kompaktlaştırmaya genişleyebileceğini söyleyebiliriz. Bu bize, yukarıda bahsettiğimiz fonksiyonları $(0,1)$ de tanımlı, sınırlı, sürekli tüm fonksiyonların koleksiyonunu alırsak bazı j ler için $\mathbb{R}^j$ de $(0,1)$ in bir imbedinginin bileşen fonksiyonları olarak kullanabileceğimizi ve bu suretle koleksiyondaki her fonksiyon için kompaktlaştırma elde ederek genişletilebileceğini söyler.

Bu fikir Stone-Cech kompaktlaştırmasının arkasındaki temel fikirdir. Bu aşağıdaki şekilde tarif edilir.

X tam regüler uzay olsun. $\{f_\alpha\}_{\alpha\in j}$ de indis kümesi j ile indislenmiş X deki tüm sınırlı, sürekli, reel değerli fonksiyonların koleksiyonu olsun. $\mathbb{R}$ de $\forall\alpha\in j$ için $f_\alpha(X)$ i içeren I_α kapalı aralıklarını seçelim.

$$I_\alpha = \left[ebas\, f_\alpha(X), eküs\, f_\alpha(X)\right]$$

şeklinde tanımlansın. Böylece $h(x)=\left(f_\alpha(x)\right)_{\alpha\in j}$ olmak üzere $h: X\to\prod_{\alpha\in j} I_\alpha$ dönüşümünü göz önüne alalım. Tychonoff teoreminden $\prod_{\alpha\in j} I_\alpha$ kompakttır. X tam regüler olduğu için $\{f_\alpha\}_{\alpha\in j}$ kolleksiyonu X deki kapalı kümelerden noktaları ayırır. Böylece imbeding teoreminden (Munkres 1975) h bir imbedingdir.

h ile elde edilmiş X in kompaktlaştırması Stone-Cech kompaktlaştırması adını alır. Genellikle $\beta(X)$ ile gösterilir.

Birçok matematikçi Stone-Cech kompaktlaştırmasını tarif ederken sıradan bir indis kümesini kullanmaktan kaçınır. Bunun yerine kendi indis kümesi olduğu için X deki sınırlı, sürekli, reel değerli fonksiyonların $\mathbb{F}$ koleksiyonunu kullanır. $j=\mathbb{F}$ ve $f: j\to\mathbb{F}$ ile indislenmiş fonksiyon özdeşlik fonksiyonu olsun. İndislerin bu seçimi tanım için gerekli değildir. Ancak biz notasyon kargaşasına yol açmamak için böyle bir yolu tercih ediyoruz.

3.2.6. Teorem: X tam regüler bir uzay ve $\beta(X)$ de X in Stone-Cech kompaktlaştırması olsun. Bu durumda X deki her sınırlı, sürekli, reel değerli fonksiyon $\beta(X)$ deki sürekli, reel değerli fonksiyona tek bir şekilde genişler.

İspat: $\beta(X)$ kompaktlaştırması yukarıdaki gibi tanımlanan $h: X\to\prod_{\alpha\in j} I_\alpha$ imbedingi ile elde edilsin. Bu $\beta(X)$ in X alt uzayına kısıtlandığında h ya eşit olan

$$H:\beta(X)\rightarrow\prod I_{\alpha}$$

imbedinginin olduğu anlamındadır. X de verilen sınırlı, sürekli, reel değerli bir fonksiyonu bazı $\beta\in j$ ler için f_{β} ya eşittir. Şimdi $\pi_{\beta}:\prod I_{\alpha}\rightarrow I_{\beta}$ β ıncı koordinattaki izdüşüm ise $\pi_{\beta}\circ H:\beta(X)\rightarrow I_{\beta}$ bileşke dönüşümü f_{β} nın istenen genişlemesidir. Çünkü $x\in X$ ise

$$\pi_{\beta}\left(H(x)\right)=\pi_{\beta}\left(h(x)\right)=\pi_{\beta}\left(\left(f_{\alpha}(x)\right)_{\alpha\in j}\right)=f_{\beta}(x)$$

dir.

Genişlemenin tekliği aşağıdaki lemmanın bir sonucudur (Munkres 1975).

3.2.7. Lemma: $A\subset X$ olsun. $f:A\rightarrow Z$ A nın Z hausdorff uzayına sürekli dönüşümü olsun. f nin $g:\overline{A}\rightarrow Z$ sürekli fonksiyonuna en çok bir genişlemesi vardır.

İspat: Farz edelim ki $g,g':\overline{A}\rightarrow X$, f nin farklı iki genişlemesi olsun. $g(x)\neq g'(x)$ olacak şekilde bir x seçelim. $g(x)$ ve $g'(x)$ in ayrık komşulukları sırasıyla U ve U' olsun. $g(V)\subset U$ ve $g'(V)\subset U'$ olacak şekilde x in V komşuluğunu seçelim. $y\in V\cap A$ olsun. Bu durumda $g(y)\in U$ ve $g'(y)\in U'$ dür. Ancak $y\in A$ olduğu için $g(y)=f(y)$ ve $g'(y)=f(y)$ dir. Bu ise U ve U' nün ayrık olmasıyla çelişki yaratır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup f nin bir tek genişlemesi vardır (Munkres 1975).

3.2.8. Teorem: X tam regüler uzay olsun. Y_1 ve Y_2 yukarıdaki genişleme teoreminin özelliklerine sahip X in iki kompaktlaştırması olsun. Bu durumda $\forall x\in X$ için $\phi(x)=x$ olacak şekilde Y_1 den Y_2 ye ϕ homeomorfizmi vardır.

İspat: Birinci adım aşağıdaki gerçeği ispatlayalım. Y yukardaki teoremde yer alan genişleme özellilerine sahip X in bir kompaktlaştırması olsun. Z herhangi kompakt hausdorff uzay ve $g : X \to Z$ herhangi sürekli bir fonksiyonsa g , Y den Z ye sürekli k dönüşümüne genişleyebilir.

Bunu ispat etmek için Z nin tam regüler olduğuna ve böylece bazı j ler için $[0,1]^j$ ye gömülebileceğini göz önüne alalım. Bu durumda $Z \subset [0,1]^j$ olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi $g : X \to Z \subset [0,1]^j \subset \mathbb{R}^j$ dönüşümünü düşünelim. g dönüşümünün her g_α bileşen fonksiyonu X üzerinde sınırlı, sürekli ve reel değerlidir. Hipotezden g_α lar Y den $\mathbb{R}$ ye sürekli k_α dönüşümlerine genişleyebilirler. $k : Y \to \mathbb{R}^j$ dönüşümünü $k(y) = (k_\alpha(y))_{\alpha \in j}$ şeklinde tanımlayalım. $\mathbb{R}^j$ çarpım topolojisi olduğu için k dönüşümü süreklidir. Biz k dönüşümünün Y den Z nin alt uzayına olduğunu ispat etmeliyiz. $g(X), Z$ de olduğu için $k(Y) = g(X)$ dir. Z , $\mathbb{R}^j$ de kapalı olduğu için, $\overline{k(X)} \subset Z$ dir. k nın sürekliliğinden

$$k(Y) = k(\bar{X}) \subset \overline{k(X)}$$

dır.Böylece k , Y den Z yedir.

İkinci adım şimdi teoremi ispat edelim. $j_2 : X \to Y_2$ kaplama dönüşümünü düşünelim. Bu X in kompakt hausdorff Y_2 uzayına sürekli bir dönüşümüdür. Y_1 genişleme özelliklerine sahip olduğu için birinci adımdan j_2, $f_2 : Y_1 \to Y_2$ sürekli dönüşümüne genişler. Benzer olarak $j_1 : X \to Y_1$ kaplama dönüşümüde $f_1 : Y_2 \to Y_1$ sürekli dönüşümüne genişler.(Çünkü Y_1 kompakt hausdorff ve Y_2 de genişleme özelliklerine sahiptir.)

$$\begin{tikzcd} X \subset Y_1 \arrow[d, "j_2"'] \arrow[d, phantom] \\ Y_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \subset Y_2 \arrow[d, "j_1"'] \\ Y_1 \end{tikzcd}$$

$$X \subset Y_1 \xrightarrow{f_2} Y_2 \qquad X \subset Y_2 \xrightarrow{f_1} Y_1$$

Şekil 3.2.1. Kompaktlaştırmalar arasındaki homeomorfizm

$f_1 \circ f_2 : Y_1 \to Y_1$ bileşke dönüşümü $\forall x \in X$ için $f_1\left(f_2\left(x\right)\right) = x$ özelliğine sahiptir. Bu yüzden $f_1 \circ f_2, i_x : X \to X$ özdeşlik dönüşümünün sürekli bir genişlemesidir. Ancak Y_1 in özdeşlik dönüşümü aynı zamanda i_x in sürekli bir genişlemesidir. Genişlemenin tekliğinden $f_1 \circ f_2$, Y_1 in özdeşlik dönüşümüne eşit olmak zorundadır. Benzer olarak $f_2 \circ f_1$ de Y_2 nin özdeşlik dönüşümü olmak zorundadır. Böylece f_1 ve f_2 foksiyonları da homeomorfizmdir (Munkres 1975).

3.2.9. Stone-Cech Kompaktlaştırmasının İnşası

Herhangi bir X topolojik uzayı için $C\left(X\right), X$ den $I = \left[0,1\right]$ kapalı aralığına $j : X \to I$ şeklindeki sürekli dönüşümlerin kümesini belirtsin ve

$$\Delta : X \to \prod_{j \in C(X)} I = \left(C\left(X\right), I\right)$$

dönüşümleri $\forall j \in C\left(X\right)$ için $\Delta\left(x\right)\left(j\right) = j\left(x\right)$ veya $\pi_j \Delta = j$ ile verilen sürekli değer dönüşümleri olsun.

$\left(C\left(X\right), I\right)$ X in alt uzaylarının bir çeşididir. Bu inşa doğaldır. X den Y ye herhangi bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için kümelerin $f^* : C\left(Y\right) \to C\left(X\right)$ kapsama dönüşümü vardır ancak diyagramdaki gibi değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\Delta_x"'] & & Y \arrow[d, "\Delta_y"] \\
\prod_{j \in C(X)} I \arrow[rr, "f^{**}"] \arrow[dr, "\pi_{f^*k} = \pi_{kf}"'] & & \prod_{k \in C(Y)} I \arrow[dl, "\pi_k"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.2. Stone –Cech kompaktlaştırmasının inşası

Burada f^{**} dönüşümü $\left(C(X),I\right)=\prod_{j\in C(X)} I \xrightarrow{f^{**}} \prod_{j\in C(Y)} I=\left(C(Y),I\right)$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu dönüşümün tanımından diyagramın alt kısmındaki üçgen değişmelidir.

$$\pi_k f^{*}\Delta_x=\pi_{kf}\Delta_x=kf=\pi_k\Delta_y f$$

olduğu için üsteki kare değişmelidir. $\beta X=\overline{\Delta(X)}$ olarak alınsın ve $\Delta : X\to\beta X$ dönüşümü $\Delta : X\to\prod_{j\in C(X)} I$ nın βX e kısıtlanışı olarak tarif edilsin. Bu durumda βX kompakt ve hausdorfftur (çünkü $\prod I$ kompakt hausdorff uzayının kapalı alt uzayıdır) ve Δ , βX de görüntüsü ΔX yoğun olan sürekli dönüşümdür ve bu doğaldır. Çünkü $f : X\to Y$ herhangi bir sürekli dönüşüm ve f^{**}, βX den βY ye kaplama dönüşümü için;

$$f^{**}(\beta X)=f^{**}\left(\overline{\Delta_x X}\right)\subset\overline{f^{**}\Delta_x X}=\overline{\Delta_y f(X)}\subset\overline{\Delta_y Y}=\beta Y$$

alınırsa sürekli dönüşümlerin yeni değişmeli bir diyagramı elde edilir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_x"'] & Y \arrow[d, "\Delta_y"] \\ \beta X \arrow[r, "\beta f"'] & \beta Y \end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.3. Sürekli dönüşümlerin değişimli diyagramı

Burada $\beta f : \beta X\to\beta Y$ olup f^{**} ın βX den βY ye kısıtlanışıdır.

