VASSİLİEV SABİTLERİ ÜZERİNE

Davut ŞAYAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç.Dr. Abdullah KOPUZLU
2007
Her hakkı saklıdır

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VASSİLİEV SABİTLERİ ÜZERİNE

Davut ŞAYAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2007

Her hakkı saklıdır

Doç. Dr. Abdullah KOPUZLU danışmanlığında, Davut ŞAYAN tarafından hazırlanan bu çalışma ...../...../..... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : ..... *İmza* :

Üye : ..... *İmza* :

Üye : ..... *İmza* :

Üye : ..... *İmza:*

Üye : ..... *İmza:*

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(imza)

.....

Prof. Dr. Mehmet ERTUĞRUL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

VASSİLİEV SABİTLERİ ÜZERİNE

Davut ŞAYAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Abdullah KOPUZLU

Bu tezde Vassiliev sabitleri ve düğüm polinomları incelendi. İlk olarak düğüm teorisinin temel tanımları verildi. Çalışmamızın temeli olan düğüm, halka, düğümlerin denkliği, düğüm hareketleri ve klasik düğüm sabitleri tanıtıldı.

2007, 60 sayfa

Anahtar Kelimeler: Düğüm, Düğüm polinomu , Vassiliev sabiti , Skein bağıntıları.

ABSTRACT

Master Thesis

VASSILIEV INVARIANTS

Davut ŞAYAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

In this thesis , Vassiliev Invariants and knot polynomials have been investigated. Firstly , fundemental concept of knot theory have been built. Knot, link, the equivalence of knots, knot moves and classical knot invariants which are basic in our studies, have been introduced.

2007, 60 pages

Keywords: Knot, knot polynomial, Vassiliev invariant, skein relations.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Abdullah KOPUZLU'ya en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde çalışmalarımda gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e, hocam Sayın Yrd.Doç. Dr. Tamer UĞUR'a saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca çalışmalarım boyunca kendisinden görmüş olduğum destekten dolayı Sayın Arş. Gör. Ceren Sultan ELMALI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında ailem ve arkadaşlarımdan görmüş olduğum destek ve teşvikten dolayı kendilerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Davut ŞAYAN
Eylül 2007

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ..... vi
ŞEKİLLER DİZİNİ..... viii
1.GİRİŞ 1
2.KURAMSAL TEMELLER..... 4
2.1. Düğüm ……..... 4
2.2. Basit düğüm hareketleri 9
2.3. Halkalar…….. 16
2.4. Düğümlerin Aritmetiği..... 18
2.5. Regüler Diyagramlar …….…….…22
2.6. Düğüm Teorisinin Problemleri……...……24
2.7. Klasik Düğüm Sabitleri ……..26
2.8. Düğüm Grubu……..31
2.9. Seifert Yüzeyi……..…31
2.10. Bir Düğümün Cinsi……....32
3. MATERYAL ve YÖNTEM..... 34
3.1. Parantez Polinomu 34
3.2. Kauffman Polinomu..... 38
3.3. Jones Polinomu 40
3.4. Diğer Polinom Sabitleri 42
4. ARAŞTIRMA BULGULARI..... 44
4.1. Singüler Düğümler..... 44
4.2. Vassiliev Sabitleri 47
4.3. Vassiliev Sabitlerinin Bazı Örnekleri…….....51
4.4. Chord Diyagramları…….53
5. TARTIŞMA ve SONUÇ 57

KAYNAKLAR 60
ÖZGEÇMİŞ .....

SİMGELER DİZİNİ

B^n	n-Boyutlu top
$br(K)$	K düğümünün Köprü Sayısı
c	Bir Düğümün Geçit Noktası
C	Herhangi Bir Merkezi yay
$c(K)$	K Düğümünün Geçit Noktalarının Sayısı
D	K Düğümünün Standart Regüler Diyagramı
f	Herhangi Bir Dönüşüm
F	Seifert Yüzeyi
$F_K(a,x)$	K Düğümünün 2-Değişkenli Kauffman Polinomu
$g(K)$	K Düğümünün cinsi
K	Herhangi Bir Düğüm
K^*	K Düğümünün Ayna Görüntüsü
$-K$	K Düğümünün Yönlendirilmesinin Tersine Çevrilmesi
L	Herhangi Bir Halka
$lk(L)$	L Halkasının Halkalanma Sayısı
M	Bir Düğümün Seifert Matrisi
$P_K(a)$	K Düğümünün Bracket Polinomu
$\tilde{P}_K(a)$	K Düğümünün Kauffman Polinomu
$p(K)$	Bir Düğümün Sabiti
$p_K(v,z)$	K Düğümünün 2-Değişkenli Skein Polinomu(Homfly Polinomu)
$\mathbb{R}^2$	2-Boyutlu Euclid Uzayı
$\mathbb{R}^3$	3--Boyutlu Euclid Uzayı
S^1	1-Boyutlu Küre
S^3	$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ Şeklinde Oluşturulan Uzay
$sign(c)$	Bir Geçit Noktasının işareti
$S_K(x,y,w)$	K Düğümünün 3-Değişkenli Skein Polinomu

$u(K)$	K Düğümünün Düğümlenmeme Sayısı
$V_K(t)$	K Düğümünün Jones Polinomu
$w(D)$	Tait Sayısı
X	Herhangi Bir Topolojik Uzay
Y	Herhangi Bir Topolojik Uzay
$\#$	Bağlantılı Toplam Operatörü
Ω_i	$i = 1, 2, 3, \ldots$ için Reidemeister Hareketleri
$\approx$	Denklik Operatörü
$\cong$	Yönlendirme Denklik Operatörü
$X(F)$	F Yüzeyinin Euler Karakteristiği
$\Gamma(D)$	D Diyagramının Seifert Grafı
$\mu(F)$	F Yüzeyinin Sınırını Oluşturan Kapalı Eğrilerin Sayısı
$\Delta_K(t)$	K Düğümünün Alexander Polinomu
$\nabla_K(z)$	K Düğümünün Conway Polinomu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.Sol el trefoil düğümü…….....……4
Şekil 2.2. Sağ el trefoil düğümü..…….……..4
Şekil 2.3.Düğümlerin oluşması 6
Şekil 2.4. Bir vahşi düğüm örneği 7
Şekil 2.5.Ochiai düğümü 8
Şekil 2.6. Aşikar düğüm 9
Şekil 2.7. Düğümün poligonal hali 9
Şekil 2.8.Birinci basit düğüm hareketi ve tersi..... 10
Şekil 2.9. İkinci basit düğüm hareketi ve tersi 11
Şekil 2.10. Düğümlerin yönlendirilmesi 11
Şekil 2.11.Otohomeomorfizm örnekleri..... 14
Şekil 2.12 xyz-eksenlerine göre sağ el ve sol el yönlendirme kuralları 14
Şekil 2.13. xyz-düzleminde bir düğümün ayna görüntüsü 15
Şekil 2.14. Sol el trefoil düğümünün $\mathbb{R}^3$ uzayda yönlendirmeyle denk olması..... 16
Şekil 2.15. Denk iki halka 17
Şekil 2.16. Denk olmayan yönlendirilmiş iki halka.....17
Şekil 2.17. n-bileşenli aşikar halka.....18
Şekil 2.18. (1,1)-tangle örnekleri.....19
Şekil 2.19. Bir düğümün iki ayrı düğüme ayrışımı.....20
Şekil 2.20. K nın gerçek olmayan ayrışımı.....20
Şekil 2.21. İki farklı düğümün bağlantılı toplamı.....21
Şekil 2.22. Bir düğümün $\mathbb{R}^3$ de izdüşümü.....23
Şekil 2.23.Bir izdüşüm üzerinde oluşan katlı noktalar.....23
Şekil 2.24. Regüler diyagram örnekleri.....24
Şekil 2.25. Reidemeister hareketleri.....26
Şekil 2.26. Aşikar halkanın iki farklı regüler diyagramı için geçit noktaları sayısı.....27
Şekil 2.27. Farklı düğümler üzerindeki köprü örnekleri.....28
Şekil 2.28. Sol el trefoil düğümünün geçit noktalarının alt üst edilmesi 29

Şekil 2.29.Bir halkadaki geçit nokatsının işaretinin belirleme kuralı.....30
Şekil 2.30. n-cinsli yüzey örnekleri.....32
Şekil 3.1. Bir geçidin elimine edilmesi.....35
Şekil 3.2. Geçitlerin işaretleri.....38
Şekil 3.3. Bazı düğümlerin $w(L)$ sayısı.....39
Şekil 3.4. Geçitlerdeki L^-, L^+, L^0 durumları.....40
Şekil 4.1. Singüler düğümlerin bazı örnekleri.....45
Şekil 4.2. W topunun içinde bir düşey burulma.....46
Şekil 4.3. Ω operasyonu.....47
Şekil 4.4. Singüler skein diyagramı.....47
Şekil 4.5. Singüler skein operasyonu.....48
Şekil 4.6. Singüler ağaç diyagramı.....50
Şekil 4.7. Sağ el yonca yaprağı düğümünün singüler skein diyagramı.....54
Şekil 4.8. İki singüler düğümün denkliği.....56
Şekil 4.9. Chord diyagramı.....56

1.GİRİŞ

Düğüm teorisi ile ilk olarak kimin ne zaman ilgilendiğini söylemek zor olsa da son döneminde Gauss'un bu alana biraz ilgi duyduğu bilinmektedir.Amerikalı matematikçi Alexander düğüm teorisinin 3-boyutlu topoloji çalışmalarında ne kadar önemli olduğunu gösteren ilk kişidir. Ayrıca, Alman matematikçi Siefert 1920'lerin başından 1930'a kadar yaptığı çalışmalarda bu teorinin önemini belirtmiştir. Ayrıca cebirsel geometri ile düğüm teorisi arasındaki ilişki arasında gözle görülür çalışmalarda yine bu dönemde Almanyada yapılmıştır.

1980 lerin başında Jones'un epochal düğüm sabitlerini keşfinden dolayı düğüm teorisi topoloji başlığı altından çıkmış matematiksel fiziğe taşınmıştır. Bu durum düğüm teorisinin çözülebilir statiksel mekanikle yakınlığını da göstermiştir. Düğüm teorisi büyüyüp geliştiği için onun sınırları da devamlı olarak değişmekteydi. Matematiksel biyoloji, mekanik ve kimyanın belli alanlarında da gelişmeler göstermiştir.Örneğin, biyolojide DNA moleküllerinin belli tiplerinin şeklini aldığı görülmüştür (Murasugi 1996).

1867 yılında Lord Kelvin, kimyasal elementlerin gerekli niteliklerinin pek çoğunu açıklayacak gibi görülen deneyimsel mantık yürütme vasıtasıyla atomların kapsamlı bir teorisini öne sürdü. Kelvin' in teorisi, atomların düğümlenmiş eter tüpleri olduğunu tahmin ediyordu. (Bir topolojiciye göre; 3-uzaydaki bir düğüm kendi arakesit noktaları olmaksızın herhangi bir kapalı ilmektir ve bir halka kesişmeyen kapalı ilmeklerin herhangi bir birleşimidir). Düğümlerin topolojik durağanlık ve değişkenliğinin, kimyasal elementlerin değişimini ve olayın sabitliğini yansıttığı düşünülüyordu.

Bernhard Riemann 1860 larda, geometrik yapıların fizikteki kuvvetlerle olan ilişkisiyle ilgileniyordu. Riemann, Gauss'un çalışması üzerinde durarak 3-boyutlu uzaylar için eliptik, öklidik ve hiperbolik olmak üzere üç farklı geometrik yapıyı araştırıyordu. (Einstein' in izafiyet teorisi Riemannian geometri üzerine inşa edilmiştir). Bu farklı

yapıların her biri, düzlemlerdeki üçgenlerin davranışları ile karakterize edilebilirler. Eliptik 3-uzayda, düzlemdeki üçgenin iç açıları toplamı 180° den büyüktür. Öklidik 3-uzayda toplam 180° dir ve hiperbolik 3-uzayda ise toplam 180° den küçüktür. 1978de William Thurston bir 3-manifold bir hiperbolik yapıya sahip olduğunda gerekli şartları kurdu. Şaşırtıcı biçimde, düğümlerin iyi tanımlı bir alt sınıfı hariç tüm düğüm tümleyenleri tam bir hiperbolik yapıya sahiptirler.

Thurston'un hiperbolik yapılar üzerindeki çalışması, düğüm teorisinin fizik ile ilişkilerini sıkı bir şekilde yeniden kurdu. 1980 lerde tamamen beklenilmeyen bazı yollar vasıtasıyla düğüm teorisi kökleri ile daha çok ilişkiler kuruldu. 1987 de Vaughan Jones, operatör cebirlerin teorisini kullanan Alexander' ınkinden tamamen farklı olan bir polinom sabiti buldu. Kısa bir zaman dilimi içinde, Jones polinomundan genelleştirilen beşten daha fazla yeni polinom sabitleri bulundu. (Bu polinomlardan biri, altı farklı matematikçi tarafından aynı zamanda bulundu ve adı, onların soyadlarının ilk harfleri alınarak oluşturulan "homfly" oldu. Ayrıca Jones' un polinomu, hızlı bir şekilde düğüm izdüşümleri üzerinde Tait' in orijinal tahminlerinin tamamının doğruluğunu ortaya koyan ispatlara yol açtı).

Sonlu tip düğüm sabitleri birbirinden bağımsız olarak Victor Vassiliev ve Mikkail Gaussarov tarafından 1989-1990 civarında bulundu ve ilk yayınlar yapıldı.
İlk çalışmalar sırasında ne Vassiliev ne de Gaussarov bu keşfi oldukça fazla düşündü. Aslında Vassiliev düğüm sabitleri ile çok ilgilenmedi. Onun ilgilendiği konu smooth dönüşümler uzayında genel diskriminant teorisiydi. Düğüm teorisinde sonlu tipli sabitlerin önemini devrim şeklinde algıladı. Bu sabitlerin adını Vassiliev sabitleri koydu. Bazıları ise bunları Vassiliev-Gaussarov olarak adlandırdı.

Vassiliev'in yaklaşımı, bir manifolddan diğerine smooth dönüşümlerin uzayında (sonsuz boyutlu) diskriminantları çalışma üzerineydi. Diskriminant singülerlikle tüm dönüşümlerden ibarettir.

Örneğin ,bir çemberden 3-uzay üzerine tüm smooth dönüşümlerin uzayı $M = \{ f = S^1 \to \square^3 \}$ göz önüne alalım. Eğer f bir yerleştirme ise (singüler noktasız) bir düğümdür. Tüm düğümler kümesinin tümleyeni $\varepsilon \subset M$ diskriminatıdır. 0 singülerliğe sahip S^1 den $\square^3$ e tüm smooth dönüşümlerden ibarettir. Burada lokal ise $f^{'} = 0$ değil f birebirdir. İki düğümün denk olması için gerek ve yeter şart diskriminantı kesmeyen M uzayında bir yol ile birleştirilebilir olmasıdır. Böylece düğüm tipleri M / ε tümleyeninin bağlantılı bileşenleri ile birebir karşılık gelir.

(Birman ve Lin,1993) Vassilievin orijinal tekniklerinin bir çok sadeleştirmesine katkıda bulundular. Onlar,Jones polinomu ve sonlu tipli sabitler arasındaki bağlantıyı açıkladılar ve Chord diyagramlarının cebirsel rolünü vurguladılar. Bar-Natan Vassiliev sabitlerinin çalışma sürecinde ilk matematikçilerdi (Bar-Natan,1995). Makalelerinde ve tezinde sonlu tipli sabitler ile onun özel danışmanı E. Witten ile dikkatle işlenmiş topolojik kuantum cisim teorisi arasındaki ilişkyi buldu.

Sunulan bu tezin ikici bölümünde düğüm teorisinin bazı temel bilgileri ve düğümlerin özellikleri verilmiştir.

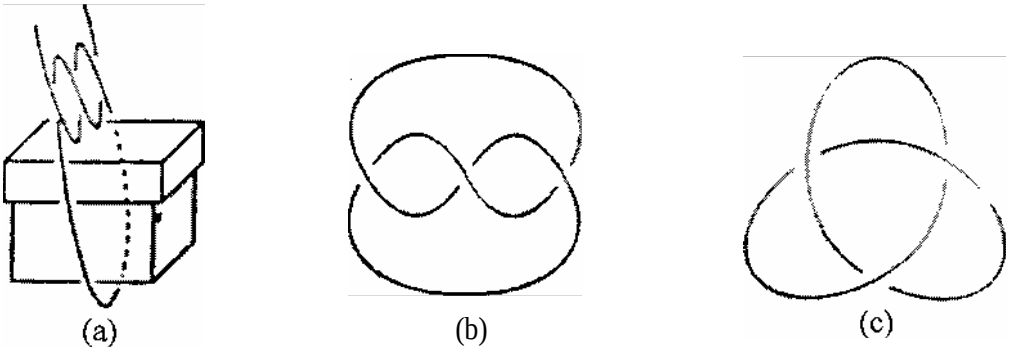
Üçüncü bölümde ise bazı düğüm polinomları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde ise Vassiliev sabitleri ele alınarak bazı düğümlerin Vassiliev sabitleri örnekleri verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Düğüm

Bir parça ip veya sicim Şekil 2.1.(a) da gösterildiği gibi bir kutuya gevşek bir şekilde bağlansın. Elde edilen, düğümün basit bir tipidir. Şimdi bu ipin iki ucu, ip kutuyla temas etmeyecek şekilde yapıştırılsın. Kutu sadece destek amacıyla kullanılmıştır. İşlem tamamlandığında özellikle görülmesi gereken şey Şekil 2.1.(b) deki, verilen bir iple meydana getirilen tek bir düğümlenmiş ilmektir. Matematikte bu ilmek düğüm olarak adlandırılır.



