ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

GALİLE UZAYLARINDA HAREKETLERİN GEOMETRİSİ

Esra Esin TÜTÜNCÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2009

ÖZET

Doktora Tezi

GALİLE UZAYLARINDA HAREKETLERİN GEOMETRİSİ

Esra Esin TÜTÜNCÜ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, ileri bölümlerde gerekli olan temel tanım, kavram ve özelikler verilmiştir.
Üçüncü bölümde, Galile düzleminde hareketler verilmiştir.
Dördüncü bölümde, G^n-Galile uzayında hareketler ve homotetik hareketler incelenmiş ve bu hareketlerle ilgili teoremler verilmiştir.
Son bölümde ise Galile hareketleri, G_1^3 pseudo - Galile uzayına ve G_1^n pseudo -Galile uzayına genelleştirilmiştir.

Ocak 2009, 110 sayfa

Anahtar Kelimeler : Galile uzayı, Galile hareketi, Shear hareketi, Benzerlik hareketi,

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE GEOMETRY OF MOTIONS IN THE GALILEAN SPACES

Esra Esin TÜTÜNCÜ

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter, some basic definitions, concepts and definitions which are needed in the further chapters are given.

In the third chapter, motions on Galilean plane are given.

In the fourth chapter, motions on G^n Galilean spaces and homothetic motions are investigated. Some theorems related of motions are given.

In the last chapter, Galilean motions are generalized to G_1^3 pseudo -Galilean space and G_1^n pseudo -Galilean spaces.

Jan 2009, 110 pages

Key Words: Galilean space, Galilean motion, Shear motion, Equiform motion.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof.Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya, yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, Sayın Prof.Dr. Baki KARLIĞA (Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmada temel yapıyı oluşturan, bilimsel araştırma isteğini aşılayan annem, babam ve kardeşlerime, çalışmam süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen eşim Ali Fuat TÜTÜNCÜ' ye, çocuklarım Mehmet Kerem ve Ahmet Melih'e en derin duygularla teşekkür ederim.

Esra Esin TÜTÜNCÜ
Ankara, Ocak 2009

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

V	Reel vektör uzayı
$boy\ V$	V reel vektör uzayının boyutu
$ind\ V$	V reel vektör uzayının indeksi
E^n	$n-$ boyutlu Öklid uzayı
$T_M\left(P\right)$	M manifoldunun P noktasındaki tanjant uzayı
R_1^n	$n-$ boyutlu yarı-Öklid (Lorentz) uzayı
$O(n)$	Yarı-ortogonal matrislerin Lie grubu
$o(n)$	Yarı-ortogonal matrislerin Lie cebiri
G^2	Galile düzlemi
G^3	Galile uzayı
G^n	$n-$ *boyutlu* Galile uzayı
G_1^3	$3-$ *boyutlu* pseudo-Galile uzayı
G_1^n	$n-$ *boyutlu* pseudo-Galile uzayı
$d_G(O,P)$	O ve P noktaları arasındaki Galile anlamında uzaklık
$d_{PG}(P,Q)$	P ve Q noktaları arasındaki Pseudo Galile anlamında uzaklık
S_G^r	$r-$ yarıçaplı Galile çemberi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Öklidyen hareketler fizikte, mekanikte çalışılan konulardandır. Bu Öklidyen hareketlerin regüler olması ($\forall t$ anında pol noktalarının olması) uzayın boyutunun tek ve çift olması ile ilgilidir. Bu konu Bottema tarafından incelenmiştir.

Daha sonra homotetik hareketler H.Hacısalihoğlu tarafından incelenmiş ve uzayın boyutunun tek veya çift olmasından bağımsız olarak bu hareketin regüler olduğu gösterilmiştir.

Galile geometrisi Öklid dışı geometrilerdendir ve Galile hareketleri denildiğinde shear (makas) hareketleri akla gelmektedir. Bu konuda düzlemsel Galile hareketleri Yaglom tarafından geniş bir şekilde incelenmiştir.

Son zamanlarda B.Divjak ın Galile uzayında regle yüzeyler için çalışmaları vardır. Galile uzayında hareketler ve homotetik hareketler pek çalışılmamış, yeni konulardandır.

Bu çalışmada düzlemde, uzayda ve n-boyutlu uzayda Galile hareketleri tanımlandı, regüler olması ile ilgili çeşitli teoremler verildi ve daha sonra homotetik hareketler incelendi. Sonra Galile uzayı için yapılanlar pseudo-Galile uzayına genelleştirilmiştir.

2. **TEMEL KAVRAMLAR**

2.1. E^n **de Hareketler**

Tanım 2.1.1 (Afin Uzay)

$A \neq \varnothing$ bir cümle ve bir vektör uzayı V olsun.

$$\begin{array}{rlcll} \psi: & A \times A & \rightarrow & V & \\ & (P,Q) & \rightarrow & \psi(P,Q) & = \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

dönüşümü

1) $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir.

2) $\forall P \in A$ ve $\alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır,

şartını sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir *afin uzay* denir (Hacısalihoğlu 1998).

Örnek 2.1.1 . Her vektör uzayı kendisi ile birleşen bir afin uzaydır.

Tanım 2.1.2. (Öklid Uzayı)

Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V de bir iççarpım işlemi olarak

$$\begin{array}{rlcll} \langle , \rangle : & V \times V & \rightarrow & R & \\ & (x,y) & \rightarrow & \langle x,y \rangle & = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, ..., x_n) \\ y = (y_1, ..., y_n) \end{cases} \end{array}$$

Öklid iççarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı *Öklid uzayı* adını alır (Hacısalihoğlu 1983).

Örnek 2.1.2. 3-boyutlu standart reel vektör uzayı R^3 ile birleştirilmiş R^3 afin uzayını ele alalım. Bu R^3 vektör uzayında Öklid iççarpımı

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \; R^3 \times R^3 &\to R \\ (x,y) &\to \langle x,y \rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{3} x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece R^3afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve E^3 ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. (E^n de İzometri)

d, E^n n-boyutlu Öklid uzayı üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere

$$f : E^n \to E^n$$

fonksiyonu için

$$d(f(X), f(Y)) = d(X,Y) \quad X, Y \in E^n$$

ise f fonksiyonuna E^n in bir *izometrisi* denir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.1.4. (Dönme)

E^n nin bir izometrisi f olmak üzere,

$$f(O) = O, \quad O \in E^n$$

olacak şekilde bir O noktası mevcut ise f ye O etrafında bir *dönme* denir (Hacısalihoğlu 1998).

Teorem 2.1.1.

E^n ile eşlenen R^n n-boyutlu standart reel vektör uzayında

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \ , \qquad X = (x_1, x_2, .., x_n), Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup $O(n)$ ile , $O = (0, ..., 0)$ noktasını sabit bırakan dönme grubu eşlenebilir (Hacısalihoğlu 1998).

Böylece , herhangi bir dönme altında, E^n deki bir X noktasının görüntüsü Y olmak üzere,

$$Y = A.X, \qquad A \in O(n)$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 2.1.5. (Öteleme)

f , E^n nin bir izometrisi ve eğer, $X = (x_1, x_2, .., x_n) \in E^n$ için

$$f(X) = (x_1 + t_1, x_2 + t_2, .., x_n + t_n), ...t_i \in R, \quad 1 \leq i \leq n$$

ise f e E^n de bir *öteleme* denir (Hacısalihoğlu 1998).

Teorem 2.1.2.

E^n, n-boyutlu Öklid uzayının katı hareketlerinden birinin matrisi B olmak üzere,

$$B = \begin{bmatrix} & & & t_1 \\ & & & t_2 \\ & a_{ij} & & . \\ & & & t_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[a_{ij}] \in O(n), \quad ,1 \leq i, j \leq n$$

$(n+1) \times (n+1)$ tipinde reel ve regüler bir matristir. Bu cins matrislerin grubu $GL(n+1, R)$ nin bir alt grubu olarak ifade edilebilir (Hacısalihoğlu 1998).

Böylece B ye karşılık gelen genel izometri, E^n deki bir X noktasının B altındaki görüntüsü Y olmak üzere, matris formunda

$$Y = A.X + C, \quad A \in O(n), \quad C \in T(n)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Şimdi n-boyutlu bir $R = \{O', E^n\}$ referans uzayını gözönüne alalım. Bu uzayın noktalarını hareketler altında sabit olarak düşünelim. $R_O = \{O, E^n\}$ ile hareketler altında sabit olmayan bir diğer uzayı (hareket uzayı) gösterelim. R de orijin olarak bir keyfi O' noktasını seçerek E^n nin herbir P, Q, R,...noktasına bu noktanın R de $\overrightarrow{O'P}, \overrightarrow{O'Q}, \overrightarrow{O'R}$,... yer vektörlerini karşılık getirebilirz.

R ve R_O vektör uzayları, Öklid iç çarpımı ile birer iç çarpım uzayıdırlar.

Tanım 2.1.6. (Genel Hareket)
E^n , n-boyutlu Öklid uzayında A bir $n \times n$ ortogonal matris, C bir ötelemeye tekabül eden $n \times 1$ matris olmak üzere

$$Y = A.X + C$$

ile verilen bir genel izometrinin ifadesindeki A ve C matrisleri eğer, zaman ile özdeşlenebilen bir t parametresinin fonksiyonları, ayrıca A nın determinantı 1 ve bütün karakteristik değerleri farklı ise $Y = A.X + C$ izometrilerinin herbirine E^n de bir *genel hareket* denir (Bottema 1979).

$$Y = A.X$$

ile verilen bir genel harekette sabit bir $X \in R_O$ noktasının resmi Y demektir. Bir genel harekette $A.X$ kısmına *hareketin dönme kısmı* denir. Hareketin parametresi t olmak üzere

$$Y = A.X$$

ile verilen dönme kısmını düşünelim. Hareketli uzayın sabit bir X noktasının hız vektörü

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt} \qquad \dot{A} = \frac{dA}{dt}$$

olmak üzere

$$\dot{Y} = \dot{A}.X$$

ile verilir. Böylece

$$\dot{Y} = \dot{A}.A^T.Y$$

olur.

Tanım 2.1.7.(E^n de Eğri)
n-boyutlu Öklid uzayı E^n ve I , R nin bir irtibatlı açık alt cümlesi olmak üzere

$$\alpha : I \subseteq R \rightarrow E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n de bir *eğri* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.1.8. (Infinitezimal Matris)
ε birinci mertebeden bir infinitezimal nicelik olmak üzere

$$A = I_n + [\varepsilon b_{ij}], \quad B = [b_{ij}]_{n \times n}$$

matrisine bir *infinitezimal matris* denir.

B matrisi antisimetrik matris ise A matrisi ortogonal olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} A^{-1} &= I_n - [\varepsilon b_{ij}] \\ detA &= 1 + \varepsilon(izB) \end{aligned}$$

dir (Courrant and Hilbert 1953).

Tanım 2.1.9. (Homotetik Hareket)

$$F = \begin{bmatrix} hA & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile belirli dönüşüme E^n de bir *homotetik hareket* denir. Burada, $h = h.I_n$ bir skalar matris, $A \in O(n)$ ve $C \in R_1^n$ dir (Hacısalihoğlu 1971).

Tanım 2.1.10. (Bir- Parametreli Homotetik Hareket).

$J \subset R$ bir açık aralık, $O \in J$ olsun. $h : J \to R$ fonksiyonu, $A \in SO(n)$ matrisi ve $n \times 1$ tipindeki C matrisi t ye göre diferensiyellenebilir olmak üzere elemanları,

$$F(t) = \begin{bmatrix} h(t).A(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlı $F(t) : E^n \to E^n$ dönüşümüne E^n in *bir-parametreli homotetik hareketi* denir (Hacısalihoğlu 1971).

h bir skalar olduğundan

$$h^{-1} = \frac{1}{h} \qquad h^T = h$$

dir. $B = h.A$ alırsak

$$B^{-1} = h^{-1}.A^{-1} = \frac{1}{h}.A^T$$

elde edilir. Bir $X \in E^n$ için $Y = B.X + C$ noktalarının geometrik yeri E^n de bir eğridir. Bu eğriyi Y ile göstereceğiz.

$$Y = B.X + C$$

eşitliğinde t ye göre türev alınırsa

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dB}{dt}.X + B.\frac{dX}{dt} + \frac{dC}{dt}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.11. (Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız)

$Y = B.X + C$ hareketine ait

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dB}{dt}.X + B.\frac{dX}{dt} + \frac{dC}{dt}$$

ifadesindeki $\frac{dY}{dt}$ ye *hareketin mutlak hızı*, $\frac{dB}{dt}.X + \frac{dC}{dt}$ ye *sürüklenme hızı*, $B.\frac{dX}{dt}$ ye de hareketin *rölatif hızı* denir (Hacısalihoğlu 1971).

Hareketli ve sabit uzayın her ikisinde de bir t anında sabit olan bir nokta için

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dX}{dt} = \frac{dB}{dt}.X + \frac{dC}{dt} = 0$$

dır. Bu ortak sabit noktaya hareketin t anındaki *ani pol noktası* denir (Hacısalihoğlu 1971).

Bu ortak noktanın sabit uzaydaki adı *sabit pol noktası* ve hareketli uzaydaki adı da *hareketli pol noktası*dır.

Teorem 2.1.3.

$Y = B.X + C$ bir homotetik hareket ise $\det(\frac{dB}{dt}) \neq 0$ dır (Hacısalihoğlu 1971).

Teorem 2.1.4.

n-boyutlu Öklid uzayında E^n in homotetik hareketleri her n için regüler hareketlerdir (Hacısalihoğlu 1971).

Teorem 2.1.5.

n-boyutlu Öklid uzayında E^n in homotetik hareketleri her t anında bir tek ani pol noktasına sahiptir (Hacısalihoğlu 1971).

2.2 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1. (Topolojik Manifold)
M bir Haussdorf uzayı olsun. M nin her bir açık alt cümlesi E^n in bir açık alt cümlesine homeomorf ve M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebiliyorsa M e n-boyutlu *topolojik manifold* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.2.2. (Harita)
M bir topolojik manifold olsun. $U \subset M$ açık alt cümlesinden E^n in bir açık alt cümlesine bir

$$\Psi : U \to V$$

homeomorfizmi verilsin (Ψ, U) ikilisine M de bir *koordinat komşuluğu* veya *harita* denir (Hacısalihoğlu 1983).

$$\begin{array}{ccc} M & \underset{\to}{\Psi} & E^n \\ & \searrow & \downarrow y_i \\ \psi_i = y_i \circ \Psi & & R \end{array}$$

$\psi_i = y_i \circ \Psi$ $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere ψ_i lere Ψ haritasına bağlı *koordinat fonksiyonları* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.2.3. (Atlas)
M bir topolojik n- manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{W_\alpha\}$ olsun. W_α *a*çık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{W_\alpha\}$ örtüsü için $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazılır. E^n de W_α ya bir Ψ_α homomorfizmi altında homeomorf olan *a*çık cümle W_α olsun. Böylece ortaya çıkan (Ψ_α, W_α) haritalarının

$$S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

koleksiyonuna bir *atlas (=koordinat komşuluğu sistemi)* denir (Hacısalihoğlu 1983).

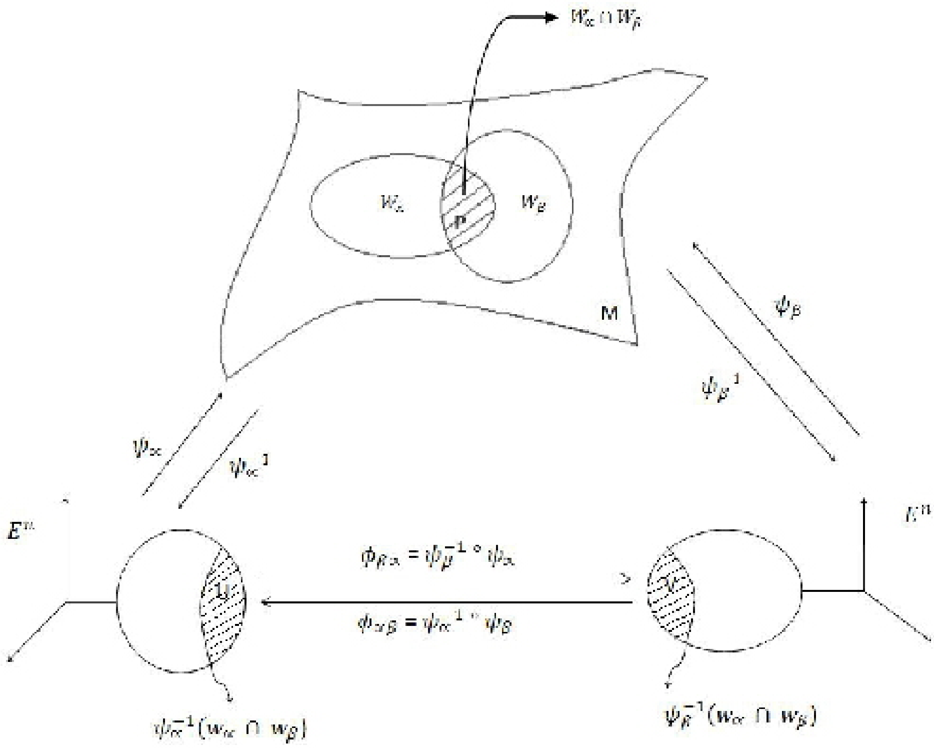
Bir topolojik n-manifold M ve bir P$\in M$ noktasının açık komşulukları da W_α

olsun. P noktasının lokal koordinatları, W_α lar değiştikçe, Ψ_α değişeceğinden W_α ların sayısı kadar Ψ_α vardır. Her bir $\alpha \in A$ için (Ψ_α, W_α) üzerindeki lokal koordinat sistemini $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ ile gösterelim. P noktasının iki açık komşuluğu W_α ve W_β için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$ ise $W_\alpha \cap W_\beta$ nin herbir noktasında

$$(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha) \text{ ve } (x_1^\beta, ..., x_n^\beta)$$

gibi iki koordinat sistemi tanımlıdır. Bu iki koordinat sistemi arasındaki bağıntıyı görmek mümkündür:

-3



$_{1}.jpg$

Şekil 2.1 Koordinat sistemleri arasındaki bağıntı

$$\Psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\alpha \subset E^n \quad \text{ve } \Psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\beta \subset E^n$$

alt cümleleri ikişer açık cümlenin birer homomorfizim altında görüntüleri olduklarından açık cümlelerdir. Ayrıca

$$\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha : \Psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \to \Psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

ile

$$\Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta : \Psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \to \Psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

fonksiyonları da ikişer homeomorfizimin bileşimi olduklarından birer homeomorfizimdirler.

Kısaca

$$\Phi_{\beta\alpha} = \Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha \quad \text{ve } \Phi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta$$

gösterimleri kullanılabilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.2.4. (Diferensiyellenebilir Yapı)

Bir topolojik n-manifold M ve M in bir atlası $S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ olsun. Eğer S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\Phi_{\alpha\beta}$ ve $\Phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyelllenebilir iseler S ye C^k *sınıfından diferensiyelllenebilir*dir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k *sınıfından diferensiyellenebilir yapı* adı verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.2.5. M n-boyutlu topolojik manifold ve M nin bir S atlası C^k sınıfından ise M manifolduna *n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.2.6. (Tanjant Vektör)

M bir diferensiyellenebilir manifold , M den R ye bütün diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M, R)$ ve $P \in M$ olmak üzere

$$X_P : C^\infty(M, R) \to R$$

fonksiyonu , $f, g \in C^\infty(M, R)$ ve $a, b \in R$ için

1) $X_P(a.f + b.g) = a(X_P f) + b(X_P g)$

2) $X_P(f.g) = (X_P f)g(P) + f(P)(X_P g)$

özeliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona M nin P noktasındaki bir *tanjant vektörü* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Bu biçimde tanımlı fonksiyonların cümlesi $T_M(P)$ ile gösterilirse , $X_P, Y_P \in T_M(P)$ $f \in C^\infty(M, R)$ ve $a \in R$ için

$$\begin{aligned} (X_P \oplus Y_P)(f) &= X_P f + Y_P f \\ (a.X_P)(f) &= a.X_P f \end{aligned}$$

işlemleri ile birlikte $T_M(P)$, R üzerinde bir vektör uzayı olup, M in P noktasındaki *tanjant uzayı* adı verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.2.7. (Vektör Alanı)

Bir diferensiyellenebilir manifold M olsun.

$$\begin{aligned} \chi : \quad M &\to \bigcup_{P \in M} T_M(P) \\ P &\to X_P \in T_M(P) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı χ dönüşümüne M manifoldu üzerinde bir *vektör alanı* denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.2.8. (Türev Dönüşümü)

$$F : E^n \to E^m$$

bir dönüşüm olsun. Eğer $\overrightarrow{v_P} \in T_{E^n}(P)$ ise

$$(F_*)_P(\overrightarrow{v_P}) \in T_{E^m}(F(P))$$

de E^m nin $t \to F(\overrightarrow{P} + t\overrightarrow{v})$ eğrisinin $t = 0$ daki hız vektörü olsun. Böylece tanımlı

$$(F_*)_P : T_{E^n}(P) \to T_{E^m}(F(P))$$

fonksiyonuna , F in $P \in E^n$ noktasındaki *türev dönüşümü* denir (Hacısalihoğlu 1983).

2.3 Lie Grubu ve Lie Cebiri

Tanım 2.3.1. (Lie Grubu)

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (M, G) ikilisine bir *Lie Grubu* denir.

L_1 : M nin noktaları G nin elemanları ile çakışır.

$$L_2 : \quad \begin{array}{ccc} M \times M & \rightarrow & M \\ (a, b) & \rightarrow & a.b^{-1} \end{array}$$

işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir.

M manifolduna, Lie Grubunun *temel manifoldu*, ve G ye de *temel grubu* denir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.3.2. (Lie Cebiri)

V bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} [,]: V \times V & \rightarrow & V & & \\ (X, Y) & \rightarrow & [,](X, Y) & = & [X, Y] \end{array}$$

işlemi ,

1) Bilineer

2) Antisimetrik

3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

özeliklerine sahip ise $(V, [,])$ ikilisine bir *Lie Cebiri* denir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.3.3. (Matris Lie Grubu)

$$\left\{ [a_{ij}]_{n\times n} \,|a_{ij} \in R \right\}$$

matris uzayının bir altmanifoldu, matrislerin çarpımı işlemine göre bir grup ise bu gruba *matris Lie grubu* denir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.3.4. (Sol İnvaryant Vektör Alanı)

G bir matris Lie grubu ve X, G üzerinde bir vektör alanı olsun. Ayrıca $g \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_g : G &\to G \\ g_0 &\to L_g(g_0) = g.g_0 \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Eğer $\forall g_0, g_1 \in G$ için

$$L_{(g_0)_*} X_{g_1} = X_{g_0 g_1}$$

yani, $\forall g \in G$ için

$$L_{(g)_*} \circ X = X \circ L_{(g)}$$

ise bu vektör alanına bir *sol-invaryant vektör alanı* denir (Hacısalihoğlu 1980).

$$X_L = \left\{ X \left| X \in \chi, \quad L_{(g)_*} \circ X = X \circ L_{(g)} \right., \forall g \in G \right\}$$

cümlesi vektör alanları uzayının bir alt uzayıdır. Bu altuzaya *sol invaryant vektör alanlarının uzayı* denir (Hacısalihoğlu 1980).

