

29312



TRAKYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FRIEDMANN MODELLERİ

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ  
FİZİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
YÜKSEK ENERJİ FİZİĞİ ANABİLİM DALI

MUSTAFA ÇALIŞKAN

TEZ YÖNETİCİSİ : PROF.DR.ASKERİ BARAN

EDİRNE - 1992

TRAKYA UNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FRIEDMANN MODELLERİ

MUSTAFA ÇALIŞKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK ENERJİ FİZİĞİ ANABİLİM DALI

TEZ YÖNETİCİSİ : PROF.DR.ASKERİ BARAN

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

EDİRNE - 1992

TRAKYA UNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FRIEDMANN MODELLERİ

MUSTAFA ÇALIŞKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK ENERJİ FİZİĞİ ANABİLİM DALI


Bu Tez .28/.10/1992 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul  
Edilmiştir.

  
Prof. Dr. Askeri. BARAN.

Danışman

  
Prof. Dr. Servet. EKMEKÇİ

Üye

  
Yrd. Doç. Dr. Haşan. AKBAŞ.

Üye

  
Prof. Dr. Cengiz KURTONLU  
Enstitü Müdürü



## İ Ç İ N D E K İ L E R

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	i
SUMMARY .....	ii
ÖNSÖZ .....	iii
GİRİŞ .....	iv
I. BÖLÜM/GENEL RELATİVİTE .....	1
I.1. UZAY, ZAMAN VE GRAVİTASYON .....	1
I.1.1. Gravitasyonun Sürekliliği .....	1
I.1.2. Uzay-Zaman Geometrisi .....	2
I.2. VEKTÖRLER VE TENSÖRLER .....	4
I.2.1. Skalerler .....	5
I.2.2. Kontravariant Vektörler .....	6
I.2.3. Kovariant Vektörler .....	7
I.2.4. Tensörler .....	8
I.2.5. Christoffel Sembolleri .....	10
I.2.6. $R_{iklm}$ Simetrileri .....	13
I.2.7. Ricci ve Einstein Tensörleri .....	15
II. BÖLÜM/FRIEDMANN MODELLERİ .....	16
II.1. KOZMOLOJİ DE EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ .....	16
II.2. ENERJİ TENSÖRLERİ .....	19
II.3. FRIEDMANN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ .....	24
II.3.1. Euclidean Alanlar ( $k=0$ ) .....	25
II.3.2. Kapalı Alanlar ( $k=1$ ) .....	26
II.3.3. Açık Alanlar ( $k=-1$ ) .....	31
II.3.4. Uzay-Zaman Özelliği .....	37

	<u>Sayfa</u>
II.4. PARLAKLIK UZAKLIĞI .....	41
II.4.1. Einstein-de Sitter Modeli .....	42
II.4.2. Kapalı Model .....	44
II.4.3. Açık Model .....	47
II.4.4. Parçacık Ufku .....	48
II.5. AÇISAL BÜYÜKLÜK .....	50
II.6. KAYNAK HESAPLARI .....	55
II.7. EVRENİN BOYUTLARI .....	57
II.8. $\lambda$ -TERİMİ İLE KOZMOLOJİK MODELLER .....	59
KAYNAKLAR .....	64
ÖZGEÇMİŞ .....	65

## Ö Z E T

Bu çalışmada evrenin eğriliğini içeren Robertson-Walker metriği kullanılarak, evrenin geometrisinin düz, kapalı ve açık olduğu araştırılmıştır. Bunun için önce Einstein alan denklemleri hesaplanmış ve Friedmann modelleri için kullanılmıştır.

Böylece Friedmann modelleri için parlaklık uzaklıkları, parçacık ufukları ve açısal büyüklükler hesaplanmıştır.

Daha sonra evrendeki yıldız kümelerinin sayısı, gönderdikleri ışığın şiddeti ile bağlantısı incelenerek evrenin boyutları araştırılmıştır.

Son olarak kozmolojik sabiti içeren kapalı modeller incelenmiş ve bu sabitin önemi tartışılmıştır.

## S U M M A R Y

In this work, by using the Robertson-Walker metric it is shown that the geometry of the universe is flat, closed and open. For that reason the Einstein field equations have been calculated and used for the Friedmann models. The luminosity distance, the particle horizon and angular size for Friedmann models.

We have also examined the number of set of star in the universe, the dimension of the universe and the instensity of the star radiation. Finally, we have discussed the closed models which contain the cosmologic constant.

Ö N S Ö Z

Yüksek Lisans çalışmalarım süresince çok yakın ilgi göstererek, her türlü yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof.Dr.Askeri BARAN'a içten teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa ÇALIŞKAN



## G İ R İ Ő

Gravitasyon hareketi uzay ve zamanın özelliği ile ilgilidir. Einstein uzay ve zamanın bu özelliğini geometri ile göstermiŐtir. Uzay-zaman geometrisinde uzay zamanının özellikleri  $g_{ik}$  fonksiyonlarına bağlıdır. Buna göre Friedmann modellerinde kullanılacak olan Christoffel sembolleri, Riemann tensörü, Ricci tensörü ve Einstein tensörleri de uzay ve zamanın fonksiyonlarıdır. (1)

Böylece evrenin geometrisi Robertson Walker metriği ile temsil edilebilir. Bu metrikte  $k$  uzayın eğrilik parametresinin aldığı değerlere göre Friedmann modelleri elde edilir. (2)

Friedmann modelleri, kozmolojiksel gözlemlerin açıklanmasında kullanıldığı için bir galaksinin parlaklık uzaklığı bu modeller için elde edilmiştir. Burada yavaşlatma parametresi  $\frac{1}{2}$  alındığında Friedmann modellerinde parlaklık uzaklığı için aynı ifade bulunur. (3)

Galaksilerin kızılakayması  $z \rightarrow \infty$  olursa, gözlenebilir en fazla uzaklık, yani parçacık ufku Friedmann modelleri için elde edilmiştir. Yine bu modeller için bir gözlemciye göre bir galaksinin açısal büyüklüğü hesaplanmıştır. Ayrıca kapalı model ( $k=1$ ) için galaksilerin sayısını hesaplamada kullanılacak bağıntı elde edilmiştir, bu bağıntı diğer Friedmann modellerinde uygulanmıŐtır. (4)

Evrenin boyutları Olbers paradoksu adı altında incelenmiŐtir.

Son olarak, kozmolojik  $\lambda$  terimi içeren modeller elde edilmiş ve  $\lambda$  teriminin önemi araştırılmıştır. (5)

## I. BÖLÜM

### GENEL RELATİVİTE

#### I.1. UZAY, ZAMAN VE GRAVİTASYON :

Bir gezegen güneş etrafındaki yörüngesinde dönerken güneşin çekim kuvveti altındadır.

Coulomb kanunundan bildiğimiz gibi birbirinden farklı iki elektrik yükü birbirini çeker.

Newton kanununa göre herbiri farklı herhangi iki kütle gravitasyoneel kuvveti (kütle çekim kuvveti) ile birbirini çeker.

Buna göre bu iki kanun birbirine benzer, yani elektromagnetik ve gravitasyoneel etkileşmeler birbirine benzerdirler.

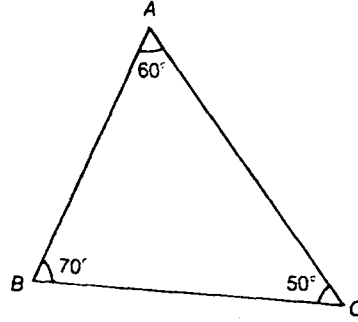
Bununla birlikte yine de ikisi arasında bir fark vardır; çünkü iki farklı elektrik yükü birbirini çekerken, aynı iki elektrik yükü birbirini itmektir. Bu nedenle burada gravitasyonla bir paralellik yoktur. Yani gravitasyoneel geri itmeye henüz bir örnek veremeyiz. Böylece elektriksel etki ile gravitasyoneel etki arasındaki fark kolayca görülür.

##### I.1.1. Gravitasyonun Sürekliliği :

Gravitasyon etkisi istendiği zaman değişmez, herhangi bir yerde varsa süreklidir, değişmez.

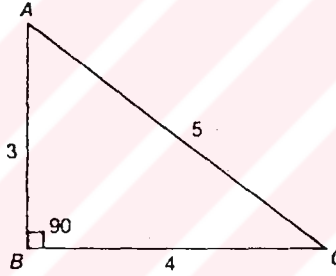
Doğada her zaman var olan gravitasyon hareketinin çözümü, Einstein'ın genel relativite teorisi ile mümkündür. Einstein'ın kanıtlamaya çalıştığı gravitasyonun sürekliliği uzay ve zamanın özelliği ile ilgilidir.

Einstein uzay ve zamanın bu özelliğini geometri ile gösterdi.



$$A + B + C = 180^{\circ}$$

(a)



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

(b)

ŞEKİL (I.1) (a) EUCLIDEAN geometrisine göre düz (iki boyutlu) uzayda bir üçgenin iç açıları toplamı  $180^{\circ}$  dir.

(b) Bir ABC dik üçgeni için pisagor teoremi geçerlidir.

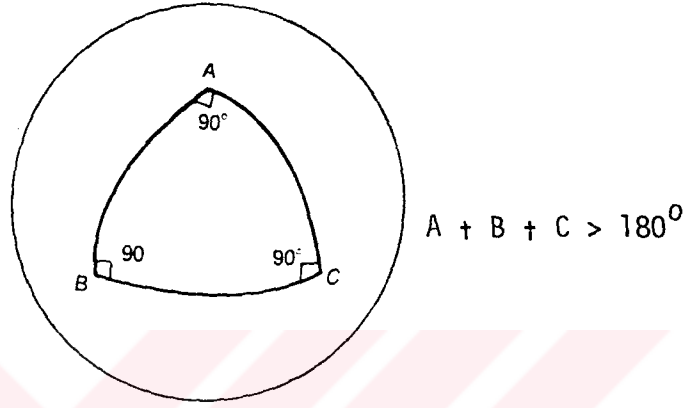
#### I.1.2. Uzay-Zaman Geometrisi :

Hareketsiz bir sistemde  $(x,y,z)$  kartezyen koordinatları,  $t$  düzenli bir zamanı ifade etmek üzere;

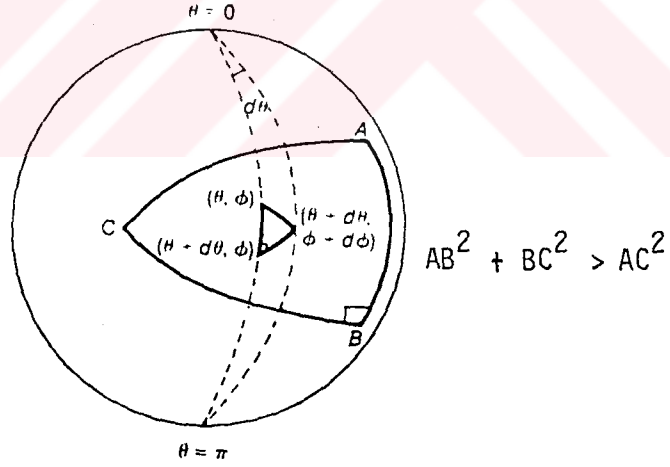
$(x,y,z,t) \longrightarrow (x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$  ve buna göre, bir  $A(x,y,z,t)$  noktası ile  $B(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$  noktası arasındaki uzaklık  $ds$  olmak üzere;

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.1)$$

ile verilir. Bu uzaklık invarianttır, yani başka bir  $(x',y',z',t')$  koordinat sistemine geçildiğinde yine aynı ifade bulunur.



(a)



(b)

ŞEKİL (I.2) (a) Üç boyutlu uzay geometrisinde, şekilde görüldüğü gibi, küre yüzeyinde bir üçgenin iç açıları toplamı  $180^0$  den fazladır.

(b) Bir ABC dik üçgeni için pisagor teoremi geçerli değildir ve iki nokta arasındaki en kısa yol bunları birleştiren doğru değil, bir yaydır.

ŞEKİL (I.1)'den ŞEKİL (I.2)'ye yani kartesyen koordinatlardan genel koordinatlara geçerse, iki nokta arasındaki uzaklık;

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^3 g_{ik} dx^i dx^k \quad (1.2)$$

olur ve bu "uzay-zaman geometrisi" olarak isimlendirilir. Burada  $x^i$  koordinatları;

$i=1,2,3$  uzay ve  $i=0$  zaman koordinatıdır.

$g_{ik}$ 'lar  $x^i$  lerin fonksiyonudur ve seçilen koordinat sistemine göre değişir. Yani uzay-zamanın özellikleri  $g_{ik}$  fonksiyonlarına bağlıdır. Örneğin Minkowski uzayında (düz uzayda)  $g_{ik}$ 'ların matris formu;

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

şeklindedir.

## 1.2. VEKTÖRLER VE TENSÖRLER :

Bir küre yüzeyindeki geometriyi anlamak için,  $a$  yarıçaplı bir küre alalım, bu kürenin denklemi;

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (1.4)$$

dir. Kullanmamız gereken koordinatlar ise;

$$\begin{aligned} x &= a \sin\theta \cos\phi \\ y &= a \sin\theta \sin\phi \\ z &= a \cos\theta \end{aligned} \quad (1.5)$$

şeklinde ifade edilen küresel koordinatlardır.

Burada  $(\theta, \phi)$  açıları,  $0 \leq \theta \leq \pi$  ve  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  dir. Böylece sabit  $a$  yarıçaplı bir küre yüzeyinde  $A(\theta, \phi)$  ile  $B(\theta+d\theta, \phi+d\phi)$  noktaları arasındaki  $d\sigma$  uzaklığı;

$$d\sigma^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.6)$$

denklemleriyle verilir.

$r$  yarıçaplı küre yüzeyinde,  $0 \leq r \leq \infty$  olmak üzere  $A(r, \theta, \phi)$  ve  $B(r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$  noktaları arasındaki  $d\sigma$  uzaklığı;

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \quad (1.7)$$

koordinatları kullanılarak;

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.8)$$

denklemleriyle verilir. Zamanı da göz önünde bulundurarak, bunu genelleştirebiliriz.

Genel koordinatlarda uzaklığı tekrar yazarsak, tekrar eden indisler üzerinden toplam olduğunu da gözönünde tutarak, uzay-zaman geometrisi;

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (1.9)$$

şeklini alır.

#### I.2.1. Skalerler :

Bir skaler veya bir invariant herhangi değişen koordinatlar altında değişmez.