Şekil 2.1. Sol el trefoil düğümü

Daha kesin bir ifadeyle düğüm tek bir eğri olarak düşünülebilir. O halde bir düğüm uzayda basit kapalı bir eğridir. Eğer yukarıdaki işlem sol elle yapılacak olursa Şekil 2.1 deki düğüm Şekil 2.2 deki gibi olacaktır.

Şekil 2.2. Sağ el trefoil düğümü

İlk bakışta yukarıdaki iki düğümde birbirine benzerdir. Ancak dikkatle bakıldığında bu iki şekil arasında bazı yerlerde farklılıklar olduğunu görmek mümkündür. Bu iki düğümün her biri trefoil düğüm olarak adlandırılır. Bazen de yonca yaprağına benzediği için yonca yaprağı düğümü adını alır. Trefoil düğümünün şekli, Şekil 2.1.(c) ve 2.2.(b) de farklı olduğundan bu düğümleri ayırt edebilmek için bazen Şekil 2.1.(c) deki düğüme sol-el trefoil düğüm Şekil 2.2.(b) deki düğüme de sağ-el trefoil düğümü denir (Murasugi 1996). Düğüm tanımı aşağıdaki gibi biraz daha kavramsal olarak ifade edilebilir.

Tanım: X ve Y Hausdorff uzaylar olsun. Eğer $f : X \to f(X)$ bir homeomorfizm ise, tanımlanan bir $f : X \to Y$ dönüşümü gömülme olarak adlandırılır (Burde 2003).

Tanım: Bir düğüm, matematik diliyle bir S^1 yayının öklid 3-uzayı R^3 e veya 3-küre S^3 e bir gömülmesidir (Burde 2003).

Daha genel biçimde S^k nın S^{n+k} ya gömülmeleri daha yüksek boyutlu düğüm teorisinde çalışılmaktadır, fakat buradaki çalışmalar tam anlamıyla $S^1 \subset S^3$ klasik düğümleriyle ilgilidir. Şüphesiz, tek başına bir $i : S^1 \to S^3$ gömülmesi fazla bir fayda sağlamaz ve verimli sorulara yol açmaz. Bir düğümle alakalı en önemli problem, düğüm zarar görmeden 3-uzayda gerçekleştirilen belirli hareketlerle onun çözülüp çözülmediğidir. Böylece topolojik nesne daha ziyade bu hareketlerle ilgili olan gömülmelerin bir sınıfı olacaktır (İzotop gömülmeler).

Bir K düğümü, bir gömülme, gömülmelerin bir sınıfı, $i(S^1) = K$ görüntüsü (bir basit kapalı eğri) veya böyle eğrilerin bir sınıfı olacaktır, îzotopinin farklı tanınılanları vardır.

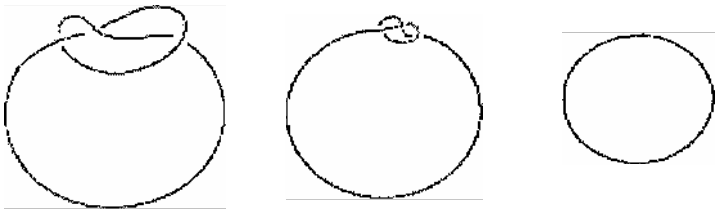
Tanım (İzotopi): $f_0, f_1 : X \to Y$ gömülmeleri verilsin. Eğer,

$F(x,t) = (f_t(x,y),t), x \in X, t \in I = [0,1]$ ve $f(x,0) = f_0(x), f(x,1) = f_1(x)$ olacak

Şekilde $F : X \times I \to Y \times I$ gömülmesi varsa f_0, f_1 gömülmeleri izotoptur denir (Burde 2003).

F, f_0 ı f_1 e bağlayan seviyeyi koruyan izotopi olarak adlandırılır. Genellikle sınır şartlarını koruyan $f_t(x) = f(x,t)$ notasyonu kullanılır.

Yukarıda tanımlanan genel izotopi notasyonu düğümler için yeterince kullamlışlı değildir. Herhangi iki $S^1 \to S^3$ gömülmeleri, düğümlenmelerine göre açıkça farklı olmalarına rağmen izotop oldukları gösterilebilir. Bu düşünce Şekil 2.3 deki resimlerin dizisi ile yeterli bir şekilde açıklanabilir. Düğümlenmenin oluştuğu herhangi bir bölge sürekli bir biçimde bir noktaya büzülebilir.



Şekil 2.3. Düğümlenmenin oluşması

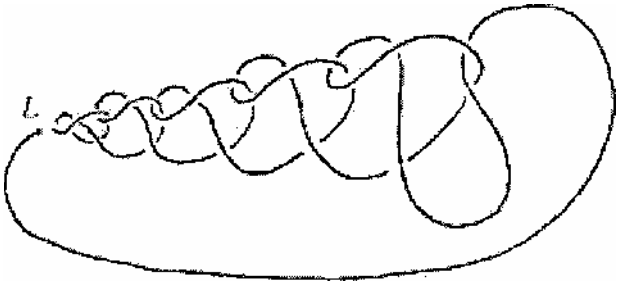
Tanım (Kuşatan İzotopi): $f_0, f_1 : X \to Y$ gömülmeleri verilsin. Eğer $f_1 = h_1 f_0$ ve $h_0 = id_Y$ ile $H(y,t) = (h_t(y), t)$ olacak şekilde bir $H : Y \times I \to Y \times I$ seviyeyi koruyan izotopisi varsa f_0 ve f_1 gömülmeleri kuşatan izotoptur denir. *H* dönüşümüne de kuşatan izotopi adı verilir (Burde 2003).

Bir kuşatan izotopi, $F(x,t) = (h_t f_0(x), t)$ ile f_0 ı f_1 e bağlayan bir *F* izotopisi tanımlar. Bu iki tanım arasındaki fark şöyledir: Bir izotopi, *Y* de, $f_0(X)$ kümesini sürekli bir biçimde $f_1(X)$ in üzerine taşır, fakat $f_1(X)$ in dışında *Y* nin yakınındaki noktalarını dikkate almaz. Eğer $(f_t(X))Y$ nin içinde taşınırsa, *Y* sıvı doldurulmuş şekilde

düşünüldüğünde $f_t(X)$ beraber sürekli bir şekilde hareket etmek için bir kuşatan izotopi Y ye ihtiyaç duyar.

$h_1 : Y \to Y$ homeomorfizminin $h_1 | Y - f_0(X) \to Y - f_1(X)$ kısıtlanışı,eğer f_0, f_1 e kuşatan izotop ise Y de $f_0(X)$ in tümleyenini $f_1(X)$ in tümleyenine taşıyan homeomorfîzmdir. Bu sadece izotopi durumunda doğru değildir ve önemli bir fark belirtir. Örneğin; yonca yaprağı düğümünün tümleyeni aşikar düğümün tümleyenine homeomorf değildir (Şekil 2.3 ün birinci resmine bakınız) (Rolfsen 1976).

$S^1 \to S^3$ topolojik gömülmeleri, Şekil 2.4 de gösterildiği gibi garip bir görünüme sahip olabilirler. Vahşi olarak adlandırılan bu düğümde, bir L limit noktasına yakınsayan benzer ağların bir sonsuz dizisi vardır. R. H. Fox (Fox 1949) tarafından bulunan bir vahşi düğümün bu örneği, gerçekten böyle bir vahşilik noktasında olağanüstü şeyler yapabileceğini gösteren dikkate değer özelliklere sahiptir. Şekil 2.4 de tanımlanan eğrinin tümleyeninin bir aşikar düğümünkinden farklı olduğu ispatlandı. Ancak, düğüm açıkça sağdan çözülebilir. En azından sonlu bir biçimde ilmeklerin çoğu çözülebilir.

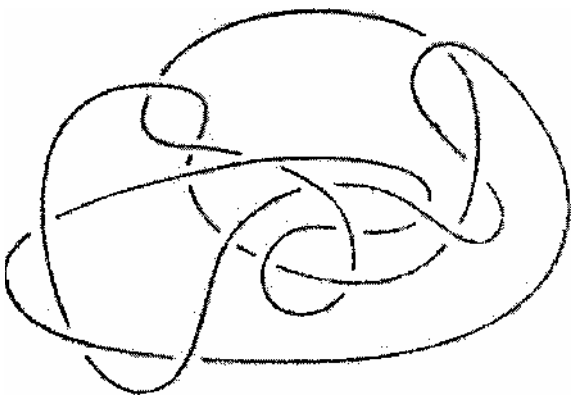


Şekil 2.4. Bir Vahşi düğüm örneği

Tanım (Uslu Düğümler): Bir K düğümü, eğer R^3 (veya S^3) de bir basit kapalı poligona kuşatan izotop ise uslu düğüm olarak adlandırılır. Şayet bir düğüm uslu değilse vahşidir denir (Burde 2003).

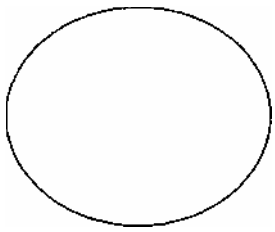
Eğer bir düğüm uslu ise, onun herhangi bir bağlantılı alt parçası α bir doğru parçasına kuşatan izotoptur ve böylece $S^3 - \alpha$ tümleyeni açıkça bağlantılıdır. Şekil 2.4 deki L limit noktasını kapsayan düğümün herhangi bir alt yayının basit bağlantılı olmayan bir tümleyene sahip olduğu gösterilebilir. Çok iyi bir matematiksel model Smooth düğüm kavramıdır. Smooth düğüm, S^1 çemberinin, çemberin hiçbir nokta çifti R^3 de aynı noktaya düşmeyecek şekilde $f : S^1 \to R^3$ herhangi sürekli dönüşümü ile gömülmesidir.Smooth düğüm. R^3 de S^1 çemberinin, diferensiyeli sıfır olmayan bir sonsuz diferensiyellenebilir gömülme altındaki görüntüsü olarak tanımlanır (Prasolov 1996).

Bir düğümü tanımlamak için bir parça ipi bir kutuya veya benzer bir şeye bağlayarak elde edilen objenin, düğüm olduğunu söylemek yeterli değildir. Bağlama şekillerine göre birbirinden bağımsız çeşitli düğüm tipleri elde edilebilir. Çok uzun bir ip kullanarak ve bu ipi çok karmaşık bir tarzda düğümleyerek oldukça karmaşık düğümler meydana getirilebilir. Örneğin; Şekil 2.5. deki Ochiai düğümü gibi bir örnek düşünülebilir.



Şekil 2.5. Ochiai düğümü

Tersine Şekil 2.6. da gösterildiği gibi kısa bir ipin uçları birleştirilsin. Bu düğüm, düğümlenme yapılmadan oluşturulmuştur ve bu düğüme aşikar düğüm veya düğümlenmemiş düğüm denir.



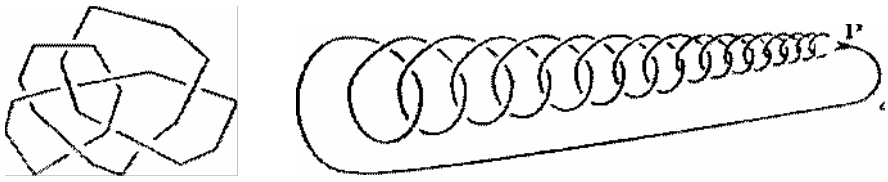
Şekil 2.6. Aşikar düğüm

Şimdi rasgele oluşturulmuş çeşitli düğüm biçimlerinden ikisi ele alınsın ve *A* ile *B* olarak adlandırılsın. *A* düğümü *B* düğümüne dönüştürebilir mi? sorusu doğal bir sorudur. Eğer *A* nın şekli birazcık değiştirilerek, *B* ye dönüştürebiliyorsa, bu durumda bu iki düğümün denk veya eşit olduğu söylenebilir. Bu nedenle düğümlerin uzunluğundan ve kalınlığından ziyade şekli ile ilgilenilecektir. Düğüm teorisinin temel problemi budur.

2.2. Basit Düğüm Hareketleri

Bir düğüm Şekil 2.7. de görüldüğü gibi 3-boyutlu uzayda bükülmüş veya dolaştırılmış bir poligon olarak düşünülebilir. Bunun sebebi kombinatoryal topoloji vasıtasıyla vahşi düğümlerin hariç tutulmasına izin verilmesinden dolayıdır. Vahşi düğümlere bir örnek Şekil 2.7. de görülebilir. Bir *P* noktası seçilir bu nokta bir anlamda "limit" noktasıdır ve düğüm akordiyonik bir tavırla demetler halinde başlayarak bu noktaya doğru gider.

Böyle bir noktanın komşuluğunda düğüm kendi doğal durumunu gösterir. Böyle düğümlerle karşılaşıldığında uslu düğümlere müracaat edilir.



Şekil 2.7. Düğümün poligonal hali

Poligonal bir biçimde olan bir düğüm düşünülürse, bir düğüm sonlu sayıda kenarların bir birleşimi olduğu için bir düğüm poligonal yaylardan ziyade daha yumuşak, daha düz bir şekilde

resmedilir. Fakat bir düğüm, matematiksel anlamda poligonal doğruların bir kolleksiyonudur. Matematiksel bir şekilde izah edilmeye devam edilirse bir düğümün şeklinde değişiklik yapılabildiği kolayca görülebilir. Örneğin; bir *K* düğümü üzerindeki *AB* kenarını, *AC* ve *CB* kenarlarıyla değiştirmek mümkündür. Bu değişikliğin tersi de yapılabilir. Böyle yer değiştirmeler basit düğüm hareketleri olarak adlandırılır.

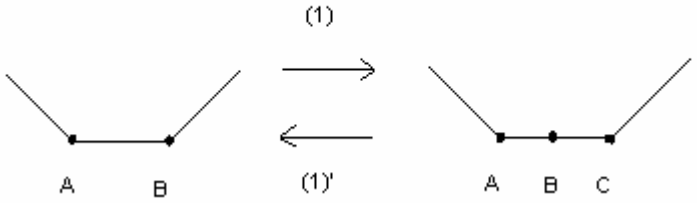
Tanım: Verilen bir *K* düğümü üzerinde aşağıdaki basit düğüm hareketleri olarak adlandırılan dört işlem uygulanır (Murasugi 1996).

(1) Şekil 2.8. de görüldüğü gibi bir *K* düğümü üzerindeki *AB* kenarı, bir C noktası referans alınarak *AC* ve *CB* şeklinde iki kenara bölünebilir.

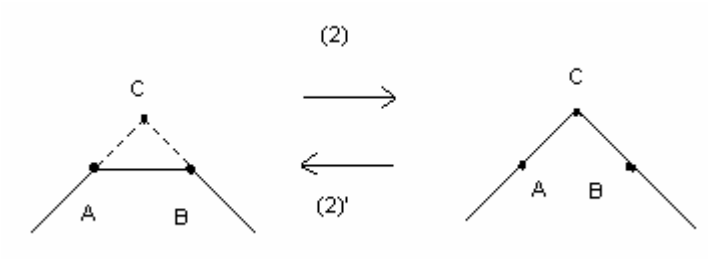
(1)' ((1) in tersi) Şekil 2.8. de görüldüğü gibi bir *K* düğümü üzerinde bitişik *AC* ve *CB* kenarlarından oluşan bir doğru parçası varsa bu C noktası kaldırılarak bir *AB* kenarı elde edilebilir.

(2) *K* düğümü üzerinde bulunmayan bir C noktası düşünülsün. *AB* ve C ile biçimlendirilen *ABC* üçgeni *AB* kenarı hariç *K* düğümünü kesmezse bu durumda *AB* kenarı ortadan kaldırılabilir ve *AC* ve *CB* kenarları eklenebilir (Şekil 2..9.).

(2)' ((2) nin tersi) *K* düğümü üzerinde *K* nın *AC* ve *CB* bitişik iki kenarını ihtiva eden bir *ABC* üçgeni mevcutsa ve bu üçgen *AC* ve *CB* kenarları hariç *K* düğümünü kesmezse Şekil 2.9 da görüldüğü gibi *AC ve CB* kenarları kaldırılabilir ve *AB* kenarı eklenebilir.



Şekil 2.8. Birinci basit düğüm hareketi ve tersi



Şekil 2.9. İkinci basit düğüm hareketi ve tersi

Bir düğüm başlangıç ve bitiş noktasına sahip olmayan basit kapalı bir eğridir. Bu yüzden eğriye bir yönlendirme verilebilir. Bir düğümün yönlendirmesi bir ok vasıtasıyla gösterilir. Herhangi bir düğümün yönlendirmesinin iki türlü olacağı, Şekil 2.10 da görüldüğü gibidir.

(a) (b)

Şekil 2.10. Düğümlerin yönlendirilmesi

Eğer yönlendirilmiş K ve K' düğümleri, yönlendirilmiş temel düğüm hareketleri vasıtasıyla birbirlerine dönüştürülebiliyorsa K ve K' düğümlerinin, yönlendirmeleri korunarak denk oldukları söylenir ve $K \cong K'$ şeklinde yazılır.

Tanım: Eğer iki (p.1.)-düğümleri kuşatan izotop iseler bu düğümler denktir. Bir K düğümü, denk düğümlerin (veya onun sınıflarının) bir sınıfının bir temsilcisi olabilir. Şayet K ve K' düğümleri denkse, onların aynı oldukları söylenir ve $K = K'$ eşitliği kullanılır. K, bir basit kapalı sınırlı poligonal eğri veya böyle eğrilerin bir sınıfını belirtebilir (Burde 2003).

Düğümlerin “P.L.” sınıfı için bir topolojik denklik sağlamak için uslu düğümlerin tanımı, topolojik kuşatan izotopinin tanımını kullanmayı önerir. İlk görüşte, P.L.-kategoriye kısıtlanışın farklı bir türün denklik sınıflarını verebileceği düşünülebilir. Bu doğru değildir. Aslında, iki uslu düğümün topolojik olarak denk olması için gerek ve yeter şart onların topolojik sınıflarının P.L.-temsillerinin P.L. - denk olmasıdır.