Teorem 2.3.1.

G bir matris Lie grubu ve G nin sol invaryant vektör alanlarının vektör uzayı $X_L(G)$ olsun. Bu durumda

$$X_L(G) \cong T_G(e)$$

dir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.3.5. (Lie Cebiri)

G Lie grubunun Lie cebiri G üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının Lie cebiri olarak tanımlanır. Bunun yanında G Lie grubunun Lie cebiri olarak G nin e birim noktasındaki $T_G(e)$ tanjant uzayını Lie cebir yapısı ile birlikte alabiliriz.

Bunu Teorem 2.3.1 den dolayı yapmaya hakkımız vardır (Hacısalihoğlu 1980).

2.4 Yarı Öklidyen Uzaylar

Bu bölümde simetrik bilineer formlar, skalar çarpımlı uzaylar ve böyle uzaylar arasındaki lineer izometrilerden bahsedilecek ve yarı-Riemann manifoldu tanıtılacaktır. Daha sonra yarı-Riemann manifoldunun özel bir hali olan E_ν^n yarı-Öklid uzayının lineer izometrilerinin Lorentz grubu olan yarı-ortogonal grup ele alınacaktır.

Tanım 2.4.1. (Simetrik Bilineer Formlar)

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \rightarrow R$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

(i) $g(u, v) = g(v, u)$

(ii) $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$

$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özeliklerine sahip ise bu durumda g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde *simetrik bilineer form* denir (O'Neil 1983).

Tanım 2.4.2. V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \rightarrow R$; V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

(i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ *için* $\mathrm{g}(u,v)\rangle 0$ ise g simetrik bilineer formuna *pozitif tanımlı,*

(ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ *için* $\mathrm{g}(u,v)\langle 0$ ise g simetrik bilineer formuna *negatif tanımlı,*

(iii) $\forall v \in V$ için $\mathrm{g}(u,v) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna *yarı-pozitif tanımlı,*

(iv) $\forall v \in V$ için $\mathrm{g}(u,v) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna *yarı-negatif tanımlı,*

denir (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.3. V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \rightarrow R$; V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

(i) g non-dejeneredir $\Leftrightarrow$ $g(u,v) = 0$ ve $\forall v \in V$ için $u = 0$ dır.

(ii) g dejeneredir $\Leftrightarrow$ $g(w,v) = 0$ ve $\forall v \in V$ için $w \neq 0$ dır.

(iii) V üzerindeki g non-dejenere simetrik bilineer form V nin bir W alt vektör uzayına indirgenebilir. $g|_W$ indirgenen simetrik bilineer form dejenere veya non-dejeneredir (O' Neill 1983).

Örnek 2.4.1. R^2 2-boyutlu reel vektör uzayı ve $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formu $\forall X, Y \in R^2$ için,

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \quad R^2 \times R^2 &\rightarrow \quad R \\ (X,Y) &\rightarrow \langle X, Y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Yukarıdaki tanım gereğince $\langle , \rangle$ non-dejeneredir.

Tanım 2.4.5. (Kuadratik Form)

n-boyutlu bir reel vektör uzayı V üzerinde simetrik bilineer form g olsun.

$$\begin{aligned} h : \quad V &\rightarrow \quad R \\ v &\rightarrow h(v) = g(v,v) \end{aligned}$$

dönüşümüne g den elde edilen kuadratik form denir. Bu durumda g ve h yardımıyla $\forall v, w \in V$ için;

$$g(v,w) = \frac{1}{2}\{h(v+w) - h(v) - h(w)\}$$

şeklinde ifade edilebilir (O' Neill 1983).

V nin bir $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ bazı için; $\lambda_i \in R$ ve v_i ler de v nin E bazına karşılık gelen koordinat bileşenleri olmak üzere;

$$h(\sum_{i=1}^{m} v_i.e_i, \sum_{j=1}^{m} w_j.e_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} v_i.w_j$$

ve

$$\forall v \in V \text{ için } h(v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i)^2$$

formuna sahiptir. λ_i katsayılarının pozitif, negatif ve sıfır olanlarının sayıları, sırası ile p, q, r ise bu durumda h kuadratik formunun işareti (p,q,r) dir ve ayrıca $p+q+r=m$ dir (Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 2.4.6.

V bir reel vektör uzayı, $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ V nin bir bazı ve $g : V \times V \to R$ simetrik bilineer form olsun.

$$[b_{ij}] = [g(e_i, e_j)]$$

g ye karşılık gelen matristir ve simetriktir (O' Neill 1983).

Örnek 2.4.2. R^2 de $u = (u_1, u_2)$ ve $w = (w_1, u_2)$ için,

$$\begin{aligned} g: \quad R^2 \times R^2 \quad &\to \quad R \\ (u,w) \quad &\to \quad g(u,w) = u_1.w_1 - u_2.w_2 \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. g simetrik ve bilineerdir.

$u = (1,0)$ ve $w = (0,1)$ için g non-dejeneredir. Dolayısıyla g bir skalar çarpımdır ve birleşmeli kuadratik formu $q(v) = v_1^2 - v_2^2$ dir ve de g indefinittir (O' Neill 1983).

Önerme 2.4.1. V bir reel vektör uzayı, $g : V \times V \to R$ simetrik bilineer form olsun. g ye karşılık gelen matris regülerdir ancak ve ancak g non-dejeneredir (O' Neill 1983).

Önerme 2.4.2. V bir reel vektör uzayı üzerinde g simetrik bilineer formuna ait (p, q, r)-tipinden bir kuadratik form h olsun. Bu durumda;

(i) g dejenere (veya non-dejenere) dir $\Leftrightarrow$ $r\rangle 0$ $(r = 0)$ dir.
(ii) g pozitif (veya negatif) tanımlıdır $\Leftrightarrow p = m$ $(q = m)$ dir.
(iii) g pozitif (veya negatif) yarı-tanımlıdır $\Leftrightarrow p = 0,\ p\rangle 0, r\rangle 0$ $(p = 0, q\rangle 0, r\rangle 0)$ dir (Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 2.4.7. V in bir bazı $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ olsun. $b_{ij} = g(e_i, e_j)$ olarak tanımlanan $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisine E bazına göre g *simetrik bilineer formunun matrisi* denir. g simetrik olduğundan B matrisi de simetriktir (O' Neill 1983).

Sonuç 2.4.1. V nin herhangi bir E bazına göre g nin matrisi B olsun. g nin dejenere (non-dejenere) olması için gerek ve yeter koşul $rankB = m$, $(rankB\langle m)$ olmasıdır (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.8. (İndeks)

V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to R$; V üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

$$g\,|_W : W \times W \to R$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna, g simetrik bilineer formunun *indeksi* denir ve ν ile gösterilir. Ayrıca v ye V vektör uzayının da *indeksi* denir ve $indV = v$ ile gösterilir (O' Neill 1983).

Buna göre $1 \leq \nu \leq boyV$ dir.$\nu = 0$ olması için gerek ve yeter koşul g nin *pozitif yarı-tanımlı* olmasıdır.

Tanım 2.4.9. (Skalar Çarpım)

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik, bilineer, non-dejenere bir g formu tanımlanırsa g ye bir *skalar* çarpım ($yarı - \ddot{O}klid\ metri\breve{g}i$) ve V ye $yarı - \ddot{O}klid\ uzayı$ denir.

Özel olarak g pozitif tanımlı ise, g ye $\ddot{O}klid\ metri\breve{g}i$ ve V ye de $\ddot{O}klid\ uzayı$ denir. $v = 1$ ise g ye $Lorentz$ $(Minkowski)$ $metri\breve{g}i$ ve V ye de $Lorentz\ uzayı$ veya $Minkowski\ uzayı$ denir (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.10. Bir $v \in V$ vektörü için

(i) $g(v, v)\rangle 0$ veya $v = 0$ ise bu v vektörüne uzaysı (space-like) vektör,
(ii) $g(v, v)\langle 0$ ise bu v vektörüne zamansı (time-like) vektör,
(iii) $g(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise bu v vektörüne ışıksı (light-like, null veya isotropik) vektör denir (O' Neill 1983) **.**

Örnek 2.4.3. R^2 de $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ $Z = (z_1, z_2)$ ve

$$g(X, Y) = -x_1.y_1 + x_2.y_2$$

olarak tanımlansın.
$X = (1, 0)$ için $g(X, X) = -1$ olduğundan X bir zamansı (time-like) vektördür.
$Y = (0, 1)$ için $g(Y, Y) = 1$ olduğundan Y bir uzaysı (space-like) vektördür.
$Z = (1, 1)$ için $g(Z, Z) = 0$ olduğundan Z bir ışıksı (null) vektördür.

Tanım 2.4.11. V yarı- Öklid uzayı ve g yarı-Öklid metriği olmak üzere;

$$\begin{aligned} \|.\| : \quad V &\rightarrow \quad R \\ v &\rightarrow \quad \|v\| \ = |g(v, v)|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona *norm* fonksiyonu denir.$\|v\|$ ya da v nin normu veya v nin *boyu* denir. Boyu 1 birim olan vektöre de *birim vektör* denir (O' Neill 1983) **.**

Teorem 2.4.3. Bir $V \neq \{0\}$ yarı-Öklid uzayı daima bir ortonormal baza sahiptir (O' Neill 1983) **.**

Örnek 2.4.4. n- boyutlu reel vektör uzay R^n ve bu uzayın bir ortonormal bazı $E = \{e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,0,...,0),...,e_n = (0,0,...1)\}$ olsun. v indeksi $1 \leq \nu \leq n$ olmak üzere; R^n üzerinde bir yarı-Riemann metrik $\forall X, Y \in R^n$ için

$$g(X,Y) = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} x_j y_j$$

şeklindedir. Bu metrikle birlikte R^n bir *yarı-Öklid uzayı* olur ve R^n_v ile gösterilir. Özel olarak $v = 1$ ise R^n_1 bir *Lorentz (Minkowski)* vektör uzayıdır.

Tanım 2.4.12. V, R^n_vnin bir alt vektör uzayı olsun. Bu taktirde V alt vektör uzayına;

(i) Eğer V bir zamansı (time like) vektöre sahipse V ye zamansı (time like),
(ii) Eğer V deki sıfır olmayan her vektör uzaysı (space like) ise V ye uzaysı (space like),
(iii) Aksi durumlarda V ye ışıksı (light like) denir (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.13. V bir skalar çarpım uzayı olsun. $\varepsilon_i = \pm 1$ olmak üzere $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}.\varepsilon_j$ ifadesindeki $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ n-lisine g nin işareti denir.

Teorem 2.4.4. V vektör uzayı için bir ortonormal baz $E = \{e_1, ..., e_n\}$ ve $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ olsun. Bu durumda $\forall v \in V$ vektörü,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i . g(v, e_i) e_i$$

olacak biçimde tek türlü yazılır (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.14. V ve W, sırası ile, $\langle , \rangle$ ve $\langle\langle , \rangle\rangle$ skalar çarpmaları ile verilen skalar çarpmalı uzaylar ve $T : V \rightarrow W$ lineer dönüşümü verilsin.$\forall u, w \in V$ için

$$\langle\langle T(u), T(w)\rangle\rangle = \langle u, w\rangle$$

ise T dönüşümüne *skalar çarpmayı koruyor* denir (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.15. Skalar çarpmayı koruyan bir $T : V \rightarrow W$ lineer izomorfizmine bir lineer izometri denir.

Teorem 2.4.5. Bir $T : V \rightarrow W$ lineer dönüşümü bir lineer izometri ise $boyV = boyW$ dir. Bunun tersi de doğrudur (O' Neill 1983).

Teorem 2.4.6. V ve W skalar çarpımlı uzayların aynı boyut ve aynı indekse sahip olmaları için gerek ve yeter şart V den W ye bir lineer izometrinin var olmasıdır.

Tanım 2.4.16. (Metrik Tensör)

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun.

$$\begin{aligned} g: \ TM \times TM &\rightarrow C^{\infty}(M, R) \\ (X, Y) &\rightarrow g(X, Y): \quad M \rightarrow \quad R \\ & \qquad\qquad\qquad g(X, Y)_P = g(X_P, Yp) \end{aligned}$$

M üzerinde non-dejenere ve sabit indeksli (0,2) tipindeki g tensör alanına bir *metrik tensör* denir (O'Neill 1983).

Başka bir ifadeyle M manifoldunun her P noktasındaki $T_P(M)$ tanjant uzayına $g\,|_P : T_P(M) \times T_P(M) \rightarrow R$ skalar çarpımı karşılık gelir ve $g\,|_P$ nin indeksi $\forall P \in M$ için aynıdır.

Tanım 2.4.17. (Yarı-Riemann Manifold)

M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere, (M, g) ikilisine bir *yarı-Riemann manifold* denir (O' Neil 1983).

Tanım 2.4.18. (M, g) bir yarı-Riemann manifold olsun. g nin sabit indeksi v ya (M, g) yarı-Riemann manifoldunun *indeksi* denir. ν indeksli ve n boyutlu yarı-Riemann manifoldu M_v^n ile gösterilir (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.19. (Lorentz Manifoldu)

M_v^n bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ ise M_1^n yarı-Riemann manifolduna *Lorentz manifoldu* denir. Özel olarak $\nu = 0$ ise bu durumda M^n bir Riemann manifoldur ve g de bir Riemann metriğidir(O' Neill 1983).

Tanım 2.4.20. M_v^n bir yarı-Riemann manifoldu ve $\alpha : I \subset R \to M_v^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α nın teğet vektör alanı T olmak üzere,

(i) $g(T, T)\rangle 0$ ise α eğrisine uzaysı (space-like) eğri,
(ii) $g(T, T)\langle 0$ ise α eğrisine zamansı (time-like) eğri,
(iii) $g(T, T) = 0$ ise α eğrisine ışıksı (light-like veya null) eğri denir(O' Neill 1983).

Tanım 2.4.21. (Lorentz İç Çarpımı)

$n \geq 1$ ve $x, y \in R^n$ vektörleri olsun.x ve y nin *Lorentzian iç çarpımı* (*skalar* çarpımı)

$$x \circ y = -x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

şeklinde tanımlanır, $R^{1,n-1}$ ile gösterilir. Ayrıca

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$$

skalar çarpımı $R^{n-1,1}$ ile gösterilir (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.22. (Lorentz Norm)

$$\|x\| = |x \circ x|^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir. $\|x\|$ pozitif, sıfır ya da pozitif imajinerdir (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.23. (Hiperkoni)

$\|x\| = 0$ olacak şekilde R^n deki tüm x vektörlerinin cümlesine C^{n-1} *hiperkonisi* denir ve $x_1y_1 = x_2y_2 + ... + x_ny_n.$ denklemi ile tanımlıdır. C^{n-1} hiper konisine R^n in *light konisi* de denir. $\|x\| = 0$ ise x e *light-like (null) vektör* denir (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.24. (Lorentz Dönüşümü)

$$\Phi : R^n \to R^n$$

fonksiyonunun bir Lorentz dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in R^n$ için $\Phi(x) \circ \Phi(y) = x \circ y$ olmasıdır. $\{\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_n\}$ R^n nin Lorentz ortonormal bazı olması için gerek ve yeter koşul $\vartheta_1 \circ \vartheta_1 = -1$ ve $\vartheta_i \circ \vartheta_j = \delta_{ij}$ $(1 \leq i \leq n$ ve $2 \leq j \leq n)$ dir.

R^n nin $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ standart bazı Lorentz ortonormal bazdır (O' Neill 1983).

Teorem 2.4.7. $\Phi : R^n \to R^n$ Lorentz dönüşümdür ancak ve ancak Φ lineer ve $\{\Phi(e_1), \Phi(e_2), ..., \Phi(e_n)\}$ bazı R^n de Lorentz ortonormaldir (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.25. (Lorentz Matrisi, Lorentz Grubu)

$n \times n$ −tipindeki $\breve{A}$ matrisi Lorentziandır ancak ve ancak $\breve{A}$ matrisine karşılık gelen

$$\begin{aligned} A : \; R^n &\to R^n \\ x &\to A(x) = \hat{A}.x \end{aligned}$$

dönüşümü Lorentziandır.

Matris çarpımı ile bütün Lorentzian $n \times n$ $-$matrislerin cümlesi $O(1, n-1)$ grubunu oluşturur. Bu gruba $n \times n$ $-$matrislerin *Lorentz grubu* denir (O' Neill 1983).

Teorem 2.4.8. A $n \times n$-tipinden bir reel matris olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) $\hat{A}$ matrisi Lorentziandır.
(ii) $\hat{A}$ matrisinin sütunları R^n nin Lorentz ortonormal bazıdır.
(iii) $\hat{A}$ matrisi $\hat{A}^{\,T}.J.\hat{A} = J$ denklemini sağlar.
(iv) $\hat{A}$ matrisi $\hat{A}\,.J.\hat{A}^T = J$ denklemini sağlar.
(v) $\hat{A}$ matrisinin satırları R^n nin Lorentz ortonormal bazıdır.

Buradaki $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}$ işaret matrisi $J^{\,2} = I_n$, $J^{\,T} = J$ ve $J^{\,-1} = J$ özeliğindedir (O' Neill 1983).

Tanım 2.4.26. (Yarı Ortogonal Gruplar)
$g \in gl(n, R)$ ve $x \in R^n$ için

$$\begin{aligned} g: \; R^n &\to R^n \\ x &\to (gx) = \sum_j^n g_{ij}.x_j, \quad 1 \le i, j \le n \end{aligned}$$

lineer operatörünü göz önüne alalım. Buna göre g ve $h : R^n \to R^n$ fonksiyonlarının bileşkesi olan $g \circ h$ fonksiyonu bu fonksiyonlara karşılık gelen matrisler G

ve H olmak üzere, GH matris çarpımına karşılık gelir. gx matrisi

$$\begin{bmatrix} g_{11} & . & . & g_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ g_{n1} & . & . & g_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} g_{1j}.x_j \\ . \\ . \\ \sum\limits_{j=1}^{n} g_{nj}.x_j \end{bmatrix}$$

biçiminde bir $n \times 1$ matrisidir.

$0 \leq \nu \leq n$ için , ε işaret matrisi $(\delta_{ij}\varepsilon_j)$ diyagonal matrisidir. Bu matrisin diyagonal elemanları

$$\begin{array}{llllll} \varepsilon_1 & = \varepsilon_2 & . & . & = \varepsilon_\nu & = -1 \\ \varepsilon_{\nu+1} & = \varepsilon_{\nu+2} & . & . & = \varepsilon_n & = 1 \end{array}$$

dir.

Buna göre

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon = \varepsilon^T$$

dir.

Bu tanımlara göre E_v^n , n-boyutlu yarı-Öklid uzayı ile eşlenen iç çarpımlı vektör uzayı R_v^n olmak üzere R_v^n üzerindeki tüm lineer izometrilerin cümlesini $O(v, n-v)$ ile gösterelim. O halde

$$O(v, n-v) = \{g \,|g : R_v^n \to R_v^n, \text{ lineer, 1:1, örten}\}$$

dir. Burada $g \in gl(n, R)$, R_ν^n in $\langle v, w\rangle = (\varepsilon v).w$ skalar çarpımını korur. Yani $\langle g(v), g(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ dir.

Şimdi $O(\nu, n-\nu)$ nin $GL(n, R)$ nin bir alt grubu olduğunu göstrerelim:

(i) $O(\nu, n-\nu) \subset GL(n,R)$ dir.

(ii) $O(\nu, n-\nu) \neq \varnothing$ dir.

(iii) $\forall A, B \in O(\nu, n-\nu)$ için $A.B \in O(\nu, n-\nu)$ dir:

(iv) $\forall A \in O(\nu, n-\nu)$ için A^{-1} vardır ve $A^{-1} \in O(\nu, n-\nu)$ dir:

O halde $A \in O(\nu, n-\nu)$ cümlesi matris çarpımı işlemine göre $GL(n,R)$ grubunun bir alt grubudur.

(v) $O(\nu, n-\nu)$ grubu kapalıdır:

$$\begin{array}{llll} f: & O(\nu, n-\nu) \subset GL(n,R) & \rightarrow & GL(n,R) \\ & \qquad g & \rightarrow & f(g) \quad = g^T \varepsilon g \quad = \varepsilon, \quad \forall g \in O(\nu, n-\nu) \end{array}$$

fonksiyonunu alalım. $0 \leq \upsilon \leq n$ için , ε işaret matrisi $(\delta_{ij}\varepsilon_j)$ diyagonal matrisidir ve bu matrisin diyagonal elemanları

$$\begin{array}{llllll} \varepsilon_1 & = \varepsilon_2 & . & . & = \varepsilon_\nu & = -1 \\ \varepsilon_{\nu+1} & = \varepsilon_{\nu+2} & . & . & = \varepsilon_n & = 1 \end{array}$$

dir.

Buna göre

$$\begin{aligned} g &= g_{ij} \\ g^T &= g_{ji} \end{aligned}$$

için

$$g \varepsilon g^T = [\delta_{ij}\varepsilon_j]$$

olur.

g_{ij} ler R^{n^2} de koordinat fonksiyonları olduklarından süreklidirler,dolayısıyla, $g^T \varepsilon g$ elemanlarının karşılık geldikleri koordinat fonksiyonları süreklidirler. Böylece f süreklidir.

ε elemanı $\forall g \in O(\nu, n-\nu)$ için sabittir ve dolayısıyla $GL(n,R)$ nin izomorf olduğu E^{n^2} nin bir sabit noktası olarak düşünülebilir. O zaman $\{\varepsilon\}$ cümlesi E^{n^2} de kapalıdır. Dolayısıyla $GL(n,R)$ de de kapalıdır.

f sürekli olduğundan,

$$f^{-1}(\{\varepsilon\}) = O(\nu, n-\nu)$$

cümlesi de $GL(n,R)$ de kapalı olur. O halde $O(\nu, n-\nu)$ grubu $GL(n,R)$ nin bir Lie alt grubudur (O' Neill 1983).

Bu gruba *yarı-ortogonal grup* denir.

NOTASYON 2.4.27. $O(\nu, n-\nu)$ yarı-ortogonal grubu kısaca $O_\nu(n)$ ile gösterilecektir (O' Neill 1983).

Teorem 2.4.9. $(n \times n)$ tipindeki bir g matrisi için aşağıdaki önermeler denktir :

(1) $g \in O_\nu(n)$

(2) $g^T = \varepsilon g^{-1} \varepsilon$ ve $g^{-1} = \varepsilon g^T \varepsilon$,

(3) g nin kolonları (satırları) R^n_ν için bir baz oluşturur.