Yeni sonuç $X\to\beta X$ dönüşümünün X den kompakt hausdorff uzaya evrensel dönüşüm olduğunu söyler (Moller 2003).

3.2.10. Stone-Cech Kompaktlaştırma Teoremi : X bir topolojik uzay olsun.

1-) $X\to\beta X$ dönüşümü X in kompakt hausdorff uzaya sürekli dönüşümüdür.

2-) X in kompakt hausdorff Y uzayına herhangi bir dönüşümü için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde $\overline{f} : \beta X\to Y$ bir tek sürekli dönüşüm vardır.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & \beta X \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.4. Dönüşümün tekliği

3-) X in tek çarpanı kompakt hausdorff ηX uzayına herhangi bir dönüşümü olacak şekilde $X \to \eta X$ dönüşümünü farz edelim. Aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde $\eta X \to \beta X$ homeomorfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \eta X \arrow[rr, "\simeq"] & & \beta X \end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.5. $\eta X \to \beta X$ homeomorfizmi

4-) X tam regülerse $X \to \beta X$ dönüşümü imbedingdir. X kompakt hausdorff uzaysa $X \to \beta X$ bir homeomorfizmdir.

İspat: (4) Bir imbedingin kısıtlanışı yine bir imbeding olduğu için X tam regülerken $X \to \prod I$ imbeding olup aynı zamanda $X \to \beta X$ dönüşümü de bir imbedingdir. Eğer X kompakt hausdorff uzaysa X normaldir. Böylece X tam regülerdir. $\Delta : X \to \beta X$ in bir imbeding olduğunu görebiliriz. Bu imbedingin görüntüsü kapalı ve yoğundur. Bu durumda imbeding homeomorfizm olduğundan birebir ve örtendir.

(1) ve (2) Y hausdorff uzaysa 4. maddeden Δ_y yukarıdaki diyagramda homeomorfizmdir. Böylece $\overline{f} = \Delta_y^{-1} \circ \beta f$ mümkündür. Ancak bu bileşke sadece X , βX de yoğun olduğu için mümkündür.

(3) X den yukarıdaki evrensel özellikleri sağlayan kompakt hausdorff uzayına bir dönüşüm $X \to \eta X$ olsun. Böylece birbirlerinin tersi olan $\eta X \rightleftarrows \beta X$ sürekli dönüşümleri tek şekilde vardır.

X tam regülerse $X \to \beta X$ kompaktlaştırmadır ve X in Stone-Cech kompaktlaştırması adını alır. Aksine X in kompaktlaştırması varsa bu durumda X bir kompakt uzayın alt uzayına homeomorftur ve böylece tam regülerdir (Moller 2003).

3.2.11. Lemma: X in kompaktlaştırmasının olması için gerek ve yeter şart X in tam regüler olmasıdır (Moller 2003).

Herhangi bir diğer kompaktlaştırması $X \to cX$ için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde $\beta X \to cX$ kapalı bölüm dönüşümü vardır.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \beta X \arrow[rr] & & cX \end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.6. $\beta X \to cX$ kapalı bölüm dönüşümü

$\beta X \to cX$ dönüşümü kapalı ve örtendir. Çünkü görüntüsü kapalı ve yoğundur.

Daha önce aşağıdaki diyagramdaki gibi değişmeli olacak şekilde

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ cX \arrow[rr] & & \alpha X \end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.7. $cX \to \alpha X$ kapalı bölüm dönüşümü

$cX - X$ noktalarını ∞ ye götüren $cX \to \alpha X$ kapalı bölüm dönüşümü olduğunu görmüştük (Moller 2003).

Örneğin; $\mathbb{R}$ nin kompaktlaştırmalarının bölüm dönüşümü vardır

$$\begin{tikzcd}
 & {[0,1]} \arrow[dr] & \\
\beta\mathbb{R} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \alpha\mathbb{R}=S^1 \\
 & C \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.8. $\mathbb{R}$ nin kompaktlaştırmalarının bölüm dönüşümü

Burada $C=\{0\}\times[-1,1]\cup\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right):0<x\leq\pi^{-1}\right\}\cup\{(x,-x):x\in\mathbb{R}\}$ olup $(0,0)$ dan $(\pi^{-1},0)$ a olan yay ile topolojistlerin ünlü kapalı sinüs eğrisinin birbirlerine yaklaşmasıyla elde edilen Warsay çemberidir. Özel olarak $C/[-1,1]=S^1$ dir. Daha genel olarak $\mathbb{R}^n$,n boyutlu Öklit uzayının kompaktlaştırmaları olmak üzere; $\beta\mathbb{R}^n\to[0,1]^n\to\alpha\mathbb{R}^n=S^n$ bölüm dönüşümleri vardır (Moller 2003).

3.2.12. Teorem: K kompakt hausdorff uzay ve $f:X\to K$ sürekli bir dönüşüm ve e bölüm dönüşümü $e:X\to\prod\{I_f:f\in C^*(X)\}$ uzayına $[e(X)]_f=f(x)$ ile tanımlı X in $\prod I_f$ deki imbedingi olmak üzere $F\circ e=f$ olacak şekilde $F:\beta X\to K$ sürekli dönüşümü vardır.

İspat: K Tychonoff uzay olmak üzere e' bölüm dönüşümüyle $\prod\{I_g:g\in C^*(K)\}$ küpüne gömülebilir. Bu durum aşağıdaki diyagramda açıktır.

$$\begin{tikzcd}
\prod I_f & \prod I_g \\
e(X) \arrow[u, phantom, "\cup"] & e'(K) \arrow[u, phantom, "\cup"] \\
X \arrow[u, "e"] \arrow[r, "f"'] & K \arrow[u, "e'"']
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.9. Tychonoff uzayın $\prod\{I_g:g\in C^*(K)\}$ küpüne gömülmesi

$\forall t \in \prod I_f$ için $\left[H(t)\right]_g = t_{g \circ f}$ olan $H : \prod I_f \to \prod I_g$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm her π_p izdüşüm fonksiyonunun sürekliliğinden süreklidir. Gerçekten $\left(\pi_g \circ H\right)(t) = \pi_{g \circ f}(t)$ olup böylece H süreklidir. Şimdi $H, e(X)$ den $e'(K)$ ya dönüşümünü alalım. $e(X)$ in her elemanı için bazı $x \in X$ noktaları için $e(x)$ şeklinde elemanlara sahiptir ve

$$H\left[e(x)\right]_g = \left[e(x)\right]_{g \circ f} = g \circ f(x) = \left[e'\left(f(x)\right)\right]_g$$

dir ve bu yüzden $H\left[e(x)\right] = e'\left(f(x)\right)$ dir. Ama $e(X), \beta X$ de yoğundur. Böylece $H\left[e(X)\right], H\left[\beta X\right]$ de yoğundur. Böylece $e'(K)$ kapalıdır ve $H\left[e(X)\right]$'i içerir. $H\left[\beta X\right] \subset e'(K)$ dir. Son olarak $F = e'^{-1} \circ \left(H/\beta X\right)$ tanımlayalım. Buradan $F : \beta X \to K$ süreklidir ve $F \circ e = f$ dir. Çünkü $x \in X$ için

$$F \circ e(x) = e'^{-1}\left[H\left(e(x)\right)\right] = e'^{-1}\left[e'\left(f(x)\right)\right] = f(x)$$

dir (Willard 1970).

3.2.13. Tanım: (K_1, h_1) ve (K_2, h_2) X 'in iki kompaktlaştırması ve $F \circ h_2 = h_1$ olacak şekilde $F : K_2 \to K_1$ sürekli dönüşümü varsa $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$ yazabiliriz. $h_2(X)$ ve $h_1(X)$ in $h_1 \circ h_2^{-1}$ kanonik homeomorfizminin K_2 ye genişlemesinin F olduğuna dikkat ediniz. Bu durumda $F : (K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$ olarak yazarız.

$$\begin{tikzcd} K_2 \arrow[rr, "F"] & & K_1 \\ & X \arrow[ul, "h_2"] \arrow[ur, "h_1"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.10. Kompaktlaştırmalar arasındaki dönüşüm

Hem $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$ hem de $(K_2, h_2) \leq (K_1, h_1)$ ise (K_1, h_1) ve (K_2, h_2) topolojik denktir (Willard 1970).

3.2.14. Lemma: $H \circ h_2 = h_1$ olacak şekilde K_2 den K_1' e H homeomorfizmi varsa

$\left(K_1,h_1\right)$ ve $\left(K_2,h_2\right)$ X 'in topolojik olarak denk kompaktlaştırmalarıdır. (Willard 1970)

3.2.15. Lemma: $F:\left(K_1,h_1\right)\leq\left(K_2,h_2\right)$ ise bu durumda;

a) $F/h_2\left(X\right), h_1\left(X\right)$ ile $h_2\left(X\right)$ in bir homeomorfizmidir.

b) $F, K_2-h_2\left(X\right)'$ i $K_1-h_1\left(X\right)$ üzerine taşır (Willard 1970).

3.2.16. Teorem: $\left(K_1,h_1\right)$ ve $\left(K_2,h_2\right)$ X in kompaktlaştırmaları ve $\left(K_2,h_2\right)$ yukarıdaki genişleme özelliklerine sahipse $\left(K_1,h_1\right)\leq\left(K_2,h_2\right)$ dir (Willard 1970).

3.2.17. Sonuç: $\left(\beta X,e\right)$ genişleme özellikleriyle topolojik denklik olarak karakterize edilir.

$\beta X, X$ in genişleme özelliklerine sahip tek kompaktlaştırmasıdır. Ayrıca 4.bölümde vereceğimiz $\leq$ bağıntısıyla kısmi sıralanan X in kompaktlaştırmalarının koleksiyonunda en geniş olanıdır.

$X\subset\beta X$ ve $X\subset K$ ise yukarıdaki teoremden F/X özdeşlik olacak şekilde $F:\beta X\rightarrow K$ sürekli dönüşümünü sağlar. Yine yukarıdaki lemmadan $F\left(\beta X-X\right)=K-X$ olur (Willard 1970).

3.2.18. Tanım: A daki her sınırlı, sürekli, reel değerli fonksiyon T ye genişleyebilirse T uzayının A alt kümesi T de C^* gömülebilirdir (Willard 1970).

3.2.12.teoremin sonucu olarak ya da $e\left(X\right)$ deki sınırlı, reel değerli, sürekli fonksiyonların, izdüşüm fonksiyonunun $e\left(X\right)$ e kısıtlanışından $e\left(X\right)$ in βX de C^* a gömüldüğü görülür.

3.2.19. Teorem: $h\left(X\right), K$ da C^{*} gömülmesi olacak şekilde $\left(K,h\right)$**,** X in bir kompaktlaştırması ise $\left(K,h\right)$ X in Stone-Cech kompaktlaştırmasıdır.

İspat: $f: X \rightarrow L$ **,** X den L kompakt hausdorff uzayına sürekli bir dönüşüm olsun. $e: L \rightarrow \prod\limits_{g \in C^{*}(L)} I_g$ L nin bir küpe gömülmesi olsun.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "G"] & \prod I_g \\ X \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"'] & L \arrow[u, "e"'] \end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.11. $\left(K,h\right)$ X in Stone-Cech kompaktlaştırması

Her $g: L \rightarrow I_g$ için $g \circ f \circ h^{-1}: h\left(X\right) \rightarrow I_g$ dönüşümü $h_g: K \rightarrow I_g$ sürekli genişlemesine sahiptir.

$$\left[G\left(t\right)\right]_g = h_g\left(t\right)$$

İle $G: K \rightarrow \prod I_g$ dönüşümünü tarif edelim. $\prod I_g$ nin her π_g izdüşümü için $\pi_g \circ G\left(t\right) = h_g\left(t\right)$ olduğundan G süreklidir. Böylece $\pi_g \circ G$ süreklidir. Üstelik

$$G\left[h\left(x\right)\right]_g = h_g\left(h\left(x\right)\right) = \left(g \circ f \circ h^{-1}\right)\left(h\left(x\right)\right) = g\left[f\left(x\right)\right] = e\left[f\left(x\right)\right]_g$$

olduğu için G , $h\left(X\right)$ i $e\left(L\right)$ içine taşır. Ancak $G\left[h\left(X\right)\right], G\left(K\right)$ da yoğundur ve $e\left(L\right)$ kompakttır. Bu yüzden $G\left(K\right) \subset e\left(L\right)$ dir. Böylece $F = e^{-1} \circ G, K$ yı L ye taşır ve $F \circ h = f$ olur (Willard 1970).

