TRAKYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENİŞLETİLMİŞ GÜRSEY MODEL'İNİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİNİN SABİT ÇÖZÜMLER ETRAFINDA YAPILAN PERTURBASYON TEKNİĞİ İLE BULUNMASI

GÜLSEN TEZGÖR
(DOKTORA TEZİ)

Danışman : Prof. Dr. K. GEDİZ AKDENİZ

Prof Dr. Cengiz KURTONUR
Enstitü Müdürü

EDİRNE — 1990

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu tezin her aşamasında beni daima teşvik edip değerli yardımları ile yönlendiren tez yöneticim Prof.Dr. K.Gediz Akdaniz'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmalarımda her türlü kolaylığı gösteren ve yardımlarını esirgemeyen Trakya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Başkanı Prof.Dr.Askeri Baran'a teşekkür ederim.

Ayrıca maddi ve manevi hertürlü yardımı sağlayan Hocam, Trakya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Dekanı Prof.Dr.M.Cemil Karadeniz'e şükranlarımı sunarım.

Bu tezin her aşamasında yanıbaşımda yardıma hazır olan yapıcı eleştirileriyle teşvik eden Ş.Erol Okan'a, Bilgisayar çalışmalarındaki katkıları için Serap Dalgıç ve Fizik Bölümündeki tüm arkadaşlara teşekkür ederim.

Son olarak bu tezi titizlikle daktilo eden Güzin Kurubaş'a teşekkür ederim.

Ö Z E T

Bu çalışmada 1956 Kütleli Gürsey Modeli'nin Soliton çözümleri Soler önçözümü altında yeni bir teknik geliştirilerek bulunmuştur. Bu tekniğin doğrudan minumum enerjili soliton çözümü bulmamızı sağladığıda görülmüştür. Ayrıca yine bu tekniğin Gürsey Modeli'nin genişletilmiş bir formunda da geçerli olduğu gösterilmiştir.

SUMMARY

In this study, Soliton Solutions of 1956 Gürsey's Model included mass term are obtained under the Soler ansatz by developing a new technique. Also in this model minimum energy solution of soliton is provided by using this technique. It has been shown that this technique can be applied to the Gürsey's expanded model.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Alan Teorilerinin klasik çözümleri Fizikte güncelliğini sürdürmektedir. Genel olarak alan teorilerinin klasik hareket denklemlerinin kararlı ve sonlu enerjili çözümlerine soliton adı verildiğini biliyoruz.(1) Sonlu enerjili olmak şekillerini daima muhafaza etmek ve kendi aralarındaki etkileşmelerde alışveriş yapmamak gibi nitelikler solitonlara parçacık olarak bakılmasını mümkün kılmıştır. Başka bir deyişle solitonların karakteristik özelliği dalga formlarının ve hızlarının zaman içinde sabit kalmasıdır. Buna bağlı olarak solitonlar zaman içinde açılmayan dalga paketlerini (veya bazı durumlarda enerji paketlerini) yani parçacıkları temsil ederler.

Solitonlar üzerindeki dispersiyon etkileri nonlineerite tarafından telafi edilir. Bu nedenle solitonlar nonlineer denklemlerin çözümü olarak elde edilebilirler.(2) Bununda genel olarak iki sınıfı vardır. Bunlardan biri birçok kısmî türevli diferansiyel denklemlerin çözümü olarak karşımıza çıkar. Bu denklemler singüleretiye sahiptir ve çeşitli yaklaşıklık metotları ile çözülebilirler. Diğeri Lagrange tipi alan teorileridir. Bu yapının temeli ise nonlineer etkileşmeleri temsil eden potansiyellerle elde edilen Euler - Lagrange hareket denklemlerinin belirli özellikler taşıyan önçözümler altında çözümlerinin bulunmasıdır ki tezimizin genel çerçevesini bu yapı oluşturmaktadır.

Yukarıda belirtilen karakteristik özellikleri dışında solitonların elamanter parçacıklar fiziğinin önemli bir çalışma alanı olmasını sağlayan bir özelliğide topolojik görünümleridir. Topolojik yapılarına göre solitonları aşağıdaki gibi sınıflandırabiliriz.

i) Sabit Çözümler : Sıfır enerjili kararlı çözümler olup potansiyeli minimum yapan sıfır olmayan noktadaki çözümlerdir. Bunlar vakum çözümleri olup solitonlar bu çözümler arasında hapsolduğundan sonlu enerjiye sahiptirler. Solitonların vakum çözümleri olanları teorinin sahip olduğu simetriyi kendiliğinden kırarlar ve parçacıklar olarak yorumlanabildiklerinden parçacık fiziğinde önemleri büyüktür.[3]

ii) Statik çözümler uzay boyutuna göre üçe ayrılırlar. Tel boyutlu (King Çözümleri) iki boyutlu (Vorteks çözümleri) ve üç uzay boyutlu monopol çözümleri.

Solitonlara boyut kazandırmanın bir ayar alanı ile mümkün olduğunun anlaşılmasından sonra $SU(2)$ ayar teorilerinde soliton çözümleri singüler noktanın hapsolması ile bulunmuş ve hapsolan singüler nokta kutup olarak yorumlandığından bu çözümlere monopol çözüm denmiştir.[4] Bu çözümlerin singüler olmaması genişleyebilmesi kararlı, sonlu enerjili olması solitonlar içinde tek fiziksel tanecik olma şansını vermiştir.

iii) Hem uzay, hemde zamana bağlı instanton tipi vakum çözümlerin geniş bir simetri olan konformal simetriyi kırmasından öte vakumlar arasında geçiş sağlayan özelliklerinden dolayı ayrı bir yeri vardır. Bilindiği gibi instanton tipi çözümleri ilk kez ayar invaryant Yong-Mills denklemlerinde bulunmuştur.[3] Bu çözümlerin sıfır enerji momentumuna sahip olmaları vakuma dinamik yapı kazandırmıştır. İnstanton çözümlerin böylesine fizik karşılığı olması fizikçileri yeni teorilerde bu tip çözümleri bulma uğraşlarına sevk etmiştir.

Biz bu çalışmamızda fermion - fermion etkileşmeli saf spinor alanlarda üç uzay boyutlu soliton çözümleri gözden geçireceğiz. Soliton çözümleri bulmak için uzayın zamandan ayrıldığı ve W frekansına bağlı sonlu enerjiler veren Soler[5] önçözümünü bazı modellerin Lagrange fonksiyonlarında kullanacağız.

Bu tez aşağıdaki gibi organize edilmiştir. Bölüm (II-1) de fermion etkileşmesini içeren ve Fermi Modeli olarak bilinen $(\bar{\psi}\psi)^2$ modelinde Solerin önerdiği önçözüm için kütleli olarak elde edilen spinor tipi çözümler öncelenecektir. Bölüm (II-2) de Kütleli Gürsey Modelin Ref (6)'da spinor tipi soliton çözümleri gözden geçirilecektir. Bölüm (II-3) te ise Genişletilmiş ve iç simetrili kütleli Gürsey Modele bir eksenel vektör kısmı eklenerek Soler önçözümü altında soliton çözümleri araştırılacaktır. Bölüm III de Bölüm (II-3) te bulunan hareket denklemlerinin bu konularda yapılan tekniklerin aksine perturbasyon teknikleri ve Frobenius Yöntemi ile çözüm formlarının bulunması gösterilecektir. Çözümler çeşitli parametrelere bağlı olarak tablolarda ve grafiklerde gösterilecektir. Elde ettiğimiz grafiklerin diğer yöntemlerle bulunan çözümlerle karşılaştırılması yine bu bölümde yapılacak ve çözümlerin sonlu enerjili solitonları temsil edip edemiyeceğinin bir tartışması verilecektir. Ayrıca tezimizin getirdiği sonuçlardan faydalanarak bu konuda yapılan bir makale ekte verilmiştir.

BÖLÜM II

SOLER TİPİ SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

(II-1) THİRRİNG MODELİNDE SOLER TİPİ SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

Alan teorilerinin kuvantalaştırılmasında yüksek boyutlardaki güçlükler iki boyutlu alan teorilerinin bir denek model olarak ele alınmasına sebeb olmuştur. Bunların en önemlisi 1958'de önerilen Thirring Modelidir.[7] Bu model saf spinor etkileşmeli bir teori olup iki boyutlu uzayda olmasına rağmen özellikle fermionların bağımlı durumları için çok iyi sonuçlar verdiğinden kuarkların dinamiğini anlamak için bir laboratuvar vazifesi görmüştür.

Nonlineer saf spinor alan modellerinde statik soliton çözümleri için Soler tarafından 1970 yılında önerilen[5] ansatz (öncözüm) başarılı sonuçlar vermiştir. Bu öncözümde soliton dalgası zamanla titreşen salıngan bir yapıya sahiptir.

Kütleli ve self etkileşmeli Thirring tipi spinor alan modellerinde Lagrange fonksiyonu

$$\mathcal{L}=i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-m\bar{\psi}\psi+\lambda(\bar{\psi}\psi)^{2} \qquad \text{(II-1-1)}$$

şeklindedir.

Modelin hareket denklemi ise

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi + 2\lambda(\bar{\psi}\psi)\psi = 0 \qquad \text{(II-1-2)}$$

dır. Bu denklemde Soler ansatzı

$$\psi(r,t) = e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} g(r) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ if(r)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad \text{(II-1-3)}$$

kullanılırsa

$$g' + (m-\omega)f + 2\lambda f(f^2-g^2) = 0$$

$$f' + \frac{2f}{r} + (m-\omega) + 2\lambda g\left(f^2-g^2\right) = 0 \qquad \text{(II-1-4)}$$

denklem sistemleri elde edilir. Burada f ve g r'nin birer fonksiyonu olup ve $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dır.

$$g(r) = \left(\frac{m+\omega}{2\lambda}\right)^{1/2} G(\rho) \quad ,$$

$$f(r) = \left(\frac{m+\omega}{2\lambda}\right)^{1/2} F(\rho) \quad , \qquad \text{(II-1-5)}$$

$$r = \frac{\rho}{m+\omega}$$

dönüşümü ile boyutsuzlaştırılarak, denklemler

$$G' + F + F\left(G^2-F^2\right) = 0$$

$$F' + \nu G + \frac{2F}{\rho} + G\left(F^2-G^2\right) = 0 \qquad \text{(II-1-6)}$$

şekline dönüşür.

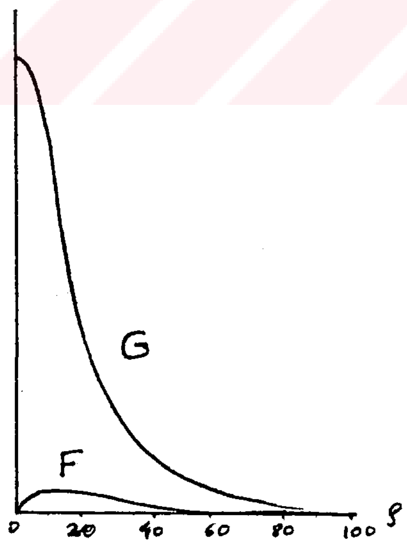
Burada F ve G ρ nın fonksiyonu olup γ ise

$$\gamma = \frac{m-w}{m+w} \qquad \text{(II-1-7)}$$

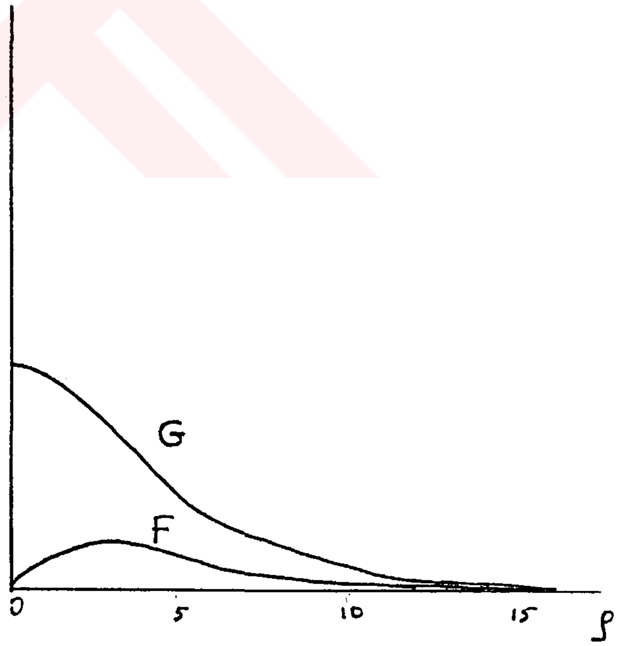
dır. Pozitif frenkanslar için $0 < \gamma < 1$ ve $m > |W|$ olmalıdır. (II-1-6) denklemleri F = 0 için G = 0 ve $G = \mp \gamma^{1/2}$ olmak üzere üç çözüm ihtiva eder.

(II-1-6) denklem sisteminin çözümleri analitik bir yöntem kullanılmadan özel bir bilgisayar programıyla minimum enerjili olarak γ = 0,001 ve 0,032 olmak üzere sayısal değerleri grafik (II-1-1) ve (II-1-2) de görüldüğü gibidir.