(4) $g \in O_\nu(n)$ matrisi, R^n_ν nin ortonormal bazlarını ortonormal bazlara taşır.

Özel olarak:

(a) Eğer $\nu = 0$ veya $\upsilon = n$ ise $O_\nu(n)$ grubu, R^n Öklid uzayının tüm lineer izometrilerinin grubudur.

(b) $\nu = 1$ ve $\nu \geq 2$ için $O_1(n)$ yarı -ortogonal grubu, R^n_1 Minkowsky uzayının lineer izometrilerinin Lorentz grubudur.

Teorem 2.4.10. $O(n)$ Lie grubunun Lie cebirini $o(n)$ ile gösterirsek $o_\upsilon(n)$ Lie cebiri $gl(n,R)$ Lie cebirinin bir alt cebiridir ve $o_\nu(n)$ alt cebirini

$$o_\nu(n) = \left\{ S \in gl(n,R) : S^T = -\varepsilon S \varepsilon \right\}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Buna göre $a \in o(\nu)$, $b \in o(n-\nu)$ ve x bir $\nu \times (n-\nu)$ matris olmak üzere $\forall S \in o_\nu(n)$ için

$$S = \begin{bmatrix} a & x \\ x^T & b \end{bmatrix}$$

dir (O' Neill 1983).

3. GALİLE DÜZLEMİNDE HAREKETLER

Bu bölümde dual sayılar cümlesinin cebirsel özelikleri verilmiştir Yaglom 1979 dan faydalanarak Galile düzlemindeki uzaklık, açı, çember, trigonometrik tanımları ile temel Galile dönüşümleri verildi. Daha sonra dönme ve öteleme içeren Galile hareketlerinin oluşturduğu G(2) Galile grubu tanıtıldı. Bir parametreli Galile hareketleri ve homotetik hareketler için pol noktaları araştırıldı.

3.1 Dual Sayıların Vektör Uzayı

$$R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$$

iki boyutlu reel vektör uzayıdır. E. STUDY (1862-1930) nın keşfettiği dual sayılar cümlesi,

$$D = \left\{z = x + \varepsilon y \mid x, y \in R,\ \varepsilon \neq 0,\ \varepsilon^2 = 0\right\} \tag{3.1.1}$$

olmak üzere, $(D, +)$ bir *Abel grubu* oluşturur (Hacısalihoğlu 1993).

D dual sayılar cümlesi üzerindeki iç işlem (toplama) :

$$\begin{aligned} + : \ D \times D &\rightarrow D \\ (z_1, z_2) &\rightarrow z_1 + z_2 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

ve dış işlem (skalar ile çarpma işlemi) :

$$\begin{aligned} \cdot : \ R \times D &\rightarrow D \\ (\lambda, z) &\rightarrow \lambda . z \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

olmak üzere $z_1 = x_1 + \varepsilon y_1$, $z_2 = x_2 + \varepsilon y_2$, $z_3 = x_3 + \varepsilon y_3 \in D$, $\lambda, \mu \in R$ için

(i) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \varepsilon(y_1 + y_2) \in D$.

(ii) $(z_1 + z_2) + z_3 = [(x_1 + x_2) + x_3] + \varepsilon[(y_1 + y_2) + y_3]$

$= [x_1 + (x_2 + x_3)] + \varepsilon[y_1 + (y_2 + y_3)]$

$= z_1 + (z_2 + z_3)$.

(iii) $0 = 0 + \varepsilon 0 \in D$ için $z_1 + 0 = (x_1 + 0) + \varepsilon(y_1 + 0)$.

(iv) $-z_1 = (-x_1) + \varepsilon(-y_1) \in D$ için $z_1 + (-z_1) = (x_1 + (-x_1)) + \varepsilon(y_1 + (-y_1)) = 0$.

(v) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \varepsilon(y_1 + y_2)$

$= (x_2 + x_1) + \varepsilon(y_2 + y_1)$

$= z_2 + z_1$

dir. Böylece $(D, +)$ *Abel grubu* dur.

(vi) $\lambda.z = \lambda x + \varepsilon(\lambda y), \lambda x, \lambda y \in R$ *ve* $\lambda.z \in D$.

(vii) $(\lambda + \mu)z = (\lambda + \mu)x + \varepsilon(\lambda + \mu)y, \lambda x, \mu x, \lambda y, \mu y \in R$ ve $(\lambda + \mu)z \in D$.

(vii) $\lambda(z_1 + z_2) = \lambda(x_1 + x_2) + \varepsilon\lambda(y_1 + y_2)$

$= \lambda(x_1 + \varepsilon y_1) + \lambda(x_2 + \varepsilon y_2)$

$= \lambda z_1 + \lambda z_2$

(ix) $(\lambda\mu)z = (\lambda\mu)x + \varepsilon(\lambda\mu)y, (\lambda\mu)x, (\lambda\mu)y \in R,$

$= \lambda(\mu x) + \varepsilon\lambda(\mu y)$

$= \lambda[\mu x + \varepsilon(\mu y)]$ ve $(\lambda + \mu)z \in D$.

$= \lambda(\mu z)$

(x) $\forall z \in D$, $1 \in R$ için $1.z = z \in D$.

Böylece D dual sayılar cümlesi , R reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Ayrıca

$$\begin{array}{rccl} f: & D \times D & \rightarrow & R^2 \\ & (z_1, z_2) & \rightarrow & f(z_1, z_2) = \overrightarrow{z_1 z_2} \end{array} \tag{3.1.4}$$

fonksiyonu ile D cümlesi R^2 ile birleştirilmiş bir afin uzaydır. Böylece

(i) $\forall\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in D$ için

$\overrightarrow{z_1\ z_3} = \overrightarrow{z_1\ z_2} + \overrightarrow{z_2\ z_3}$

dir.

(ii) $\forall z \in D$ ve $\forall \alpha \in R^2$ *için*

$\overrightarrow{z\ z_1} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $z_1 \in D$ noktası vardır.

$\overrightarrow{z\ z_1}$ vektöründe z noktasına başlangıç noktası ve z_1 noktasına da uç noktası denir. Diğer yandan D nin boyutu R^2 nin boyutudur; yani

$$boy D = boy R^2$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 3.1.1.(D Üzerinde İççarpım)
$z_1 = x_1 + \varepsilon y_1$ ve $z_2 = x_2 + \varepsilon y_2 \in D$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \ D \times D &\longrightarrow \quad R \\ (z_1, z_2) &\longrightarrow \ \langle z_1, z_2 \rangle \ = re(z_1 \overline{z_2}) \\ & \qquad\qquad\quad = x_1 x_2 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

olarak tanımlanan $\langle , \rangle$ işlemi D üzerinde *indefinit iççarpım* işlemidir. (Hacısalihoğlu 1993)

$\forall z_1 = x_1 + \varepsilon y_1$ ve $z_2 = x_2 + \varepsilon y_2 \in D$ için,

(i) Konjuge simetri özeliği:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \overline{\langle z_2, z_1 \rangle}$$

dır.

(ii) Bilineerlik özeliği:

$$\begin{aligned} a) \quad \langle z_1 + z_2, z_3 \rangle &= \langle z_1, z_3 \rangle + \langle z_2, z_3 \rangle \\ b) \qquad \lambda \langle z_1, z_2 \rangle &= \langle \lambda z_1, z_2 \rangle \end{aligned}$$

dır.

(iii) İndefinit özeliği:

$\forall z \in D$ için,

$$\langle z, z\rangle \geq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$$

$\langle z, z\rangle = re(z.\overline{z}) = x^2 \geq 0$ dir.Şimdi $z \neq 0$ olmasını irdeleyelim:

$$z \neq 0 \begin{cases} z = x + \varepsilon 0 \Leftrightarrow \langle z, z\rangle\rangle 0 \\ z = 0 + \varepsilon y \Leftrightarrow \langle z, z\rangle = 0 \end{cases}.$$

dir.

$$\langle z, z\rangle = re(z.\overline{z}) = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ve } y \neq 0$$

Böylece, $z = 0 + \varepsilon y$ dir. $y \neq 0$ olabilir. O halde

$$\langle z, z\rangle = 0 \text{ olmasına rağmen } z \neq 0$$

olabilir. Dolayısıyla $\langle , \rangle$ işlemi D de pozitif definit değildir.

Tanım 3.1.2. (Baz)

$z \in D$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z &= x + \varepsilon y \\ &= x.1 + \varepsilon y \\ &= x(1 + 0\varepsilon) + (0 + \varepsilon)y \\ &= x(1, 0) + y(0, 1) \end{aligned}$$

olarak düşünüldüğünde D deki bir bazın

$$\{(1, 0), (0, 1)\} \tag{3.1.6}$$

olduğu görülür.

$$\varepsilon = (0, 1) \tag{3.1.7}$$

dual birimdir (Hacısalihoğlu 1993).

(3.1.6) için

$$\begin{aligned}
\langle(1,0),(0,1)\rangle &= 0 \\
|1+\varepsilon 0| &= 1 \quad \text{ve} \quad |0+\varepsilon 1| = 0
\end{aligned}$$

olduğundan $\{(1,0),(0,1)\}$ sistemi ortonormal değildir.

Tanım 3.1.3. (Galile Düzlemi)

D afin uzayını R^2 üzerindeki yukarıdaki iç çarpım ile düşünerek , D ye *Galile düzlemi* denir ve $(R^2, D, \langle,\rangle)$ veya G^2 ile gösterilir.

Tanım 3.1.4.(Norm)

D üzerinde tanımlı $\langle,\rangle$ işlemine göre $P=(x,y)$ noktasının O başlangıç noktasına olan uzaklığı

$$\begin{aligned}
\psi(O,P) &= \overrightarrow{OP} \\
&= \overrightarrow{z} \\
&= x+\varepsilon y
\end{aligned}$$

olmak üzere,

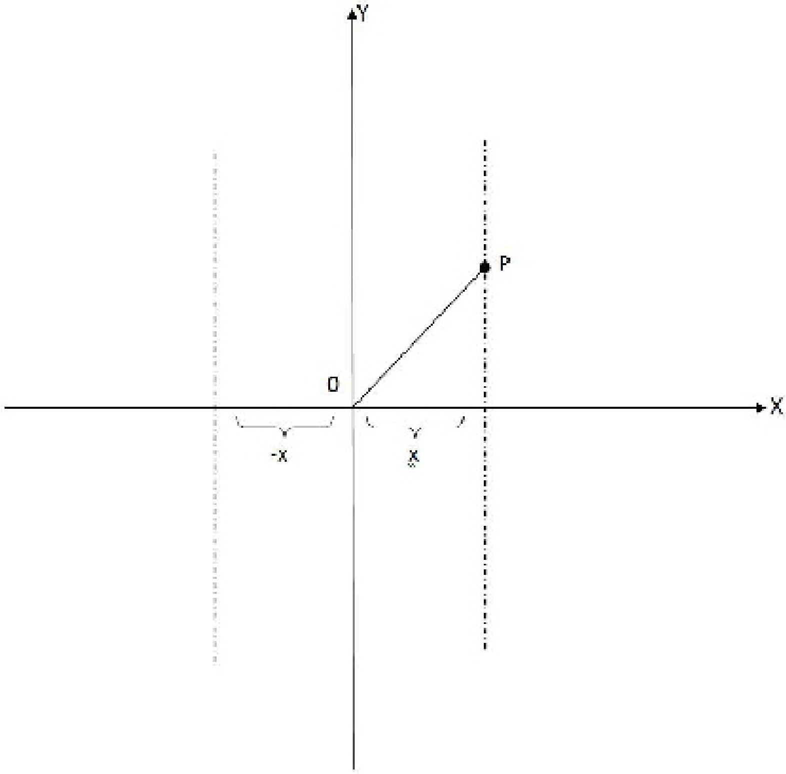
$$d(O,P) = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$$

veya

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{z}\| &= \sqrt{\langle z,z\rangle} \\
&= \sqrt{re(z,\overline{z})} \\
&= \sqrt{x^2} \\
&= |x|
\end{aligned}$$

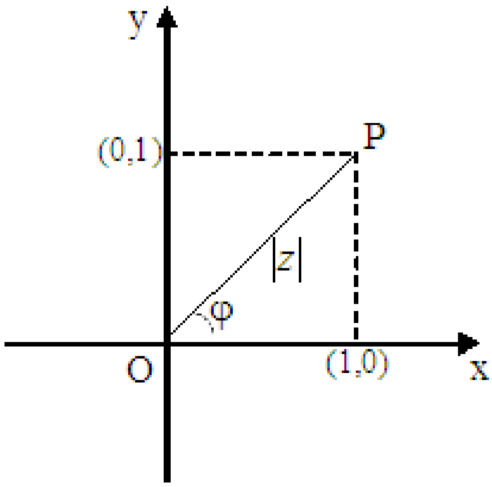
olarak tanımlanır.

-2



$_1.jpg$

Şekil 3.1 Galile düzleminde bir noktanın orjine olan uzaklığı



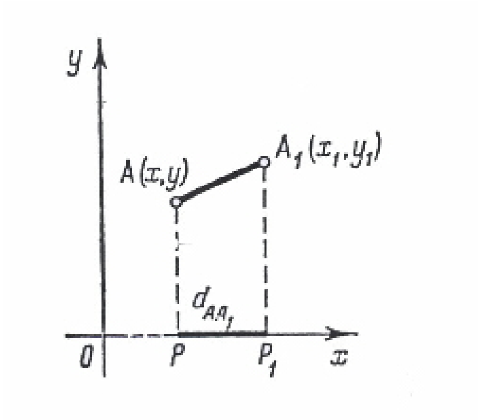
Şekil 3.2 Bir dual sayının normu

Galile düzlemini Yaglom'a göre yeniden tanımlayabiliriz. Burada, sadece norm tanımına değineceğiz. $X=(x_1,x_2)\in R^2$ için $\|.\|$ tanımı,

$$\|X\|=\begin{cases} |x_1|\,, & x_1\neq 0 \\ |x_2|\,, & x_1=0 \end{cases} \tag{3.1.8}$$

şeklinde verilir. Bu norm dual sayılar yardımıyla verilen norm ile $x_1\neq 0$ halinde çakışmaktadır.

Tanım 3.1.5 **(Galile Düzleminde Uzaklık ve Özel Uzaklık)**

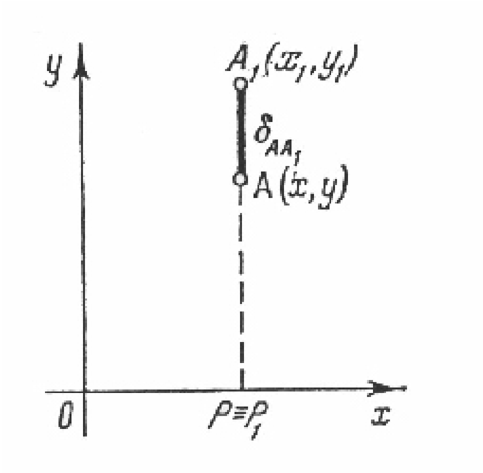


Şekil 3.3 Galile düzleminde d_{AA_1} uzaklığı

Galile geometrisinde $A(x,y)$, $A_1(x_1,y_1)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d_{AA_1}=x_1-x \tag{3.1.9}$$

AA_1 doğru parçasının $x-ekseni$ üzerindeki PP_1 projeksiyonunun işaretli uzunluğudur.



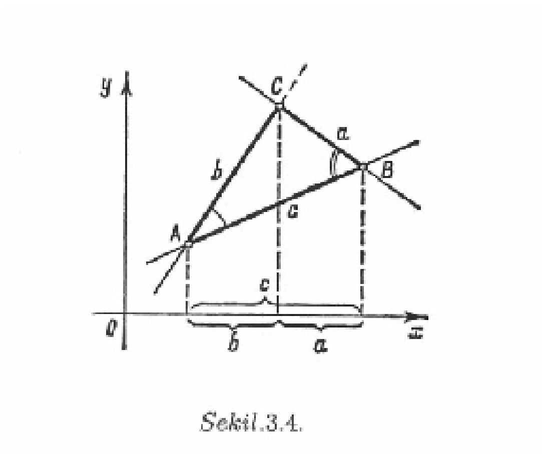
Şekil 3.4 Galile düzleminde δ_{AA_1} özel uzaklığı

$d_{AA_1} = 0$ ise $x_1 = x$ ve A ve A_1 aynı özel doğru üzerindedir. Bu durumdaki noktalar için

$$\delta_{AA_1} = y_1 - y \tag{3.1.10}$$

özel uzaklığı söz konusudur (Yaglom 1979).

Galile düzleminde herhangi bir ABC üçgenindeki kenar uzunluklarını incelediğimizde;



Şekil 3.5 G^2 de ABC üçgenindeki kenar uzunlukları

$$\left.\begin{array}{r} d_{AB} = a + b \\ d_{BC} = a \\ d_{CA} = b \end{array}\right\} d_{BC} + d_{CA} = d_{AB} \tag{3.1.11}$$

olduğu görülür (Yaglom 1979).

Sonuç : Galile üçgeninde iki kenarın uzunlukları toplamı üçüncü kenarın uzunluğuna eşittir.

Tanım 3.1.6. (Galile Çemberi)

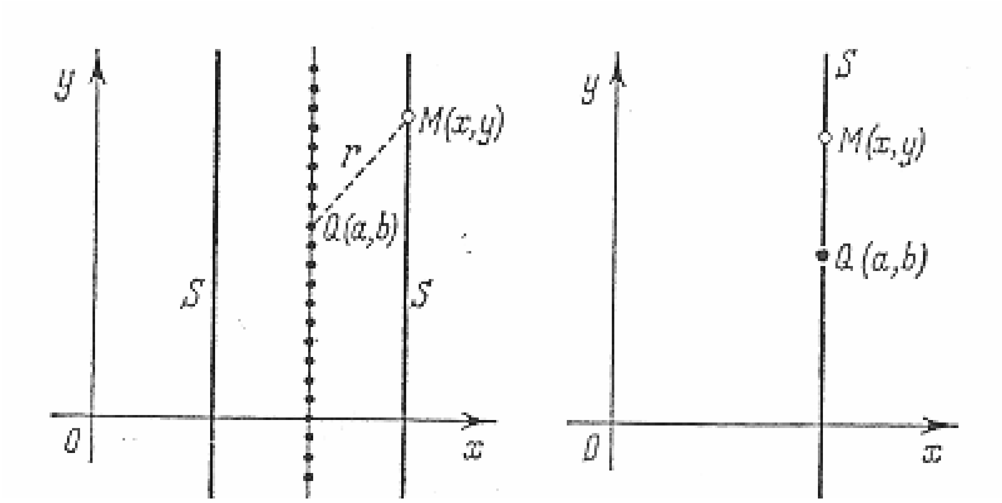
Galile düzleminde sabit bir $Q(a,b)$ noktasına mutlak uzaklığı r $(r \in R^{+})$ olan $M(x,y)$ noktalarının S_G^r cümlesine *Galile çemberi* denir.

$$\begin{aligned} d_G(Q,M) &= r \\ S_G^r &= \left\{ M(x,y) \,\middle|\, d_G^2(Q,M) = r^2 \right\} \\ (x-a)^2 &= r^2 \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

$p = -a$ ve $q = a^2 - r^2$ olmak üzere

$$x^2 + 2px + q = 0$$

dir. Q merkezli, r yarıçaplı S_G^r Galile çemberi, Q noktasından r Öklid mesafesindeki iki özel ($y-$eksenine paralel) doğru üzerindeki noktalardan oluşur. $r = 0$ ise bu iki özel doğru çakışır. Önemle vurgulamalıyız ki, belirli bir r yarıçapı (iki bileşenli özel doğruları arasındaki Öklid mesafesinin yarısı) olan bir S_G^r Galile çemberinin , Q daki özel doğrusu üzerinde sonsuz çoklukta merkezi vardır (Yaglom 1979).



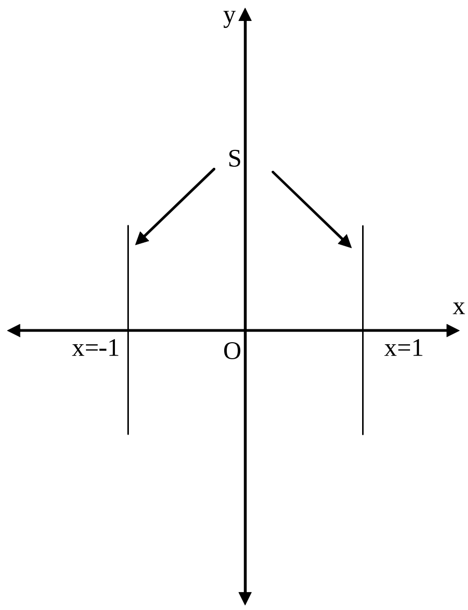
Şekil 3.6 S_G^r, G^2 de $r-$ yarıçaplı Galile çemberi

Galile düzleminde birim çember,

$$S_G^1 = \{P(x,y)\,|d_G(O,P) = 1\} \tag{3.1.13}$$

dir (Yaglom 1979).

$$\begin{aligned} d_G(O,P) &= \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \\ &= \|x+\varepsilon y\| \\ &= |x| \\ &= 1 \end{aligned}$$

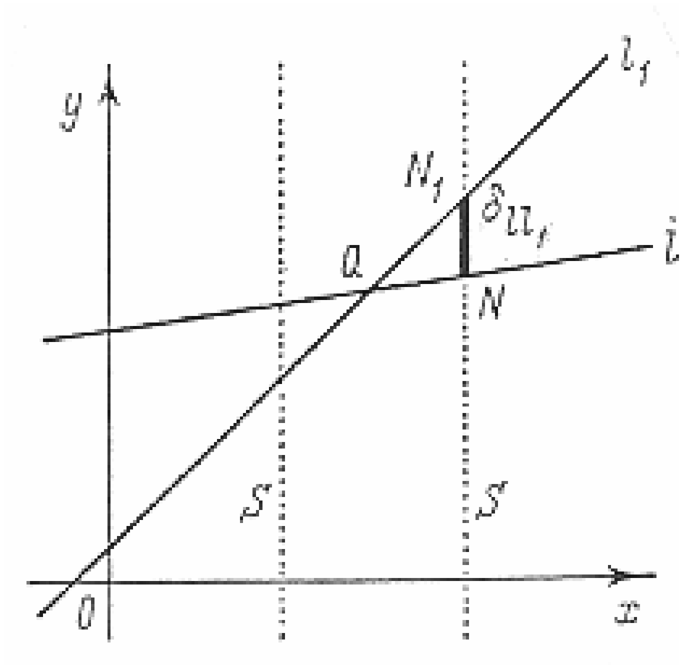


Şekil 3.7 G^2 de birim çember

Tanım 3.1.7. (**İki Doğru Arasındaki Açı)**

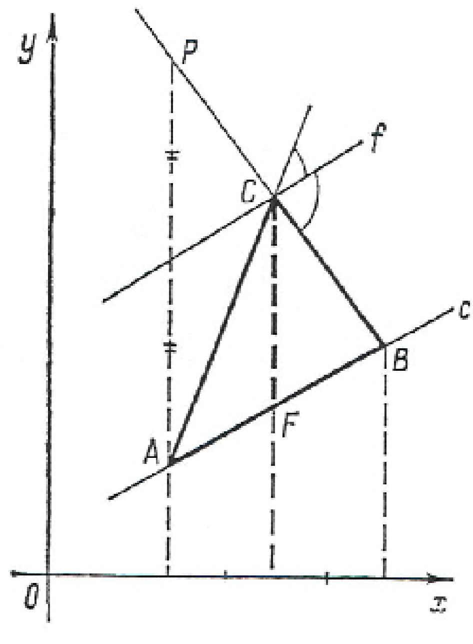
Galile düzleminde , l ve l_1 doğruları arasındaki δ_{ll_1} açısının ölçüsü, bu doğruların ortak noktasını merkez alan birim çember üzerinde belirli NN_1 yayının uzunluğudur. Doğal olarak bu birim Galile çemberi üzerindeki NN_1 yayının uzunluğu δ_{NN_1} özel uzaklığıdır.

$$\begin{aligned} \delta_{ll_1} &= \overline{NN_1} \\ &= \delta_{NN_1} \end{aligned} \tag{3.1.14}$$



Şekil 3.8 Galile düzleminde l ve l_1 doğruları arasındaki δ_{ll_1} açısı

Galile düzleminde herhangi bir ABC üçgeninin açılarının ölçülerini incelediğimizde;



Şekil 3.9 G^2 de ABC üçgeninde açı ölçüleri

$$\left.\begin{array}{l} m(ABC) = d_{KP} \\ m(BAC) = d_{AK} \\ m(ACB) = d_{AP} \end{array}\right\} d_{KP} + d_{AK} = d_{AP} \tag{3.1.15}$$

den dolayı

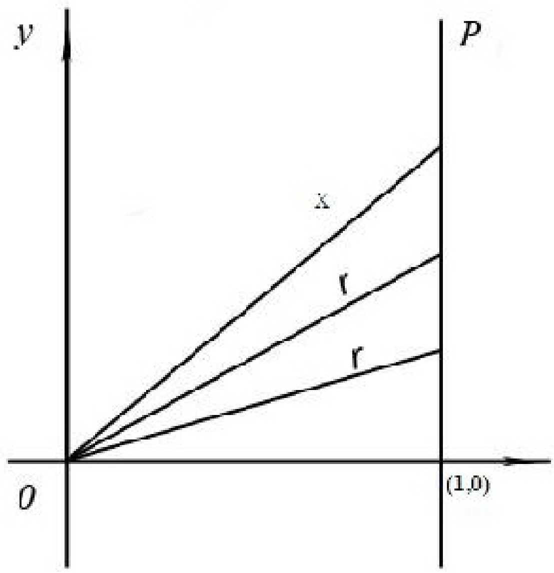
$$m(B) + m(A) = m(C) \tag{3.1.16}$$

olduğu görülür (Yaglom 1979).