3.3.Hewitt Kompaktlaştırması

Hewitt kompaktlaştırması birçok yönüyle Stone-Cech kompaktlaştırmasına benzer olup, bu kompaktlaştırmada alınan fonksiyonlarda sınırlılık şartı aranmaz. Ayrıca yine bu kompaktlaştırmada Stone-Cech den farklı olarak Y uzayının fonksiyonel tam uzay olması gerekir.

Hewitt kompaktlaştırmasına geçmeden önce bu kompaktlaştırmada kullanacağımız bazı tanımları verelim.

3.3.1.Fonksiyonel Genişleme: $\psi(X), Y$ de yoğun ve $f : X \to \mathbb{R}$ her sürekli fonksiyon için $f = \tilde{f} \circ \psi$ olacak şekilde $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu varsa $\psi : X \to Y$ imbedingine fonksiyonel genişleme denir (Hewitt 1948).

3.3.2.Fonksiyonel Tam Uzay: Her fonksiyonel genişleme homeomorfizmse yani; $\psi(X) = Y$ ise X tam regüler uzayı fonksiyonel tam uzay veya θ-uzayıdır denir (Hewitt 1948).

3.3.3.Hewitt Kompaktlaştırması : X bir tam regüler uzay ve Y de fonksiyonel tam uzay olmak üzere $\psi : X \to Y$ fonksiyonel genişlemesine Hewitt kompaktlaştırması veya Hewitt genişlemesi denir (Hewitt 1948).

Hewitt genişlemesi aynı zamanda $X \cup \{y\}$ ye genişleyebilen $f : X \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonları için βX Stone-Cech kompaktlaştırmasının böyle y noktalarının alt uzayı olarak da tarif edilebilir.

3.4.Wallman Kompaktlaştırması

X , T_1 topolojik uzayı olmak üzere X de kapalı kümelerin B sınıfını göz önüne alalım. Aşağıdaki şartları sağlarsa B tabanına normal taban denir.

1) B ailesi sonlu arakesit ve birleşim işlemine göre kapalıdır.

2) x bir A kapalı kümesinde bulunmuyorsa bu durumda $x \in B \subset X - A$ olacak şekilde bir $B \in$ B vardır

3) $A, B \in$ B, $A \cap B = \varnothing$ ise $A \subset X - C, B \subset X - D, C \cup D = X$ olacak şekilde $C, D \in$ B kümeleri vardır.

Normal taban şartlarını sağlayan bir aile aynı zamanda bir latticedir. Dolayısıyla kapalı kümeleri ayırır. Şimdi X 'in normal tabana sahip T_1 uzay olduğunu kabul edelim. B , X üzerinde bir normal taban olmak üzere, sonlu sayıda F_i kümesi için;

$$F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap ... \cap F_n \neq \varnothing$$

Şartını sağlayan B ’daki kümeler ailelerini düşünelim. Bu kümeler ailesi Wallman tabanı olup Wallman kompaktlaştırmasını sağlayan tabandır. B , X üzerinde bir wallman tabanı olmak üzere şayet $\mathrm{B}_x = \{A \cap X : A \in \mathrm{B}\}$ kümesi kompakt bir kümeye eşitse bu küme X in Wallman kompaktlaştırması adını alır (Biles 1969).

Bu kompaktlaştırmayı aynı zamanda ağlar yardımıylada elde edebiliriz. Normal taban vasıtasıyla filtreye filtreden de ağlara geçebiliriz.

Şimdi normal tabandan $\Im, \mathrm{B}$ -filtresinin elde edilişini inceliyelim. Şöyleki B nin B_1, B_2 kümeleri için $B_1 \cap B_2 \in \mathrm{B}$ ve $B_1 \cup B_2 \in \mathrm{B}$ olup $\Im \subset \mathrm{B}$ için

1) $B_1, B_2 \in \Im$ ise $B_1 \cap B_2 \in \Im$

2) $B_1 \in \Im$ ve $B_1 \subset B_2 \in \mathrm{B}$ ise $B_2 \in \Im$

Şartları sağlanıyorsa $\Im$ ye B filtre denir.

$(x_\lambda), X$ de bir ağ olmak üzere, φ - filtre tabanı $B_{\lambda_0} = \{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$ $\lambda_0 \in \Lambda$ kümesinin elemanlarından oluşuyorsa bu filtreye (x_λ) ağıyla oluşturulan filtre denir (Willard 1970).

Filtreden bir ağ elde edebiliriz. Bunu 3.4.4. tanımda ayrıntılı olarak vereceğiz. Şimdi bu kompaktlaştırmayı ağlar vasıtasıyla elde etmek için yapılan işlemlerden ve bu işlemlerde kullanılan bazı tanımlardan bahsedelim.

3.4.1.Tanım: A, X topolojik uzayındaki sürekli fonksiyonların bir ailesi olsun. $\forall f \in A$ için eğer $\left(f\left(x_i\right)\right)$ yakınsaksa, X deki $\left(x_i\right)$ ağına $A-$ağı adı verilir (Wu and Wu 2005).

3.4.2.Teorem: A, X topolojik uzayındaki sürekli fonksiyonların bir ailesi olsun. Eğer;

1-) $\forall f \in A$ için $f\left(X\right), C_f$ kompakt alt kümesinde bulunuyorsa

2-)Her $A-$ağı X de bir yığılma noktasına sahipse

Bu durumda X kompakttır.

İspat: $\left(x_i\right), X$ de bir ultranet olsun. $\forall f \in A$ için $\left(f\left(x_i\right)\right), C_f$ de ultranettir. Böylece C_f de yakınsaktır. Yani; $\left(x_i\right)$ nin bir $A-$ağı olması ,$\left(x_i\right)$ nin X de bir yığılma noktasına sahip olması anlamındadır. $\left(x_i\right)$ ultra ağ olduğu için x e yakınsar. Böylece X kompakttır. Tersi açıktır (Wu and Wu 2005).

3.4.3. Sonuç: A, X de sınırlı, sürekli, reel değerli fonksiyonların bir ailesi olsun. X in kompakt olması için gerek ve yeter şart her $A-$ağı nın X de bir yığılma noktası olmasıdır.

X herhangi bir topolojik uzay olsun. $C^*\left(X\right) = \left\{ f_\alpha : \alpha \in \Lambda \right\}$ kümeside X de sınırlı, sürekli, reel değerli tüm fonksiyonların ailesi olsun. $C^*\left(X\right)-$ağı olan $\left(x_i\right)$ için;

$$\mathbb{F}_{\{x_i\}} = \left\{ U : U, X \text{ de açık ve } \left(x_i\right) \in U \right\}$$

Kümesinin açık filtre olduğu açıktır ve $\forall f_\alpha \in C^*\left(X\right)$ için $r_\alpha = \lim\left(f_\alpha\left(x_i\right)\right)$ iken $\forall \varepsilon > 0$ için $f_\alpha^{-1}\left(\left(r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon\right)\right) \in \mathbb{F}_{\{x_i\}}$ dır. $\mathbb{F}_{\{x_i\}}$ ye $\left(x_i\right)$ ile oluşturulmuş X de bir açık filtre denir (Wu and Wu 2005).

3.4.4. Tanım: $\mathbb{F}, X$ de bir filtre ise $\Lambda_F = \{(x,F) : x \in F \in \mathbb{F}\}$ olur. $F_2 \subset F_1$ ise $\Lambda_F, (x_1 F_1) \le (x_2, F_2)$ bağıntısıyla sıralanmıştır. Bu durumda $P(x,F) = x$ ile tanımlanan $P : \Lambda_F \to X$ dönüşümü X de bir ağdır. Bu ağa $\mathbb{F}$ de taban ağı denir (Willard 1970).

3.4.5. Teorem : $\mathbb{F}$ deki taban ağı x e yakınsarsa, $\mathbb{F}$ filtresi X de x e yakınsar (Willard 1970).

3.4.6. Sonuç: δ, X de açık filtre olsun. (x_i) δ de taban ağı olsun ve

$$I = \{U : U, X \text{ de açık ve } (x_i) \in \mathrm{U}\}$$

Bu durumda $I = \delta$ dır.

İspat: $(x_i), \delta$ da bir taban ağı olduğu için, δ daki her küme açık olduğundan (x_i) doğal olarak bu açık kümelerin içerisindedir. Bu durumda $\delta \subset I$ dır. $I \subset \delta$ olduğu açıktır.

X de her $(x_i), C^*(X)$_ağı için (x_i) ile doğrulmuş $(w_k^{x_i}), \mathbb{F}_{\{x_i\}}$ açık filtresinde taban ağı olsun. Bu durumda 3.4.4. tanım, 3.4.5. teorem ve 3.4.6. sonuçdan aşağıdaki ifadeler elde edilir.

i) $(w_k^{x_i}), \mathbb{F}_{\{x_i\}}$ ile tek şekilde tanımlanır ve $(w_k^{x_i}) = (w_k^{x_j})$ ise $\mathbb{F}_{\{x_i\}} = \mathbb{F}_{\{x_j\}}$ dır.

ii) $\mathbb{F}_{\{x_i\}} = \mathbb{F}_{\{x_j\}} = \{O : O, X \text{ de açık ve } (w_k^{x_i}) \in O\}$ dur

iii) $(w_k^{x_i})$ $C^*(X)$_ağı dır ve $\forall f_\alpha \in C^*(X)$ için $\lim\{f_\alpha(w_k^{x_i})\} = \lim\{f_\alpha(x_i)\}$ dır.

iv) Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $(w_k^{x_i})$ x e yakınsar.

b) (x_i) x e yakınsar.

c) $\mathbb{F}_{\{x_i\}}$ x e yakınsar.

X de ağ olan $\left(w_k^{x_i}\right)$ ile nokta olan $\left(w_k^{x_i}\right)$ arasında karışıklık çıkmasını önlemek için nokta yerine $\left(w_k^{x_i}\right)^*$ ı kullanacağız.

$Y=\left\{\left(w_k^{x_i}\right):\left(x_i\right), X \text{ de yakınsak olmayan } C^*\left(\mathrm{X}\right)\text{\_ağı ve } \left(w_k^{x_i}\right), \mathbb{F}_{\{x_i\}} \text{de taban ağı olsun}\right\}$

$X^*=X\cup Y$ her $U\subset X$ açık kümesi için $U^*=U\cup\left\{\left(w_k^{x_i}\right)^*:\left(w_k^{x_i}\right)^*\in Y \text{ ve } \left(w_k^{x_i}\right)\in U\right\}$ olmak üzere $U^*\subset X^*$ tarif edilsin. $U\subset V$ ise $U^*\subset V^*$ olduğu açıktır (Wu and Wu 2005).

3.4.7. Lemma: X deki herhangi U ve V açık iki kümesi için ; $\left(U\cap V\right)^*=U^*\cap V^*$ dır.

İspat: $y\in\left(U\cap V\right)^*\cap Y$ olsun. Bu durumda $y=\left(w_k^{x_i}\right)^*$ ve $\left(w_k^{x_i}\right)$ doğal olarak $U\cap V$ dedir. Bu $\left(w_k^{x_i}\right)$ nin hem U da hem de V de olduğu anlamındadır. Böylece $\left(w_k^{x_i}\right)^*\in U^*\cap V^*$ dır.İspatın diğer kısmı için $y\in\left(U^*\cap V^*\right)\cap Y$ ise $y=\left(w_k^{x_i}\right)^*$ ve $\left(w_k^{x_i}\right)$ doğal olarak U da ve V dedir.Böylece $\left(w_k^{x_i}\right)$ doğal olarak $U\cap V$ dedir. Bu durumda $y\in\left(U\cap V\right)^*$ dir (Willard 1970).

3.4.8. Önerme: $\mathrm{B}=\left\{U^*:U, X \text{ de açıktır}\right\}$ olsun. Böylece B, X^* topolojisi için bir tabandır.