$(\bar{\psi}\,\psi)^2$ Modeli için soliton çözüm grafikleri

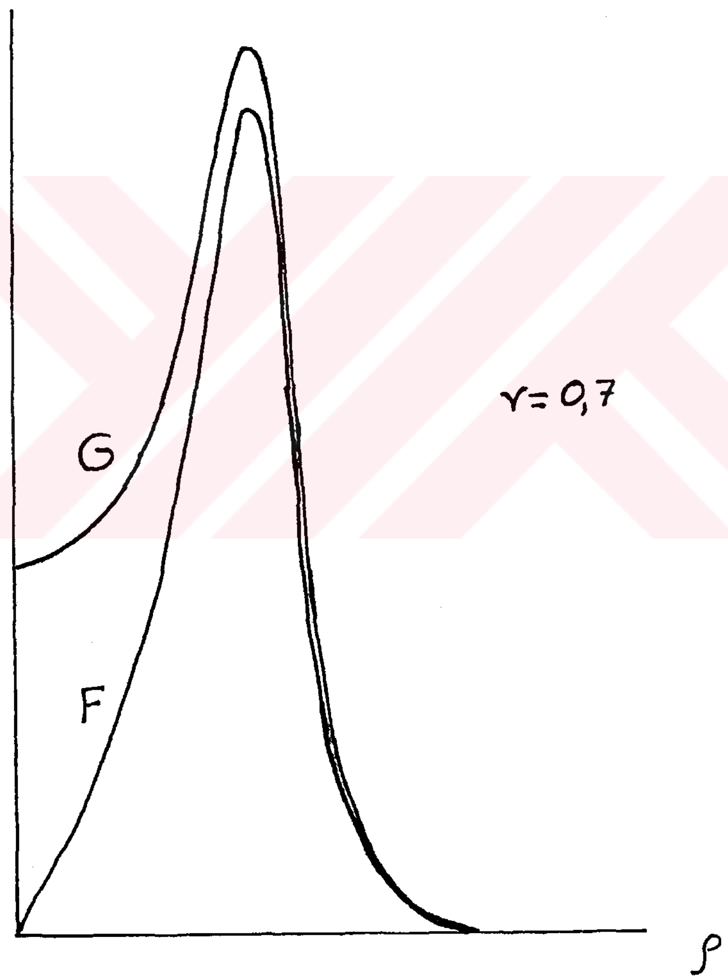


Grafik (II-1-1)
γ= 0,001 için



Grafik (II-1-2)
γ= 0,032 için

ν nun değerleri büyüdükçe ρ nun sonlu bir değeri için F ve G çözümleri aynı yerde sıfır olmaktadır. Dolayısıyla çözümler bu bölgede sonlu olup enerjileri ise Strauss - Vazquez[8] tarafından önerilen kararlılık kriterliğine göre kararlıdır.



Grafik (II-1-3) ν = 0,7 için $(\bar{\psi}\psi)^2$ modelinde soliton çözüm.

(II-2) KÜTLELİ GÜRSEY MODELİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

Raczka(9) 1986 da Soler yaklaşımından faydalanarak kütleli Gürsey Modelin spinor tipi soliton çözümlerini bulmuştur.

Kütleli Gürsey Modelin Lagrange fonksiyonu

$$\mathcal{L} = i\psi \partial\!\!\!/ \psi - m\bar{\psi}\psi + \lambda(\bar{\psi}\psi)^{4/3} \qquad \text{II-2-1}$$

dır. Hareket denklemi ise,

$$i\partial\!\!\!/ \psi - m\psi + \frac{4}{3}\lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/3}\psi = 0 \qquad \text{(II-2-2)}$$

şeklindedir.

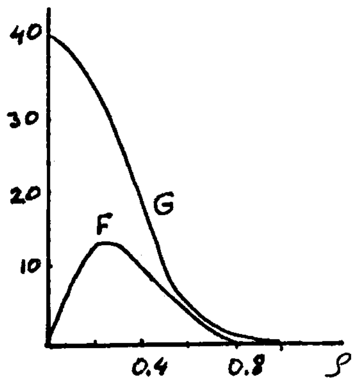
Bu hareket denkleminden soler ansatzı için,

$$\begin{aligned} &g' + (m+w)f - \frac{4}{3}\lambda(g^2 - f^2)f = 0 \\ &f' + \frac{2f}{r} + (m-w)g - \frac{4}{3}\lambda(g^2 - f^2)g = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II-2-3)}$$

$f_{(r)}$ ve $g_{(r)}$ fonksiyonlarının değişkenlere ayrılabilir diferansiyel denklem sistemi elde edilebileceği görülür.

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{4/3\,\lambda}} F(\rho) \qquad g(r) = \frac{1}{\sqrt{4/3\,\lambda}} G(\rho)$$

dönüşümleri yapıldıktan sonra F ve G nümerik olarak çözümlenmiş ve $\gamma = 0,35$ için şekil (II-2-1) deki gibi grafik çizilmiştir. m = 1,97 GeV ve W = 0,476 m dır.



Grafik(II-2-1) $(\psi\psi)^{4/3}$ modeli için soliton çözüm

(II-3) GENİŞLETİLMİŞ GÜRSEY MODELİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

1982 de orijinal Gürsey[6] modelinin iç simetrili biçimi önerilmiş ve bu modelin yörünge integrali yöntemi ile kuvantalaştırılmasının olası olduğu gösterilmiştir[10] Kütleli ve iç simetreli Gürsey Modeli versiyonu için soler ansatzındaki (g) ve (f) ler cinsinden elde edilen diferansiyel denklemler daha önceki saf spinor modellerde yapılan benzer çalışmaların aksine değişkenlerine ayrılmadığı gösterilmiştir.

Ref. (11)'de incelenen iç simetrili orijinal Gürsey Modele kütle teriminin eklenmesi ile elde edilen Lagrange fonksiyonu

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi - m\bar{\psi}\psi + \lambda_1 \left[(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \right]^{2/3} \qquad \text{II-3-1}$$

şeklindedir.

Hareket denklemi ise,

$$i\partial\!\!\!/ \psi - m\psi + \frac{4}{3}\lambda_1 \frac{(\bar\psi\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu\psi}{\left[(\bar\psi\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma^\mu\psi)\right]^{1/3}} = 0 \qquad \text{(II-3-2)}$$

dır.

Soler ansatzının (II-3-2) denklemine uygulanması sonucu aşağıdaki dört denklem sistemi elde edilir.

$$wg - f' - \frac{2f}{r} - mg + \frac{4}{3}\lambda_1 \frac{g(g^2-f^2) - 2f^2\cos^2\theta}{\left[(f^2-g^2)^2 - 4f^2g^2\cos^2\theta\right]^{1/3}} = 0$$

$$\frac{4}{3}\lambda_1 \frac{2f^2 g \sin\theta\cos\theta e^{i\phi}}{\left[(f^2-g^2)^2 - 4f^2g^2\cos^2\theta\right]^{1/3}} = 0$$

$$wf + g' - mf + \frac{4}{3}\lambda_1 \frac{f(f^2+g^2)}{\left[(f^2-g^2)^2 - 4f^2g^2\cos^2\theta\right]^{1/3}} = 0$$

$$wf + g' - mf + \frac{4}{3}\lambda_1 \frac{f(f^2-g^2)}{\left[(f^2-g^2) - 4f^2g^2\cos^2\theta\right]^{1/3}} = 0$$

(II-3-3)

Bu denklemlerin θ parametresinden kurtulmadığı yani f ve g fonksiyonlarına göre değişkenlerine ayrılmadığı görülmektedir.

Soler tipi soliton çözümleri bulabilmek için alternatif bir model ise (II-3-1) modelinin bir genişletilmesi olabilir. Bu modelin Lagrange fonksiyonu

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\partial\!\!\!/ \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + \lambda_1\left[(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)\right]^{2/3} + \lambda_2\left[(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma^5\Psi)\right]^{2/3}$$

(II-3-4)

Hareket denklemi ise,

$$i\partial\!\!\!/\Psi - m\Psi + \frac{4}{3}\lambda_1 \frac{(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)\gamma^\mu\Psi}{\left[(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)\right]^{1/3}} + \frac{4}{3}\lambda_2 \frac{(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)\gamma^5\Psi}{\left[(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma^5\Psi)\right]^{1/3}} = 0$$

şeklindedir. (II-3-5)

Bu hareket denklemine Soler ansatzı uygulandığında

$$\frac{2f}{r}-wg-f'-mg+\frac{4}{3}\lambda_1\frac{g(g^2-f^2)+2f^2\cos^2\theta}{\left[(f^2-g^2)^2+(2fg\cos\theta)^2\right]^{1/3}}+\frac{4}{3}\lambda_2\frac{2f^2g\cos^2\theta}{\left[4f^2g^2\cos^2\theta\right]^{1/3}}=0$$

$$\frac{4}{3}\lambda_1\frac{2fg\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}}{\left[(f^2-g^2)^2+(2fg\cos\theta)^2\right]^{1/3}}\ \frac{4}{3}\lambda_2\frac{2fg\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}}{\left[4f^2g^2\cos^2\theta\right]^{1/3}}=0$$

$$-i\cos\theta\left[wf+g'-mf+\frac{4}{3}\lambda_1\frac{f(f^2+g^2)}{\left[(f^2-g^2)^2+(2fg\cos\theta)^2\right]^{1/3}}+\frac{4}{3}\lambda_2\frac{2fg^2}{\left[4f^2g^2\cos^2\theta\right]^{1/3}}\right]=0$$

$$-ie^{i\phi}\sin\theta\left[wf+g'-mf'+\frac{4}{3}\lambda_1\frac{f^2-g^2)f}{\left[(f^2-g^2)^2-(2fg\cos\theta)^2\right]^{1/3}}\right]=0$$

(II-3-6)

denklem sistemi elde edilir. $\cos^2\theta=-\dfrac{f^2-g^2}{8f^2g^2}$

eşitliği bu denklemlerde kullanılırsa;

$$f'+\frac{2f}{r}+(m-w)g-\frac{4}{3}\alpha\,(g^2-f^2)g=0$$

(II-3-7a)

$$g'+(m-w)f-\frac{4}{3}\alpha\,(g^2-f^2)f=0$$

(II-3-7b)

bulunur. Burada $\alpha=2^{1/3}\lambda$

(II-3-8)

$$f=\left(\frac{m+w}{4/3\,\alpha}\right)^{3/2}F\ ,\ g=\left(\frac{m+w}{\frac{4}{3}\alpha}\right)^{3/2}G\qquad r=\frac{\rho}{m+w}$$

dönüşümleri yapıp (II-3-7a) ve (II-3-7b) denklemlerini boyutsuzlaştırarak,

$$G' + F - F\left(G^2 - F^2\right)^{1/3} = 0 \qquad \text{(II-3-8a)}$$

$$F' + \frac{2F}{\rho} + \nu G - G\left(G^2 - F^2\right)^{1/3} = 0 \qquad \text{(II-3-8b)}$$

elde edilir. Bu denklem sistemi Ref (9) daki orijinal Gürsey Modelin hareket denklemlerinden elde edilen diferansiyel denklemlerle aynı formdadır.

BÖLÜM III

GENİŞLETİLMİŞ GÜRSEY MODELİNİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

Bölüm (II-3)teki hareket denklemlerinden elde edilen nonlineer denklemlerden (II-3-7a) da F=0 için G = 0 ve $F' = 0$ (III-1a) dır. (II-3-7b) de ise, F=0 için G=0 ve $G = \mp \gamma^{3/2}$ (III-1b) olur.

Thirring Model ve Kütleli Gürsey Modelindeki nümerik çözümler gözönüne alındığında F'nin sıfırdan ve G nin $+\gamma^{3/2}$ den başladığı düşünülebilir. F ve G fonksiyonlarına bu başlangıç değerlerinden itibaren ϵ çok küçük bir artış değeri olmak üzere ve ϵ nın iki ve daha büyük kuvvetlerini içeren terimleri ihmal edilerek

$$\begin{aligned} F &= F_0 + \epsilon F_1 + \epsilon^2 F^2 - - - - \\ G &= G_0 + \epsilon G_1 + \epsilon^2 G_2 - - \end{aligned} \qquad \text{(III-2)}$$

gösterimlerini kullanalım. Burada $F_0 = 0$ ve $G_0 = \gamma^{3/2}$ dır. F ve G fonksiyonlarının türevleri ise;

$$\begin{aligned} F' &= \epsilon F_1' \\ G' &= \epsilon G_1' \end{aligned} \qquad \text{(III-3)}$$

dır. F_0 ve G_0 sabit olduğundan türevleri sıfırdır. F, G ve türevleri (II-3-7a) da kullanılarak

$$\epsilon G_1' + (F_0 + \epsilon F_1) - (F_0 + \epsilon F_1)\left[(G_0 + \epsilon G_1)^2 - (F_0 + \epsilon F_1)^2\right]^{1/3} = 0 \qquad \text{(III-4)}$$

elde edilir.

$F_0 = 0$ ve ϵ çok küçük olduğundan karesi çok daha küçük olup ihmal edilebilir. Bu durumda

$$\epsilon G_1' + \epsilon F_1 - \epsilon F_1 \left[G_0 \left(G_0 + 2 \epsilon G_1 \right) \right]^{1/3} = 0 \qquad \text{(III-5)}$$

yazılır.