Sonuç 3.1.1. Galile üçgeninde en geniş açının ölçüsü diğer iki açının ölçüleri toplamıdır.

Tanım 3.1.8. (Galile Düzleminde Trigonometri)

$$S_G^1 = \{(1, y) \mid y \in R\} \tag{3.1.17}$$



Şekil 3.10 G^2 de trigonometri

birim Galile çemberi üzerinde $\forall\vartheta \in R$ ve $z = x + \varepsilon y \in D$ için

$r = |z| = |x|\,, \quad d_G(O,P) = x$ olacağından,

$$\begin{aligned} \cos g\vartheta &= \frac{x}{d_G(O,P)} = 1 && (3.1.18) \\ \sin g\vartheta &= \frac{y}{x} = \vartheta && (3.1.19) \end{aligned}$$

dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} z &= x + \varepsilon y \\ &= x(1 + \varepsilon \frac{y}{x}) \qquad x \neq 0 \\ &= r(1 + \varepsilon\vartheta) \\ &= r(\cos g\vartheta + \varepsilon \sin g\vartheta) && (3.1.20) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= e^{\varepsilon\vartheta} = 1 + \varepsilon\vartheta + \left(\frac{\varepsilon\vartheta}{2}\right)^2 + ... \\ &= 1 + \varepsilon\vartheta && (3.1.21) \end{aligned}$$

Galile düzleminde *Euler formülü* olarak verilir (Yaglom 1979).

Ayrıca,

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon.\vartheta)^n &= 1 + \varepsilon.n.\vartheta \\ (\cos g\vartheta + \varepsilon \sin g\vartheta)^n &= \cos g(n.\vartheta) + \varepsilon \sin g(n.\vartheta) && (3.1.22) \end{aligned}$$

D'moivre formülü elde edilir.

Tanım 3.1.9. (Galile Düzleminde Sinüs Teoremi)

Galile düzleminde bir ABC üçgeninde $d_{BC} = a, d_{AC} = b, d_{AB} = c$ ve $\sin gA = A, \sin gB = B, \sin gC = C$ olduğundan

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \qquad (3.1.23)$$

bağıntısı vardır (Yaglom 1979).

Örnek 3.1.1. Galile çemberinde Öklid çemberinde olduğu gibi teğet yarıçapa değme noktasında diktir. Gerçekten bir $\alpha(t) = (1, t) = 1 + \varepsilon t$ eğrisi üzerindeki teğet vektör alanı:

$$\begin{aligned} T_{\alpha(t)} &= \acute{\alpha}(t) \\ &= (0, 1) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olup,

$$\langle \alpha(t), \acute{\alpha}(t) \rangle = 0$$

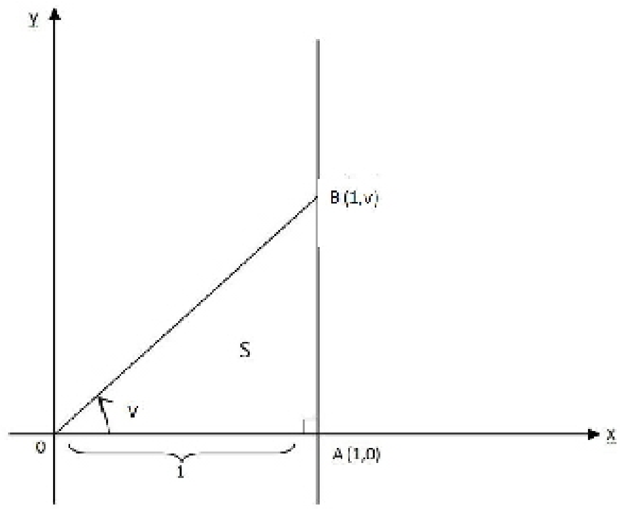
dir. Dolayısıyla

$$\alpha(t) \perp \acute{\alpha}(t) \tag{3.1.24}$$

yer vektörü teğet vektörüne diktir.

Örnek 3.1.2. G^2 de bir ϑ açısının gördüğü yay $\overline{AB}$ olmak üzere,

-4



$_1 1.jpg$

Şekil 3.11 G^2 de yay uzunluğu

OAB dik üçgeninde $(\overline{AB_G}$=ϑ_G=$|AB|_{Ö})$ için,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}.d_{OA}.d_{AB} \\ &= \frac{1}{2}.1.\,|AB| \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla yay uzunluğu ve daire kesmesinin alanı arasında

$$\overline{AB_G} = |AB|_{Ö} = 2.S \tag{3.1.25}$$

bağıntısı varır.

3.2. Dual Sayıların Matris Temsili

D vektör uzayı üzerinde $z = x + \varepsilon y$ vektörünün etkisini araştıralım :

$$\begin{aligned} f_z : \; D &\longrightarrow \quad D \\ \omega &\longrightarrow f_z(\omega) = z.\omega \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi, D nin bir bazı $\{1, \varepsilon\}$ olduğundan,

$$\left.\begin{aligned} f_z(1) &= z.1 = x + \varepsilon y \\ f_z(\varepsilon) &= z.\varepsilon = (x + \varepsilon y)\varepsilon = 0 + \varepsilon x \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \; f_z = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & x \end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

dir. Böylece $\omega = a + \varepsilon b \in D$ noktasına $z = x + \varepsilon y$ dual sayısının sol etkisi ,

$$\begin{aligned} f_z(\omega) &= z.\omega \\ &= \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax \\ ay + bx \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

olarak bulunur.

Bu matrisler içerisinde $x = 1$ için elde edilen, $z = 1 + \varepsilon\vartheta$ na karşılık gelen (birim dual sayılar) matrisinin önemli uygulamaları vardır.

Tanım 3.2.1. (**Düzlemde Shear Hareketi ve Galile Hareketleri**)
D vektör uzayı üzerinde $z = 1 + \varepsilon\vartheta$ birim dual sayısına karşılık gelen matrisin oluşturduğu dönüşüm:

$$\begin{array}{rcccl} f_z : G^2 & \longrightarrow & G^2 & & \\ \omega & \longrightarrow & f_z(\omega) & = & z.\omega \\ & & & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vartheta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ & & & = & (x, \vartheta x + y) \end{array} \tag{3.2.4}$$

dir. Böylece

$$\left.\begin{array}{rl} x' = & x \\ y' = & \vartheta x + y \end{array}\right\}$$

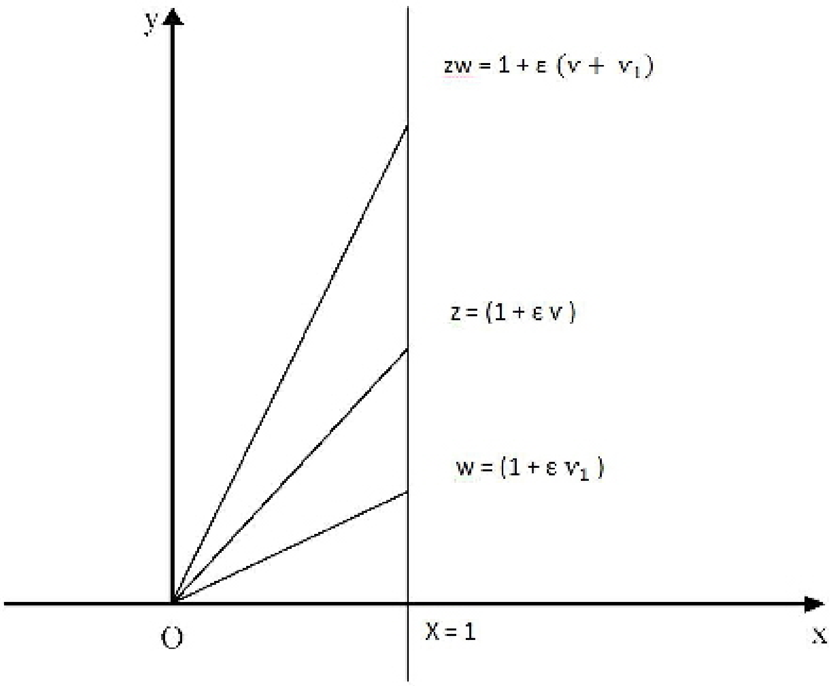
veya matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vartheta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dönüşümüne G^2 de *Shear (Kırpma) hareketi* (*Galile transformasyonu*) denir

(Yaglom 1979). $z = 1 + \varepsilon\vartheta, \omega = 1 + \varepsilon\vartheta_1 \in S_G^1$ için ;

-5



$_1 2.jpg$

Şekil 3.12 z, w biri dual sayılarının çarpımı

dir. Dolayısıyla

$$\begin{array}{rlllll} f_z: & S_G^1 & \longrightarrow & S_G^1 & & \\ & \omega & \longrightarrow & f_z(\omega) & = z\omega & = (1+\varepsilon\vartheta)(1+\varepsilon\vartheta_1) \\ & & & & & = 1+\varepsilon(\vartheta+\vartheta_1) \end{array} \quad (3.2.5)$$

yazılır. $z = e^{\varepsilon\vartheta} = 1 + \varepsilon\vartheta$ ile ω yı çarpmak demek, ω yi ϑ kadar Galile anlamında döndürmek demektir. , $z = e^{\varepsilon\vartheta} = 1 + \varepsilon\vartheta$ birim dual sayısı, birim kompleks sayıların rolünü Galile düzleminde oynamaktadır. Galile düzleminde $z = e^{\varepsilon\vartheta} = 1 + \varepsilon\vartheta$ operatörüne *shear (kırpma) operatörü* denir. Burada,

$$z = 0 + 1.\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

için

$$e^{\varepsilon\vartheta} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vartheta & 0 \end{bmatrix}}$$

açılımından

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon\vartheta} &= I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vartheta & 0 \end{bmatrix} + [0] + ... \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vartheta & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

olur. Harekette öteleme de yer alabilir, gerçekten $z_0 = a + \varepsilon b$ için

$$\begin{aligned} z' &= e^{\varepsilon\vartheta}.z + z_0 \\ &= (1 + \varepsilon\vartheta)(x + \varepsilon y) + (a + \varepsilon b) \\ &= (x + a) + \varepsilon(\vartheta x + y + b) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

konumu ile G^2 de bir genel hareket

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + 0y + a \\ y' &= \vartheta x + y + b \end{aligned} \right\} \tag{3.2.9}$$

veya matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ \vartheta & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.10}$$

olarak tanımlanan bir dönüşümdür.

Not 3.2.1. *Shear* hareketinde sabit noktaları bulmak için

$$f(x, y) = (x, y)$$

denklemini gözönüne alalım: (3.2.4) ile

$$(x, \vartheta x + y) = (x, y)$$

dir. Böylece

$$\left.\begin{array}{r} x = x \\ \vartheta x + y = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \vartheta \neq 0 \\ x = 0 \\ y \ \text{ keyfi} \end{array}\right\}$$

dir. Dolayısıyla Oy ekseni üzerindeki noktalar sabit kalır. $z = e^{\varepsilon\vartheta} = 1 + \varepsilon\vartheta$ için

$$\begin{array}{rccl} f_z : & D & \longrightarrow & D \\ & X & \longrightarrow & f_z(X) \ = z.X + C \end{array} \tag{3.2.11}$$

ifadesinin matris formu

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ \vartheta & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.12}$$

şeklindedir. Herhangi iki $X = x_1 + \varepsilon y_1$ ve $Y = x_2 + \varepsilon y_2 \in D$ için

$$\begin{aligned} d_G(X,Y) &= \|XY\| = |x_2 - x_1| \\ d_G(f_z(X), f_z(Y)) &= \|f_z(X) f_z(Y)\| = |x_2 - x_1| \\ d_G(X,Y) &= d_G(f_z(X), f_z(Y)) \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

dolayısıyla f_z Galile transformasyonudur.

Teorem 3.2.1 . $f : D \longrightarrow D$ Galile transformasyonu bir shear ve bir ötelemenin bileşkesi şeklinde yazılabilir.

İspat : (3.2.8) den genel bir Galile transformasyonu

$$f:\left.\begin{array}{rc} x''= & x+a \\ y''= & \vartheta x+y+b \end{array}\right\}$$

olsun. Burada

$$\left.\begin{array}{ll} g:\left.\begin{array}{rc} x'= & x \\ y'= & \vartheta x+y \end{array}\right\} & \text{Shear} \\ h:\left.\begin{array}{rc} x''= & x' \\ y''= & y'+b \end{array}\right\} & \text{Öteleme} \end{array}\right\} \Rightarrow f=h\circ g$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f(x,y) &= h(g(x,y)) \\ &= h(x',y') \\ &= (x'',y'') \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.2.2. G^2 de (3.2.10) daki dönüşümlerin cümlesi bileşim işlemine göre bir grup oluşturur ve bu gruba *Galile grubu* denir (Yaglom 1979).

$$G(2)=\left\{R\,\middle|\,R:G^2\to G^2, z=x+\varepsilon y, z_0=a+\varepsilon b,\quad z'=e^{\varepsilon\vartheta}.z+z_0\right\} \tag{3.2.14}$$

İspat: $(G(2),\circ)$ nin grup olduğunu gösterelim:

(i) $(\circ)$ işleminin $G(2)$ de kapalılık özeliği:
$\forall R_1,R_2\in G(2)$ için $R_1\circ R_2\in G(2)$ dir.

$R_1=\begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2=\begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vartheta_1 & 1 \end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vartheta_2 & 1 \end{bmatrix}$ ve

$$A = A_1.A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 & 1 \end{bmatrix} \in G(2) \text{ dir.}$$

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1.A_2 & A_1.C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(2)$$

Burada $A_1.C_2 + C_1$ bir ötelemedir.

(ii) $(\circ)$ işleminin $G(2)$ de birleşimlilik özeliği:

$\forall R_1, R_2, R_3 \in G(2)$ için $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$ dir.

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = \left(\begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1A_2 & A_1C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1A_2 & A_1A_2C_3 + A_1C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_2A_3 & A_2C_3 + C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

olur.

(iii) $(\circ)$ işleminin $G(2)$ de etkisiz eleman özeliği:

$\forall R \in G(2)$ için $R \circ I = I \circ R = R$ olan bir $I \in G(2)$ vardır ve bu

$$I : G^2 \to G^2$$

özdeşlik dönüşümüdür.

$$R \circ I = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{c} Ax + Cz = A \\ Ay + Ct = C \\ z = 0 \\ t = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} Ax = A \Rightarrow x = AA^{-1} = I_2 \\ Ay + C.1 = C \Rightarrow Ay = 0 \Rightarrow y = 0 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{array}$$

bulunur. Buradan

$$I = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(2)$$

elde edilir.

(iv) $(\circ)$ işleminin $G(2)$ de ters eleman özeliği:

$\forall R \in G(2)$ için $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = I$ olan bir $R^{-1} \in G(2)$ vardır.

$$R^{-1} : G^2 \to G^2$$

$$R \circ R^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\left.\begin{array}{c} Au + Cy = I_2 \\ Av + Cz = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} Au = I_2 \Rightarrow u = I_2 A^{-1} \Rightarrow u = A^{-1} \\ Av + C.z = 0 \Rightarrow Av = -CI_2 \Rightarrow v = -A^{-1}C \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}$$

bulunur. Buradan

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(2)$$

elde edilir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vartheta & 1 \end{bmatrix}, \det A = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\vartheta & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} -A^{-1}C &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\vartheta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a \\ \vartheta a - b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Buradan

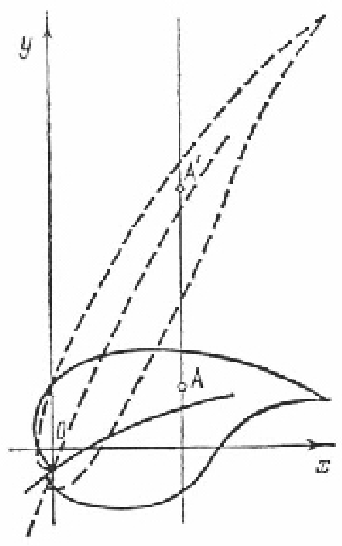
$$R^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(2)$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ -\vartheta & 1 & a\vartheta - b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece $(G(2), \circ)$ ikilisi bir gruptur.

Örnek 3.2.1. $\vartheta \neq 0$ olmak üzere y ekseni boyunca Galile hareketi yaptıran matrisler şu formdadır..

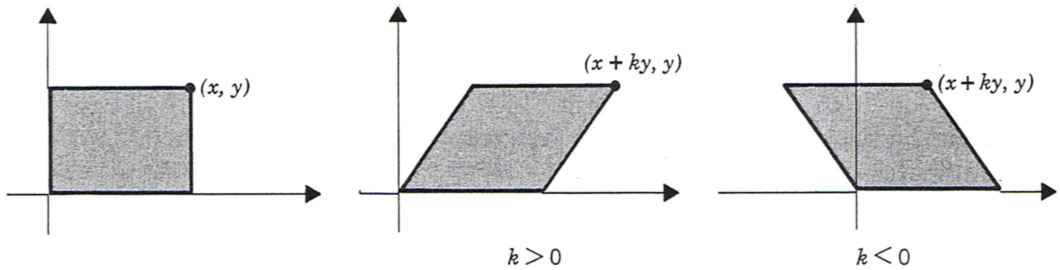
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.15}$$



Şekil 3.13 y ekseni boyunca $\vartheta -$ katı ile Galile(shear) hareketi

Örnek 3.2.2. x ekseni boyunca *k-katı* ile Galile (shear) hareketi şöyledir :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix} \tag{3.2.16}$$



Şekil 3.14 x ekseni boyunca $k-$ katı ile Galile(shear) hareketi

Tanım 3.2.3. $G(2)$ Galile (transformasyonları) grubu (3.2.14) altında G^2 deki değişmezlerin teorisine *Galile geometrisi* denir (Yaglom 1979). Bu değişmezlerin birkaçı şunlardır:

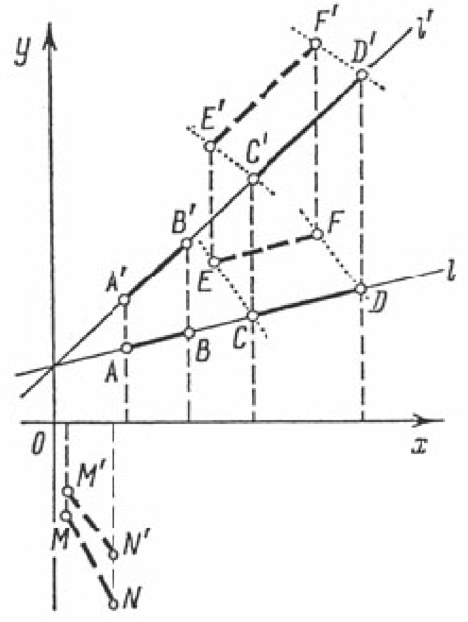
1. Doğru olma özeliği korunur.