Eğer bir skaler  $\phi(x^i)$  şeklinde  $x^i$  koordinatlarının bir fonksiyonu ise, bu skaler invarianttır ve yeni  $x'^i$  koordinatlarındaki değeri;

$$\phi(x^i) = \phi[x^i(x'^k)] = \phi'(x'^k) \quad (1.10)$$

dır. Bu fonksiyonun formu değişir, fakat değeri değişmez.

### I.2.2. Kontravariant Vektörler :

Uzay-zamanında parametresi  $\lambda$  olan bir eğri verildiğini düşünelim,  $x^i$ ,  $\lambda$ 'nın fonksiyonu olmak üzere bu eğri;

$$x^i \equiv x^i(\lambda) \quad (1.11)$$

olsun. Herhangi bir noktada bu eğrinin teğeti, 4-elemanlı bir vektörle (tanjant vektörü) verilir. Yani  $x$ -koordinat sisteminde bu  $A$  vektörünün 4 bileşeni;

$$A^i \equiv \frac{dx^i}{d\lambda} \quad (1.12)$$

dir. Bu vektör, yeni  $x'$ -koordinat sisteminde, yani  $A'$  vektörünün 4 bileşeni,

$$A'^i \equiv \frac{dx'^i}{d\lambda} \quad (1.13)$$

ile verilir. Bu fonksiyonlarda;

$$x^i = x^i(x'^k) \quad \text{ve} \quad x'^k = x'^k(x^i) \quad (1.14)$$

dönüşümleri vardır. Böylece kontravariant vektörler;

$$A'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A^i \quad (1.15)$$

ile verilir.

Örneğin  $x^0$ =sabit,  $x^1$ =sabit,  $x^2=\lambda$  ve  $x^3=\lambda^2$  ise bu eğrilerin tangent vektörleri (1.12) bağıntısından :

$$A^0 = \frac{dx^0}{d\lambda} \Rightarrow A^0 = 0$$

$A^1=0$ ,  $A^2=1$  ve  $A^3=2\lambda$  olarak,  $x$ -koordinat sisteminde  $A$  vektörünün 4-bileşeni bulunur.

1.2.3. Kovariant Vektörler :

$\phi(x^k)$  skaler bir fonksiyon olmak üzere;

$$\phi(x^k) = \text{sabit} \quad (1.16)$$

şeklinde bir yüzey verilmiş olsun. Bu yüzeyin normali 4-elemanlı bir vektörle verilir. Yani  $x$ -koordinat sisteminde bu  $B$  vektörünün 4 bileşeni (normal yada kovariant bileşenler);

$$B_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (1.17)$$

dir. Bu vektör,  $x'$ -koordinat sisteminde, yani  $B'$  vektörünün 4 bileşeni;

$$B'_i = \frac{\partial \phi}{\partial x'^i} \quad (1.18)$$

ile verilir. Bu dönüşümler lineer dönüşümlerdir ( $B'_i \leftrightarrow B_i$ ). Böylece  $x'$ -koordinat sisteminde  $B'$  vektörü, yani kovariant vektörler;

$$B'_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} B_i \quad (1.19)$$

ile verilir.

Örneğin birim kürede :



$$\phi = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$$

dir ve kovariant elemanlar (normal bileşenler) (1.17) bağıntısından :

$$B_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x^0} \Rightarrow B_0 = 0$$

$B_1=2x^1$ ,  $B_2=2x^2$  ve  $B_3=2x^3$  olarak, x-koordinat sisteminde B vektörünün 4-bileşeni bulunur.

#### 1.2.4. Tensörler :

Vektör kavramı genel olarak bir tensördür. Mertebesi 2 olan "kontravariant" bir tensör;

$$T^{,ik} = \frac{\partial x^{,i}}{\partial x^m} \frac{\partial x^{,k}}{\partial x^n} T^{mn} \quad (1.20)$$

dönüşüm kanunu ile karakterize edilir.

Mertebesi 2 olan "kovariant" bir tensör;

$$T'_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{,i}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{,k}} T_{mn} \quad (1.21)$$

dönüşüm kanunu ile karakterize edilir.

$T^i_k$  bir kovariant, bir de kontravariant indisi olan ikinci mertebeden karışık bir tensördür. Bu tensörün dönüşüm yasası;

$$T^i_k = \frac{\partial x^{,i}}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x^{,k}} T^m_n \quad (1.22)$$

ile verilir. Karışık tensörde;

her kovariant k indisi için  $\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}$  çarpanı ve

her kontravariant i indisi için  $\frac{\partial x'^i}{\partial x^m}$  çarpanı vardır.

Örneğin (1.9) uzay-zaman geometrisindeki  $g_{ik}$  nicelikleri kovariant tensö-  
re dönüşürler.

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik} dx^i dx^k \quad (1.9) \quad [x\text{-koordinat sisteminde}] \\ &= g_{ik} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} dx'^m \right) \left( \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} dx'^n \right) \\ &= \left( g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} \right) dx'^m dx'^n \\ &= g'_{mn} dx'^m dx'^n \quad [x'\text{-koordinat sisteminde}] \end{aligned}$$

Böylece  $g_{ik}$  niceliği kovariant bir  $g'_{mn}$  tensörüne dönüşür.  $x'$ -koordinat sisteminde  $ds^2$  nin bu son ifadesi "uzay-zaman metriği" ve  $g'_{mn}$  tensörü "metrik tensör" olarak isimlendirilir, bu tensör;

$$g'_{mn} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} g_{ik} \quad (1.23)$$

ile verilir. Karışık tensöre bir örnek verirsek;

$$\begin{aligned} i=k \quad \text{ise} \quad \delta^i_k &= 1 \\ i \neq k \quad \text{ise} \quad \delta^i_k &= 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

şeklinde tanımlanan "kroneker deltası" ikinci mertebeden karışık bir ten-  
sördür. Ayrıca ileride kullanacağımız bağıntılar;

$$g = \det g_{ik} \neq 0$$

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l \quad (1.25)$$

ile verilir.

1.2.5. Christoffel Sembolleri :

$\Gamma_{kl}^i$  katsayıları uzay ve zamanın fonksiyonlarıdır ve "Christoffel Sembolleri" olarak isimlendirilir.

Christoffel sembolleri için;

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i \quad (1.26)$$

eşitliğinin geçerli olduğunu göstermek kolaydır. Ayrıca  $\Gamma_{kl}^i$ ,  $g_{ik}$  ve  $g^{ik}$  lar cinsinden;

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \quad (1.27)$$

ile verilir. Minkowski uzayında  $g_{ik}$  ların matris formu,

$$g_{ik} = \text{diagonal } (1, -1, -1, -1)$$

şeklinde olduğundan, Christoffel sembolleri için;

$$\Gamma_{kl}^i = 0 \quad (1.28)$$

eşitliği geçerli olur.

Örnek :

a yarıçaplı bir küre yüzeyinde yol elemanı;

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

metriği ile verilir. Bu kürenin denklemi;

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = a^2$$

şeklindedir. Kullanılacak koordinatlar;

$$x^1 = a \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = a \sin \theta \sin \phi \quad \text{ve} \quad x^3 = a \cos \theta \quad \text{dir.}$$

Bu uzay için  $i, j, k=1, 2$  olarak ( $x^1 = \theta$  ve  $x^2 = \phi$  ile)  $\Gamma_{k\ell}^i$  birinci nevi "Christoffel Sembollerini" hesaplıyalım :

Bu metriğe göre;

$$[g_{k\ell}] = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

olur. Yani,

$$g_{11} = a^2, \quad g_{12} = 0$$

$$g_{21} = 0, \quad g_{22} = a^2 \sin^2 \theta$$

şeklindedir. Ayrıca;

$$g = \det [g_{k\ell}] = a^4 \sin^2 \theta$$

$$[g^{k\ell}] = [g_{k\ell}]^{-1} = \frac{1}{g} [\text{Cof} [g_{k\ell}]]^T$$

bağıntıları kullanılarak;

$$[g^{k\ell}] = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

bulunur.  $i, k, \ell = 1, 2$  buna göre  $2^3 = 8$  tane  $\Gamma_{k\ell}^i$  bulacağız. Böylece (1.27) denklemini kullanarak bu sembolleri  $x^1 = \theta$ ,  $x^2 = \phi$  olduğunu da hatırlıyarak hesaplayabiliriz.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{1m} \left( \frac{\partial g_{m1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{m1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^m} \right)$$

olur. Burada sadece  $m=1$  için  $g^{1m} \neq 0$  olduğundan;

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} = \frac{1}{2a^2} \frac{\partial a^2}{\partial \theta} = 0$$

bulunur. Yani;

$$\Gamma_{11}^1 = 0$$

olur. Benzer şekilde, diğer semboller, (1.26) simetrisi de gözönünde bulundurulurarak hesaplanırsa;

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin\theta \cos\theta$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0$$

olarak bulunur.

Böylece sabit  $a$  yarıçaplı bir küre için, sıfırdan farklı birinci nevi Christoffel sembollerini tekrar yazarsak:

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin\theta \cos\theta \quad \text{ve} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cot\theta \quad (1.29)$$

I.2.6.  $R_{iklm}$  Simetrisi :

$R_{iklm}$  "Riemann tensörü" olarak isimlendirilir. Bu tensör  $g_{ik}$ 'lar cinsinden;

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} (g_{kl,im} + g_{im,kl} - g_{km,il} - g_{il,km}) \quad (1.30)$$

bağıntısı ile verilir. Burada yazım kolaylığı için;

$$g_{kl,im} = \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} \quad (1.31)$$

şeklinde kullanılmıştır. Riemann tensörü  $R_{iklm}$ 'in  $i, k, l, m=0,1,2,3$  olmak üzere  $4^4=256$  tane bileşenini bulabiliriz. Yalnız bunların ancak 20 tanesi cebirsel bağımsızdır. (1.30) bağıntısından bu 256  $R_{iklm}$  yazıldığında, bunların 212 tanesinin sıfır olduğu görülür. Böylece sıfırdan farklı 144 tane  $R_{iklm}$  kalır.  $g_{ik}$ 'ların simetrik olduğunu yani,

$$g_{ik} = g_{ki}$$

ve koordinat sisteminin ortogonal olduğunu gözönünde tutarsak;

$$g_{ik} = \begin{cases} i=k & \text{ise } \neq 0 \\ i \neq k & \text{ise } = 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

olur. Ayrıca;

$$g_{ik,lm} = g_{ik,ml} \quad (1.33)$$

şeklinde türevlerin yerdeğistirebileceğini hatırlarsak, birbirinin aynı olmayan sadece 40 tane  $R_{iklm}$  bulunur. Riemann tensörü  $R_{iklm}$  bir yerdeğistirmeye göre antisimetrik, iki yerdeğistirmeye göre simetriktir. Bu simetri;

$$R_{ijklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} = R_{lmik} \quad (1.34)$$

bağıntıları ile verilir.

Bu (1.34) bağıntıları gözönünde tutulursa, 40 tane  $R_{ijklm}$ 'den 20 tanesi (-), 20 tanesi (+) işaretlidir. Bunların (+) olanları (-) olanların aynıdır, sadece işaretleri farklıdır.

Böylece lineer bağımsız 20  $R_{ijklm}$  :

$$\begin{array}{ll} R_{0110} & R_{0331} \\ R_{0120} & R_{0332} \\ R_{0130} & R_{1221} \\ R_{0112} & R_{1231} \\ R_{0113} & R_{1223} \\ R_{0220} & R_{1331} \\ R_{0320} & R_{1332} \\ R_{0221} & R_{2332} \\ R_{0223} & R_{0330} \\ R_{3003} & R_{3223} \end{array}$$

Ayrıca, yine  $g_{k\ell}$ 'in simetrik olması ve türevlerin yerdeğiştirebilir olmasını hatırlayarak;

$$R_{ijklm} + R_{imk\ell} + R_{i\ell mk} = 0 \quad (1.35)$$

denkleminin varlığını, bu denklem de (1.30)'ü yerlerine yazarak görebiliriz.

I.2.7. Ricci ve Einstein Tensörleri :

$R_{k\ell}$  Ricci tensörü olmak üzere, Riemann tensörü  $R_{ik\ell m}$  ile arasındaki bağıntı;

$$R_{k\ell} = g^{im} R_{ik\ell m} \equiv R^m_{k\ell m} \quad (1.36)$$

ile verilir. Ricci tensörü simetriktir, yani;

$$R_{k\ell} = R_{\ell k} \quad (1.37)$$

dir. Ayrıca Ricci tensörünü kullanarak;

$$R = g^{k\ell} R_{k\ell} \equiv R^k_k \quad (1.38)$$

şeklinde bir skaler elde ederiz. Bu R skaleri "eğrilik skaleri" olarak isimlendirilir. Böylece  $R_{ik}$  Ricci tensörünü ve R eğrilik skalerini kullanarak;

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \quad (1.39)$$

bağıntısını elde ederiz. Burada  $G_{ik}$  tensörü "Einstein tensörü" olarak isimlendirilir.



## II. BÖLÜM

### FRIEDMANN MODELLERİ

#### II.1. KOZMOLOJİ DE EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ :

Evren hakkında bilgi edinebilmek için;  $s(t)$  fonksiyonu ile verilen, genişleme oranını ve evrenin  $t$ =sabit iken uzaysal bölgelerinin,  $k$  parametresi ile belirtileceği gibi açık, düz veya kapalı olabileceğini, dinamik bir teori olan, Einstein'in genel relativite teoresini kullanarak açıklayacağız.

Bir varsayım evrenin büyük ölçekte gözlemlerinde gösterdiği gibi bir biçim ve eşyönel olduğu kabulüdür. Bu varsayım doğrultusunda evrenin geometrisi  $(t, r, \theta, \phi)$  eş hareketli bir koordinat sistemi aracılığı ile

$$ds^2 = c^2 dt^2 - s^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

şeklinde verilen yol elemanı ile temsil edilebilir. Bu metriğe "Robertson-Walker" metriği adı verilir.<sup>(2)</sup> Burada  $s(t)$ 'ye ölçek çarpanı,  $k$ 'ya uzayın eğrilik parametresi denilmektedir.  $k$ 'nın  $+1$ ,  $0$  ve  $-1$  olmasına göre de, evrenin geometrisinin sırasıyla eliptik (kapalı), silindirik (öklitsel veya düz) ve hiperbolik (açık) olduğu düşünülmektedir.

Evrenin içeriğini tanımlamak için, bizim izleyeceğimiz yol; önce  $T_k^i$  enerji tensörünü kullanarak, Einstein tensörünü hesaplamak ve bu suretle Einstein alan denklemlerini yazmaktır.