$\left(G_0 + 2 \epsilon G_1 \right)^{1/3}$ te Binom açılımı uygulanırsa

$$\epsilon G_1' + \epsilon F_1 - \epsilon F_1 \left[G_0^{1/3} \left(G_0^{1/3} + \frac{2}{3} \epsilon G_0^{-\frac{2}{3}} G_1 - \frac{4}{9} G_0^{-\frac{5}{3}} \epsilon^2 G_1^2 \cdots \right) \right] = 0$$

(III-6)

elde edilir. ϵ nın ikiden büyük kuvvetleri ihmal edilirse

$$\epsilon G_1' + \epsilon F_1 - \epsilon F_1 G_0^{2/3} - \cancel{\epsilon^2} \frac{2}{3} G_0^{-\frac{2}{3}} G_1 + \cancel{\epsilon^3} \cdots = 0$$

(III-7)

olur. $\epsilon \neq 0$ ve $G_0 = r^{3/2}$ olduğu gözönüne alınarak

$$G_1' + F_1 - r F_1 = 0 \qquad \text{(III-8)}$$

bulunur.

Benzer işlemler (II-3-7b) de tekrarlanarakta

$$F_1 + \frac{2}{\rho} F_1 - \frac{2}{3} G_1 r = 0 \qquad \text{(III-9)}$$

elde edilir. (III-8) den bulunan

$$F_1 = \frac{G_1'}{r-1} \qquad \text{(III-10)}$$

ve türevi

$$F_1' = \frac{G_1''}{r-1} \qquad \text{(III-11)}$$

dir. F_1 ve türevi (III-9) da kullanılarak

$$\frac{G_1''}{r-1} + \frac{2}{\rho} \frac{G_1}{r-1} - \frac{2}{3} G_1 r = 0 \qquad \text{(III-12)}$$

gibi yeni bir diferansiyel denklem bulunur. Bu denklemin düzenlenmesi ile de

$$\rho^2 G_1'' + 2\rho G_1 - 2/3\, v(v-1)\rho^2 G_1 = 0 \qquad \text{(III-13)}$$

elde edilir. Burada G_1 ler nun fonksiyonudur. Bu denklemin Frobenius yöntemi ile çözümünü bulmak için $\rho = x$ ve $G_1 = y$ dönüşümlerini yapalım. Bu dönüşümler ile (III-13) denklemi

$$x^2 y'' + 2xy' - \frac{2}{3} v(v-1) x^2 y = 0 \qquad \text{(III-14)}$$

şeklinde bir formda yazılabilir. Bu denklem ise,

$$x^2 r(x) y'' + x\, p(x) y' + q(x) y = 0 \qquad \text{(III-15)}$$

formunda bir diferansiyel denkleme benzemektedir.

Bu denklem aşağıdaki teoremleri gözönüne alarak çözülebilir.

Teorem 1 (III-15) formunda bir diferansiyel denklemde

$$r(x) = \sum r_m x^m \qquad p(x) = \sum p_m x^m \quad \text{ve} \quad q_m = \sum q_m x^m$$

olup $-L < x < L$ aralığında analitik ve bu aralıkta

$$y_1 = x^{s_1} \sum a_k x^k \qquad \text{(III-16)}$$

gibi bir çözüm geçerlidir.

Teorem 2 (III-15) diferansiyel denkleminde r (x) p (x) ve q (x) $-L < x < L$ aralığında analitik ve

$$f_0(s) = r_0 s^2 + (p_0 - r_0) s + q_0 \qquad \text{(III-17)}$$

indis denkleminin kökleri

$$s_1 \geq s_2 \quad \text{ve} \quad s_1 - s_2 = M_k \qquad \text{(III-18)}$$

ise

$$y_2 = c\, y_1 \log x + x^{s_2} \sum b_k x^k \qquad \text{(III-19)}$$

olmak üzere ikinci bir çözüm vardır.

(III-15) denklemi açık olarak yazılıp

$$x^2 (r_0 + r_m x^m) y'' + x (p_0 + p_m x^m) y' + (q_0 + q_m x^m) y = 0$$

(III-14) denklemi ile karşılaştırılırsa

$r_0=1 \qquad r_1=0 \qquad r_2=0$ (III-20a)

$p_0=2 \qquad p_1=1 \qquad p_2=0$ (III-20b)

$q_0=0 \qquad q_1=0 \qquad q_2=-\frac{2}{3}v(v-1)$ (III-20c)

ve m=2 bulunur.

(III-17) indis denkleminde (III-20a-b-c) eşitlikleri kullanılırsa, $s_1=0$ ve $s_2=-1$ (III-21)

elde edilir. Teorem 2 ye göre $S_2 - S_1 = 1$ olup (III-19) formunda ikinci bir çözümde bulmak mümkündür.

Birinci çözümde $S_1 = 0$ kullanılmak üzere $y_1 = x^{s_1}\sum a$

biçiminde seçilir ve katsayıları hesaplanır. y_1'in

birinci türevi $y_1' = \sum M_k a_{M_k} x^{M_k-1}$ (III-22)

ikinci türevi

$$y_1'' = \sum M_k(M_k-1)a_{M_k}x^{M_k-2} \qquad \text{(III-23)}$$

dir. Birinci ve ikinci türevler (III-14) diferansiyel denkleminde yerine yazılır ve $\ell = \frac{2}{3}(v-1)v$ (III-24)

kabul edilirse,

$$\sum M_k(M_k-1)a_{M_k}x^{M_k} + 2\sum M_k a_{M_k}x^{M_k} - \ell\sum a_{M_k}x^{M_k+2} \qquad \text{(III-25)}$$

olur. $M_k + 2 = M_{k'}$ dönüşümü ve tekrar $k' = k$ dönüşümleri ile

$$2a_1x + \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[M_k(M_k-1)+2M_k\right]a_{M_k} - \ell a_{M_k-2}\right\}x^{M_k} = 0 \qquad \text{(III-26)}$$

elde edilir. $x_1 \neq 0$ için $a_1=0$ olur.

$x^{M_k} \neq 0$ olduğunda

$$a_{M_k} = \frac{\ell}{M_k(M_k-1)+2M_k}a_{M_k-2} \qquad \text{(III-27)}$$

olur.

m = 2 ve çeşitli k değerleri için

$$a_2 = \frac{\ell}{3!} a_0$$

$$a_4 = \frac{\ell}{5!} a_0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{2k} = \frac{\ell}{2k(2k+1)} a_{2k-2} \qquad \text{(III-28)}$$

elde edilir. Bu durumda y_1 birinci çözümü

$$y_1 = x^{s_1} \sum \frac{\ell}{2k(2k+1)} a_{2k-2} x^{2k} \qquad \text{(III-29)}$$

ve

$$y_1 = a_0 \left(1 + \frac{\ell}{3!} x^2 + \frac{\ell^2}{5!} x^4 + \frac{\ell^3}{7!} x^6 + \cdots\right) \qquad \text{(III-30)}$$

olur.

$$y_1 = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell^k}{(2k+1)!} x^{2k} \qquad \text{(III-31)}$$

biçiminde bir seridir. Bu serinin sonlu olması için D'Alembert Kuralına göre yakınsaklığı incelenirse

$$\lim \frac{\dfrac{x^{2n+2}\,\ell^{n+1}}{[2(n+1)+1]!}}{\dfrac{x^{2n}\,\ell^{n}}{(2n+1)!}} = 0 < 1 \qquad \text{(III-32)}$$

bulunur. Bu durumda seri yakınsak olup y_1 çözümü sonludur.

$y_1 = G$ ve $x = \rho$ ters dönüşümleri yapılarakta

$$G_1 = r^{3/2} + \epsilon a_0 \left[1 + \frac{(r-1)r}{9} \rho^2 + \frac{r^2(r-1)^2}{270} \rho^4 \cdots\right] \qquad \text{(III-33)}$$

elde edilir. Türevi ise,

$$G_1' = \epsilon a_0 \left(\frac{2}{9} r(r-1)\rho + \frac{2}{135} r^2(r-1)\rho^3 \cdots\right)$$

olur.

(III-10)da (III-34) kullanılması ile de F_1 için

için $$F_1 = \epsilon a\left(\frac{2}{9} v \rho + \frac{2}{135} v^2(v-1)\rho^3 \ldots\right. \qquad \text{(III-35)}$$

bulunur. Bu durumda $\epsilon a_0 = 1$ için F ve G

$$F(\rho) = \frac{2}{9} v \rho + \frac{2}{135} v^2(v-1)\rho^3 \qquad \text{(III-36)}$$

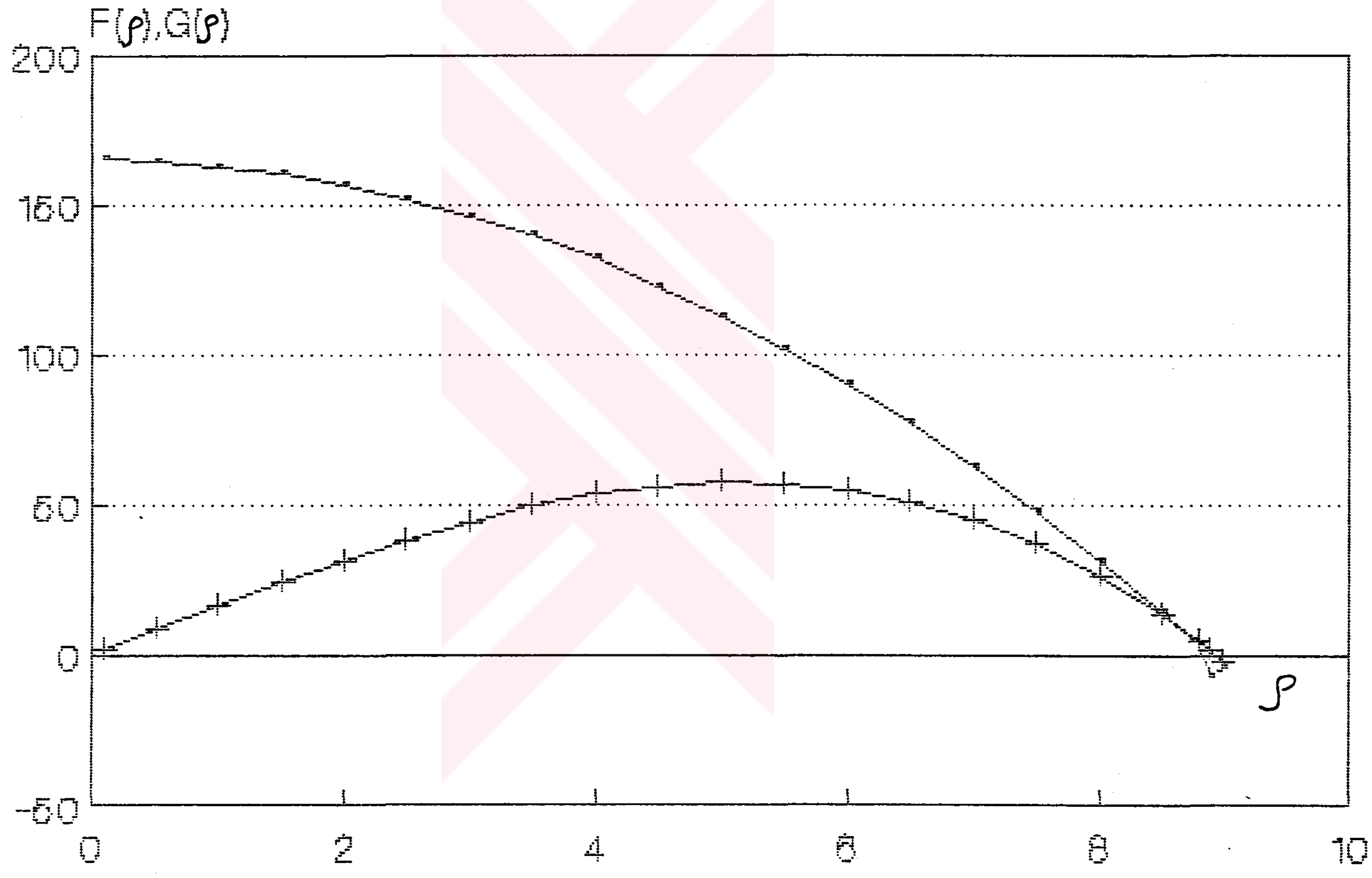
$$G(\rho) = v^{3/2} + 1 + \frac{(v-1)v}{9} \rho^2 \ldots \qquad \text{(III-37)}$$

şeklinde yazılabilir. (III-36) ve (III-37) denklemlerinde $0<v<1$ arasındaki çeşitli değerleri için ρ nun değişimlerine göre F ve G nin değerleri tablolarda gösterilmiş ve grafikleri çizilmiştir.

En mümkün çözüm $v = 0{,}75$ içindir. Bu durumda genliğin artmaya devam etmekte olduğu F ve G'nin eksenini kestiği noktalar arasındaki uzaklık farkının minumuma indiği gözlenmiştir. Bu da $v = 0{,}75$ değerinde F ve G'nin en ideal biçimde lokalize olduğunu yani en uygun soliton çözümü verdiğinin kanıtıdır. $v = 0{,}75$ için bu durum arka sayfadaki grafikte görülmektedir.