2. Doğruların paralelliği korunur.

3. Doğru parçalarını bölme oranı korunur.

4. Alan büyüklükleri korunur.

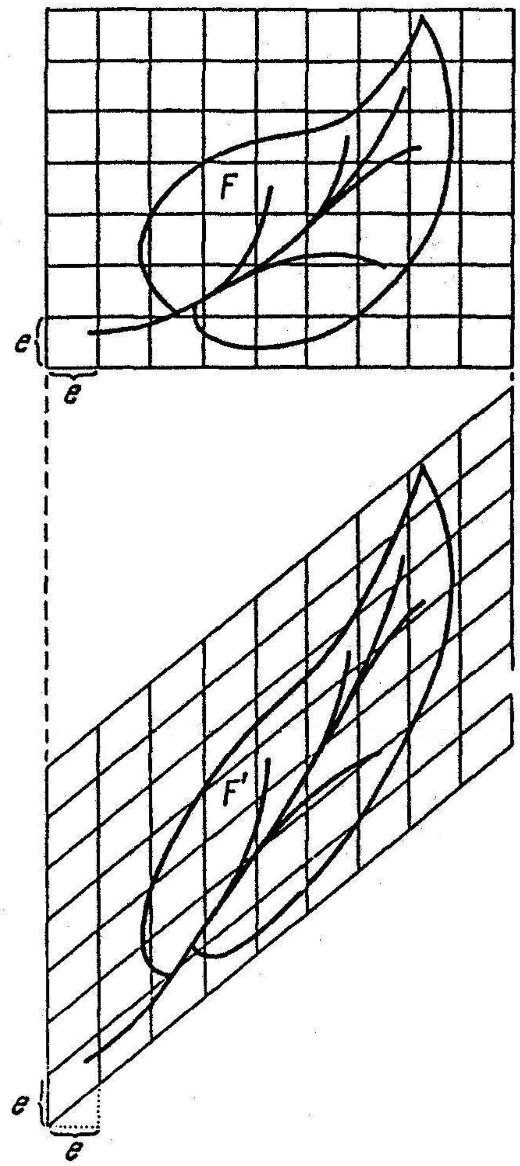
İspat.(**3**)



Şekil 3.15 G^2 de doğru parçalarını bölme oranı

(1) den $\frac{|C'D'|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$ olduğundan $\frac{|C'D'|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|AB|}$ dir. $[AB] \parallel [EF]$ için Galile grubu etkisi ile (2) den $[A'B'] \parallel [E'F']$ elde edilir. (1) ile $\frac{|E'F'|}{|A'B'|} = \frac{|EF|}{|AB|}$ dir. $|EF| = |CD|$ ve $|E'F'| = |C'D'|$ olduğundan Galile grubu etkisi ile $CDFE$ paralelkenarı $C'D'F'E'$ na resmedilir. Dolayısıyla Galile geometrisinde paralel doğruların uzunlukları oranı invaryant kalır. Bununla birlikte $[AB] \nparallel [MN]$ için Galile grubu etkisi ile $|AB| \langle |A'B'|$ ve $|MN| \rangle |M'N'|$ olduğundan $\frac{|M'N'|}{|A'B'|} \neq \frac{|MN|}{|AB|}$ elde edilir. Yani Galile grubu etkisi ile paralel olmayan doğruların uzunlukları oranı değişir.(Yaglom 1979).

(4)



Şekil 3.16 G^2 de alan büyüklükleri

F şeklinin alanı, şekil içerisindeki e^2 br^2 lerin toplam sayısıdır. Galile grubu etkisi ile F şeklinden F' ve her bir S karesinde S' parelelkenarı elde edilir. Bir shear etkisinde Oy eksenine parelel doğrular invaryant kaldığından, S' nin Oy eksenine paralel kenar uzunluğu e ve aralarındaki dik mesafe e dir. Dolayısıyla $alanS' = e^2 = alanS$ ve $alanF' = alanF$ dir.

Tanım 3.2.4. (Düzlemde Bir Parametreli Galile Hareketleri)

Bir $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon(t) & 1 \end{bmatrix}$ Galile dönüşümü ve $C(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$ öteleme matrisi ile

$$\begin{aligned} f: \; G^2 &\rightarrow G^2 \\ X &\rightarrow f(X) = A(t).X + C(t) \\ &\qquad\quad\;\; = Y(t) \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

dönüşümüne *bir- parametreli Galile hareketi* denir.

Başlangıçta $t = 0$, $\upsilon(0) = C(0) = 0$ ve dolayısı ile $Y = X$ dir.

$$\dot{Y}(t) = \dot{A}(t).X + \dot{C}(t) + A(t).\dot{X}$$

ile belirli hız denkleminde, $\dot{Y}(t)$ hareketin "mutlak hızı" , $\dot{A}(t).X + \dot{C}(t)$ " sürüklenme hızı" $A(t).\dot{X}$ " rölatif hızı" ($X = X(t)$ olması hali) dır.
Şimdi sürüklenme hızının sıfır olduğu noktaları bulalım:

$$\dot{A}(t).X + \dot{C}(t) = 0$$

denkleminin çözüm cümlesi hareketin pol noktalarını verir.

$$\dot{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\upsilon}(t) & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det \dot{A} = 0$$

Bu durumda, hareket regüler olmadığından çözüm tek değildir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\upsilon}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\dot{a}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = sbt$ olmalı ($t = 0$ da $a(0) = 0$ idi) . Dolayısıyla $\forall t$ için $a(t) = 0$ dir..
$\dot{\upsilon}(t)x + \dot{b}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\dot{b}(t)}{\dot{\upsilon}(t)}$ ($\dot{\upsilon}(t) \neq 0$) dir..

Böylece $C(t) = (0, b(t))$ ve her t anında bir pol ekseni vardır. Bu eksen düzlemde $x = -\frac{\dot{b}(t)}{\dot{v}(t)}$ doğrusudur.

Yani , Galile düzleminde $\forall t$ anında bir pol ekseni vardır. Ayrıca $\forall t$ için bu eksenler paraleldir.

Şimdi Öklid düzlemindeki hareketin pol noktalarına bakalım:

Öklid düzleminde

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$$

hareketi için;

$$\dot{Y}(t) = \dot{A}(t).X + \dot{C}(t) + A(t).\dot{X}$$

hız denkleminde $\dot{Y}(t)$ " mutlak hız" , $\dot{A}(t).X + \dot{C}(t)$ " sürüklenme hızı" , $A(t).\dot{X}$ " rölatif hız" dır.

$$\dot{A}(t).X + \dot{C}(t) = 0$$

denkleminin çözüm cümlesi hareketin pol noktalarını verir.

$$\dot{A}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{bmatrix} \Longrightarrow \det \dot{A} = 1$$

Bu durumda hareket regülerdir. Her t anında bir tek pol noktası vardır. Bu nokta

$$\dot{A}.X + \dot{C} = 0$$

denkleminden

$$X = -\dot{A}^{-1}.\dot{C}$$

dir. Öklid düzleminde her t anında bir pol noktası vardır. Galile hareketlerinde ise bir pol doğrusu vardır.

Tanım 3.2.5. (Galile Düzleminde Genel Galile Hareketleri)

Galile düzleminde shear, dönme ve öteleme içeren bir genel Galile hareketini matris formunda

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vartheta(t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix} \tag{3.2.18}$$

olarak yazılır.Ayrıca, kısaca

$$D(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vartheta(t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \vartheta(t)\cos t + \sin t & -\vartheta(t)\sin t + \cos t \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$Y(t) = D(t)X + C(t)$$

yazılabilir. Bu hareketin pol noktalarını araştırırken

$$\dot{D}(t)X + \dot{C}(t) = 0 \Rightarrow X = -\dot{D}^{-1}\dot{C}$$

denkleminin çözümünü incelenir :

Buradaki

$$\dot{D}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \dot{\vartheta}(t)\cos t - \vartheta(t)\sin t + \cos t & -\dot{\vartheta}(t)\sin t - \vartheta(t)\cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı

$$\det \dot{D}(t) = 1 + \dot{\vartheta}(t)$$

olduğundan $\vartheta(t) \neq -t$ için $\det \dot{D}(t) \neq 0$ olur. Böylece $X = -\dot{D}^{-1}\dot{C}$ için

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t + \frac{\vartheta(t)\cos t}{1+\dot{\vartheta}(t)} & -\frac{\cos t}{1+\dot{\vartheta}(t)} \\ \cos t - \frac{\vartheta(t)\sin t}{1+\dot{\vartheta}(t)} & \frac{\sin t}{1+\dot{\vartheta}(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradaki $(x(t), y(t))$ hareketin hareketli pol eğrisidir. Dolayısıyla, şu sonuç verilebilir :

Sonuç 3.2.2. Öklid düzleminde dönme içeren Galile hareketlerinde her t anında bir tek pol noktası vardır.

Tanım 3.2.6.(Bir Eğri Yardımıyla Elde Edilen Homotetik Hareketler)
D üzerinde

$$\alpha(t) = h(t) + \varepsilon\varphi(t) \tag{3.2.19}$$

dual eğrisi yardımıyla homotetik hareket yaptıran matrisi elde edebiliriz. Bu eğriye karşılık gelen matris $h(t) \neq 0$ için
$B(t) = \begin{bmatrix} h(t) & 0 \\ \varphi(t) & h(t) \end{bmatrix}$ dir. $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi(t) & 1 \end{bmatrix}$ Galile transformasyon matrisi olmak üzere

$$B(t) = \begin{bmatrix} h(t) & 0 \\ \varphi(t) & h(t) \end{bmatrix} = h(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi(t)}{h(t)} & 1 \end{bmatrix} = h(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g(t) & 1 \end{bmatrix} = h(t).A(t)$$

dir.

(3.2.19) dual eğrisini incelendiğinde :

i) (3.2.19) eğrisi birim hızlı olsun. Bu durumda ,

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \langle \alpha', \alpha' \rangle &= \langle (h', \varphi'), (h', \varphi') \rangle \\ &= h'^2 \end{aligned}$$

dir. Böylece $h' = \mp 1$ ve $h = \mp t$ dir. $h' = 1$ ve $h = t$ olsun. Bu durumda,

$$B(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ \varphi(t) & t \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\dot{B}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{\varphi}(t) & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Sonuçta şu teoremi verebiliriz:

Teorem 3.2.3. Galile düzlemindeki eğri birim hızlı olsun. Homotetik hareketin $B(t)$ matrisinin $\dot{B}(t)$ türev matrisi Galile transformasyonu matrisidir

ii) Ayrıca $h^{(n)}(t) = 1$ için homotetik hareket incelendiğinde

$$\begin{aligned} h(t) &= a_0.t^n + a_1.t^{n-1} + ... + a_n \\ &... \\ &... \\ h^{(n)}(t) &= a_0.n = 1 \end{aligned}$$

Böylece

$$a_0 = \frac{1}{n}$$

Bu durumda , $h(t) = \frac{1}{n}.t^n + a_1.t^{n-1} + ... + 1$ olur.

$h^{(n)}(t) = 1$ ve $B(t) = \begin{bmatrix} h(t) & 0 \\ \varphi(t) & h(t) \end{bmatrix}$ için $B^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} h^{(n)}(t) & 0 \\ \varphi^{(n)}(t) & h^{(n)}(t) \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi^{(n)}(t) & 1 \end{bmatrix}$ olur. Dolayısıyla şu teoremi verebiliriz :

Teorem 3.2.4. Galile düzleminde, $h^{(n)}(t) = 1$, ve $h(t) = a_0.t^n + a_1.t^{n-1} + ... + a_n$ için (3.2.19) eğrisinin belirttiği homotetik hareketin $B(t)$ matrisinin $B^{(n)}(t)$ türev matrisi Galile transformasyonunun matrisidir.

Tanım 3.2.7. (Bir Parametreli Homotetik Galile Hareketleri)

Bir parametreli homotetik Galile hareketi $h(0) = 1, A(0) = I_2$, $C(0) = 0$ olmak üzere, $Y(t) = h(t).A(t)X + C(t)$ dir ve kısaca $Y(t) = B(t)X + C(t)$ olarak yazılabilir.
Başlangıç anında ; $Y(0) = X(0)$ dır. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t) & 0 \\ \varphi(t) & h(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix} \tag{3.2.20}$$

olarak yazılan hareketin pol noktaları , yani sürüklenme hızının kökleri ,

$$\dot{B}(t)X + \dot{C}(t) = 0$$

denkleminden bulunur.

$$\begin{bmatrix} \dot{h}(t) & 0 \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{h}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olacağından , $\dot{h}(t) \neq 0$ olmak üzere

$$\dot{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{h}} & 0 \\ \frac{-\dot{u}}{[\dot{h}]^2} & \frac{1}{\dot{h}} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$X = -\dot{B}^{-1}.\dot{C} \qquad \Longrightarrow \qquad X = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{a}}{\dot{h}} \\ \frac{\dot{u}.\dot{a}-\dot{b}.\dot{h}}{[\dot{h}]^2} \end{bmatrix}$$

hareketin hareketli pol eğrisidir. Sonuç olarak,

Lemma 3.2.5. Bir parametreli homotetik Galile hareketinin her t anında bir tek pol noktası vardır.

Tanım 3.2.8. (Yüksek Mertebeden İvme Merkezleri)

$Y(t) = B(t)X + C(t)$ hareketinin $n.$ mertebeden sürüklenme ivmesinin sıfır olduğu noktalara $(n-1)$.*mertebeden ivme merkezi* denir. Bu ivme merkezlerini bulmak için $B^{(n)}(t) = \frac{d^n B}{dt^n}$ ve $C^{(n)}(t) = \frac{d^n C}{dt^n}$ olmak üzere,

$$B^{(n)}(t)X + C^{(n)}(t) = 0$$

denklemini çözmeliyiz. Burada

$$\det B^{(n)}(t) \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \quad h^{(n)}(t) \neq 0$$

dır. Böylece,

Teorem 3.2.6. Her t için $h^{(n)}(t) \neq 0$ ise $Y(t) = h(t).A(t)X + C(t)$ hareketinin $(n-1)$. mertebeden ivme merkezi vardır.

4. GALİLE UZAYINDA HAREKETLER

Bu bölümde G^3 Galile uzayı, bu uzaydaki Galile hareketleri ve bunların oluşturduğu G(3) grubu tanıtıldı. (Majernik 2006) dakine benzer olarak G^3 uzayındaki Galile dönüşümlerinin yeni bir ifadesini elde ettik. G^3 uzayındaki bir parametreli hareketleri ve homotetik hareketleri inceleyerek, pol noktalarını araştırdık. Daha sonra benzer çalışmaları G^n Galile uzayında ele aldık.

4.1 G^3 Galile Uzayında Kinematik

Tanım 4.1.1. **(G^3 Galile Uzayı)**
$X = (x, y, z) \in R^3$ ile $G^3 \neq \varnothing$ nokta cümlesini afin anlamda eşleyelim. R^3 de norm operatörünü $\forall X \in R^3$ için

$$\|X\| = \begin{cases} |x|\,, & x \neq 0 \\ \sqrt{y^2 + z^2}, & x = 0 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

olarak tanımlayalım. O zaman $(R^3, \|.\|)$ normlu uzayı ile eşlenen G^3 uzayına *Galile uzayı* denir.

Tanım 4.1.2. (Galile Transformasyonu)

$X = (x, y, z) \in G^3$ için

$$\begin{aligned} f: \mathbf{G}^3 &\longrightarrow \mathbf{G}^3 \\ X &\longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ ax+y \\ bx+z \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

olarak tanımlanan dönüşüme *Galile transformasyonu* denir. Gerçekten.

i) $x \neq 0$ için, $\left.\begin{aligned} \|X\| &= |x| \\ \|f(X)\| &= \|X'\| = |x| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \|f(X)\| = \|X\|$ dir.

ii) $x = 0$ için, $\|X\| = \sqrt{y^2 + z^2}$ dir.

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a.0 + y \\ b.0 + z \end{bmatrix}$$

ve $\|X'\| = \sqrt{y^2 + z^2}$ dir.

Sonuçta, $\|f(X)\| = \|X\| = \|X'\|$ dir.

Böylece, f yardımı ile belirlenen Shear hareketine *Galile anlamında hareket* denir.

Bu hareket altında sabit kalan noktaların koordinatlarını bulmak için ,

$$f(X) = X$$

denklemi çözülür :

$$\begin{bmatrix} x \\ ax+y \\ bx+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sisteminden,

$$\left.\begin{array}{r} ax+y=y \Longrightarrow ax=0 \\ bx+z=z \Longrightarrow bx=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x=0$$

dir. Dolayısıyla, f dönüşümü $(0,y,z)$ noktalarından oluşan yOz düzlemini sabit bırakır.

Ayrıca harekette Öklid anlamındaki dönme de yer alabilir :

$$\begin{array}{rcl} F: \mathbf{G}^3 & \longrightarrow & \mathbf{G}^3 \\ X & \longrightarrow & \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ b & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ & & = \begin{bmatrix} x \\ ax+\cos\alpha.y-\sin\alpha.z \\ bx+\sin\alpha.y+\cos\alpha.z \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.1.3}$$

olarak tanımlanan dönüşüm de bir diğer Galile transformasyonudur. Gerçekten.

i) $x \neq 0$ için, $\left.\begin{array}{lll} \|X\| & & =|x| \\ \|F(X)\| & =\|X'\| & =|x| \end{array}\right\} \Longrightarrow \|F(X)\|=\|X\|$ dir.

ii) $x=0$ için, $\|X\|=\sqrt{y^2+z^2}$ dir.

$$F(X)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ b & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a.0+\cos\alpha.y-\sin\alpha.z \\ b.0+\sin\alpha.y+\cos\alpha.z \end{bmatrix}$$

ve $\|X'\|=\sqrt{(\cos\alpha.y-\sin\alpha.z)^2+(\sin\alpha.y+\cos\alpha.z)^2}$

$=\sqrt{y^2+z^2}$ dir.

Sonuçta, $\|F(X)\|=\|X\|=\|X'\|$ dir.

Böylece, F yardımı ile belirlenen Shear hareketi de , Galile anlamında bir diğer harekettir. Bu hareketin sabit noktalarının koordinatları

$$F(X)=X$$

denkleminin çözümü ile belirlenir:

$$\begin{bmatrix} x \\ ax+\cos\alpha.y-\sin\alpha.z \\ bx+\sin\alpha.y+\cos\alpha.z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sisteminden,

$$\left.\begin{array}{c} x = x \\ ax+\cos\alpha.y-\sin\alpha.z = y \\ bx+\sin\alpha.y+\cos\alpha.z = z \end{array}\right\}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} (1-\cos\alpha).y+\sin\alpha.z &= ax \\ -\sin\alpha.y+(1-\cos\alpha).z &= bx \end{aligned}$$

dir. Bu denklem sisteminin katsayılar determinantı $4\,\mathrm{Si}\,n^2\frac{\alpha}{2}$ dir. $\alpha \neq 0$ için bu determinant sıfırdan farklıdır. O halde $\alpha \neq 0$ için daima $y = u(x)$ ve $z = v(x)$ çözümleri vardır. Bu çözümler

$$\begin{aligned} y &= \det\begin{bmatrix} ax & \sin\alpha \\ bx & (1-\cos\alpha) \end{bmatrix}.\frac{1}{4\,\mathrm{Si}\,n^2\frac{\alpha}{2}} \\ z &= \det\begin{bmatrix} (1-\cos\alpha) & ax \\ -\sin\alpha & bx \end{bmatrix}.\frac{1}{4\,\mathrm{Si}\,n^2\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

dır. Böylece

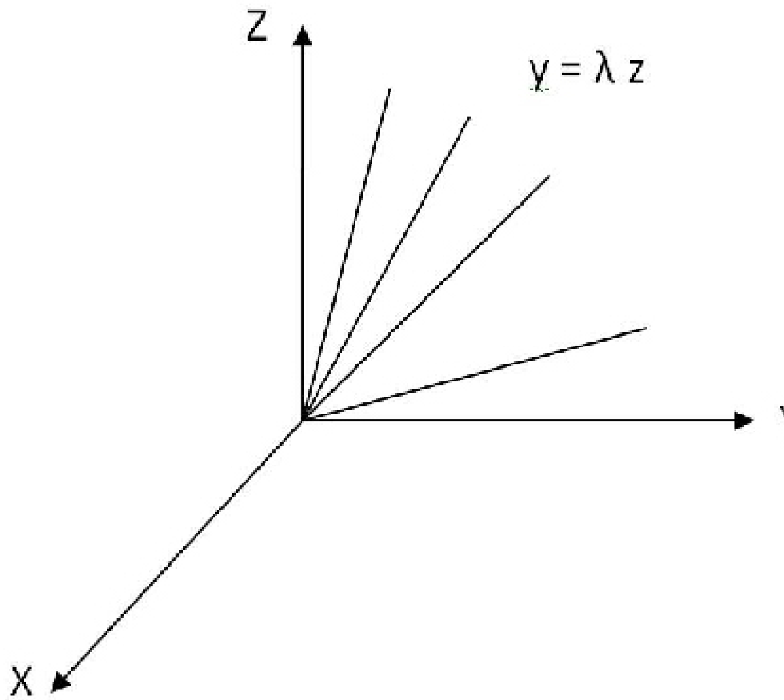
$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= \frac{1}{4\,\mathrm{Si}\,n^2\frac{\alpha}{2}}\left[a(1-\cos\alpha)-b\sin\alpha\right]x \\ z &= \frac{1}{4\,\mathrm{Si}\,n^2\frac{\alpha}{2}}\left[b(1-\cos\alpha)+a\sin\alpha\right]x \end{aligned}$$

sisteminden

$$\frac{y}{z} = \frac{a(1-\cos\alpha) - b\sin\alpha}{b(1-\cos\alpha) + a\sin\alpha}$$

dir. Dolayısıyla F dönüşümü $\forall\ x, \alpha, a, b \in R$ için yOz düzlemindeki, tepesi orjinde olan

-1



$_{1}.jpg$

Şekil 4.1 G^3 de $y = \lambda z$ doğru demeti

doğru demetini sabit bırakır.

NOT 4.1.1.

$$G(3) = \left\{ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in R, detS = 1 \right\} \tag{4.1.4}$$

olsun. Bu durumda,

1. $G(3) \subset GL(3; R)$ dir.

2. $G(3)$ bir değişmeli gruptur.

3. $G(3)$ bir Lie alt grubudur (Nadjafikkah and Forough 2007). Bu grubun Lie cebirine bakalım :

$\alpha(0) = I_3$, $\alpha(t) \in G$ olmak üzere,

$\alpha(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix}$ için $\alpha'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Böylece

$i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

olmak üzere, G^3 Lie grubunun Lie cebirini $\hat{g}_3$ ile gösterirsek $\hat{g}_3 = span\{i, j\}$ dir.

Lemma 4.1.1. $G(3)$ Lie grubu, Heisenberg Lie grubunun Lie alt grubudur.

İspat: Heisenberg Lie grubu,

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x_i \in R \right\}$$

matris çarpım işlemine göre bir Lie grubudur. Burada $x_2 = 0$ alınarak $G(3)$ Lie grubu elde edilir.