İspat: B nin taban olması için ilk şart $X^*\subset\bigcup_{U^*\in\mathrm{B}}U^*$ olmasıdır. $X^*=\left\{U^*:U^*\in\mathrm{B}\right\}$ ve $y\in Y$ olsun. Böylece $y=\left(w_k^{x_i}\right)^*$ dır. Herhangi bir $f_\alpha\in C^*\left(X\right)$ için $r_\alpha=\lim\left\{f_\alpha\left(w_k^{x_i}\right)\right\}$ olarak ele alalım. Bu durumda $\forall\varepsilon>0$ için $\left(w_k^{x_i}\right)$ doğal olarak $f_\alpha^{-1}\left(\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)\right)$ dadır. Yani; $\forall\varepsilon>0$ için $\left(w_k^{x_i}\right)^*$, $f_\alpha^{-1}\left(\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)\right)^*$ dadır.

Böylece $Y \subset \bigcup\{U^* : U^* \in \mathrm{B}\}$ dır. Bu yüzden $X^* \subset \bigcup\{U^* : U^* \in \mathrm{B}\}$ elde edilir. Çünkü $\{U^* : U^* \in \mathrm{B}\}$ açıktır.

Şimdi B nin taban olması için gerekli ikinci şarta bakalım. Herhangi bir U^* ve $V^* \in \mathrm{B}$ için $z \in U^* \cap V^*$ ise $(U \cap V)^*$, B de ve $(U \cap V)^* = U^* \cap V^*$ olduğu için $z \in (U \cap V)^* \subset U^* \cap V^*$ dir.

B tabanıyla doğrulmuş topolojiyle X^* ı düşünelim. Her $f_\alpha \in C^*(X)$ için $f_\alpha^* : X^* \to \mathbb{R}$ dönüşümü $f_\alpha^*(x) = f_\alpha(x)$ şeklinde tanımlansın. $x \in X$ ise $\left(w_k^{x_i}\right)^* \in Y$ için $f_\alpha^*\left(\left(w_k^{x_i}\right)^*\right) = \lim\left\{f_\alpha\left(w_k^{x_i}\right)\right\}$ olup f_α^* nın iyi tanımlı ve X^* üzerinde sınırlı, sürekli, reel değerli bir fonksiyon olduğu açıktır.

3.4.9. Lemma: Herhangi bir $f_\alpha \in C^*(X)$ için f_α^*, X^* üzerinde sınırlı, sürekli, reel değerli bir fonksiyondur.

İspat: X^* da herhangi bir z noktasında f_α^* ın sürekliliğini göstermek için $t_\alpha = f_\alpha^*(z)$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $z \in U^* \subset f_\alpha^{*-1}\left((t_\alpha - \varepsilon, t_\alpha + \varepsilon)\right)$ olacak şekilde $U^* \in \mathrm{B}$ açık kümesi vardır. $U = f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, t_\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ olsun. $z \in X$ ise $f_\alpha^*(z) = f_\alpha(z) = t_\alpha$ olduğu için $z \in f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, t_\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \subset \left(f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, t_\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right)^*$ olur. $z \in Y$ ise $z = \left(w_k^{x_i}\right)^*$ dır. $t_\alpha = f_\alpha^*(z) = \lim\left\{f_\alpha\left(w_k^{x_i}\right)\right\}$ olduğu için bu durumda $\left(w_k^{x_i}\right)$ $f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, t_\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ dadır. Yani; $z = \left(w_k^{x_i}\right)^* \in \left(f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, t_\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right)^*$ dir. Son olarak $\left(f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha-\frac{\varepsilon}{2},t_\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right)^* \subset f_\alpha^{*-1}\left(\left(t_\alpha-\varepsilon,t_\alpha+\varepsilon\right)\right)$ olduğunu gösterelim. Eğer $x\in X\cap\left(f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha-\varepsilon,t_\alpha+\varepsilon\right)\right)\right)^*$ ise $x\in f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha-\frac{\varepsilon}{2},t_\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ dir. Yani; $f_\alpha^*(x)=f_\alpha(x)\in\left(t_\alpha-\varepsilon,t_\alpha+\varepsilon\right)$ dur. Böylece $x\in f_\alpha^{*-1}\left(\left(t_\alpha-\varepsilon,t_\alpha+\varepsilon\right)\right)$ dur. $y\in\left(f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha-\varepsilon,t_\alpha+\varepsilon\right)\right)\right)^*\cap Y$ ise $y=\left(w_k^{x_i}\right)^*$ dır ve $\left(w_k^{x_i}\right)$, $f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha-\frac{\varepsilon}{2},t_\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ dedir.Böylece $f_\alpha^*(y)=\lim\left\{f_\alpha\left(w_k^{x_i}\right)\right\}\in\left[t_\alpha-\frac{\varepsilon}{2},t_\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right]\subset\left(t_\alpha-\varepsilon,t_\alpha+\varepsilon\right)$ olur.Yani; $y\in f_\alpha^{*-1}\left(\left(t_\alpha-\varepsilon,t_\alpha+\varepsilon\right)\right)$

3.4.10. Sonuç: Herhangi bir $f_\alpha\in C^*(X)$ için $t_\alpha\in cl\left(f_\alpha(x)\right)$ olsun. Bu durumda $0<\delta<\varepsilon$ olacak şekilde herhangi bir δ,ε için

$$\left(f_\alpha^{-1}\left(\left(t_\alpha-\delta,t_\alpha+\delta\right)\right)\right)^*\subset f_\alpha^{*-1}\left(\left(t_\alpha-\varepsilon,t_\alpha+\varepsilon\right)\right)$$

olur (Wu and Wu 2005).

3.4.11. Lemma: $k:X\to X^*, k(x)=x$ ile tanımlı olsun. Bu durumda k, X den X^* a sürekli bir fonksiyondur.

İspat: B deki herhangi açık bir U^* kümesi için $k^{-1}\left(U^*\right)=U$ olup U, X de açıktır. Bu yüzden k süreklidir (Wu and Wu 2005).

3.4.12. Sonuç: $\forall f_\alpha\in C^*(X)$ için $f_\alpha^*\circ k=f_\alpha$ dır (Wu and Wu 2005).

3.4.13. Önerme: $y=\left(w_k^{x_i}\right)$ olacak şekilde herhangi bir $y\in X^*-X$ için $\left(k\left(w_k^{x_i}\right)\right), y=\left(w_k^{x_i}\right)^*$ a yakınsar.

İspat: U^*, B de y yi içeren herhangi bir açık küme olsun. Bu durumda $\left(w_k^{x_i}\right)$, X de U dadır. Buradan $\left(k\left(w_k^{x_i}\right)\right)$ nin U^* da olduğu anlaşılır. Böylece $\left(k\left(w_k^{x_i}\right)\right), y=\left(w_k^{x_i}\right)^*$ a yakınsar (Wu and Wu 2005).

3.4.15. Önerme: $k(X), X^*$ da yoğundur.

İspat: $y=\left(w_k^{x_i}\right)^*$ olan X^*-X deki herhangi bir y için yukarıdaki önermeden $\left(k\left(w_k^{x_i}\right)\right), y=\left(w_k^{x_i}\right)^*$ ye yakınsar. Böylece $cl\left(k(X)\right)=X^*$ olur.

Kolaylık olsun diye $\mathcal{C}=\left\{f_\alpha^*:\alpha\in\Lambda\right\}$ kümesi $\left\{f_\alpha^*: f_\alpha\in C^*(X)\right\}$ kümesini belirtsin. X^* uzayındaki herhangi bir $(y_i), \mathcal{C}$ _ağı için $\phi=\left\{O:O, X^*\text{da açık ve } (y_i)\in O\right\}$ ve $\ell=\left\{U:U, X \text{ de açık ve } U^*\in \mathrm{B}\right\}$ olsun (Wu and Wu 2005).

3.4.16. Lemma: X^*daki herhangi bir $(y_i), \mathcal{C}$ _ağı ve $\forall f_\alpha\in\mathcal{C}$ için $r_\alpha=\lim\left\{f_\alpha^*(y_i)\right\}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon>0$ için $f_\alpha^{*-1}\left(\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)\right)\subset\left(f_\alpha^{-1}\left(\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)\right)\right)^*$ dır.

İspat: $z\in f_\alpha^{*-1}\left(\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)\right)$ olsun Bu durumda $f_\alpha^*(z)\in\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)$ olur. $\forall x\in X$ için $z=k(x)=x$ ise $f_\alpha(x)=f_\alpha^*(z)$ olduğu için $x, f_\alpha^{-1}\left(\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)\right)$ da bulunur. Böylece $z\in\left(f_\alpha^{-1}\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)\right)^*$ dır. $z=\left(w_k^{x_i}\right)^*\in Y$ ise $\lim\left\{f_\alpha\left(w_k^{x_i}\right)\right\}=f_\alpha^*(z)\in\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)$ olur. Bu $\left(w_k^{x_i}\right)$ nin $\left(f_\alpha^{-1}\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)\right)$ da olduğunu ima eder. Böylece $\left(w_k^{x_i}\right)^*, \left(f_\alpha^{-1}\left(\left(r_\alpha-\varepsilon, r_\alpha+\varepsilon\right)\right)\right)^*$ dadır (Wu and Wu 2005).

3.4.17. Sonuç: X^* da bulunan (y_i), $\mathcal{C}$ _ağı ve $f_\alpha^* \in \mathcal{C}$ için $r_\alpha = \lim\{f_\alpha^*(y_i)\}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $f_\alpha^{*-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon)) \in \phi$ ve $f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon)) \in \ell$ dir (Wu and Wu 2005).

İspat: $f_\alpha^{*-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon)) \in \phi$ olduğu açıktır. Bir önceki lemmadan yani 3.4.16. dan (y_i) doğal olarak $\left(f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon))\right)^*$ dedir. Böylece $f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon)) \in \ell$ dir (Wu and Wu 2005).

3.4.18. Lemma: ℓ ve ϕ sırasıyla X de ve X^* da açık filtrelerdir.

İspat: 3.4.7.lemmanın ispatından ve 3.4.17. sonuçdan ϕ nin X^* da açık filtre olduğu görülür.3.4.17.den $\ell \neq \emptyset$ dir. U ve V, ℓ de açık kümelerse U^* ve V^*, ϕ dedir. $(U \cap V)^* = U^* \cap V^*$ ve $U^* \cap V^* \in \phi$ olduğu için buradan $U \cap V \in \ell$ dir. W açık kümeleri ve bazı $O \in \ell$ ler için $O \subset W$ ise $O^* \subset W^*$ dır ve $W^* \in \phi$ olup $W \in \ell$ dir (Wu and Wu 2005).

3.4.19. Önerme: (y_i), $\mathcal{C}$ _ağı X^* da yakınsaktır.

İspat: (w_k), ℓ nin taban ağı olsun. Çünkü $\forall \alpha \in \Lambda$ ve her $\varepsilon > 0$ için $r_\alpha = \lim\{f_\alpha^*(y_i)\}$ iken $f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon))$, ℓ 'dedir. Böylece $\forall \alpha \in \Lambda$ için $(f_\alpha(x_k))$, r_α ya yakınsar. Yani; (w_k) bir $C^*(X)$ _ağıdır. Bu ağla doğrulan $\mathbb{F}_{\{x_i\}}$ açık filtresi tam olarak ℓ dir. Öyleyse $(w_k^{w_k})$, $\mathbb{F}_{\{x_i\}}$ taban ağıdır. Buradan $(w_k) = (w_k^{w_k})$ dır.

1.Durum: (w_k) X de bir p noktasına yakınsar ise, U^*, $k(p)$ yi içeren B de bir açık küme olsun. Bu durumda p, U dadır ve U, X de açıktır. (w_k), p ye yakınsadığı için 3.4.5.teoremden U açığının ℓ de olduğu anlaşılır. Böylece U^*, ϕ dedir. Buda bize X^* da (y_i) nin $k(p)$ ye yakınsadığını anlatır.