TABLO (8) $\gamma = 0,75$ sabit değeri için F ve G'nin ρ ya göre değişimleri:

ρ	G	F
0,1	164,93	1,66
0,5	164,43	8,30
1,0	162,86	16,45
1,5	160,26	24,29
2,0	156,61	31,66
2,5	151,93	38,41
3,0	146,20	44,37
3,5	139,43	49,40
4,0	131,61	53,33
4,5	122,76	56,01
5,0	112,86	57,29
5,2	108,61	57,37
5,5	101,93	57,00
6,0	89,95	55,0
6,5	76,93	51,11
7,0	62,86	45,20
7,5	47,76	37,10
8,0	31,61	26,66
8,5	14,43	13,72
8,8	3,61	4,69
8,9	-6,89	1,46



Grafik (III-1) Genişletilmiş Gürsey Modelde $\gamma = 0,75$ için soliton çözüm.

Tablo (1) de $\gamma = 0,1$ değeri için F ve G'nin genlikleri minimumdur ve ρ eksenini kestiği noktalar arasındaki açıklık maksimumdur. Tablo (2) de $\gamma = 0,2$, Tablo (3) te $\gamma = 0,3$, Tablo (4) te $\gamma = 0,4$, Tablo (5) te $\gamma = 0,5$, Tablo (6) da $\gamma = 0,6$ ve Tablo (7) de $\gamma = 0,7$ değerleri için genliklerin sürekli olarak arttığı ve ekseninin kestikleri noktalar arasındaki açıklığın giderek azaldığı görülmektedir. Tablo (9) da $\gamma = 0,8$ ve Tablo (10) da $\gamma = 0,9$ değerlerinde genlikler artmaya devam etmekte ancak F ve G ideal lokalize durumdan ayrılmaktadır.

BÖLÜM IV

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tezde fermion - fermion etkileşmeli saf spinor alanlı Gürsey Model'in düz uzay zaman metriği olan Minkowski Metriği kullanarak soliton çözümler incelenmiştir. Ref (10) da verilen iç simetrili yeni Gürsey Model formunun soliton çözümleri elde edilememiştir. Soler tipi soliton çözümlerin bulunması bu modele bir pseudoskaler alan ilavesiyle mümkün olmuştur. Bu çözümlerin elde edilmesinin farklı bir yönü konformal simetri içeren modele benzemeksizin kütle terimini içermesidir. Zira iç simetriye sahip olmayan kütlesiz Gürsey Modeli'nin instanton ve meron tipi çözümleride mevcuttur.[12]

Çalışmamızda bu konuda daha önce yapılan araştırmalardan farklı olarak soliton çözümleri sabit çözümler etrafında yapılan perturbasyon tekniği ile bulunmuştur. Nonlineer diferansiyel denklem sistemi birinci dereceden perturbasyon tekniği kullanılarak lineer duruma indirgenmiş ve Frobenius Metodu ile bu denklem çözülmüştür. Bu yöntem bize minimum enerjiye tekabül eden çözümü doğrudan bulunmasınıda sağlamıştır. Elde edilen çözümlerin $\sqrt{\ }=0,75$ değeri için ideal formda lokalize olduğu gözlenmiştir. Çözümler daha önce farklı yöntemlerle elde edilenlerle fiziksel açıdan uyum içindedir.

Ayrıca modelin kütleli bir model olmasından ve modelin iç simetri içermesinden bu çözümlere fermionik sektöre tekabül eden spinor parçacıklar diyebiliriz.

Bu çalışmanın önemli sonuçlarından biride incelediğimiz saf spinor etkileşmeli modelin

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = i\psi \not\partial \psi - m\psi\psi + \lambda_1 \left[(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)\right]^a \\
+ \lambda_2 \left[(\bar{\psi}\gamma^5 \psi)(\psi \gamma_5 \psi)\right]^b + \lambda_3 |\bar{\psi}\psi|^{c-1} \bar{\psi}\psi
\end{aligned}
$$

olarak genişletilmiş bir biçimi gözönüne alındığında[13] elde edilen soliton yapılaşmasının benzerlikler taşıdığının görülmesidir. Bu sonuç ek (c) de makale olarak verilmiştir.

EK-A

TABLOLAR

TABLO (1) $\gamma = 0,1$ sabit değeri için F ve G'nin ρ ya göre değişimleri:

ρ	G	F
0	103,16	0
0,5	102,91	1,10
1,0	102,16	2,20
1,5	100,91	3,28
2,0	99,16	4,33
2,5	96,91	5,34
3,0	94,16	6,31
3,5	90,91	7,20
4,0	87,16	8,02
4,5	82,91	8,78
5,0	78,16	9,43
5,5	72,91	10,00
6,0	67,16	10,44
6,5	60,91	10,78
7,0	54,16	10,98
7,4	48,40	11,04
7,5	46,91	11,04
7,6	45,40	11,03
8,0	39,16	10,95
8,5	30,91	10,70
9,0	22,16	10,28
9,5	12,91	9,67
10,0	3,16	8,9
10,156	0	8,4

ρ	G	F
10,5	-7,08	7,89
11,0	-17,83	6,69
11,5	-29,08	5,27
12,0	-40,84	3,62
12,5	-53,08	1,73
12,9	-63,25	0
13,0	-65,83	-0,40

TABLO (2) γ = 0,2 sabit değeri için F ve G'nin ρ ya göre değişimleri:

ρ	G	F
0	108,94	0
0,5	108,49	2,21
1,0	104,16	4,39
1,5	104,94	6,50
2,0	101,83	8,44
2,5	97,83	10,37
3,0	92,94	12,04
3,5	87,16	13,52
4,0	80,50	14,72
4,5	72,94	15,68
5,0	64,51	16,28
5,5	55,16	16,55
5,59	53,39	16,56
5,7	51,18	16,55
6,0	44,96	16,4
6,5	33,83	15,86
7,0	21,86	14,8
7,5	8,94	13,33
7,87	0	11,86
7,9	2,00	11,73
8,0	-4,83	11,28
8,5	-19,50	8,66
9,0	-34,99	5,43
9,5	-51,50	1,57
9,68	-56,38	0
9,7	-58,32	-0,15

TABLO (3) $\nu = 0,3$ sabit değeri için F ve G'nin ρ ya göre değişimleri:

ρ	G	F
0	116,43	0
0,5	115,84	3,32
1,0	114,18	65,0
1,5	111,18	9,68
2,0	107,43	12,45
2,5	101,84	15,20
3,0	95,46	17,28
3,5	87,84	19,33
4,0	79,15	20,4
4,5	69,18	21,49
4,879	61,00	21,68
5,0	58,09	21,66
5,5	45,84	21,13
6,0	32,0	19,44
6,5	17,84	17,70
7,0	2,09	14,65
7,5	-14,81	10,62
8,0	-32,90	5,54
8,4	-48,20	0,68
8,45	49,9	0
8,5	-52,15	-0,65

TABLO (4) $\gamma = 0{,}4$ sabit değeri için F ve G'nin ρ ya göre değişimleri:

ρ	G	F
0	125,29	0
0,5	124,63	4,42
1,0	122,63	8,87
1,5	119,29	12,85
2,0	114,65	16,6
2,5	108,63	20,00
3,0	108,35	22,80
3,5	92,63	25,01
4,0	82,73	26,41
4,5	71,29	27,04
4,56	69,98	27,02
5,0	59,08	26,64
5,5	44,63	25,22
6,0	29,53	22,59
6,5	12,63	18,72
6,85	0	14,61
7,0	-5,0	13,42
7,5	-24,70	6,66
7,7	-32,80	3,51
7,9	-41,12	0,1
8,0	-45,12	-1,70

TABLO (5) γ = 0,5 sabit değeri için F ve G'nin ρ ya göre değişimleri:

ρ	G	F
0	135,35	0
0,5	134,66	5,53
1,0	132,57	10,91
1,5	129,10	16,04
2,0	124,27	20,72
2,5	117,95	24,88
3,0	110,42	28,30
3,5	101,32	30,94
4,0	91,0	32,56
4,4	81,57	33,11
4,47	80,0	33,12
4,5	79,10	33,12
4,6	76,57	33,08
5,0	66,1	32,37
5,5	51,32	30,30
6,0	35,63	26,64
6,5	17,99	21,36
6,98	0	14,48
7,0	-0 ,75	14,25
7,5	-20,89	5,20
7,74	-30,59	0

TABLO (6) $\gamma = 0,6$ sabit değeri için F ve G'nin ρ ya göre değişimleri:

ρ	G	F
0	146,47	0
0,5	145,80	6,64
1,0	143,38	13,08
1,5	140,47	19,28
2,0	135,83	24,89
2,5	129,80	30,0
3,0	122,53	34,14
3,5	113,80	37,52
4,0	103,91	39,57
4,5	92,47	40,56
4,56	91,16	40,57
4,6	90,04	40,56
5,0	79,97	39,83
5,5	65,80	37,84
6,0	50,71	33,83
6,5	33,80	28,08
7,0	16,16	19,93
7,4	0,44	12,21
7,41	0	12,0
7,52	-3,52	10,00
7,9	-19,95	0,15

TABLO (7) $\gamma = 0,7$ sabit değeri için F ve G'nin ρ ya göre değişimleri:

ρ	G	F
0	15,8	0
0,1	156,23	15,33
1,5	153,31	22,59
2,0	149,23	29,36
2,5	143,98	35,48
3,0	137,56	40,78
3,5	129,98	45,0
4,0	121,23	48,28
4,5	111,31	50,15
4,8	104,80	50,58
4,9	102,54	50,60
5,0	100,23	50,55
5,1	97,87	50,48
5,5	87,98	49,32
6,0	74,56	46,29
6,5	59,98	41,30
7,0	44,23	34,19
7,5	27,31	24,79
8,0	9,23	12,94
8,2	1,67	7,47
8,3	-2,177	4,58
8,4	-6,073	1,58
8,5	-10,01	-1,52

TABLO (9) ν = 0,8 sabit değeri için F ve G'nin ρ ya göre değişimleri:

ρ	G	F
0	172,00	0
0,1	171,53	1,77
0,5	171,10	8,86
1,0	169,77	17,00
1,5	167,85	26,02
2,0	164,44	34,03
2,5	160,44	41,48
3,0	155,55	48,21
3,5	149,77	54,09
4,0	143,10	58,97
4,5	135,55	62,72
5,0	127,10	65,18
5,5	117,77	66,22
5,6	115,80	66,25
5,7	113,79	66,21
6,0	107,55	65,70
6,5	96,44	63,47
7,0	84,44	59,40
7,5	71,55	53,33
8,0	57,77	45,13
8,5	43,10	34,65
9,0	27,55	21,76
9,5	11,10	6,30
9,6	7,71	2,89
9,7	0,81	-4,25

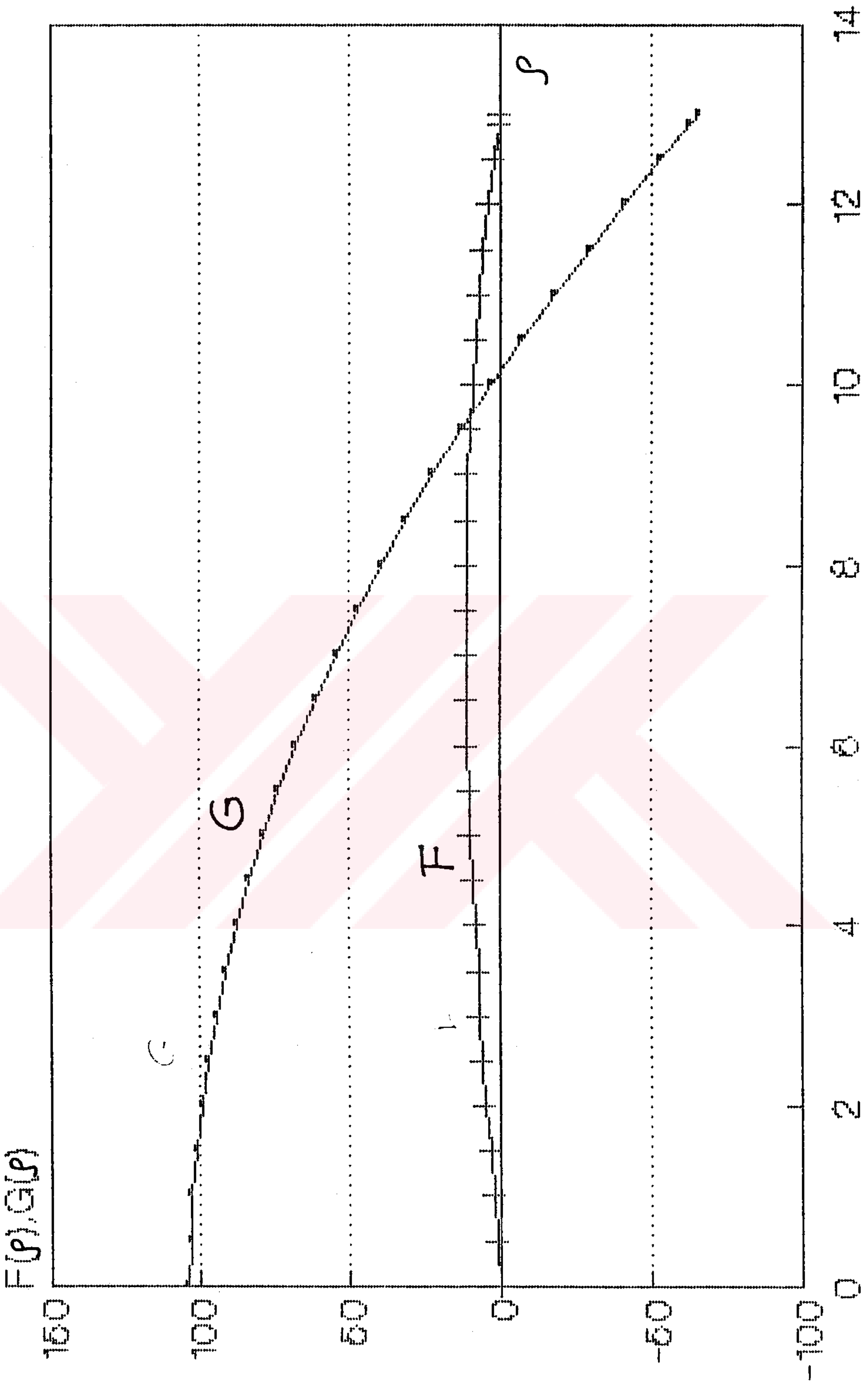
TABLO (10) $r = 0,9$ sabit değeri için F ve G'nin ρ ya göre değişimleri:

ρ	G	F
0	185,38	0
0,5	185,13	9,98
1,0	184,38	19,86
1,5	183,13	29,59
2,0	181,38	39,0
2,5	179,13	48,12
3,0	176,38	56,7
3,5	173,13	64,85
4,0	169,38	72,24
4,5	165,13	79,06
5,0	160,38	84,91
5,5	155,13	90,03
6,0	153,38	93,98
6,5	143,13	97,04
7,0	136,38	98,74
7,3	132,09	99,31
7,45	129,88	100,2
7,5	129,13	99,37
8,0	121,38	98,46
8,5	113,13	96,30
9,0	104,38	92,42
9,5	95,13	87,11
10,0	85,38	79,92
10,5	75,13	71,08
11,0	64,38	60,21
11,5	53,13	47,49
12,0	41.38	18,97
12,5	29,13	15,62
12,9	18,97	0,39
13,0	16,38	-38,36
13,5	3,13	-25,24
13,6	0,42	-29,85
13,7	-2,30	-34,56

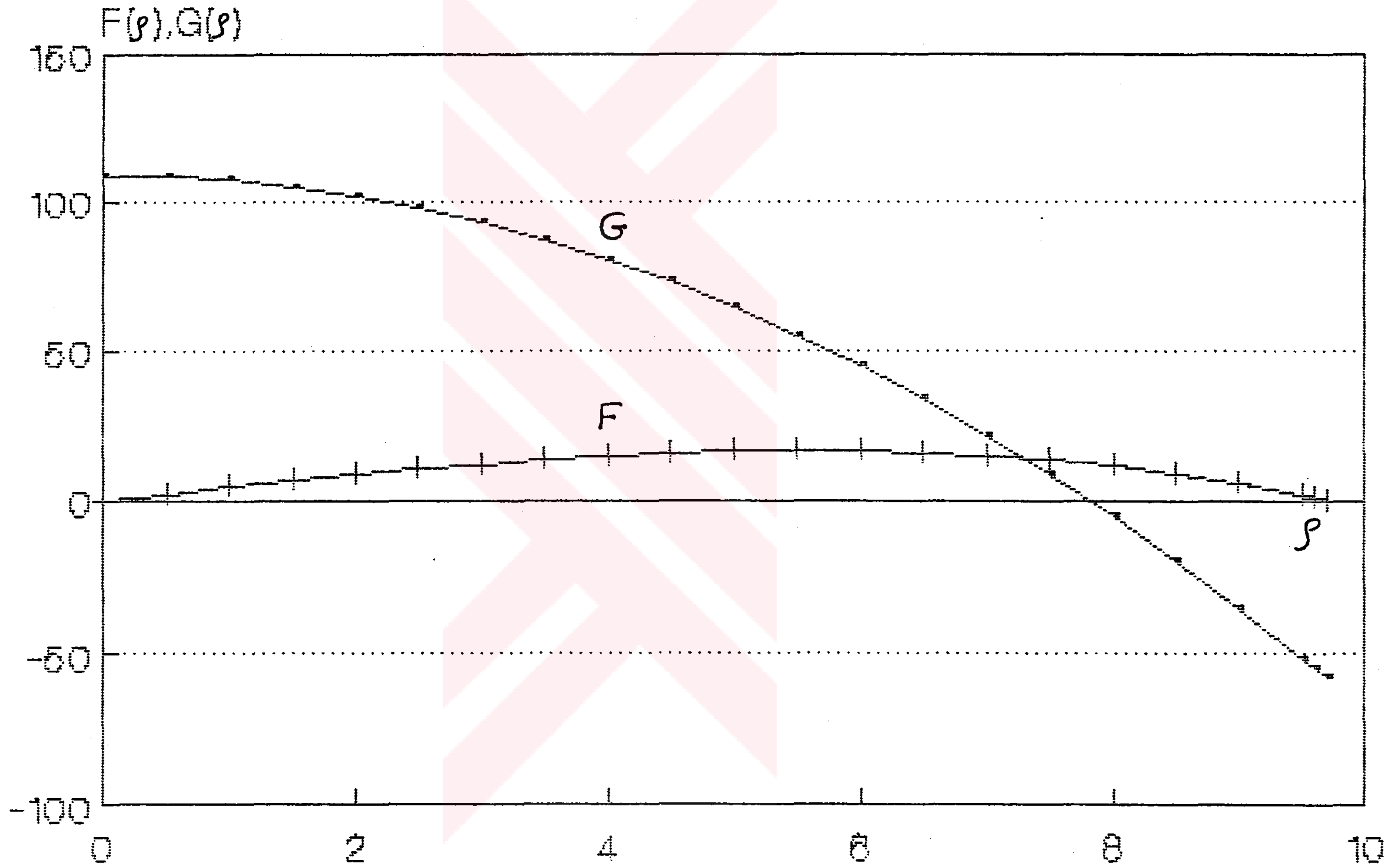
EK-B

GRAFİKLER

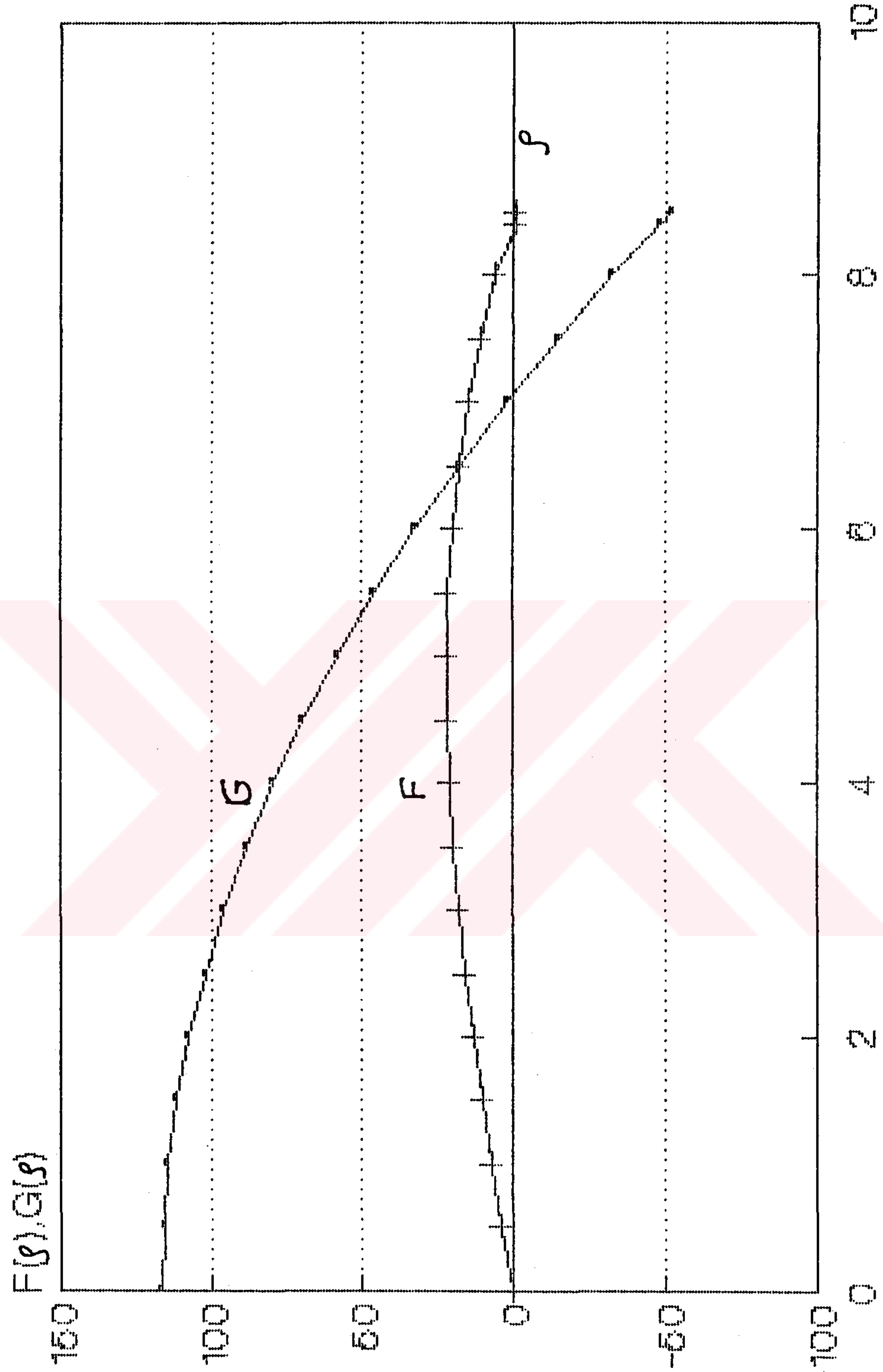
Grafik (III-2) de $\gamma = 0,1$ sabit değeri için F ve G'nin genlikleri minimumdur ve ρ eksenini kestiği noktalar arasındaki açıklık maksimumdur. Grafik (III-3) te $\gamma = 0,2$, Grafik (III-4) te $\gamma = 0,3$, Grafik (III-5) te $\gamma = 0,4$, Grafik (III-6) da $\gamma = 0,5$, Grafik (III-7) de $\gamma = 0,6$ ve Grafik (III-8) de $\gamma = 0,7$ değerleri için genliklerin sürekli olarak arttığı ve ρ eksenini kestikleri noktalar arasındaki açıklığın giderek azaldığı görülmektedir. Grafik (III-1) de $\gamma = 0,75$ değerinde F ve G'nin en ideal biçimde lokalize olduğu yani en uygun soliton çözümü verdiği görülmektedir. Grafik (III-9) da $\gamma = 0,8$ ve Grafik (III-10) da $\gamma = 0,9$ değerlerinde genlikler artmaya devam etmekte ancak F ve G ideal lokalize durumdan ayrıldığı görülmektedir.