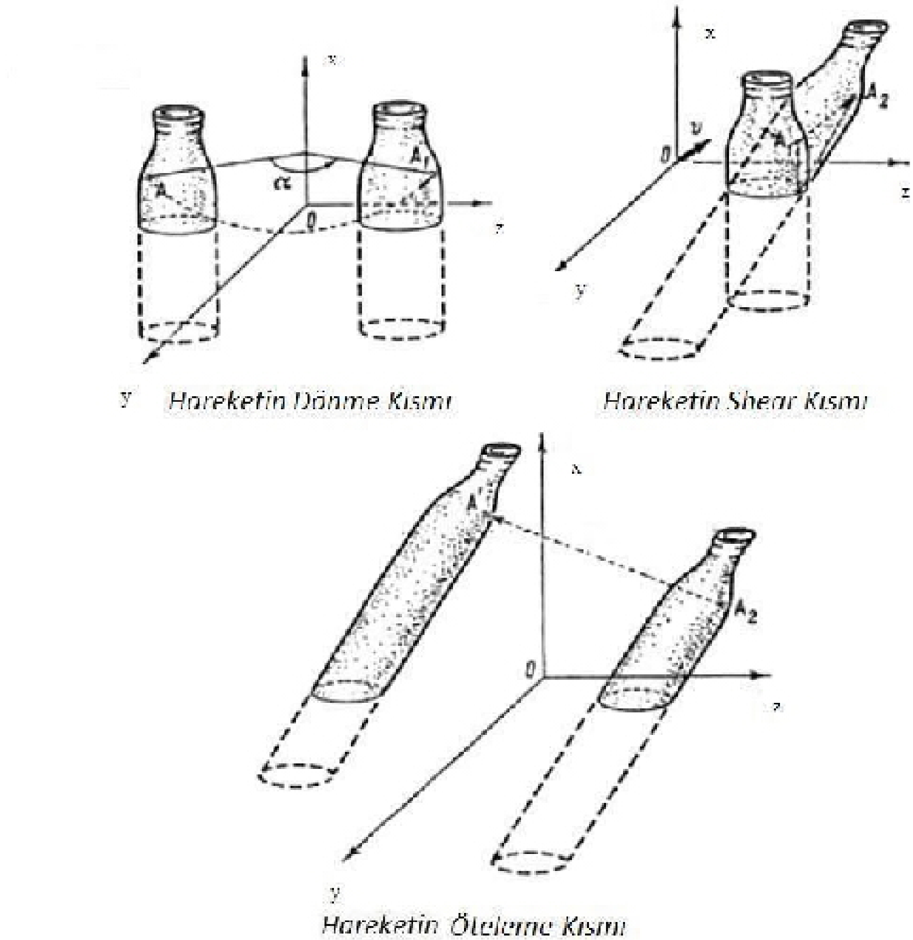
4.1.2 G^3 de Kırpma, Dönme ve Öteleme İçeren Hareketler

G^3 Galile uzayında, Ox etrafında dönme, x ekseni boyunca ν açısal hızıyla shear ve öteleme içeren hareketin bileşkesi,

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ \nu\cos\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha & b \\ \nu\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.1.5}$$

biçimindedir (Yaglom 1979).

-6



$_{2}.jpg$

Şekil 4.2 G^3 de bir bileşke Galile transformasyonu

4.1.3 Galile Dönüşümlerinin Kuaterniyonlarla İfadesi

Majernik 2006 da, $\mathbf{G}^4$ de Galile transformasyonlarının, kuaterniyonlar cinsinden ifadesini vermiştir.

$i^2 = j^2 = k^2 = ij = ji = ik = ki = jk = kj = 0$, $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \in R$ ve $(x, y, z, l) \in R^4$ olmak üzere $e^{i\vartheta_1 + j\vartheta_2 + k\vartheta_3} = 1 + \vartheta_1 i + \vartheta_2 j + \vartheta_3 k$ ve $X = x + yi + zj + lk$ kuaterniyonları için,

$$\begin{aligned} X' &= e^{i\vartheta_1 + j\vartheta_2 + k\vartheta_3} X \\ x' + y'i + z'j + l'k &= (1 + \vartheta_1 i + \vartheta_2 j + \vartheta_3 k)(x + yi + zj + lk) \\ &= x + (y + \vartheta_1 x)i + (z + \vartheta_2 x)j + (l + \vartheta_3 x)k \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ l' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta_1 & 1 & 0 & 0 \\ \vartheta_2 & 0 & 1 & 0 \\ \vartheta_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ l \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Ayrıca, $\phi_1 = a_1.i + b_1.j + c_1.k$, $\phi_2 = a_2.i + b_2.j + c_2.k$ için,

$$\begin{aligned} G(\phi_1) &= e^{a_1 i + b_1 j + k c_1} = 1 + a_1 i + b_1 j + c_1 k \\ G(\phi_2) &= e^{a_2 i + b_2 j + k c_2} = 1 + a_2 i + b_2 j + c_2 k \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} G(\phi_1).G(\phi_2) &= 1 + (a_1 + a_2)i + (b_1 + b_2)j + (c_1 + c_2)k \\ &= G(\phi_1 + \phi_2) \qquad (4.1.6) \end{aligned}$$

dir. G^4 de yapılan bu işlemlerin G^3 için de yapılabileceğini gösterelim. Daha sonraki bölümde buradaki işlemleri G^n uzayına genelleştireceğiz.

4.1.4 $\mathbf{G}^3$ de Galile Dönüşümlerinin Kuaterniyonlarla İfadesi

$\mathbf{G}^3$ de Galile dönüşümlerinin kuaterniyonlarla ifadesini Majernik 2006 daki gösterime benzer şekilde verebiliriz:

$i^2 = j^2 = ij = ji = 0$ olmak üzere $e^{i\phi_1 + j\phi_2} = 1 + \phi_1 i + \phi_2 j$, $X = x + yi + zj$ kuaterniyonu için,

$$X' = e^{i\phi_1 + j\phi_2} X \tag{4.1.7}$$

dönüşümünü ele alalım:

$$\begin{aligned} x' + y'i + z'j &= (1 + \phi_1 i + \phi_2 j)(x + yi + zj) \\ &= x + (y + \phi_1 x)i + (z + \phi_2 x)j \end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \phi_1 & 1 & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{4.1.8}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} G(E_1) &= e^{i\phi_1 + j\phi_2} \\ G(E_2) &= e^{i\phi_1' + j\phi_2'} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$G(E_1)G(E_2) = G(E_1 + E_2) \tag{4.1.9}$$

dir.

4.1.5 G(3) Lie Grubu ve g(3) Lie Cebiri

$Q = 1 + i\nu_1 + j\nu_2$ dual kuaterniyon, f_Q lineer dönüşüm, K^3 kuaterniyonlar uzayı olmak üzere,

$$\begin{array}{rccc} f_Q: & K^3 & \longrightarrow & K^3 \\ & X & \longrightarrow & f_Q(X) = Q.X \end{array} \tag{4.1.10}$$

şeklinde tanımlansın,. f_Q ya karşılık gelen matrisi hesaplayalım,

$$\begin{aligned} f_Q(1) &= 1 \times Q = Q = 1 + i\nu_1 + j\nu_2 \\ f_Q(i) &= i \times Q = i = 0.1 + 1.i + 0.j \\ f_Q(j) &= j \times Q = j = 0.1 + 0.i + 1.j \end{aligned}$$

dir. Böylece f_Q ya karşılık gelen matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu_1 & 1 & 0 \\ \nu_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.1.11}$$

olarak elde edilir. Bu tip matrislerin cümlesini G(3) ile gösterirsek;

$$G(3) = \{A_{3\times 3} \mid A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu_1 & 1 & 0 \\ \nu_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \nu_1, \nu_2 \in R\} \tag{4.1.12}$$

çarpma işlemine göre bir Lie grubudur.

$$\begin{aligned} g(3) &= \{0.1 + i\nu_1 + j\nu_2 \mid i, j, \nu_1, \nu_2 \in R, \\ i^2 &= j^2 = ij = ji = 0, \quad i, j \neq 0\} \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

G(3) Lie grubunun g(3) Lie cebiri pür kuaterniyonlar uzayıdır. Lie cebirinden bir $i\nu_1 + j\nu_2 \in g(3)$ elemanı için

$$e^{i\nu_1 + j\nu_2} = 1 + i\nu_1 + j\nu_2 \tag{4.1.14}$$

yazılarak Lie grubunun bir elemanı elde edilir.

4.1.6 G ^{3} de Bir Parametreli Galile Hareketleri

G^3 de bir parametreli Galile hareketine ait dönüşüm;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vartheta_1(t) & 1 & 0 \\ \vartheta_2(t) & 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(3) \subset GL(3,R) \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \in SO(3)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f: \ \mathbf{G}^3 &\longrightarrow \ \mathbf{G}^3 \\ X &\longrightarrow \ f(X) \ = A(t)X + C(t) = Y(t) \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

ve açık olarak

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vartheta_1(t) & 1 & 0 \\ \vartheta_2(t) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix}$$

formunda tanımlanır. Bu dönüşümde $t = 0$ için $\vartheta_1(0) = \vartheta_2(0) = a(0) = b(0) = c(0) = 0$ ve $Y(0) = X' = X$ dir ve f dönüşümü her t için Galile anlamında uzaklığı korur.

Yani $\forall P(x_1, x_2, x_3), Q(y_1, y_2, y_3) \in G^3$ için, $d_G(P,Q) = d_G(f(P), f(Q))$ olduğu görülebilir.

$$d_G(P,Q) = \|PQ\| = \begin{cases} |x_1 - y_1|, & x_1 \neq y_1 \text{ ise} \\ \sqrt{(x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}, & x_1 = y_1 \text{ ise} \end{cases}$$

den ,

i) $x_1 \neq y_1$ ise $\quad d_G(P,Q) = |x_1 - y_1| = d_G(f(P), f(Q))$ dir.

ii) $x_1 = y_1$ ise $\quad d_G(P,Q) = \sqrt{(x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2} = d_G(f(P), f(Q))$ dir

Sonuçta, $d_G(P,Q) = d_G(f(P), f(Q))$ dir ve f dönüşümü $\mathbf{G}^3$ de 1-parametreli Galile hareketidir.

Hareketin pol noktalarını araştıralım : $t \neq 0$ için $\dot{a}(t) = 0$ ve $a(t) = sbt$ olduğundan $a(t) = 0$ alınır. $\det A = 1 \Longrightarrow$ hareket regülerdir. Pol noktalarını veren $\dot{A}.X + \dot{C} = 0$ denkleminden X pol noktalarını bulalım :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{\vartheta}_1(t) & -\sin t & -\cos t \\ \dot{\vartheta}_2(t) & \cos t & -\sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$det\ \dot{A} = 0$ $\dot{A}$ matrisi regüler olmadığından sistemin çözümü tek değildir.

x keyfi olmak üzere, $\begin{cases} \sin t.y + cost.z = \dot{b}(t) + \dot{\vartheta}_1(t).x \\ -cost.y + sint.z = \dot{c}(t) + \dot{\vartheta}_2(t).x \end{cases}$ için

$$\begin{aligned} y &= \det \begin{bmatrix} \dot{b}(t) + \dot{\vartheta}_1(t).x & \cos t \\ \dot{c}(t) + \dot{\vartheta}_2(t).x & \sin t \end{bmatrix} \\ z &= \det \begin{bmatrix} \sin t & \dot{b}(t) + \dot{\vartheta}_1(t).x \\ -\cos t & \dot{c}(t) + \dot{\vartheta}_2(t).x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

doğruları elde edilir.

Buradaki harekette

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vartheta_1(t) & \cos t & -\sin t \\ \vartheta_2(t) & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

dönüşümünü

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vartheta_1(t) & 1 & 0 \\ \vartheta_2(t) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cot s \end{bmatrix}$$

olarak çarpanlarına ayırabiliriz. Burada

$$\left.\begin{array}{c} Q_1 = \cos\theta + \sin\theta\,\overrightarrow{S} \\ \overrightarrow{S} = (1,0,0) \\ Q_2 = 1 + \vartheta_1(t)i + \vartheta_2(t)j \end{array}\right\} \begin{array}{c} Q_1(X) = Q_1 \times X \times Q_1^* = X' \\ Q_2(X') = Q_2 \times X' \times Q_2^* = X'' \end{array}$$

$$X'' = (Q_2 \circ Q_1)(X) = Q_2(Q_1(X)) \tag{4.1.16}$$

dir. Böylece, bir Galile dönüşümü Q_2 dual kuaterniyonu ile, Q_1 genel kuaterniyonunun bileşkesi olarak yazılabilir.

Dönme olmaması durumunda , $T : (x\prime, y\prime, z\prime) \to (x\prime + a, y\prime + b, z\prime + c)$ ve $S : (x, y, z) \to (x, \vartheta_1.x + y, \vartheta_2.x + z) = (x\prime, y\prime, z\prime)$ göstermek üzere;

$$f(x,y,z) = (ToS)(x,y,z) = T(x\prime, y\prime, z\prime) = (x\prime + a, y\prime + b, z\prime + c)$$

dir. Bu durum,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vartheta_1(t) & 1 & 0 \\ \vartheta_2(t) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} \tag{4.1.17}$$

olarak yazılabilir.

$t = 0$ için, $\vartheta_1(0) = \vartheta_2(0) = a(0) = b(0) = c(0) = 0$ olduğundan $f(X) = X' = X$ dir.

$t \neq 0$ için $\dot{a}(t) = 0$ ve $a(t) = sbt$ olacağından $\forall t$ için $a(t) = 0$ dır.

Hareketin pol noktalarını belirlemek için , $\dot{A}.X + \dot{C} = 0$ denkleminden X bulunur :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{\vartheta}_1(t) & 0 & 0 \\ \dot{\vartheta}_2(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sisteminden,

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vartheta}_1(t).x + \dot{b}(t) = 0\\ \dot{\vartheta}_2(t).x + \dot{c}(t) = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{-\dot{b}(t)}{\dot{\vartheta}_1(t)} = \frac{-\dot{c}(t)}{\dot{\vartheta}_2(t)}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\frac{\dot{b}(t)}{\dot{c}(t)} = \frac{\dot{\vartheta}_1(t)}{\dot{\vartheta}_2(t)}$$

olması halinde $\forall t$ anında her iki uzayda sabit olan noktalar $x = \frac{-\dot{b}(t)}{\dot{\vartheta}_1(t)}$ düzlemi üzerindeki noktalardır.

4.1.7 $\mathbf{G}^3$ De Bir Parametreli Homotetik Galile Hareketi

$$\begin{aligned} f : \mathbf{G}^3 &\longrightarrow \mathbf{G}^3 \\ X &\longrightarrow f(X) = h(t)A(t)X + C(t) \\ &\qquad\qquad = Y(t) \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t) & 0 & 0 \\ h(t).\vartheta_1(t) & h(t) & 0 \\ h(t).\vartheta_2(t) & 0 & h(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix}$$

dönüşümünde $B(t) = h(t)A(t)$ ve $t = 0$ için $h(0) = 1, \vartheta_1(0) = \vartheta_2(0) = a(0) = b(0) = c(0) = 0$ olduğundan $f(X) = X$ ve $\forall t$ için f Galile anlamında uzaklığı korur. $\forall P(x_1, x_2, x_3), Q(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{G}^3$ için, $d_G(P, Q) = d_G(f(P), f(Q))$ olduğu görülebilir.

Hareketteki pol noktaları :

$\dot{B}(t)X + \dot{C}(t) = 0$ denkleminden :

$$\begin{bmatrix} \dot{h}(t) & 0 & 0 \\ \dot{h}(t).\vartheta_1(t) + h(t)\dot{\vartheta}_1(t) & \dot{h}(t) & 0 \\ \dot{h}(t).\vartheta_2(t) + h(t).\dot{\vartheta}_2(t) & 0 & \dot{h}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} \dot{h}(t).x + \dot{a}(t) &= 0 \\ [\dot{h}(t).\vartheta_1(t) + h(t)\dot{\vartheta}_1(t)].x + \dot{h}(t).y + \dot{b}(t) &= 0 \\ [\dot{h}(t).\vartheta_2(t) + h(t).\dot{\vartheta}_2(t)].x + \dot{h}(t).z + \dot{c}(t) &= 0 \end{aligned}$$

sisteminden

$$\begin{gathered} x = \frac{-\dot{a}}{\dot{h}} \\ y = \frac{\dot{a}}{\dot{h}}\vartheta_1 + \frac{\dot{a}.h}{[\dot{h}]^2}\dot{\vartheta}_1 - \frac{\dot{b}}{\dot{h}} \\ z = \frac{\dot{a}}{\dot{h}}\vartheta_2 + \frac{\dot{a}.h}{[\dot{h}]^2}\dot{\vartheta}_2 - \frac{\dot{c}}{\dot{h}} \end{gathered}$$

elde edilir. Sonuç olarak, G^3 Galile uzayında bir parametreli homotetik Galile hareketinin $\forall t$ anında bir tek pol noktası vardır.

4.1.8 $\mathbf{G}^3$ de Bir Parametreli Genel Homotetik Galile Hareketleri

$$\begin{aligned} f : \mathbf{G}^3 &\longrightarrow \mathbf{G}^3 \\ X &\longrightarrow f(X) = \lambda(t)A(t)X + C(t) \\ &\qquad\qquad = Y(t) \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

homotetik hareketinde

$$B(t) = \lambda(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vartheta_1(t) & \cos t & -\sin t \\ \vartheta_2(t) & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Galile transformasyon matrisidir. $B(t) = \lambda(t)A(t)$ ve $t = 0$ için $\lambda(0) = 1, \vartheta_1(0) = \vartheta_2(0) = a(0) = b(0) = c(0) = 0$ olduğundan $f(X) = X$ ve $\forall t$ için f Galile anlamında uzaklığı korur. $\forall P(x_1, x_2, x_3), Q(y_1, y_2, y_3) \in G^3$ olmak üzere, $d_G(P, Q) = d_G(f(P), f(Q))$ olduğu görülebilir.

$$f(X) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \lambda(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vartheta_1(t) & \cos t & -\sin t \\ \vartheta_2(t) & \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix}$$

hareketinde pol noktalarını veren,

$$\dot{B}(t)X + \dot{C}(t) = 0$$

denklemini çözülür. $t \neq 0$ için $\dot{a}(t) = 0$ dolayısıyle $a(t) = sbt$ ve $a(0) = 0$ olduğundan $a(t) = 0$ olmalıdır. Ayrıca $\det B(t) = \lambda(t).1 \neq 0$ ve

$$\dot{B}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}(t) & 0 & 0 \\ \dot{\lambda}(t)\vartheta_1(t) + \lambda(t)\dot{\vartheta}_1(t) & \dot{\lambda}(t)\cos t - \lambda(t)\sin t & -\dot{\lambda}(t)\sin t - \lambda(t)\cos t \\ \dot{\lambda}(t)\vartheta_2(t) + \lambda(t)\dot{\vartheta}_2(t) & \dot{\lambda}(t)\sin t + \lambda(t)\cos t & \dot{\lambda}(t)\cos t - \lambda(t)\sin t \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$det\dot{B}(t) = \dot{\lambda}(t)(\dot{\lambda}^2(t) + \lambda^2(t)) \quad \text{ve} \quad \lambda(t) \neq sbt \ \ \text{için} \ \ \dot{\lambda}(t) \neq 0$$

dır.

$$\dot{\lambda}(t)(\dot{\lambda}^2(t) + \lambda^2(t)) \neq 0$$

dır. Dolayısıyla hareket regülerdir ve $\forall t$ anında bir tek pol noktası ,

$$X = -\dot{B}(t)^{-1}.\dot{C}(t)$$

olarak belirlidir.

4.2 $\mathbf{G}^n$ Galile Uzayında Kinematik

Tanım 4.2.1. (G^n **Galile Uzayı**)
$X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ için

$$\|X\| = \begin{cases} |x_1| & x_1 \neq 0 \\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2} & x_1 = 0 \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

$(R^n, \|.\|)$ ikilisine G^n *Galile uzayı* denir.

Teorem 4.2.1. ($\mathbf{G}^n$ de Galile Transformasyonları)

$$A_1 \in SO(n-1) \quad , \quad C_{n\times 1} \in R_1^{n-1}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon_1 & \\ . & \\ & A_1 \\ . & \\ \upsilon_{n-1} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon & A_1 \end{bmatrix} \quad \text{olmak}$$

üzere

$$\begin{aligned} f: \ G^n & \rightarrow \quad G^n \\ X & \rightarrow \ f(X) \ = AX + C \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu Galile transformasyonudur.

İspat : $C = 0$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$,$Y = (0, x_2, ..., x_n) \in G^n$ olmak üzere, (4.2.2) dönüşümünden

$$AX = (x_1, A_1.Y)$$

dir. (4.2.1) ile $\|A_1.Y\| = \|Y\|$ (A_1 ortogonal) ve

$$\|AX\| = \begin{cases} |x_1|, & x_1 \neq 0 \\ \|Y\|, & x_1 = 0 \end{cases}$$

dir . Dolayısıyle $\|X\| = \|AX\| = \|f(X)\|$ dir.

Böylece f ile belirli harekete Galile anlamında hareket diyebiliriz.

$A_1 = I_{n-1}$ ve $C = 0$ halinde shear hareketinin sabit noktalarını araştıralım. Bunun için,

$$f(X) = X$$

denkleminin çözümününden :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \upsilon_1 x_1 + x_2 \\ . \\ \upsilon_{n-1} x_1 + x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \upsilon_1 x_1 + x_2 &= x_2 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \\ &. \\ &. \\ \upsilon_{n-1} x_1 + x_n &= x_n \quad \Rightarrow x_1 = 0 \end{aligned}$$

f dönüşümü $(0, x_2, x_{3,\ldots,} x_n)$ noktalarından oluşan uzayı sabit bırakır. Yani E^n de $x_1 = 0$ düzlemi üzerindeki noktalar shear hareketi altında sabit kalır.

Teorem 4.2.2. $G(n) = \{f \,|\, f : G^n \to G^n\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon & A_1 \end{bmatrix} : \upsilon \in R_1^{n-1}, \quad A_1 \in SO(n-1) \right\}$ olmak üzere, $(G(n), \cdot)$ Lie gruptur.

İspat:

1) $A_1, A_2 \in SO(n-1)$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon_1 & A_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon_2 & A_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon_1 + A_1 \upsilon_2 & A_1 A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon & A_3 \end{bmatrix} \qquad A_1 . A_2 \in SO(n-1).$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon & A_1 \end{bmatrix} \in G$ için $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\upsilon A_1^{-1} & A_1^{-1} \end{bmatrix} \in G$ dir.

Ayrıca $G(n) \subset GL(n, R)$ olduğundan $G(n)$ Lie alt grubudur.

Teorem 4.2.3. G(n) Lie grubunun Lie cebiri,

$$g(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h & s \end{bmatrix} : h \in R^{n-1}, s^T = -s \right\}$$

dir ve $boyg(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ dir.

İspat: $G(0) = I_n$, $h(0) = 0$, $s(0) = I_{n-1}$, $G(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h(t) & s(t) \end{bmatrix}$ G(n) de I_n noktasından geçen herhangi bir eğri olsun. Bu durumda

$$\dot{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{h}(t) & \dot{s}(t) \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$\dot{G}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{h}(0) & \dot{s}(0) \end{bmatrix}$$

ve

$$s^T s = I_{n-1}$$

olduğundan

$$\dot{s}^{\,T} s + s^T \dot{s} = 0$$

dir.

$$\dot{s}^T(0)s(0) + s^T(0)\dot{s}(0) = 0$$

$s^T(0) = s(0) = I_{n-1}$ ve buradan

$$\dot{s}^T(0) = -\dot{s}(0)$$

dır, $\dot{s}(0)$ matrisleri antisimetriktir. ve $boy\ \dot{s}\ (0) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dir.
Böylece

$$\begin{aligned} boyg(n) &= (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

dir.

$boyG(n) = boyg(n)$ olduğundan $boyG(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ dir.