Şu ana kadar ya S^1 üzerinden yada S^3 üzerindeki atanmış yönlendirmeler olmadan düğümler tanımladı. Şayet S^1 yönlendirilmiş (yönlendirilmiş düğüm) ise denklik yeniden düzenlenmelidir: Eğer iki yönlendirilmiş düğüm, düğümlerin yönlendirmesini dikkate alan onlara bağlı bir kuşatan izotopi varsa denktirler.

Tanım (P.L.-İzotopi ve P.L.-Kuşatan İzotopi): X, Y polihedra ve $f_0 f_1 : X \to Y$ *p.* 1.-gömülmeler olsunlar. Eğer

$$F : X \times I \to Y \times I, F(x,t) = \left(f_t(x), t \right), 0 \le t \le 1$$

olacak şekilde bir seviyeyi koruyan P.L. gömülme varsa f_0 ve f_1 , P.L.-izotoptur denir. Eğer $f_1 = h_1 f_0$ ve $h_0 = id_Y$ ile tanımlı $H : Y \times I \to Y \times I, H(y,t) = \left(h_t(y), t \right)$ olacak şekilde bir seviyeyi koruyan p.l. izotopi varsa f_0 ve f_1 , P.L.- kuşatanizotopturlar denir (Burde 2003).

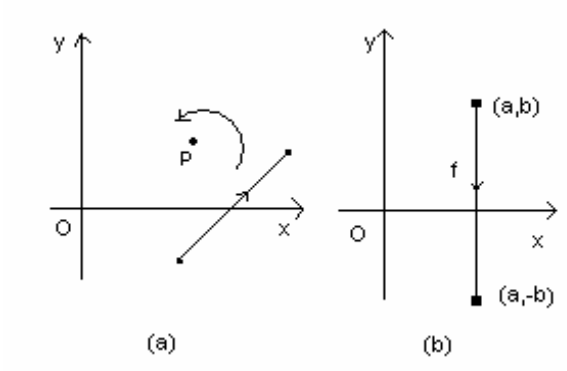
Tanım: İki P.L. n -halkaları L ve L', eğer $h(L) = L'$ ile tanımlı S^3 ün bir h otohomeomorfizmi varsa denktirler. Daha net bir ifadeyle, şayet h yönlendirmeyi koruyan veya tersine çeviren ise o zaman halkalar sırasıyla pozitif denk veya negatif denktirler. Üstelik, şayet h ve $h\big|L : L \to L'$ yönlendirmeyi koruyan iseler L ve L' aynı tipe sahiptirler ve $L \cong L'$ ile gösterilirler (Kawauchi 1996).

Bir $n-$ halka L nin tüm bileşenlerinin yönlendirmeleri tersine çevrilirse bu halka -L ile gösterilir. $L \cong -L$ olduğu zaman , L halkası tersine çevrilebilirdir denir. S^3 ün yönlendirmeyi ters çeviren bir P.L. otohomeomorfızmi g altında L nin görüntüsü L^* ile gösterilir. Burada, L^*, g ile L den oluşturulan yönlendirme ile yönlendirilir. Bu durumda L^* in tipi g nin seçiminden bağımsızdır ve sadece L ile belirlenir. L^*, L nin ayna görüntüsü olarak adlandırılır. $-(L^*) = (-L)^*$ eşitliği basitçe $-L^*$ ile gösterilir. Eğer, L^* veya L^* in bazı bileşenlerinin yönlendirmelerini tersine çevirerek L^* dan elde edilen bir pl $n-$halka ρL^* için $L \cong \rho L^*$ ise L ye amphicheiraldir denir. Özellikle L, $L \cong L^*$ olduğu zaman (+) amphicheiraldir ve $L \cong -L^*$ olduğu zaman (-) amphicheiraldir.

Bir düğüm üzerindeki temel düğüm hareketleri, bir düğümün yalnızca bir bölümüne uygulanan "lokal" hareketler veya dönüşümlerdir. Böyle "lokal" dönüşümler yerine, "global" dönüşümlere veya hareketlere dayalı olarak düğümlerin denkliği yeniden tanımlanabilir. Bu dönüşümler uzaydaki mevcut bütün düğümler için geçerlidir (Murasugi 1996).

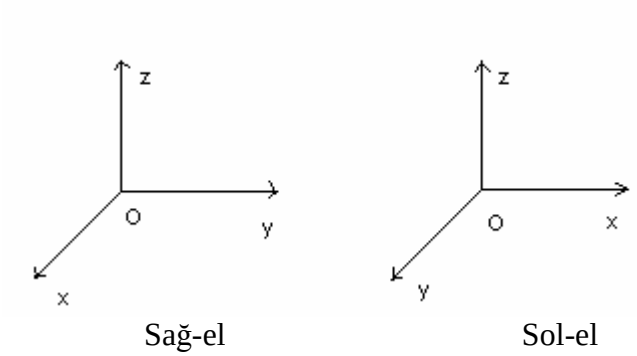
K_1 ve K_2 iki düğüm olmak üzere, K_1 i K_2 ye dönüştüren S^3 ün yönlendirmeyi koruyan bir homeomorfizmi varsa, K_1 ve K_2 nin denk olduğu söylenir.

Örnek : Hem X hem de Y nin $\square^2$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $(x+y) = (x+a, y+b)$ ile verilen bir doğru boyunca bir paralel öteleme ve bir sabit nokta etrafında (örneğin orijin etrafında) yapılan bir dönme, yönlendirmeyi koruyan otohomeomorfizm örnekleridir (Şekil 2.11. (a)).



Şekil 2.11. Otohomeomorfizm örnekleri

Bununla birlikte $f(x,y)=(x,-y)$ homeomorfizmi ile verilen x-eksenine göre ayna görüntü, yönlendirmeyi koruyan bir otohomeomorfizm değildir. Çünkü burada yönlendirme Şekil 2.11.(b) de görüldüğü gibi ters çevrilir. (Bu şekilde y-ekseni üzerindeki f dönüşümünün etkisi, y-ekseninin orijinal yönlendirmesini ters çevirecektir).



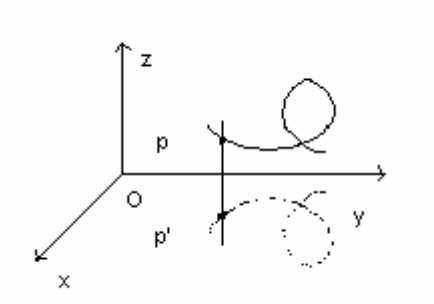
Şekil 2.12. xyz-eksenlerine göre sağ el ve sol el yönlendirme kuralları

Şekil 2.12 da görüldüğü gibi R^3 uzayında xyz -eksenlerine göre sağ-el kuralı vasıtasıyla yapılan bir yönlendirmenin tayininin doğal bir yolu daha vardır.

Yukarıdaki örnekde (Öklid) uzaylar 2-boyutludur. Bu uzaylar bir üst boyutta düşünülürse, bu durumda sabit bir nokta (veya sabit bir eksen) etrafındaki bir dönme ve paralel ötelemenin R^3 ün yönlendirmesini koruyan otohomeomorfizmlerin örnekleri olduğunu görmek zor değildir. Ancak, xy-düzlemine göre, $\varphi(x,y,z)=(x,y,-z)$ dönüşümü ile verilen ayna görüntü göz önüne alınırsa bu durumda, bu dönüşüm yönlendirmeyi ters çevirir. $xy-$düzleminin bir ayna olduğu kabul edildiği için, φ dönüşümü, Şekil 2.13 de

görüldüğü gibi P noktasının aynada P' noktasına yansıması olarak düşünülebilir. Aynı şekilde sağ-el kuralına göre üç eksen, sol-el kuralına göre oluşan üç eksene yansır (dönüşür). Bu yüzden φ yönlendirmeyi korumaz.

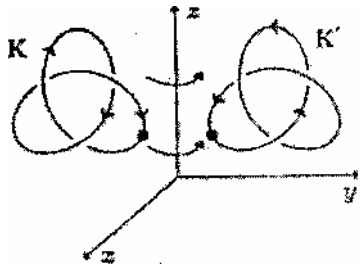
Genelde $\square^3$ deki bir keyfi nokta, E düzlemine göre bu noktanın yansıması olan noktaya dönüştürebiliyorsa, bu ç dönüşümünün E düzlemine göre bir ayna görüntü (veya bir simetri) olduğu söylenebilir. K düğümü üzerinde φ ayna görüntüsünün etkisiyle elde edilen $\varphi(K)$ görüntüsü, K nın ayna görüntüsü olarak adlandırılır. Eğer K tayin edilmiş bir yönlendirmeye sahipse, açıkça K nın yönlendirmesinden K nın ayna görüntüsü için de bir yönlendirme tayin edilir.



Şekil 2.13. xyz- düzleminde bir düğümün ayna görüntüsü

Yönlendirilmiş K_1 ve K_2 şeklinde iki düğüm verilsin. Ne K_1 in ne de K_2 nin yönlendirmesini değiştirmeyen, $\square^3$ ün yönlendirmeyi koruyan bir otehorneomorfizmi vasıtasıyla K_1, K_2 ye dönüştürebilirse , K_1 ve K_2 düğümlerinin yönlendirmeyle denktir denir.

Örnek : Bir z-ekseni etrafında bir 180° dönme olan $\varphi(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ dönüşümünü göz önüne alınsın. Bu dönüşüm yönlendirmeyi koruyan bir otohomeomorfizmdir (Şekil 2.14.) . φ dönüşümü yönlendirilmiş sol-el trefoil K düğümünü K' ne dönüştürdüğünden bu iki düğüm yönlendirmeyle denktir. K', K ya zıt yönlü bir düğümdür.



Şekil 2.14. Sol el trefoil düğümünün $\square^3$ uzayda yönlendirmeyle denk olması

2 .3. Halkalar

Tanım : Bir halka, biri diğerini kesmeyen düğümlerin sonlu ve sıralanmış bir koleksiyonudur. Her bir K_i düğümüne halkanın bir bileşeni adı verilir (Murasugi 1996).

Tanım: Eğer, aşağıda ki iki şart sağlanırsa $L = (K_1, K_2, ..., K_m)$ ve $L' = (K_1', K_2', ..., K_n')$ halkaları denktirler (veya eşittirler) (Murasugi 1996).

(1) $m = n$ yani L ve L' aynı sayıda bileşene sahiptir.
(2) Sonlu sayıda basit düğüm hareketi uygulanarak L, L' ne dönüştürülebilir.

Başka bir ifadeyle, basit düğüm hareketleri kullanılarak K_1, K_1' ne K_2, K_2' ne ,…, K_m, K_n' ne dönüştürülebilir *(m = n)*. Yukarıda verilen (2) şartı yerine (2)' şartı yazılabilir.

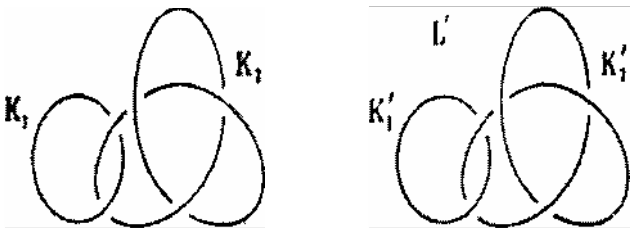
$(2)'$ $\varphi(K_1) = K_1'$, $\varphi(K_2) = K_2'$,…, $\varphi(K_m) = K_n'$ olan ve $\square^3$ ün yönlendirmesini koruyan bir φ otohomeomorfizmi vardır.

Daha net söylenirse, halkaların denkliği bileşenlerinin nasıl sıralandığı ile bağlantılıdır, Bileşenleri yeniden sıralama imkanına sahip olunduğundan genelde böyle bir şartı koymak gereksizdir. Genellikle bu sebepten $(2)'$ aşağıdaki (2A) ile değişmiştir.

(2A) $K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_m$ ailesini $K_1^{'} \cup K_2^{'} \cup ... \cup K_m^{'}$ ne dönüştüren ve $\square^3$ ün yönlendirmeyi koruyan bir otohomeomorfizmi vardır.

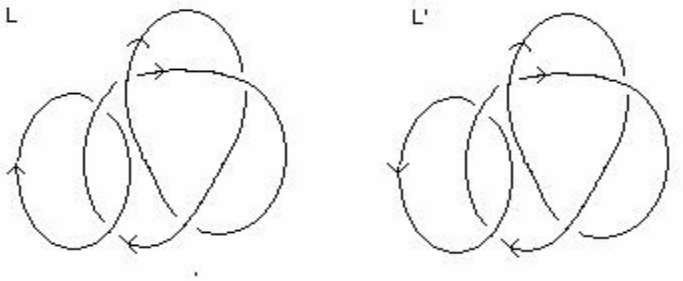
Eğer halkanın her bir bileşeni yönlendirilmiş ise bu durumda denklik tanımları, tamamen yönlendirilmiş düğümlerin denkliği tanımının bir genişlemesi olacaktır.

Örnek : Şekil 2.15 deki *L* ve *L'* halkaları tamamen aynı olduğundan, bu halkalar denktir. Bununla beraber eğer, *L* nin bileşenlerinin sırası değiştirilirse, bu durumda yukarıdaki tanımın (2) şartı sağlanmaz ve halkalar denk olmaz. Fakat (2A) şartı sağlanmıştır. Böylece onlar denk olarak düşünülür.



Şekil 2.15. Denk iki halka

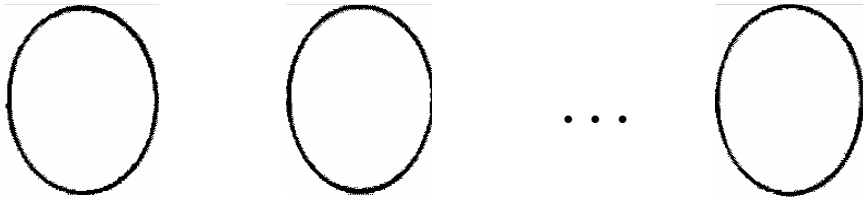
Şekil 2.16 de *L* ve *L'* ne bir yönlendirme verilsin. İki halkaya bir yön verilmesi (2) şartının sağlanmamasına sebep olur. Böylece bu yönlenmiş halkalar denk olmaz.



Şekil 2.16. Denk olmayan yönlendirilmiş iki halka

Bundan dolayı düğümlerin denkliği problemine göre daha çok karışık olan halkaların denkliği problemi incelenirken daha dikkatli olunmalıdır.

Burada halkaların durumuna göre aşikâr düğüm kavramı genişletilebilir. Örneğin, n -bileşenli aşikâr halka gibi. Halkaların genişlemesinde uygun halka n -ayrık aşikâr düğümden meydana gelir (Şekil 2.17.).



Şekil 2.17. n- bileşenli aşikar halka

Her bir n için sadece bir aşikâr n -bileşenli halka vardır (aşikâr halkayı yönlendirme fazla işe yaramaz). Düğümler için verilen önermeler halkalar içinde genişletilebilir. Yeri geldikçe düğümler için sağlanan ifadelerin sonunda "halkalar içinde sağlanır" tabiri kullanılacaktır.

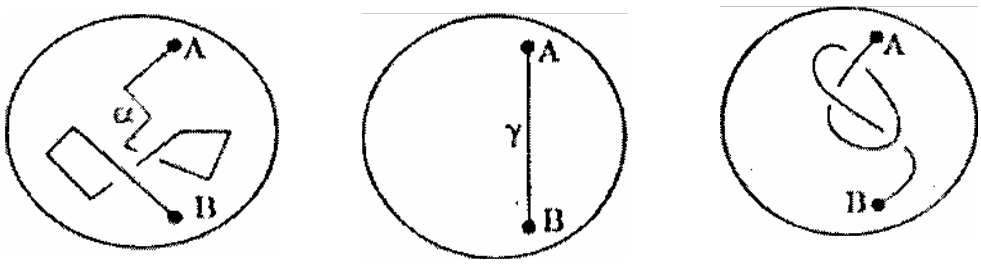
2.4. Düğümlerin Aritmetiği

Bütün düğümleri ihtiva eden küme üzerinde bir toplama işlemi tanımlanabilir. Bu nedenle bu bölümde, iki düğümden tek bir düğümün nasıl elde edilebildiği verilecektir. Bu yaklaşımdan bir sonuç çıkarmak için ters işlem üzerine yoğunlaşılacaktır. Örneğin, bir düğüm (veya halka) daha basit iki düğüme ayrıştırılacaktır.

Şimdi, S^3 de (veya $\mathbb{R}^3$) bir S küresini ve S ile sınırlanmış 3-boyutlu, B^3 topu göz önüne alınsın. B^3 ün içinde, A, B uç noktalan S yüzeyinde bulunan bir basit bükülmüş α doğrusu (aslında, poligonal bir doğru) verilsin. Eğer bu α eğrisi S yi sadece A ve B noktalarında kesiyorsa, Şekil 2.16 de de görüleceği gibi, bu eğri, (1,1)-tangle olarak

adlandırılır. Bir (1,1)-tangle in basit kapalı eğrilere bölünmüş olabileceğine dikkat edilmelidir.

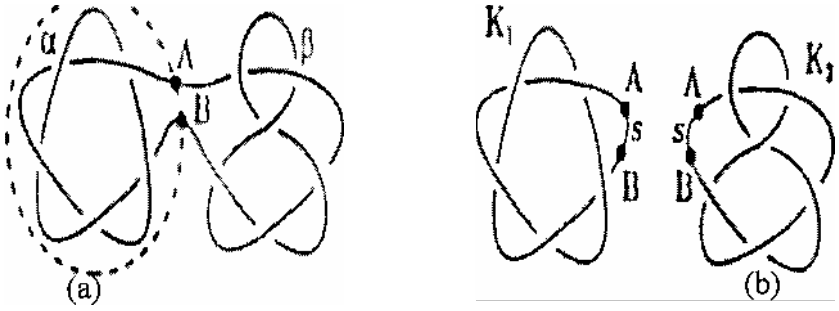
B^3 ün içinde bulunan α düğümlenmiş (l,l)-tangle ın parçalarına basit düğüm hareketleri uygulanabilir. Bunu yaparak da, sabitlenmiş A ve B noktalarına sahip α eğrisi, Şekil 2.18.(b) de görüldüğü gibi (l, 1) -tangle a değiştirildiği düşünülebilir. Böyle bir α eğrisi bir aşikar (1,1)-tangle olarak adlandırılır. Burada Şekil 2.18.(c) aşikâr olmayan (1,1)-tangle a örnek teşkil ederken, Şekil 2.18 (a) ve Şekil (b) aşikâr (l, 1) -tangle örnekleridir.



