TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKINSAKLIĞI

Mehmet SEZGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman:
Prof.Dr.Abdüssamet MARŞOĞLU

EDİRNE - 1992

29343

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKINSAKLIĞI

Mehmet SEZGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu Tez 14/02/1992 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.

Prof.Dr. A.Samet MARŞOĞLU
Danışman

Yrd.Doç.Dr. Cengiz DANE
Üye

Yrd.Doç.Dr. Adem DALGIÇ
Üye

Prof. Dr. Cengiz KURTOĞLU
Enstitü Müdürü

İ Ç İ N D E K İ L E R

Sayfa

Ö Z E T

Bu çalışmada, birinci bölümde diferansiyel denklemlerin genel kavramları verilerek sınıflandırması yapıldı. Nonlineer denlemler tanıtılarak tezin esas konusu olan nonlineer parabolik denklemler anlatıldı.İkinci bölümde nonlineer denklemlerin çözümleri hakkında bilgi verilerek sayısal çözümler anlatıldı ve bu çözümler esnasında meydana gelen hatalar belirtildi.Sayısal çözüm metodlarından sonlu farklar anlatıldı ve sonlu farklarda önemli olan yakınsaklık ve stabilite kavramları verildi. Üçüncü bölümde ağırlıklı ortalama yaklaşımı ifade edilerek $U_t = U^{m}_{xx}$ denklemine tatbik edildi. Bu yaklaşım altında denkleme Richtmayer linerizasyon metodu uygulanarak yakınsaklık ve stabilitesi incelendi. Dördüncü bölümde üç zaman seviyeli explicit metod ifade edilerek $U_t = c\ U^{a+1}_{xx}$ denklemine tatbik edildi. Bu yaklaşım altında yakınsaklık ve stabilitesi incelendi.

S U M M A R Y

In the first part of this study, general notions of the differential equations were introduced and their classifications were made. Then, introducing the non-linear equations, the subject of my thesis non-linear parabolic equations were presented. In the second part, the solutions of non-linear equations and errors seen during the applications of the solutions were indicated and also numerical solutions were told. Finite differences of the numerical solutions were introduced, convergence and stability notions having an importance in finite-difference equations were presented.

In the third part, a weighted average approximation was described and applied to the equation $U_t = U^m_{xx}$. With the help of this approximation, Richtmayer Linerizasyon method was applied to that equation and also its convergence and stability were studied. In the fourth part, three time-level explicit method was described and applied to the equation $U_t = cU^{a+1}_{xx}$ and also with the help of that approximation its convergence and stability were studied.

Ö N S Ö Z

Bana kendisi ile böyle bir çalışma olanağı tanıyan ve bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde büyük yardım ve rehberliğini esirgemeyen değerli Hocam Sayın Prof.Dr. Abdüssamet MARŞOĞLU 'na en derin saygı ve şükranlarımı sunarım .

Çalışmalarımı her zaman destekleyen, görüşleri ile yardımcı olan Sayın Hocalarım Yrd.Doç.Dr.Cengiz DANE ve Yrd.Doç. Dr. Adem DALGIÇ 'a , ayrıca çalışmalarım esnasında bana yardımcı olan tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

GiRiŞ:

Günlük hayatımızda karşılaştığımız problemleri belirli standartlara dayandırmak amacıyla bu problemleri matematiksel kurallar içinde formüle etmeye çalışırız. Bu formulasyon çoğu zaman nonlineer diferansiyel denklemlerde son bulur. Bu denklemlere örnek olarak difüzyon olaylarını formülüze eden

$$U_t = L(U)$$

lineer kısmi türevli diferansiyel denklemi verilebilir.

Lineer diferansiyel denklemlerin teorisi ve çözüm metotları çok gelişmiş olduğundan denklemi sağlayan çözüm fonksiyonları kolayca bulunabilir. Nonlineer denklemlerin tam bir teorisi yoktur. Bu nedenle denklemi sağlayan çözüm fonksiyonlarını bulmak genelde güçtür. Bunun yerine nonlineer denklemin yaklaşık bir çözümü aranır. Bu çözümler özellikle 1940 ' lardan sonra büyük gelişme gösteren sayısal metotlarla yapılır. Sayısal metodlarla yapılan bu yaklaşık çözümler seçilen metoda uygun olarak belirli sayıda ve sırası belirlenmiş işlemler bir hesaplayıcı yardımıyla hesaplayarak elde edilir. Elde edilen bu çözümler ,metodun kendisinden gelen hatalar, sayıların hesaplayıcı içinde tam olarak temsil edilememesi, yuvarlatma hataları gibi çeşitli hatalar içerecektir. Bu nedenle elde edilen sayısal çözümün hata analizinin incelenmesi önemli bir unsurdur. Bu inceleme stabilite ve yakınsaklıkla yapılır. Yapılan sayısal çözümde hataların durumu stabilite ile, yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsaması ise yakınsaklık ile incelenir. Bu inceleme sonucunda denklemin çözümünü en iyi yakınsak ve stabilite ile veren sayısal metod belirlenir. Bu nedenle çözüm yapılacaksa öncelikle uygulanan metodun bu problem için stabilite ve yakınsaklığının incelenmesi gerekir.

Bu çalışmada boyutsuz formdaki nonlineer parabolik denklemlerden

$$U_t = U^m_{xx} \qquad m \geq 2$$

$$U(x,0) = 1 \qquad , \ 0 \leq x \leq 1$$

$$U(1,t) = 0 \qquad , \ t \geq 0$$

$$U(0,t) = 0$$

ve

$$U_t = cU^{a+1}_{xx}$$

$$U(x,0) = \text{Sabit} \qquad , \ 0 \leq x \leq 1 \quad , \ t=0$$

$$U(0,t) = k_1 . t \qquad , \ t>0$$

denklemleri sayısal metodlarda önemli olan sonlu farklar metodunun çeşitli yaklaşımları kullanılarak stabilite ve yakınsaklığı incelendi ve çözümün Richtmayer linerizasyon metodu kullanılarak yapılabileceği belirtildi.

1. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TANIMI VE SINIFLANDIRILMASI

1.1. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TANIMI

Fizik,Mühendislik,Sosyal Bilimlerin yanı sıra daha bir çok bilim dalında karşılaşılan çok sayıda problemin çözümünü bulmak için öncelikle bu problemin matematiksel ifadelerle formüle etmek ve sonra bunlarla ilgili sınır ve başlangıç şartlarını kullanarak problemin çözümünü oluşturan fonksiyonları bulmak gerekir. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonun enazından birinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden türevlerini içerebilir [25] . Bir veya daha fazla bağımlı değişkenlerle birlikte,bir veya daha fazla bağımsız değişken ve bu bağımsız değişkenlere bağlı fonksiyonların türevlerini içeren bu tür denklemlere diferansiyel denklem denir.

Diferensiyel denklem bir tek bağımsız değişken içeriyorsa,türevler adi türev olacağından denklem Adi Diferansiyel Denlem olarak isimlendirilir ve

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) \tag{1.1}$$

formunda ifade edilebilir.

İki veya daha fazla bağımsız değişken ile bir veya daha fazla bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini içeriyorsa denkleme Kısmi Türevli Diferansiyel

Denklem denir ve

$$F(x,y,U,U_x,U_y,U_{xy},U_{yy},...) = 0 \qquad (1.2)$$

formunda yazılabilir.

1.2. GENEL KAVRAMLAR VE SINIFLANDIRMA

Diferansiyel denklemler incelenirken derece ve mertebe kavramları kullanılır. Bir diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevinin mertebesi diferansiyel denklemin mertebesi, en yüksek mertebeden türevinin kuvvetine diferansiyel denklemin derecesi denir [1].

Diferansiyel denklemde türevlerin çarpanları değişkenlerden veya değişkenlerin fonksiyonlarından oluşuyorsa denkleme değişken katsayılı, türevlerin çarpanları sabitler ise denkleme sabit katsayılı diferansiyel denklem denir [20] .

Bir diferansiyel denklemde türevleri içeren ifadelerle bağımlı değişken eşitliğin bir yanına toplandığında eşitliğin diğer yanında sıfır kalıyorsa denkleme homojen diferansiyel denklem, eğer eşitliğin diğer yanında sabitler,değişkenler veya değişkenlerin fonksiyonları bulunuyorsa denkleme homojen olmayan diferansiyel denklem denir [1] .

$$D=\frac{d}{dx} \quad \text{olmak üzere}$$

$$L=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_1D+a_0 \qquad (1.3)$$

$$a_n\frac{d^nU}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}U}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dU}{dx}+a_0U=F(x) \qquad (1.4)$$

denkleminde $a_0,a_1,\ldots,a_n$'ler değişkenler veya değişkenlerin fonksiyonları ise (1.4) denklemi değişken katsayılı, $a_0,a_1,\ldots,a_n$'ler sabitler ise (1.4) denklemi sabit katsayılı diferansiyel denklem olur [21] .

(1.4) denkleminde $F(x) = 0$ ise denklem homojen diferansiyel denklem, $F(x) \neq 0$ ise homojen olmayan diferansiyel denklem olur. $a_n \neq 0$ ise (1.4) denklemi n'ci mertebeden diferansiyel denklem, $a_n,a_{n-1},\ldots,a_2 = 0$ ise (1.4) denklemi birinci mertebeden diferansiyel denklem olur [22] .

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin mertebe, lineerlik veya nonlineerliklerine göre sınıflandırılması adi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasına benzer. Bir kısmi türevli denklemin mertebesi denklemde görülen en yüksek mertebeli kısmi türevin mertebesidir. Kısmi diferansiyel denklemde bulunan bağımlı değişken (veya değişkenlere) ve denklemde bulunan kısmi türevlere göre birinci mertebeden ise lineer kısmi türevli diferansiyel denklem denir [4] .

İki bağımsız değişkenli birinci mertebeden bir kısmi türevli denklemi

$$A(x,y)U_x+B(x,y)U_y+C(x,y)U = D(x,y) \qquad (1.5)$$

formunda, iki bağımsız değişkenli ikinci mertebeden lineer denklemi

$$A(x,y)U_{xx}+2B(x,y)U_{xy}+C(x,y)U_{yy}+D(x,y)U_x+E(x,y)U_y$$
$$+ F(x,y)U = G(x,y) \qquad (1.6)$$

şeklinde ifade edilebilir [4] .