Tanım 4.2.2. ($\mathbf{G}^n$ de Bir-Parametreli Galile Hareketleri)

$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon_1(t) & \\ . & A_1(t) \\ \upsilon_{n-1}(t) & \end{bmatrix}$ ortogonal matris, $A_1(t) \in SO(n-1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f: \; G^n & \rightarrow \quad G^n \\ X & \rightarrow \; f(X) \; = A(t)X + C(t) \; = Y(t) \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

dönüşümüne G^n de *bir-parametreli Galile hareketi* denir.

Bu f dönüşümünde $t = 0$ için $\upsilon_1(0) = \upsilon_2(0) = ... = \upsilon_{n-1}(0) = 0$ ve $Y(0) = f(X) = X$ dir ve f her t için Galile anlamında uzaklığı korur.
$\forall P(x_1, x_{2,...,}x_n),\; Q(y_1, y_2, ..., y_n)$ için $d_G(P,Q) = d_G(f(P), f(Q))$ olduğu görülebilir.

$$d_G^2(P,Q) = \begin{cases} (x_1 - y_1)^2, & x_1 \neq y_1 \\ (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2, & x_1 = y_1 \end{cases} \tag{4.2.4}$$

i) $x_1 \neq y_1$ ise $d_G(P,Q) = |x_1 - y_1| = d_G(f(P), f(Q))$ dir.
ii) $x_1 = y_1$ ise $d_G(P,Q) = \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + .. + (x_n - y_n)^2} = d_G(f(P), f(Q))$ dir
Sonuçta, $d_G(P,Q) = d_G(f(P), f(Q))$ dir

Böylece f hareketine $\mathbf{G}^n$ de bir-parametreli Galile hareketi denir.

Şimdi G^n de genel hareketi inceleyelim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon_1 & \\ . & A_1 \\ . & \\ \upsilon_{n-1} & \end{bmatrix}$$ ortogonal matrisi, $A_1 \in SO(n-1)$, $C \in R_1^n$ olmak üzere

(4.2.3) den G^n de bir-parametreli Galile hareketleri açık olarak

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon_1 & \\ . & A_1 \\ . & \\ \upsilon_{n-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A_1 \in SO(n-1) \;\Rightarrow\; \det A \neq 0$ dır. Bu hareketin pol noktalarını veren

$$\dot{A}(t)X + \dot{C}(t) = 0$$

denklemini inceleyelim :

Burada

$$\dot{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\upsilon}(t) & \dot{A}_1(t) \end{bmatrix}$$

ve $\det \dot{A} = 0$ dolayısıyla, $E(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\upsilon}(t) & I_{n-1} \end{bmatrix}$ ve $F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dot{A}_1(t) \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\dot{A}(t) = E(t).F(t)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$rank \;\; \dot{A}(t) \leq \min(rankE(t), rankF(t))$$

dir. Burada $rankE(t) = n-1$ dir. Eğer $rankF(t) = n$ ise $rank \;\; \dot{A}(t) = n-1$ olur. Bu durumda $\forall t$ anında (4.2.3) hareketinin bir pol ekseni vardır.

Tanım 4.2.3. (G^n **de Bir-Parametreli Homotetik Hareketler)**

$$\begin{aligned} f: \; G^n &\to G^n \\ X &\to f(X) = h(t)A(t)X + C(t) \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

dönüşümü ile belli olan harekete G^n de *bir-parametreli homotetik hareket* denir. Burada $h(t)$ homoteti sabiti ve $A_1(t) \in SO(n-1)$, $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon(t) & A_1(t) \end{bmatrix}$ ortogonal matrisi.ile $A(t)$ Galile transformasyonuna karşılık gelen matristir.

Bu bölümde Hacısalihoğlu 1971 den faydanılanak G^n n-boyutlu Galile uzayındaki homotetik hareketi araştıracağız:

Teorem 4.2.4. G^n n-boyutlu Galile uzayındaki homotetik hareketler her n için regüler hareketlerdir.

İspat : (4.2.5) hareketindeki, $\vartheta(t)$ matrisi $(n-1)\times 1$, X, Y, C birer $n\times 1$ matrisleri , h, A, C nin elemanları t reel parametresine göre sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonlar,

$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon(t) & A_1(t) \end{bmatrix}$ ortogonal matrisi ile Galile transformasyonuna karşılık gelen matristir. Buradaki $h(t).A(t) = B(t)$ olsun.

$$\begin{aligned} B(t) &= \begin{bmatrix} h(t) & 0 \\ h(t).\upsilon(t) & h(t).A_1(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h(t) & 0 \\ \upsilon_1(t) & B_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Dolayısıyla

$$\dot{B}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t) & 0 \\ \dot{\upsilon}_1(t) & \dot{B}_1(t) \end{bmatrix} \tag{4.2.7}$$

ve

$$\det \dot{B}(t) = \dot{h}(t).\det \dot{B}_1(t) \tag{4.2.8}$$

dir. Genel 1-parametreli Galile hareketi durumundan sakınmak için

$$h = h(t) \neq sb, \dot{h}(t) \neq 0 \tag{4.2.9}$$

ve

$$\dot{h}(t).A_1(t) + h(t).\dot{A}_1(t) \neq 0, \dot{C}(t) \neq 0 \tag{4.2.10}$$

olduğunu varsayalım. Burada

$$\det \dot{B}_1(t) = \det(h(t).A_1(t))^{\dot{}} \tag{4.2.11}$$

dır.

Diğer taraftan h bir skalar matris olduğundan h ve h^{-1} inversi, h^T transpozu sırasıyla

$$h^{-1} = \frac{1}{h} \quad ve \quad h^T = h \tag{4.2.12}$$

dir.

$$\begin{aligned} B_1 &= h.A_1 && (4.2.13) \\ \dot{B}_1 &= \dot{h}.A_1 + h.\dot{A}_1 \\ &= h(\dot{A}_1 + \frac{\dot{h}}{h}.A_1) \\ &= hA_1(\dot{A}_1 A_1^{-1} + \frac{\dot{h}}{h}.E) \\ &= B_1(\psi - \lambda E) && (4.2.14) \end{aligned}$$

$$\lambda = -\frac{\dot{h}}{h} \tag{4.2.15}$$

$$\psi = A_1^T \dot{A}_1 \tag{4.2.16}$$

antisimetrik matristir.

$$\det \dot{B}_1 = \det B_1 \det(\psi - \lambda E) \tag{4.2.17}$$

ve ψ antisimetrik matris olduğundan karakteristik denklemi

$$\det(\psi - \lambda E) = 0 \tag{4.2.18}$$

dir. Antisimetrik matrisin karakteristik değerleri sıfır veya imajiner olduğundan $\forall t$ için

$$\det B_1 \neq 0 \tag{4.2.19}$$

dır. Dolayısıyla (4.2.8) den

$$\det \dot{B} \neq 0 \tag{4.2.20}$$

bulunur. Bu da hareketin regüler olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.5. G^n n-boyutlu Galile uzayındaki homotetik hareketlerde her t için bir tek ani pol noktası (centrot) vardır.

İspat : Teorem 4.2.4 den G^n n-boyutlu Galile uzayındaki homotetik hareketler her n için regüler hareketlerdir. Dolayısıyla

$$\dot{B}.X + \dot{C} = 0 \tag{4.2.21}$$

denkleminin tek çözümü

$$X = -(\dot{B})^{-1}\dot{C} \tag{4.2.22}$$

dir. Böylece, $\forall t$ anında hareketin bir tek ani pol noktası vardır.

4.3 G^n Galile Uzayında Galile Dönüşümleri

Bu bölümde G^2, G^3 ve G^4 uzaylarındaki Galile dönüşümlerine benzer olarak G^n Galile uzayındaki Galile dönüşümlerini genelleştireceğiz .

Teorem 4.3.1.

G^n Galile uzayında,

$$\begin{aligned} f: \quad G^n &\to G^n \\ X &\to f(X) = (x_1, \upsilon_1 x_1 + x_2, ..., \upsilon_{n-1} x_1 + x_n) \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

dönüşümü açık olarak

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ \upsilon_1 & 1 & 0 & . & 0 \\ \upsilon_2 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \upsilon_{n-1} & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4.3.2}$$

yazılır ve f dönüşümü bir Galile dönüşümüdür.

İspat: $x \neq 0$ için $\|f(X)\| = |x_1| = \|X\|$.
$x = 0$ için $\|f(X)\| = \sqrt{x_2{}^2 + x_3{}^2 + ... + x_n{}^2} = \|X\|$.
Böylece $\|f(X)\| = \|X\|$ ve f izometridir, dolayısıyla f bir Galile hareketidir.

$G(n)$ ve $g(n)$ i açık olarak şöyle yazabiliriz:

$$G(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ \upsilon_1 & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ \upsilon_2 & 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \upsilon_{n-1} & 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix} : \upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_{n-1} \in R \right\} \tag{4.3.3}$$

bir Lie gruptur, ve

$$g(n)=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{bmatrix} : a_1, a_2, ..., a_{n-1} \in R\right\} \qquad (4.3.4)$$

$G(n)$ ün Lie cebiridir.

4.4 Dual Kuaterniyonlar ve G^n de Galile Dönüşümleri

Bu bölümde R^n deki her X vektörünü, $sp\{1,\ i_1, i_2, ..., i_{n-1}\} = R^n$ ve $i_1^2 = i_2^2 = ... = i_{n-1}^2 = 0$, ve $i_j i_k = i_k i_j = 0,\ 1 \leq k, j \leq n-1$ özeliğini sağlayan $i_1, i_2, ..., i_{n-1}$ birimleri, $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ bileşenleri ile

$$X = x_1 + x_2 i_1 + x_3 i_2 + ... + x_n i_{n-1} \qquad (4.3.5)$$

formunda kullanacağız. Bu forma $X \in R^n$ vektörünün *dual kuaterniyon formu* denir.

Lemma 4.4.1. $Q = 1 + \upsilon_1 i_1 + \upsilon_2 i_2 + ... + \upsilon_{n-1} i_{n-1}$ dual kuaterniyon operatörü bir Galile dönüşümüdür.

İspat : $QX = (1 + \upsilon_1 i_1 + \upsilon_2 i_2 + ... + \upsilon_{n-1} i_{n-1})(x_1 + x_2 i_1 + x_3 i_2 + ... + x_n i_{n-1})$
$= x_1 + (\upsilon_1 x_1 + x_2) i_1 + (\upsilon_2 x_1 + x_3) i_2 + ...(\upsilon_{n-1} x_1 + x_n) i_{n-1}$
dir ve dolayısıyla $\|QX\| = \|X\|$ dir.

Böylece , Q dual kuaterniyon operatörü bir Galile dönüşümüdür. Lie cebirinden herhangi bir , $a \in g(n)$, $a = a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_{n-1} i_{n-1} \in g(n)$ için,

$$e : g(n) \to Gal(n) \tag{4.3.6}$$

üstel dönüşümü ile

$$\begin{aligned} a \quad \to \quad e^{a} \qquad &= e^{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_{n-1} i_{n-1}} \\ &= 1 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_{n-1} i_{n-1} \end{aligned}$$

dir. Böylece $Gal(n)$ Lie grubunun bir elemanını elde edilir.

Sonuç 4.4.1. $Q = e^{a} = 1 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_{n-1} i_{n-1}$ bir dual kuaterniyon operatörüdür. Dolayısıyla, Q dual kuaterniyon operatörü bir Galile dönüşümüdür.

Sonuç 4.4.2. Herhangi $a, b \in g(n)$ için $Q(a) = e^{a} \in Gal(n)$ ve $Q(b) = e^{b} \in Gal(n)$ ve hatta $Q(a)Q(b) = e^{a}e^{b} = e^{a+b} = Q(a+b)$ dir.
Böylece bir Galile dönüşümünde hızlar için toplam formülünü elde edilir.

Teorem 4.4.2.

$$\begin{aligned} f : \; G^{n} \quad &\to \quad G^{n} \\ X \quad &\to \quad f(X) \; = A.X \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & A_1 \end{bmatrix}$ şeklindeki Galile hareketi bir Öklid hareketi ve Shear hareketinin bileşkesi şeklinde ifade edilebilir.

İspat : $v \in R_1^{n-1}$, $A_1 \in R_{n-1}^{n-1}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \tag{4.3.8}$$

olarak yazılabildiğinden f Galile hareketi Öklid hareketi ve Shear hareketinin bileşkesi olarak yazılabilir.

5. PSEUDO-GALİLE KİNEMATİĞİ

Bu bölümde G_1^3 pseudo-Galile uzayı ve bu uzaydaki pseudo-Galile anlamındaki hareketler tanıtılarak kinematik özelikleri araştırıldı. Benzer araştırmalar G_1^n pseudo-Galile uzayında da incelendi.

5.1 G_1^3 Pseudo-Galile Kinematiği

Tanım 5.1.1. G_1^3 *pseudo-Galile uzayı* , $X(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ için

$$\|X\|_{PG} = \begin{cases} |x_1|, & x_1 \neq 0 \\ \sqrt{|x_2^2 - x_3^2|}, & x_1 = 0 \end{cases} \tag{5.1.1}$$

olarak tanımlı norm ile belirli R^3 uzayıdır.

G_1^3 pseudo-Galile uzayında

$$\begin{aligned} f: \ G_1^3 &\rightarrow \ G_1^3 \\ X &\rightarrow f(X) = A.X \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

shear hareketi, matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & \cosh\theta & \sinh\theta \\ a_{31} & \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{5.1.3}$$

olarak yazılır. (5.1.1) den, $X = (x, y, z)$ için,

i) $x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{c} \|X\|_{PG} = |x| \\ \|f(X)\|_{PG} = |x| \end{array} \right\} \Longrightarrow \|f(X)\|_{PG} = \|X\|_{PG}$ dir.

ii) $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \|X\|_{PG} = \sqrt{|y^2 - z^2|}$ dir.

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & \cosh\theta & \sinh\theta \\ a_{31} & \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{21}.0 + y\cosh\theta + z\sinh\theta \\ a_{31}.0 + y\sinh\theta + z\cosh\theta \end{bmatrix}$$

ve $\quad \|f(X)\|_{PG} = \sqrt{|y^2 - z^2|}$ dir.

Dolayısıyla $\|f(X)\|_{PG} = \|X\|_{PG}$ dir.

Böylece f yardımı ile belirli shear hareketine *pseudo-Galile anlamında hareket* denir.

Bu hareket altında sabit kalan noktaları araştıralım. Bunun için,

$$f(X) = X$$

denklemini inceleyerek (5.1.3) ile

$$\begin{aligned} a_{21}.x + \cosh\theta.y + \sinh\theta.z &= y \\ a_{31}.x + \sinh\theta.y + \cosh\theta.z &= z \end{aligned}$$

dir. Böylece bu harekette, x keyfi olmak üzere

$$\begin{aligned} y &= \det \begin{bmatrix} a_{21}.x & -\sinh\theta \\ a_{31}.x & 1-\cosh\theta \end{bmatrix} \\ z &= \det \begin{bmatrix} 1-\cosh\theta & a_{21}.x \\ -\sinh\theta & a_{31}.x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(x, y, z) noktalarından oluşan doğru sabit kalır.

Teorem 5.1.1.

$$PG(3) = \left\{ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \upsilon_1 & \cosh\theta & \sinh\theta \\ \upsilon_2 & \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} : \upsilon_1, \upsilon_2, \theta \in R \right\} \qquad (5.1.4)$$

olmak üzere, $(PG(3), \cdot)$ Lie gruptur.

İspat:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \upsilon_1 & \cosh\theta_1 & \sinh\theta_1 \\ \upsilon_2 & \sinh\theta_1 & \cosh\theta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_1 & \cosh\theta_2 & \sinh\theta_2 \\ k_2 & \sinh\theta_2 & \cosh\theta_2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \upsilon_1 + k_1\cosh\theta_1 + k_2\sinh\theta_1 & \cosh(\theta_1+\theta_2) & \sinh(\theta_1+\theta_2) \\ \upsilon_2 + k_1\sinh\theta_1 + k_2\cosh\theta_1 & \sinh(\theta_1+\theta_2) & \cosh(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \in PG(3) \quad \text{dir.}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \upsilon_1 & \cosh\theta & \sinh\theta \\ \upsilon_2 & \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$ için

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\upsilon_1\cosh\theta - \upsilon_2\sinh\theta & \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\upsilon_2\cosh\theta - \upsilon_1\sinh\theta & -\sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \in PG(3)$ dir.

Tanım 5.1.3. (G_1^3 **de Bir-Parametreli Pseudo-Galile Hareketleri**)

$$\begin{aligned} f: \ & G_1^3 \to G_1^3 \\ & X \to f(X) = A(t).X + C(t) = Y(t) \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

dönüşümü matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \upsilon_1(t) & \cosh t & \sinh t \\ \upsilon_2(t) & \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} \tag{5.1.7}$$

yazılır ve $t = 0$ için $\upsilon_1(0) = \upsilon_2(0) = a(0) = b(0) = c(0) = 0$ ve $Y(0) = X = f(X)$ olmak üzere $\forall\ t$ için pseudo-Galile anlamında uzaklığı korur. Bunun için $P(x_1, x_2, x_3), Q(y_1, y_2, y_3) \in G_1^3$ olmak üzere

$$d_{PG}(P, Q) = d_{PG}(f(P), f(Q))$$

olduğu görülebilir. (5.1.1) den $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|_{PG}$ u

$$d_{PG}(P,Q) = \begin{cases} |x_1 - y_1| & x_1 \neq y_1 \\ \sqrt{|(x_2-y_2)^2 - (x_3-y_3)^2|} & x_1 = y_1 \end{cases} \tag{5.1.7}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} f(P) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \upsilon_1(t) & \cosh t & \sinh t \\ \upsilon_2(t) & \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + a(t) \\ \upsilon_1(t).x_1 + \cosh t.x_2 + \sinh t.x_3 + b(t) \\ \upsilon_2(t)x_1 + \sinh t.x_2 + \cosh t.x_3 + c(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$f(Q) = \begin{bmatrix} y_1 + a(t) \\ \upsilon_1(t).y_1 + \cosh t.y_2 + \sinh t.y_3 + b(t) \\ \upsilon_2(t).y_1 + \sinh t.y_2 + \cosh t.y_3 + c(t) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

i) $x_1 \neq y_1 \quad \Rightarrow \quad d_{PG}(P,Q) = |x_1 - y_1|$ ve

$d_{PG}(f(P), f(Q)) = |x_1 + a(t) - y_1 - a(t)| = |x_1 - y_1|$ dir.

ii) $x_1 = y_1 \quad \Rightarrow \quad d_{PG}(P,Q) = \sqrt{|(x_2-y_2)^2 - (x_3-y_3)^2|}$ ve

$d_{PG}(f(P), f(Q)) =$

$=\sqrt{|(\cosh tx_2 + \sinh tx_3 - \cosh ty_2 - \sinh ty_3)^2 - (\sinh tx_2 + \cosh tx_3 - \sinh ty_2 - \cosh ty_3)^2|}$

$= \sqrt{|[(\cosh t(x_{2-}y_2) + \sinh t(x_3 - y_3)]^2 - [(\sinh t(x_{2-}y_2) + \cos ht(x_3 - y_3)]^2|}$

$= \sqrt{|(x_2-y_2)^2 - (x_3-y_3)^2|}$ dir.

Sonuçta f *bir-parametreli Pseudo-Galile hareketi*dir

(5.1.5) hareketinin pol noktalarını veren,

$$\dot{A}.X + \dot{C} = 0 \tag{5.1.8}$$

denkleminin çözümünden,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{v}_1(t) & -\sinh t & \cosh t \\ \dot{v}_2(t) & \cosh t & -\sinh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.9}$$

elde edilir. Burada $\det \dot{A}(t) = 0$ ve $\dot{A}(t)$ matrisi regüler olmadığından (5.1.8) sisteminin çözümü tek değildir.

Böylece , x_1 keyfi olmak üzere ,

$$\begin{aligned} \sinh t.x_2 - \cosh t.x_3 &= \dot{v}_1(t)x_1 + \dot{b}(t) \\ -\cosh t.x_2 + \sinh t.x_3 &= \dot{v}_2(t).x_1 + \dot{c}(t) \end{aligned}$$

sisteminden , hareketin pol doğrusu

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= -\det \begin{bmatrix} \dot{v}_1(t)x_1 + \dot{b}(t) & -\cosh t \\ \dot{v}_2(t).x_1 + \dot{c}(t) & \sinh t \end{bmatrix} \\ x_3 &= -\det \begin{bmatrix} \sinh t & \dot{v}_1(t)x_1 + \dot{b}(t) \\ -\cosh t & \dot{v}_2(t).x_1 + \dot{c}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

olarak elde edilir.

Tanım 5.1.4. (G_1^3 **de Bir Parametreli Homotetik Hareketler)**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t) & 0 & 0 \\ h(t).\upsilon_1(t) & h(t).\cosh t & h(t).\sinh t \\ h(t).\upsilon_2(t) & h(t).\sinh t & h(t).\cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} \qquad (5.1.13)$$

dönüşümünde $B(t) = h(t)A(t)$ ve $t = 0$ için $h(0) = 1$, $\upsilon_1(0) = \upsilon_2(0) = a(0) = b(0) = c(0) = 0$ ve $Y(0) = X = f(X)$ dir. (5.1.12) nin t ye göre türevi alınırsa

$$\dot{X} = \dot{B}.X_0 + \dot{C} + B.\dot{X}_0 \qquad (5.1.14)$$

elde edilir. Burada yer vektörü X olan P_X noktası için , $\dot{X}$ *mutlak hız*, $\dot{B}.X_0 + \dot{C}$ *sürüklenme hızı*, $B.\dot{X}_0$ *relatif hız*dır.

R_0 ve R nin her ikisinde aynı anda sabit noktalarını araştıralım. Bu noktaların t_0 anındaki pozisyonunu bulmak için pol noktalarını veren,

$$\dot{B}(t).X_0 + \dot{C}(t) = 0 \qquad (5.1.15)$$

denkleminin çözümlerine bakmak gerekir. (5.1.13) den t ye göre türevi alarak,

$$\begin{bmatrix} \dot{h}(t) & 0 & 0 \\ \dot{h}(t).\upsilon_1(t) + h(t).\dot{\upsilon}_1(t) & \dot{h}(t).\cosh t - h(t).\sinh t & \dot{h}(t).\sinh t + h(t).\cosh t \\ \dot{h}(t).\upsilon_2(t) + h(t).\dot{\upsilon}_2(t) & \dot{h}(t).\sinh t + h(t).\cosh t & \dot{h}(t).\cosh t - h(t).\sinh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\det \dot{B}(t) \neq 0$ dir. Dolayısıyla (5.1.11) hareketinin pol noktaları $\forall t$

için

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{\dot{a}(t)}{\dot{h}(t)} && (5.1.16)\\
y &= \det\begin{bmatrix} -\left[\dot{h}(t).v_1(t)+h(t).\dot{v}_1(t)\right]x-\dot{b}(t) & \left[\dot{h}(t).\sinh t+h(t).\cosh t\right] \\ -\left[\dot{h}(t).v_2(t)+h(t).\dot{v}_2(t)\right]x-\dot{c}(t) & \left[\dot{h}(t).\cosh t-h(t).\sinh t\right] \end{bmatrix}\\
z &= \det\begin{bmatrix} \left[\dot{h}(t).\cosh t-h(t).\sinh t\right] & -\left[\dot{h}(t).v_1(t)+h(t).\dot{v}_1(t)\right]x-\dot{b}(t) \\ \left[\dot{h}(t).\sinh t+h(t).\cosh t\right] & -\left[\dot{h}(t).v_2(t)+h(t).\dot{v}_2(t)\right]x-\dot{c}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

eğrisi üzerindeki noktalardır.