Kullanacağımız değişkenleri gerektiği şekilde düzenlersek :

$$x^0=ct \quad x^1=r \quad x^2=\theta \quad x^3=\phi \quad (2.2)$$

olur. Böylece  $g_{ik}$  nın sıfırdan farklı bileşenleri :

$$\begin{aligned} g_{00}=1 & & g_{11} &= -\frac{s^2}{1-kr^2} \\ g_{22} &= -s^2 r^2 & g_{33} &= -s^2 r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

ve

$$\sqrt{-g} = \frac{s^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}}$$

olur. (1.27) bağıntısından da  $\Gamma_{kl}^i$  Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı bileşenleri :

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{c} \frac{\dot{s}}{s} \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{s\dot{s}}{c(1-kr^2)} & \Gamma_{22}^0 &= \frac{s\dot{s}r^2}{c} \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{s\dot{s}r^2 \sin^2 \theta}{c} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2) & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2)\sin^2 \theta \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

olur. Burada  $\dot{s}$ ,  $s$  nin  $t$  ye göre türevini göstermektedir.

Şimdi aşağıdaki şekilde yazılabilen Ricci tensörünü hesaplıyalım.

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} + \Gamma_{in}^m \Gamma_{km}^n - \Gamma_{jk}^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l} \quad (2.5)$$

$R_{ik}$ 'nin uzun işlemler sonucu hesaplanan sıfırdan farklı bileşenleri :

$$R_0^0 = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{s}}{s} \quad (2.6)$$

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{\ddot{s}}{s} + \frac{2\dot{s}^2 + 2kc^2}{s^2} \right) \quad (2.7)$$

olur. Bunlardan R eğrilik skalerini hesaplayabiliriz;

$$R = \frac{6}{c^2} \left( \frac{\ddot{s}}{s} + \frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} \right) \quad (2.8)$$

bulunur. Böylece Einstein tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri :

$$G_1^1 = R_1^1 - \frac{1}{2} R = -\frac{1}{c^2} \left( 2\frac{\ddot{s}}{s} + \frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} \right) = G_2^2 = G_3^3 \quad (2.9)$$

$$G_0^0 = R_0^0 - \frac{1}{2} R = -\frac{3}{c^2} \left( \frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} \right) \quad (2.10)$$

olur. Biz burada I. bölümdeki genel relativite tekniklerinin kozmoloji probleminde nasıl uygulanabileceğini gördük.

$s=s_0$ =sabit ve  $k=+1$  alarak daha önce Einstein evreni için elde edilen

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R \equiv -\frac{3}{s^2}$$

ve

$$R_1^1 - \frac{1}{2} R = R_2^2 - \frac{1}{2} R = R_3^3 - \frac{1}{2} R \equiv -\frac{1}{s^2}$$

formüllerini verdiği kontrol edilebilir.

Şimdi tekrar Einstein alan denklemlerine dönerek (2.9) ve (2.10) bağıntılarından alan denklemleri kümesinin sadece önemli olanlarını yazalım :

$$2\frac{\dot{s}}{s} + \frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} = \frac{8\pi G}{c^2} T_1^1 = \frac{8\pi G}{c^2} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^2} T_3^3 \quad (2.11)$$

$$\frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} T_0^0 \quad (2.12)$$

olur. Böylece daha sonra, Friedmann denklemlerinin çözümünde kullanacağız, "Einstein alan denklemlerini" elde etmiş oluyoruz.<sup>(1)</sup>

## II.2. ENERJİ TENSÖRLERİ :

Einstein alan denklemlerindeki  $T_k^i$  enerji tensörlerinin alacağı değerler, (2.11) için:

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P \quad (2.13)$$

olur. İkinci bağıntıdaki enerji tensörü, P basıncı yerine  $\epsilon$  enerji yoğunluğu olur. Böylece (2.12) için :

$$T_0^0 = \epsilon \quad (2.14)$$

yazmak uygundur. Bunlarla birlikte alan denklemlerinin zamana bağlılığını bildiğimizden;

$$\frac{d}{dt} \left[ s(\dot{s}^2 + kc^2) \right] = \dot{s} \left[ 2s\dot{s} + \dot{s}^2 + kc^2 \right]$$

olduğunu gözönünde bulundurarak, alan denklemleri için;

$$\frac{d}{ds} (\epsilon s^3) + 3Ps^2 = 0 \quad (2.15)$$

elde ederiz. Bu sonuç Einstein alan denklemlerinin korunumunun bir sonucudur:

$$T_{k;i}^i = 0 \quad (2.16)$$

Şimdiki gözlemler galaksilerin evrenin başlıca temsilcileri olduğunu göstermektedir. Bir galaksinin hız vektörü;

$$u^i = (1,0,0,0) \quad (2.17)$$

şeklindedir. Böylece düz, akışkan ve basınçsız bir hareket tanımlanabilir;

$$P = 0 \quad \epsilon = \rho c^2 \quad (2.18)$$

olur. Bu durumda bir toz bulutu gibi davranan galaksiler sistemine sahip oluruz. Burada  $\rho$  galaksilerin kütle yoğunluğudur.

Gerçekte galaksiler bir toz bulutu gibi davranmazlar ve hız vektörleride (2.17) den farklıdır. Bu hızlar galaksiler için ölçülebilir özelliğe sahiptir ve bu hızlar  $\leq 1000$  km/sn mertebesindedir. Eğer hızı  $v \approx 1000$  km/sn alırsak, (2.18) deki P'nin sıfırdan farklı bir değerini;

$$P \approx \frac{v^2}{c^2} \epsilon \sim 10^{-5} \epsilon \quad (2.19)$$

elde ederiz. Basınç teriminin önemini anlamak için galaksilerin hareketlerinin evreni genişletmedeki önemini araştırmamız gerekir. Bir galaksinin 4'lü hız vektörünü;

$$u^i \equiv \left[ 1, u^\mu \right] , \quad |u^\mu| \ll 1$$

şeklinde tanımlayabiliriz.  $\ll$  işareti,  $u^\mu$  1 ile karşılaştırıldığında,

karelerinin önemsenmediğini gösterir. Bu bakımdan  $u_i u^i = 1$  dir. Böylece geodezik denklemi :

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{k\ell}^i u^k u^\ell = 0$$

olur.  $\Gamma_{k\ell}^i$  temsili (2.1) Robertson-Walker yol elemanı için

$$u^\mu u_\mu = \text{sabit}$$

sonucunu verir. Böylece  $(r, \theta, \phi)$  koordinatlarında  $u^\mu$  hızı ölçülebilir. Galaksi hareketleri; şimdi  $p \ll \epsilon$  yaklaşımıyla devam etmektedir, geçmişte  $V$  hızının büyük olmasından,  $s \approx 10^{-2} s_0$  u kullanırsak ( $s_0$ ,  $s$  nin şimdiki değeridir.) (2.19) bağıntısı;  $P \sim 10^{-1} \epsilon$  'u verecektir. Açıkçası  $P$ -terimi geçmiş ve şimdiki zamanda uzun bir süre ihmal edilmeyecektir. Böylece kozmolojinin  $P=0$  basitleştirilmiş görünümü terkedilmek zorunda kalır ve galaksilerin nasıl oluştuğu sorusu ilginç olur.

Galaksilerin Oluşumu :

Başlangıçta sadece quarklar vardı. Başka hiçbir şey yoktu; ne zaman vardı, ne boşluk vardı, ne de klasik kimya ve fizik ile açıklanabilecek herhangi bir doğa yasası. Her şey büyük patlama ile başladı. İlk aşamada, hidrojen gazı, evrenin oluşu ve genişlemesiyle birlikte her tarafı doldurdu. Hatta evrenin sınırları hidrojen moleküllerinin varlığıyla çizilmiştir denilirse, bu hiçde yanlış olmayan bir açıklama olur. Seyrelme, yaklaşık bundan 10-15 milyar yıl önce belirli bir miktara ulaştınca, hidrojen gazlarından bir çeşit öbekler oluşarak, her öbek kendi içersinde bir merkezde yoğunlaşmaya başladı ve galaksileri oluşturdu. Böylece evren milyarlarca öbeğe, yani bilimsel bir dille galaksilere ayrıldı. Fakat öbekteleşen bu gaz bulutları yine homojen bir dağılım göstermediği için, her birinin içinde de yine milyarca küçük küçük yoğunlaşma merkezleri oluşarak

yıldızları yaptı.

Fakat akıllamaz bir hacmi kaplayan bu dev gaz bulutunun küre şeklinde merkeze doğru yığılması, açısal momentumun korunması bakımından, merkezde bir eksen etrafında dönmesinde kaçınılmaz hale getirdi. Böylece bir taraftan galaksiler arasında hemen hemen hidrojenden arınmış akıllamaz boşluklar oluşurken, bir taraftanda oluşan küre şeklindeki dev kütle kendi etrafında dönmeye başladı. İlk aşamada, oluşan bu galaksiler küre şeklinde olmasına karşın, kendi eksenleri etrafında gittikçe hızlanan dönmeleri sırasında merkezkaç kuvvetinin artması nedeniyle, dönme eksenine dik düzlemde yayvanlaşmaya ve disk şeklini almaya başladı. Milyarlarca yıl sonra, küre şeklindeki bu dev gaz-yıldız bulutu, yassılaşarak, çapı 100 milyar ışık yılından daha fazla olan bir disk şekline dönüştü.

$v$  nin çok küçük değerlerinde  $v \ll c$  olur ve relativistik olmayan yaklaşımla karşılaşıyoruz.

Relativistik alanda, relativistik parçacıklar için,  $\epsilon$  enerji yoğunluğu olmak üzere, enerji tensörü için;

$$T_{ik} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\epsilon \end{bmatrix}$$

bağıntısını kullanarak,

$$P = \frac{1}{3} \epsilon \quad (2.20)$$

bağıntısını elde ederiz.

Eğer (2.18) geçerli ise (2.15) bağıntısından

$$\frac{d}{ds} (\rho s^3) = 0 \quad (2.21)$$

alan denklemini elde ederiz, burada  $\rho$  yoğunluğu;

$$\rho = \rho_0 \frac{s_0^3}{s^3} \quad (2.22)$$

şeklindedir.  $\rho_0$  ve  $s_0$ ,  $\rho$  ve  $s$  nin şimdiki değeridir. (2.20) bağıntısını (2.15) denkleminde yerine yazarsak;

$$\frac{d}{ds} (\epsilon s^4) = 0 \quad (2.23)$$

bağıntısını elde ederiz. Burada enerji yoğunluğu;

$$\epsilon \propto s^{-4} \quad (2.24)$$

şeklindedir.

Evrende madde yayılımından başka, bir de elektromagnetik bir yayılma (radyasyon) tespit edilebilir, buna göre  $T_k^i$  enerji tensörü;

$$T_k^i = T_{k/madde}^i + T_{k/radyasyon}^i \quad (2.25)$$

olur. Burada radyasyon enerji tensörü ( $\mu=1,2,3$  için);

$$-T_{\mu/radyasyon}^{\mu} = \frac{1}{3} T_{o/radyasyon}^o = \frac{1}{3} u \quad (2.26)$$

şeklindedir.  $u$  enerji yoğunluğu ise;

$$u = u_0 \frac{s_0^4}{s^4} \quad (2.27)$$

ile verilir. Enerji yoğunluğunun şimdiki değeri,

$$u_0 \approx 10^{-13} \text{ erg/cm}^3 \quad \text{ve} \quad \rho_0 c^2 \approx 10^{-10} \text{ erg/cm}^3 \quad \text{dür.}$$



Böylece  $u_0 \ll \rho_0 c^2$  olması radyasyonun şimdiki döneme ve  $s > s_0$  için gelecek dönemde (2.11) ve (2.12) alan denklemlerine olan etkilerini ihmal edebiliriz.

Geçmiş dönemler  $s < s_0$  için (2.22) ve (2.27) denklemlerinden;

$$\frac{u}{\rho c^2} = \frac{u_0}{\rho_0 c^2} \frac{s_0}{s} \quad (2.28)$$

bağıntısını elde ederiz. Böylece radyasyonun etkisini ihmal ettiğimizde

$$\frac{s_0}{s} \sim 10^3$$

olur. Buna göre  $s \sim 10^{-3} s_0$ 'da radyasyonun hakim olduğu bir evrenden, maddenin hakim olduğu bir evrene geçildiği söylenebilir. Böylece (2.11) ve (2.12) alan denklemleri;

$$T_1^1 = 0 \quad \text{ve} \quad T_0^0 = \rho_0 c^2 \frac{s_0^3}{s^3} \quad (2.29)$$

bağıntılarıyla birlikte çözülebilir.

Bu yaklaşım bizi klasik modellere götürür, bu modeller elektromagnetik radyasyonun enerji tensörü  $T_k^i$ 'ya olan etkilerini ihmal ederler ve evrendeki maddenin toz bulutu gibi davrandığını düşünürler.

### II.3. FRIEDMANN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ :

Friedmann modelleri için; (2.11) ve (2.12) Einstein alan denklemlerinde (2.29) bağıntısındaki enerji tensörleri yerlerine yazılırsa;

$$2 \frac{\ddot{s}}{s} + \frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} = 0 \quad (2.30)$$

ve

$$\frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \frac{s_0^3}{s^3} \quad (2.31)$$

Friedmann denklemleri elde edilir. <sup>(3)</sup>Çözüm için (2.31) denklemi seçilerek  $k=0,1,-1$  için ayrı ayrı çözümler elde edilecektir.