(1.6) denklemindeki A,B,C,D,E,F katsayıları sabitler ise denklem sabit katsayılı, x,y nin fonksiyonları ise değişken katsayılı, $G(x,y) = 0$ ise homojen , $G(x,y) \neq 0$ durumunda homojen olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem olacaktır.

İkinci mertebeden iki bağımsız değişken içeren kısmi türevli diferansiyel denklemleri temsil ettikleri eğri ailelerine bakarak üç temel sınıfa ayırmak mümkündür. Bu sınıflandırma diferansiyel denklemin şeklini basitleştirmek için yapılan bağımsız değişkenlerin bir transformasyonunda tabii bir şekilde ortaya çıkmaktadır.

$$A(x,y)U_{xx}+B(x,y)U_{xy}+C(x,y)U_{yy}+F(x,y,U_x,U_y) = 0 \qquad (1.7)$$

denklemi lineer veya nonlineer olsun.

$\Delta = B - 4AC$ 'nin değerine bağlı olarak verilen bir R bölgesinin bir noktasında Parabolik,Hiperbolik ve Eliptik olarak sınıflandırılabilir.

$\Delta = 0$ ise incelenen denklem Parabolik, $\Delta < 0$ ise Eliptik ,

$\Delta > 0$ ise Hiperbolik denklem olarak isimlendirilir.

Matematik Fizikte bir çok problem kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerine indirgenir.Bunlardan en çok bilinenlerini yazarsak

$U_{tt} - c(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0$ Dalga denklemi, Hiperbolik

$U_t - k(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0$ Isı denklemi, Parabolik

$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$ Laplace denklemi, Eliptiktir. (1.8)

1.3. NONLİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Lineer diferansiyel denklemlerin genel teori ve çözüm metodları çok gelişmiş iken nonlineer diferansiyel denklemlerin yapısı hakkında çok az şey bilinmektedir. Gerçekte çok sayıda fiziksel problemin matematiksel formülasyonu nonlineer diferansiyel denklemlerde son bulur ki bu denklemler daha karmaşık bir matematik yapıya sahiptir [1] .

Verilen bir diferansiyel denklem lineer değilse nonlineer olarak isimlendirilir. Nonlineer denklemleri lineer denklemlerde olduğu gibi adi ve kısmi türevli nonlineer denklemler olarak incelemek mümkündür.

Birinci mertebeden tek değişkenli nonlineer denklemlere örnek olarak Bernoulli ve Riccati denklemleri verilebilir.

$y = a(x)y + b(x)y^p$ Bernoulli denklemi, (1.9)

burada p keyfi bir sabittir ve p=0 , p=1 için denklem lineer diğer durumlarda nonlineerdir.

$$y = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad \text{Riccati denklemi,} \qquad (1.10)$$

$a(x) = 0$ ise denklem lineer , $c(x) = 0$ ise denklem Bernoulli denklemi olur. Riccati denklemi mertebesi indirgenerek veya çeşitli ilavelerle Bernoulli denklemine dönüştürülerek çözüm yapılır [19] .

Birinci mertebeden nonlineer denklemler olduğu gibi yüksek mertebeden nonlineer diferansiyel denklemler olabilir. Yüksek mertebeden nonlineer denklemler Autonom denklemler halinde bulunabilir. Bu tür denklemler açıkça bağımsız değişkenin gözükmediği denklemlerdir.

$$Ay'' + By' + Cy = 0 \qquad (1.11)$$

Denklemin katsayıları bağımlı değişkenin kendisi veya türevlerinden meydana gelir.

Nonlineer denklem Euler denklemi olarak bulunabilir.

$$A_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + A^n y = F(x) \qquad (1.12)$$

Denklemde $A_0, \ldots, A_n$ ifadeleri bağımlı değişken ise denkleme y 'li Euler denklemi denir [19] .

Genel olarak bir adi diferansiyel denklem bağımlı değişken y 'nin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha yüksek dereceden kuvvetlerini,bağımlı değişkenin kendisi ve türevinin çarpımlarını içeren terimler ihtiva ediyorsa bu denklem nonlineerdir denir [1] .

Kısmi türevli denklemlerde kısmi türevler birinci mertebeden ise denkleme lineerdir denir. Lineer kısmi türevli denklemler ile nonlineer kısmi türevli denklemler arasında iki ara sınıf denklem tanımlamak mümkündür.

Bir kısmi türevli denklem, denklemde görülen en yüksek mertebeli türevlere nazaran (denklemdeki düşük mertebeli türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise denkleme yarı lineer (Quasi-Lineer) dir denir [4] . Birinci mertebeden iki bağımsız değişkenli yarı lineer denklemin en genel formu

$$A(x,y,U)U_x+B(x,y,U)U_y = R(x,y,U) \quad ; \qquad (1.13)$$

ikinci mertebeden yarı lineer denklemi

$$A(x,y,U,U_x,U_y)U_{xx}+ 2B(x,y,U,U_x,U_y)U_{xy}+C(x,y,U,U_x,U_y)U_{yy}+$$

$$D(x,y,U,U_x,U_y) = 0 \qquad (1.14)$$

şeklinde yazılabilir.

Lineer ile yarı lineer kısmi türevli denklemler arasında bir ara sınıf kısmi türevli denklem tanımlanabilir.
Kısmi türevli denklem yarı lineer ise ve denklemde görülen en yüksek mertebeli türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu ise denkleme hemen hemen lineer kısmi türevli denklem denir. Bu sınıf denklemin en genel

formu

$$A(x,y)U_{xx}+2B(x,y)U_{xy}+C(x,y)U_{yy}+D(x,y,U,U_x,U_y) = 0 \qquad (1.15)$$

şeklinde yazılır [4] .

1.3.1. NONLİNEER PARABOLİK DENKLEMLER

$$L(U) = AU_{xx}+ 2BU_{xy}+ CU_{yy}+ M(x,y,U,U_x,U_y) = 0 \qquad (1.16)$$

hemen hemen lineer bir denklem olsun. A,B,C katsayıları sıfırdan farklı, xy düzleminin bir R bölgesinde ikinci mertebeden türevleri sürekli reel değerli fonksiyonlar olsun. $AD_x^2+ 2BD_xD_y+ CD_y^2$ (1.16) denklemindeki L operatörünün esas kısmıdır. Bir denklemin çözümünü tayin eden esas kısmıdır.

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y).C(x,y)$$

ile tanımlanan Δ fonksiyonuna L 'nin diskriminantı denir. Eğer $\Delta(x,y) = 0$ ise R 'nin her noktasında denklem paraboliktir denir. Mevcut yapılacak bir transformasyonla iki bağımsız değişkenli parabolik denklemler için normal form dediğimiz

$$U_{xx}+ G(x,y,U,U_x,U_y) = 0 \qquad (1.17)$$

genel formu elde edilir. Bu formu daha kısa olarak operatör notasyonu ile

$$U_t= L(U) \qquad (1.18)$$

şeklinde yazabiliriz.

Parabolik denklemlere en güzel örnek olarak

$$U_{xx}=U_t \tag{1.19}$$

ısı denklemi verilebilir. Bu denklemler genellikle ısı,kütle, netron vb. difüzyon problemlerinde ortaya çıkar [4,25] .

2. NONLİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜM METODLARI

2.1. NONLİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Diferansiyel denklemleri sınıflandırmak ve onların çözülebilirlik durumlarını araştırmak diferansiyel denklemlerin başlıca konusu olmuştur. Uygulamada daha çok bir diferansiyel denklem verildiğinde onun çözümü bulunur ve çözümün özellikleri incelenir. Diferansiyel denklemlerin genel bir çözüm metodu olmadığından denklemler sınıflandırılarak çözüm bulunmaya çalışılır.

(1.1) denklemi lineer veya nonlineer adi diferansiyel denklem olsun. Bu diferansiyel denklemi çözmek veya integre etmek,denklemi özdeş olarak sağlayan sürekli, türetilebilir tüm $y = F(x)$ fonksiyonlarının kümesini belirlemek demektir. Denklem adi diferansiyel denklem olduğundan $y = F(x)$ çözümlerini genel,özel ve tekil çözümler olarak sınıflandırabiliriz. n 'ci mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümü sayıca aşağı düşürülemeyen n tane keyfi sabit içerir. Özel çözümler genel çözümdeki sabitlere özel değerler vermek suretiyle elde edilir. Genel çözümden elde edilemeyen fakat verilen denklemi sağlayan başka çözümler bulunabilir. Bu çözümlere tekil çözümler denir.

Lineer diferansiyel denklemlerin çözüm teknikleri ve teorisi çok gelişmiş olduğundan genel,özel ve tekil çözümleri çoğunlukla kolayca bulunabilir. Nonlineer diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak genelde güçtür.Bu nedenle denklemler bilinen bir denkleme dönüştürülerek veya sayısal olarak çözümleri araştırılır. Nonlineer adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için belli bir metod yoktur. Orijinal denklem çeşitli dönüşümlerle bilinen lineer denkleme dönüştürülerek veya sayısal çözüm yöntemleri kullanılarak çözülür.

Nonlineer diferansiyel denklem kısmi türevli denklem olabilir. Genel olarak kısmi türevli denklemlerin çözümlerini

1- Kısmi türevli denklemi adi diferansiyel denkleme indirgeme
   a- Değişkenlerine ayırma metodu
   b- Transformasyonlar metodu
   c- Benzerlik dönüşümleri
   d- Karekteristikler metodu
2- Operatör tersinin kullanılması
3- Sayısal metodlar

şeklinde sınıflandırmamız mümkündür [23] .