Sonuç 5.1.4. G_1^3 pseudo-Galile uzayında bir parametreli homotetik hareketler regüler hareketlerdir.

5.2 G_1^n Pseudo-Galile Kinematiği

Tanım 5.2.1. G_1^n *pseudo-Galile uzayı* , $X(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ için

$$
\|X\|_{PG} = \begin{cases} |x_1|, & x_1 \neq 0 \\ \sqrt{\left|x_2^2+x_3^2+...+x_{n-1}^2-x_n^2\right|}, & x_1 = 0 \end{cases} \tag{5.2.1}
$$

olarak tanımlı norm ile belirli R^n uzayıdır.

Tanım 5.2.2. (G_1^n Pseudo-Galile Uzayında Bir Parametreli Hareketler)

$$
A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v_1(t) & \\ . & g_{n-1}(t) \\ v_{n-}(t) & \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad g = g_{n-1} \in O_1(n-1) \quad , g^{-1}(t) = \varepsilon g(t)^T \varepsilon,
$$

$\varepsilon^{-1} = \varepsilon^T$ olmak üzere

$$
\begin{aligned} f:\ G_1^n &\to G_1^n \\ X_0 &\to f(X_0) = A(t)X_0 + C(t) \end{aligned} \tag{5.2.2}
$$

fonksiyonu ile belirli harekete *bir-parametreli pseudo-Galile hareketi* denir.

Şimdi G_1^n de genel hareketi inceleyelim :

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \upsilon(t) & g_{n-1}(t) \end{bmatrix} \tag{5.2.3}$$

$g_{n-1} \in O_1(n-1)$ olmak üzere f hareketinde $\det A(t) \neq 0$ dır. (5.2.2) nin t ye göre türevi alınarak,

$$\dot{X} = \dot{A}.X_0 + \dot{C} + A.\dot{X}_0 \tag{5.2.4}$$

elde edilir. Burada yer vektörü X olan P_X noktası için , $\dot{X}$ *mutlak hız*, $\dot{A}.X_0 + \dot{C}$ *sürüklenme hızı*, $A.\dot{X}_0$ *relatif hız*dır.

R_0 ve R nin her ikisinde aynı anda sabit noktaları araştıralım. Bu noktaların t_0 anındaki pozisyonunu bulmak için

$$\dot{A}(t).X_0 + \dot{C}(t) = 0 \tag{5.2.5}$$

denkleminin çözümlerine bakmak gerekir. (5.2.3) den,

$$\dot{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\upsilon}(t) & \dot{A}_1(t) \end{bmatrix}$$

ve $\det \dot{A}(t) = 0$ dır. Ayrıca,

$$\dot{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\upsilon}(t) & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dot{A}_1(t) \end{bmatrix} \tag{5.2.7}$$

yazılabilir. Burada $E(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\upsilon}(t) & I_{n-1} \end{bmatrix}$ ve $F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dot{A}_1(t) \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$rank \;\; \dot{A}(t) \leq \min(rank E(t), rank F(t)) \tag{5.2.8}$$

dir. Burada $rankE(t) = n-1$ dir. Eğer $rankF(t) = n$ ise $rank\ \dot{A}(t) = n-1$ olur. Bu durumda $\forall t$ anında hareketin bir pol ekseni vardır.

Bu bölümde Başdaş 1997 den faydalanarak G_1^n n-boyutlu Pseudo-Galile uzayında homotetik hareketi araştıracağız:

Tanım 5.2.3. (G_1^n Pseudo-Galile Uzayında Homotetik Hareket)

G_1^n n-boyutlu Pseudo-Galile uzayında bir cismin homotetik hareketi,

$$p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \nu_1(t) & \\ \cdot & g_{n-1}(t) \\ \nu_{n-1}(t) & \end{bmatrix} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} f:\ G_1^n &\rightarrow G_1^n \\ X_0 &\rightarrow f(X_0) = h(t)p(t)X_0 + C(t) \\ & \qquad X = B(t).X_0 + C(t) \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

dönüşümü ile verilir. $g \in O_1(n-1)$, $g^T = \varepsilon g^{-1}\varepsilon$, $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^T$, X_0, X, C birer $n \times 1$ matrisi ve h homoteti sabiti göstermektedir. h, p, g, C nin elemanları t reel parametresine göre sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonlardır.

$t = t_0$ anında R_0 ve R deki koordinat sistemlerinin çakışık olduğunu varsayalım. Genel Galile dönüşümü durumundan sakınmak için

$$h = h(t) \neq sb, \dot{h}(t) \neq 0 \tag{5.2.10}$$

ve

$$\dot{h}.p + h.\dot{p} \neq 0,\ \ C \neq 0 \tag{5.2.11}$$

olduğunu varsayalım. Burada $(\cdot)$ ile t parametresine göre adi türev göstermektedir. h bir skalar matris olduğundan, $h^{-1} = \frac{1}{h}$ ve $h^T = h$ dir.

$$B(t) = h(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \nu_1(t) & \\ . & g_{n-1}(t) \\ \nu_{n-1}(t) & \end{bmatrix} \tag{5.2.12}$$

$$B = hp \tag{5.2.13}$$

diyerek

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.2.14}$$

ve

$$X = B.X_0 + C$$

yazılır. Bu ifadenin t ye göre türevi alınarak

$$\dot{X} = \dot{B}.X_0 + \dot{C} + B.\dot{X}_0 \tag{5.2.15}$$

elde edilir. Burada yer vektörü X olan P_X noktası için , $\dot{X}$ *mutlak hız*, $\dot{B}.X_0 + \dot{C}$ *sürüklenme hızı*, $B.\dot{X}_0$ *relatif hız*dır.

R_0 ve R nin her ikisinde aynı anda sabit noktaların olup olmadığına bakalım. Bu noktaların t_0 anındaki pozisyonunu bulmak için

$$\dot{B}.X_0 + \dot{C} = 0 \tag{5.2.16}$$

denkleminin çözümlerine bakmak gerekir.(5.1.12) de t ye göre türev alırsak,

$$\dot{B}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t) & 0 \\ \dot{h}(t).\nu_1(t) + h(t)\dot{\nu}_1(t) & \\ . & (h(t).g(\dot{t})) \\ \dot{h}(t).\nu_{n-1}(t) + h(t)\dot{\nu}_n -_1 (t) & \end{bmatrix} \tag{5.2.17}$$

dir. Böylece

$$\det \dot{B}(t) = \dot{h}(t). \det(h(t).\dot{g(t)}) \tag{5.2.18}$$

dir.

$$B_1 = h(t).g(t) \tag{5.2.19}$$

olsun.

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= \dot{h}.g + h.\dot{g} \\ &= g.h.(\frac{\dot{h}}{h}.g + \dot{g}) \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

veya E birim matris olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= h.g.(\frac{\dot{h}}{h}.E + g^{-1}.\dot{g}) \\ &= B_1.(g^{-1}.\dot{g} + \frac{\dot{h}}{h}.E) \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

olur. Şimdi $g^{-1}.\dot{g}$ matrisini ele alalım

$$g^T \varepsilon g = \varepsilon \tag{5.2.22}$$

de türev alınarak

$$(\dot{g}^T \varepsilon)g + (g^T \varepsilon)\dot{g} = 0$$

ve

$$\Omega = g^T \varepsilon \dot{g} \tag{5.2.23}$$

denilerek

$$\Omega^T = \dot{g}^T \varepsilon g$$

olur ki

$$\Omega^T = -\Omega \tag{5.2.24}$$

elde edilir. O halde Ω matrisi anti-simetriktir. $g^T = \varepsilon g^{-1} \varepsilon$ alarak ,

$$
\begin{aligned}
\Omega &= (\varepsilon g^{-1}\varepsilon)\varepsilon\dot{g} \\
&= \varepsilon g^{-1}\dot{g} \qquad (5.2.25)
\end{aligned}
$$

veya

$$S = g^{-1}\dot{g}$$

olur.

$$S = \varepsilon\Omega \qquad (5.2.26)$$

olsun. Böylece

$$
\begin{aligned}
S^T &= (\varepsilon\Omega)^T \\
&= \Omega^T\varepsilon \\
&= -\Omega\varepsilon \qquad (5.2.27)
\end{aligned}
$$

$$S^T = -\varepsilon S\varepsilon$$

bulunur. Sonuçta , (5.2.21), (5.2.19),(5.2.26) den , $\lambda = -\frac{\dot{h}}{h}$, $E = I_n = [\delta_{ij}] \in R_n^n$ olmak üzere

$$\dot{B}_1 = B_1(S - \lambda E)$$

olarak tekrar yazılabilir. S Lorentz anlamında antisimetrik bir matristir.

$$
\begin{aligned}
\det \dot{B}_1 &= \det B_1 . \det(S - \lambda E) \\
&= h^n . \det g . \det(S - \lambda E), g \in O_\nu(n) \\
&= h^n . \det(S - \lambda E) \qquad (5.2.28)
\end{aligned}
$$

olur.

$\det \dot{B}_1 = 0$ için $h = 0$ veya $\det(S - \lambda E) = 0$ dır.

$h = 0$ için pür öteleme olacağından $h \neq 0$ alınacaktır. O halde $\det(S - \lambda E) = 0$ dır. Şimdi $\det(S - \lambda E) = 0$ denkleminin çözümüne bakalım:

$S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ ifadesinin her $\nu, w \in R_1^n$ için

$$\langle Sv, w \rangle = -\langle v, Sw \rangle \tag{5.2.29}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \langle Sv, w \rangle &= (Sv)^T.\varepsilon w \\ &= v^T S^T \varepsilon w, S^T = -\varepsilon S \varepsilon, S^T \varepsilon = -\varepsilon S \\ &= -v^T \varepsilon S w \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\langle S\bar{v}, \bar{w} \rangle = -\langle \bar{v}, S\bar{w} \rangle \tag{5.2.30}$$

olur.

$\det(S - \lambda E) = 0$ denkleminin çözümü S matrisinin λ karakteristik değerini verir. $\lambda = -\frac{\dot{h}}{h}$, $x \in R_1^n$

$$S(x) = \lambda x \tag{5.2.31}$$

denkleminin çözümlerini arıyoruz. Buna göre (5.2.30) dan $v = w = x$ için

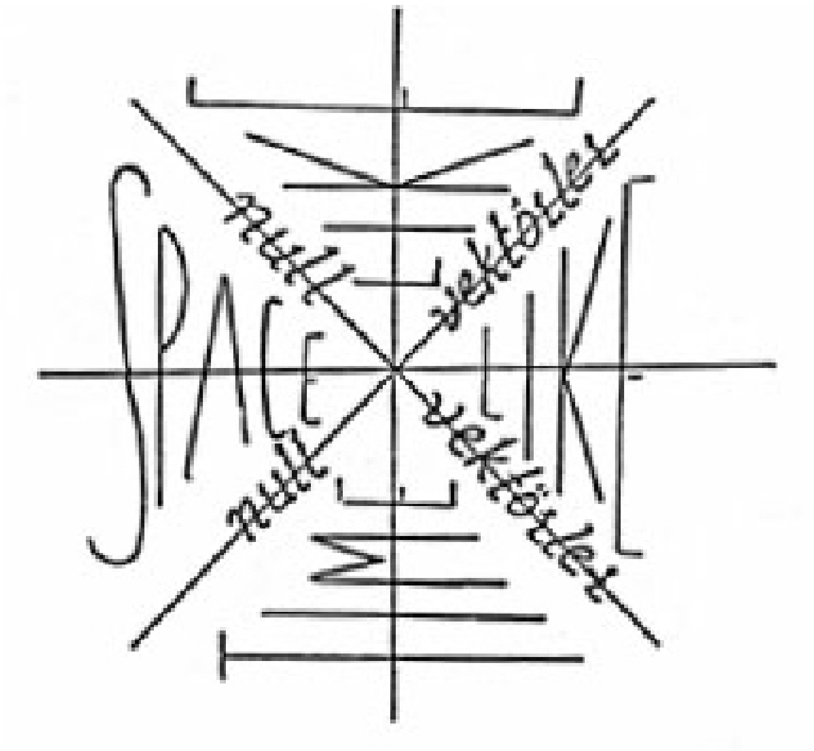
$$\begin{aligned} \langle S\bar{x}, \bar{x} \rangle &= -\langle \bar{x}, S\bar{x} \rangle \\ \langle \lambda\bar{x}, \bar{x} \rangle &= -\langle \bar{x}, \lambda\bar{x} \rangle \\ \lambda \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle &= -\bar{\lambda} \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \\ (\lambda + \bar{\lambda}) \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle &= 0 \qquad\qquad (5.2.32) \\ (\lambda + \bar{\lambda}) &= 0 \quad \text{veya} \quad \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \end{aligned}$$

dır.

$i)$ $(\lambda + \bar{\lambda}) = 0 \Rightarrow \lambda = -\bar{\lambda}$ olur ki bu da λ pür imajiner demektir.

$ii)$ $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Rightarrow$ halinde x vektörü null vektördür ve $S(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$ in λ ya göre reel çözümleri vardır. Bu ise null vektörlerin S altında invaryant kalmaları demektir. Yani null konisi hareket esnasında invaryant kalır. O halde null vektörleri dışında $\forall\lambda \in R$ için $\det(S-\lambda E)$ sıfırdan farklı olur.

Böylece (5.2.10) hareketinde (5.2.16) denkleminin çözümünde
$i)$ $\det \dot{B} \neq 0$ (timelike(zamansı) ve spacelike(uzaysı) bölgede)
$ii)$ $\det \dot{B} = 0$ (null(ışıksı) bölgede)



Şekil 5.1 Lorentz düzlemi (Ergin, 1989)

olabilir. Böylece aşağıdaki teoremleri verebiliriz:

Teorem 5.2.1. Zamansı ve uzaysı bölgelerde (5.2.10) hareketi regülerdir ve her t anında bir tek ani pol noktasına sahiptir.

Teorem 5.2.2. Işıksı bölgede (5.2.10) hareketi regüler değildir, pol noktası yoktur, dolayısıyla x null vektörleri tek değildir.

Teorem 5.2.3. Zamansı ve uzaysı bölgelerde (5.2.16) denkleminin tek (unique) bir çözümü vardır:

$$X_0 = q_0 = -(\dot{B})^{-1}.\dot{C} \tag{5.2.33}$$

Burada q_0 , Q pol noktasının hareketli uzay R_0 a göre yer vektörünü göstermektedir.Q nun sabit uzay R ye göre yer vektörü q ise

$$X = B.X_0 + C$$

ve

$$X = B[-(\dot{B})^{-1}.\dot{C}.] + C$$

veya

$$q = B.q_0 + C \tag{5.2.34}$$

olur. Böylece (5.2.33) ve (5.2.34) denklemleri hareketli ve sabit pol eğrilerinin denklemlerini vermektedir.

Tanım 5.2.4 (Pol Eğrilerinin Birbirine Göre Kayma ve Yuvarlanması)

(5.2.34) un t ye göre türevi alınarak

$$\dot{q} = \dot{B}.q_0 + \dot{C} + B.\dot{q}_0$$

veya (5.2.16) den dolayı

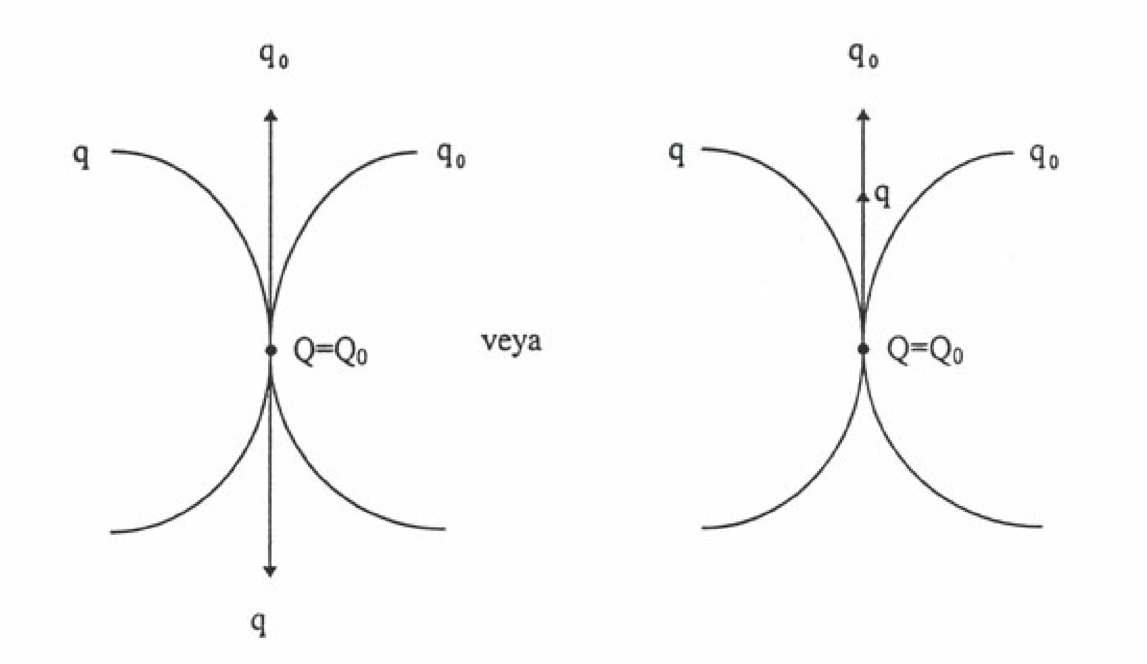
$$\dot{B}.q_0 + \dot{C} = 0$$

olduğundan

$$\dot{q} = \dot{B}.q_0 \tag{5.2.35}$$

olur.

Bu denklem Q noktasının t anındaki kayma hızını verir. Bunun anlamı, pol eğrilerinin değme noktalarındaki teğet vektörleri, B Shear(kırpma) ve C ötelemesinden sonra çakışır.



Şekil 5.2 Pol eğrilerinin birbirine göre kayma ve yuvarlanması

(5.2.35) den Lorentz anlamında norm alınarak,

$$\|\dot{q}\| = \left\|\dot{B}.q_0\right\|$$

$$\begin{aligned}
\|\dot{q}\|\, dt &= \left\|\dot{B}.q_0\right\| dt \\
&= \|h.g.\dot{q}_0\|\, dt \\
&= |h| \,.\, \|g.\dot{q}_0\|\, dt \\
&= |h|^n \,.\, \|\dot{q}_0\|\, dt
\end{aligned}$$

ds ve ds_0 yay elementini göstermek üzere $ds = \|\dot{q}\|\, dt$ ve $ds_0 = \|q_0\|\, dt$ olduğundan

$$ds = |h|^n .ds_0 \tag{5.2.36}$$

elde edilir. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.4. G_1^n n boyutlu Pseudo-Galile uzayında homotetik hareket boyunca null olmayan bölgelerde pol eğrileri birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanırlar. Bu kayma yuvarlanma hareketinin katsayısı $\pm h^n$ dir. Özel olarak $h = 1$ olması halinde homotetik olmayan shear(kırpma) hareketinde (5.2.36) dan dolayı, pol eğrileri söz konusu bölgede birbirleri üzerinde kaymaksızın yuvarlanırlar.

KAYNAKLAR

Başdaş, H.E. 1997. Minkowsky Uzayında Hareketler, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Bektaş, M. 2005. The Characterizations of General Helices In The 3-Dimensional Pseudo-Galilean Space, Soochow Journal of Mathematics, Vol. 31, No:3, 441-447.

Ciğerim, Ü. 1980. Öklid, Galile, Minkowski Geometrileri, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Courrant, R.and Hilbert, D. 1953. Methods of Mathematical Physics, Interscience Publ. INC. New York.

Divjak, B. 1997. The General Solution of Frenet System of Differential Equations For Curves In The Pseudo-Galilean Spaces, Math.Com. 2 ,143-147.

Divjak, B. and Sipus, Z.M. 2003. Special Curves on Ruled Surface In Pseudo-Galilean Spaces, Acta Math. Hunger 98(3), 2003-215.

Divjak, B. and Sipus, Z.M. 2005. Minding Isometries of Ruled Surfaces In Pseudo-Galilean Spaces J.Geom. 77, 35-47.

Ergin, A.A. 1989. Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H. 1971. On the Rolling of One Curve or Surface Upon Another. Proceedings of the Royal Irish Academy Volume 71, Section A, Number2, Dublin.

Hacısalihoğlu, H.H. 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Mat-No : 2.

Hacısalihoğlu, H.H. 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları,Mat. No. 2.

Hacısalihoğlu, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları,Mat. No. 2, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H. 1998. Dönüşümler ve Geometriler, Ankara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara.

James, D.E. and Brad, L. 1999. On Galilean Connections and The First Jet Bundle ARXIV : math. DG/9909148 VI.

Karger, A., Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie Groups, Gordon and Breach Science Publishers Montreux 2, Switzerland.

Majernik, V. 2006. Quaternion Formulation of the Galilean Space-Time Transformation Acta Physica Slovaca Vol.56 No:1, 9-14.

O' Neill, E. 1983. Semi-Riemannian Geometry Academic Press, 20-180 London.

Pavkovic, B.J.and Kamenarovic, I. 1987. The equiform differential geometry of curves in the Galilean spaces G_3,Glasnik Mathematicki, vol.22(42), 449-457.

Sipus, Z.M. and Divjak, B. 2004. Transversal Surfaces of Ruled Surfaces In The Pseudo-Galilean Space, Sitzungsber, Abt.II, 213,23-32.

Wallner, J., Chen, H.Y. and Pottmann, H. 1998. Galilei Laguerre Geometry and Rational Circular Offset Surfaces, Beitrage Algebra Geom.39, no.2, 291-305.53A40(51N25).

Yaglom, I.M. 1979. A Simple Non-Euclidian Geometry and Its Physical Basis, Springer-Verlag Inc.,New-York.

Yaylı, Y.1988. Hamilton Hareketleri ve Lie Grupları, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Esra Esin TÜTÜNCÜ
Doğum Yeri	:	Trabzon
Doğum Tarihi	:	20.06.1974
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Trabzon Lisesi (1991)
Lisans	:	Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi (1995)
Yüksek Lisans	:	Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (1999)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Rize Anadolu Lisesi (1995 – 1996)

Trabzon Kanuni Anadolu Lisesi (1996 – 1998)

Yayınları (SCI ve diğer)