(a) **(b)** **(c)**

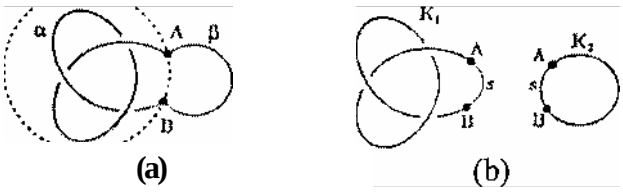
Şekil 2.18. (1,1)-tangle örnekleri

K, S^3 de bir düğüm (veya halka) olsun. Üstelik K yı tam olarak A ve B şeklinde iki noktada kesen (dik açıda) bir 2-boyutlu Σ küresi mevcut olsun. Σ nın, yukarıda tanımlanan S nin rolünü üstlendiği görülebilir. Ancak K, S^3 de bulunduğu için K, Σ vasıtasıyla, Şekil 2.19.(a) ve Şekil 2.20.(a) da görüldüğü gibi biri Σ nin içinde diğeri Σ nin dışında bulunan α ve β şeklinde iki (l, 1) -tangle a bölünür. Σ, biri Σ dan ve onun içinden, diğeri Σ den ve onun dışından oluşmuş iki 3-boyutlu topun sınırı olduğu için, iki (1,1)-tangle meydana gelir. S^3 ün, sınırlarına 2-boyutlu küre denebilecek, sınırları boyunca birbirlerine yapıştırılmış iki (3-boyutlu) toptan yapıldığı düşünülebilir. Eğer boyutu bir aşağı düşürülürse, yapıştırma işlemi daha kolay tahayyül edilir. Eğer iki disk alınır ve onlar, sınırları boyunca yapıştırılırsa ki burada sınırlar çemberlerdir, bu durumda iki boyutlu küre elde edilir. Şimdi, Σ da bulunan bir s basit poligonal doğrusu vasıtasıyla A ile B bağlansın. Böylece s, α ya ve s, β ya birleştirilirse , sırasıyla K_1 ve K_2 düğümleri elde edilir.



Şekil 2.19. Bir düğümün iki ayrı düğüme ayrışımı

Gösterilen şey bir *K* düğümünün Şekil 2.19 deki gibi K_1 ve K_2 şeklinde iki düğüme ayrışabilmesidir. *s* nin seçimi keyfidir. Çünkü, Σ üzerinde bulunan *s'* gibi bir başka basit poligonal doğru vasıtasıyla *A*, *B* ye bağlanabiliyorsa, *K* düğümü bir kez daha $K_1^{'}$ve $K_2^{'}$ denen iki düğüme ayrıştırılabilir. K_1 ile $K_1^{'}$ ve K_2 ile $K_2^{'}$ nün denk düğümler olduğunu görmek oldukça kolaydır, α veya β nın biri aşikar bir $(1,1)$-tangle ise, $K_2^{'}$ aşikar bir düğümdür. Böyle durumlarda, K_1 ve K_2 , tam anlamıyla söylenirse, *K* nın "gerçek" bir ayrışımı değildir (Şekil 2.20).



Şekil 2.20. *K* nın gerçek olmayan ayrışımı

Aslında *K* ve K_1 denktir, bu yüzden, *K* nın daha basit düğümlere ayrışabildiği düşünülmeyecektir. *K* için bir gerçek (aşikâr olmayan) ayrışım bulunamadığından, *K* nın asal düğüm olduğu söylenebilir. bir *K* düğümü ya asal bir düğümdür, ya da aşikâr olmayan en az iki düğüme ayrışabilir. Bu aşikâr olmayan düğümler, ya kendi kendilerine asaldırlar ya da onlar da aşikâr olmayan düğümlere ayrışabilirler. Bu işlem bir sonraki, asal olmayan düğümler için sürdürülecektir. Bu işlemin sonsuzluk durumunda da sürdürülebileceği

biliniyor. Aslında bu işlem yalnız sonlu değil aynı zamanda asal düğümler içerisinde bir düğümün tek bir ayrışımına yol açar. Bu durum kısaca aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem (Düğümlerin Ayrışımının Varlığı ve Tekliği):

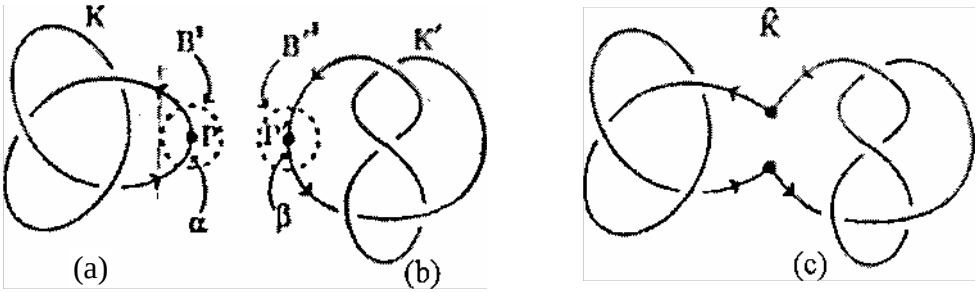
(1) Herhangi bir düğüm sonlu sayıda asal düğüme ayrışabilir.

(2) Bu ayrışım mertebesi hariç tektir. Yani $K_1, K_2, ..., K_m$ ve $K_1^{'}, K_2^{'}, ..., K_n^{'}$ şeklinde iki halde K ayrıştırabilir. Böylece $n = m$ ve üstelik, $K_1, K_2, ..., K_m$ nin indis sayısı uygun bir şekilde seçilirse $K_1 \approx K_1^{'}$, $K_2 \approx K_2^{'}$,…, $K_m \approx K_n^{'}$ olur (Murasugi 1996).

Yukarıdaki ayrışımın tersine sebep olan birleşme düşünülsün. Esasen aranılan şey iki düğümün toplamıdır. P, S^3 de bir K düğümü üzerinde bir nokta olsun. Burada P, Şekil 2.21.(a) ve (b) de de görüldüğü gibi aşağıdaki özelliklere sahip çok küçük yarıçaplı B^3 topunun merkezi olarak düşünülebilir.

(1) K tam olarak (dik açıda) B^3 sınırlı topunun yüzeyindeki iki noktayı keser.

(2) B^3 ün içinde K dan elde edilen α , (1,1) -tangle aşikar bir tangle dır.



Şekil 2.21. İki farklı düğümün bağlantılı toplamı

Benzer olarak diğer bir 3-boyutlu S^3 küresinden bir başka K' düğümü için, bir $P^{'}$ noktası seçilebilir. Yukarıdaki gibi $B^{'3}$ küresi Şekil 2.21.(b) de görüldüğü gibi bir β aşikar (l,l)-tangle $K^{'}$ dan elde edilir. Doğal bir şekilde K ve K' den elde edilen

sırasıyla α ve β (l, 1) -tangle lan için bir yönlendirme tayin edilebilir. $\bar{B}^3, B^3$ ün iç noktalarının S^3 den çıkarılması ile elde edilin bir toptur. Benzer olarak $\bar{B}'^3, B'^3$ ün iç noktalarının S^3 den çıkarılmasıyla elde edilen top olsun. Bu topların her birinin yüzeyi bir (2-boyutlu) küredir. Eğer bu toplardan birinin küresinin yönlendirmesini baştan başa ters çeviren bir homeomorfizm uygulanarak bu küre boyunca iki top yapıştırılırsa, 3-boyutlu S^3 küresi elde edilmiş olur. Bu yapıştırma işlemi α ve β nin uç noktalarını birleştirir.

Böylece bu yeni, tek yönlendirilmiş *K* düğümü bu 3-boyutlu S^3 küresinde biçimlenir Şekil 2.21.(c). Bu inşa nedeniyle *K* düğümünün yönlendirmesi *K* ya da *K'* düğümünün orijinal yönlendirmesiyle çelişki teşkil etmemektedir.Yukarıdaki işlemle meydana gelen $\bar{K}$ düğümü *K* ve K' düğümünün bağlantılı toplamı olarak adlandırılır ve $K \# K'$ ile gösterilir. Üstelik bu $K \# K'$ toplamı orijinal olarak seçilen *P* ve *P'* noktalarından bağımsızdır. Böylece $K \# K'$ toplamının *K* ve *K'* ile tek bir şekilde tayin edildiği söylenebilir.

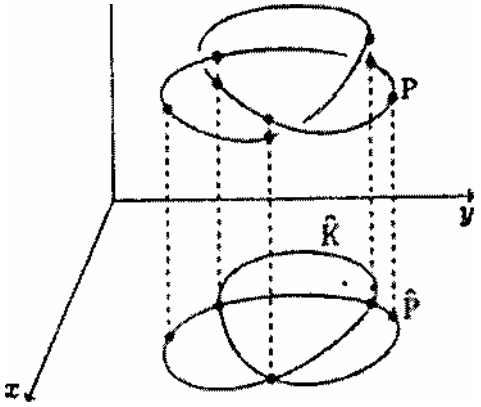
Önerme: İki düğümün toplamı işlemi değişme özelliğine sahiptir. Yani, $K_1 \# K_2 \cong K_2 \# K_1$ dir. Daha açık olarak , $K_1 \# K_2$ ve $K_2 \# K_1$ yönlendirmeyle denktir. Ayrıca birleşme kanunları da sağlanır $K_1 \#(K_2 \# K_3) \cong (K_1 \# K_2) \# K_3$ (Murasugi 1996).

Yukarıdaki tanım bütün düğümlerin A kümesi için tanımlanır. Ancak bu tanım *A* yi bir grup yapmaz. Bunun sebebi aşikar düğümün *A* nın birim elemanı olmasına rağmen *A* nın ters elemanı ihtiva etmemesindendir

2.5. Regüler Diyagramlar

$\square^3$ deki $P(x, y, z)$ noktasını *xy* –düzlemindeki $\bar{P}(x, y, 0)$ noktasına izdüşüren dönüşüm *p* olsun (Şekil 2.22.).

Eğer K bir düğüm (veya halka) ise $\rho(K)=\hat{K}$ ya K nın izdüşümü denir. K yönlendirilmişse o zaman $\hat{K}$ da K nın yönüne bağlı bir yön kazanır. Bununla beraber $\hat{K}$ birkaç arakesit noktasına sahip olduğundan düzlemde basit kapalı bir eğri değildir. K düğümü üzerinde birkaç basit düğüm hareketi yapmak suretiyle aşağıdaki şartlar verilebilir.

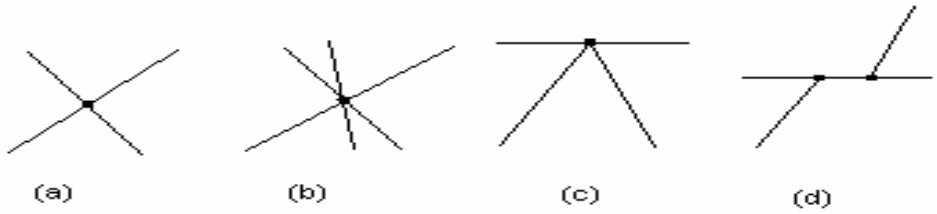


Şekil 2.22. Bir düğümün $\square^3$ de izdüşümü

1. $\hat{K}$ sonlu sayıda arakesit noktasına sahiptir.

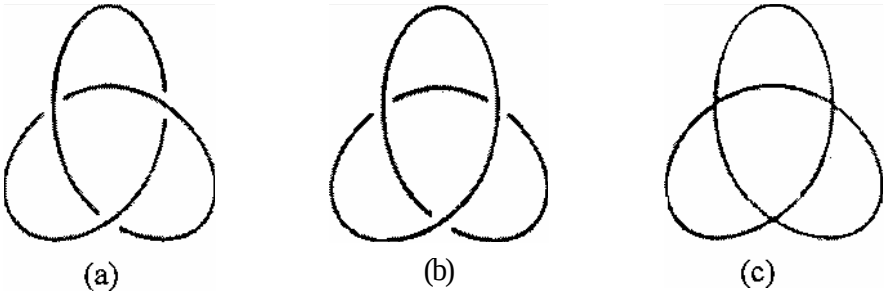
2. Eğer $Q,\hat{K}$ nın bir arakesit noktası ise Q nun $\rho^{-1}(Q)\cap K$ ters görüntüsü K da iki noktaya sahiptir. Yani $Q,\hat{K}$ nin bir katlı noktasıdır (Şekil 2.23.(a)). Şekil 2.23.(b) de gösterildiği gibi ikiden fazla noktaya müsaade edilmez.

3. K nın bir köşesi (düğüm bir poligonal olarak düşünüldüğünde) $\hat{K}$ nın bir katlı noktasına dönüşmez. Şekil 2.23.(c) ve (d) deki örneklerin ikisinde de bir poligonal doğru $\hat{K}$ nın bir köşesine izdüşmüştür.Bu durumların ikisine de müsaade edilmez



Şekil 2.23. Bir izdüşüm üzerinde oluşan katlı noktalar

Yukarıdaki şartları sağlayan K izdüşümüne, bir regüler izdüşüm adı verilir. İşlemleri kolaylaştırmak için regüler izdüşümler göz önüne alınacaktır. Ancak izdüşümlerle kısıtlanmış olunsa bile, katlı noktada bazı önemli belirsizlikler vardır. İzdüşümün bu katlı noktasında düğümün kendi kendisinin altından mı üstünden mi geçtiği belli değildir. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için, düğümün kesim noktası çizilerek, katlı nokta civarında düğüm bir miktar değiştirilebilir. Böylece düğümün geçit noktasının alttan mı üstten mi olduğu konusunda orijinaline uymasa da gerçek görüntüsü çizilebilir. Böyle değiştirilmiş izdüşümler bir regüler diyagram olarak adlandırılır. Şekil 2.24.(a),(b).



Şekil 2.24.Regüler diyagram örnekleri

Bir regüler diyagram aslında düğümün üç boyutlu uzayda nasıl bulunduğunu verir. Yani, düzlemde uzaysal bir çizim verilmesine imkan tanır. Ayrıca izdüşümde kaybolan bilgiyi elde etmek için regüler diyagram kullanılır. Örneğin, Şekil 2.24.(c), Şekil 2.24.(a) ve (b) deki (farklı) iki düğümün izdüşümüdür.

2.6. Düğüm Teorisinin Problemleri

Bu problemler genelde lokal ve global olarak ikiye ayrılırlar. Global problemler tüm düğümlerin kümesi ile, lokal problemler ise tek olarak düğümün kendisi ile ilgilidir.

1- Global problemler

a) Sınıflandırma Problemi: Sınıflandırma problemi, en azından tanım olarak, tam bir düğüm tablosu meydana getirmek istenildiğinde oldukça açıklayıcıdır. Bütün bir tabloyla anlatılmak istenen, önce iki düğümün asla denk olmamasının ve ikinci olarak keyfi bir düğümün bu tablodaki bazı düğümlere denk olduğunun tam olarak ne anlama gelmesidir.

b-) Esas Tahmin: Bu tahmin doğrudan doğruya şu şekilde ifade edilebilir: K_1 ve K_2 düğümleri için, genellikle tümleyen uzayları olarak adlandırılan $S^3 - K_1$ ve S^3 - K_2 tümleyenleri homeomorf ise, bu takdirde düğümler denktir.

Bu tahminin tersinin doğru olduğu kolayca görülür. Bu tahmin 1980 lerin sonlarında (Gordon ve Leucke 1989) ispatlandı. Bu söylenenlerin bir neticesi olarak, S^3 deki düğüm problemi, S^3 deki düğümün şeklini ilgilendiren bir problem olarak adlandırılabilecek durumdan artık tümleyen uzaylardaki bir çalışmayı ilgilendiren soyut bir problem haline dönüşür. Bununla beraber bu dönüştürme maalesef zaman yapılamaz. Yani problem soyut bir problem içine her zaman dönüştürülemez. Bu tahminin ters örnek verilerek halkalar için geçerli olmadığı görülür (Rolfsen 1976).

c-) Düğüm Sabitleri: Her K düğümünün özel bir $\rho(K)$ niceliği ile işaretlendiği kabul edilsin. Eğer iki denk düğüm için işaretlenen nicelik daima eşitsese, böyle $\rho(K)$ niceliği düğüm sabiti olarak adlandırılır. Genelde bir düğüm sabiti tek yönlüdür. Yani; eğer iki düğüm denkse ise sabitleri de denktir.

Bunun tersi her zaman sağlanmaz. İki düğüm sabiti farklıysa bu durumda düğümlerin kendileri denk olamaz. Bu yüzden, bir düğüm sabiti iki düğümün denk olup olmadığını gösteren oldukça etkili bir metot verir. Böyle düğüm sabitlerini bulmak bir global problemdir. Bu düğüm sabitlerinin gerçekte sayısını hesaplamak oldukça zordur. Üstelik bu düğüm sabitlerini hesaplamak için bir metot bulmakta global bir problemdir.

2- Lokal Problemler

Düğümlerle ilgili lokal problemlerin birkaçını ve çözümlerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz.

a) Bir K düğümü ve onun ayna görüntüsü K^* düğümü ne zaman denktir? Eğer K ve K^* denkse bu düğümlere amphicheiral düğüm denir.

b-) Verilen bir düğüm ne zaman asaldır?

c-) Bir düğüm ne zaman tersine çevrilebilirdir?