Adi diferansiyel denklemin çözümünde önce keyfi sabitleri içeren genel çözüm bulunur. Denklemle birlikte verilen sınır-başlangıç şartları genel çözüme uygulanır ve buradan keyfi sabitler bulunarak denklemin çözümü analitik olarak ifade edilir. Kısmi türevli denklemlerde durum tamamen farklıdır. Genel çözümde keyfi sabitlerden çok bağımsız değişkenlerin keyfi fonksiyonları bulunur. Böylece çözümün şeklinde daha büyük derecede bir genellik elde edilir. Uygulamada verilen kısmi türevli denklemin pek çok çözümü içinden önceden verilmiş sınır-başlangıç koşuluna uyanı elde edilmeye çalışılır.

Diferansiyel denklemlerin elde edilen çözümlerini genel olarak analitik ve sayısal olmak üzere iki başlık altında toplayabiliriz. Analitik çözümde y = F(x) formunda bir çözüm aranır. x 'in her değeri için y 'yi temsil eden bir değer bulunuyorsa y = F(x) formundaki çözüme analitik çözüm denir. özellikle nonlineer diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak genelde güç olduğundan çözüm sayısal olarak elde edilmeye çalışılır.Nümerik analizde veya sayısal yöntemlerde sayılarla çalışıldığından y = F(x) şeklinde bir çözüm bulunmaz. Gerçekte buna gereksinim yoktur. Genelde amacımız bir çözüm bulmak olduğundan verilen her x 'e karşılık y 'ye bir değer bulabiliriz. Bunu bir sayısal yöntem kullanarak geçerli bir F(x) fonksiyonu bulmaksızın sayısal çözümlerle yapabiliriz [24] . Sayısal yöntemlerle yapılan çözümlerde çeşitli hatalar meydana geleceğinden yapılan çözümün nekadar doğru olduğunun incelenmesi gerekir. Bu incelemede meydana gelen hataların durumunu stabilite ile, yapılan sayısal çözümün esas çözüme yakınsaması durumu ise yakınsklıkla belirtilir. Tutarlı bir sayısal çözümde hataların artmaması ve yapılan sayısal çözümün esas çözüme yakınsaması istendiğinden sayısal çözümlerde stabilite ve yakınsaklık önemli olmaktadır.

2.2. SAYISAL ÇÖZÜMLER

Sayısal çözümleme,matematiksel modellerle ifade edilmiş çeşitli alanlara ait bir problemi seçilen etkin bir sayısal metod ile belli sayıda ve sırası belirlenmiş işlemleri bir hesaplayıcı yardımıyla belirli bir hassaslığa sahip sonuçlar elde etmektir.

Öne sürülen problemin çözümü için kullanılabilecek sayısal metodun seçimi için çeşitli gerekçeler öne sürülebilir. Metodun hızı (işlemlerin aldığı zaman) ve elde edilen sonuçların hassaslığı metodun seçimini etkileyen en önemli iki faktördür. Problemin çözümü için kullanılan giriş bilgileri çoğu kez bir deney, bir ölçme sonucu bulunacaklarından veya bir tablodan alınıp, bir fonksiyondan hesaplandıklarından az çok bir yanlışa sahiptirler. Çözüm için kullanılan metodun kendi yönteminden oraya çıkan kesme yanlışı (Truncation Error) ve hesaplayıcada yapılan aritmektik işlemlerden doğan yuvarlama yanlışı (Roundoff Error) diye iki yanlışa yol açacaktır. Böylece giriş bilgilerinde varolan yanlışlar metodun kendisinden ve yapılan işlemlerden ötürü daha da artmış olarak sonuç bilgilerinde bulunacaktır.Hiç kuşkusuz bu belirtilen yanlışları enaz olan metod problemin çözümü için kullanılacaktır [12] .

Genel olarak sayısal çözümlerde meydana gelen hataları üç başlık altında toplayabliriz.

a- Veri hataları

b- Kesme hataları

c- Yuvarlama hataları

Sayısal çözümdeki bu hatalar çözümün hata analizini gerekli kılmaktadır. Hata analizi sayısal çözümlerde gözönüne alınması gereken bir unsurdur. Sayısal çözümlerdeki hatayı; U tam çözümü , u yaklaşık çözümü göstermek üzere,

$$e = U - u \tag{2.1}$$

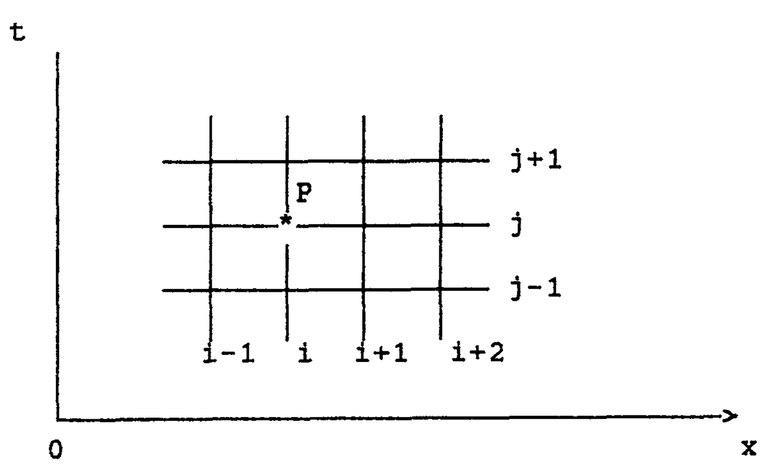
bağıntısı ile formülüze edebiliriz.

Hesaplamalarda,deney sonucundaki ölçü değerlerinin kullanılması,sayıların hesaplayıcı içinde tam olarak temsil edilememesi,sayıların hesaplayıcı içinde belirli uzunlukta saklanması sonsuz terimli bir seriyi uygun şekilde keserek belli sayıdaki terimden sonrakilerin ihmal edilmesi ve metodun kendisinden gelen hatalar sayısal işlemdeki hatayı oluşturacaktır. Oluşan bu hataları hesaplamak veya bir üst sınırını bulmak mümkündür.

2.2.1. SONLU FARKLAR

Sonlu farklar sayısal çözümlemede geniş bir kullanım alanına sahiptir. Hatta sayısal işlemlerin pek çoğuna temel teşkil eder. Verilen bir y = F(x) fonksiyonu sürekli olduğu aralık içinde herhangi bir noktada formülle tanımlama olanağı olmasın. Verilen aralık ve bölgede fonksiyonun mevcut olduğu varsayılır. Sonlu farklar kullanılarak aralığın içinde herhangi bir noktada ki değer için iyi bir yaklaşım bulmak olasıdır.

Sonlu farklar metodunun çözüm bölgesi ele alınan bölgenin eşit veya eşit olmayan aralıklarla birbirine paralel eğri veya doğruların çizilmesi ile oluşur. Böylece bölge üzerinde düğüm noktaları meydana gelecektir. Hesaplayıcıların işlemleri maksimum hızla yapabilmesi için ağ yapısının basit olması istenir. Bu nedenle genelde sadece dikdörtgen,kare veya üçgen ağ yapıları kullanılır .



Şekil.2.1. Sonlu fark çözüm bölgesi

Ağ yapısındaki aralıkların eşit olması gerekmez. Bu durumda düzensiz ağ yapısı oluşacaktır. Bu düzensiz ağ yapısı üzerinde oluşturulacak sonlu fark denklemleri bölgeden bölgeye değişeceğinden bu da karmaşıklık yaratacaktır. Düzenli ağ yapısı üzerinde oluşturulan sonlu fark denklemleri genellikle Explicit ve Implicit olmak üzere iki başlık altında toplanarak incelenir [2,3,12,14] .

2.2.2. SONLU FARK OPERATÖRLERİ

Sonlu fark matematiği ifade edilirken çeşitli operatörler kullanılır. U(x) tek değişkenli bir fonksiyon ve h adım uzunluğunu göstermek üzere

$$
\begin{aligned}
\Delta U(x) &= U(x+h) - U(x) \\
\nabla U(x) &= U(x) - U(x-h) \\
\delta U(x) &= U(x+h/2) - U(x-h/2) \\
\mu U(x) &= 1/2\ [\ U(x+h/2) - U(x-h/2)\ ] \qquad (2.2) \\
EU(x) &= U(x+h)
\end{aligned}
$$

Burada Δ ,∇ ,δ ,μ ,E sembolleri sırasıyla ileri, geri, merkezi,ortalama ve kaydırma operatörleri olarak bilinir.
Sonlu fark çözüm bölgesi

$x_1 = x_0+h$, $x_2 = x_0+2h$, ... , $x_n = x_0+nh$ şeklinde eşit

aralıklı olarak alındığında bu noktalardaki U(x) fonksiyonunun değeri

$U(x_0) = U_0$, $U(x_1) = U_1$, ... , $U(x_n) = U_n$ olacaktır.

Bu durumda herhangi bir x noktasındaki ileri,geri ve merkezi farkları

$$U_i = U_{i+1} - U_i$$

$$U_i = U_{i+2} - 2U_{i+1} + U_i \qquad (2.3)$$

$$U_i = U_i - U_{i-1}$$

$$U_i = U_i - 2U_{i-1} + U_{i-2}$$

$$U_i = U_{1+1/2} - U_{1-1/2}$$

$$U_i = U_{i+1/2} - 2U_i + U_{1-1/2} \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

olarak yazabiliriz. İstenirse daha yüksek mertebeden ileri, geri ve merkezi farklar yazılabilir.

Diferansiyel denklemlerin terimleri türev ifadelerinden oluşmaktadır. Sonlu fark operatörleri ile türev operatörü arasındaki ilişkileri yazarak tüm sonlu fark ifadelerini türevler cinsinden ifade etmiş oluruz.

$D = d/dx$ türev operatörünü göstersin. Sonlu fark operatörleri ile türev operatörü arasındaki ilişkiyi yazarsak; $U(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki Taylor seri açılımını yazalım.

$$U(x) = U(x_i) + (x-x_i)\, U'(x_i) + \frac{(x-x_i)}{2!}\, U''(x_i) + \ldots. \qquad (2.4)$$

$$U(x) = U(x_i) + (x-x_i)\, DU(x_i) + \frac{(x-x_i)}{2!}\, D\, U(x_i) + \ldots. \qquad (2.5)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$x_i = x_{i+1}$ için (2.5) denklemi yazılırsa

$$U(x_{i+1}) = (1+hD + \frac{h}{2!} D + \ldots.)\, U(x_i) = e^{hD}\, U(x_i) \qquad (2.6)$$

ve kaydırma operatörü yardımıyla

$$EU(x_i) = e^{hD}\, U(x_i)$$

$$E = e^{hD}$$ yazılabilir.