2.Durum: (w_k) X de yakınsamazsa ,$(w_k)^* = \left(w_k^{w_k}\right)^*$ olup Y de bulunur. $\left(w_k^{w_k}\right)^*$ i içeren B de herhangi bir U^* için $\left(w_k^{w_k}\right)$ doğal olarak X de U dadır. 3.4.6. sonuçdan U nun ℓ de olduğu anlaşılır ve bu yüzden U^*,B dedir. Böylece (y_i), X^* da $(w_k)^* = \left(w_k^{w_k}\right)^*$ a yakınsar (Wu and Wu 2005).

3.4.20. Teorem: $(X^*, k), X$ in kompaktlaştırmasıdır.

İspat: $\mathcal{C}, X^*$ da sınırlı, sürekli, reel değerli fonksiyonların koleksiyonu ve $\forall (y_i), \mathcal{C}$ -ağı X^* a yakınsadığı için 3.4.3 den X^* ın kompakt olduğu anlaşılır. Bu durumda 3.5.15. önermeden $(X^*, k), X$ 'in kompaktlaştırması olduğu anlaşılır (Wu and Wu 2005).

3.4.21.Sonuç: $C(X^*), X^*$ ın reel değerli, sürekli fonksiyonlarının kümesi olsun. Bu durumda $C(X^*) = \mathcal{C} = \left\{ f_\alpha^* : f_\alpha \in C^*(X) \right\}$ olur.

İspat: $g \in C(X^*)$ olsun. X^* kompakt olduğu için $g \circ k \in C^*(X)$ dır. 3.4.12. lemma ve 3.4.14. önerme ile g nin sürekliliğinden $\forall \left(w_k^{x_i}\right)^* \in Y$ için

$$(g \circ k)^* \left(\left(w_k^{x_i}\right)^* \right) = \lim \left\{ (g \circ k)\left(w_k^{x_i}\right) \right\} = \lim \left\{ g\left(k\left(w_k^{x_i}\right)\right) \right\} = g\left(\lim \left\{ k\left(w_k^{x_i}\right) \right\}\right) = g\left(\left(w_k^{x_i}\right)^* \right)$$

elde ederiz. $\forall x \in X$ için $(g \circ k)^* (k(x)) = (g \circ k)^* (x) = g(k(x))$ olup böylece $C(X^*) \subset \mathcal{C}$ dir. Bu yüzden $C(X^*) = \mathcal{C} = \left\{ f_\alpha^* : f_\alpha \in C^*(X) \right\}$ dir (Wu and Wu 2005).

X bir hausdorff uzay $,\gamma X$ de X deki bütün kapalı ultra filtrelerin bir kolleksiyonu olsun. Her $D \subset X$ kapalı kümesi için $D^* = \{\mathbb{F} \in \gamma X : D \in \mathbb{F}\}$ olmak üzere $D^* \subset \gamma X$ kümesi tarif edilsin. $\{D^* : D, X \text{ in kapalı alt kümesi}\}$ olarak tanımlanan kümeler ailesi γX deki topolojinin kapalı kümeleri için bir taban olsun. $\mathbb{F}_x, X$ de x noktasına yakınsayan kapalı bir ultra filtre olmak üzere $h(x) = \mathbb{F}_x$ ile $h : X \to \gamma X$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $(\gamma X, h), X$ in Wallman kompaktlaştırması adını alır. (X^*, k) önceki bölümde bahsedilen işlemler sonucu elde edilmiş X in kompaktlaştırması olsun.

3.4.22. Lemma : $\mathbb{F}, X$ de bir filtre olsun. Herhangi bir $f_\alpha \in C^*(X)$, $\varepsilon > 0$ ve $\forall F \in \mathbb{F}$ için; $f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon)) \cap F \neq \varnothing$ olacak şekilde $cl(f_\alpha(X))$ de bir r_α vardır.

İspat: Kabul edelim ki yukarıdaki ifademiz doğru olmasın, bu halde
$cl(f_\alpha(X))$ deki $\forall r_t$ için $f_\alpha^{-1}((r_t - \varepsilon_t, r_t + \varepsilon)) \cap F_t = \varnothing$ olacak şekilde $\varepsilon_t > 0$ ve $F_t \in \mathbb{F}$ vardır. $cl(f_\alpha(X))$ kompakt ve $cl(f_\alpha(X)) \subset \bigcup\{(r_t - \varepsilon_t, r_t + \varepsilon_t) : r_t \in cl(f_\alpha(X))\}$ olduğu için $f_\alpha^{-1}(cl(f_\alpha(X))) \subset \bigcup\{f_\alpha^{-1}((r_i - \varepsilon_i, r_i + \varepsilon_i)) : i = 1, ..., n\}$ olacak şekilde $cl(f_\alpha(X))$ de $r_1, r_2, ..., r_n$ vardır. Yani; $X = \bigcup\{f_\alpha^{-1}((r_i - \varepsilon_i, r_i + \varepsilon_i)) : i = 1, ..., n\}$ dir.
$F_0 = \bigcap\{F_i : i = 1, ..., n\}$ olsun. Bu durumda
$F_0 = F_0 \cap X \subset \bigcup\{(f_\alpha^{-1}((r_i - \varepsilon_i, r_i + \varepsilon_i)) \cap F_i) : i = 1, ..., n\} = \varnothing$ dır. $F_0 = \varnothing$ olması $\mathbb{F}$ nin filtre olmasıyla çelişki oluşturur. Demek ki kabulümüz yanlış yukarıdaki ifade doğrudur (Wu and Wu 2005).

$F \subset U$ olacak şekilde $F \in \mathbb{F}$ varsa , $\mathbb{F}$ kapalı ultra filtresi U dadır denir.

3.4.23. Lemma: $\mathbb{F}, X$ de kapalı ultra filtre olsun. X deki herhangi bir U açık kümesi ve $\forall F \in \mathbb{F}$ için $U \cap F \neq \varnothing$ ise $F_0 \subset U$ olacak şekilde bir $F_0 \in \mathbb{F}$ vardır. Yani; $\mathbb{F}, U$ dadır.

İspat: $\forall F \in \mathbb{F}$ için $F \not\subset U$ ise, bu durumda $(X-U)$ kapalıdır ve $(X-U)\cap F \neq \varnothing$ dur. $\mathbb{F}$ kapalı ultra filtre olduğu için $(X-U)$,$\mathbb{F}$ dedir. Böylece $\forall F \in \mathbb{F}$ için $U \cap F \neq \varnothing$ olması $U \cap (X-U) = \varnothing$ olması ile çelişki yaratır. Bu durumda kabulümüz yanlış $F \subset U$ olup $\mathbb{F}, U$ dadır (Wu and Wu 2005).

3.4.24. Sonuç: $\mathbb{F}, X$ de kapalı ultra filtre olsun. $\forall f_\alpha \in C^*(X)$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\mathbb{F} \in f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon))$ olacak şekilde $r_\alpha \in \mathbb{R}$ vardır.

İspat: 3.4.22.den $\forall f_\alpha \in C^*(X)$,$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall F \in \mathbb{F}$ için $f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon)) \cap \mathbb{F} = \varnothing$ olacak şekilde $r_\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece 3.4.23. lemmadan $F_0 \subset f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon))$ olacak şekilde $F_0 \in \mathbb{F}$ var olduğu anlaşılır. Buradan $\forall \varepsilon > 0$ için $\mathbb{F} \in f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon))$ olur (Wu and Wu 2005).

$L_F = \{O : O, X$ de açık ve $\mathbb{F} \in O\}$ olsun. $L_F, \mathbb{F}$ tarafından tanımlanmış tek açık ultra filtre olduğu açıktır ve L_F ye $\mathbb{F}$ ile doğrulmuş açık filtre denir.

3.4.25. Önerme : L_F açık filtresinin taban ağı olan $(w_k^{\mathbb{F}})$ bir $C^*(X)$_ağıdır.

İspat: 3.4.24 den $\forall f_\alpha \in C^*(X)$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon)) \in L_F$ olacak şekilde r_α sayısı olduğunu biliyoruz. Bu durumda 3.4.5. teoremin sonucundan $\forall f_\alpha \in C^*(X)$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $(w_k^{\mathbb{F}}) \in f_\alpha^{-1}((r_\alpha - \varepsilon, r_\alpha + \varepsilon))$ olduğu anlaşılır. Böylece $\forall f_\alpha \in C^*(X)$ için $\lim\{f_\alpha(w_k^{\mathbb{F}})\} = r_\alpha$ olur. Yani, $(w_k^{\mathbb{F}})$ bir $C^*(X)$_ağıdır.

$\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ iki farklı kapalı ultra filtre olmak üzere $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$ ise $L_{\mathbb{F}_1} = L_{\mathbb{F}_2}$ olup böylece $(w_k^{\mathbb{F}_1}) = (w_k^{\mathbb{F}_2})$ dir.

Şimdi $G:\gamma X \to X^{*}$ $G(F_x)=x$ olarak tanımlansın. Bu dönüşüm bir imbeding olup aşağıdaki teoremin elde edilmesini sağlar.

3.4.26. Teorem: X hausdorff uzaysa X in $(\gamma X, h)$ Wallman kompaktlaştırması X in (X^{*}, k) kompaktlaşmasına gömülebilir (Wu and Wu 2005).

3.5. Fan –Gottesman Kompaktlaştırması

Aşağıdaki üç özelliği sağlayan β tabanını düşünelim.

1-) $A, B \in \beta$ ise $A \cap B \in \beta$

2-) $A \in \beta$ ise $X - \overline{A} \in \beta$

3-) X nin herhangi bir U açığı ve $\overline{A} \subset U$ olacak şekilde her $A \in \beta$ için $\overline{A} \subset B \subset \overline{B} \subset U$ olan bir $B \in \beta$ vardır.

Bu özellikleri sağlayan β ya normal taban denir. Normal tabana sahip, regüler X uzayı her zaman X^{*} kompakt hausdorff uzayına yoğun olarak gömülebilir.

X nin β normal tabanına sahip regüler uzay olduğunu farz edelim.

3.5.1. Lemma: X nin herhangi bir U açığı ve $A_i \in \beta$ sonlu kümesi için $(1 \le i \le n)$

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_n} \subset U$$

oluyorsa

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_n} \subset B \subset \overline{B} \subset U$$

olacak şekilde $B \in \beta$ vardır.

İspat: n için ispatlayalım. Hipotezden

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\ldots\cap\overline{A_{n-1}}\subset U\cup\left(X-\overline{A_n}\right)$$

yazabiliriz. Kabulümüzden $\overline{A_n}\subset U\cup\left(X-\overline{C}\right)$ iken

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\ldots\cap\overline{A_{n-1}}\subset C\subset\overline{C}\subset U\cup\left(X-\overline{A_n}\right)$$

olacak şekilde $C\in\beta$ vardır. Diğer taraftan

$$\overline{A_n}\subset D\subset\overline{D}\subset U\cup\left(X-\overline{C}\right)$$

şartını sağlayan $D\in\beta$ alalım. Bu durumda $B=C\cap D$ istenilen özelliği sağlar.

β da bir binding ailesi sonlu sayıda A_i kümesi için;

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\neq\varnothing$$

olacak şekilde β nin boş olmayan kümeler ailesidir. Zorn lemmasından β daki her binding ailesi en az bir maksimal binding ailesinde bulunur. Maksimal binding ailesi $x^*, y^*,\ldots$ harfleriyle gösterilir. X^* ile β daki tüm maksimal binding ailelerinin kümesini gösterelim (Fan and Gottesman 1952).

3.5.2. Lemma : $A\in\beta$ ve $x^*\in X^*$ olsun. Eğer $A\notin x^*$ ise $X-A\in x^*$ dır ve $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$ boş olacak şekilde $B\in x^*$ vardır.

İspat: $A\notin x^*$ ise $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\ldots\cap\overline{A_n}=\varnothing$ $\quad(1\le i\le n)$ olacak şekilde $A_i\in x^*$ sonlu kümeleri vardır. 3.5.1.lemmadan

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\subset B\subset\overline{B}\subset X-\overline{A}$$

olacak şekilde $B\in\beta$ vardır. x^* ın maksimalliğinden $B\in\beta$, $A_i\in x^*$ $\left(1\le i\le n\right)$ olup

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\subset B$$

olması $B\in x^*$ olduğunu gösterir. $B\in x^*$ olması $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$ ile ispatlanır. $B\in x^*$ ve $B\subset X-\overline{A}$ olduğundan $X-A\in x^*$ elde edilir. $\forall A\in\beta$ için

$$\psi\left(A\right)=\left\{x^*\in X^*:\overline{B}\subset A \text{ olan } B\in x^*\right\}$$

olarak tanımlayalım (Fan and Gottesman 1952).