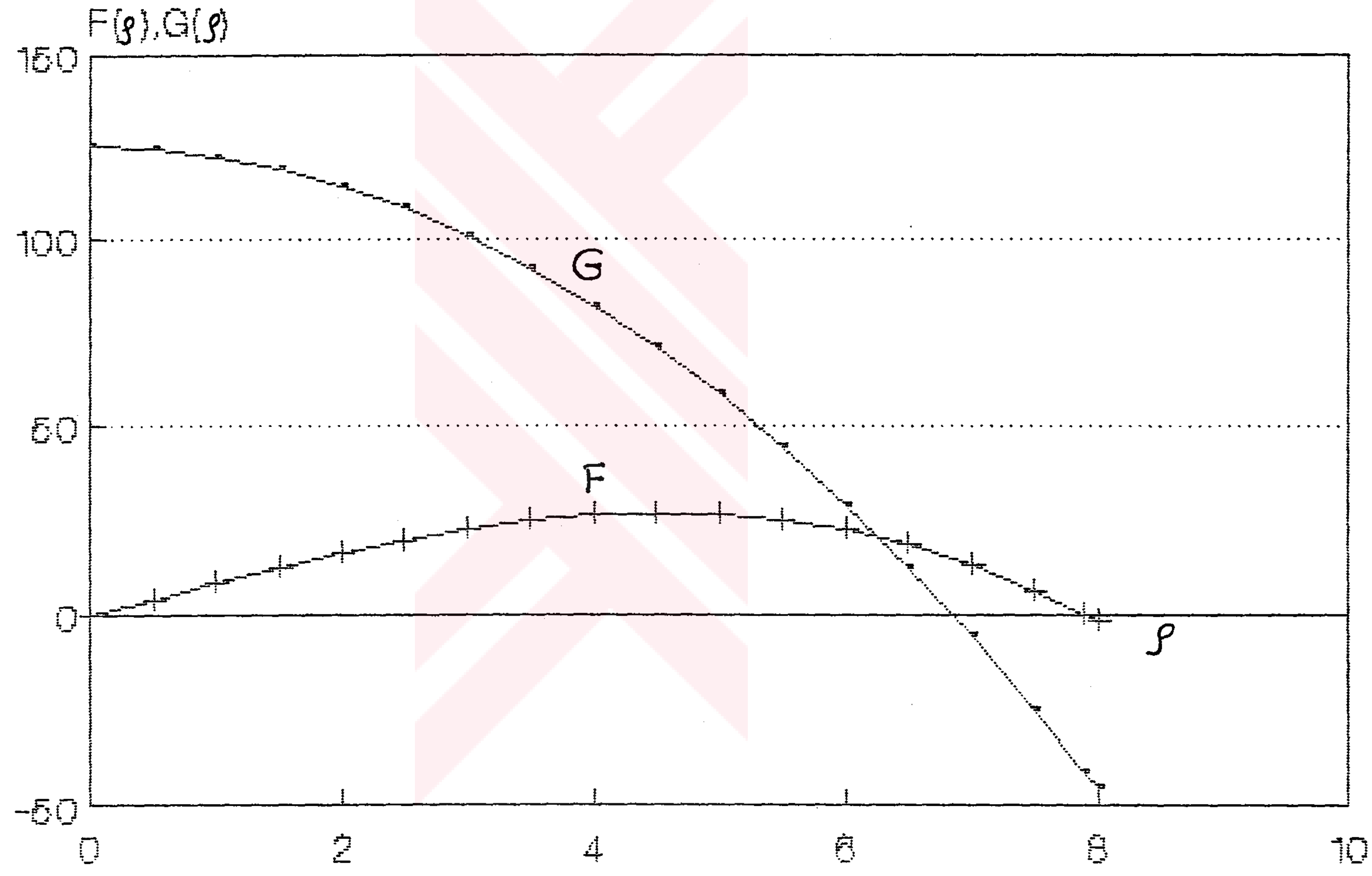
Grafik (III-2) $\gamma = 0,1$



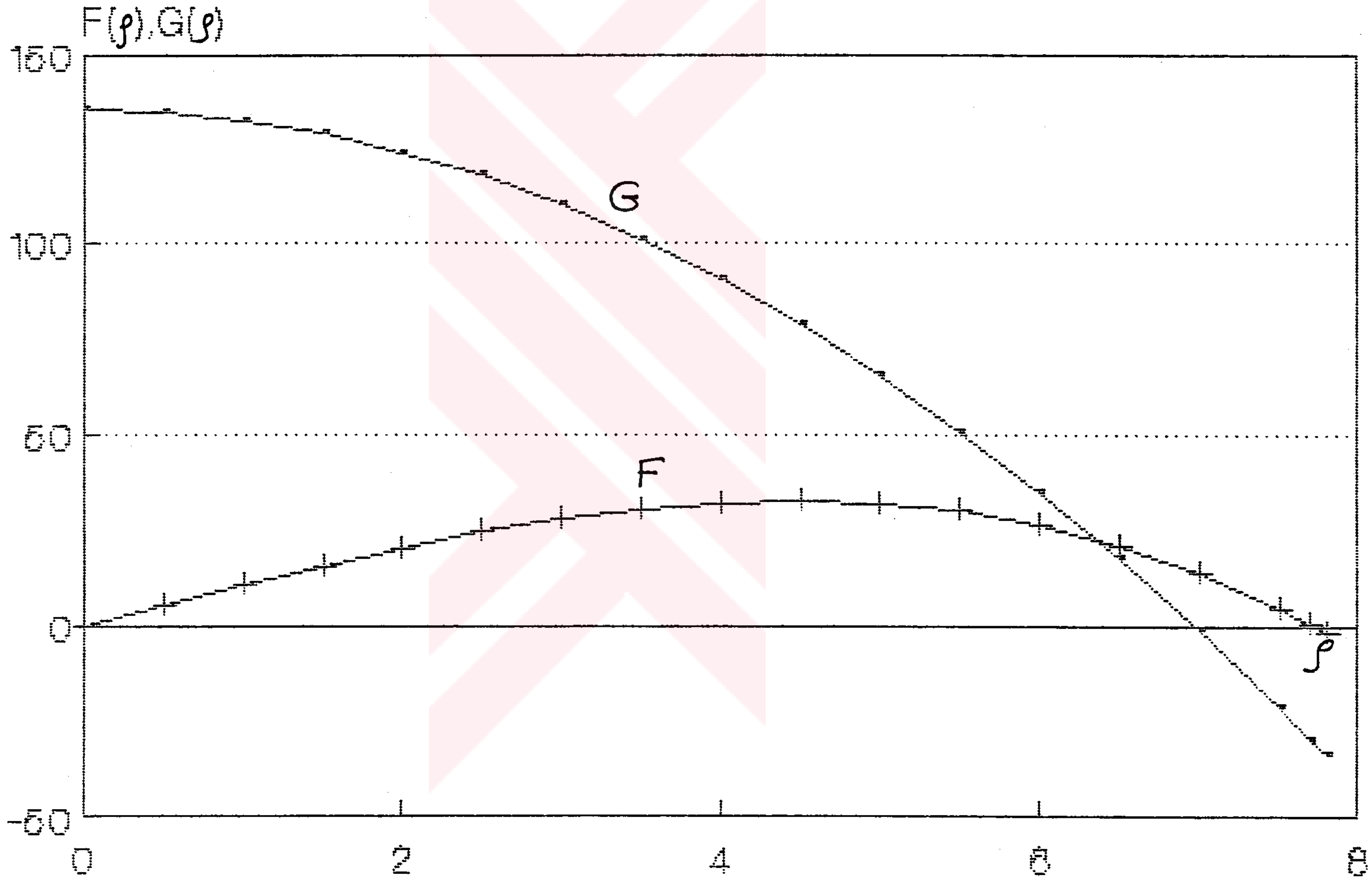
Grafik (III-3) $\gamma = 0,2$



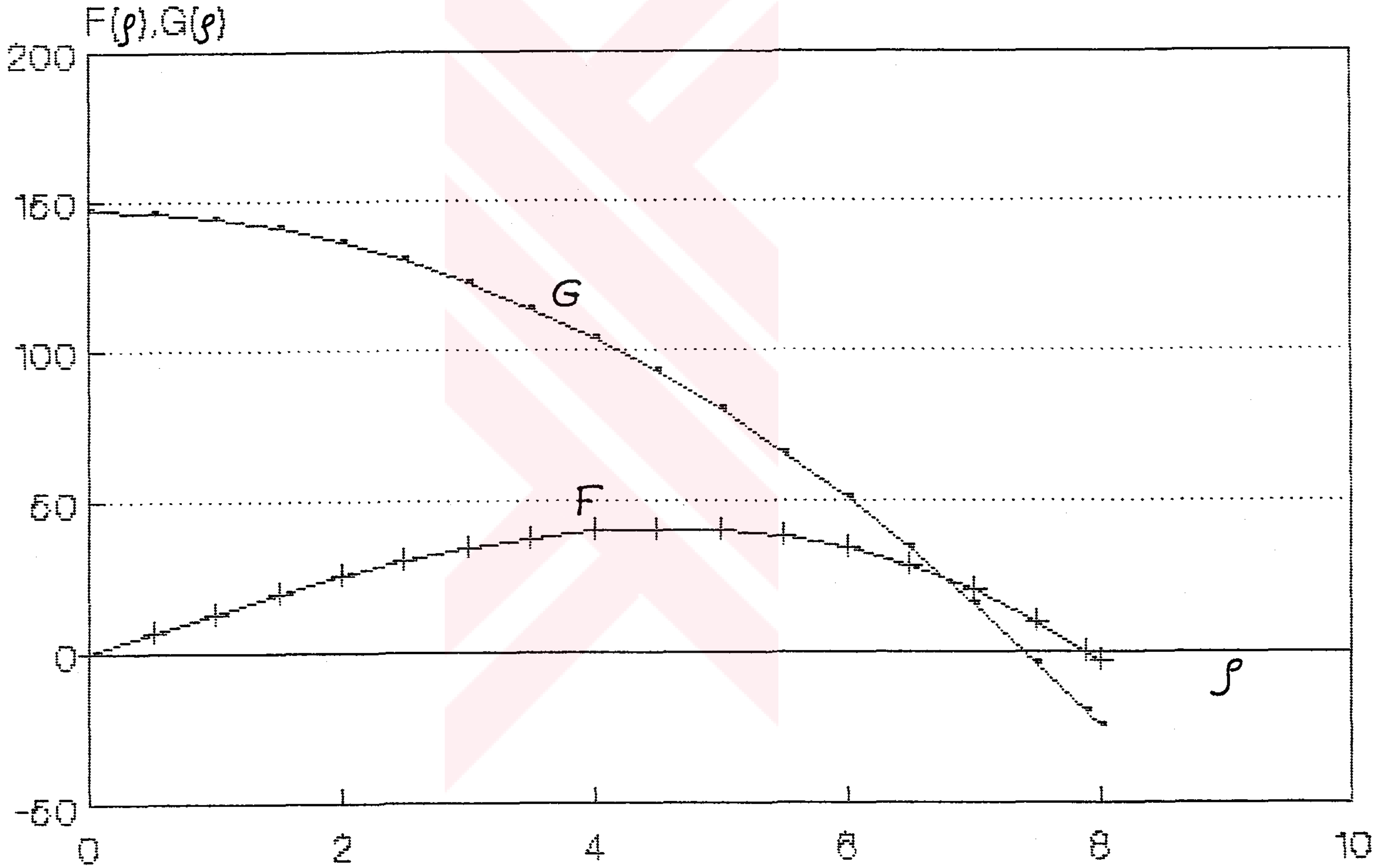
Grafik (III-4) $\gamma = 0,3$



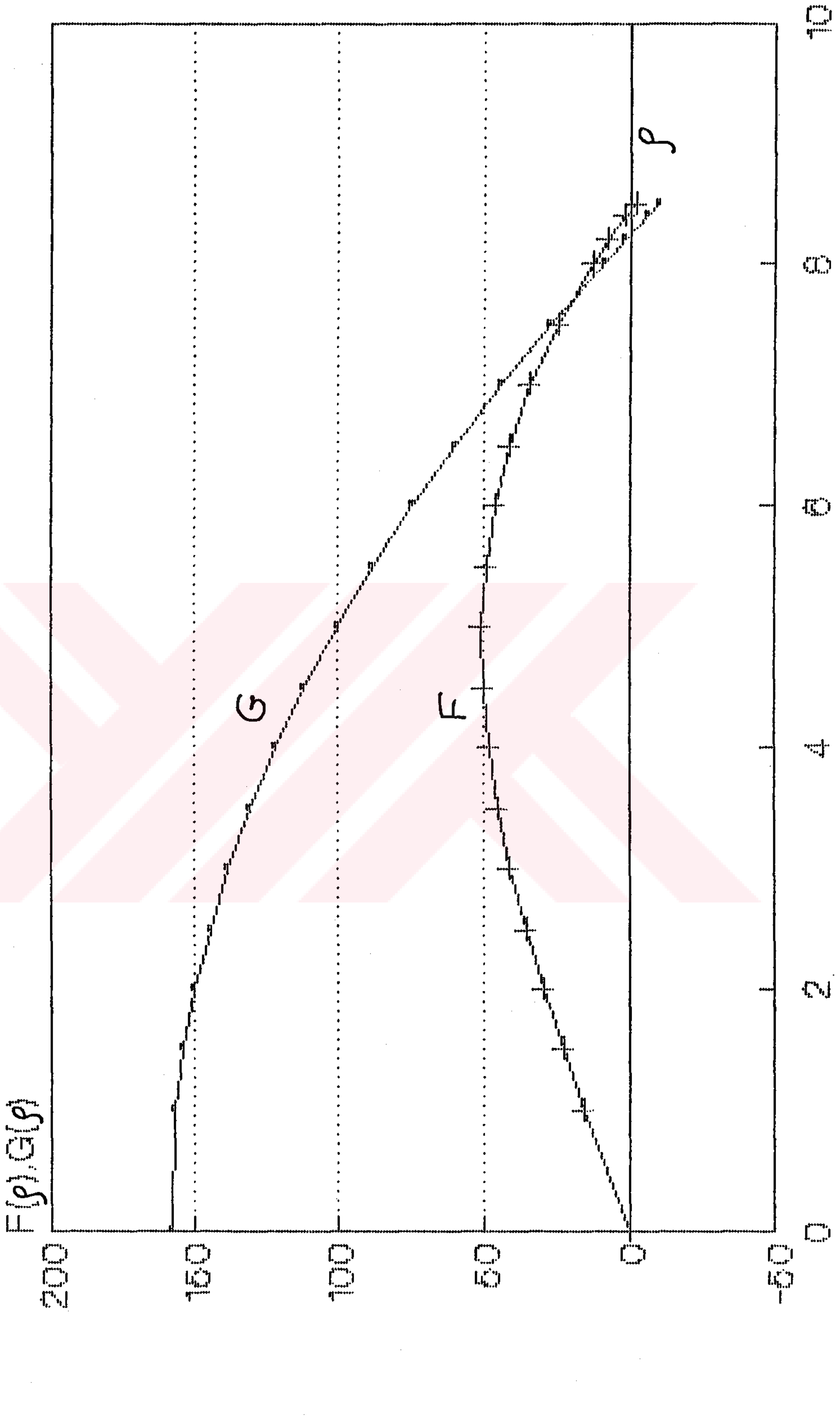
Grafik (III-5) $\gamma = 0,4$



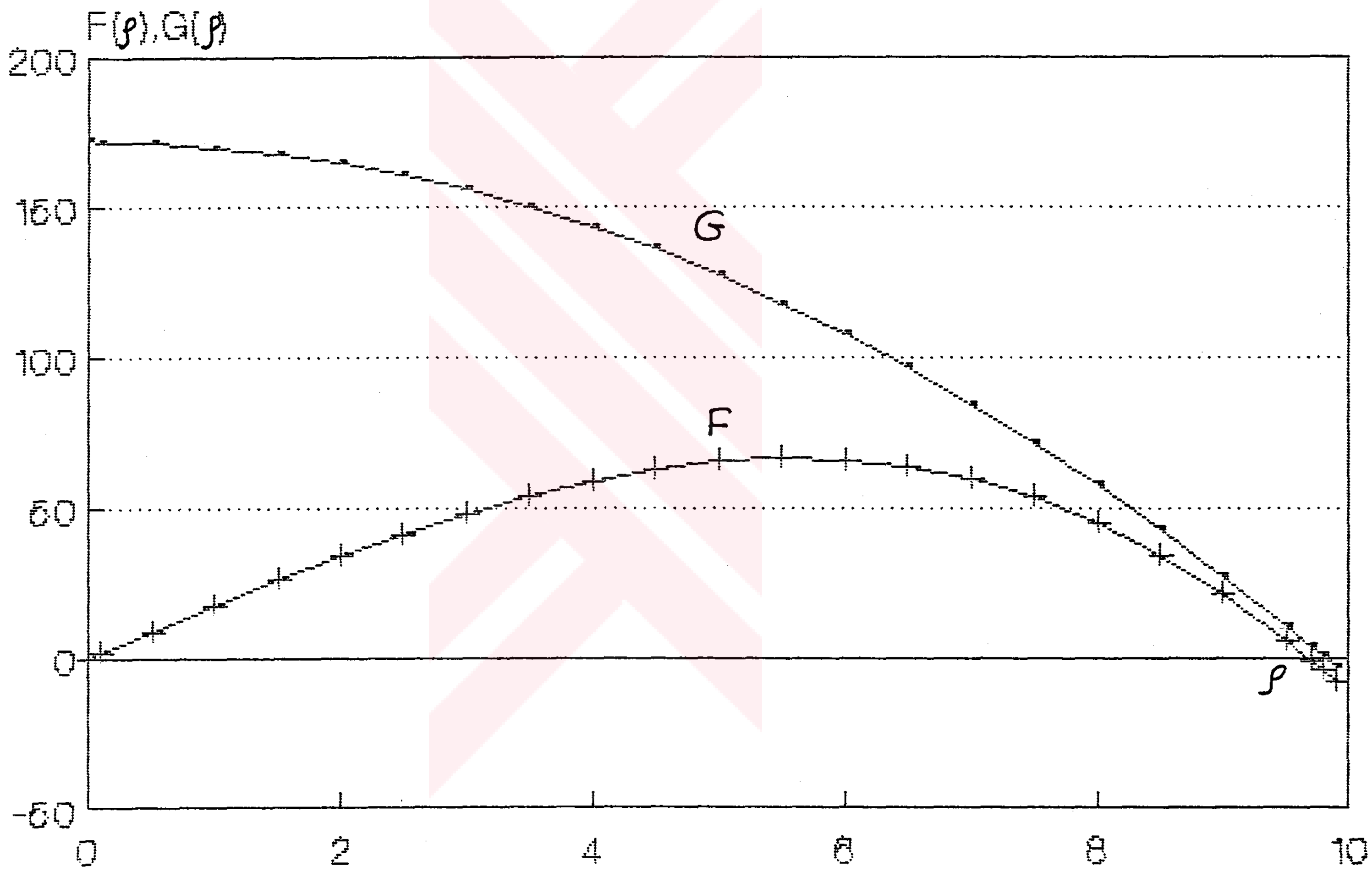
Grafik (III-6) $\gamma = 0,5$



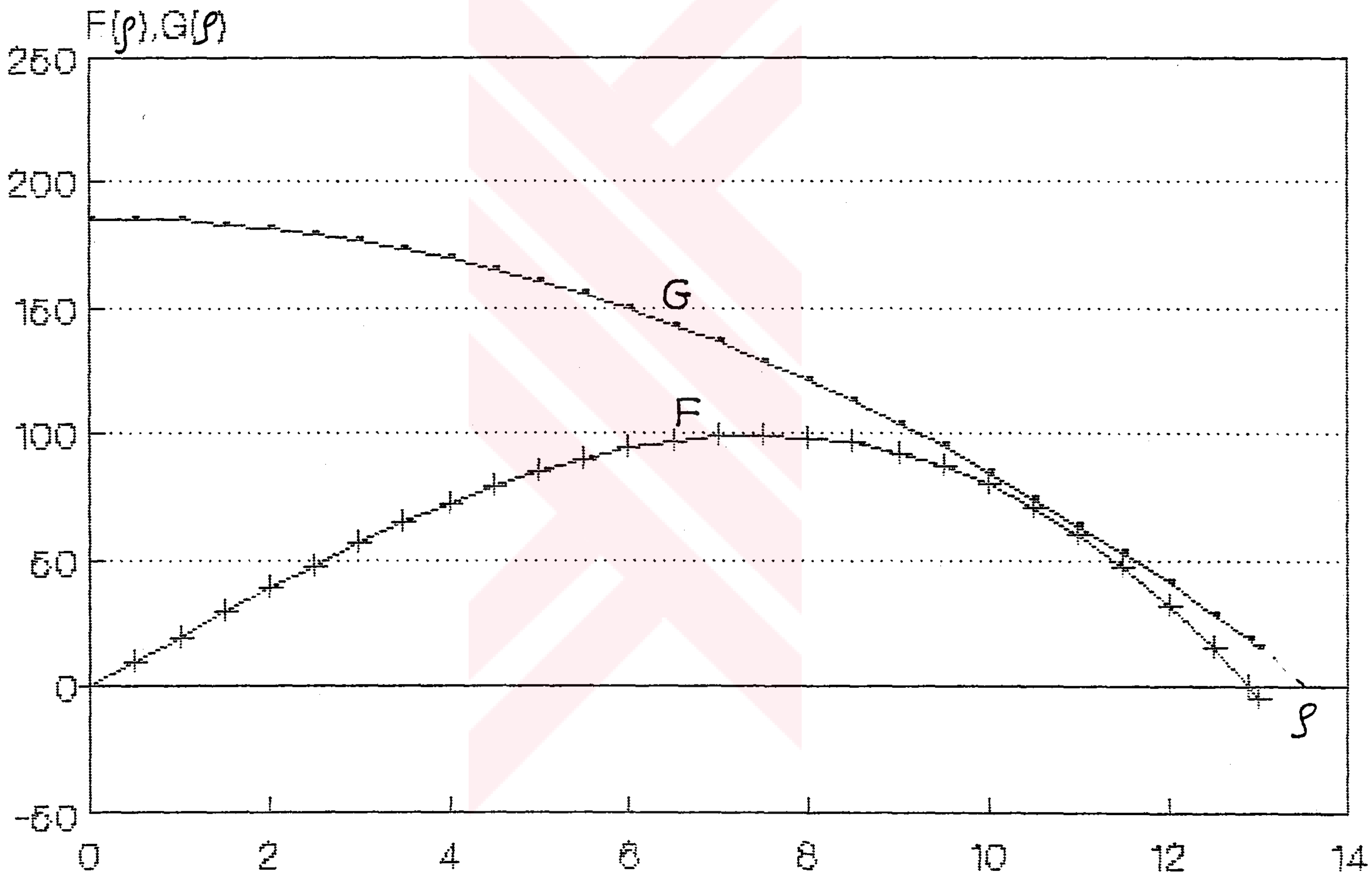
Grafik (III-7) $\gamma = 0,6$



Grafik (III-8) γ= 0,7



Grafik (III-9) $\gamma = 0,8$



Grafik (III-10) $\gamma = 0,9$

45

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY

UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION

INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

STABILITY OF THE STATIC SOLITONS IN A PURE SPINOR THEORY WITH FRACTIONAL POWER NONLINEARITIES

K.G. Akdeniz

A.O. Barut

J. Kalayci

S.E. Okan

and

G. Tezgor

1988 MIRAMARE-TRIESTE

International Atomic Energy Agency
and
United Nations Educational Scientific and Cultural Organization

INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

STABILITY OF THE STATIC SOLITONS IN A PURE SPINOR THEORY WITH FRACTIONAL POWER NONLINEARITIES †

K.G. Akdeniz
Physics Department, University of Trakya, Edirne, Turkey,

A.O. Barut *, J. Kalayci **, S.E. Okan ***
International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy

and

G. Tezgor
Physics Department, University of Trakya, Edirne, Turkey.

ABSTRACT

Soliton solutions are obtained in a pure fermionic model with fractional power nonlinear self-interactions. The stability properties of the minimum solutions have also been investigated within the framework of the Shatah-Strauss formalism.

MIRAMARE - TRIESTE
August 1988

† To be submitted for publication.
This work is partially supported by the Scientific and Technical Research Council of Turkey.

* Permanent address: Physics Department, University of Colorado, Boulder, USA.

** Permanent address: Physics Department, Technical University of Istanbul, Istanbul.

In recent years, it has been found that many nonlinear field models have soliton solutions.(1) In elementary particle physics these solutions can be interpreted as "localized particle states" elementary or composite, that differ from the free "quanta" (plane waves) of the basic fields.