(2.4) açılımından

$$U'|_i = 1/h\, [\, u_{i+1} - u_i \,]$$

$$U''|_i = 1/h\, [\, u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i \,]$$ ileri fark;

$$U'|_i = 1/h\, [\, u_i - u_{i-1} \,] \qquad (2.7)$$

$$U''|_i = 1/h\, [\, u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2} \,]$$ geri fark;

$$U'\big|_{i} = 1/2h\ [\,u_{i+1} - u_{i-1}\,]$$

$$U''\big|_{i} = 1/h\ [\,u_{i+1} - 2u_{i} + u_{i-1}\,] \qquad \text{merkezi fark;}$$

Tek değişkenli fonksiyon için yazılan bu türev yaklaşımları iki veya daha çok değişkenli fonksiyonlar içinde yazılabilir.

U(x,t) fonksiyonu için türev yaklaşımları elde edelim. Sonlu farkların çözüm bölgesini eşit dikdörtgen bölgeler olarak alalım. Kenarları h ve k olmak üzere meydana gelen ağ noktaları üzerindeki U fonksiyonunu

$$x = ih \quad , \quad t = jk$$

$U_s = U(ih,jk) = U_{i,j}$ ile gösterelim.

x ve t doğrultusundaki türev ifadelerini

$$U_x\big|_{i,j} = 1/h\ [\,u_{i+1,j} - u_{i,j}\,] \ ;\ U_t\big|_{i,j} = 1/k\ [\,u_{i,j+1} - u_{i,j}\,]$$

$$U_x\big|_{i,j} = 1/h\ [\,u_{i,j} - u_{i-1,j}\,] \ ;\ U_t\big|_{i,j} = 1/k\ [\,u_{i,j} - u_{i,j-1}\,]$$

$$U_x\big|_{i,j} = 1/2h\ [\,u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\,] \ ;\ U_t\big|_{i,j} = 1/2k[\,u_{i,j+1} - u_{i,j-1}\,]$$

$$U_{xx}\big|_{i,j} = 1/h\ [\,u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\,]$$

$$U_{tt}\Big|_{i,j} = 1/k\ [\, u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} \,]$$

şeklinde yazabiliriz. İstenirse daha yüksek mertebeden türev ifadeleri sonlu fark yaklaşımları ile ifade edilebilir.

2.2.3. SONLU FARKLARDA YAKINSAKLIK VE STABİLİTE

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde birbiriyle ilgili olan yakınsama ve stabilite problemleri ile karşılaşılır. Sayısal çözümde işlemler sonucunda bir takım hatalar meydana gelecektir. Eğer çözümde meydana gelen hatalar her adımda birikerek artmıyor veya belli bir değerden küçük kalıyorsa çözüm stabildir denir. Aksi durumda hatanın büyümesine neden olan bir sayısal çözüm stabil olmayacaktır.

Sayısal çözümde sonlu fark yaklaşımlarını kullandığımızdan çözüm bölgemizin kenarları h ve k olan eşit alt bölgelere ayrılmıştır. Bu durumda x-t düzleminde bir ağ sistemi oluşacak ve bu ağ sistemi h ve k parametrelerine bağlı olacaktır. h ve k aralık büyüklükleri çok küçük seçilirse çözüm bölgesi daha hassas bir ağ yapısı oluşturacaktır. Bu durumda U gerçek çözüm , u yaklaşık çözüm ve $\bar{u}$ hesaplayıcıdan gelen hatalı değeri göstermek üzere

$U - u$ = Ayrıklaştırma (Discretization) hatası

$u - \bar{u}$ = global kesme hatası

$U - \bar{u} = (U - u) + (u - \bar{u})$ = Toplam hata yazılabilir. Ayrıklaştırma hatası belirli bir t seviyesi boyunca $x = h \longrightarrow 0$, $t = k \longrightarrow 0$ iken sonlu fark ile elde edilen çözümün analitik çözüme yaklaştığını gösterdiğinden yakınsaklığı ifade eder.

Global kesme hatası başlangıç değerlerindeki hataların ileriki t zaman seviyelerindeki durumunu içerdiğinden stabiliteyi ifade eder.

Toplam hata gözönüne alındığında bunun global kesme ve ayrıklaştırma hatalarından meydana geldiği görülür. Burada ilk terim yakınsamayı ikincisi stabiliteyi içerir [2,3,19].

3. $U_t = U_{xx}^m$ DENKLEMİNİN AĞIRLIKLI ORTALAMA YAKLAŞIMIYLA STABİLİTE VE YAKINSKLIĞI

3.1. AĞIRLIKLI ORTALAMA YAKLAŞIMI

Sonlu farklarda ağırlıklı ortalama yaklaşımı kullanılarak Explicit ve Implicit metodları da içeren daha genel sonlu fark denklemleri elde edilir.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$ lineer parabolik denklemi için ağırlıklı ortalama yaklaşımı

$$U_t\Big|_{i,j} = \frac{1}{k}\left[u_{i,j+1} - u_{i,j} \right]$$

$$U_{xx}\Big|_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left[\alpha \left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} \right) + (1-\alpha)\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \right) \right] \qquad (3.1)$$

$$r = k/h^2 \qquad (3.2)$$

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = r\left[\alpha \left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} \right) + \right.$$

$$(1-\alpha)\,(\,u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\,)\,] \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada α , $0 \le \alpha \le 1$ olup ağırlık çarpanı olarak bilinir.

$$\delta_x U_{i,j} = u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}$$

$$\delta_x^2 U_{i,j} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \tag{3.4}$$

olmak üzere (3.3) denklemini { ih, (j+1/2)k } noktasında operatör notasyonu ile daha kısa olarak

$$\delta_t u_{i,j+1/2} = r\,\{\,\alpha\,\delta_x^2 u_{i,j+1} + (1-\alpha)\,\delta_x^2 u_{i,j}\,\} \tag{3.5}$$

biçiminde ifade edebiliriz.

$\alpha = 0$ alınırsa Explicit sonlu fark denklemi; $\alpha = 1/2$ alınırsa Crank-Nicolsan ve $\alpha=1$ alınırsa Implicit geri zaman sonlu fark denklemi elde edilir. Denklemler α , $1/2 \le \alpha < 1$ seçilirse yakınsak ve stabil ; $0 \le \alpha < 1/2$ seçilirse

$$r = k/h^2 \le \frac{1}{2(1-2\alpha)} \tag{3.6}$$

olmalıdır.

3.2. $U_t = U^m_{xx}$ DENKLEMİNE RICHTMAYER LİNERİZASYON METODUNUN UYGULANMASI

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U^m}{\partial x^2} \qquad m \geq 2 \tag{3.7}$$

$$U(x,0) = 1 \qquad , \; 0 \leq x \leq 1$$

$$U(1,t) = 0 \qquad , \; t \geq 0$$

$$U(0,t) = 0$$

şeklinde tanımlanan lineer olmayan parabolik denklemi için (i,j) noktasında ağırlıklı ortalama yaklaşımını yazalım.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 1/k \; [\; u_{i,j+1} - u_{i,j} \;]$$

$$\frac{\partial^2 U^m}{\partial x^2} = 1/h^2 \; [\; \alpha \; \delta^2_x \; u^m_{i,j+1} + (1-\alpha) \; \delta^2_x \; u^m_{i,j} \;]$$

$$1/k \; [\; u_{i,j+1} - u_{i,j} \;] = 1/h^2 \; [\; \alpha \; \delta^2_x \; u^m_{i,j+1} + (1-\alpha) \; \delta^2_x \; u^m_{i,j} \;] \tag{3.8}$$

(i,j) noktasında Taylor seri açılımını kullanırsak;

$$u^m_{i,j+1} = u^m_{i,j} + k \frac{\partial u^m_{i,j}}{\partial t} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u^m_{i,j}}{\partial t^2} + \ldots.$$

ikinci terimden sonraki terimler ihmal edilirse ,

$$u^m_{i,j+1} = u^m_{i,j} + k \frac{\partial u^m_{i,j}}{\partial u_{i,j}} \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = 1/k \; [\; u_{i,j+1} - u_{i,j} \;]$$

k ' ci sıradaki terimler için

$$u^m_{i,j+1} = u^m_{i,j} + m.u^{m-1}_{i,j} \; \{ \; u_{i,j+1} - u_{i,j} \; \} \qquad (3.9)$$

olur ki bu denklem lineer olmayan $u^m_{i,j+1}$ değerini

$$W_i = u_{i,j+1} - u_{i,j} \qquad (3.10)$$

dönüşümüyle $u_{i,j+1}$ noktasında lineerleştirir. Bu dönüşümü (3.8) denleminde yerine yazalım.

$$1/k \; W_i = 1/h^2 \{ \; \alpha \; \delta^2_x \; [\; u^m_{i,j} + m \; u^{m-1}_{i,j} \; W_i \;] + (1-\alpha) \; \delta^2_x \; u^m_{i,j} \; \}$$

$$W_i = r \; \{ \; m\alpha\delta^2_x \; u^{m-1}_{i,j} \; W_i + \delta^2_x \; u^m_{i,j} \; \} \qquad (3.11)$$

Bu denklem düzenlenirse

$$-r m \alpha\, u^{m-1}_{i-1,j} W_{i-1} + (1+2 r m \alpha\, u^{m-1}_{i,j}) W_i - r m \alpha\, u^{m-1}_{i+1,j} W_{i+1} =$$

$$r\, u^{m}_{i-1,j} - 2r\, u^{m}_{i,j} + r\, u^{m}_{i+1,j} \qquad (3.12)$$

elde edilir. Bu denklem matris formunda yazılıp Gauss elimi-nasyon metoduyla W_i'ler elde edilebilir. Buradan

$$W_i = u_{i,j+1} - u_{i,j}$$

$u_{i,j+1} = W_i + u_{i,j}$ ' den (j+1) ci seviyedeki çözüm bulunabilir.