3.5.3. Lemma : $\psi(X)=X^*, \psi(A)=\varnothing$ olması için gerek ve yeter şart $A=\varnothing$ olmasıdır.

İspat: $\psi(X)=X^*, \psi(\varnothing)=\varnothing$ olduğu aşikârdır. Eğer $A\neq\varnothing$ ise X regüler olduğu için $\overline{B}\subset A$ ve $B\neq\varnothing$ olacak şekilde $B\in\beta$ vardır. Zorn lemmasından $B\in x^*$ olacak şekilde $x^*\in X^*$ vardır. Buradan $x^*\in\psi(A)\neq\varnothing$ olur (Fan and Gottesman 1952).

3.5.4. Lemma : $A,B\in\beta$ için

$$\psi(A\cap B)=\psi(A)\cap\psi(B)$$

dir. $\psi(A)\cap\psi(B)=\varnothing$ olması için gerek ve yeter şart $A\cap B=\varnothing$ olmasıdır.

İspat: İlk eşitlikten ve 3.5.3.lemmadan aşağıdaki ifadeler elde edilebilir. Alt küme tanımından $\psi(A\cap B)\subset\psi(A)\cap\psi(B)$ olduğu aşikârdır. Biz $\psi(A)\cap\psi(B)\subset\psi(A\cap B)$ olduğunu göstermeliyiz. $x^*\in\psi(A)\cap\psi(B)$ olsun. Bu durumda $\overline{C}\subset A, \overline{D}\subset B$ olacak şekilde $D\in x^*, C\in x^*$ vardır.3.5.3 den $\overline{C}\subset E\subset\overline{E}\subset A, \overline{D}\subset F\subset\overline{F}\subset B$ olacak şekilde $E,F\in\beta$ vardır. $\overline{C}\cap\overline{D}\cap E\cap F\in\beta$ ve $C\in x^*, D\in x^*$ olduğu göz önüne alınırsa $E\cap F\in x^*$ elde ederiz. $\overline{E\cap F}\subset A\cap B$ olacak şekilde $x^*\in\psi(A\cap B)$ vardır.

$\psi(X)=X^*$ ve 3.5.4. den X^* topolojisi için bir taban $\beta^*=\{\psi(A):A\in\beta\}$ olarak alabiliriz (Fan and Gottesman 1952).

3.5.5. Lemma : X^* bir hausdorff uzaydır.

İspat: $x^* \neq y^*$ ve $x^*, y^* \in X^*$ olsun. Bu durumda $A \notin y^*$ olacak şekilde $A \in x^*$ alalım. 3.5.2.den $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ olacak şekilde $B \in y^*$ vardır. $\overline{A} \subset C \subset \overline{C} \subset R - \overline{B}$ olacak şekilde $C \in \beta$ alalım. $D = R - \overline{C}$ olsun. Bu durumda $D \in \beta$ dir. $A \in x^*$ ve $\overline{A} \subset C$ olması $x^* \in \psi(C)$ olduğunu gösterir. Benzer olarak $B \in y^*$ ve $\overline{B} \subset D$ olması $y^* \in \psi(D)$ olduğunu gösterir. $C \cap D = \varnothing$ olduğundan 3.5.4. dan $\psi(C)$ ve $\psi(D)$ de x^* ve y^* ın ayrık komşuluklarıdır (Fan and Gottesman 1952).

3.5.6. Lemma : $x^* \in X^*$ ve $A \in \beta$ için ; $x^* \in \overline{\psi(A)}$ olması için gerek ve yeter şart $A \in x^*$ olmasıdır.

İspat: $A \in x^*$ olduğunu kabul edip $x^* \in \overline{\psi(A)}$ olduğunu gösterelim. $B \in \beta$ olmak üzere x^* ın bir $\psi(B)$ taban komşuluğunu düşünelim. $\psi(A) \cap \psi(B) \neq \varnothing$ olduğunu ispat edelim $x^* \in \psi(B)$ den $\overline{C} \subset B$ olan $C \in x^*$ vardır. $A \in x^*$ olduğu için $\overline{A} \cap \overline{C} \neq \varnothing$ elde ederiz ve böylece $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$ olup $A \cap B \neq \varnothing$ ve $\psi(A) \cap \psi(B) \neq \varnothing$ olur.

$A \notin x^*$ olduğunu farz edelim. Bu durumda $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ olan $B \in x^*$ vardır. Buradan $\overline{B} \subset C \subset \overline{C} \subset X - \overline{A}$ olacak şekilde $C \in \beta$ elde edilir.Bu durumda $x^* \in \psi(C)$ ve $\psi(A) \cap \psi(C) = \varnothing$ elde edilir.Buradan $x^* \notin \overline{\psi(A)}$ dır (Fan and Gottesman 1952).

3.5.7. Lemma : $\mathbb{C} = \left\{ X^* - \overline{\psi(A)} : A \in \beta \right\}$ kümesi X^* ın bir tabanıdır.

İspat: $x^* \in X^*$ ve $x^* \in \psi(B)$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ verilsin. Bu durumda $x^* \in X^* - \overline{\psi(A)} \subset \psi(B)$ olacak şekilde bir $A \in \beta$ bulabiliriz. $x^* \in \psi(B)$ olduğu için $\overline{C} \subset B$ olan $C \in x^*$ vardır. $\overline{C} \subset D \subset \overline{D} \subset B$ olacak şekilde $D \in \beta$ alalım. Bu durumda $A \in \beta$ dır. A nın yukarıdaki altküme bağıntısını sağladığını iddia edelim. $C \in x^*$ ve $\overline{A} \cap \overline{C} = \varnothing$ olduğundan $A \notin x^*$ yazabiliriz ve 3.5.6 dan $x^* \in X^* - \overline{\psi(A)}$ yazarız.Herhangi bir $y^* \in X^* - \overline{\psi(A)}$ noktasını düşünelim.Yine 3.5.6 dan $A \notin y^*$ yazabiliriz ve böylelikle 3.5.2 den $X - \overline{A} \in y^*$ dır. Bunlarla birlikte $\overline{X - A} \subset \overline{D} \subset B$ ve $y^* \in \psi(B)$ elde edilir.Bu durumda $X - \overline{\psi(A)} \subset \psi(B)$ yazarız (Fan and Gottesman 1952).

3.5.8. Lemma : X^* kompakttır.

İspat: Tersini kabul edelim. Farz edelim ki ϑ^*, X^* ın sonlu alt örtüsü olmayan bir açık örtüsü olsun.3.5.7 den $\forall x^* \in X^*$ için $U^*(x^*) \in \vartheta^*$ kümesi ve $x^* \in X^* - \overline{\psi(A(x^*))} \subset U^*(x^*)$ olacak şekilde bir $A(x^*) \in \beta$ kümesi bulabiliriz.

X^* ın sonlu $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ noktalarını düşünelim.

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left[X^* - \overline{\psi\left(A\left(x_i^*\right)\right)} \right] \neq X^*$$

veya

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\psi\left(A\left(x_i^*\right)\right)} \neq \varnothing$$

yazarız.Şayet y^* bu arakesitte bir noktaysa 3.5.6 dan $A(x_i^*) \in y^*$ $(1 \le i \le n)$ elde ederiz ve böylece $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A(x_i^*)} \neq \varnothing$ olur. Son bağıntıdan X^* ın sonlu sayıda x^* noktalarını elde ederiz. Böylece $\{A(x^*) : x^* \in X^*\}$ ailesi β üzerinde bir binding ailesidir.Zorn lemmasından β da bir maksimal binding ailesi bulunur.Başka bir deyişle $\forall x^* \in X^*$ için $A(x^*) \in a^*$ olacak şekilde $a^* \in X^*$ noktası vardır.Özel olarak $A(a^*) \in a^*$ yazarız ve

3.5.6 dan $a^* \in \overline{\psi\left(A\left(a^*\right)\right)}$ olup yukarıdaki ifadeyle çelişir.Dolayısıyla kabulümüz yanlış X^* kompakttır.

X yi X^* a gömmek için $\forall x \in X$ için;

$$\varphi(x) = \left\{A \in \beta : x \in \overline{A}\right\}$$

Tanımlayalım. $\varphi(x) \in X^*$ olduğu açıktır (Fan and Gottesman 1952).

3.5.9. Lemma : $\varphi^{-1}\left[\varphi(A)\right] = A \quad (\forall A \in \beta)$

İspat: X regüler olduğu için $x \in A, x \in \overline{B} \subset A$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ vardır. Yani; $\overline{B} \subset A$ olacak şekilde bir $B \in \varphi(x)$ vardır. Böylece $x \in A$ olması için gerek ve yeter şart $\varphi(x) \in \varphi(A)$ olmasıdır (Fan and Gottesman 1952).

3.5.10. Lemma : φ, X den X^* a bir topolojik dönüşümdür. $\varphi(X), X^*$ da yoğundur.

İspat: $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. X in regülerliğinden $\overline{B} \cap \overline{C} = \varnothing$ olacak şekilde $C \in \varphi(y), B \in \varphi(x)$ vardır. Tabiî ki $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ dir. Böylece φ birebirdir. φ nin sürekliliği ve tersi 3.5.9 dan anlaşılır.Aynı lemmadan boştan farklı her $A \in \beta$ için $\varphi(R) \cap \varphi(A) = \varphi(A) \neq \varnothing$ olup böylece $\varphi(X), X^*$ da yoğundu (Fan and Gottesman 1952).

3.5.11.Teorem : X, regüler uzayı β normal tabanına sahipse X, X^* kompakt hausdorff uzayının yoğun alt uzayına homeomorftur. X^* ın noktaları β da maksimal binding ailesindedir. Ve X^* ın β tabanı 3.5.4 deki β^* tabanıyla tanımlanır.

X, in Fan-Gottesman kompaktlaştırması olan X^*, β normal tabanının seçimine bağlı olduğu için β kompaktlaştırması da denir (Fan and Gottesman 1952).

3.5.12. Uyarı: Tüm kapanışının içi kendisine eşit olan kümelerin ailesi $\mathbb{C}, \beta$ da ise $\mathbb{C}$ nin X nin normal tabanı olduğunu göstermek kolaydır ve X nin $\mathbb{C}$ kompaktlaştırması β kompaktlaştırmasına homeomorftur.

3.5.13. Teorem : R_1, R_2 iki kompakt hausdorff uzay ve β_1 ve β_2 de sırasıyla R_1 ve R_2 nin normal tabanları olsun. Eğer her $A \in \beta_1$ için

$$\theta\left(R_1 - \overline{A}\right) = R_2 - \overline{\theta(A)}$$

ve $A_i \in \beta_1$ $\left(1 \le i \le n\right)$ sonlu sayıdaki kümesi için $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = R_1$, $\bigcup_{i=1}^{n} \theta(A_i) = R_2$ ye denk olacak şekilde β_1 den β_2 ye birebir bir θ dönüşümü varsa R_1 ve R_2 homeomorftur.

X normal hausdorff uzay olsun ve β da X nin bütün açık kümelerinin bir ailesi olsun. β nın X nin normal tabanı olduğu açıktır. X in Fan-Gottesman kompaktlaştırmasını X^* ile Wallman kompaktlaştırmasınıda wX gösterelim. wX uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\mathbb{F}, X$ nin kapalı alt kümelerinin bir ailesi olsun. wX uzayının x' noktası $F_i \in x'$ olan sonlu sayıdaki $F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n \ne \varnothing$ olacak şekilde $\mathbb{F}$ nin kümeler ailesidir. Ayrıca x' bu özelliğe göre maksimaldir.