(2) Thus the same nonlinear field describes various species of particle states. The characteristic defining property of solitons is their stability. They are stable when two solitons pass each other or under the influence of general perturbations. This is a crucial property if we want to interprete them as models of extended particles. Mathematically, the question of stability is studied in terms of the eigenvalues of the linearized operator. Recently, the stability problem in the case of the ground state of a nonlinear scalar field has been investigated by Shatah - Strauss(3). The stability of the minimum energy of solitary wave of a nonlinear spinoral field has been considered by Soler and Alvarez(4) in the same formalism. In this paper, we study the soliton solutions of a very general class of nonlinear spinor fields with fractional power nonlinearities of several different kinds. We also discuss the stability properties of the minimum energy solutions.

Consider the following pure fermion model described by the Lagrangian

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\partial\!\!\!/ \psi - m\bar{\Psi}\psi + \lambda_1[(\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\psi)(\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\psi)]^{a} + \lambda_2[(\bar{\Psi}\gamma^{5}\psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\psi)]^{b} + \lambda_3|\bar{\Psi}\psi|^{c-1}\bar{\Psi}\psi \qquad (1)$$

The case with λ_1 term alone, i.e. $m=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ has been studied earlier(5) and has instanton and meron-like solutions corresponding to a spontaneous breaking of conformal invariance.(6) The fractional power is related to the conformal invariance.

The equation of motion which follows from the Lagrangian (1) is

$$(i\partial\!\!\!/-m)\psi+2a\lambda_1\frac{(\bar\psi\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu\psi}{[(\bar\psi\gamma^\nu\psi)(\bar\psi\gamma^\nu\psi)]^{1-a}}+2b\lambda_2\frac{(\bar\psi\gamma_5\psi)\gamma^5\psi}{[(\bar\psi\gamma^5\psi)(\bar\psi\gamma_5\psi)]^{1-b}}$$

$$+\lambda_3 c\,|\bar\psi\psi|^{c-1}\psi=0 \qquad (2)$$

This equation suggests to define a vector field $V_\mu=(\bar\psi\gamma_\mu\psi)/[(\bar\psi\gamma^\nu\psi)(\bar\psi\gamma_\nu\psi)]^{1-a}$ and scalar and pseudoscalar fields $\varphi=(\bar\psi\psi)/|\bar\psi\psi|^{1-c}$, $\Phi=(\bar\psi\gamma^5\psi)/[(\bar\psi\gamma^5\psi)(\bar\psi\gamma_5\psi)]^{1-b}$ and with the interaction terms of the form $\bar\psi\gamma^\mu\psi V_\mu$, $\bar\psi\psi\varphi$, $\bar\psi\gamma^5\psi\Phi$ such that eqns. (1) and (2) correspond then to the approximations when the propagators of the meson fields are replaced by δ-function.