3.3. $U_t = U^m_{xx}$ DENKLEMİNİN AĞIRLIKLI ORTALAMA YAKLAŞIMIYLA STABİLİTESİ

m=2 için (3.12) Denkleminin matris formunu yazalım.

$$
\begin{bmatrix}
1+4r\alpha u_{1,j} & -2r\alpha u_{2,j} & & & 0 \\
-2r\alpha u_{1,j} & 1+4r\alpha u_{2,j} & -2r\alpha u_{3,j} & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & -2r\alpha u_{N-1,j} \\
0 & & & -2r\alpha u_{N-2,j} & (1+4r\alpha u_{N-1,j})
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
W_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ W_{N-1}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
-2ru_{1,j} & ru_{2,j} & & & 0 \\
ru_{1,j} & -2ru_{2,j} & ru_{3,j} & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & ru_{N-1,j} \\
0 & & & ru_{N-2,j} & -2ru_{N-1,j}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{1,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1,j}
\end{bmatrix}
+
$$

$$
\begin{bmatrix}
ru_{0,j}^{2}+2r\alpha u_{0,j}(u_{0,j+1}-u_{0,j}) \\
\vdots \\
ru_{N,j}^{2}+2r\alpha u_{N,j}(u_{N,j+1}-u_{N,j})
\end{bmatrix}
$$

$u_{i,j}$ 'nin her bir fonksiyonunun değerini pozitif bir c parametresi ile gösterelim. Matrisi düzenlersek

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2rc\alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} (u_{j+1} - u_j)$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} u_j + b \qquad ;$$

$$T_{N-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan ;

$$(I - 2rc\alpha T_{N-1}).(\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j) = rcT_{N-1} \bar{u}_j + b$$

$$(I - 2rc\alpha T_{N-1}). \bar{u}_{j+1} = (I - rc(2\alpha-1) T_{N-1}) \bar{u}_j + b$$

$$\bar{u}_{j+1} = A\bar{u}_j + b \qquad (3.13)$$

formu elde edilir.

Hata vektörü ile özdeğerler arasındaki bağıntıyı yazalım. u_o başlangıç değerleri vektörü olmak üzere hesaplamaya u_o yerine u^*_0 ile başlayalım.

$$u^*_1 = Au^*_0 \quad , \quad u^*_2 = A\,u^*_1 \quad , \quad u^*_2 = A^2\,u^*_0$$

$$u^*_j = A^j\,u^*_0$$

e hata vektörü

$$e = u - u^*$$

$$e_j = u_j - u^*_j = A^j(u_0 - u^*_0) = A^j\,e_0$$

$$e_{j+1} = Ae_j = A^2e_{j-1} = \ldots = A^{j+1}e_0$$

$$e_{j+1} = u_{j+1} - u^*_{j+1} = Au^{a+1}_j - Au^{*(a+1)}_j$$

$$= A(u^{a+1}_j - u^{*(a+1)}_j) = Ae_j$$

$$e_{j+1} = A^{j+1}e_0 \qquad (3.14)$$

bulunur. Böylece sonlu fark denkleminde j sınırsız olarak arttığında e_j artmıyor veya belli bir değerden küçük kalıyorsa stabil olacaktır. Bu araştırma A matrisinin özdeğerlerindeki hata vektörünün ifadesiyle yapılır.A matrisinin (N-1) tane λ_s özdeğeri ve buna karşı gelen V_s özvektörleri olduğunu farzedelim. Bu vektörler (N-1) boyutlu vektör uzayına baz teşkil ederler. Buna göre e_0 hatası

$$e_0 = \sum_{s=1}^{N-1} c_s V_s$$

şeklinde ifade edilebilir [2]. Burada c_s 'ler bilinen skalerlerdir. s=1(1)(N-1). Bundan yararlanarak

$$e_1 = Ae_0 = A\sum c_s V_s = \sum c_s A V_s$$

$AV_s = \lambda_s V_s$ özdeğerleri tanımından

$e_1 = \sum c_s \lambda_s V_s$, $e_{j+1} = \sum c_s \lambda_s^j V_s$ yazılır.

T_{N-1} (N-1).(N-1) boyutlu matrisini özdeğerleri

$$\lambda_k = -4\mathrm{Sin}^2 \frac{k\pi}{2N} , \qquad k=1(1)(N-1) ; \qquad (3.15)$$

A matrisinin λ_s özdeğerleri

$$\lambda_s = \{ 1-4rc(1-2\alpha)\ \mathrm{Sin}^2 \frac{k\pi}{2N} \} / (1+8r\alpha c\ \mathrm{Sin}^2 \frac{k\pi}{2N})$$

olur. Hataların artmaması için $|\lambda_s| \leq 1$ olması gerekir.

$$| (1-4rc(1-2\alpha)\ \mathrm{Sin}^2 \frac{k\pi}{2N}) / (1+8r\alpha c\ \mathrm{Sin}^2 \frac{k\pi}{2N}) | \leq 1 \qquad (3.16)$$

(3.16) denklemi düzenlenirse ,

$$4rc\, \mathrm{Sin}^2 \frac{k\pi}{2N} \; (1-4\alpha) \le 2 \qquad (3.17)$$

bulunur. (3.17) ifadesi $r>0$, $c>0$, $\alpha \ge 1/4$ durumunda daima sağlanır. Bu durumda (3.7) denklemi $0 \le \alpha < 1/4$ ve

$$c = \mathrm{Max}\; u_{i,j}$$

seçilirse

$$r \le \frac{1}{2c(1-4\alpha)\, \mathrm{Sin}^2 \dfrac{k\pi}{2N}} \qquad (3.18)$$

değeri için stabil olacaktır.

3.4. $U_t = U_{xx}$ DENKLEMİNİN AĞIRLIKLI ORTALAMA YAKLAŞIMIYLA YAKINSAKLIĞI

(3.7) denklemi için ağırlıklı ortalama yaklaşımını yazalım.

$$(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = r\alpha(u^m_{i+1,j+1} - 2u^m_{i,j+1} + u^m_{i-1,j+1}) + r(1-\alpha)$$

$$(u^m_{i+1,j} - 2u^m_{i,j} + u^m_{i-1,j}) \qquad (3.19)$$

Denklem düzenlenirse

$$- r\alpha(u^m_{i+1,j+1} - 2u^m_{i,j+1} + u^m_{i-1,j+1}) + u_{i,j+1} = r(1-\alpha)\,(u^m_{i+1,j} -$$

$$2u^m_{i,j} + u^m_{i-1,j}) + u_{i,j} \qquad (3.20)$$

elde edilir. Sonlu fark yaklaşımlarının yakınsama problemi ağ noktalar üzerinde sonlu fark çözümü ile diferansiyel denklemin analitik çözümü arasındaki farkın incelenmesinden ibarettir. Bu farkı

$$e = U - u$$

şeklinde yazalım ve bunu ağ noktalar üzerinde ifade edelim.

$$u = U - e$$

$$u_{i+1,j+1} = U_{i+1,j+1} - e_{i+1,j+1}$$

$$u_{i,j+1} = U_{i,j+1} - e_{i,j+1} \quad , \quad u_{i-1,j+1} = U_{i-1,j+1} - e_{i-1,j+1}$$

$$u_{i+1,j} = U_{i+1,j} - e_{i+1,j} \quad , \quad u_{i,j} = U_{i,j} - e_{i,j}$$

$$u_{i-1,j} = U_{i-1,j} - e_{i-1,j}$$

Bu ifadeler (3.20) denkleminde yazılırsa ,

$$-r\alpha[(U_{i+i,j+1} - e_{i+1,j+1})^m - 2(U_{i,j+1} - e_{i,j+1})^m + (U_{i-1,j+1} -$$

$$e_{i-1,j+1})^m] + (U_{i,j+1} - e_{i,j+1}) = r(1-\alpha)[(U_{i+1,j} - e_{i+1,j})^m$$

$$- 2(U_{i,j} - e_{i,j})^m + (U_{i-1,j} - e_{i-1.j})^m] + (U_{i,j} - e_{i,j}) \tag{3.21}$$

bulunur.

$$(U-e)^m = U^m - mU^{m-1} e + ...$$

Newton-Binom açılımından üçüncü ve daha sonraki terimler $e^2, e^3, ...$ çok küçük olduğundan ihmal edilirse (3.21) açılımı

$$r\alpha mU^{m-1}_{i+1,j+1} e_{i+1,j+1} - (1+2rm\alpha U^{m-1}_{i,j+1})e_{i,j+1} + rm\alpha U^{m-1}_{i-1,j+1} e_{i-1,j+1}$$

$$= (r\alpha U^m_{i+1,j+1} - 2r\alpha U^m_{i,j+1} + r\alpha U^m_{i-1,j+1} - U_{i,j+1}) + \{ r(1-\alpha)U^m_{i+1,j}$$

$$- 2r(1-\alpha)U^m_{i,j} + r(1-\alpha)U^m_{i-1,j} + U_{i,j} \} + \{ -rm(1-\alpha)U^{m-1}_{i+1,j} e_{i+1,j}$$

$$+ (2r(1-\alpha)mU^{m-1}_{i,j} - 1) e_{i,j} - r(1-\alpha)U_{i-1,j} e_{i-1,j} \} \tag{3.22}$$

elde edilir. Taylor açılımından ; $0<\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5<1$

$$U^m_{i+1,j+1} = U^m_{i,j+1} + hU^m_{x(i,j+1)} + \frac{h^2}{2!} U^m_{xx(x_i+\theta_1 h,t_{j+1})} + ...$$

$$U^m_{i-1,j+1} = U^m_{i,j+1} - hU^m_{x(i,j+1)} + \frac{h^2}{2!} U^m_{xx(x_i-\theta_2 h,\, t_{j+1})} - \dots\dots$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + kU_{t(x_i\,,\; t_j+\theta_3 k)} + \dots\dots\dots$$

$$U^m_{i+1,j} = U^m_{i,j} + hU^m_{x(i,j)} + \frac{h^2}{2!} U^m_{xx(x_i+\theta_4 h,\, t_j)} + \dots\dots$$