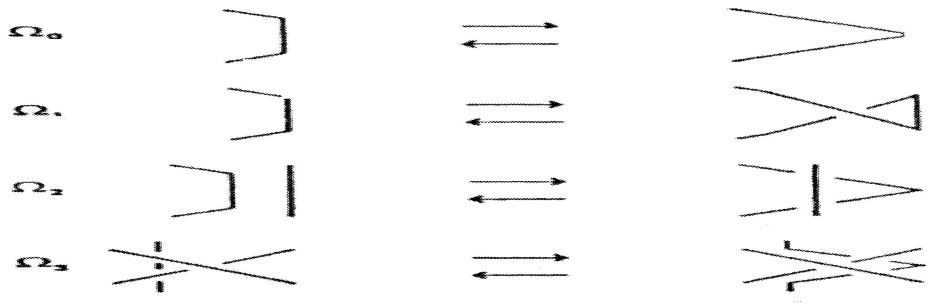
Bir düğüme ik i farklı yönlendirme verilsin. Bu düğümlerden biri K ile diğeri de $-K$ ile gösterilsin. K ve $-K$ denk olduğu zaman K nın tersine çevrilebilir olduğu söylenir.

d-) Bir düğümün periyodu nedir?Genelde, düğümün orijinal şeklini elde etmek için belirli bir eksen etrafında $\frac{2\pi}{n}$ açısıyla döndürülürse, bu düğüm n periyoda sahiptir denir.

e-) Bir düğüm ne zaman bir slice düğümdür?

2.7. Klasik Düğüm Sabitleri

Tanım (Reidemeister hareketleri): Aşağıdaki Şekil 2.25 de bulunan üç hareket $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ve onların terslerine Reidemeister hareketleri denir (Murasugi 1996).



Şekil 2.25. Reidemeister hareketleri

K ve K' düğümlerinin regüler diyagramları sırasıyla D ve D' olsun. Eğer regüler D diyagramı $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ve (veya) onların tersleri sonlu kez uygulanarak diğer

$D^{'}$ diyagramına dönüştürülebilirse, bu taktirde D ve D' diyagramları denktir denir ve bu denklik $D \approx D^{'}$ ile gösterilir. Bu söylenenler ışığında aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem : D ve D' , K ve K' düğümlerinin regüler diyagramları olsunlar. Bu taktirde,

$$K \approx K^{'} \Leftrightarrow D \approx D^{'}$$

olur (Murasugi 1996).

Yukarıdaki teoremden, düğümlerin denkliği probleminin aslında bu düğümlerin regüler diyagramlarının bir denkliği problemi olduğu sonucu çıkabilir.

Tanım (Geçit noktalarının minimum sayısı): Bir K düğümünün bir D regüler diyagramındaki geçit noktalarının minimum sayısı $c(D)$ bir düğüm sabiti değildir. Örneğin, aşikâr düğümün Şekil 2.26 deki gibi iki regüler diyagramı D ve D' verilsin. Birincisinde $C(D) = 0$ olmasına rağmen ikincisinde $c(D^{'}) = 1$ dir (Murasugi 1996).

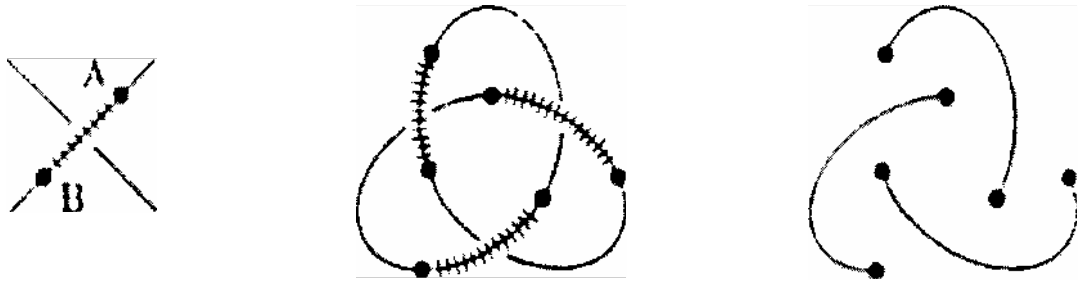
$c(D) = 0$ $\qquad$ $c(D^{'}) = 1$

Şekil 2.26. Aşikar halkanın iki farklı regüler diyagramı için geçit noktaları sayısı

K düğümünün tüm regüler diyagramlarından elde edilen $c(D)$ lerin minimum sayısına K nın geçit noktalarının minimum sayısı denir ve $c(K) = \min c(D)$ ile gösterilir. Bu bir düğüm sabitidir. Bu K nın geçitlerinin minimum sayısı olarak adlandırılır. $c(K)$ geçit noktasına sahip, K nın regüler diyagramına K nın minimum regüler diyagramı denir. Örneğin, K aşikar düğüm ise $c(D) = 0$ dır.

Tahmin : K_1 ve K_2 iki farklı düğüm ise, $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$ dir (Murasugi 1996).

Tanım (Köprü sayısı): Şekil 2.27. deki AB parçaları düzlem üzerindeki kısımların üstünden geçtiğinden ,bu parçalar köprü olarak adlandırılır (Murasugi 1996).



(a) (b) (c)

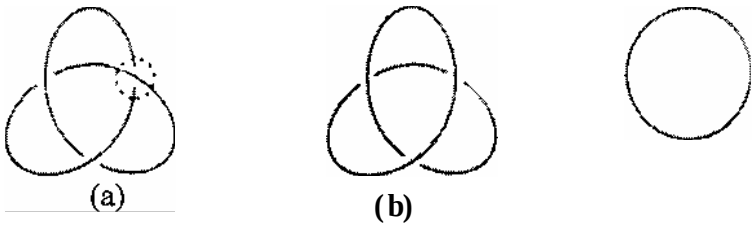
Şekil 2.27. Farklı düğümler üzerindeki köprü örnekleri

Bir K düğümünün D diyagramındaki köprü sayısı $br(D)$ ile gösterilir. Bu K için bir sabit değildir. Ancak verilen bir K düğümü için bütün regüler diyagramları göz önüne alınırsa, bu taktirde bu düzenli diyagramların minimum köprü sayısı K için bir sabittir. Yani; Bir K düğümü (veya halka) için, $br(K) = \min br(D)$ bir sabittir. K aşikar düğüm ise $br(K) = 1$ olur.

Tahmin : K bir düğüm ise $c(K) \geq 3(br(K) - 1)$ dir. Eşitlik K nın aşikar düğüm, trefoil düğüm ya da trefoil düğümlerin bağlantılı toplamı olduğu zaman sağlanır (Murasugi 1996).

Tanım (Düğümlenmeme sayısı): Bir K düğümünün (veya halkasının) regüler D diyagramındaki bir geçit noktası değiştiğinde (lokal olarak) üst ve alt geçit kısımları değişir. Bu tip değişim basit düğüm hareketi olmadığından genel olarak bir başka düğümün bir regüler diyagramı elde edilir (Murasugi 1996).

Örnek : Şekil 2.28.(a) da eğer küçük bir çember içindeki alt ve üst geçit kısımları değiştirilirse aşikar düğümün regüler diyagramının elde edildiği kolayca görülebilir. Şekil 2.28.(b).



Şekil 2.28. Sol-el trefoil düğümünün geçit noktalarının alt üst edilmesi

Önerme : Herhangi bir düğümün (veya halkanın) regüler D diyagramından, D nin birkaç geçit noktasında alt geçit bileşenleri ile üst geçit bileşenlerini değiştirerek aşikar düğümün regüler diyagramı elde edilebilir (Murasugi 1996).

Yukarıdaki önermeye göre, yukarıdaki operasyonda, alt geçit ve üst geçit kısımlarının geçit noktasındaki geçiş operasyonuna düğümlenmeme operasyonu adı verilir. D regüler diyagramının düğümlenmeme sayısı, D yi aşikar düğümün (halkanın) regüler diyagramına dönüştürmek için gerekli olan düğümlenmeme operasyonlarının minimum sayısı olarak tanımlanır. D nin düğümlenmeme sayısı $u(D)$ ile gösterilecektir. Beklenildiği gibi $u(D)$ bir K düğümü için sabit değildir. K nın bütün regüler diyagramları göz önüne alınırsa, bu takdirde bütün regüler diyagramlarda düğümlenmeme işleminin minimum sayısı bir düğüm sabiti olur. Yani; K bir düğüm (veya halka) ise, bu taktirde, $u(K) = \min u(D)$,K nın bir sabitidir. Burada D, K nın bütün regüler diyagramlarının kümesidir. O halde $u(D)$, K nın düğümlenmeme sayısıdır.

Tanım (Halkalanma sayısı): Şimdiye kadar tartışılan düğüm sabitleri, düğümün yönlendirilmesinden bağımsız olmuştur. Bu bölümde yönlendirilmiş halkalar için önemli bir sabit olan halkalarıma sayısı tanımlanacaktır. İlk olarak yönlendirilmiş bir düğüm ya da halkanın bir regüler diyagramının her bir geçit noktası ya +1 ya da -l ile işaretlensin.

Şekil 2.29 da görüldüğü gibi yönlendirilmiş bir regüler diyagramın bir c geçit noktasında iki sınıflandırma verilsin, (b) durumunda geçit noktası $sign(C) = -1$ ile işaretlerken, (a) durumunda $sign(C) = +1$ ile işaretlenir, (b) deki geçit noktasına negatif, (a) daki geçit noktasına pozitif denir.

$sign(C) = +1$ (a) $\qquad$ $sign(C) = -1$ (b)

Şekil 2.29. Bir halkadaki geçit noktasının işaretini belirleme kuralı

Şimdi D, iki bileşenli $L(K_1, K_2)$ halkasının yönlendirilmiş bir regüler diyagramı olsun. Üstelik K_1 ve K_2 nin izdüşümlerinin arakesit olduğu ve D nin geçit noktalarının $c_1, c_2, ..., c_m$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde,

$$\frac{1}{2}\{sign(c_1) + sign(c_2) + ... + sign(c_m)\}$$

ifadesi K_1 ve K_2 nin halkalanma sayısı olarak adlandırılır ve $lk(K_1, K_2)$ olarak gösterilir.

Teorem : $lk(K_1, K_2)$ halkalanma sayısı L nin bir sabitidir.Söylenmek istenen, L nin bir diğer yönlendirilmiş regüler D' diyagramı göz önüne alınırsa bu taktirde, halkalanma sayısının değeri D nin ki ile aynı olacağıdır. Bu yüzden, bu sayı L nin halkalanma sayısıdır ve $lk(L)$ ile gösterilir. Üstelik halkalanma sayısı K_1 ve K_2 nin sayısından bağımsızdır. Yani, $lk(K_1, K_2) = lk(K_2, K_1)$ (Murasugi 1996).

Örnek : Şekil 2.28.(a) ve (b) deki L ve L' nün halkalanma sayısı hesaplansın.

a-) Sadece c_1, c_2, c_3, c_4 geçit noktalarındaki işaretleri hesaplamak gerekir. Her bir geçit noktasındaki işaret -1 olduğundan, $lk(K_1, K_2) = -2$ elde edilir.

b-) Benzer olarak $sign(c_2) = sign(c_3) = -1$ iken $sign(c_1) = sign(c_4) = +1$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece $lk(K_1^{'}, K_2^{'}) = 0$ dır. Böylece L nin halkalanma sayısı verilen yönlendirmeye bağlı olarak bir sabittir.

2.8. Düğüm Grubu :

Eğer K , $\mathbb{R}^3$ 3-uzayında herhangi bir düğüm ve p_0 , $\mathbb{R}^3 - K$ herhangi bir noktası ise, $\pi(\mathbb{R}^3 - K, p_0)$ esas grubuna K nın grubu denir. $\mathbb{R}^3 - K$ bağlantılı olduğundan taban noktasının farklı seçimlerinde izomorf gruplar verir. Bundan dolayı, taban noktası pratikte yazılmaz. O halde K düğümünün grubu $\pi(\mathbb{R}^3 - K)$ şeklinde gösterilir. Bir K düğüm grubunun temsili Wirtinger (Crowell ve Fox 1963) yöntemi ile bulunur.

2.9. Seifert Yüzeyi

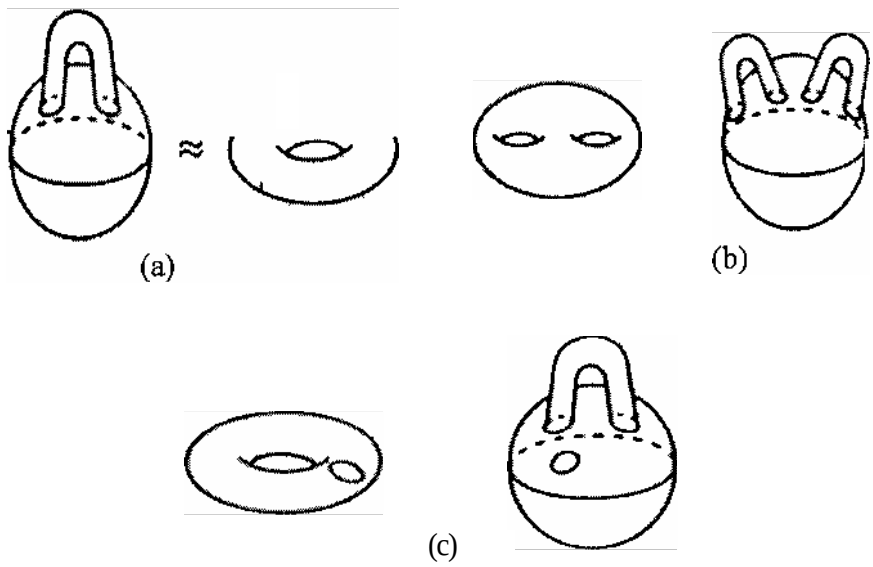
Bir Seifert yüzeyi L. Pontrjagin ve F. Frankl tarafından ispat edilen aşağıdaki teoremle tanımlanabilir.

Teorem : Bir keyfi yönlendirilmiş K düğümü verildiğinde $\mathbb{R}^3$ de sınırı K olan bir yönlendirilmiş, bağlantılı F yüzeyi vardır. (Yani, K yi geren bir yönlendirilmiş bağlantılı yüzey vardır) (Murasugi 1996).

2.10. Bir Düğümün Cinsi

Yüzeylerin sınıflandırılması ile ilgili topolojideki esas teorem göz önüne alınsın (Bozhüyük,1984). Bu teorem bir kapalı (yani sınırsız ve kompakt) yönlendirilebilir F yüzeyinin, yüzeyine birkaç kulp iliştirilmiş küreye topolojik olarak denk (homeomorf) olduğunu ifade eder. Bu kulplu kürelerin sayısı F yüzeyinin cinsi olarak adlandırılır ve $g(F)$ ile gösterilir.

Örnek : Şekil 2.30.(a) da gösterilen 1-cinsli yüzeye tor adı verilirken, Şekil 2.30.(b) de gösterilen 2-cinsli yüzeydir.



Şekil 2.30 n-cinsli yüzey örnekleri

Bir düğümün F Seifert yüzeyinin cinsinin nasıl hesaplanacağı ele alınsın. F bir sınıra sahip olduğundan bu durumda yukarıdaki teoremden F birkaç kulp iliştirilmiş küreye homeomorftur. Üstelik Şekil 2.30.(c) deki halkanın her bir bileşeni için küre üzerinde birkaç delik daha iliştirilir. Maalesef bir düğümün Seifert yüzeyini tasavvur etmek genelde kolay değildir.

Seifert yukarıda tanımlanan metot yardımıyla yönlendirilebilir yüzeylerin mevcut olacağını yeniden gösterdi. Böylece verilen bir *K* düğümü için tüm Seifert yüzeylerinin minimum cinsi göz önüne alınabilir. Bu minimum cins *K* nın cinsi olarak adlandırılır ve *g(K)* ile gösterilir. Cins bir düğüm sabitidir. Keyfi bir düğümün cinsini tamamen hesaplayan bir algoritma vardır. Ancak bunu belirlemek oldukça zordur. Aslında keyfi bir düğümün cinsini hesaplamak zordur. Ancak düğümlerin belli tiplerinin cinslerini hesaplamak nispeten önemli bir problemdir. Keyfi bir düğümün cinsinin tespiti zor olmasına rağmen inşa edilmiş yönlendirilebilir yüzeylerin cinsini hesaplamak oldukça kolaydır.Hesaplama klasik bir sabit olan Euler karakteristiğine bağlıdır

3.MATERYAL ve YÖNTEM

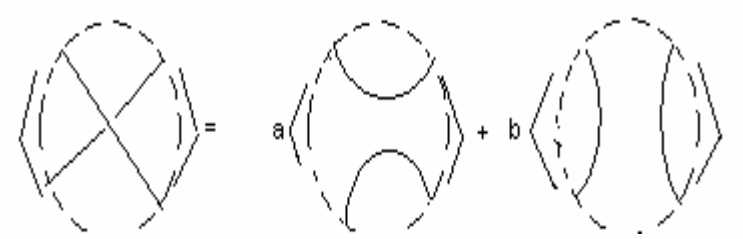
Bu bölümde Vaughan Jones ve Victor Vassiliev tarafından ele alınmış en son güçlü düğüm ve halka sabitlerini tanıtacağız.

Düğüm teorisindeki en doğal sorulardan biri, iki düğüm diyagramı verildiğinde onların aynı düğümü temsil edip etmedikleri problemidir. Bir özel durumda düğümlenmeme problemidir.Verilen düğüm diyagramı düğümlenmemiş düğümü nasıl temsil eder? Eğer bu problem bir özel örnekle bir çözüme sahipse, bu gerçek uygun Reidemeister hareketleri ile gösterilebilir.Veilen düğüm diyagramının bir aşikar olmayan düğümü temsil ettiğinden şüphelenilirse, onun aşikar olmadığını göstermek için standart metot bir sabit kullanmaktır. Yani, düğümün izotopi sınıfına bağlı olarak, her bir düğüm diyagramına bir cebirsel obje (bir sayı veya polinom) atamaktır. Eğer düğüm diyagramından sabit hesaplamak için bir uygun algoritma varsa bu metot etkili olacaktır.