We seek a soliton solution of eq.(2).In the rest frame of the soliton we can make the following simple ansatz for ψ :

$$\psi=e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} g(r)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ if(r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ e^{i\phi}\sin\theta\end{pmatrix}\end{pmatrix} \qquad (3)$$

where f(r) and g(r) are assumed to be real radial functions.By a relativistic boost transformation we can then obtain the moving solution.When the ansatz (3) is inserted into eq.(2) we obtain the radial equations (prime means d/dr)

$$(\omega-m)g-f'-\frac{2f}{r}+2a\lambda_1 g\frac{[(g^2-f^2)+2f^2\cos^2\theta]}{[(f^2-g^2)^2+4f^2g^2\cos^2\theta]^{1-a}}$$

$$+2b\lambda_2 g\frac{2f^2\cos^2\theta}{(4g^2f^2\cos^2\theta)^{1-b}}+\lambda_3 c g(g^2-f^2)^{c-1}=0 \qquad (4a)$$

$$-2a\lambda_1\frac{2f^2g\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}}{[(f^2-g^2)^2+4f^2g^2\cos^2\theta]^{1-a}}+2b\lambda_2\frac{2f^2g\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}}{(4f^2g^2\cos^2\theta)^{1-b}}=0 \qquad (4b)$$

$$(\omega+m)f+g'+2a\lambda_1\frac{f(f^2+g^2)}{[(f^2-g^2)^2+4f^2g^2\cos^2\theta]^{1-a}}$$

$$+2b\lambda_2\frac{2fg^2}{(4f^2g^2\cos^2\theta)^{1-b}}-\lambda_3 c f(g^2-f^2)^{c-1}=0 \qquad (4c)$$

$$(\omega+m)f+g'+2a\lambda_1\frac{f(f^2-g^2)}{[(f^2-g^2)^2+4f^2g^2\cos^2\theta]^{1-a}}-\lambda_3 c f(g^2-f^2)^{c-1}=0 \qquad (4d)$$

Here we have used the following representations of the Dirac matrices

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad \gamma^i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}\qquad \gamma^5=-i\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad (5)$$

Eq.(4b) is purely algebraic.It can be easily solved giving

$$[(f^2-g^2)^2+x]^{1-a}=-A\,x^{1-b} \qquad (6)$$

where

$$x=4f^2g^2\cos^2\theta \quad\text{and}\quad A=b\lambda_2/a\lambda_1 \qquad (7)$$

If we insert eq.(6) into eq.(4) we get only two equations for the radial functions g(r) and f(r) (equations (4c) and (4d) to then coincide)

$$g'+(m+\omega)f-2a\lambda_1(g^2-f^2)f[(f^2-g^2)^2+x]^{a-1}-\lambda_3 c(g^2-f^2)^{c-1}f=0 \qquad (8a)$$

$$f'+\frac{2f}{r}+(m-\omega)g-2a\lambda_1(g^2-f^2)g[(f^2-g^2)^2+x]^{a-1}-\lambda_3 c(g^2-f^2)^{c-1}g=0 \qquad (8b)$$

In particular for a=b ;

$$g' + (m+\omega)f - 2a\lambda_1\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{a-1}(g^2-f^2)^{2a-1}f - \lambda_3 c(g^2-f^2)^{c-1}f = 0 \qquad (9a)$$

$$f' + \frac{2f}{r} + (m-\omega)g - 2a\lambda_1\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{a-1}(g^2-f^2)^{2a-1}g - \lambda_3 c(g^2-f^2)^{c-1}g = 0 \qquad (9b)$$

$$\eta = (-\lambda_1/\lambda_2)^{1-a)}$$

After scaling

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \left(\frac{m+\omega}{2a\lambda_1\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{a-1}}\right)^{1/4a-2}\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \qquad (10)$$

we get from (8) the equation for $G(\rho)$ and $F(\rho)$ (prime means $d/d\rho$)

$$G' + F - F(G^2-F^2)^{2a-1} - \mu_3 F(G^2-F^2)^{c-1} = 0 \qquad (11a)$$

$$F' + \frac{2F}{\rho} + \nu G - G(G^2-F^2)^{2a-1} - \mu_3 G(G^2-F^2)^{c-1} = 0 \qquad (11b)$$

with $\nu = (m-\omega)\ /\ (m+\omega)$ (thus $0 < \nu < 1$ for positive $w > 0$) and

$$\mu_3 = \frac{\lambda_3 c}{m+\omega}\left(\frac{m+\omega}{2a\lambda_1\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{a-1}}\right)^{\frac{c-1}{2a-1}}$$

Eqs.(11) have been solved numerically for the special case $\lambda_3=0, a=2/3, c=0$ one finds that for the soliton solution F and G are highly localized functions in r. We expect that the soliton solution of the class (1) has a similar form.

Next, we investigate the stability properties of this soliton solutions shown Fig.(1) under dilational perturbation [9].

The stationary localized solution of (2) has thus the form

$$\psi = e^{-i\omega t}\psi_\omega(r) \qquad (12)$$

where ω is a real parameter and $\psi_\omega(r)$ tends to zero in a suitable sense at $r \to \infty$.

Quite generally, there are three important functionals of the nonlinear field theory, namely, the energy, the action and the charge which are defined, respectively, as

$$E(\psi) = -\frac{i}{2}\int(\bar\psi\gamma^k\partial_k\psi - \partial_k\bar\psi\gamma^k\psi)d\vec{x} - \int V(\bar\psi\psi)d\vec{x}\ ;\ k=1,2,3. \qquad (13a)$$

$$L(\psi,\psi_t) = \frac{i}{2}\int(\psi^+\psi_t - \psi_t^+\psi)d\vec{x} - E(\psi) \qquad (13b)$$

$$Q(\psi) = \int\psi^+\psi\, d\vec{x} \qquad (13c)$$

where in our case

$$V(\bar\psi\psi) = -m(\bar\psi\psi) + \lambda_1[(\bar\psi\gamma^\mu\psi)(\bar\psi\gamma_\mu\psi)]^a + \lambda_2[(\bar\psi\gamma^5\psi)(\bar\psi\gamma_5\psi)]^b + \lambda_3|\bar\psi\psi|^c\ ;\ (m,\lambda>0) \qquad (14)$$

In order to study the stability of solutions it is convenient to define a scaling functional R by

$$R(\psi,\psi_t) = \frac{i}{2}\int(\psi^+\psi_t - \psi_t^+\psi + \bar\psi\gamma^k\partial_k\psi - \partial_k\bar\psi\gamma^k\psi)d\vec{x} + \int\bar\psi\psi V(\bar\psi\psi)d\vec{x} \qquad (15)$$

and to introduce another dilation functional K [9]

$$K(\psi,\psi_t) = L(\psi,\psi_t) - \frac{i}{6}\int(\bar\psi\gamma^k\partial_k\psi - \partial_k\bar\psi\gamma^k\psi)d\vec{x}$$

$$= \frac{i}{2}\int(\psi^+\psi_t - \psi_t^+\psi)d\vec{x} + \frac{i}{3}\int(\bar\psi\gamma^k\partial_k\psi - \partial_k\bar\psi\gamma^k\psi)d\vec{x} + \int V(\bar\psi\psi)d\vec{x} \qquad (16)$$

The motivation for this is that R vanishes if ψ satisfies eq.(2) and K vanishes for stationary solutions (10), so one can see the deviations from stationarity under perturbations. Since the localized stationary state eq.(10) satisfies the time independent equation

$$\omega\gamma^0\psi_\omega + i\gamma^k\partial_k\psi_\omega + V'(\bar\psi_\omega\psi_\omega)\psi_\omega = 0 \qquad (17)$$

we obtain the relation

$$R(\psi_\omega - i\omega\psi_\omega) = K(\psi_\omega - i\omega\psi_\omega) = 0 \tag{18}$$

Following the method of Strauss and Vazquez [9] to study the stability of localized states we also introduce the quantity

$$d(\omega) = E(\psi_\omega) - \omega Q(\psi_\omega) \tag{19}$$

Now in our case the energy functional (13a) is given explicitly by

$$E(\psi) = \int \left\{ \omega(f^2+g^2) + \frac{1}{3}(g^2-f^2)^{4/3} \right\} d\vec{x} \tag{20}$$

with our normalizations $0 < \omega < 1$, $m = 1$ and taking $d\vec{x}$ to be the volume element in the spherical coordinates, we find

$$E(\psi_\omega) \equiv E(\omega) = 4\pi(\omega I_1 + \frac{1}{3} I_2) \tag{21a}$$

$$Q(\psi_\omega) \equiv Q(\omega) = 4\pi I_1 \tag{21b}$$

where

$$I_1 = \int_0^\infty r^2(f^2+g^2)\,dr \quad , \quad I_2 = \int_0^\infty r^2(g^2-f^2)^{4/3} dr \tag{22}$$

The extremum points of the Lagrangian are determined by the function

$$d'(\omega) = \frac{d\psi_\omega}{d\omega}\left[E'(\psi_\omega) - \omega Q'(\psi_\omega)\right] - Q(\psi_\omega) \tag{23}$$

On the other hand, using the Euler-Lagrange equations, one can show that

$$E'(\psi_\omega) - \omega Q'(\psi_\omega) = 0 \tag{24}$$

Combining (23) and (24) we find that

$$d'(\omega) = -Q(\omega) \tag{25}$$

Now we determine the critical frequency ω_c for which E(w) and Q(w) are minimum. This is given numerically by $\omega_c = 0.476$ GeV [8]. It then follows that the minimum energy stationary solution is stable for

$$\omega < \omega_c \longrightarrow Q'(\omega) < 0 \quad , \quad d''(\omega) > 0 \tag{26a}$$

and unstable for

$$\omega > \omega_c \longrightarrow Q'(\omega) > 0 \quad . \quad d''(\omega) < 0 \tag{26b}$$

From the present and the previous test cases [6-10] we arrive at an important conclusion that the qualitative behavior of the form (3) or (12) of the spinor soliton is the same for many different type nonlinearities.

ACKNOWLEDGMENTS

Two of the authors (J.K. and S.E.O.) would like to thank Professor Abdus Salam, the International Atomic Energy Agency and UNESCO for hospitality at the International Centre for Theoretical Physics, Trieste.

REFERENCES

1 - R. RAJARAMAN,"Solitons and Instantons",North-Holland (1982); G.B.WHITHAM,"Linear and Nonlinear Waves",Wiley-Interscience New York, (1974).

2 - R.JACKIW, Rev.Mod.Phys. , 49 ,681 (1977); A.ACTOR, Rev.Mod.Phys. , 51 , 461 (1979).

3 - J.SHATAH and W.STRAUSS , Commun.Math.Phys. , 100 ,173 (1985).

4 - A.ALVAREZ and M.SOLER , Phys.Rev.D , 34 , 644 (1986).

5 - F.GURSEY , Nuo.Cim. , 3 , 988 (1956); F.KORTEL , Nuo.Cim. , 4 , 210 (1956); K.G.AKDENIZ,M.ARIK,M.DURGUT,M.HORTACSU,S.KAPTANOGLU,N.K.PAK , Phys.Lett. 116B , 134 (1982), Phys.Lett. 116B , 41 (1982).

6 - A.O.BARUT and BO-WEI XU , Phys.Lett. 102B, 77 , (1981) and Phys.Rev.D , 23 , 3076 (1981). K.G.AKDENIZ,Lett.Nuo.Cim. , 33 , 40 (1982);

7 - M.SOLER , Phys.Rev.D , 1 ,2766 (1970).

8 - J.KRASKIEWICZ and R.RACZKA , IL Nuo.Cim. , 93A , 28 (1986); For the case $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, see also J.WERLE, Phys. Lett. 71B , 357 and 367 (1977) and IFT / 50 / 87 Warsaw Preprint.

9 - W.A.STRAUSS and L.VAZQUEZ , Phys.Rev.D , 34 , 641 (1986).

10 - A.ALVAREZ and M.SOLER , Phys.Rev.Lett. 50 , 1230 (1983).

KAYNAKLAR

1- R.RAJARAMAN: "Solitons and Instantons", North-Holland (Amsterdam, 1982).

2- G.EILENBERGER: "Solitons", Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1981).

3- R.JACKIW: Rev.Mod.Phys. , 49 , 681 (1977);
A.ACTOR: Rev.Mod.Phys. , 51 , 461 (1979).

4- T.T.WU ve C.N.YANG: İn properties of matter under unusual conditions, edited by H.Mark ve S.Fernback, (Interscience, New York) (1969);
G.'t Hooft; Nucl.Phys. B35 , 276 (1974);
A.M.POLYAKOV; Phys. Lett. B59 , 82 (1975);
A.M.POLYAKOV; Sov. Phys. JETP 41 , 988 (1975).

5- M.SOLER: Phys. Rev. D1 , 2766 (1970).

6- F.GÜRSEY: Nuo.Cim. 3 , 988 (1956);
F.KORTEL; Nuo.Cim. 4 , 729 (1956).

7- W.E.THIRRING: Ann. of Phys. 3 , 91 (1958).

8- W.A.STRAUSS ve L.VAZQUEZ; Phys.Rev.D , 34 , 641 (1986).

9- J.KRASKIEWICZ ve R.RACZKA: IL Nuo.Cim. , 93A , 28 (1986).

10- K.G.AKDENİZ, M.ARIK, M.DURGUT, M.HORTAÇSU, S.KAPTANOĞLU ve N.K.PAK: Phys. Lett. B116 , 41 (1982),
K.G.AKDENİZ, M.ARIK, M.DURGUT, M.HORTAÇSU, S.KAPTANOĞLU ve N.K.PAK: Phys. Lett. B116 , 134 (1982).

11- J.KALAYCI: Doktora Tezi, Boğaziçi Üniversitesi (1984),
M.ARIK, M.HORTAÇSU, J.KALAYCI; Lett. in. Math.Phys
8 , 145 (1984).

12- K.G.AKDENİZ: Lett. Nuo.Cim. 33 , 40 (1982);
A.O.BARUT ve B.W.XU; Phys.Rev. D6 , 137 (1982).

13- K.G.AKDENİZ, A.O.BARUT, J.KALAYCI, Ş.E.OKAN ve G.TEZGÖR:
Internatinal Jou.of.Mod.Phys. A5 , 187 (1990).