$$U^m_{i-1,j} = U^m_{i,j} - hU^m_{x(i,j)} + \frac{h^2}{2!} U^m_{xx(x_i-\theta_5 h,\, t_j)} - \dots\dots$$

elde edilen bu ifadeler (3.22) denkleminde yerine konursa

$$(1+2rm\alpha U^{m-1}_{i,j+1})\, e_{i,j+1} = rm\alpha U^{m-1}_{i+1,j+1}\, e_{i+1,j+1} + r\alpha m U^{m-1}_{i-1,j+1}\, e_{i-1,j+1} + rm(1-\alpha)U^{m-1}_{i+1,j}\, e_{i+1,j} - (2r(1-\alpha)mU^{m-1}_{i,j} - 1)\, e_{i,j} +$$

$$rm(1-\alpha)U^{m-1}_{i-1,j}\, e_{i-1,j} + k\{\, U_{t(x_i,t_j+\theta_3 k)} - U^m_{xx(x_i+\theta_6 h,\, t_j)} \}$$

$$-1< \theta_6 <1 \qquad (3.23)$$

denklemi elde edilir. u≥0 ve tüm (i,j) 'ler için köşeli parantez içindeki ifadenin maksimum modülünü M ile gösretelim

$$(1+2rm\alpha U_{i,j+1}^{m-1})\,|e_{i,j+1}| \le rm\alpha U_{i+1,j+1}^{m-1}\,|e_{i+1,j+1}| + rm\alpha U_{i-1,j+1}^{m-1}$$

$$|e_{i-1,j+1}| + rm(1-\alpha)U_{i+1,j}^{m-1}\,|e_{i+1,j}| - (2r(1-\alpha)mU_{i,j}^{m-1} - 1)$$

$$|e_{i,j}| + rm(1-\alpha)U_{i-1,j}^{m-1}\,|e_{i-1,j}| + kM \qquad (3.24)$$

(3.24) denkleminin tüm terimlerinin sıfırdan büyük yada eşit olması için $e_{i,j}$ teriminin katsayısının sıfırdan küçük yani,

$$2r(1-\alpha)mU_{i,j}^{m-1} - 1 \le 0 \quad \text{olması gerekir.}$$

$$2r(1-\alpha)mU_{i,j}^{m-1} \le 1$$

$$r \le \frac{1}{2(1-\alpha)mU_{i,j}^{m-1}} \qquad (3.25)$$

$r = k/h^2$ ifadesinde h, x'in adım uzunluğu, k, t 'nin adım uzunluğu pozitif ve m>0 olduğundan r>0 dir.Bu durumda (3.25) eşitsizliği m>0 ve $0<\alpha<1$ olup

$$0 < r \le \frac{1}{2(1-\alpha)mU_{i,j}^{m-1}} \qquad (3.26)$$

şekline girer ki bu ağırlıklı ortalama sonlu fark denklemi için bir yakınsaklık kriteridir.

Diğer taraftan (3.24) denkleminde $E_j = \max_j |e_{i,j}|$ ile gösterelim. A bir sabit olmak üzere

$$m\alpha U_{i+1,j+1}^{m-1} = m\alpha U_{i-1,j+1}^{m-1} = m(1-\alpha)U_{i+1,j}^{m-1} = m(1-\alpha)U_{i-1,j}^{m-1} \geq A$$

olsun. Bu durumda (3.24) denklemi

$$(1+2rA)E_{j+1} \leq rAE_{j+1} + rAE_{j+1} + rAE_j - (2rA-1)E_j + rAE_j + kM$$

yazılırsa

$E_{j+1} \leq E_j + kM$ elde edilir. Buradan

$$E_{j+1} \leq E_j + kM \leq E_{j-1} + 2kM \leq \ldots \leq E_0 + jkM = tM$$

yazılabilir. Başlangıç değerleri u ve U için ayni olup sıfır hatalı olduğundan $h \longrightarrow 0$, $k \longrightarrow 0$ ve $M \longrightarrow (U^m_t - U^m_{xx})$ ye gider. U, $U_t = U^m_{xx}$ denkleminin çözümü olduğundan $M \longrightarrow 0$ gider ve sonuçta

$$E_j \geq |U_{i,j} - u_{i,j}| \qquad \text{ve} \qquad u \longrightarrow U \quad \text{olur.}$$

Bu ise (3.7) denkleminin ağırlıklı ortalama yaklaşımıyla

$$r \leq \frac{1}{2(1-\alpha)mU_{i,j}^{m-1}}$$

şartı altında yakınsak olduğunu gösterir.

4.4. $U_t = c\, U_{xx}^{a+1}$ DENKLEMİNİN ÜÇ ZAMAN SEVİYELİ EXPLİCİT METODLA STABİLİTE VE YAKINSAKLIĞI

4.1. ÜÇ ZAMAN SEVİYELİ EXPLİCİT METOD

Parabolik denklemlerin sonlu farklarla çözümünde genellikle iki zaman seviyesi kullanılır. Bunun yanında üç veya daha fazla zaman seviyeleri kullanılabilir ki bu bazı avantajlar sağlamak için yapılır. Lokal kesme hatasını küçültmek, daha kuvvetli bir stabilite elde etmek gibi.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c\,\frac{\partial^2 U^{a+1}}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

$U(x,0) = \text{Sabit} \quad , \quad 0 \le x \le 1 \quad , \quad t=0$

$U(0,t) = k_1 . t \quad , \quad t>0$

denkleminde a=0 lineer durumu için üç zaman seviyeli Explicit metodun denklemini yazalım.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 1/2k\,(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 1/h^2\,(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

$$1/2k\,(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = c/h^2\,(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \tag{4.2}$$

(4.2) denklemi r 'in bütün değerleri için stabil olmadığından bu denklem yerine r 'nin bütün değerleri için şartsız stabil olan Du Fort-Frankel denklemini yazalım. (4.2) denklemindeki $u_{i,j}$ terimi yerine

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

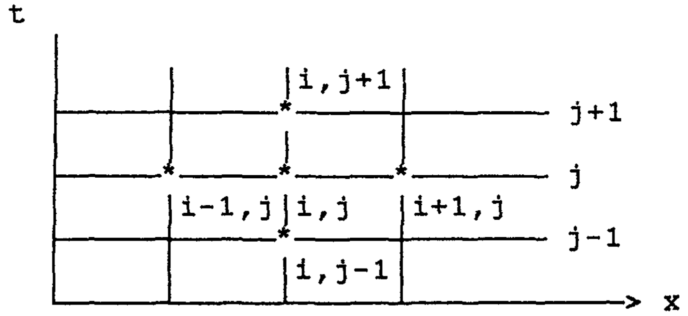
averaj yaklaşımını yazalım.

$$1/2k\,(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = c/h^2\,(u_{i+1,j} - (u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) + u_{i-1,j})$$

$r=kc/h^2$ ve denklem düzenlenirse ,

$$(1+2r)u_{i,j+1} = 2r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (1-2r)u_{i,j-1} \qquad (4.3)$$

bulunur. Denklem j+1,j,j-1 zaman seviyelerini içerdiğinden üç zaman seviyeli Du Fort-Frankel explicit denklemi olarak bilinir. Bu yöntemin parabolik denklemlere uygulanmak istenirse birinci zaman yani j=0 zaman seviyesinde çözümün başka bir metodla hesaplanması gerekir.Seçilen metodun üç zaman seviyeli metodla ayni doğrulukta olması gerekir. Üç zaman seviyeli yöntemde uygulamaya $u_{i,2}$ yani j=1 'ci zaman seviyesinden başlanır.



Şekil.4.1. Üç zaman seviyeli sonlu fark şeması

4.2. $U_t = c\, U_{xx}^{a+1}$ DENKLEMİNİN ÜÇ ZAMAN SEVİYELİ EXPLİCİT METODLA STABİLİTESİ

(4.1) denklemi için üç zaman seviyeli explicit sonlu fark denklemini yazalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1/2k\,(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})$$

$$\frac{\partial^2 U^{a+1}}{\partial x^2} = 1/h^2\,(u^{a+1}_{i+1,j} - 2u^{a+1}_{i,j} + u^{a+1}_{i-1,j})$$

$$r = ck/h^2 \quad \text{ve} \quad u^{a+1}_{i,j} = \frac{1}{2}\,(u^{a+1}_{i,j-1} + u^{a+1}_{i,j+1})$$

olmak üzere

$$u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 2r[\, u^{a+1}_{i-1,j} - u^{a+1}_{i,j-1} - u^{a+1}_{i,j+1} + u^{a+1}_{i+1,j} \,]$$

bulunur. Denklem düzenlenirse

$$u_{i,j+1} + 2ru^{a+1}_{i,j+1} = 2r(\, u^{a+1}_{i-1,j} + u^{a+1}_{i+1,j} \,) - 2ru^{a+1}_{i,j-1} + u_{i,j-1} \qquad (4.4)$$

elde edilir. Denklemin stabilitesini göstermek için $u^{a+1}_{i,j+1}$ teriminin bir alt zaman seviyesinden alınması gerekir. Bu nedenle $u^{a+1}_{i,j+1}$ terimini taylor serisine açalım.