$\forall F \in \mathbb{F}$ için

$$\tau\left(F\right) = \left\{x' \in wX : F \in x'\right\}$$

olsun. Bu durumda wX nün topolojisi kapalı kümelerin çarpılabilir tabanı olarak

$$\mathbb{F}' = \left\{\tau\left(F\right) : F \in \mathbb{F}\right\}$$

Şeklinde tarif edilir. (Fan and Gottesman 1952)

3.5.14. Lemma: Her $x^* \in X^*$ noktası için

$$\left\{\overline{A} : A \in x^*\right\} \subset x'$$

olacak şekilde wX in $x' = \pi\left(x^*\right)$ tek noktası vardır.

π, X^* dan wX e birebir bir eşlemedir.

İspat: $x^* \in X^*$ verilsin. Yukarıdaki durumu sağlayan en az bir $x' \in wX$ bulunduğu açıktır. Farz edelim ki iki farklı x', y' noktaları bulunsun. $E \in x', F \in y'$ ve $E \cap F = \varnothing$ olacak şekilde X nin E, F iki kapalı kümesini alalım. X normal olduğundan $E \subset U, F \subset V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde X nin U ve V açık kümelerini bulabiliriz. $E \in x', E \subset U$ olduğundan 3.5.14 ve $U \in x^*$ olup $\overline{U} \in x'$ yazabiliriz. Benzer olarak $V \in x^*$ yazabiliriz. Ancak $U \in x^*, V \in x^*$ ve $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ olması bir çelişkidir. Bu $x' = \pi\left(x^*\right)$ ile tanımlı olduğunu gösterir. x^* ve y^*, X^* ın iki ayrık noktası olsun. $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ olacak şekilde $A \in x^*, B \in y^*$ vardır. $\overline{A} \in \pi\left(x^*\right), \overline{B} \in \pi\left(y^*\right)$ dır ve böylece $\pi\left(x^*\right) \neq \pi\left(y^*\right)$ dır.Bu halde π birebirdir.

π nin wX üzerine olduğunu ispat etmek için $\forall x' \in wX$ için β da $\left\{A \in \beta : \overline{A} \in x'\right\}$ binding ailesinin maksimal binding ailesi olduğunu göstermek yeterlidir. Başka deyişle $\overline{B} \notin x'$ olacak şekilde $B \in \beta$ verilsin.Bu durumda $\overline{C} \in x'$ olacak şekilde $C \in \beta$ bulabiliriz ve $\overline{B} \cap \overline{C} = \varnothing$ olur.Şimdi $\overline{B} \notin x'$ dan $\overline{B} \cap F = \varnothing$ olan $F \in x'$ vardır. $F \subset C \subset \overline{C} \subset X - \overline{B}$ olacak şekilde $C \in \beta$ ise $C, \overline{C} \in x'$ ve $\overline{B} \cap \overline{C} = \varnothing$ özelliklerini sağlar (Fan and Gottesman 1952).

3.5.15. Lemma : $x^* \in X^*$ ve $F \in \mathbb{F}$ için $x^* \in \psi\left(X - F\right)$ olması için gerek ve yeter şart $\pi\left(x^*\right) \in wX - \tau\left(F\right)$ olmasıdır.

İspat: Farz edelim ki $\pi\left(x^*\right) \in wX - \tau(F)$ olsun.Bu durumda $\tau(F)$ in tanımından $F \notin \pi\left(x^*\right)$ dır. $E \cap F = \varnothing$ olan $E \in \pi\left(x^*\right)$ vardır. $E \subset A \subset \overline{A} \subset X - F$ olacak şekilde R nin A açık kümesi olsun.Bu durumda $E \in \pi\left(x^*\right)$ ve $E \subset A$ dan $\overline{A} \subset X - F$ olan $A \in x^*$ ifadesi $x^* \in \psi(X - F)$ verir.

Aksine $x^* \in \psi(X - F)$ ise $\overline{A} \subset X - F$ olan $A \in x^*$ vardır. $\overline{A} \in \pi\left(x^*\right)$ ve $\overline{A} \cap F = \varnothing$ elde ederiz.bu durumda $F \in \pi\left(x^*\right)$ olup $\tau(F)$ in tanımından $\pi\left(x^*\right) \in wX - \tau(F)$ tir.

3.5.14 ve 3.5.15 den π, X^* dan wX ne birebir, sürekli, bir dönüşümdür. X^* ve wX her ikiside kompakt hausdorff uzay olduğu için π homeomorfizmdir (Fan and Gottesman 1952).

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.Kompaktlaştırmalar Arasındaki Büyüklük Küçüklük

4.1.1 Teorem: X bir topolojik uzay , Y_1 ve Y_2 hausdorff ve X , Y_2 uzayında yoğun olsun. $F:Y_2 \to Y_1$ içine bir sürekli fonksiyon olsun. Eğer $f = F_{|X} : X \to F(X)$ bir homeomorfizm ise o zaman $F(Y_2 / X) \subseteq Y_1 / F(X)$ dir.

X 'in bütün kompaktlaştırmalarının sınıfını $K(X)$ ile gösterelim. Şimdi $K(X)$ üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlamaya çalışalım. $Y, Z \in K(X)$ olsun. Eğer $f : Z \to Y$ gibi her $x \in X$ için $f(x) = x$ koşulunu sağlayan sürekli bir f fonksiyonu var ise $Y \le Z$ yazılır. Bu koşulları sağlayan bir f fonksiyonu ister istemez örtendir. Eğer $f, g : Z \to Y$ iki sürekli ve her $x \in X$ için $f(x) = x, g(x) = x$ ise o zaman $f = g$ dir. Çünkü X hem Y hem de Z içinde yoğun ve Y , Z hausdorff uzaylardır. Dolayısıyla $Y \le Z$ olmasını sağlayan ve X in noktalarını sabit bırakan bir ve yalnız bir $f : Z \to Y$ fonksiyonu vardır. f böyle bir fonksiyon ise 4.1.teoremden ve f örten olduğundan dolayı $f(Z) = Y$ ve $f(Z/X) = Y/X$ olur.(Kuyucu 1994)

4.1.2. Teorem: $\le$ bağıntısı bir $K(X)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat: Yansıma: Her $Y \in K(X)$ için $f : Y \to Y$ fonksiyonunu $f = I_Y$ olarak alırsak $Y \le Y$ olur.

Ters simetri: $Y, Z \in K(X), Z \le Y$ ve $Y \le Z$ olsun o zaman $f : Y \to Z$ ve $g : Z \to Y$ her $x \in X$ için $f(x) = x, g(x) = x$ olacak şekilde f ve g sürekli fonksiyonları vardır.

$f \circ g : Z \to Z$ olarak alırsak her $x \in X$ için için $(f \circ g)(x) = x$ olup $f \circ g$ sürekli olur. $I_z : Z \to Z$, X i sabit bırakan sabit fonksiyon olduğundan $f \circ g = I_z$ olur. Benzer şekilde $g \circ f = I_y$ olur. Dolayısıyla $Y \approx Z$ elde edilir. Denk kompaktlaştırmalar arasında fark gözetilmediğinden $Y = Z$ olur.

Geçişme: $Y, Z, T \in K(X)$ ve $Y \le Z$, $Z \le T$ olsun. O zaman $f : Z \to Y$ ve $g : T \to Z$ ye her $x \in X$ için $f(x) = x$, $g(x) = x$ olacak şekilde f ve g sürekli fonksiyonları vardır. $g \circ f : T \to Y$ olarak alırsak her $x \in X$ için $(g \circ f)(x) = x$ ve $g \circ f$ sürekli olduğundan $Y \le Z$ olur. (Kuyucu 1994)

4.1.3. Teorem: $\le$ kısmi sıralama bağıntısı ile $K(X)$ bir en küçük üst sınıra sahiptir.

İspat: $e : Z \to \prod_{i \in I} Y_i$ fonksiyonunu $[e(x)](i) = x$ olarak tanımlayalım. Açık olarak e bir gömülmedir. $e(X) = cl(e(x))$ de X ‘in bir kompaktlaştırmasıdır. Her $i \in I$ için $f_i : eX \to Y_i$, π_i izdüşüm fonksiyonunun eX ’e kısıtlaması olsun.

$$\begin{array}{ccc} e : X & \longrightarrow & eX \\ & & \big\downarrow f_i \\ & & Y_i \end{array}$$

Şekil 4.1.1. π_i izdüşüm fonksiyonunun eX ’e kısıtlanışı

O zaman $f_i(e(x)) = x$ dir. Böylece $i \in I$ için $Y_i \le eX$ dir.Şimdi eX in en küçük üst sınırı olduğunu gösterelim.Her $i \in I$ için $Y_i \le e_1X$ olacak şekilde X in bir e_1X kompaktlaştırmasının olduğunu kabul edelim.O zaman $i \in I$ için $g_i : e_1X \to Y_i$ sürekli olacak şekilde g_i fonksiyonu vardır. $f : e_1X \to \prod_{i \in I} Y_i$ fonksiyonunu $[f(p)](i) = g_i(p)$

olarak tanımlayalım. Buradan $\pi_i \circ f = g_i$ dir. O zaman f süreklidir. Ayrıca

$f\left[e_1(x)\right](i) = g_i\left(e_1(x)\right) = x = \left[e(X)\right](i)$

dir.Bu durumda $f_{|e_1}(X) = e(X)$.(Kuyucu 1994)

4.1.4. Sonuç: $K(X)$ bir maksimum elemana sahiptir. (Kuyucu 1994)

$K(X)$ in maksimum elemanına X in βX Stone-Cech kompaktlaştırması denir.

Şimdi akla şu soru gelebilir? Eğer X bir Tychonoff uzay ise $\leq$ bağıntısına göre bir en küçük kompaktlaştırması var mıdır?

4.1.5. Teorem: X bir topolojik uzay olsun. X in bir en küçük kompaktlaştırmaya sahip olması için gerek ve yeter şart X in lokal kompakt olmasıdır.

İspat: Y, X in en küçük kompaktlaştırması olsun. Y/X in boyutunun 1 olduğunu gösterelim. $p,q \in Y/X$ ve $Z = Y/\{p\}$ olsun. $f: Y \to Z$ fonksiyonunu $t \neq p$ ise $f(t) = t$ ve $t = p$ ise $f(p) = q$ şeklinde tanımlayalım. Z nin topolojisi f nin koyduğu bölüm topolojisi olsun.Açık olarak Z kompakt ,hausdorff ve X, Z de yoğundur.Dolayısıyla $Z \leq Y$ dir.Hipotezden $Y \leq Z$ olduğundan $Y = Z$ dir.O zaman $g: Y \to Z$ her $x \in X$ için $g(x) = x$ olacak şekilde bir homeomorfizm vardır. $f: Y \to Z$ her $x \in X$ için $f(x) = x$ ve X ,Y de yoğun olduğundan $g = f$ dir. Böylece f bir homeomorfizmdir. Dolayısıyla f birebirdir. Buradan $f(p) = f(q) = q$ olduğundan $q = p$ elde edilir. Böylece Y/X in boyutunun 1 olur. $Y/X = \{p\}$ olsun. O zaman $X = Y/\{p\}$, Y de açıktır. Her kompakt uzay lokal kompakt ve lokal kompakt uzayın açık her alt kümesi de lokal kompakt olduğundan X lokal kompakttır.

Tersine X lokal kompakt olsun. aX, X ‘in lokal Aleksandroff kompaktlaştırması olmak üzere $f:Y \to aX$ fonksiyonunu $x \in X$ için $f(x)=x$ ve $f(Y/X)=\{\infty\}$ olarak tanımlayalım. O zaman f süreklidir. Dolayısıyla aX, X in en küçük kompaktlaştırmasıdır. (Kuyucu 1994)

4.1.6. Sonuç: $K(X)$ in minimum elemanı Aleksandroff kompaktlaştırmasıdır. (Kuyucu 1994)

4.2.Kompaktlaştırmalar Arasında Geçişi Sağlayan Teoremler

4.2.1.Teorem: Kapalı kümelerin $\mathcal{B}$ sınıfının wX Wallman kompaktlaştırmasını oluşturan taban olması için gerek ve yeter şart

1) $\mathcal{B}$ nın her ayrık A, B kümeleri için $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$

2) $\mathcal{B} = \delta \cap X$ olacak şekilde wX de kapalı kümeler için δ tabanının olmasıdır.(Njastad 1965)

4.2.2. Lemma : $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, ..., m$ için

$\bigcap_{i=1}^{m} clA_i = \varnothing$ ise bu durumda $\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A_i} = \varnothing$ dır. (Njastad 1965)

Burada clA ile A'nın X deki kapanışını $\overline{A}$ ile de wX deki kapanışını göstereceğiz.