Jones polinomu düğümler ve halkalar için böyle bir sabittir. Onun inşasına Louis Kauffman tarafından bulunan parantez polinomu olarak adlandırılan tanımla başlayacağız

3.1. Parantez Polinomu

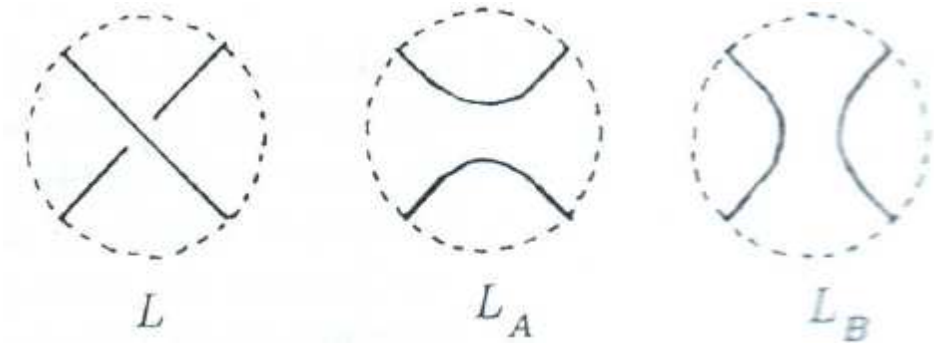
Her bir yönlendirilmemiş L halkasına $\langle L \rangle$ ile gösterilen a,b,c değişkenli bir polinom atayalım. Dolayısı ile aşağıdaki bağıntılar sağlanır.



2. $\langle L \cup O \rangle = c\langle L \rangle$**;**

3. $\langle O \rangle = 1$.

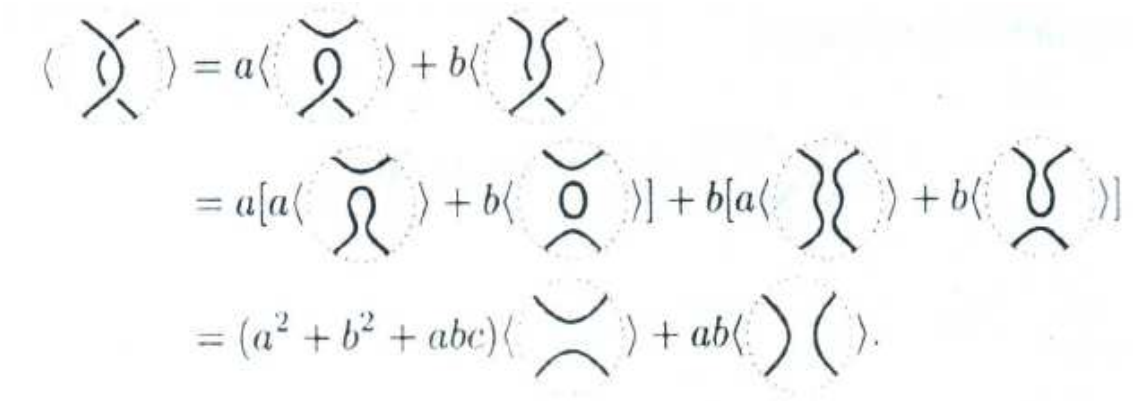
Burada 1. bağıntısındaki resimler L, L_A, L_B üç halka diyagramını gösterir.



Şekil 3.1. Bir geçidin elimine edilmesi

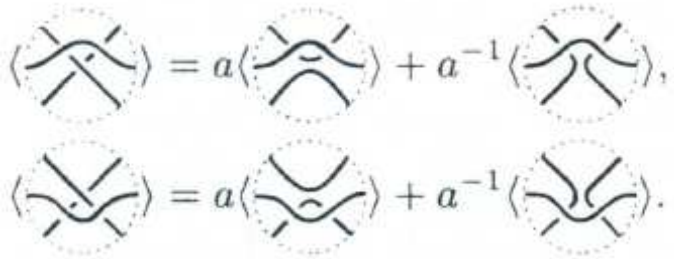
(1) Bağıntısı $\langle L \rangle = a\langle L_A \rangle + b\langle L_B \rangle$ şeklinde yazılabilir. (2), bir aşikar düğümün L halkasına ilave edilmesiyle L nin kesilmeyeceği anlamındadır. c ile çarpılmasıyla polinom sonuçlanır. Çembere iliştirilmiş polinom 1 e denktir. Sonuç olarak $\langle L \rangle$ polinomu, L diyagramının düzlem izotopileri altında değişmez farzedilir.

Üç Reideimeister hareketi altında sabit kalacak olan polinomdaki a, b, c arasındaki ilişkileri uygulamaya çalışalım. Ω_2 hareketi ile başlayalım. (1) hareketini sık sık (2) hareketini bir kez uygulayarak,



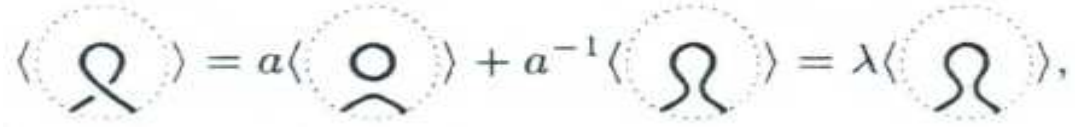
elde edilir. Burada $ab=1$ ve $a^2+b^2+abc=0$ alındığında polinom Ω_2 sabit kalır. Daha sonra $b=a^{-1}$ ve $c=-a^2-b^2$ alınsın dolayısıyla $\langle L\rangle$ parantez polinomunun Ω_2 ye göre sabit kaldığı görülür. (1) den aşağıdaki 3.1 bağıntıları elde edilir.

3.1.Bağıntısı:

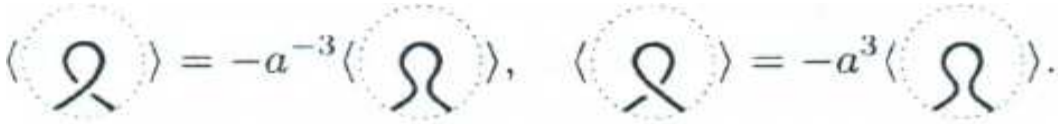


a^{-1} dekiler aynıdır. Çünkü bu iki diyagram düzlemsel izotoptur. Ayrıca Ω_2 yi iki kez uygulandığında

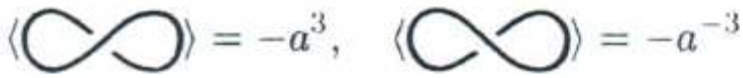
Elde edilir.Böylece parantez polinomunun Ω_3 sabiti ispatlanmış olur. Şimdi Ω_1 e bakalım. (1) ve (2) den,



elde edilir. Burada $\lambda = a\left(-a^2 - a^{-2}\right) + a^{-1} = -a^3$ bulunur. Benzer hesaplama ile 3.2.bağıntısı:



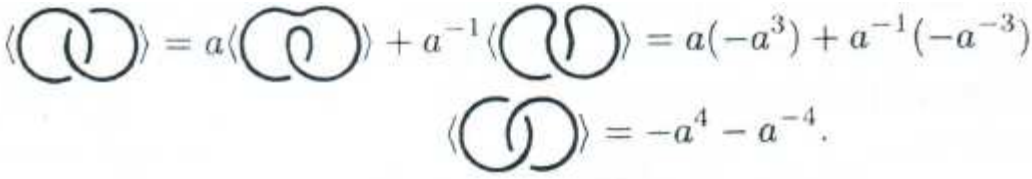
Bulunur. Burada $\lambda = a^{-1}\left(-a^2 - a^{-2}\right) + a = -a^{-3}$ olarak bulunur. Böylece $a^3 = -1$ olmadıkça parantez polinomu Ω_1 e göre sabit kalmaz. Dolayısıyla halkalar için bir izotopi sabiti değildir. Örneğin,



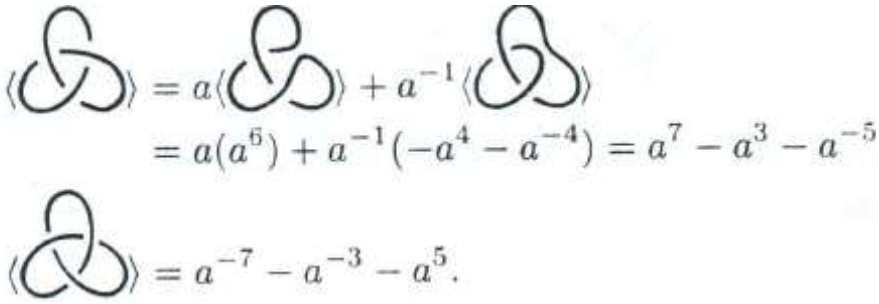
Şeklindedir. Oysa bunlar sekiz-şekilli düğüm diyagramlarıdır. Jones polinomunun inşasında parantez polinomu kullanılacaktır.

Örnek: Bir ve iki geçitli diyagramlar için parantez polinomları.

Örnek: Hoph halkası için parantez polinomları

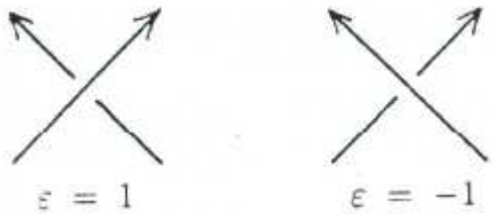


Örnek: Yonca yaprağı düğümlerinin parantez polinomu.



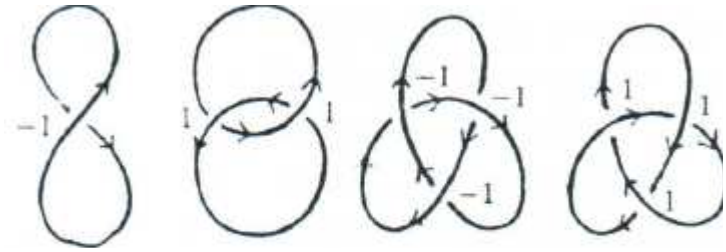
3.2. Kauffman Polinomu

Burada yönlendirilmiş halkalar göz önüne alınacaktır. Yönlendirilmiş bir halka için $w(L) = \sum_i \varepsilon_i$ sayısı tanımlanır. Burada toplam tüm geçitler üzerinden alınır ve e_i sayısı $i.$ geçitin işaretine bağlı olarak ∓ 1 olur.



Şekil 3.2. Geçitlerin işareti

Verilen bir halkanın yönlendirmesini tersine çevirmek onun $w(L)$ sayısını değiştirmez.



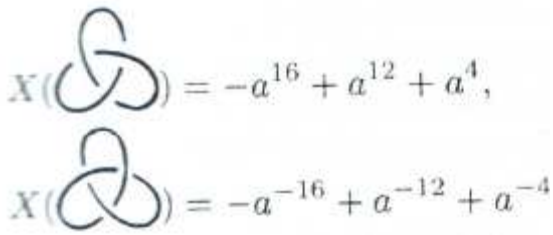
$W(L)=-1$ $W(L)=2$ $W(L)=-3$ $W(L)=3$

Şekil 3.3. Bazı düğümlerin $w(L)$ sayısı

$w(L)$ sayısı Ω_2 ve Ω_3 altında sabit kalır. Ω_1 altında ise işaret değiştirir. Herhangi bir yönlendirilmiş L halkası için $X(L)$ Kauffman polinomu,

$$X(L)=(-a)^{-3w(L)}\langle |L| \rangle$$

şeklindedir. Burada $|L|$ parantez polinomudur. Bu polinom yönlendirilmiş halkalar için bir izotopi sabitidir. Yukarıdaki örnekte verilen sağ ve sol yonca yaprağı düğümleri için Kauffman polinomları,



şeklindedir. Dolayısıyla bu iki düğüm farklıdır.

3.3. Jones Polinomu

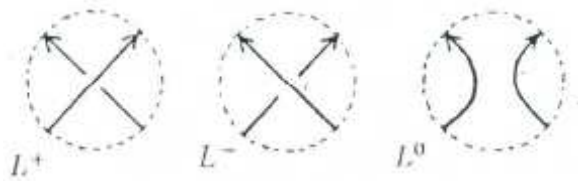
$X(L)$ Kauffman polinomunda $a = q^{\frac{-1}{4}}$ alındığında yönlendirilmiş L halkasının Jones polinomu elde edilir. Bu polinom aşağıdaki bağıntıları sağlar:

(1) $q^{-1}\left(V\left(L^{+}\right)\right) - qV\left(L^{-}\right) = \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)V\left(L^{0}\right)$

(2) $V\left(L \cup O\right) = -\left(q^{-\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\right)V\left(L\right)$

(3) $V\left(O\right) = 1$

Burada L^{-}, L^{+}, L^{0} aşağıdaki Şekil 3.4.deki gibidir.



Şekil 3.4. Geçitlerdeki L^{-}, L^{+}, L^{0} durumları

Burada (1') bağıntısı skein bağıntısı olarak bilinir. Bu Jones polinomunu elde etmek için yeni bir form teşkil eder. Parantezden farklı olarak yalnız geçit yok edilmez aynı zamanda geçitin işareti de değişir.

Örnek: Yonca yaprağı düğümünün Jones polinomu:

ifadesinde Hoph halkasına (1) şartı uygulanırsa,

$q^{-1}V($ $) - qV($ $) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V($ $)$

elde edilir. Böylece (2) ve (3) şartlarından,

$V($ $) = -q^{-2}(q^{1/2} + q^{-1/2}) - q^{-1}(q^{1/2} - q^{-1/2})$

$= -q^{-1/2} - q^{-5/2},$

bulunur. Buradan da,

$V($ $) = q^{-2} + q^{-1}(q^{-1/2} + q^{-5/2})(q^{1/2} - q^{-1/2})$

$= q^{-1} + q^{-3} - q^{-4}.$

elde edilir. Ayrıca bir önceki kısımda,

$X($ $) = -a^{16} + a^{12} + a^{4}$

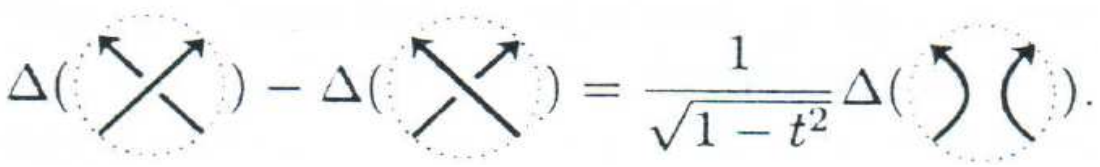
Bulunmuştu. Burada $a = q^{-\frac{1}{4}}$ yazılırsa aynı Jones polinomu elde edilir.

3.4. Diğer Polinom Sabitleri

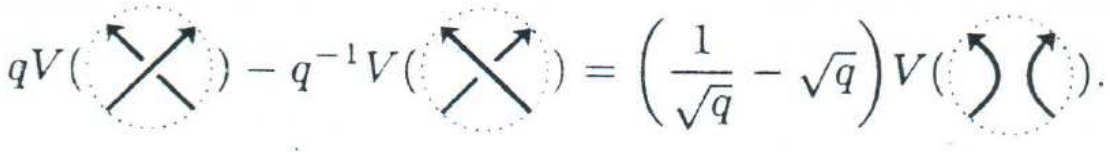
Jones polinomu düğüm ve halkalar için tek önemli polinom sabiti değildir. Aşağıda çok önemli polinomlar verilmiştir. Onların tümü aşikar düğüm üzerinde 1 değerini alan halka izotopi sabitleridir ve skein bağıntılarının özel bir formunu sağlarlar. Aşağıda bunların sadece isimleri ile özel skein bağıntıları verilmiştir.

z değişkenli ∇ Conway polinomu:

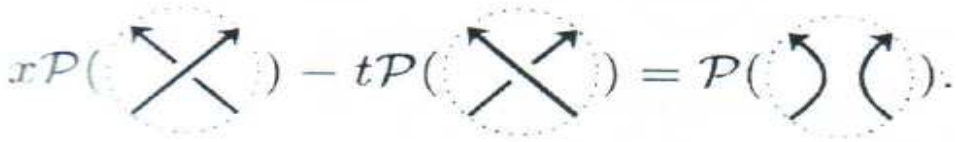
t değişkenli Δ Alexander polinomu:



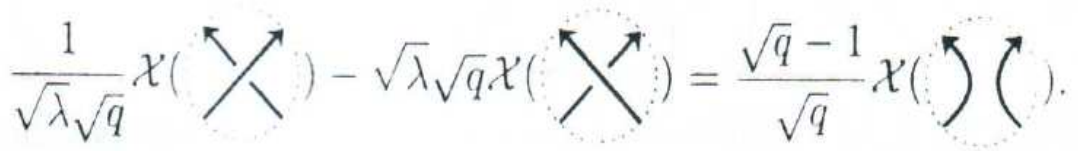
q değişkenli V Jones polinomu:



x,t değişkenli P HOMFLY (veya LYMPHTOFU) polinomu:



λ, q değişkenli X Jones polinomu:



Buradaki polinomların herhangi biri değişkenlerin uygun bir değişimi ile iki değişkenli Jones polinomundan elde edilebilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Jones devriminin ortalarında 1980 lerin sonlarına doğru V.A. Vassiliev düğüm teorisinde Jones devriminin en yakın sonucunda derin anlama sahip yeni bir kavram tanıttı. Vassiliev sabitleri denen bu şeyin önemi Jones tipi sabitleri daha sistematik bir şekilde çalışmak için kullanılabilir olmasında yatar.