$$u^{a+1}_{i,j+1} = u^{a+1}_{i,j} + k u^{a+1}_{t(i,j)} + \frac{k^2}{2!} u^{a+1}_{tt(i,j)} + \ldots\ldots.$$

ikinci terimden sonraki terimler ihmal edilirse

$$u^{a+1}_{i,j+1} = u^{a+1}_{i,j} + k u^{a+1}_{t(i,j)} \qquad (4.5)$$

$$u^{a+1}_{i,j+1} = u^{a+1}_{i,j} + k(a+1)\, u^{a}_{i,j} \,.\, u_{t(i,j)}$$

$u_{t(i,j)}$ teriminin değeri yerine yazılıp denklem düzenlenirse

$$u^{a+1}_{i,j+1} = u^{a+1}_{i,j} + \frac{(a+1)}{2} u^{a}_{i,j}\, u_{i,j+1} - \frac{(a+1)}{2} u^{a}_{i,j}\, u_{i,j-1} \qquad (4.6)$$

elde edilir. Bu ifade (4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$(1+r(a+1)u^{a}_{i,j})\,u_{i,j+1} = 2r(\,u^{a+1}_{i-1,j} + u^{a+1}_{i+1,j}\,) - 2ru^{a+1}_{i,j-1} -$$

$$2ru^{a+1}_{i,j} + (1+r(a+1)u^{a}_{i,j})\,u_{i,j-1} \qquad (4.7)$$

bulunur. $c = \max u^{a}_{i,j}$ olarak alalım ve (4.7) ifadesini matris şeklinde düzenlersek

$$u_{j+1} = \frac{2r}{(1+rc(a+1))}Au^{a+1}_{j} - \frac{2r}{(1+rc(a+1))}u^{a+1}_{j-1} - \frac{2r}{(1+rc(a+1))}u^{a+1}_{j} + u_{j-1}$$

$$(4.8)$$

üç zaman seviyeli stabilite denklemi elde edilir.Bu denklemin iki zaman seviyesine indirgenip incelenmesi gerekir. Buradan (4.8) denklemi

$$\left[\begin{array}{c} u_{j+1} \\ \hline u^{a+1}_{j} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{2rA}{(1+rc(a+1))} & \dfrac{-2r}{(1+rc(a+1))} \\ \hline I & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u^{a+1}_{j} \\ \hline u^{a+1}_{j-1} \end{array}\right] +$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \dfrac{-2r}{(1+rc(a+1))} & I \\ \hline 0 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u^{a+1}_{j} \\ \hline u_{j-1} \end{array}\right]$$

şeklinde yazılabilir. Bu matris formu daha kısa olarak

$$V_{j+1} = DV_j + C_j$$

ifade edilebilir. Sonlu fark denkleminde j sınırsız olarak arttığında hata artmıyor veya belli bir değerden küçük kalıyorsa stabil olacaktır. Bu araştırma D matrisinin özdeğerlerindeki hata vektörünün ifadesiyle yapılır. Hata vektörü ile özdeğerler arasındaki ilişki bölüm üçte verilmiştir.Bu yüzden D matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & & . & & . & \\ & . & & . & & . \\ & 0 & . & & . & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_k = a+2(bc)^{1/2}.\mathrm{Cos}\frac{k\pi}{2N} \quad , \qquad k = 1,2,\ldots N-1$$

bağıntısından ,

$$\lambda_k = 2\ \mathrm{Cos}\frac{k\pi}{2N} \qquad (4.9)$$

bulunur. Bu özdeğerler D matrisinde yerine yazılırsa

$$D = \begin{bmatrix} \dfrac{4rCosk\pi/2N}{(1+rc(a+1))} & \dfrac{-2r}{(1+rc(a+1))} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. D matrisinin özdeğerleri $|D-\lambda I| = 0$ bağıntısından kolayca hesaplanabilir.

$$\lambda^2 - \frac{4rCosk\pi/2N}{(1+rc(a+1))}\lambda + \frac{2r}{(1+rc(a+1))} = 0 \qquad (4.10)$$

Hataların artmaması için $|\lambda_s| \leq 1$ olması gerekir.

$$\lambda = \frac{4rCos\,k\pi/2N \pm [16r^2 Cos^2 k\pi/2N - 8r(1+rc(a+1))]^{1/2}}{2(1+rc(a+1))}$$

$$|\lambda| = \left| \frac{4rCos\,k\pi/2N \pm [16r^2 Cos^2 k\pi/2N - 8r(1+rc(a+1))]^{1/2}}{2(1+rc(a+1))} \right| \leq 1$$

$a = 0$, $a = -0.2$, $a = 0.37$, $c = \mathrm{Max}U^a_{i,j}$, $|Cos\,k\pi/2N| \leq 1$ için

$$16r^2 Cos^2 k\pi/2N - 8r(1+rc(a+1)) \leq 0 \qquad \text{ise}$$

$$|\lambda|^2 = \left| \frac{4rCos^2 k\pi/2N \pm [2r(1+rc(a+1)) - 4rCos^2 k\pi/2N]}{(1+rc(a+1))^2} \right| \leq 1$$

alınırsa

$$\frac{1}{3} \leq r \leq 1 \qquad (4.11)$$

bulunur. Bu (4.1) denklemi için üç zaman seviyeli Du Fort-Frankel explicit yaklaşımı için bir stabilite kriteridir.

4.3. $U_t = c\, U_{xx}^{a+1}$ DENKLEMİNİN ÜÇ ZAMAN SEVİYELİ EXPLİCİT METODLA YAKINSAKLIĞI

(4.1) denklemi için

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1/2k\,(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})$$

$$\frac{\partial^2 u^{a+1}}{\partial x^2} = 1/h^2\,(u^{a+1}_{i-1,j} - 2u^{a+1}_{i,j} + u^{a+1}_{i+1,j})$$

$$u^{a+1}_{i,j} = 1/2\,(u^{a+1}_{i,j+1} + u^{a+1}_{i,j-1}) \qquad \text{ve}$$

$r=ck/h^2$ olmak üzere

$$u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 2r(u^{a+1}_{i-1,j} - u^{a+1}_{i,j+1} - u^{a+1}_{i,j-1} + u^{a+1}_{i+1,j}) \qquad (4.12)$$

üç zaman seviyeli Du Fort-Frankel explicit sonlu fark denklemi elde edilir. Sonlu fark yaklaşımlarının yakınsama problemi ağ noktalar üzerinde sonlu fark çözümü ile diferansiyel denklemin analitik çözümü arasındaki farkın incelenmesiyle araştırılır. U tam çözümü, u 'da yaklaşık çözümü göstermek üzere ikisi arasındaki farkı

$$e = U - u$$

$$u = U - e$$

şeklinde yazalım ve bunu ağ noktalar üzerinde ifade edelim.

$$u_{i,j+1} = U_{i,j+1} - e_{i,j+1} \quad , \quad u_{i,j-1} = U_{i,j-1} - e_{i,j-1}$$

$$u_{i+1,j} = U_{i+1,j} - e_{i+1,j} \quad , \quad u_{i,j} = U_{i,j} - e_{i,j}$$

$$u_{i-1,j} = U_{i-1,j} - e_{i-1,j}$$

Bu ifadeleri (4.4) denkleminde yazalım;

$$U_{i,j+1} - e_{i,j+1} - U_{i,j-1} + e_{i,j-1} = 2r[\,(U_{i-1,j} - e_{i-1,j})^{a+1} -$$

$$(U_{i,j+1} - e_{i,j+1})^{a+1} - (U_{i,j-1} - e_{i,j-1})^{a+1} + (U_{i+1,j} - e_{i+1,j})^{a+1} \tag{4.13}$$

$(U-e)^{a+1}$ ifadelerinin Newton-Binom açılımını yapalım.

$$(U-e)^{a+1} = U^{a+1} - (1+a)U^{a}e + \frac{a(1+a)}{2!}U^{a-1}e^{2} + \ldots. \tag{4.14}$$

üçüncü ve daha sonraki terimler $e^2, e^3, \ldots,$ çok küçük olduğundan ihmal edilirse

$$(U-e)^{a+1} = U^{a+1} - (1+a)\, U^{a} e$$

bulunur. Bu ifadeyi (4.5) denkleminde yerine yazılırsa;

$$U_{i,j+1} - U_{i,j-1} - e_{i,j+1} + e_{i,j-1} = 2r\{ U^{a+1}_{i-1,j} - (1+a)U^{a}_{i-1,j}\, e_{i-1,j} - U^{a+1}_{i,j+1} + (1+a)U^{a}_{i,j+1}\, e_{i,j-1} - U^{a+1}_{i,j-1} + (1+a)U^{a}_{i,j-1}\, e_{i,j+1} + U^{a+1}_{i+1,j} - (1+a)U^{a}_{i+1,j}\, e_{i+1,j} \} \qquad (4.15)$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$-[\, 1+2r(1+a)U^{a}_{i,j+1} \,]\, e_{i,j+1} = 2r\{ U^{a+1}_{i-1,j} - U^{a+1}_{i,j+1} - U^{a+1}_{i,j-1} + U^{a+1}_{i+1,j} \} + U_{i,j-1} - U_{i,j+1} - 2r(1+a)U^{a}_{i-1,j}\, e_{i-1,j} + [\, -1+2r(a+1)U^{a}_{i,j-1} \,]\, e_{i,j-1} - 2r(1+a)U^{a}_{i+1,j}\, e_{i+1,j} \qquad 4.16)$$

bulunur.

Taylor açılımından ; $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6 < 1$

$$U^{a+1}_{i,j-1} = U^{a+1}_{i,j} - kU^{a+1}_{t(x_i, t_j - \theta_1 k)} + \ldots\ldots.$$

$$U^{a+1}_{i,j+1} = U^{a+1}_{i,j} + kU^{a+1}_{t(x_i\,,\, t_j + \theta_2\, k)} + \ldots\ldots..$$

$$U^{a+1}_{i+1,j} = U^{a+1}_{i,j} + hU^{a+1}_{x(i,j)} + \frac{h^2}{2!} U^{a+1}_{xx(x_i + \theta_3 h, t_j)} + \ldots$$

$$U^{a+1}_{i-1,j} = U^{a+1}_{i,j} - hU^{a+1}_{x(i,j)} + \frac{h^2}{2!} U^{a+1}_{xx(x_i-\theta_4 h,t_j)} + \ldots\ldots$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + kU_{t(x_i,t_j+\theta_5 k)} + \ldots\ldots.$$

$$U_{i,j-1} = U_{i,j} - kU_{t(x_i,t_j-\theta_6 k)} + \ldots\ldots$$

bu ifadeleri (4.9) denkleminde yazarsak; $-1 < \theta_7,\theta_8 < 1$

$$-[1+2r(1+a)U^{a+1}_{i,j+1}]\, e_{i,j+1} = -2r(1+a)U^a_{i-1,j}\, e_{i-1,j} + [-1+2r(1+a)\, u^a_{i,j-1}]\, e_{i,j-1} - 2r(1+a)U^a_{i+1,j}\, e_{i+1,j} + \{ 2rh^2U^{a+1}_{xx(x_i+\theta_7 h,t_j)} - 2kU_{t(x_i,t_j+\theta_8 k)} \} \quad (4.17)$$

bulunur. $U\geq 0$ ve tüm (i,j) 'ler için köşeli parantez içindeki ifadenin maksimum modülünü M ile gösterelim.