### II.3.1. Euclidean Alanlar ( $k=0$ ) :

Bu en kolay durumdur ve Einstein ile de Sitter'in 1932'de birlikte çalışmalarının sonucu olan bu modele "Einstein-de Sitter" modeli denmiştir. (2.31) denkleminde  $k=0$  yazılırsa;

$$\dot{s}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \frac{s_0^3}{s} \quad (2.32)$$

elde edilir. Hubble sabitinin;

$$H_0 = \left(\frac{\dot{s}}{s}\right)_{t=t_0} \quad (2.33)$$

olduğu hatırlanırsa, (2.32) denkleminde  $\rho_0$  yoğunluğu;

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \equiv \rho_c \quad (2.34)$$

olarak bulunur. Burada  $\rho_c$ 'ye "kapalılık yoğunluğu" adı verilir ve değeri;

$$\rho_c \approx 2 \times 10^{-29} h_0^2 \text{ gr/cm}^3 \quad (2.35)$$

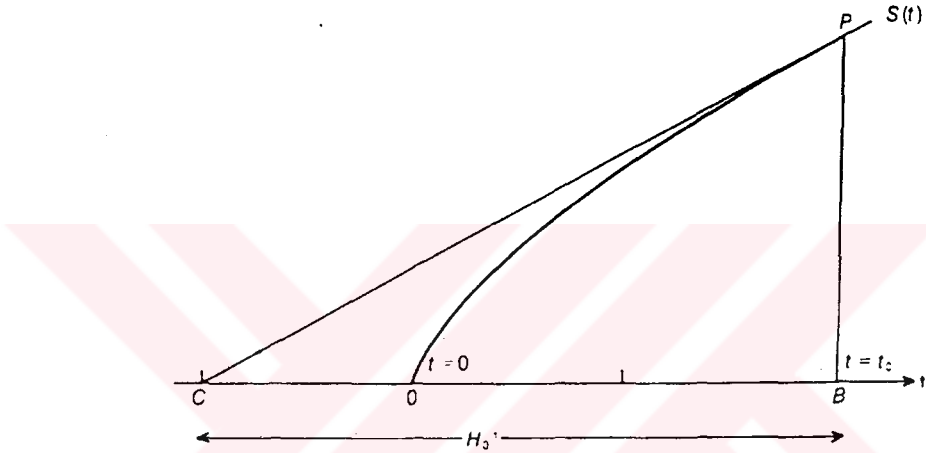
dir. Burada  $h_0$ 'ın değeri;  $0.5 \lesssim h_0 \lesssim 1$  dir. (2.32) denkleminde dönersek, bu denklemin çözümü;

$$s = s_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad (2.36)$$

olur. Burada;

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (2.37)$$

dır. Şekil (II.1) bu çözümü anlatır.



ŞEKİL (II.1)

Einstein-de Sitter modeli için  $s(t)$  ile  $t$ 'nin grafiği.  $S$ 'nin şimdiki dönemdeki değeri olan  $s_0$ ,  $s_0 = PB$  ve Hubble sabiti  $H_0$ ,  $H_0^{-1} = BC$  dir.  $OB$  ile gösterilen evrenin yaşı  $BC$ 'nin üçte ikisidir.

### II.3.2. Kapalı Alanlar ( $k=1$ ) :

(2.30) ve (2.31) Friedmann denklemlerinde  $k=1$  yazılırsa;

$$2 \frac{\ddot{s}}{s} + \frac{\dot{s}^2 + c^2}{s^2} = 0 \quad (2.38)$$

ve

$$\frac{\dot{s}^2 + c^2}{s^2} - \frac{8\pi G \rho_0 s_0^3}{3s^3} = 0 \quad (2.39)$$

bağıntıları elde edilir.

$H(t)$  ve  $q(t)$  niceliklerini;

$$\frac{\ddot{s}}{s} = -q(t) [H(t)]^2 \quad \text{ve} \quad H(t) = \frac{\dot{s}}{s} \quad (2.40)$$

bağıntıları ile ifade edilirse, şimdiki değerlerini de  $H_0$  ve  $q_0$  ile gösterebiliriz. Burada  $H_0$ , "Hubble sabiti" ve  $q_0$ , "yavaşlatma parametresi" olarak adlandırılır.

Buna göre (2.38) ve (2.39) denklemleri şimdiki döneme uygulandığında ( $s=s_0$ ,  $q=q_0$  ve  $H=H_0$ );

$$\frac{c^2}{s_0^2} = (2q_0 - 1)H_0^2 \quad (2.41)$$

ve

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G} (H_0^2 + \frac{c^2}{s_0^2}) = \frac{3H_0^2}{4\pi G} q_0 \quad (2.42)$$

bağıntıları elde edilir.

$\rho_0$  yoğunluğu,  $\rho_c$  kapalılık yoğunluğu ile birlikte;

$$\rho_0 = \rho_c \Omega_0 \quad (2.43)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\Omega_0$ , (2.42) ve (2.34) bağıntılarında gözönünde bulundurularak,

$$\Omega_0 = 2q_0 \quad (2.44)$$

bağıntısı ile verilir.

(2.41) bağıntısının sol tarafı pozitif olduğundan;

$$q_0 > \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \Omega_0 > 1 \quad (2.45)$$

olmalıdır. Böylece kapalı model artan bir yoğunluğa sahip olur. (2.41) ve (2.42) bağıntılarını kullanarak, (2.39) bağıntısından;

$$\dot{s}^2 = c^2 \left( \frac{\alpha}{s} - 1 \right) \quad (2.46)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada  $\alpha$ ;

$$\alpha = \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \frac{c}{H_0} \quad (2.47)$$

bağıntısı ile verilir ve uzunluk boyutundadır.

Böylece model  $H_0$  ve  $q_0$  parametreleri ile karakterize edilmiş olur. (2.46) diferansiyel denkleminin çözümü :

$$\dot{s}^2 = c^2 \left( \frac{\alpha}{s} - 1 \right) = c^2 \left( \frac{\alpha - s}{s} \right)$$

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{c^2}{s} (\alpha - s)$$

$$\frac{ds}{dt} = c \frac{\sqrt{\alpha - s}}{\sqrt{s}}$$

$$c \int dt = \int \frac{\sqrt{s} ds}{\sqrt{\alpha - s}}$$

olur. Bu integrali çözmek için;

$$s = \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \alpha (1 - \cos \theta) \quad (2.48)$$

dönüşümü kullanılırsa;

$$ct = \int \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \alpha (\theta - \sin\theta) \quad (2.49)$$

bağıntısı elde edilir. Böylece şimdiki dönemde  $s=s_0$  olduğundan,  $t=t_0$  ve  $\theta=\theta_0$  alınır. Buna göre (2.48) kullanılarak  $\cos\theta_0$  ve  $\sin\theta_0$ ;

$$s_0 = \frac{1}{2} \alpha (1 - \cos\theta_0) = \frac{c}{H_0} (2q_0 - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(2q_0 - 1)}{2q_0} \alpha$$

Yani;

$$\cos\theta_0 = \frac{1 - q_0}{q_0} \quad \text{ve} \quad \sin\theta_0 = \frac{\sqrt{2q_0 - 1}}{q_0} \quad (2.50)$$

bulunur. Böylece (2.49) bağıntısından;

$$t_0 = \frac{\alpha}{2c} (\theta_0 - \sin\theta_0)$$

$$t_0 = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \left[ \cos^{-1} \left( \frac{1 - q_0}{q_0} \right) - \frac{\sqrt{2q_0 - 1}}{q_0} \right] \frac{1}{H_0} \quad (2.51)$$

elde edilir. Örneğin  $q_0=1$  için;

$$t_0 = \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) H_0^{-1} \quad (2.52)$$

olur. Ayrıca  $s, \theta=\pi$  'de maksimum bir değere ulaşır, bu (2.48) bağıntısından;

$$s = s_{\max} = \alpha = \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \frac{c}{H_0} \quad (2.53)$$

şeklinde bulunur. Böylece  $q_0=1$  için evren şimdiki büyüklüğünün 2 katına çıkarak genişler.

$\theta=2\pi$  olduğunda  $s=0$  değerini alır.

(2.49) bağıntısında  $\theta=2\pi$  alındığında;

$$t = t_L = \frac{\pi\alpha}{c} = \frac{2\pi q_0}{(2q_0-1)^{3/2}} \frac{1}{H_0} \quad (2.54)$$

elde edilir.

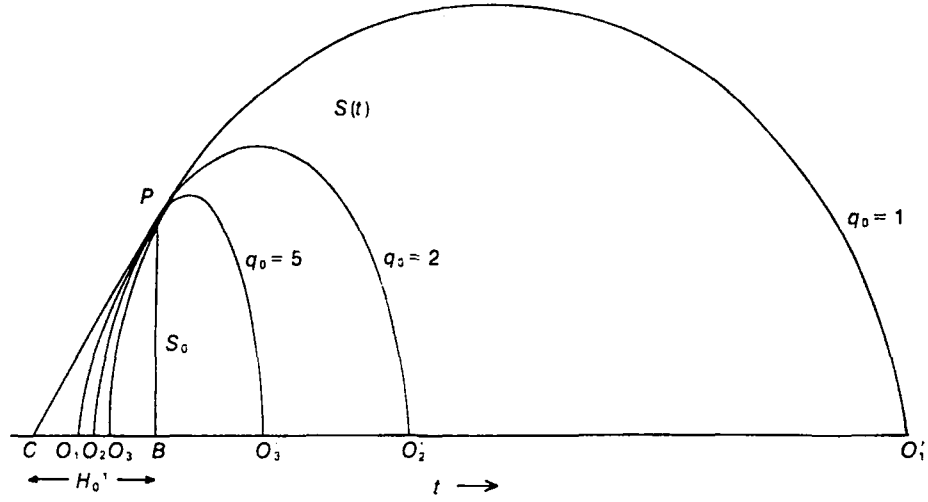
Böylece kapalı modellerde genişlemeden sonra bunu büzülme takip eder ve  $s$  sıfıra düşer.

Evrenin ömrü  $t_L$  ile gösterilirse,  $q_0=1$  için ve  $T_0=H_0^{-1}$  alındığında;

$$t_L = 2\pi H_0^{-1} = 2\pi T_0$$

olur.

Şekil (II.2)  $q_0$  parametresinin değerlerine göre kapalı modellerin sayısını ve  $s(t)$ 'nin önemini gösterir. Bütün eğriler P noktasında  $H$ 'nin aynı değerine sahip olacak şekilde düzenlenmiştir.



ŞEKİL (II.2)

$q_0=1,2,5$  için  $s(t)$  eğrileri.

Bütün eğriler P noktasında toplanmak üzere düzenlenmiştir ve hepsi PC teğetine sahiptirler.  $H_0^{-1} = BC$  dir.

Burada  $q_0$  yükseldikçe evrenin yaşının düştüğü görülmektedir.

### II.3.3. Açık Alanlar ( $k=-1$ ) :

(2.30) ve (2.31) Friedmann denklemlerinde  $k=-1$  yerine yazılırsa;

$$2 \frac{\ddot{s}}{s} + \frac{\dot{s}^2 - c^2}{s^2} = 0 \quad (2.55)$$

ve

$$\frac{\dot{s}^2 - c^2}{s^2} - \frac{8\pi G \rho_0 s^3}{3s^3} = 0 \quad (2.56)$$

bağıntıları elde edilir.

Tekrar (2.40) tanımları kullanılarak, şimdiki döneme uygulanırsa;



$$\frac{c^2}{s_0^2} = (1-2q_0)H_0^2 \quad (2.57)$$

ve

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{4\pi G} q_0 \quad (2.58)$$

bağıntıları elde edilir. Benzer şekilde (2.45) eşitsizlikleri yerine burada;

$$0 \leq q_0 < \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad 0 \leq \Omega_0 < 1 \quad (2.59)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yine benzer şekilde (2.46) diferansiyel denklemi yerine burada;

$$\dot{s}^2 = c^2 \left( \frac{-\beta}{s} + 1 \right) \quad (2.60)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada  $\beta$ ;

$$\beta = \frac{2q_0}{(1-2q_0)^{3/2}} \frac{c}{H_0} \quad (2.61)$$

bağıntısı ile verilir ve uzunluk boyutundadır. (2.60) diferansiyel denkleminin çözümü; (2.46) denkleminin çözümüne benzer ve bir  $\Psi$  açısı ile bu çözüm;

$$s = \frac{1}{2} \beta (\cosh \Psi - 1)$$

dönüşümü kullanılarak;

$$ct = \frac{1}{2} \beta (\sinh \Psi - \Psi) \quad (2.62)$$

elde edilir. Şimdiki dönemde  $\Psi$  açısının değeri;

$$s_0 = \frac{1}{2} \beta (\cosh \Psi_0 - 1) = \frac{c}{H_0} (1 - 2q_0)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1 - 2q_0)}{2q_0} \beta$$

ve buradan;

$$\cosh \Psi_0 = \frac{1 - q_0}{q_0} \quad \text{ve} \quad \sinh \Psi_0 = \frac{\sqrt{1 - 2q_0}}{q_0} \quad (2.63)$$

elde edilir. Böylece (2.62) bağıntısından  $t$ 'nin şimdiki dönemdeki değeri;

$$t_0 = \frac{\beta}{2c} (\sinh \Psi_0 - \Psi_0)$$
$$t_0 = \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}} \left[ \frac{\sqrt{1 - 2q_0}}{q_0} - \ln \left( \frac{1 - q_0 + \sqrt{1 - 2q_0}}{q_0} \right) \right] H_0^{-1} \quad (2.64)$$

elde edilir.

Einstein-de Sitter modelinde olduğu gibi bu modeller de sonsuza dek genişlemeyi sürdürürler. Bu modeller de  $s(t)$ 'nin  $t$  ile değişimi Şekil (II.3)'de gösterilmiştir.

$q_0 = 0$  ile gösterilen model de  $s(t) = ct$  dir ve düz uzay-zamanını gösterir. Gerçekten;

$$R = ctr$$

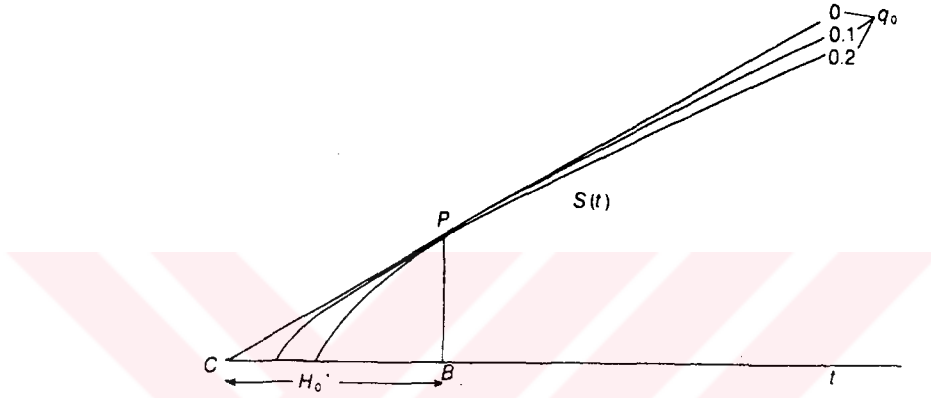
ve

$$T = t \sqrt{1 + r^2}$$

koordinat dönüşümü ile yol elemanı;

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dR^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.65)$$

şeklinde Minkowski formuna dönüşür.



ŞEKİL (II.3)

$q_0 = 0, 0.1$  ve  $0.2$  için  $s(t)$  eğrileri.

Bütün eğriler P noktasında aynı değere sahiptirler. Evrenin yaşı,  $q_0$  küçüldükçe yükseliyor görünmektedir ve  $q_0=0$  olunca ( $=H_0^{-1}$ ) maksimum olacaktır.