Düğüm teoricilerine göre Vassiliev sabitlerinin bir başka önemi ise Jones –tipi sabitlere kesin bir topolojik yorum yapabilmesidir.Fakat bazı korkutan noktaları ise topolojik yorumlar klasik çizgi yanında değildir.

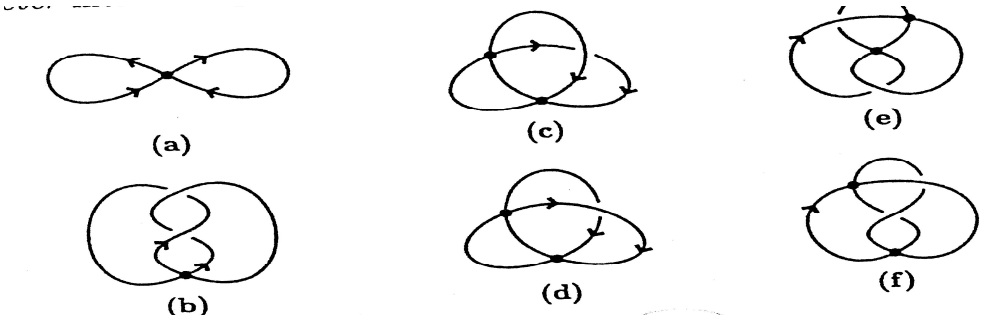
Düğüm sabitleri, örneğin Alexander polinomu matematik niceliklerinin bazı türleri ile bir düğümü birleştirir. Diğer taraftan bir Vassiliev sabiti durumların bir kümesini karşılayan bir sabittir. Bu durımda bu bölümde tanıtılmış veya tekrar tanımlanmış bütün sabitler (Jones polinomu, skein polinomu, Alexander polinomu)Vassiliev sabitleri ile gösterilebilirler. Bu çalışmada tanıttığımız bütün düğüm sabitleri Vassiliev sabiti olmamasının yanında daha sonra göreceğiz ki bir düğümün imzası Vassiliev sabiti de değildir.

4.1. Singüler Düğümler

En temel anlamıyla, bir singüler düğüm kendi kendini kesen bir düğümdür. Daha kesin olarak,bir K singüler düğümü $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ e bir $(PL-)$ dönüşümdür öyleki S^1 de sonlu sayıda nokta hariç birebirdir. Daha fazlasıyla, (1) Eğer S^1 de iki nokta aynı görüntüye sahipse $K = f(S^1)$ bu ortak noktada doğru açıda kendisiyle kesişir, ve (2) S^1 de hiçbir üç nokta aynı görüntüye sahip değildir. Bu konu boyunca bir K singüler düğümünün kendi kendine kesişen bir noktasına K nın köşesi diyeceğiz. Singüler düğümlerin bazı örnekleri Şekil 4.1. de verilmiştir.

Bir singüler düğüm tanımını halkaların durumuna yaymak mümkündür, bununla birlikte aşağıdaki düşüncede kendimizi singüler düğümlerle sınırlayacağız. Daha fazlasıyla uygunluk için

singüler düğümler ve bu çalışmada düşünülen düğümlerin sıradan çeşitleri arasından açık bir şekilde ayrım yapılmayacaktır, bununla birlikte eğer sadece bir düğümden söz edilirse bu hiç bir zaman bir singüler düğüm anlamında olmayacaktır.



Şekil 4.1. Singüler düğümlerin bazı örnekleri

Yukarıda da bahsedildiği ve şimdi bir singüler düğüm tanımımızdan açık olduğu gibi, bir singüler düğümü bir 4-regüler spatial grafik olarak düşünebiliriz. Bununla birlikte spatial grafik teorisi derken neyi kastettiğimizi anlatmaya ihtiyacımız vardır, çünkü bir singüler düğüm tamamen bir kategori içinde kalmaz. Öncelikle bir singüler düğüm S^1 de yönlendirmenin sebep olduğu bir yönlendirmeyi atayabiliriz, genelde spatial grafikler için yönlendirme atamanın belli bir yolu yoktur. İkinci olarak singüler düğümlerin denkliği kavramı genelde spatial grafik için olandan daha güçlüdür.

Açıkca bir K singüler düğümünü bir küçük B_A (kapalı) komşuluğunun ve $B_A \cap K$ yı içeren (K nın parçası A yakınındadır) bir E_A düzleminin her bir A köşe noktasıyla birleştirilsin. Daha sonra bir $F_A = E_A \cap B_A$ diskine (düzlemine) A ile birleşmiş bir flat disk denir. A bu flat disklerin koleksiyonudur, biri her bir köşe noktası için $F(K)$ ile gösterilecektir.

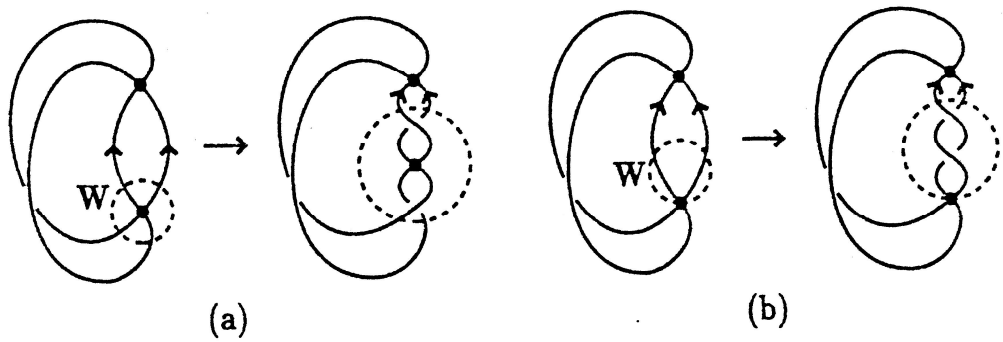
Tanım: Eğer yönlendirmeyi koruyan bir otohomeomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ varsa , aşağıdaki durumları karşılayan K ve K' iki singüler düğümü denktir ve $K \approx K'$ ile gösterilir.

(1) $\varphi(K) = K'$

(2) K ve K' için sırasıyla $F(K)$ ve $F(K')$ flat disklerinin koleksiyonları oluşur, öyleki φ dönüşümü $F(K)$ dan $F(K')$ dir (Murasugi 1996).

Sezgisel olarak herhangi başka kendini kesmeye sebep olmadan K yı K' ne sürekli dönüştürebiliyorsak K, K' ne denktir ve dönüşüm sırasında kesişme noktalarındaki parçalar doğru açıda kalır.

Örnek :



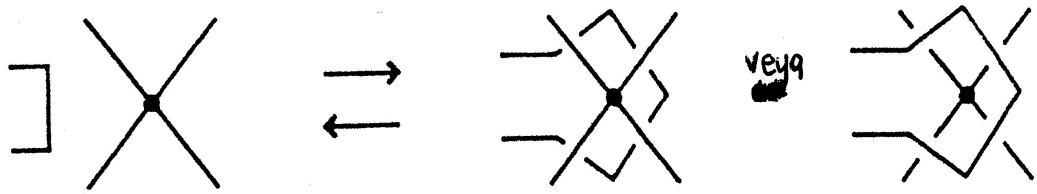
Şekil 4.2. W topunun içinde bir düşey burulma

Şekil 4.2.(a) ve (b) W topunun içinde bir düşey burulma yaptık (dış kısmı sabit tutularak).(a) durumunda bunlar iki eşit singüler düğüm üretir fakat (b) durumunda bunlar denk değildirler. Buna rağmen (a) ve (b) durumları spatilal grafik olarak eşittirler.

Önerme : İki singüler düğüm K ve K' denk olması için gerek ve yeter şart sonlu sayıda düzlemsel izotopi ve aşağıdaki hareketler uygulandığında birbirlerine dönüşen singüler D ve D' diyagramlarının bulunmasıdır (Murasugi 1996).

(1) Reidmeister hareketleri veya her bir köşe noktasının küçük bir komşuluğunun içi hariç olanların tersleri

(2) Aşağıdaki Ω operasyonu köşe yakınındadır.

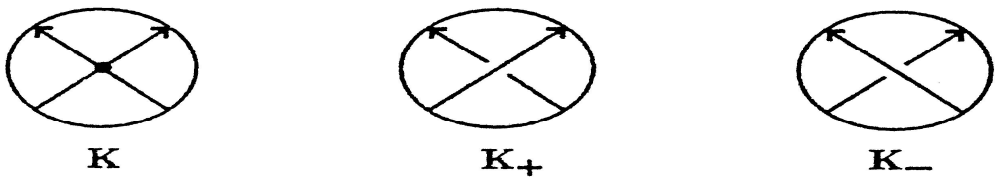


Şekil 4.3. Ω operasyonu

4.2. Vassiliev Sabitleri

v_0 ın sayısal düğüm sabiti olduğunu kabul edilsin. Örneğin her bir K düğümü için v_0 bir rasyonel sayı göstersin. Daha sonra v_0, aşağıdaki gibi singüler düğümler için v sabitine genişletilebilir.

v nin en çok $n-1$ köşe noktalı singüler düğümler için tanımlanmış olduğu kabul edilsin.Şimdi, K n köşeli bir singüler düğüm olsun ve daha fazlası ile K , K_+ , K_- köşesinin bir komşuluğu hariç her yerde aynı olan (regüler diyagramların) singüler düğümlerdir.Bu komşulukta onlar sadece şekil Şekil 4.4. de gösterilen yollarda farklıdır



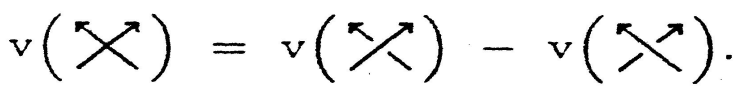
Şekil 4.4. Singüler skein diyagramları

Daha sonra

$$v(K) = v(K_+) - v(K_-) \qquad (4.1.)$$

tanımlansın. K , n köşeye ve hem K_+ hemde K_- , $n-1$ köşeye sahip olduğundan hipotezle $v(K)$ hesabedilebilir.

Yukarıdaki v singüler düğüm sabiti tam olarak v_0 düğüm sabitine bağlıdır. Bu nedenle bu v sabitine v_0 düğüm sabitiyle oluşturulan singüler düğüm sabiti denir. Bir singüler skein bağıntısı denen bağıntı aşağıdaki gibi diyagramatik olarak tekrar yazılabilir.



Şekil 4.5. Singüler skein operasayonları

Şekil 4.4. daki diyagramlara singüler skein diyagramları denir. Daha fazlasıyla, diğer iki skein diyagramıyla Şekil 4.5.deki bir diyagram ile yer değiştirme operasyonuna bir singüler skein operasyonu denir. K_- (veya K_+) ve K ile K_+ (veya K_-) yer değiştiren bir operasyon uygulandığında yeni köşede sonuçlanan bir düğümlenmemiş operasyon uygulanır.

Tanım: Eğer herhangi $m+1$ köşeli singüler düğüm için $v(K)=0$ oluyorsa, bir v singüler düğüm sabitine m mertebeli bir Vassiliev sabiti denir (Murasugi 1996).

Özel olarak eğer v en çok m mertebeli fakat $m-1$ mertebeli değilse, sıfır olmayan v için tam m köşeli bir singüler düğüm vardır. Bu durumda v ye m mertebeli bir Vassiliev sabiti denir.

Yukarıdaki tanımdan da görülebileceği gibi bir Vassiliev sabiti gerçekte önceki düğüm sabitlerinden farklıdır. Örneğin, Alexander polinomu, Jones polinomu ve köprü sayısı. Önceki düğüm sabitleri her bir düğümü bazı matematiksel değerlerle birleştirir. Daha doğrusu, bir Vassiliev sabiti (4.1.) ve $v(K)=0$ yi sağlayan bir singüler düğüm sabitidir. Bu nedenle (sonsuz bir şekilde) bir çok Vassiliev sabiti vardır ve onlara Vassiliev tipi sabitler demek daha doğaldır.

Açık bir şekilde Vassiliev sabitine sebep olan bir çok düğüm sabitli vardır, bununla birlikte, bütün düğüm sabitleri Vassiliev sabitlerini oluşturmaz. Vassiliev sabitlerini oluşturan olan düğüm sabitlerine örnek vermeden önce bir Vassiliev sabitinin tanımını kolay bir şekilde takip eden bazı önermelere bakalım.

Önerme : v bir Vassiliev sabiti olsun. Eğer bir K singüler düğümü bir ilmeğine sahipse,

$$v(K) = 0 \qquad (4.2.)$$

olur.(Murasugi 1996)

Önerme: v**,** 0 mertebeli bir Vassiliev sabiti olsun. Bu durumda herhangi K singüler düğümü için ,

$$\mathrm{v}(\mathrm{K}) = \mathrm{v}\Big($$ $$\Big).$$

olur. Bu yüzden aslında sıfır mertebeli yalnız bir tane Vassiliev sabiti vardır.(Murasugi 1996)

Önerme : 1 mertebeli Vassiliev sabiti yoktur.(Murasugi 1996)

K $m+1$ köşeli singüler düğüm olsun. Bu köşeleri yok etmek için her bir köşede bir singüler skein operasyonu oluşturalım. Bu işlem K dan $\{K_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_{m+1}}\}$ 2^{m+1} düğüm elde edilir. Burada $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_{m+1}$ ya + yada - dir ve $K_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_{m+1}}$, $\varepsilon_K = +$ pozitif geçit noktası veya $\varepsilon_K = -$ negatif geçit noktası ile K köşesini yer değiştirerek K 'dan elde edilen düğüm olsun. Singüler skein operasyonu ard arda uygulayarak

$$V(K) = \sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_{m+1}} (-1)^l V(K_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_{m+1}})$$

formülü elde edilir. Burada toplam $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{m+1}$ elamanların 2^{m+1} kümesinden alınır ve l, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{m+1}$ dizisinde $-$ lerin sayısdır.

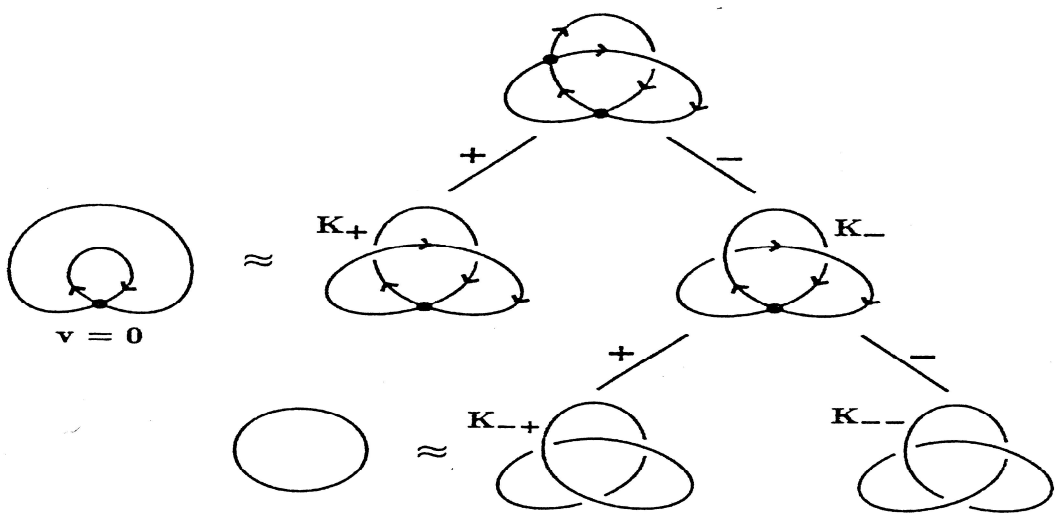
Önerme : Bir singüler düğümün en çok m mertebeli bir Vassiliev sabiti olması için gerek ve yeter şart $m+1$ köşeli herhangi bir singüler düğüm için ,

$$\sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{m+1}} (-1)^l v(K_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{m+1}}) = 0 \qquad (4.3.)$$

olmasıdır (Murasugi 1996).

Vassiliev sabitini değerlendirmek için skein polinomunda olduğu gibi singüler skein ağaç diyagramını çizmek daha uygundur.

Örnek : Şekil 4.6. da iki köşeli singüler bir düğüm için bir Vassiliev sabitini değerlendirmek için singüler ağaç diyagramını çizelim.



Şekil 4.6. Singüler ağaç diyagramı

böylece,

$$v(K) = -v(K_{-+}) + v(K_{--}) = -v(\ \mathrm{O}\ ) + v(K_{--})$$

elde edilir.

4.3. Vassiliev Sabitlerinin Bazı Örnekleri

Bu kısımda Vassiliev sabitlerine birkaç somut örnek verilecektir. Ayrıca, sonlu tipte olmayan ve bu yüzden Vassiliev sabiti olmayan bazı düğüm sabitlerinin varlığı gösterilecektir.

Önerme : K bir düğüm olsun ve

$$\nabla_K(t) = 1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots + a_{2m} z^{2m} + \ldots$$

K nın Alexander-Conway polinomu olsun. Bu durumda $\nabla_{2m}(K) = a_{2m} (m = 1, 2, \ldots)$ tamamen $2m$ tipinde bir Vassiliev sabiti oluşturur (Murasugi 1996).

Yukarıdaki önerme bir Vassiliev sabitinin ∇_{2m} Alexander-Conway polinomundan oluştuğunu gösterir.

Teorem : $V_K(t)$ bir K düğümünün Jones polinomu olsun. $V_K(q), t$ için $e^q (= 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$ oluşturularak $V_K(t)$ den elde edilen sonsuz seri olsun..Dolayısıyla $V_K(q) = b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \ldots$ yazılabilir (Birman 1993).

Böylece $J_m(K) = b_m$ (en fazla) m mertebeli Jones polinomu tarafından oluşturulan bir Vassiliev sabitidir.