$$(1+2r(1+a)U^a_{i,j+1})\,|e_{i,j+1}| \leq 2r(1+a)U^a_{i-1,j}\,|e_{i-1,j}| - (-1+2r(1+a)U^a_{i,j-1})\,|e_{i,j-1}| + 2r(1+a)U^a_{i+1,j}\,|e_{i+1,j}| + 2kM$$

(4.18)

(4.18) denkleminin tüm terimlerinin sıfırdan büyük yada eşit olması için $e_{i,j-1}$ teriminin katsayısının sıfırdan küçük yani,

$$-1+2r(a+1)U^{a}_{i,j-1} \leq 0 \tag{4.19}$$

olması gerekir.

$$2r(a+1)U^{a}_{i,j-1} \leq 1$$

$$r \leq \frac{1}{2(a+1)U^{a}_{i,j-1}} \tag{4.20}$$

$r = ck/h^2$ ifadesinde h, x'in adım uzunluğu, k, t'nin adım uzunluğu pozitif ve $c \geq 0$ olduğundan $r>0$ dir.Bu durumda (4.20) eşitsizliği

$$0 < r \leq \frac{1}{2(a+1)U^{a}_{i,j-1}} \tag{4.21}$$

şekline girer. $-1 < a < 1$ ve $U^{a}_{i,j-1} \geq 0$ olup (4.21) ifadesi üç seviyeli Du Fort-Frankel explicit denklemi için bir yakınsaklık kriteridir.

Diğer taraftan (4.18) denkleminde $E_j = \max_j |e_{i,j}|$ ile gösterelim. A bir sabit olmak üzere

$$(1+a)U^{a}_{i,j+1} = (1+a)U^{a}_{i,j-1} = (1+a)U^{a}_{i+1,j} = (1+a)U^{a}_{i-1,j} \geq A$$

ile gösterelim. Bu durumda (4.18) denklemi

$$(1+2rA)E_{j+1} \le 2rAE_{j} - (-1+2rA)E_{j-1} + 2rAE_{j} + 2kM \qquad (4.22)$$

şekline girer. Denklem düzenlenirse

$$E_{j+1} \le \frac{4rA}{1+2rA} E_{j} - \frac{(2rA-1)}{(1+2rA)} E_{j-1} + \frac{2}{1+2rA} kM \qquad (4.23)$$

üç zaman seviyeli explicit hata denklemi elde edilir. Bu tür denklemler zaman seviyesi ikiye düşürülerek incelenir.

$$\begin{bmatrix} E_{j+1} \\ \hline E_{j} \end{bmatrix} \le \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{4rA}{1+2rA} & -\dfrac{2rA-1}{1+2rA} \\ \hline I & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} E_{j} \\ \hline E_{j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2}{1+2rA} \\ \hline 0 \end{bmatrix} . kM$$

(4.23) denklemi matris özellikleri kullanılarak iki zaman seviyesine indirgenirse (4.24) denklemi elde edilir. Buradan

$$E_{j+1} \le DE_{j} + bkM \qquad (4.24)$$

$$E_{j+1} \le DE_{j} + bkM \le D^2E_{j-1} + 2b^2kM \le \ . \ . \ . \le D^jE_0 + b^jjkM = tM$$

yazılabilir. Başlangıç değerleri u ve U için ayni olduğundan $E_0 = 0$ dır. Bu durumda başlangıç değerleri sıfır hatalı olacağından $h \longrightarrow 0$, $k = rh^2/c \longrightarrow 0$ ve $M \longrightarrow (U_t - U^{a+1}_{xx})$ ye gider. U , $U_t = U^{a+1}_{xx}$ denkleminin çözümü olduğundan $M \longrightarrow 0$ gider ve sonuçta

$$E_j \geq |U_{i,j} - u_{i,j}| \qquad \text{ve} \qquad u \longrightarrow U \qquad \text{olur.}$$

Bu ise (4.1) denkleminin üç zaman seviyeli Du Fort-Frankel explicit sonlu fark metodunun $-1 < a < 1$ olmak üzere

$$r \leq \frac{1}{2(a+1)U^{a}_{i,j-1}} \tag{4.25}$$

şartı ile yakınsak olduğunu gösterir.(4.1) deklemi bu yakınsaklık kriteri altında Richtmayer Linerizasyon metoduyla kolayca çözülebilir.

TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında $U_t=U^m_{xx}$ ve $U_t=U^{a+1}_{xx}$ denklemlerinin sonlu farklarla stabilite ve yakınsaklığı incelenmeye çalışıldı.

Denklemler sonlu fark yaklaşımları ile ifade edilirse

$U_t=U^m_{xx}$ denklemi için

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = r[\, \alpha\, \delta^2_x u^m_{i,j+1} + (1-\alpha)\, \delta^2_x u^m_{i,j} \,]$$

$U_t=U^{a+1}_{xx}$ denklemi için de

$$u_{i,j+1} + 2ru^{a+1}_{i,j+1} = 2r(\, u^{a+1}_{i-1,j} + u^{a+1}_{i+1,j} \,) - 2ru^{a+1}_{i,j-1} + u_{i,j-1}$$

denklemleri bulunur. Sonlu fark denklemlerine bakıldığında ayni zaman seviyesinde bir terimin lineer ve nonlineer durumuyla karşılaşılır. Stabiliteyi ifade ederken h ve k aralıkları arasında en az hatayı verecek bir oran arandığından j'ci zaman seviyesindeki terimler bir tarafta j+1'ci terimler diğer tarafta gruplandırılır. Ayni zaman seviyesinde ayni terimin lineer ve nonlineer durumu meydana gelmesi bu gruplandırmayı yapmakta güçlük yaratacaktır. Bu nedenle bu nonlineer terimler lineerleştirilerek bu linerize terimler asıl denklemde yerine yazılmış ve stabilitede bu linerize terimlerden oluşan denklem kullanılmıştır.

Bu sebepten, yukarıda belirtilen denklemlerin stabilitelerinin sonlu fark denklemlerinin linerize etmeden ve linerize ettikten sonraki stabilitelerinin ayni olup olmadığının gösterilmesi gerekir.

KAYNAKLAR

1- Ross, S.L., 1974, Differenatil Equations, John Wiley and Sons,inc.,1-5,USA

2- Simit, G.D. 1978, Numerical solution of Partial Differential Equations, Clarendon Press.,27-115, Oxford.

3- Ames, W.F., 1969, Numerical Methods for Partial Differential Equations,Thomos Nelson and Sons LTD.,1-84,London

4- Çelebi, O., 1976, Kismi Türevli Denklemler, Ankara Üniversitesi,1-14, Ankara.

5- Marşoğlu, M., Marşoğlu, A., Çağal, B., Laserle Işınlamda Sıcaklık Dağılımı. Yıldız Üni. Dergisi, 1984/1, 32-42

6- Marşoğlu, M., Marşoğlu, A., Çağal, B., Laserle Işınlamda Sıcaklık Dağılımı. Yıldız Üni. Dergisi, 1985/4,69-76

7- Garabedian, P.R., 1964, Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, inc.,458-497,New York

8- Carslaw, H.S., Jacger, J.C., 1973, Conductivity of Heat in solids, Oxford Univ. Press,62-64,Cambridge

9- Greenspan, Donald, 1974, Discrete Numerical Methods in Physics and Engineering,118-151, Academic Press

10- Mitchell, A.R.,1969, Computational Methods in Partial Differential Equations.,John Wiley and S.LTD.17-95

11- Çağal,B.,1989,Sayısal Analiz,Seç Kitap Dağıtım,44-81, İstanbul

12- Ziya, A., Öncül, H., Ural, S., 1981 Sayısal Çözümleme, Orta Doğu Teknik Üniv.,263-266, Ankara.

13- Babuska,I.Prager,M.Vitasek,E.,1966,Numerical Processes in Differential Equations, John Wiley and Sons,307-340

14- Ames, W.F., 1965, Nonlineer Partial Differential Equations in Engineering,Academic Press,315-355.

15- Fried,I.,1979,Numerical Solution of Differential Equations,Academic Press,3-11,New York

16- Myint-u,T.,1973,Partial Differential Equations of Mathematical Fhysics,Elsevier Publishing Comp.,25-38

17- Cannon, J.R, 1984, the One-Dimensional Heat Equations, Addison-Wesley Publishing Company,13-24,Washington

18- Bender, Carl, M. Orszag, Steven A., 1978 Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill,20-24.

19- Frederic,H.M.,1958,Partial Differential Equations , John Wiley & Sons,215-227.

20- Murray,R.,Spiegel Ph.D.,1971,Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations, McGraw-Hill,1-25

21- Scheid,F.,1968,Theory and Problems of Numerical Analysis, McGraw-Hill,193-206

22- Aşkar, A., 1987 Methods in Applied and Analysis, Boğaziçi Üniversitesi Yayınları,455-499, İstanbul

23- Stark, Peter A., 1970, Introduction to Numerical Methods, The Macmilllan Company,1-23

24- Aydın, M., Gündüz, G. Kuryel, B., 1987, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları,E.Üniv.Müh.Fak.,1-9,İzmir.

25- Güzel, N.,1991, Laserle Işınlamada Sıcaklık Dağılımı, Yıldız Üniv., İstanbul

Ö Z G E Ç M İ Ş

1967 yılında Doğan Köy de dünyaya geldi. Sırasıyla Doğan Köy ilkokulu, Malkara Ortaokulu ve Lisesini bitirdikten sonra Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne 1984 de kaydoldu ve bu bölümden 1988 yılında mezun oldu. Halen Trakya Üniversitesi Bilgisayar Araştırma ve Uygulama Merkezinde Bilgisayar işletmeni olarak çalışmaktadır.