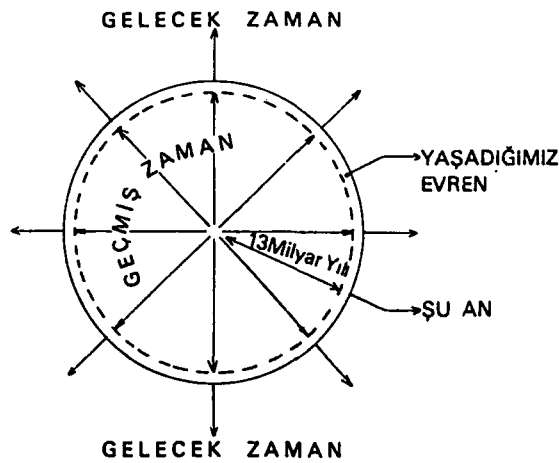
### EINSTEIN'NİN EVRENİ :

Albert Einstein, Euclidean geometri ile uzay geometrisinin açıklanamayacağını ve dolayısıyla Euclidean geometrisine koşullandırılmış insanların uzayı düşünebilmesinin çok zor olduğunu savunmuştur. Örneğin Euclidean geometrisi iki nokta arasındaki düz çizginin en kısa yol olduğunu kabul etmiş; fakat bu kanıtlanamamıştır. Ayrıca paralel çizgiler sonsuza kadar birbirine kavuşmazlar.

Albert Einstein, evrende geçerli olan geometrinin Euclidean geometriye uymadığını düşünmüştü. Özellikle bu geometri, kütle çekimi (gravitasyon) alanları içerisinde geçersizdir. Işık, gravitasyon alanı içerisinde düz değil, en kısa yol olarak, bir eğri yada bir çemberi izlemektedir. Tüm evrendeki maddelerin oluşturduğu gravitasyon, uzay-zaman boyutu içerisinde, zaman boyutunu kendi üzerine kapatmasıyla, sonlu; fakat sınırsız bir sistem oluşturmuştur. Sanki şişmekte olan bir sabun köpüğü gibi. Sabun köpüğünün oluşturduğu zar evrenin kendisidir. Burada üç boyut (en, kalınlık ve boy) vardır; yüzeyleri ise zaman boyutuna kaynaşmıştır [Şekil (II.4)]. Böylece büyüklüğü sonlu; fakat sınırsız olan bir sistem oluşmuştur. Nasıl mikrokozmos (atom ve atomaltı parçacıkları) şekillendirilemiyorsa, makrokozmos da gözönünde tümüyle canlandırılmaz. Çağdaş gökbilimin güvenilir ölçümleri, Einstein'ın alan denklemlerine uygulandığında, sınırsız; fakat sonlu olan Einstein evreninin çapını saptamak olasıdır. Bildiğimiz gibi evrendeki eğrilik gravitasyondan, gravitasyon da madde varlığından oluşmaktadır. O halde evrendeki eğriliği saptayabilmek için evrenin yoğunluğunu bulmak gerekir. Eldeki en modern aygıtlarla gökteki bölgeler incelenerek evrendeki madde miktarı çıkarılmıştır.

Edwin Hubble, bu yoğunluğun  $10^{-12}$  gr/litre olduğunu bulmuştur. Bu değer Einstein'ın alan denklemlerine uygulanınca çapı 35 milyar, çevresi

210 milyar ışık yılı olan bir sistem ortaya çıkmaktadır. Bu şu demektir: Eğer biz bulunduğumuz yerden bir ışık demeti gönderirsek, yaklaşık 210 milyar yıl sonra ışık tekrar çıktığı yere gelecektir. Yani sabun köpüğünün neresinden ışık gönderirsek gönderelim, 210 milyar yıl sonra ışık çıktığı yere gelir. Hesaplanandan biraz daha geç gelir; çünkü ışık yoluna devam ederken evren genişlemekte, buna bağlı olarak madde yoğunluğu düşmekte, bu da gravitasyonun azalmasına neden olmakta, bu da hem ışığın daha az kırılarak gitmesine (dolayısıyla uzayın çapının büyümesine) hem de zaman boyutunu daha az kapatacağı (bükeceği) için geleceğe kayılmasına, yani 210 milyar yılın çok daha ötesine kayılmasına neden olacaktır. Tüm bunlar, gravitasyon alanındaki zaman boyutunun kendi üzerine kıvrılmasından dolayı ortaya çıkmaktadır. Bu geometri içersinde bir iç ve bir dış kavramı düşünmek ve şekillendirmek hem gereksiz hem olanaksızdır. Çünkü dış yüzey gelecek zamana, iç yüzey ise geçmiş zamana monte edilmiş durumdadır. Her geçen saniye, uzayın genişlemesine uygun olarak gelecek zamanın içine doğru yol alınmaktadır. Dolayısıyla her an gravitasyon düşmekte ve kırılma indisi azalmaktadır; yani uzayın çapı büyümektedir.

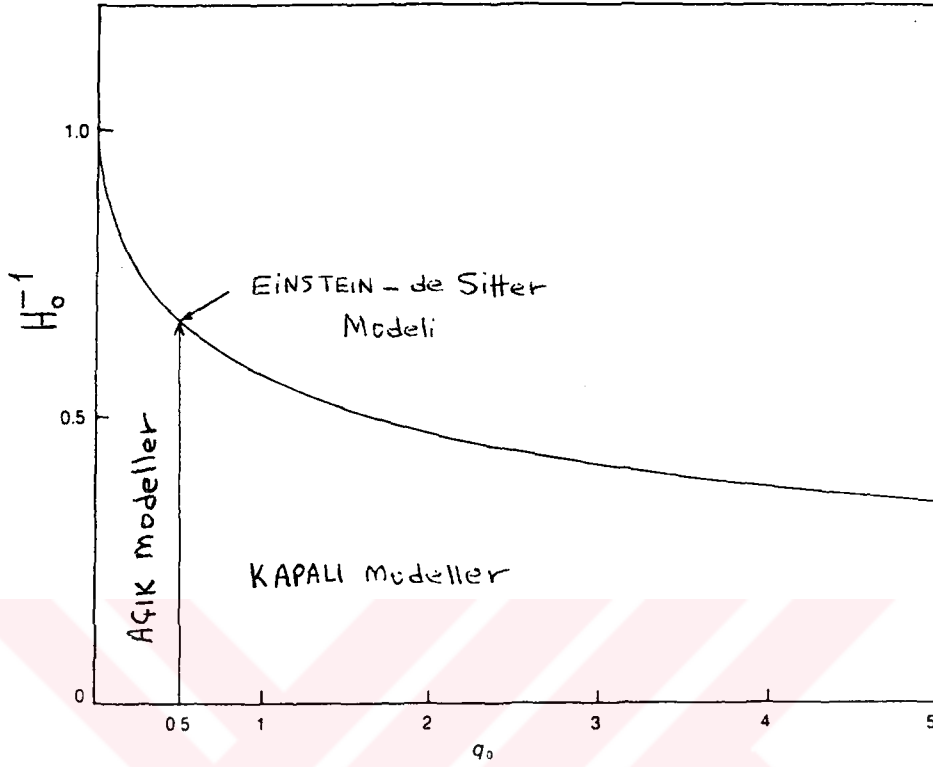


ŞEKİL (II.4)

Yaklaşık 13-20 milyar yıl önce kozmik bir özün patlamasıyla (Big-Bang) oluşmaya başlayan evren, her boyutta genişlerken, dış yüzü geleceğe, iç yüzü ise geçmişe monte edilmiş bir balon yapısı kazanmıştır. Arkadaki dar bölge (yani zar gibi görünen kısım) ise, maddenin, buna bağlı olarak gravitasyonun olduğu, yaşadığımız ve duyu organlarımızla algıladığımız evrendir. Genişlemeden dolayı, birim miktardaki madde miktarı, buna bağlı olarak gravitasyon düşmekte, dolayısıyla kırılma indisi azalmakta, uzayın çapı büyümekte, zaman, uzay-zaman boyutları içerisinde daha az bükülmekte ve sonuçta her geçen zamanda biraz daha geleceğe kayılmaktadır.

#### II.3.4. Uzay-Zaman Özelliği :

Şekil (II.5) evrenin yaşının, yavaşlatma parametresi  $q_0$ , 0'dan  $\infty$ 'a yükselirken düştüğünü ve  $q_0=0$  değerinde maksimum olduğunu gösterir. Friedmann modelleri belli bir dönemde ve  $s=0$  da ortak özelliklere sahiptir.  $k=-1$ ,  $q_0=0$  modelinde,  $s=0$  a yaklaşırken Hubble sabiti hızla yükselir. Bu bakımdan bu dönem kuvvetli aktiviteler gösterir ve buna "büyük patlama" (big bang) adı verilir. Bu nedenle  $s=0$  da uzay-zaman geometrisinden bahsetmek anlamsız olur.



ŞEKİL (II.5)

Bir Friedmann modelinde yaşın ( $H_0^{-1}$  biriminde) yavaşlatma parametresi  $q_0$  ile değişimi.  $q_0=1/2$  değeri kapalı modelleri açık modellerden ayırır.

#### BİG-BANG (BÜYÜK PATLAMA) KURAMI :

PENZIAS ve WILSON'un yaptıkları anten aracılığıyla işitilen ses, evrenin tümünün bir zamanlar bir öz, bir plazma, bir enerji yumağı halinde iken patlamasıyla ortaya çıkan elektromagnetik dalgaların bir kalıntısıydı. Bu patlama ile başlayan genişleme, anladığımız anlamda bir evren oluşumunu da başlatmıştır. En hızlı hareket eden kütleler en önde, daha yavaş hareket edenler daha arkada (içte) olmak üzere yayılmaya başlamıştır. Bu gök cisimlerinin uzaklıkları ve hızları gözönüne alınarak yapılan he-

saplamalarda, ilk patlamanın 13 milyar yıl önce ortaya çıktığı varsayılmıştır. Albert Einstein'nin formüllerine göre, ya genişlemeye devam edecek "Evrenin nefes alması" yada tekrar bir araya gelerek çökecektir "Evrenin nefes vermesi". Bu kurama "Big-Bang" kurama denmiştir.

Başlangıçta, belkide santimetre kübü milyarlarca ton olan bir kozmik öz vardı. Bazılarına göre bu özün çapı dünyadan pek büyük değildi. Yine bazı araştırmacılara göre başlangıçta dev bir atom vardı ve bunun patlamasıyla evren ortaya çıktı. Her iki haldede başlangıçtaki bu kozmik öz, belki de içinde oluşan hafif gazlardan dolayı, kararlılığını yitirdi. Bu öz bu evrede, şu anda evrende herhangi bir noktada olmayan yüksek bir sıcaklığa sahipti. Büyük bir olasılıkla milyarlarca derecelik sıcaklığa yada enerjinin başka bir formuna sahip olan bu öz, yine sonsuz denebilecek bir yoğunluktan, yani gravitasyondan dolayı bir arada tutulabiliyordu. Doğal olarak böyle bir gravitasyonda tek bir parçacığın dahi bu kütleyi terkedemeyeceği açıktır. Yani böyle bir öz esasında kapkaranlık bir kütleydi.

Hem ışık hem de zaman, gravitasyonun yoğunluğuna bağlı olarak büküldüğü için, herhangi bir mağnetik dalganın kütleyi terketmesi ve zamanında yer aldığı uzay-zaman boyutunun başlaması düşünülemezdi. İşte kararsız hale geçen bu enerji kütlesi, tüm boyutlara doğru korkunç bir hızla yayılmaya ve yayıldıkça soğumaya, galaksiler, yıldızlar, gezegenler halinde düzenlenmeye başladı.

Çoğu düşünürün ve bilim adamanın üzerinde birleştikleri ortak kanı, evrenin bu gün hala genişlemeye devam ettiğidir. Çünkü saptayabildiğimiz en uzak ve hemen hemen ışık salan gök cisimlerinin tümünün ışığı kırmızıya doğru kaymaktadır. Yani Doppler etkisine göre, bizden, hatta birbirinden uzaklaşmaktadırlar. Eğer bir büzülme ve içe doğru toplanma olsaydı,



bu kuraldan dolayı, gök cisimlerinin ışıkları maviye doğru kayacaktı. Çünkü bize doğru yada birbirlerine doğru yaklaşımlarından dolayı dalga boylarında göreceli bir kısalma olacaktı ve bu da ışık spektrumlarının maviye doğru kaymasını sağlayacaktı.

Bu yayılma, çoğu astrofizikçiye göre sonsuz olamaz, bir noktada frenlenmesi gerekir. Çünkü maddeler arasındaki çekim bu hızın frenlenmesine ve bir noktada durmasına neden olacaktır. İlk patlama ile yayılan bu cisimlerin hızı, gravitasyon alanlarının yardımıyla birbirlerini çektikleri için, azalacak ve bir noktada sıfıra inecektir. İşte biz bu noktaya "Tepe noktası" diyoruz. Bu noktada evren ya tamamen dengeli bir sistem haline gelecek, hareket duracak, ışık tüm evrende tekdüze yayılacak ve bir ölüm sessizliği başlayacak, evrende sıcaklık her noktada aynı olduğundan, sistemler arasındaki enerji farkı da ortadan kalkacak, dolayısıyla enerjiden yararlanma olanağı da tümüyle yitirilecek, entropi sıfır olacak, tüm sistemler kararlı, yani değişmez duruma geçecektir, yada cisimler arasındaki çekim devam edecek ve tepe noktasından içeriye doğru bir büzülme ve merkeze doğru madde akımı başlayacaktır. Bu büzülme, yani "Evrenin nefes vermesi" milyarlarca yıl sürecek, tüm maddeler merkeze yaklaştıkça büyük hızlara ulaşacak, cansız yapıların ve yıllarca evrenin laboratuvarında çeşitlenmiş canlı varlıkların tümü, onların oluşturdukları her düzeydeki kültür, büyük bir patlama ile bir noktada (belki tekrar) birleşecek ve herşey bir anda yok olacaktır. Bu yıkım belkide yeni bir evrenin hammaddesini oluşturacaktır. Yine kozmik öze dönüş ve yeni evrenin başlangıç noktası olacaktır.

Evrenin bu genişleyip daralmasını savunan kurama "Pulsiyon" yada "Nabız kuramı" denir. Kesin olmayan hesaplamalara göre genişleme ile daralma arasındaki süre, aşağı yukarı 80 milyar yıl kadar olacaktır.