Tahmin edilebir ki,aynı düşünce kullanılarak $(N \geq 2)$ dereceli Jones polinomu $J_K^{(N)}(t)$ tarafından oluşturulan bir $J_m^{(N)}$ Vassiliev sabitini tanımlamak mümkündür. Buna rağmen, burada Jones polinomundan bir Vassiliev sabiti elde etmenin başka yolları verilecektir.

Önerme : $\phi_K(t)$ $, t = 1$ için bir K düğümünün Jones polinomunun Taylor açılımı olsun öyleki ,

$$\phi_K(t) = c_0 + c(t-1) + c_2(t-1)^2 + \ldots + c_m(t-1)^m + \ldots$$

şeklinde yazılabilir ve $c_m = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^m V_K(t)}{dt^m}\right]_{t=1}$ dir. Böylece $\phi_K(t) = c_m$ (en çok) m mertebeli bir Vassiliev sabitidir (Murasugi 1996).

Yukarıdaki teoremdeki gibi aynı yolla Skein polinomu ve Kaufmann polinomu $t = e^q$ oluşumu yoluyla Vassiliev sabitlerine sebep olmaları mümkündür. Buna rağmen bu polinomlar iki değişkene sahip olduğundan bir değişkenli polinomlara indirgeme ihtiyacı duyarlar. $P_K(v, z)$ skein polinomundan dolayı $J_K(t)$ nin bir Vassiliev sabitine sebep olduğu sürpriz değildir.

Önerme : Bir K düğümünün işaretiyle tanımlanan V singüler düğüm sabiti sonlu tipten değildir, bundan dolayı bir Vassiliev sabiti değildir (Murasugi 1996).

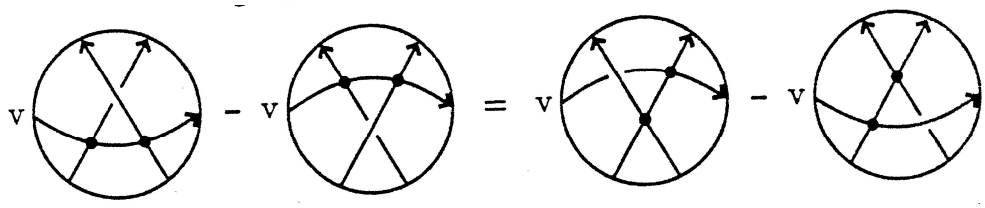
Önerme : Aşağıdaki klasik geometrik sabitlerden hiç biri, sonlu tipli K düğümünün en küçük geçit sayısı $c(K)$, düğümlenmeme sayısı $u(K)$, köprü sayısı $br(K)$, örgü index $b(K)$ ve bir

düğümün cinsi $g(K)$, sonlu tip değildirler dolayısıyla bunlar Vassiliev sabiti değildirler (Murasugi1996).

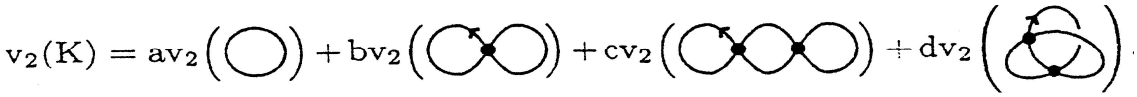
4.4. Chord diyagramları

Yukarıdaki önermede verilen denkliliğin yanı sıra, herhangi bir v Vassiliev sabiti 4-terimli formül denen daha önemli bir lineer denklemi karşılar.

Teorem (4-terimli formül): 4 singüler düğümün çemberler dışında özdeş olduğu herhangi bir v Vassiliev sabiti için aşağıdaki denklik elde edilir.



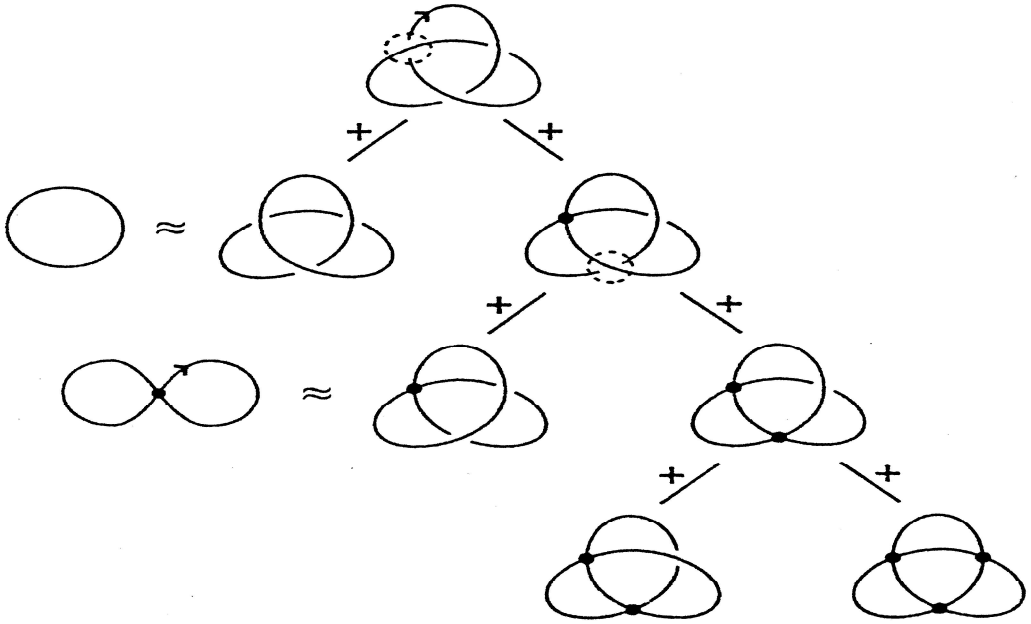
Yukarıdaki önermeden dolayı 0 mertebeli v_0 Vassiliev sabiti kesinlikle tektir. Ayrıca, 1 mertebeli Vassiliev sabiti olmadığını (4.3.) de gösterilmişti. Benzer düşünceyle, 2 mertebeli Vassiliev sabiti belirlenir. Sonunda, ardışık singüler düğümlerin ilave edilerek köşelerin oluşmasına sebep olacak ve tabiki bir aşikar düğümü oluşturacak şekilde bir K düğümüne düğümlenmeme operasyonu uygulansın. v_2 iki köşeden daha fazla herhangi bir singüler düğümü yok ettiğinden aşağıdaki eşitlik yazılabilir.



(4.4.)

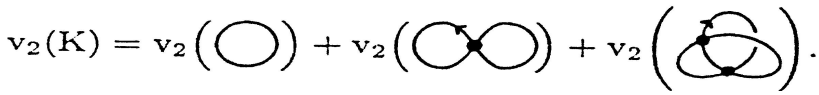
Burada a, b, c ve d tamsayılardır.

Örnek : K sağ el yonca yaprağı düğümü olsun. (4.4.) formunda $v_2(K)$ için bir ifade türetmek için singüler skein diyagram kullanılsın (Şekil 4.7.).

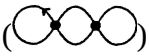


Şekil 4.7. Sağ el yonca yaprağı düğümünün singüler skein diyagramı

$v_2($ $) = 0$ olduğundan



yazılır.

Şimdi $v_2($ $) = 0$ ve $v_2($  $) = 0$ olduğundan v_2, $v_2(\mathrm{O})$ ve $v_2($ $)$ ile belirtilir. Buna rağmen ∇_2 (O) ve J_2(O) analitik olarak $m(m \geq 2)$ mertebeli herhangi bir Vassiliev sabitini

$$v_m(\mathrm{O}) = 0 \qquad (4.5.)$$

ile göstermek doğaldır.

Bundan dolayı, $v_2(K)$ tamamen $v_2($ $)$ nin değeriyle hesaplanır. Böylece $v_2(K)$ kesinlikle tektir. Dolayısıyla

$v_2($ $) = 1$ (4.6.)

ile gösterilsin.

Aşağıdaki eşitlik 2 köşeli bir K singüler düğümünün v_2 değeri K daki geçit noktalarının işaretine bağlı olmadığını gösterir.

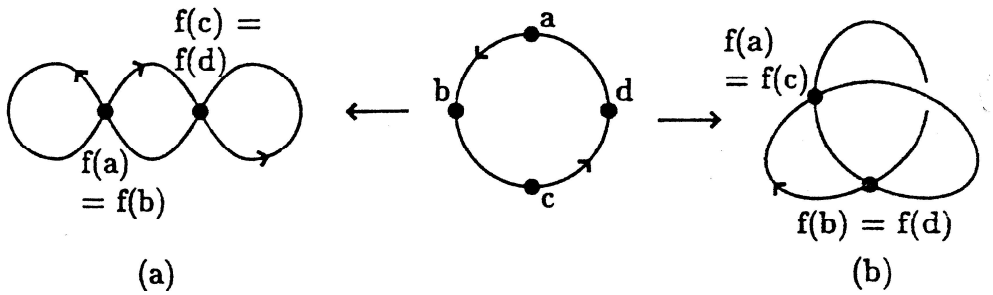
$v_2($ $) = v_2($ $) + v_2($ $) = v_2($ $) = 1$ (4.7.)

Başka bir deyişle, iki köşeli bir singüler düğüm için bir üst ve alt geçiş nokta arasındaki fark ihmal edebilir. Bundan dolayı,eğer $f : S^1 \to R^3$ dönüşümünün bir K singüler düğümün bir olduğu düşünülürse, K nın bütün v_2 değerinin durumunda S^1 deki a, b, c ve d dört noktadan hangi iki noktanın görüntüsü aynı olur sorusunu düşünmeye ihtiyaç vardır.

Örnek : Bir $f : S^1 \to \square^3$ dönüşümü olarak K singüler düğümünü göz önüne alınsın.

<u>Durum 1:</u> $f(a) = f(b)$ ve $f(c) = f(d)$

K ve Şekil 4.8. (a) daki singüler düğümler denk olmamasına rağmen aynı v_2 değerine sahiptirler.



Şekil 4.8. İki singüler düğümün denkliği

<u>Durum 2:</u> $f(a) = f(c)$ ve $f(b) = f(d)$

Bu durumda K ve Şekil 4.8.(b) deki singüler düğümler denk olmasalar bile aynı v_2 değerine sahiptir, bu (4.7.) den çıkar.

Geri kalan durum , yani $f(a) = f(d)$ ve $f(b) = f(c)$ durumu Durum 1 e indirgenebilir.

Yukarıdaki dört nokta arasındaki bağlantıyı vurgularken Durum 1 için Şekil 4.9 da (a) diyagramını ve Durum 2 için aynı şeklin (b) diyagramı gösterilebilir.

Şekil 4.9. Chord diyagramı

Şekil 4.9 deki diyagramlara genellikle Chord diyagramları denir. Bir defa şekil 4.9 deki iki chord diyagramı için v_2 değerleri atandığında herhangi singüler düğüm için v_2 yi hesap etmek mümkündür. v_2 değeriyle birlikte chord diyagramlarının tablosuna Actuality tablosu denir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Alexander-Conway polinomu, Jones polinomu ve Skein polinomu Vassiliev sabitlerini oluşturur. Dolayısıyla bir anlamda Vassiliev sabitlerinin polinom sabitlerinden daha güçlü olduğu söylenir. Şunu vurgulayalım ki bu özel Vassiliev sabitlerini düşünmek için yeterli değildir. Bu tahmini sağlaması için bütün Vassiliev sabitlerini düşünmeliyiz, çünkü sonlu sayıda Vassiliev sabitleri ile ayrışmayan sonsuz sayıda farklı düğümün olduğunu gösteren örnekler vardır.

Bu bakışla $K(n,0)$, $n \geq 2$, $l \geq 0$ bir alterne düğüm olsun.Bunun için $3n$ geçiş noktalı bir diyagram bulmak mümkündür.Bundan dolayı $K(n,0)$ bir aşikar düğüm değildir. $K(n,l)$ nin Alexander-Conway polinomu ve Jones polinomu aşağıdaki önerme ile bulunabilir.

Önerme : Her hangi bir $l \geq 0$ tamsayısı için ,

(1) $\nabla_{K(n,0)}(z) = \nabla_{K(n,l)}(z)$

(2) $\nabla_{K(n,0)}(z) = 1 - 2z^{(n)} + \ldots$ n çift ise

$\nabla_{K(n,0)}(z) = 1 - 2z^{(n+1)} + \ldots$ n tek ise

(3) $V_{K(n,l)}(t) = t^{2l}(V_{K(n,0)}(t) - 1) + 1$

olur.(Murasugi 1996)

Teorem : $n \geq 2$ ve bir K düğümü için ,K ve $K(n,l)$ nin bağlantılı toplamı $K' = K \# K(n,l)$, $l \geq 0$ olsun.

(1) K', K ya denk değildir.

(2) m mertebeli her hangi bir v_m Vassiliev sabiti $m\langle n$ ise

$$v_m(K') = v_m(K)$$

olur (Ohyama 1995).

Bundan dolayı sonlu sayıda Vassiliev sabitine ayrışmayan sonsuz tane farklı düğüm vardır. Eğer bütün Vassiliev sabitlerini düşünürsek durum tamamen farklı olur. Vassiliev sabitlerini çevreleyen teorinin dayanaklılığının biri de bize polinom sabitlerine sistematik bir yolda davranma izni vermesidir. Bundan dolayı, Vassiliev sabitleri polinom sabitleri arasında bir ilişkiyi ortaya çıkarır. Özel bir durumda, bu çeşidin bir sürpriz sonucu bulunmuş olmasıdır.

Teorem : K ve K' iki düğüm olsun. Eğer bütün $N \geq 2$ için N. dereceden Jones polinomlarının derecesi aynıdır. Onların Alexander polinomlarının derecesi de aynıdır (Bar-Natan 1994).

Yukarıdaki teorem aşağıdaki gibi başka deyişle de açıklanabilir. Bütün N. dereceden Jones polinomları derecesinin kümesi $\{J_K^{(N)}(t), N \geq 2\}$ Alexander polinomunu belirler. Bu sonuç kendi içinde sürprizdir, çünkü $v_K(t)$ Jones polinomu $\Delta_K(t)$ Alexander polinomunu belirlemez ve tersi de doğrudur.

Yukarıdaki teoremin önemi, aslında aşikar Jones polinomuyla birlikte bir aşikar olmayan düğümü bulmak için araştırmada bir önemli kısım olabilir gerçeğidir. $v_K(t) = 1$ denklemi $\Delta_K(t) = 1$ anlamına gelmeyebilir. $J_K^{(N)}(t) = 1$, tüm $N \geq 2$ için $\Delta_K(t) = 1$ olduğu bulunur.

Tahmin : Eğer bütün $N \geq 2$ için $J_K^{(N)}(t) = 1$ oluyorsa K aşikar düğümdür. Dolayısıyla, Vassiliev sabitleri iki düğümü birbirinden ayırmak için yeteri kadar güçlü olmamasına rağmen aşikar düğümlerden düğümleri ayırt edebilir (Murasugi 1996).

KAYNAKLAR

Alexander, J.W. , 1920. Note on Riemann spaces. Bull. Amer. Math. Soc. ,6,370-372.

Bozhüyük, M. E. ,1984 . Genel Topolojiye Giriş .Atatürk Üni. No:610 , Fen-Ede. Fak. No:21 Ders Kitapları No:59 , 150 s, Erzurum

Burde , G. ,Zieschang ,H. , 2003. Knots. Walter de gruyter , 401 s , Berlin -Newyork.

Crowell, R. H. ,Fox ,R.H.,1963 . Introduction to Knot Theory. Blaisdell Publishing Company , 181 s ,Newyork.

D. Bar-Natan,1995, On the Vassiliev knot invariants Topology,34,423-472.

Dehn, M., 1910 . Über die topologie des drei-dimensionalen raumes . Math. Ann., 75, 402-413.

Fox, R. H. , 1949. A remarkable simple closed curve. Ann. of Math., 50,264-265.

Gordon, C. McA. , Leucke, J. , 1989. Knots are determined by their complements . J. Amer. Math. Soc., 2,371-415.

Hempel, J., 1962. Construction of orientable 3-manifolds. Top 3-manifolds , Proc. Top. Int. Uni. Georgia.

Hilden, H. M., 1974. Every , closed , orientable 3-maifolds is a 3-folds branched covering space of S^3 . Bull. Amer. Math. Soc. ,80,1234-1244.

J.S. Birman and X-S. Lin,1993, Knot polynomials and Vassiliev's invariants, invent Math, 111, 225-270.

Kauffman, L. H. , 1987. On Knots .Princeton Univ. Press. 474s, Princeton,New-Jersey .

Kawauchi, A ., 1996. A survey of Knot Theory , Birkhauser Verlag, 415 s , Basel-Boston-Berlin.

Kılıç, S. A. , 2002. Genel Topoloji. Vipaş, 362 s , Bursa.

Lickorish , W.B.R., 1962. A representation of orientable 3-manifols . Ann. of Math., 76 531-540.

Melvin, P. M., Morton, H. R., 1995. The Colorued Jones function . Comm. Math. Physics , 169, 501-520.

Murasugi, K. , 1996. Knot Theory and Its Applications . Birkhauser Verlag , 337 s Boston.

Prasolov, V. V., Sossinsky, A. B. , 1996 .Knots, Links , Braids and 3-Manifolds . Amer. Math. Soc. , 237 s,Providence-Rhode Island.

Poincare' , H. 1904 . Cinquieme complement a l'analysis situs. Rend. Circ. Math. Palermo , 18, 45-110.

Rolfsen, D., 1976. Knots and Links and Introduction Knot Theory . Publish or Perish Inc. 437 s, Wilmington Delaware.

Wallace, A. H., 1960. Modifications and cobounding manifols. Canad. J. Math. 12, 503-528.

Y. Ohyama. Vassiliev invariants and similarity of knots , Proc.Amer. Math. Soc. 123 (1995) 287-291

ÖZGEÇMİŞ

Erzurum'da 1978 yılında doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 1997 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde Matematik dersi öğretmeni olarak çalışmaya başladı. 2004 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Matematik öğretmenliği görevine devam etmektedir.