4.2.3. Teorem : X normal hausdorff uzay ve β, X in açık kümelerinin bir ailesi ise X nin X^* Fan-Gottesman kompaktlaştırması X in wX Wallman kompaktlaştırmasına homeomorftur.

4.2.4. Teorem : X lokal kompakt olup kompakt olmayan bir hausdorff uzay olsun. Ya $\overline{A}$ ya da $X - A$ kompakt olacak şekilde X in A açık kümelerinin ailesi β olsun. Bu durumda β , X in normal tabanıdır ve X in X^* Fan-Gottesman kompaktlaştırması Aleksandroff kompaktlaştırmasıyla aynıdır.

İspat: X lokal kompakt hausdorff uzay olsun ve B bu uzayın normal tabanı olsun. Aşağıdaki gibi tanımlı bir φ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\varphi(x) = \left\{ A \in \mathrm{B} : x \in \overline{A} \right\}$$

Aleksandroff kompaktlaştırmasının tekliğinden $X^* - \varphi(X)$ tek noktadan oluşur.

$$a^* = \left\{ A \in \mathrm{B} : X - A \text{ kompakt} \right\}$$

sınıfını seçelim. X kompakt olmadığı için sonlu sayıda $A_i \in a^*$ kümesi için $\bigcup_{i=1}^{n} (X - A_i) \neq \varnothing$ elde ederiz. Buradan a^* bir binding ailedir. Yine X kompakt olmadığı için $X^* - \varphi(X) \neq \varnothing$ dır. Herhangi bir $x^* \in X^* - \varphi(X)$ elemanını düşünelim. Bu durumda $\bigcap_{B \in x^*} \overline{B} = \varnothing$ bulunur.(Eğer x bu arakesitte bulunsaydı, bu durumda $x^* = \varphi(x) \in \varphi(X)$ olurdu.)Buradan her $B \in x^*$ için $\overline{B}$ 'ın kompakt olmadığı anlaşılır. Böylece her $B \in x^*$ için $X - B$ kompakttır. Bu durumda $x^* \subset a^*$ ve bu yüzden $x^* = a^*$ dır.Buda a^* 'ın $X^* - \varphi(X)$ de bir nokta olduğunu gösterir.

4.2.5.Teorem: X topolojik uzayı normalse X in Stone-Cech kompaktlaştırması olan βX , wX Wallman kompaktlaştırmasına eşittir.

İspat: Sürekli reel değerli fonksiyonlar için $Z(f) = \left\{ x : f(x) = 0 \right\}$ şeklindeki bütün sıfır kümelerinin δ sınıfı kapalı kümeler için bir taban teşkil edip $Z(f) \cap Z(g) \cap X = \varnothing$ ise $\left(\overline{Z(f) \cap X}\right) \cap \left(\overline{Z(g) \cap X}\right) = \varnothing$ olup 4.2.2.nin şartlarını sağlayıp Wallman kompaktlaştırmasını elde etmemizi sağlayan tabanı oluştur.

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

5.1. Sonuç: T_4 uzayın Fan-Gottesman kompaktlaştırması Wallman kompaktlaştırmasıdır.

İspat: T_4 uzayı normal ve T_1 olup aynı zamanda T_3 yani regüler ve T_1 dir. Teoremi ispatlamak için 4.2.1 şartlarının sağlandığını göstereceğiz. Regüler uzayın Fan-Gottesman kompaktlaştırması olarak aldığımız X^* kümesinin kapanışındaki kümelerin sonlu arakesitlerinden oluşan δ ailesini göz önüne alalım. Bu B ailesinin wX de kapalı kümeler için taban olduğu açıktır. Dolayısıyla 4.2.1 in ikinci şartı sağlanmıştır. Şimdi ilk şarta bakalım ayrık kümelerin kapanışları da ayrık olmalıdır. $A, B \in \delta \cap X$ olsun. Yani; $A = X \cap \bigcap_{i=1}^{m} \overline{A_i}$, $B = X \cap \bigcap_{j=1}^{n} \overline{B_j}$ $A_i, B_j \in$ B $\left(i = 1,..,m \;,\; j = 1,..,n\right)$ olmak üzere

$$A \cap B = \bigcap_{i=1}^{m}\left(\overline{A_i} \cap X\right) \cap \bigcap_{j=1}^{n}\left(\overline{B_j} \cap X\right) = \bigcap_{i=1}^{m}\left(clA_i\right) \cap \bigcap_{j=1}^{n}\left(clB_j\right) = \bigcap_{\substack{i \le m \\ j \le n}}\left(clA_i \cap clB_j\right)$$

Ve

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{\left[\bigcap_{i=1}^{m} clA_i\right]} \cap \overline{\left[\bigcap_{j=1}^{n} clB_j\right]} \subset \bigcap_{\substack{i \le m \\ j \le n}}\left[\overline{\left(clA_i\right)} \cap \overline{\left(clB_j\right)}\right] = \bigcap_{\substack{i \le m \\ j \le n}}\left(\overline{A_i} \cap \overline{B_j}\right)$$

Elde edilir. $A \cap B = \varnothing$ olup 4.2.2 den $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ dur. Böylece B ailesinin, 4.2.1 şartlarını sağlamış olduğu ve dolayısıyla wX Wallman kompaktlaştırmasını elde etmemizi sağlayan taban olduğu görülür.

5.2. Sonuç: T_5 uzayının Fan-Gottesman kompaktlaştırması Wallman kompaktlaştırmasıdır.

İspat: T_5 uzayı tamamen normal ve T_1 olduğundan T_4,yani normal ve T_1 dir. Dolayısıyla T_3, yani regüler ve T_1 olup yukarıdaki teoremin ispatında takip ettiğimiz yolu izleyerek regüler uzayın Fan-Gottesman kompaktlaştırması olarak aldığımız $X^* = \{x^*, y^*, ..\}$ kümesinin kapanışındaki kümelerin sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathrm{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i : A_i \in \overline{X^*} \right\}$ ailesinin kapalı kümeler için bir taban olduğu açıktır ve bu taban wX Wallman kompaktlaştırmasını oluşturan tabandır. Dolayısıyla T_5 uzayının Fan-Gottesman kompaktlaştırması Wallman kompaktlaştırmasıdır.

5.3. Sonuç: T_6 uzayının Fan-Gottesman kompaktlaştırması Wallman kompaktlaştırmasıdır.

İspat: T_6 uzayı mükemmel normal ve T_1 olup dolayısıyla T_5 dir. Böylece ispat 5.1 ve 5.2 den kolayca görülür.

5.4. Sonuç: Normal hausdorff uzayın Fan-Gottesman kompaktlaştırması Stone-Cech kompaktlaştırmasıdır.

İspat: 4.2.3. teoremden normal hausdorff uzayın Fan-Gottesman kompaktlaştırmasının Wallman kompaktlaştırması olduğunu biliyoruz. Uzay normal olduğu içinde 4.2.5. sonuçtan Stone-Cech kompaktlaştırmasına eşittir.

5.5. Sonuç: Lokal kompakt hausdorff uzayın Wallman kompaktlaştırması Alexandroff kompaktlaştırmasıdır.

İspat: Lokal kompakt hausdorff uzay regülerdir ve Wallman kompaktlaştırması ile Fan-Gottesman kompaktlaştırması aynı olduğundan 4.2.4. sonuçtan ispat açıktır.

5.6. Sonuç: Her regüler lindölef uzayın Stone-Cech kompaktlaştırması Wallman kompaktlaştırmasıdır.

İspat: Her regüler lindölef uzay normal (Moller 2002) olup, 4.2.5 den Stone-Cech kompaktlaştırmasının sürekli reel değerli fonksiyonlar için$\{x : f(x) = 0\}$şeklindeki bütün sıfır kümelerinin δ sınıfı kapalı kümeler için bir taban teşkil edip Wallman kompaktlaştırmasını elde etmemizi sağlayan tabanı oluşturur.

5.7.Sonuç: Her ikinci sayılabilir normal uzayın Fan-Gottesman kompaktlaştırması Wallman kompaktlaştırmasıdır.

İspat: Her ikinci sayılabilir normal uzay regüler (Moller 2002) olup 5.1 ve 5.2 ye benzer olarak 4.2.1 in şartlarını sağlatabiliriz. Dolayısıyla Her ikinci sayılabilir normal uzayın Fan-Gottesman kompaktlaştırması Wallman kompaktlaştırmasıdır.

KAYNAKLAR

Artın, E., 1969.Introductıon to Algebraic Topology,Charles E.Merrıll Publıshıng Company, Ohio

Aslım, G., 1998. Genel Topoloji, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İzmir

Bayramov, S. ve Yıldız, Ç., 2004. Genel Topoloji, Seçkin Yayıncılık, Ankara

Biles, C., 1970. Wallman-type Compactifications. Proc. Amer. Math. Society, (25), 363– 368.

Borges, C., 1999.Elementary Topology And Applications,World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.,London

Bourbaki, N., 1966. General Topology, Addison-Wesley Pub. Company, London

Bulut, E., 1978. Topoloji,Güven Yayıncılık San. ve Tic. A.Ş., Ankara

Bülbül, A., 1994. Genel Topoloji, Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları, Trabzon

Fan, N., and Gottesman, N., 1952. On Compactifications of Freudenthal and Wallman. İndag.Math., (14), 504-510.

Frink, O., 1963. Compactifications and Semi-normal Spaces. Amer. Journal Math., (86), 602-605.

Gemıgnanı, M.C., 1972. Elemantary Topology, Dover Publication, Inc., NewYork

Gürkanlı, A.T., 1993. Genel Topoloji,Ondokuzmayıs Üniversitesi Yayınları, Samsun

Joshi, K.D., 1992. Introduction to General Topology, Wiley Eastern Limited, NewDelphi

Karaçay, T., 1982. Genel Topoloji, Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları, Trabzon

Kılıç, S,A., 2002. Genel Topoloji, Vipaş A.Ş Yayınları, Yayın No:66, Balıkesir

Kuyucu, F., 1994. Tychonoff Uzayların Kompaktlamalarından Kalanlar. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü, Adana.

Lıpschutz, S., 1965. General Topology, Temple University, New York

Loeb, P., 1969. Compactifications of Hausdorff Spaces. Proc. Amer. Math. Soc., (22), 627-634.

Massey, W. S., 1967. Algebraic Topology:An Introduction, Harcout, Brace & World Inc.,USA

Moise E., 1977. Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Springer-Verlag, Newyork

Moller, J.M., 2003. General Topology,Matematisk Instıtut, Universitetsparken 5, Kobenhav

Munkres, J.R.,1975. Topology A First Course ,Prentice-Hall,Inc.Englewood Ciffs, NewJersey

Njastad, O., 1965. On Wallman-type Compactifications.Math. Zeitschr., (91), 267-276.

Rahimov, A., 2006. Topolojik Uzaylar, Çağlayan Kitabevi, İstanbul

Sımmons, G., 1963. Topology and Modern Analysis, W. H. Freeman and Company, London

Sutherland, W. A., 1975. Introduction to Metric and Topological Spaces, Clarendon Press, Oxford

Ul'janov, V., 1977. Solution of a Basic Problem on Compactifications of Wallman Type. Soviet Math. Dokl., (18), 567-571.

Yıldız, C., 2005. Genel Topoloji,Gazi Basımevi, Ankara

Yüksel, Ş., 1998. Genel Topoloji, Selçuk Üniversitesi Basımevi, Konya

Wallman, H., 1938. Lattices and Topologıcal Spaces. Annals of Mathematics, (39), 112–126.

Walker, R. C., 1974. The Stone-Cech Compactification,Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Newyork

Willard, S.,1970. General Topology, Addison-Wesley Publishing Company,Inc.London

Wu, H. And Wu W., 2006. Topology and Its Applications, (153), 1291-1301.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Erzurum’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum’da tamamladı.2000 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı ve 2004 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.2005 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.