Atomaltı parçacıklardan, belki sadece quarklardan oluştuğu varsayılan bu özün, patlamayı izleyen ilk birkaç saniyesinde oluşturduğu bileşimler ve maddeler, hem evrenin hem de canlıların yapısını saptaması bakımından çok önemlidir. Örneğin zayıf kuvvetler olmasaydı, galaksiler, yıldızlar ve gezegenler oluşmayacaktı; çünkü gravitasyon olmayacaktı. Güçlü kuvvetler olmasaydı, atomlar, buna bağlı olarak moleküller oluşmayacaktı. Elektronlar yörünge değiştirmeseydi, ısı, renk ve iyonlar olmayacaktı. Bir protona karşı sadece bir elektron meydana gelmiş olsaydı, yani serbestelektronlar olmasaydı, elektrik iletimi gibi bir olay olmayacaktı. Nötronlar olmasaydı, protonları bir arada tutmak olanaksız olacaktı ve maddenin organizasyonu oluşmayacaktı. Proton ve nötronun belirli sayılarda biraraya toplanabilir niteliği olmasaydı, elementler oluşmayacaktı ve evren sadece protondan ve elektron çorbasından yada sadece hidrojenden oluşmuş tekdüze bir yapı olacaktı. Sonuç olarak, bunlardan herhangi birinin eksik olması canlılığın oluşmamasına sebep olacaktı.

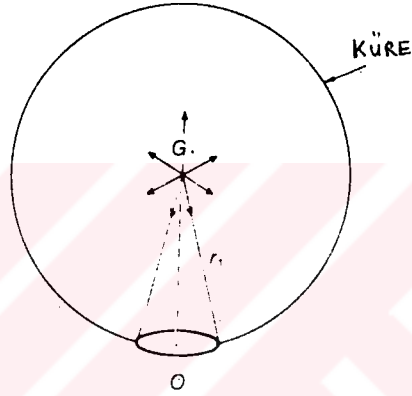
Uzayda, yıkıma uğramış ve dağılmış yıldızların tozları, boşluktaki atom ve moleküller, birbirlerini çekmek yada bazı gravitasyon alanlarının etkisi altında toplanmak suretiyle, yeniden yıldızları, galaksileri oluşturabileceklerine ilişkin birçok gözlem ve bu görüşte olan birçok bilim adamı vardır. Bunlar, evrenin sürekli kendini yenilediğini savunan kimselelerdir. Toz bulutlarının uzayda bazı gök cisimlerini meydana getirdiği küçük ölçülerde kanıtlanmıştır. Fakat evrensel bir yaradılışın temelleri oluşabileceği hiçbir zaman kesinlikle kanıtlanamamıştır.

#### II.4. PARLAKLIK UZAKLIĞI :

Friedmann modelleri, kozmolojiksel gözlemlerin açıklanmasında kullanıldığı için, Şekil (II.6)'da açıklanan parlaklık uzaklığını bu modeller için elde edeceğiz. Bir  $G_1$  galaksisinin parlaklık uzaklığı  $D_1$ ;

$$D_1 = r_1 s(t_0)(1+z) \quad (2.66)$$

dir. Burada  $r_1$ ,  $G_1$  galaksinin radyal koordinatını ve  $z$ 'de bu galaksinin kızılakaymasını göstermektedir. Hubble yavaş kızılakaymalarda galaksiler için  $z \approx 0.003$  alınmıştır.



ŞEKİL (II.6)

Bir  $G_1$  galaksisi, bulunduğu yerden her yöne, hep aynı şekilde sürekli ışık yayınlar.  $O$ 'da bir gözlemci bu ışığı orantılı bir miktarda alacaktır. Buna göre böyle bir galaksinin parlaklık uzaklığı  $D_1$ , bu galaksinin kızılakayması ve gözlemciye olan uzaklığına bağlı olacaktır.

#### II.4.1. Einstein-de Sitter Modeli :

$G_1$  galaksinin radyal koordinatı  $r_1$ 'i,  $t_1$  zamanı ve bu galaksinin kızılakayması  $z$  ile ifade edebilmek için,

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c \cdot dt}{s(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (2.67)$$

bağıntısı ile birlikte (2.36) kullanılırsa ve  $k=0$  alınarak,  $r_1$  için;

$$r_1 = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{s(t)} = \frac{c}{s_0} \int_{t_1}^{t_0} t_0^{2/3} t^{-2/3} dt$$
$$r_1 = \frac{c}{s_0} t_0^{2/3} 3(t_0^{1/3} - t_1^{1/3})$$
$$r_1 = \frac{3c}{s_0} t_0 \left[ 1 - \left( \frac{t_1}{t_0} \right)^{1/3} \right] \quad (2.68)$$

bağıntısı elde edilir.<sup>(4)</sup>  $G_1$  galaksisinin kızılakayması  $z$  için;

$$\frac{c\Delta t_0}{c\Delta t_1} = \frac{s(t_0)}{s(t_1)} = 1+z \quad (2.69)$$

ve

$$1+z = \frac{s(t_0)}{s(t_1)} = \left( \frac{t_0}{t_1} \right)^{2/3} \quad (2.70)$$

bağıntıları ile birlikte (2.37) bağıntısında gözönünde tutulursa;

$$r_1 = \frac{3ct_0}{s_0} \left[ 1 - (1+z)^{-1/2} \right]$$
$$r_1 = \frac{2c}{s_0 H_0} \left[ 1 - (1+z)^{-1/2} \right] \quad (2.71)$$

bağıntısı elde edilir.

Böylece  $G_1$  galaksisinin parlaklık uzaklığı  $D_1$ , (2.66) bağıntısında, (2.71) bağıntısı yerine yazılırsa;

$$D_1 = r_1 s_0 (1+z)$$

$$D_1 = \frac{2c}{H_0} \left[ (1+z) - (1+z)^{1/2} \right] \quad (2.72)$$

olarak bulunur.

#### II.4.2. Kapalı Model :

Bu model için, (2.67) bağıntısında  $k=1$  yazılırsa;

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{s(t)} \quad (2.73)$$

bağıntısı elde edilir. (2.46) diferansiyel denkleminin çözümünü hatırlarsak;

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{s(t)} = \int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{s(\alpha-s)}} \quad (2.74)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemi çözmek için, (2.48) bağıntısındaki dönüşüm kullanılırsa:  $s = \alpha \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Böylece;

$$\int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{s(\alpha-s)}} = \int_{\theta_1}^{\theta_0} d\theta = \theta_0 - \theta_1 \quad (2.75)$$

elde edilir. Böylece (2.73), (2.74) ve (2.75) bağıntılarından;

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \theta_0 - \theta_1 \quad (2.76)$$

elde edilir. Buradaki integrali çözmek için,

$$r = \sin\theta \quad (2.77)$$

dönüşümü yapılırsa;

$$\int_{r=0}^{r=r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int_{\theta=0}^{\theta=\sin^{-1}r_1} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$
$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int_0^{\sin^{-1}r_1} d\theta = \sin^{-1}r_1 \quad (2.78)$$

olur. Son olarak (2.78) bağıntısı (2.76) bağıntısında yerine yazılırsa;

$$\sin^{-1}r_1 = \theta_0 - \theta_1$$

olur. Buradan  $r_1$ ;

$$r_1 = \sin(\theta_0 - \theta_1) \quad (2.79)$$

elde edilir. (2.48) bağıntısı kullanılarak;

$$s_0 = s(t_0) = \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$$

ve

$$s_1 = s(t_1) = \sin^2 \frac{\theta_1}{2}$$

bağıntıları elde edilir. Bunlar kullanılarak;

$$1+z = \frac{s(t_0)}{s(t_1)} = \frac{\sin^2 \frac{\theta_0}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_1}{2}}$$

elde edilir. Böylece buradan;

$$\sin\theta_1 = \frac{2}{(1+z)} \sin \frac{\theta_0}{2} (z + \cos^2 \frac{\theta_0}{2})^{1/2}$$

ve

$$\cos\theta_1 = \frac{z + \cos\theta_0}{1+z}$$

olur. Aynı zamanda, (2.50) bağıntılarından;

$$\sin \frac{\theta_0}{2} = \sqrt{\frac{2q_0-1}{2q_0}} \quad \text{ve} \quad \cos \frac{\theta_0}{2} = \sqrt{\frac{1}{2q_0}}$$

bağıntıları elde edilir. Bütün bunlar (2.79) bağıntısında yerlerine yazılırsa;

$$r_1 = \sin(\theta_0 - \theta_1) = \sin\theta_0 \cdot \cos\theta_1 - \cos\theta_0 \cdot \sin\theta_1$$

$$r_1 = 2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot \cos\theta_1 - \left[ \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right] \cdot \sin\theta_1$$

$$r_1 = 2 \sqrt{\frac{2q_0-1}{2q_0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2q_0}} \cdot \left( \frac{z + \cos\theta_0}{1+z} \right) - \left[ \frac{1}{2q_0} - \left( \frac{2q_0-1}{2q_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{z + \cos\theta_0}{1+z} \right)$$

$$r_1 = 2 \sqrt{\frac{2q_0-1}{2q_0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2q_0}} \left\{ \frac{z + \left( \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right)}{1+z} \right\} - \left[ \frac{1}{2q_0} - \left( \frac{2q_0-1}{2q_0} \right) \right] \left\{ \frac{z + \left( \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right)}{1+z} \right\}$$

$$r_1 = 2 \sqrt{\frac{2q_0-1}{2q_0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2q_0}} \left\{ \frac{z + \left[ \frac{1}{2q_0} - \left( \frac{2q_0-1}{2q_0} \right) \right]}{1+z} \right\} - \left[ \frac{1}{2q_0} - \left( \frac{2q_0-1}{2q_0} \right) \right] \cdot \left\{ \frac{z + \left[ \frac{1}{2q_0} - \left( \frac{2q_0-1}{2q_0} \right) \right]}{1+z} \right\}$$

olur. Burada cebirsel sadeleştirmeler yapılarak;

$$r_1 = \frac{\sqrt{2q_0-1}}{q_0^2(1+z)} \left[ q_0 z + (1-q_0)(1 - \sqrt{1+2zq_0}) \right] \quad (2.80)$$

elde edilir. Böylece kapalı modelde, bir  $G_1$  galaksisinin parlaklık uzaklığı, (2.66) bağıntısında, (2.80) bağıntısı yerine yazılırsa;

$$D_1 = r_1 s_0 (1+z)$$

$$D_1 = \left( \frac{c}{H_0} \right) \frac{1}{q_0^2} \left[ q_0 z + (q_0-1)(\sqrt{1+2zq_0} - 1) \right] \quad (2.81)$$

olarak bulunur.

#### II.4.3. Açık Model :

Bu model için (2.67) bağıntısında  $k=-1$  yazılarak, II.4.2. deki hesaplamalar yapıldığında;

$$r_1 = \frac{\sqrt{1-2q_0}}{q_0^2(1+z)} \left[ q_0 z + (1-q_0)(1 - \sqrt{1+2zq_0}) \right] \quad (2.82)$$



elde edilir. Böylece açık modelde, bir  $G_1$  galaksisinin parlaklık uzaklığı, (2.66) bağıntısında, (2.82) bağıntısı yerine yazılırsa,

$$D_1 = \left( \frac{c}{H_0} \right) \frac{1}{q_0} \left[ q_0 z + (q_0 - 1) (\sqrt{1 + 2zq_0} - 1) \right] \quad (2.83)$$

olarak bulunur.

Bu sonuca göre,  $q_0 \geq \frac{1}{2}$ ,  $k = \pm 1$  için kapalı ve açık modelde,  $D_1$  parlaklık uzaklığı için, aynı ifadeler bulunmuştur. Ayrıca, kapalı ve açık modeldeki  $D_1$  bağıntılarında,  $q_0$  yerine  $\frac{1}{2}$  yazılırsa, Einstein-de Sitter modelinde elde edilen sonuç bulunur. Yani; (2.81) ve (2.83) bağıntılarında  $q_0 \rightarrow 1/2$  alındığında (2.72) bağıntısını verdiği kolaylıkla görülebilir.

#### II.4.4. Parçacık Ufku :

Gözlenebilir en fazla uzaklık,  $r_L$  olarak isimlendirilirse,  $z \rightarrow \infty$  için,  $r_1$  uzaklığının belli bir değeri bulunabilir. Böylece (2.67) bağıntısından, gözlenebilir en fazla uzaklık;

$$R_L = s_0 \int_0^{r_L} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2.84)$$

bağıntısı ile verilir. Böylece  $k$  ve  $q_0$  değerlerine göre;

$$R_L = \frac{c}{H_0} \times \left\{ \begin{array}{ll} 2 & : (k=0, q_0 = \frac{1}{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{2q_0-1}} \sin^{-1} \sqrt{\frac{2q_0-1}{2q_0}} & : (k=1, q_0 > \frac{1}{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{1-2q_0}} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{1-2q_0}{2q_0}} & : (k=-1, q_0 < \frac{1}{2}) \end{array} \right.$$

elde edilir.

$R_L$  nin sonlu bir değerinin varlığı, evrenin parçacık ufkuna sahip olduğu anlamına gelir.  $r_1 > r_L$  olan parçacıklar, gözlenebilir özelliğe sahip değildirler. (2.83) bağıntısı ( $k=-1$ ),  $q_0 \rightarrow 0$  modeli için parlaklık uzaklığı;

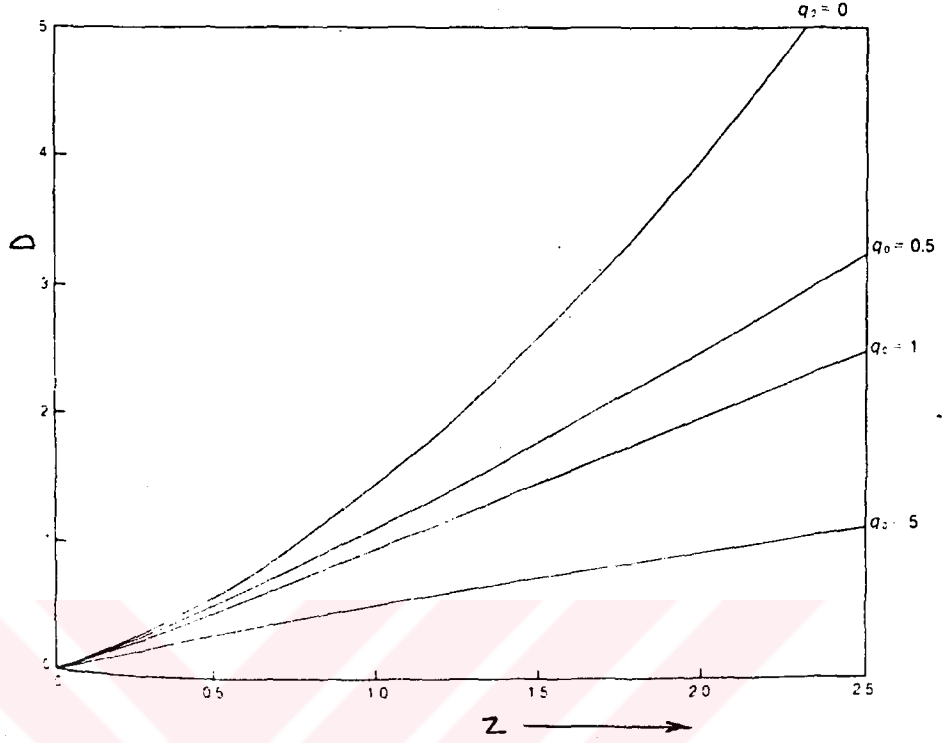
$$D_1 = \left(\frac{c}{H_0}\right)z\left(1 + \frac{z}{2}\right) \quad (2.85)$$

olur. Şekil (II.7) deęiŐik  $q_0$  değerleri için,  $D_1(q_0, z)$  ile  $z$  değişimini gösterir.

$q_0=1$  için (2.83) bağıntısından, parlaklık uzaklığı,

$$D_1 = \left(\frac{c}{H_0}\right)z \quad (2.86)$$

olur. Böylece  $z=1$  de; (2.85) ile verilen parlaklık uzaklığı, (2.86)'daki parlaklık uzaklığından %50 oranında daha büyük olduğu kolayca görülür.



ŞEKİL (II.7)

$q_0=1, q_0=0, 1/2, 5$  için parlaklık uzaklığı ( $\frac{c}{H_0}$  biriminde)  $D$  ile kızılakayma  $z$ 'nin değişimi.  $q_0=1$  için değişim,  $cz=H_0 D_1$  Hubble yasasında belirtildiği gibi lineerdir.  $q_0 < 1$  için,  $D_1, z$  ile birlikte Hubble yasasında söylendiğinden daha hızlı yükselir.  $q_0 > 1$  için,  $D_1, z$  ile birlikte daha yavaş yükselir. Bütün eğriler  $z$  küçüldükçe birleşmeye başlar.

#### II.5. AÇISAL BÜYÜKLÜK :

Şekil (II.8)  $G_1$  galaksisine  $r_1$  uzaklığında,  $O$  noktasında bulunan bir gözlemciye göre  $\Delta\theta_1$  açısal büyüklüğünü gösterir.  $A(\theta_1, \phi_1)$  ve  $B(\theta_1 + \Delta\theta_1, \phi_1)$  noktaları arasındaki uzaklık  $d$  ile gösterilmiştir, yani  $AB=d$  dir.  $A$  ve  $B$  arasındaki yol,  $t=t_1=sabit$ ,  $r=r_1=sabit$ ,  $\phi=\phi_1=sabit$  ve  $d\theta=\Delta\theta_1$  olmak üzere, (2.1) Robertson-Walker yol elemanı;

$$ds^2 = -r_1^2 s^2(t_1) (\Delta\theta_1)^2 = -d^2 \quad (2.87)$$

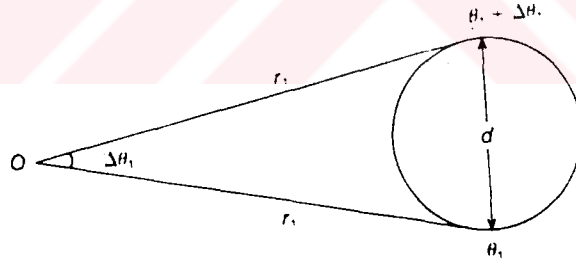
elde edilir. Buradan  $\Delta\theta_1$  açısal büyüklüğü;

$$\Delta\theta_1 = \frac{d}{r_1 s(t_1)} = \frac{d(1+z)}{r_1 s(t_0)} \quad (2.88)$$

bulunur. Parlaklık uzaklığı,  $D_1 = r_1 s_0(1+z)$  olduğunu hatırlarsak;

$$\Delta\theta_1 = \frac{d(1+z)^2}{D_1} \quad (2.89)$$

bağıntısı elde edilir.



(ŞEKİL II.8)

O noktasındaki bir gözlemciye göre,  $G_1$  galaksi için açısal büyüklük  $\Delta\theta_1$ , bu galaksinin gözlemciye olan radyal uzaklığına ve galaksinin kızılakaymasına bağlıdır. (2.83) bağıntısındaki  $D_1$  parlaklık uzaklığı, (2.89) bağıntısında yerine yazılırsa  $\Delta\theta_1$ ,  $q_0$  ve  $z$ 'ye bağlı olarak bulunur. (2.83) bağıntısının  $q_0 = \frac{1}{2}$  için (2.72) bağıntısını verdiğini hatırlayarak (2.72) bağıntısı (2.89) bağıntısında yerine yazılırsa,  $q_0 = \frac{1}{2}$  için  $\Delta\theta_1$ ;

$$\Delta\theta_1 = \frac{dH_0}{c} \cdot \frac{(1+z)^{3/2}}{(1+z)^{1/2}-1} \quad (2.90)$$

elde edilir.  $z$ 'nin maksimum değerinde ( $z=z_{\max}$ ),  $\Delta\theta_1$  ( $\Delta\theta_1=\theta_{\min}$ ) minimum değere sahip olacaktır.

$z$  nin maksimum değeri;

$$z_m = 1.25 \quad (2.91)$$

alınırsa,  $\Delta\theta_1$  in minimum değeri;

$$\theta_{\min} = 6.75 \frac{dH_0}{c} \quad (2.92)$$

olarak bulunur. (2.83) bağıntısındaki  $D_1$  parlaklık uzaklığınu kullanmak yerine, (2.79) bağıntısında elde edilen  $r_1$  radyal uzaklığı kullanılırsa  $\Delta\theta_1$ ;

$$\Delta\theta_1 = \frac{d}{r_1 s(t_1)} = \frac{d}{\sin(\theta_0 - \theta_1) s(t_1)}$$

elde edilir. Ayrıca (2.48) bağıntısından,  $s(t_1)$  burada yerine yazılırsa;

$$\Delta\theta_1 = \frac{d}{\sin(\theta_0 - \theta_1) \frac{1}{2} \alpha (1 - \cos\theta_1)}$$

olur. Bu son bağıntı düzenlenirse;

$$\Delta\theta_1 = \frac{2d}{\alpha} \left[ (1 - \cos\theta_1) \sin(\theta_0 - \theta_1) \right]^{-1} \quad (2.93)$$

bağıntısı elde edilir.  $z$  maksimum değeri için,  $\Delta\theta_1$  minimum olacağından;

$$\sin\theta_1 \sin(\theta_0 - \theta_1) - (1 - \cos\theta_1) \cos(\theta_0 - \theta_1) = 0$$

yani;

$$\sin\left(\theta_0 - \frac{3\theta_1}{2}\right) = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$\theta_1 = \frac{2\theta_0}{3} \quad (2.94)$$

bulunur. Buna göre;

$$1+z_m = \frac{1 - \cos\theta_0}{1 - \cos\frac{2\theta_0}{3}} \cdot \frac{2\theta_0}{3} \quad (2.95)$$

elde edilir. Böylece (2.47) bağıntısındaki  $\alpha$  kullanılarak  $\theta_{min}$ ;

$$\theta_{min} = \frac{(2q_0 - 1)^{3/2}}{q_0} \cdot \frac{1}{(1 - \cos\frac{2\theta_0}{3}) \sin\frac{\theta_0}{3}} \cdot \frac{dH_0}{c} \quad (2.96)$$

olarak bulunur. Ayrıca  $q_0 < \frac{1}{2}$  için  $\theta_{min}$ ;

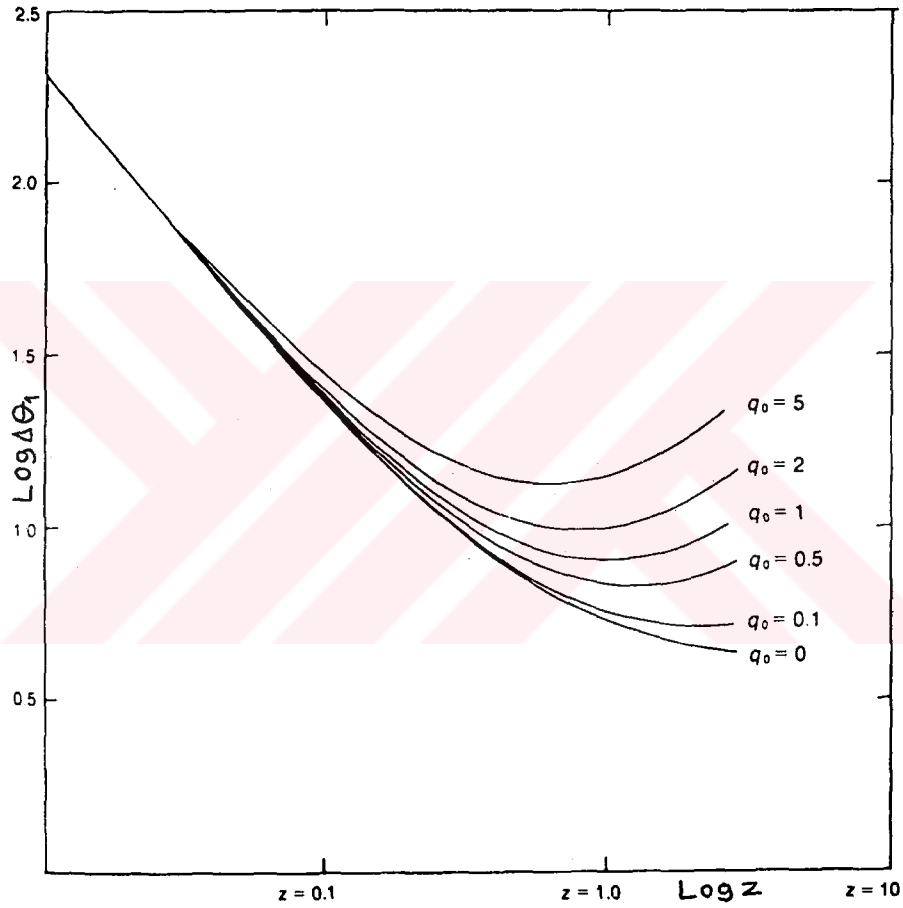
$$\theta_{min} = \frac{(1 - 2q_0)^{3/2}}{q_0} \cdot \frac{1}{(\cosh\frac{2\psi_0}{3} - 1) \sinh\frac{\psi_0}{3}} \cdot \frac{dH_0}{c} \quad (2.97)$$

elde edilir. Burada;

$$1+z_m = \frac{\text{Cosh } \psi_0 - 1}{\text{Cosh} \frac{2\psi_0}{3} - 1} \quad (2.98)$$

ile verilir.

Şekil (II.9)  $\Delta\theta_1$  ile  $z$  nin değişimini gösterir.



ŞEKİL (II.9)

$q_0 = 0, 0.1, 0.5, 1, 2, 5$  ile Friedmann modelleri için  $\text{Log } \Delta\theta_1$  ile  $\text{Log } z$  değişimi. Bütün eğriler  $z$  küçüldükçe  $\Delta\theta_1$  in değişimi bir doğruya dönüşür.

## II.6. KAYNAK HESAPLARI :

Galaksilerin sayısı;

$$dN = \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{1-kr^2}} n(t) \quad (2.99)$$

ile verilir. Burada radyal uzaklık  $r=r_1$  alınırsa galaksilerin sayısı N;

$$N(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{4\pi r^2 \cdot n(t) \cdot dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (2.100)$$

olur. Eğer  $r=0$  ve  $r=r_1$  arasında galaksiler, yıkıma uğramıyorsa veya meydana gelmiyorsa  $n(t)=\text{sabit}$  alınabilir ve bu integral hesaplanabilir.

(2.99) bağıntısı,  $k=+1$  modeline uygulanırsa, (2.68) ve onu takip eden bağıntılardan;

$$r = \sin(\theta_0 - \theta_1)$$

$$\left| \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \right| = |d\theta_1|, \quad 1+z = \frac{\sin^2 \frac{\theta_0}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_1}{2}}$$

$$\left| \frac{dz}{1+z} \right| = \cot \frac{\theta_1}{2} |d\theta_1| = \sqrt{\frac{1+2q_0 z}{2q_0 - 1}} |d\theta_1|$$

bağıntıları elde edilir. Böylece astronomiksel kaynakların sayısı,  $(z, z+dz)$  arasında;

$$dN = 4\pi \sin^2(\theta_0 - \theta_1) \cdot n(t) \cdot \left| \frac{d\theta_1}{dz} \right| dz$$



olarak bulunur. Burada  $n(t)$ ,  $n(z)$  gibi  $z$  nin bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. (2.80) bağıntısı kullanılarak ve cebirsel işlemler yapıldığında;

$$dN = 4\pi n(z) \frac{(2q_0 - 1)^{3/2}}{q_0^4} \cdot \frac{\left[ q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2zq_0} - 1) \right]^2}{\sqrt{1 + 2zq_0} (1+z)^3} dz \quad (2.101)$$

elde edilir. Birim hacimdeki kaynakların sayısı  $\bar{n}$  ile gösterilerek;

$$n = \bar{n} s^3 = \frac{\bar{n} s_0^3}{(1+z)^3} \quad (2.102)$$

bağıntısı elde edilir. (2.41) bağıntısı kullanılırsa;

$$\frac{\bar{n}}{(1+z)^3} = (2q_0 - 1)^{3/2} \left( \frac{H_0}{c} \right)^3 n \quad (2.103)$$

elde edilir. Bu (2.101) bağıntısında yerine yazıldığında;

$$dN = 4\pi \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 \cdot \frac{\left[ q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2zq_0} - 1) \right]^2}{q_0^4 (1+z)^6 \sqrt{1 + 2zq_0}} \cdot \bar{n} dz \quad (2.104)$$

bağıntısı elde edilir.  $k=1$  ve  $q_0 > \frac{1}{2}$  olarak bulunan, galaksilerin sayısını hesaplamak için kullanılan, bu bağıntı diğer Friedmann modellerine de uygulanabilir.

## II.7. EVRENİN BOYUTLARI :

Geceleri gökyüzünün neden aydınlık olmadığı hep merak edilmiştir. Çünkü, çapı dünyadan 10 ışık yılı uzakta olan bir küre içerisindeki bölgede, ışıkları dünyaya kadar ulaşan 100 kadar yıldız vardır, Şekil (II.10). Fakat bu yıldızlar uzakta oldukları için, ışıklarını yeterince dünyaya ulaştıramamaktadır. Çünkü ışığın kuvvetinin, kaynaktan uzaklaştıkça çıktığı yer ile aydınlatıldığı yer arasındaki uzaklığın karesiyle orantılı olarak zayıfladığı bilinmektedir. Yani;

$$I \propto \frac{1}{R^2} \quad (2.105)$$

dir. Eğer dünya çevresindeki bu kürenin çapı 20 ışık yılına çıkarılırsa, uzaklık bir misli arttığı için, bu uzaklıkta bulunan yıldızların ışık şiddeti birinci uzaklığa göre, 1/4 oranında azalacaktır. Fakat bu ikinci hacim içerisindeki yıldızların sayısı 100 den 200 e çıkmayacak, yıldız sayısı, hacim oranında arttığından, yani uzaklığın küpüyle arttığından, 8 misli çoğalarak 800 olacaktır. Yani yıldız sayısı;

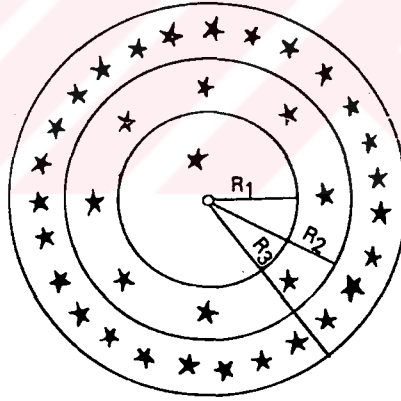
$$N \propto R^3 \quad (2.106)$$

dir. Bu durumda 20 ışık yılı uzaklıktaki bir hacim içerisinde 800 kadar ışık veren yıldız bulunacaktır. Yıldız sayısı küple çoğalıp, ışık şiddeti kareyle azaldığına göre, uzaklık arttıkça gelen ışık şiddetinin artması gereklidir. Fakat gerçekte durum böyle değildir. Geceleri gökyüzü karanlıktır. Yıldızlar arasında bulunan toz ve meteorlarla, gelen bu ışıklar engellenmektedir gibi bir varsayım ile geçici bir çözüm bulunmaya çalışılmışsa da, toz bulutlarının devamlı ışık alması sonucunda bir zaman sonra akkor hale geçeceği ve bu toz bulutlarının bir kaynak gibi ışık ve-

receği kanıtlanmıştır. Dolayısıyla sonsuz bir evren kavramı bu hesaplama-ya göre tümüyle geçerliliğini yitirmiş görünmektedir.

WILHELM OLBERS, belirli uzaklıktan sonra yıldızların ışık şiddeti- nin daha fazla azalacağını söyleyerek, gökyüzünün aydınlık olması için gerekli şartı sağlamaya çalışmıştır. Buna göre, geceleri gökyüzünün aydın-lık olması için, uzayın çapının en az  $10^{20}$  ışık yılı olması gerekir. O za- man arka arkaya dizilen yıldızlar dünyaya, gökyüzünü aydınlatacak kadar belli miktarda ışığın gelmesini sağlarlar. Fakat evrenin çapı  $10^{20}$  ışık yılından çok daha küçük olduğu için geceleri karanlıktır.

Işık Yılı : Bir ışık demetinin gönderildiği yerden, 1 yıl sonra bu- lunduğu yere olan uzaklığıdır. Işık hızının  $3.10^5$  km/sn olduğu hatırlanırsa 1 ışık yılının bile ne kadar uzun bir mesafe olduğu kolayca görülür.



ŞEKİL (II.10)

OLBERS Paradoksu : Evrende yıldız kümelerinin homojen olarak dağıl-dığı, bir kaynaktan çıkan ışığın şiddetinin düştüğü yere uzaklığının ka- resiyle azaldığı ve kürenin hacminde yarıçapının küpüyle arttığı bilin-mektedir. Hacim sonsuz olursa, dünyaya gelen ışığın da miktarı sonsuz ola-cağı için, gökyüzü geceleri aydınlık görülecekti. Evren sınırlı olduğundan, gelen ışığın miktarı, geceleri gökyüzünü aydınlatacak miktara ulaşamamak- tadır.

## II.8. $\lambda$ -TERİMİ İLE KOZMOLOJİK MODELLER :

Bu bölümde Einstein alan denklemlerinde kozmolojik  $\lambda$ -terimi sıfır alınarak Friedmann modelleri elde edildi. Burada üzerinde durulacak modeller;

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \lambda g_{ik} = -kT_{ik} \quad (2.107)$$

şeklinde verilen, kozmolojik  $\lambda$  sabitini de içeren, Einstein alan denklemlerinden elde edilecek modellerdir.

Hubble çalışmalarında,  $\lambda$ -terimine özel bir ihtiyaç olmadığını görmüştür. Einstein-de Sitter modelinde de  $\lambda$ -terimi ihmal edilmiştir.

Ancak A.S.Eddington ve Abbé Lemaitre 1930 ların seçkin kozmologları,  $\lambda$ -terimini içeren modellerin yeterince tartışılmasının iyi olacağını savunmuşlardır. (5)

$\lambda \neq 0$  alınarak, (2.11) ve (2.12) alan denklemleri;

$$2 \frac{\ddot{s}}{s} + \frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} - \lambda c^2 = \frac{8\pi G}{c^2} T_1^1 \quad (2.108)$$

ve

$$\frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} - \frac{1}{3} \lambda c^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} T_0^0 \quad (2.109)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\lambda$ -terimi kısım II.2 de çıkarılan (2.29) sonuçlarını etkilemez. Buna göre, (2.29) bağıntıları (2.108) ve (2.109) bağıntılarında yerlerine yazılırsa;

$$2 \frac{\ddot{s}}{s} + \frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} - \lambda c^2 = 0 \quad (2.110)$$

ve

$$\frac{\dot{s}^2 + kc^2}{s^2} - \frac{1}{3} \lambda c^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{s_0^3}{s^3} \quad (2.111)$$

denklemleri elde edilir.

İlk önce Einstein modelini inceleyelim. (2.110) ve (2.111) denklemlerinde  $s=s_0$  ve dolayısıyla  $\dot{s}=0$ ,  $\ddot{s}=0$  değerleri yerlerine yazılırsa;

$$\frac{kc^2}{s_0^2} = \lambda c^2 \quad (2.112)$$

ve

$$\frac{kc^2}{s_0^2} - \frac{1}{3} \lambda c^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \quad (2.113)$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılarda  $k=+1$  alındığında, (2.112) bağıntısından;

$$\lambda = \frac{1}{s_0^2} \equiv \lambda_c \quad (2.114)$$

elde edilir. (2.113) bağıntısından da, (2.114) kullanılarak;

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{3kc^2}{s_0^2 8\pi G} - \frac{3\lambda c^2}{3 \cdot 8\pi G} = \frac{1}{8\pi G} \left[ 3c^2 \frac{1}{s_0^2} - \lambda c^2 \right] \\ \rho_0 &= \frac{c^2}{8\pi G} \left[ 3\lambda_c - \lambda_c \right] = \frac{\lambda_c c^2}{4\pi G} \\ \rho_0 &= \frac{\lambda_c c^2}{4\pi G} \end{aligned} \quad (2.115)$$

elde edilir.

$\lambda = \lambda_c$ ,  $\lambda$ 'nın kritik değerinin bir çözüm olduğunu ifade etmektedir. Eddington bu çözümde Einstein evreninin sabit olmadığını belirtmiştir. (2.114) ve (2.115) bağıntıları incelenirse;

$$s \rightarrow 0 \text{ için, } \lambda = \lambda_c \rightarrow \frac{1}{0} \rightarrow \infty \text{ ve } \rho_0 \rightarrow \infty \text{ olur,}$$

$$s \rightarrow \infty \text{ için, } \lambda_c \rightarrow \frac{1}{\infty} \rightarrow 0 \text{ ve } \rho_0 \rightarrow 0 \text{ olur.}$$

Buna göre, evren  $s=0$  da patlarcasına büyük bir hızla genişler ve  $s=s_0$  da bu genişleme yavaşlar, burada uzun bir süre geçtikten sonra, genişlemeye devam eder. Şekil (II.11) de  $k=+1$  için;  $\lambda$  değerlerinin  $s(t)$  ile değişimi gösterilmektedir.

$\lambda < \lambda_c$  iken evren  $s=0$  a geri büzülür ve buna "birinci nevi tekrarlanma" modelleri denir.  $\lambda > \lambda_c$  iken evren  $s \rightarrow \infty$ 'a doğru genişler ve "ikinci nevi tekrarlanma" modelleri olarak adlandırılır.

Bununla birlikte, evrenin bir tekrarı olmadığından, bu modellerde değinilen "tekrarlanma" uygun değildir.

(2.111) bağıntısından  $\dot{s}^2$ ;

$$\dot{s}^2 = -kc^2 + \frac{1}{3} \lambda_c^2 s^2 + \frac{8\pi G \rho_0 s_0^3}{3s} \quad (2.116)$$

elde edilir. Böylece  $k=1$  de  $\lambda < 0$  için genişleyen, daha sonra  $\lambda < \lambda_c$  için daralan evren elde edilir.

Son olarak (2.110) ve (2.111) bağıntıları,  $H_0$  ve  $q_0$  cinsinden ifade edililebilir. Böylece;

$$(1-2q_0)H_0^2 + \frac{kc^2}{s_0^2} - \lambda c^2 = 0 \quad (2.117)$$

ve

$$H_0^2 + \frac{kc^2}{s_0^2} - \frac{1}{3} \lambda c^2 = H_0^2 \Omega_0 \quad (2.118)$$

bağıntıları elde edilir. (2.117) ve (2.118) denklemleri taraf tarafa toplanırsa  $\Omega_0$ ;

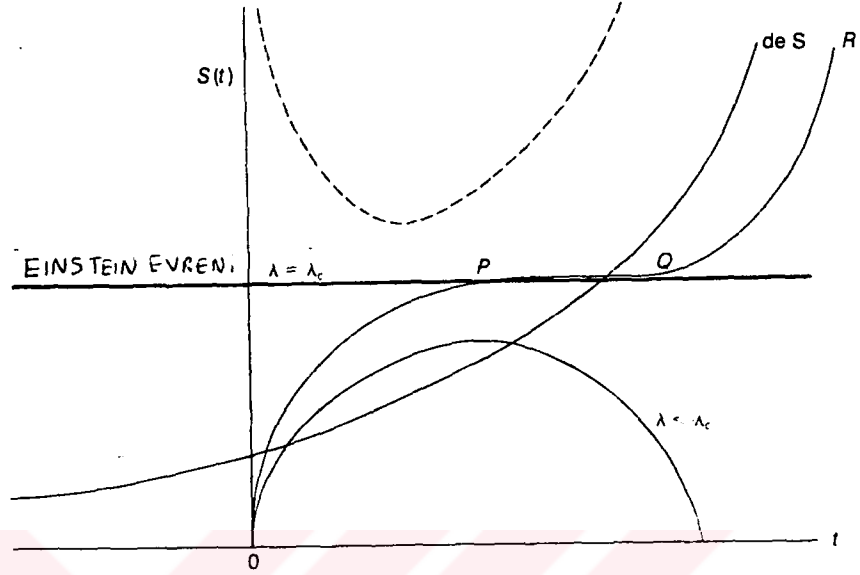
$$\Omega_0 = 2q_0 + \frac{2}{3} \lambda \frac{c^2}{H_0^2} \quad (2.119)$$

elde edilir. Buradan kozmolojik sabit  $\lambda$ ;

$$\lambda = \frac{H_0^2}{c^2} \left( \frac{3}{2} \Omega_0 - 3q_0 \right) \quad (2.120)$$

bulunur. Buna göre  $\lambda > 0$  ise  $q_0$  negatif bir değere sahip olacaktır.

$q_0 < 0$  olması hızlandırılmış bir genişlemedir.



ŞEKİL (II.11)

$k=1$  için  $\lambda$  kozmolojik sabitleri.  $\lambda = \lambda_c$  ile gösterilen kalın çizgi Einstein'ın statik modelini ve de s ile gösterilen eğri, de Sitter modelini gösterir.

$\lambda < \lambda_c$  olursa büyük patlamadan (Big Bang) dolayı bir genişleme ortaya çıkar ve bunu bir büzülme takip eder.  $\lambda_c$ 'den büyük fakat  $\lambda_c$ 'ye çok yakın  $\lambda$  değeri için, Eddington ve Lemaitre tarafından savunulan model gösterilir. Bu modelde P ve Q arasındaki sabit kısım vardır. 0'dan P'ye olan genişleme büyük patlamanın etkisindedir, Q'dan R'ye olan genişleme ise  $\lambda$ -teriminin etkisindedir. Noktalı eğri büzülmeyi ve ondan sonraki genişlemeyi gösterir.

(Bütün eğriler kapalı modeller içindir.)



K A Y N A K L A R

- 1) Narlikar J.V., 1983, Introduction to Cosmology, 30, 110.
- 2) Robertson H.P., 1935, Kinematics and World Structure, A.P.J.82.248  
Walker A.G., 1936, On Milne's theory of World-Structure, Soc.(2)42,  
90.
- 3) Friedmann A., 1922 and 1924, Über die krummung des reumes, z.phys.  
10, 377 and z.phys.21, 326.
- 4) Einstein A. and de Sitter W., 1932, On the relation between the  
expansion and the mean density of universe, proc.Nat.Acad.Sci.18, 213.
- 5) Eddington A.S., 1930, On the Instability of Einstein's Sphrical World.  
M.N.R.A.S. 90, 668.  
Lemaitre G. Abbé, 1931, A homogeneous universe of constant Mass and  
increasing radius accounting for the radial Velocity of extragalactic  
nebulae, M.N.R.A.S. 91, 483.

## Ö Z G E Ç M İ Ş

18.06.1963 yılında Eskiçuma'da doğdum. İlk ve orta dereceli okulları Havsa'da ve liseyi Edirne Teknik Lisesi'nde tamamladım. 1983 yılında girdiğim Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Sınavında Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünü kazandım. 1988 yılında bu bölümden mezun oldum. 1989 yılında Fen Bilimleri Enstitüsü'nün açmış olduğu Yüksek Lisans sınavını kazanarak Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programı ile öğrenimime devam ettim. Ekim 1988 yılında Nükleer Fizik Anabilim Dalında açılan Araştırma Görevliliği sınavını kazanarak T.Ü.Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde göreve başladım. Halen T.Ü.Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevimi sürdürmekteyim.